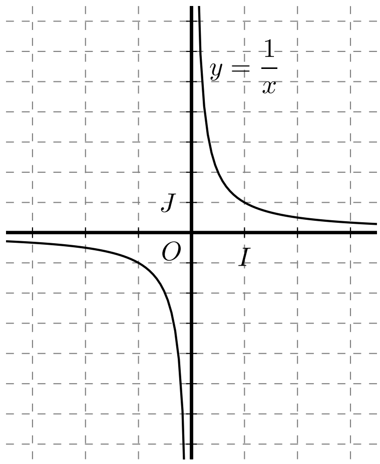
II - Fonction inverse



- La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
- La courbe représentative de cette fonction est une **hyperbole**.
- Pour tout réel x, $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ donc la fonction inverse est **impaire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'origine pour centre de symétrie**.
- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

<u>Conséquence des variations de la fonction inverse :</u>
La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b **de même signe**, $a < b$ équivaut à $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (l'application de la fonction **change** l'ordre).

<u>Exemple :</u> Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $\frac{1}{2{,}48}$ et $\frac{1}{4{,}75}$
- $\frac{1}{-2{,}8}$ et $\frac{1}{-4{,}1}$
- $\frac{1}{\pi}$ et $\frac{3}{10}$

<u>Solution :</u> On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction inverse.

- $2{,}48 < 4{,}75$ ainsi $\frac{1}{2{,}48} > \frac{1}{4{,}75}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
- $-2{,}8 > -4{,}1$ ainsi $\frac{1}{-2{,}8} < \frac{1}{-4{,}1}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
- $\pi < \frac{10}{3}$, ainsi $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{\frac{10}{3}} \iff \frac{1}{\pi} > \frac{3}{10}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

<u>Propriété :</u> Soit a un nombre réel non nul. L'unique solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation $\frac{1}{x} = a$ est $\frac{1}{a}$.

<u>Exemple :</u> Résoudre l'équation $\frac{3}{x-1} = 7$

<u>Solution :</u> Cette équation est définie lorsque $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$. Donc on résout l'équation sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Dans ce cas, $\frac{3}{x-1} = 7 \iff \frac{1}{x-1} = \frac{7}{3}$ (en divisant par 3 de chaque côté de l'égalité).
On obtient ensuite $x - 1 = \frac{1}{\frac{7}{3}} \iff x - 1 = \frac{3}{7}$ en appliquant la fonction inverse.
On en déduit que $x = \frac{3}{7} + 1 = \frac{10}{7}$.
Donc $\frac{10}{7}$ est l'unique solution de cette équation.