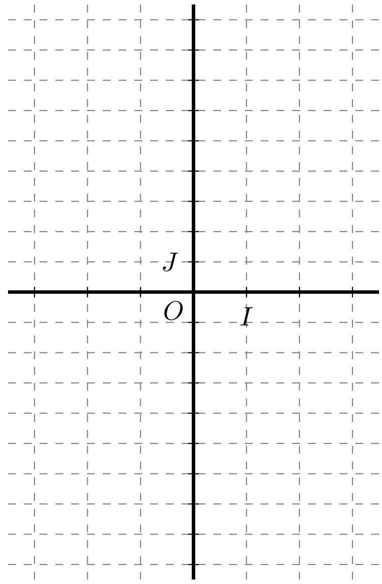
Chapitre XI : Autres fonctions de référence

I - Fonction cube

a) Définition et représentation



- La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$ donc la fonction cube est **impaire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'origine pour centre de symétrie**.
- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, construire ci-contre le plus précisément possible la courbe représentative de la fonction cube :

Conséquence des variations de la fonction cube :
La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tous réels a et b
$a < b$ équivaut à $a^3 < b^3$ (l'application de la fonction ne **change** pas l'ordre).

Exemple : Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $2{,}125^3$ et $3{,}478^3$
- $(-1{,}4)^3$ et $(-2{,}7)^3$
- π^3 et $\left(\dfrac{10}{3}\right)^3$

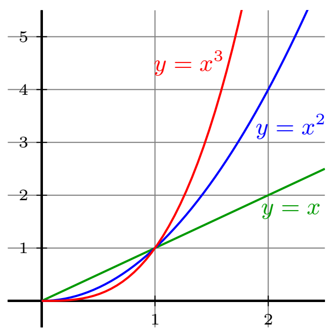
Solution : On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction cube.

- $2{,}125 < 3{,}478$ ainsi $2{,}125^3 < 3{,}478^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $-1{,}4 > -2{,}7$ ainsi $(-1{,}4)^3 > (-2{,}7)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\pi < \dfrac{10}{3}$, ainsi $\pi^3 < \left(\dfrac{10}{3}\right)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit x un réel positif.

- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x = x^2 = x^3$.

Cette propriété se vérifie par la position relative des courbes représentant ces fonctions sur chacun de ces intervalles :



b) Équations et inéquations

Théorème : Soit a un nombre réel. L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\sqrt[3]{a}$ et appelée la **racine cubique** de a.

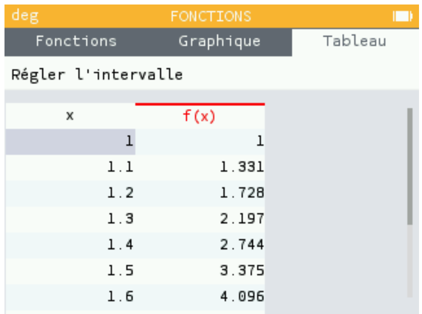
Par exemple la solution de $x^3 = 27$ est 3 car $3^3 = 27$; 3 est la racine cubique de 27.
La solution de $x^3 = -125$ est -5 car $(-5)^3 = -125$; -5 est la racine cubique de -125.

La solution de l'équation $x^3 = 2$ est le nombre réel $\sqrt[3]{2}$ qui n'est pas un nombre entier (pas plus rationnel). On peut chercher une valeur approchée de ce nombre à l'aide d'un algorithme.
Il existe deux méthodes générales sachant qu'on peut déjà facilement encadrer ce nombre par deux entiers. En effet $1^3 < 2 < 2^3$ (encadrement de 2 par les cubes de deux entiers consécutifs) donc $1 < \sqrt[3]{2} < 2$.

- **Méthode par balayage**

  Cette méthode consiste à parcourir l'intervalle $[1\,;\,2]$ avec un certain pas et s'arrêter dès qu'on dépasse la valeur souhaitée (ici quand le cube sera supérieur à 2). On peut choisir de mettre le pas comme argument de la fonction :

```python
def balayage(pas):
    a=1
    while a**3<2:
        a=a+pas
    return a
```



x	f(x)
1	1
1.1	1.331
1.2	1.728
1.3	2.197
1.4	2.744
1.5	3.375
1.6	4.096

Cela se représente très facilement avec le tableau de valeurs de la calculatrice (par exemple pour `pas`=0.1 :

Le parcours de l'algorithme lorsqu'on demande `balayage(0.1)` nous donne (tableau à compléter) :

Valeur de `a`	Test `a**3<2`

`balayage(0.1)` renvoie donc la valeur ....

- **Méthode par dichotomie** - *pour ceux qui seraient plus à l'aise avec les algorithmes*

  Cette méthode consiste à approcher de plus en plus la solution d'une équation en la positionnant par rapport au centre de l'intervalle. Ceci permet de diviser l'intervalle dans lequel elle se trouve par 2 à chaque étape. Lorsque cette fonction s'arrête la longueur de l'intervalle est inférieur à un certain seuil qui peut être placé en tant qu'argument de la fonction.

```python
def dichotomie(seuil):
    a=1
    b=2
    while b-a>seuil:
        m=(a+b)/2
        if m**3>2 :
            b=m
        else :
            a=m
    return a
```

Parcours de l'algorithme quand on saisit `dichotomie(0.01)` :

`a`	`b`	`b-a>seuil`	`m`	`m**3>2`

Donc `dichotomie(0.01)` renvoie la valeur ....

.... étapes ont été nécessaires pour obtenir cette valeur approchée, alors qu'avec la méthode par balayage il aurait fallu 26 étapes pour obtenir une valeur approchée (qui aurait été un peu différente).

Dans les deux cas, la valeur obtenue est une valeur approchée de la solution de $x^3 = 2$ (donc de $\sqrt[3]{2}$).
Par exemple `balayage(0.01)` ou `dichotomie(0.01)` donnent une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ à 0,01 près.

Propriété : a étant un nombre réel, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 > a$ est l'intervalle $]\sqrt[3]{a}\,; +\infty[$.

Démonstration : En effet, $\sqrt[3]{a}$ est l'unique solution de $x^3 = a$ ainsi $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. De plus la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x > \sqrt[3]{a} \iff x^3 > (\sqrt[3]{a})^3 \iff x^3 > a$.

Exemple : Résoudre l'inéquation $-2x^3 + 1 > -15$.

Solution : $-2x^3 + 1 > -15 \iff -2x^3 > -16 \iff x^3 < 8 \iff x < \sqrt[3]{8} \iff x < 2$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle $]-\infty\,; 2[$.