Chapitre X : Droites du plan

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

I - Caractérisation analytique d'une droite

a) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\,;\,2)$ et $B(4\,;\,-2)$.
On se propose de déterminer une équation de la droite (AB), c'est-à-dire de caractériser analytiquement l'ensemble des points de cette droite.

Soit $M(x\,;\,y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires équivaut à } \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-1)\times(-4) - 3\times(y-2) = 0 \\
&\iff -4x - 3y + 10 = 0 \\
&\iff -3y = 4x - 10 \iff y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

$-4x - 3y + 10 = 0$ est une **équation cartésienne** de la droite (AB).
L'**équation réduite** de cette droite est $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{10}{3}$.

Théorème : Dans le plan muni d'un repère, toute droite $\mathscr{D}$ est caractérisée par une relation de la forme $ax + by + c = 0$ appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.
Si $\mathscr{D}$ est non parallèle à l'axe des ordonnées, alors cette relation peut être écrite sous la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels constants.
On dit que $y = mx + p$ est **l'équation réduite** de la droite $\mathscr{D}$.

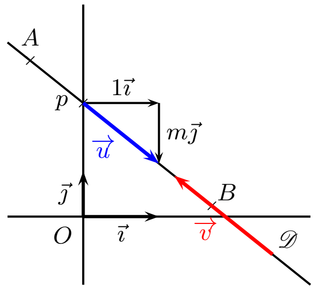
Démonstration : On considère une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées, et deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ appartenant à $\mathscr{D}$. Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. D'où :

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0 \\
&\iff x(y_B - y_A) - x_A(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + y_A(x_B - x_A) = 0.
\end{aligned}$$

Les points A et B sont distincts et la droite $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc $x_A \neq x_B$.
On peut donc écrire :
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}$ équivaut à $y = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x - x_A\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + y_A$.
On a obtenu une relation de la forme $y = mx + p$, avec $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $p = -x_A\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} + y_A$.
Cette relation caractérise alors la droite $\mathscr{D}$.

Propriété : Dans le plan muni d'un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.
Plus précisément, si $y = mx + p$ est l'équation réduite de $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{D}$ est la représentation graphique de la fonction affine $f : x \longmapsto mx + p$.

Définition : Le plan est muni d'un repère.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points quelconques d'une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées.
(AB) a ainsi une équation de la forme $y = mx + p$ où :



- $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.
- L'ordonnée du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$ avec l'axe des ordonnées est égale à p et est appelée **ordonnée à l'origine** de la droite $\mathscr{D}$.
- Tout vecteur $\vec{v}$ non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB).

Conséquences :

- Si dans un repère, une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = mx + p$, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
- Dans un repère, si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, alors m est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$, cette identification n'étant possible que **pour un vecteur directeur d'abscisse 1**.
- Si dans un repère deux points distincts A et B ont la même **ordonnée**, alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses. Son coefficient directeur est alors égal à 0, et une équation de (AB) est de la forme : $\boldsymbol{y = y_A}$.

Exercice : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne le point $A(-4\,;\,5)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Solution : Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de d (ici $\vec{v} = \dfrac{1}{3}\vec{u}$ pour avoir un vecteur directeur d'abscisse égale à 1). Le coefficient directeur de d est alors égal à $-\dfrac{2}{3}$, et une équation de d est de la forme $y = -\dfrac{2}{3}x + p$.
De plus $A(-4\,;\,5)$ est sur d, d'où $5 = -\dfrac{2}{3} \times (-4) + p \iff 5 - \dfrac{8}{3} = p \iff \dfrac{7}{3} = p$.
Donc une équation de d est $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3}$.

Exercice : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points $A(1\,;\,4)$, $B(4\,;\,0)$, $C(7\,;\,4)$.
Déterminer une équation des droites (AB) et (AC).

Solution :

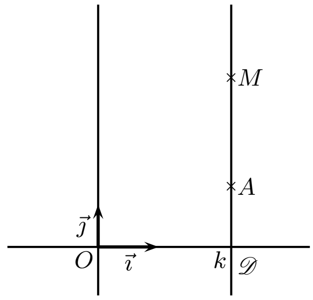
- A et B n'ont pas la même abscisse, donc une équation de (AB) est de la forme $y = mx + p$, où $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-4}{4-1} = \dfrac{-4}{3} = -\dfrac{4}{3}$.
  On obtient alors : $y = -\dfrac{4}{3}x + b$.
  De plus $A(1\,;\,4)$ est sur cette droite, d'où $4 = -\dfrac{4}{3} \times 1 + p$ ce qui donne $4 + \dfrac{4}{3} = p$ et $\dfrac{16}{3} = p$.
  Donc (AB) a pour équation $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{16}{3}$.
  Remarque : on pouvait tout à faire reprendre la méthode de l'exemple d'introduction du chapitre.
- A et C ont la même ordonnée 4, donc (AC) a pour équation $y = 4$.

Propriété : Un point A appartient à une droite d'équation $y = mx + p$ si, et seulement si, ses coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ vérifient l'équation de la droite c'est-à-dire qu'on a l'égalité $y_A = m \times x_A + p$.

b) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Théorème : Dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $x = k$, où k est un nombre réel constant.
On dit que $x = k$ est **l'équation réduite** de la droite $\mathscr{D}$.

Démonstration :
On considère une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées et un point $A(x_A\,;\,y_A)$ appartenant à $\mathscr{D}$.
Pour tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite $\mathscr{D}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{\jmath}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix} x-x_A & 0 \\ y-y_A & 1 \end{vmatrix} \iff (x-x_A)\times 1 + 0\times(y-y_A) = 0$
c'est-à-dire $x - x_A = 0$ équivaut à $x = x_A$.



Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une fonction affine (ni d'aucune fonction).

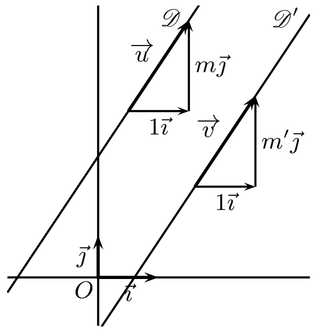
Exercice : Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $E(-2\,;\,4)$ et $F(-2\,;\,-1)$.
Quelle est l'équation réduite de la droite (EF) ?

Solution : E et F ont la même abscisse -2 donc (EF) a une équation de la forme $x = -2$.

c) Droites parallèles

Propriété : Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soient deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = mx+p$ et $y = m'x+p'$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs m et m' sont égaux.

Démonstration : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\iff 1\times m' - 1\times m = 0$
$\iff m = m'$.



Remarque : Si deux droites parallèles ont la même ordonnée à l'origine, alors elles sont confondues, sinon elles sont strictement parallèles.

Exercice : Soient d la droite d'équation $3x - 5y = 10$ et le point $A(2;4)$.
Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d et passant par A.

Solution : $3x - 5y = 10$ équivaut à $-5y = -3x + 10$ c'est-à-dire $y = \frac{3}{5}x - 2$.
Donc le coefficient directeur de d est $\frac{3}{5}$.
d et d' sont parallèles, donc d' a pour coefficient directeur $\frac{3}{5}$ et une équation de d' est de la forme $y = \frac{3}{5}x + b$.
De plus $A(2\,;\,4)$ est sur d', d'où $4 = \frac{3}{5}\times 2 + b$ et $b = \frac{14}{5}$.
Donc d' a pour équation $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$.

II - Systèmes linéaires

Le plan est rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Définition : Soient a, b et c trois nombres réels, a et b n'étant pas tous deux nuls. On appelle **équation linéaire à deux inconnues** x et y une équation de la forme $ax + by = c$ (ceci constitue une équation cartésienne de droite).
Résoudre cette équation consiste à trouver tous les couples $(\alpha;\beta)$ de réels vérifiant $a\alpha + b\beta = c$.

Exemple : On donne l'équation $5x - 4y = 7$ d'inconnues x et y. L'équation est celle d'une droite dans le plan.
Le couple $(x\,;\,y) = (3\,;\,2)$ est une solution de l'équation car $5\times 3 - 4\times 2 = 7$.
De même le couple $(x\,;\,y) = (-1\,;\,-3)$ est une autre solution de cette équation car $5\times(-1) - 4\times(-3) = 7$.
Cela signifie que les points de coordonnées $(3\,;\,2)$ et $(-1\,;\,-3)$ sont sur la droite d'équation $5x - 4y = 7$.
Par contre le couple $(x\,;\,y) = (4\,;\,1)$ n'est pas une solution de l'équation car $5\times 4 - 4\times 1 = 16 \neq 7$. Donc le point de coordonnées $(4\,;\,1)$ n'est pas sur la droite.

Propriété : Une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$, où $(a\,;\,b) \neq (0;0)$, admet une infinité de couples solutions. Ces solutions sont les coordonnées des points de la droite d'équation $ax + by = c$.

<u>Définition :</u> Un système d'équations linéaires à deux inconnues s'écrit $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

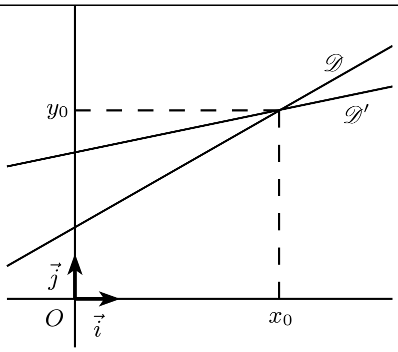
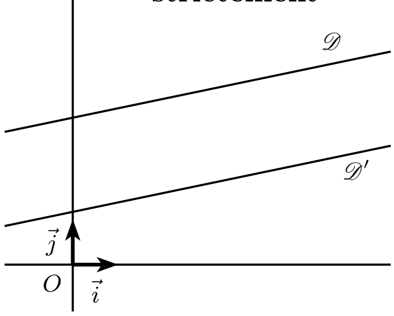
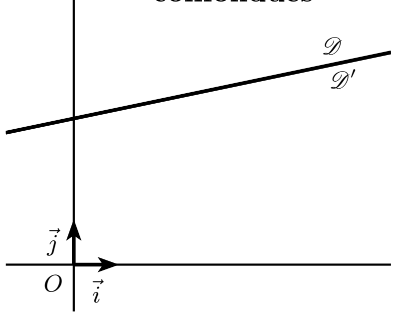
Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant en même temps ces deux équations.

<u>Interprétation géométrique</u>

Dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, le système correspond aux équations de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de coefficients directeurs $-\dfrac{a}{b}$ et $-\dfrac{a'}{b'}$ (en effet, pour $\mathscr{D}$, $ax + by = c \iff by = -ax + c \iff y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$).

$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ équivaut à $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ c'est-à-dire $ab' = a'b$ ce qui donne $ab' - a'b = 0$.

- $ab' - a'b \neq 0$ équivaut à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en un point S. Le couple de coordonnées de S est le couple solution du système.
- $ab' - a'b = 0$ équivaut à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
  - soit les ordonnées à l'origine des deux droites sont différentes, c'est-à-dire $\dfrac{c}{b} \neq \dfrac{c'}{b'}$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles et le système n'admet pas de couple solution.
  - soit les ordonnées à l'origine sont égales, c'est-à-dire $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues et tous les couples qui représentent les coordonnées des points de $\mathscr{D}$ sont solutions du système.

$ab' - a'b \neq 0$ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes	$ab' - a'b = 0$ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles	
	**strictement** 	**confondues** 
Le système a un seul couple solution $(x_0 \,;\, y_0)$.	Le système n'a pas de couple solution.	Le système a une infinité de solutions : tous les couples $(x \,;\, y)$ vérifiant l'une des équations.

<u>Exercice :</u> Résoudre le système : $\begin{cases} 4x - 3y = 6 & [1] \\ x + 5y = 13 & [2] \end{cases}$

Ici $4 \times 5 - (-3) \times 1 = 23 \neq 0$, donc le système admet un unique couple solution.

On multiplie les membres de l'équation [2] par 4. Le système devient : $\begin{cases} 4x - 3y = 6 & [1] \\ 4x + 20y = 52 & [2'] \end{cases}$

ce qui équivaut à $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 23y = 46 \end{cases}$ en effectuant la différence $[2'] - [1]$

On obtient $\begin{cases} y = 2 \\ 4x - 3 \times 2 = 6 \end{cases}$ en remplaçant dans la première équation y par 2.

Tout ceci équivaut à : $\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Donc le couple solution du système est $(x \,;\, y) = (3 \,;\, 2)$.

<u>Exercice :</u> Résoudre le système $\begin{cases} 4x - 6y = 2 & [1] \\ 6x - 9y = 3 & [2] \end{cases}$

Dans ce cas, $4 \times (-9) - (-6) \times 6 = 0$ donc le système n'a pas de solution ou a une infinité de solutions.

En multipliant [1] par 3 et [2] par 2, on obtient le système : $\begin{cases} 12x - 18y = 6 \\ 12x - 18y = 6 \end{cases}$.

Les deux équations n'en forment en fait qu'une. Donc l'ensemble des couples solutions est l'ensemble des coordonnées des points de la droite d'équation $4x - 6y = 2$, c'est-à-dire $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$.