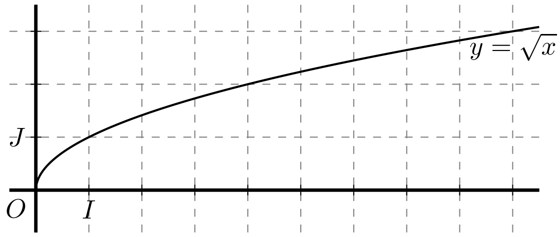
II - Fonction racine carrée

a) Découverte de la fonction racine carrée

Rappel : Pour tout nombre réel a positif ou nul, on définit la racine carrée de a comme l'unique nombre réel positif dont le carré vaut a.

Conséquences :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x} \geqslant 0$. La courbe représentative est alors située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$.
  ATTENTION : l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ n'est valable **que pour les réels x positifs**.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.



x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

Conséquence des variations de la fonction racine carrée :
La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b positifs, si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (l'application de la fonction **conserve** l'ordre).

Exemples :

1. Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice : $\sqrt{5}$ et $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$
2. Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ sachant que $2 \leqslant x < 144$.

Solution :

1. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, l'inégalité $5 > \dfrac{7}{3}$ implique que $\sqrt{5} > \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ (le sens de l'inégalité est conservé).
   Remarque : Cela revient finalement à comparer les carrés de ces deux nombres, ce qu'on ferait pour comparer par exemple $\sqrt{5}$ et 2 ; comme $5 > 4$, on conclut que $\sqrt{5} > \sqrt{4} \iff \sqrt{5} > 2$.
2. De nouveau, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, l'encadrement $2 \leqslant x < 144$ implique $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{144}$ (le sens des inégalités a été conservé).
   On conclut en simplifiant ce qui peut l'être : $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} < 12$.

b) Propriétés algébriques

Propriété : Soient a et b deux réels positifs :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- si de plus b est non nul, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration : Dans les deux cas, les nombres sont positifs, donc on montre l'égalité en vérifiant que les carrés sont égaux.

- $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ par définition. De plus $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2$ d'après les propriétés sur les puissances. Ainsi $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = a \times b$ et on conclut que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

- $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ par définition. De plus $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}$ d'après les propriétés sur les puissances.
  Ainsi $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ et on conclut que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Remarque : et pour les sommes ? C'est une faute habituelle qu'il ne faut **surtout pas commettre** !
En effet $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$ d'après la première identité remarquable.
Ainsi $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.
Donc, **en général (dès que a et b sont strictement positifs), $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.**

Application : simplification de radicaux
Simplifier des radicaux revient à les écrire sous la forme d'un entier ou sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b nombre entier positif le plus petit possible.
Par exemple, concernant $\sqrt{45}$, dans la décomposition de 45 sous la forme d'un produit, on identifie **le carré d'un entier** : $45 = 9 \times 5$
Ainsi $\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.
On peut aussi simplifier une somme ou une différence : $\sqrt{125} - \sqrt{48}$
Il faut tout d'abord simplifier chaque radical, la différence ne pouvant au final n'être faite, **que si on retrouve le même nombre sous les radicaux**
Ici, $125 = 25 \times 3$ d'où $\sqrt{125} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$,
de plus $48 = 16 \times 3$ d'où $\sqrt{48} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
Ainsi $\sqrt{125} - \sqrt{48} = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

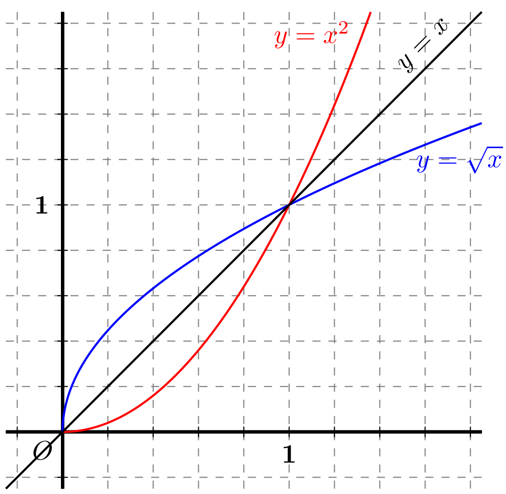
c) Compléments sur la racine carrée

Exemple : Résoudre l'équation $5\sqrt{x} - 11 = 0$
- Cette équation se résout sur $\mathbb{R}^+$.
  On isole $\sqrt{x}$ (comme pour des équations de degré 1) :
  $$5\sqrt{x} - 11 = 0 \iff 5\sqrt{x} = 11 \iff \sqrt{x} = \frac{11}{5}$$
- Il ne reste plus qu'à appliquer la fonction carrée et on obtient $x = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$.

Propriété : Position relative de courbes sur $\mathbb{R}^+$.

1. Soit x un réel positif ou nul.
   - si $0 < x < 1$, alors $\sqrt{x} > x$;
   - si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x$;
   - si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $\sqrt{x} = x$.

   Cela se vérifie sur les courbes ci-contre :



2. Les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   Cela traduit le fait que pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$.
   On parle de fonctions **réciproques**.