II - Systèmes linéaires

Le plan est rapporté à un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Définition : Soient a, b et c trois nombres réels, a et b n'étant pas tous deux nuls. On appelle **équation linéaire à deux inconnues** x et y une équation de la forme $ax + by = c$ (ceci constitue une équation cartésienne de droite). Résoudre cette équation consiste à trouver tous les couples $(\alpha;\beta)$ de réels vérifiant $a\alpha + b\beta = c$.

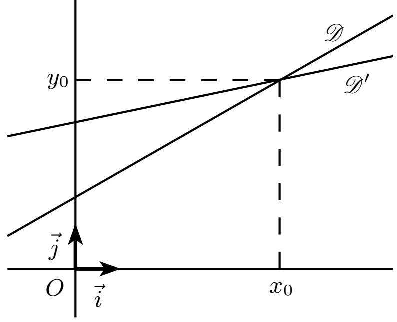
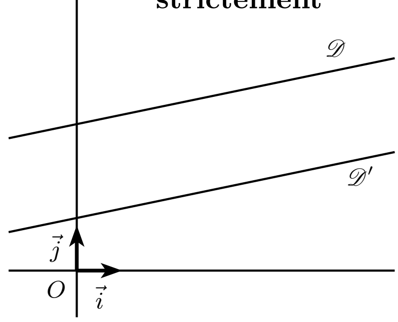
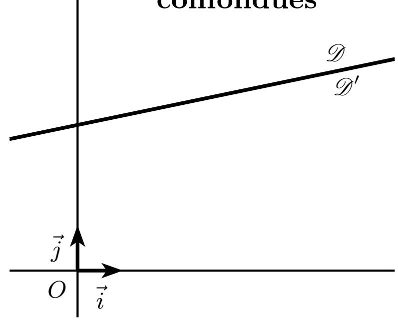
Exemple : On donne l'équation $5x - 4y = 7$ d'inconnues x et y. L'équation est celle d'une droite dans le plan.
Le couple $(x\ ;\ y) = (3\ ;\ 2)$ est une solution de l'équation car $5 \times 3 - 4 \times 2 = 7$.
De même le couple $(x\ ;\ y) = (-1\ ;\ -3)$ est une autre solution de cette équation car $5 \times (-1) - 4 \times (-3) = 7$.
Cela signifie que les points de coordonnées $(3\ ;\ 2)$ et $(-1\ ;\ -3)$ sont sur la droite d'équation $5x - 4y = 7$.
Par contre le couple $(x\ ;\ y) = (4\ ;\ 1)$ n'est pas une solution de l'équation car $5 \times 4 - 4 \times 1 = 16 \neq 7$. Donc le point de coordonnées $(4\ ;\ 1)$ n'est pas sur la droite.

Propriété : Une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$, où $(a\ ;\ b) \neq (0;0)$, admet une infinité de couples solutions. Ces solutions sont les coordonnées des points de la droite d'équation $ax + by = c$.

Définition : Un système d'équations linéaires à deux inconnues s'écrit $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.
Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x;y)$ vérifiant en même temps ces deux équations.

Interprétation géométrique
Dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, le système correspond aux équations de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de coefficients directeurs $-\dfrac{a}{b}$ et $-\dfrac{a'}{b'}$ (en effet, pour $\mathscr{D}$, $ax + by = c \iff by = -ax + c \iff y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$).
$\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{D}'$ équivaut à $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ c'est-à-dire $ab' = a'b$ ce qui donne $ab' - a'b = 0$.

- $ab' - a'b \neq 0$ équivaut à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en un point S. Le couple de coordonnées de S est le couple solution du système.
- $ab' - a'b = 0$ équivaut à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
  - soit les ordonnées à l'origine des deux droites sont différentes, c'est-à-dire $\dfrac{c}{b} \neq \dfrac{c'}{b'}$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles et le système n'admet pas de couple solution.
  - soit les ordonnées à l'origine sont égales, c'est-à-dire $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$, alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues et tous les couples qui représentent les coordonnées des points de $\mathscr{D}$ sont solutions du système.

<table>
<tr><td>$ab' - a'b \neq 0$
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes</td><td colspan="2">$ab' - a'b = 0$
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles</td></tr>
<tr><td></td><td>strictement
</td><td>confondues
</td></tr>
<tr><td>Le système a un seul couple solution $(x_0\ ;\ y_0)$.</td><td>Le système n'a pas de couple solution.</td><td>Le système a une infinité de solutions : tous les couples $(x\ ;\ y)$ vérifiant l'une des équations.</td></tr>
</table>

Exercice : Résoudre les deux systèmes suivants : $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + 5y = 13 \end{cases}$ et $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$