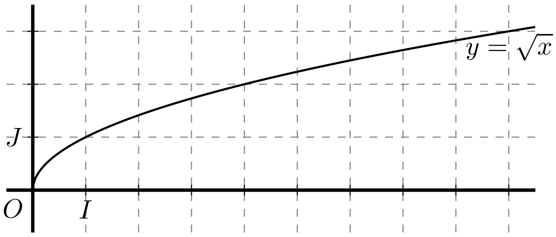
I - Fonction racine carrée

a) Découverte de la fonction racine carrée

Rappel : Pour tout nombre réel a positif ou nul, on définit la racine carrée de a comme l'unique nombre réel positif dont le carré vaut a.



Conséquences :

- La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x} \geqslant 0$. La courbe représentative est alors située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$.
  ATTENTION : l'égalité $\sqrt{x^2} = x$ n'est valable **que pour les réels x positifs**.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

Conséquence des variations de la fonction racine carrée :
La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, pour tous réels a et b positifs, si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (l'application de la fonction **conserve** l'ordre).

Exemples :

1. Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice : $\sqrt{5}$ et $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$
2. Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ sachant que $2 \leqslant x < 144$.

Solution :

1. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, l'inégalité $5 > \dfrac{7}{3}$ implique que $\sqrt{5} > \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ (le sens de l'inégalité est conservé).
   Remarque : Cela revient finalement à comparer les carrés de ces deux nombres, ce qu'on ferait pour comparer par exemple $\sqrt{5}$ et 2 ; comme $5 > 4$, on conclut que $\sqrt{5} > \sqrt{4} \iff \sqrt{5} > 2$.
2. De nouveau, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, l'encadrement $2 \leqslant x < 144$ implique $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} < \sqrt{144}$ (le sens des inégalités a été conservé).
   On conclut en simplifiant ce qui peut l'être : $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} < 12$.