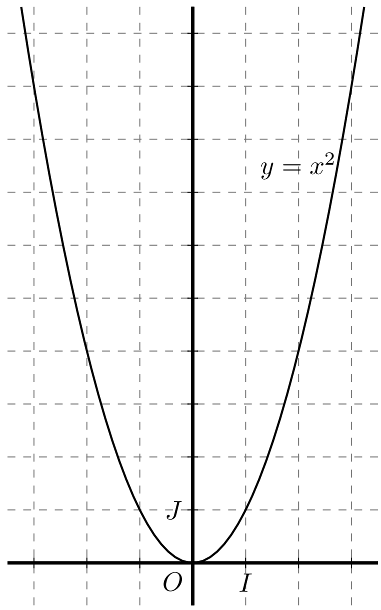
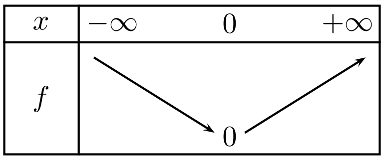
Chapitre IX : Étude de deux fonctions de référence

I - Fonction carrée

a) Synthèse sur la fonction carrée



- La fonction carrée est le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Sa courbe représentative est une parabole.
- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. La courbe représentative est alors située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$ donc la fonction carrée est **paire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'axe des ordonnées pour axe de symétrie**.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.



Conséquence des variations de la fonction carrée :

- La fonction carrée étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$, pour tous réels a et b négatifs, si $a < b$ alors $a^2 > b^2$ (l'application de la fonction **change** l'ordre).
- La fonction carrée étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b positifs, si $a < b$ alors $a^2 < b^2$ (l'application de la fonction **conserve** l'ordre).
- Si a et b sont de signe contraire, on ne peut pas comparer leurs carrés si ce n'est en les calculant.

Exemple : Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $1{,}325^2$ et $1{,}874^2$
- $(-2{,}7)^2$ et $(-2{,}978)^2$
- π^2 et $3{,}1^2$
- $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ et $(-0{,}6)^2$

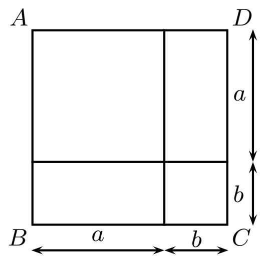
Solution : On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction carrée.

- 1,325 et 1,874 sont deux réels positifs avec $1{,}325 < 1{,}874$, ainsi $1{,}325^2 < 1{,}874^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- $-2{,}7$ et $-2{,}978$ sont deux réels négatifs avec $-2{,}7 > -2{,}978$, ainsi $(-2{,}7)^2 < (-2{,}978)^2$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
- π et 3,1 sont deux réels positifs avec $\pi > 3{,}1$, ainsi $\pi^2 > 1{,}874^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
- $-\dfrac{2}{3}$ et $-0{,}6$ sont deux réels négatifs avec $-\dfrac{2}{3} < -0{,}6$, ainsi $\left(-\dfrac{2}{3}\right) < (-0{,}6)^2$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

b) Identités remarquables

Propriété : Pour tous réels a et b, chaque ligne du tableau suivant décrit une égalité :

Forme factorisée	Forme développée
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2



On considère le carré $ABCD$ ci-contre dont l'aire vaut $(a+b)^2$.
Il a été décomposer en 2 carrés et 2 rectangles.
Un premier carré a pour aire a^2, l'autre b^2.
Les deux rectangles ont la même aire ab.
Ceci nous permet d'écrire l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
La deuxième égalité est obtenue à partir de la première en remplaçant b par $-b$ ($(-b)^2$ étant égal à b^2).

Exemple : Développer les expressions suivantes : $(y-11)^2$; $(2x+3)^2$.

- $(y-11)^2 = y^2 - 2 \times y \times 11 + 11^2 = y^2 - 22y + 121$.
- $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

c) Équations et inéquations

Théorème : Soit a un nombre réel. L'équation $x^2 = a$ admet :

- une unique solution réelle, 0 si $a = 0$;
- deux solutions réelles distinctes, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$;
- aucune solution réelle si $a < 0$.

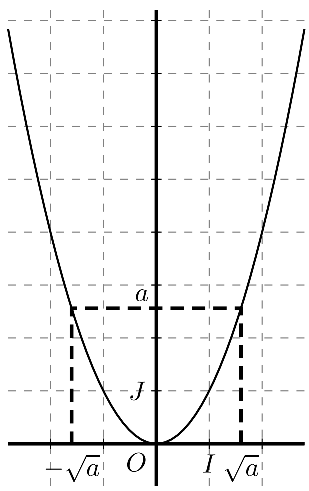
Remarque : La conjecture du nombre de solutions de ce type d'équation peut être effectuée à l'aide de la parabole représentant la fonction carrée.

Démonstration :

- si $a = 0$, l'équation devient $x^2 = 0$ qui admet une seule solution : $x = 0$
- si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ devient $x^2 - a = 0$ c'est-à-dire $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ et ainsi $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ d'où $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ ce qui donne $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
  Donc les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont bien, dans ce cas, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si $a < 0$, comme $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 2 = -1$.
$3x^2 - 2 = -1 \iff 3x^2 = 1 \iff x^2 = \dfrac{1}{3}$.
Comme $\dfrac{1}{3} > 0$, les solutions de l'équation sont $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ et $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

La résolution de toute inéquation de la forme $x^2 < a$ ou $x^2 > a$ (avec a réel peut s'effectuer à l'aide de la résolution de l'équation $x^2 = a$ et de la courbe représentant la fonction carrée.
Ainsi si $a > 0$, l'ensemble des solutions réelles de $x^2 < a$ est $]-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}[$ et l'ensemble des solutions de $x^2 > a$ est $]-\infty\,;\,-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}\,;\,-\infty[$.



Exemple : Résoudre les inéquations $x^2 < 5$ et $x^2 \geqslant 9$.
En s'aidant de la courbe représentative de la fonction carrée, on conclut que :

- $x^2 < 5$ sur $]-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}[$;
- $x^2 \geqslant 9$ sur $]-\infty\,;\,-3[\cup]3\,;\,+\infty[$.