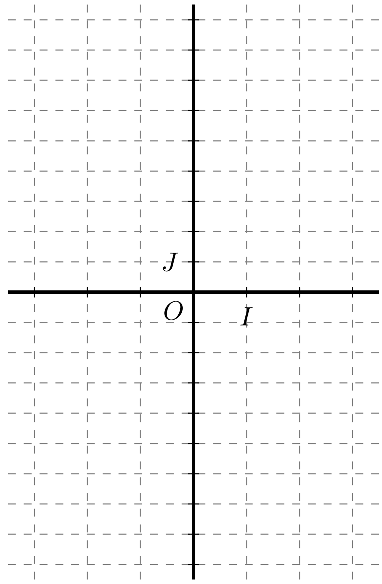
Chapitre XI : Autres fonctions de référence

I - Fonction cube

a) Définition et représentation



- La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
- Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$ donc la fonction cube est **impaire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'origine pour centre de symétrie**.
- La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

À l'aide d'un tableau de valeurs sur la calculatrice, construire ci-contre le plus précisément possible la courbe représentative de la fonction cube :

Conséquence des variations de la fonction cube :
La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tous réels a et b
$a < b$ équivaut à $a^3 < b^3$ (l'application de la fonction ne **change** pas l'ordre).

Exemple : Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $2{,}125^3$ et $3{,}478^3$
- $(-1{,}4)^3$ et $(-2{,}7)^3$
- π^3 et $\left(\dfrac{10}{3}\right)^3$

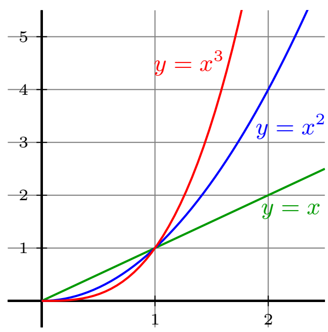
Solution : On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction cube.

- $2{,}125 < 3{,}478$ ainsi $2{,}125^3 < 3{,}478^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $-1{,}4 > -2{,}7$ ainsi $(-1{,}4)^3 > (-2{,}7)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\pi < \dfrac{10}{3}$, ainsi $\pi^3 < \left(\dfrac{10}{3}\right)^3$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit x un réel positif.

- Si $0 < x < 1$, alors $x > x^2 > x^3$.
- Si $x > 1$, alors $x < x^2 < x^3$.
- Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x = x^2 = x^3$.

Cette propriété se vérifie par la position relative des courbes représentant ces fonctions sur chacun de ces intervalles :



b) Équations et inéquations

Théorème : Soit a un nombre réel. L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\sqrt[3]{a}$ et appelée la **racine cubique** de a.

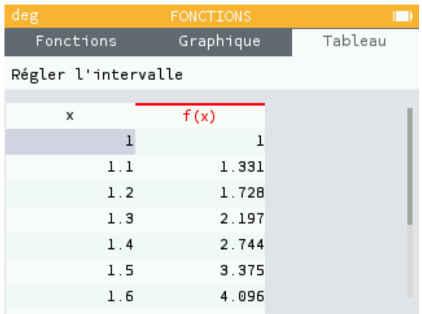
Par exemple la solution de $x^3 = 27$ est 3 car $3^3 = 27$; 3 est la racine cubique de 27.
La solution de $x^3 = -125$ est -5 car $(-5)^3 = -125$; -5 est la racine cubique de -125.

La solution de l'équation $x^3 = 2$ est le nombre réel $\sqrt[3]{2}$ qui n'est pas un nombre entier (pas plus rationnel). On peut chercher une valeur approchée de ce nombre à l'aide d'un algorithme.
Il existe deux méthodes générales sachant qu'on peut déjà facilement encadrer ce nombre par deux entiers. En effet $1^3 < 2 < 2^3$ (encadrement de 2 par les cubes de deux entiers consécutifs) donc $1 < \sqrt[3]{2} < 2$.

- **Méthode par balayage**

  Cette méthode consiste à parcourir l'intervalle $[1 ; 2]$ avec un certain pas et s'arrêter dès qu'on dépasse la valeur souhaitée (ici quand le cube sera supérieur à 2). On peut choisir de mettre le pas comme argument de la fonction :

```python
def balayage(pas):
    a=1
    while a**3<2:
        a=a+pas
    return a
```



x	f(x)
1	1
1.1	1.331
1.2	1.728
1.3	2.197
1.4	2.744
1.5	3.375
1.6	4.096

Cela se représente très facilement avec le tableau de valeurs de la calculatrice (par exemple pour `pas`=0.1 :

Le parcours de l'algorithme lorsqu'on demande `balayage(0.1)` nous donne (tableau à compléter) :

Valeur de `a`	Test `a**3<2`

`balayage(0.1)` renvoie donc la valeur ....

- **Méthode par dichotomie** - *pour ceux qui seraient plus à l'aise avec les algorithmes*

  Cette méthode consiste à approcher de plus en plus la solution d'une équation en la positionnant par rapport au centre de l'intervalle. Ceci permet de diviser l'intervalle dans lequel elle se trouve par 2 à chaque étape. Lorsque cette fonction s'arrête la longueur de l'intervalle est inférieur à un certain seuil qui peut être placé en tant qu'argument de la fonction.

```python
def dichotomie(seuil):
    a=1
    b=2
    while b-a>seuil:
        m=(a+b)/2
        if m**3>2 :
            b=m
        else :
            a=m
    return a
```

Parcours de l'algorithme quand on saisit `dichotomie(0.01)` :

`a`	`b`	`b-a>seuil`	`m`	`m**3>2`

Donc `dichotomie(0.01)` renvoie la valeur ....

.... étapes ont été nécessaires pour obtenir cette valeur approchée, alors qu'avec la méthode par balayage il aurait fallu 26 étapes pour obtenir une valeur approchée (qui aurait été un peu différente).

Dans les deux cas, la valeur obtenue est une valeur approchée de la solution de $x^3 = 2$ (donc de $\sqrt[3]{2}$).
Par exemple `balayage(0.01)` ou `dichotomie(0.01)` donnent une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$ à 0,01 près.

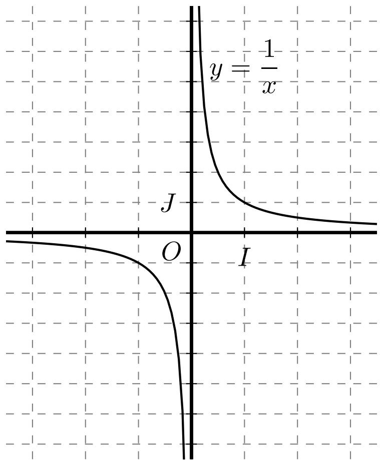
Propriété : a étant un nombre réel, l'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 > a$ est l'intervalle $]\sqrt[3]{a}\,;+\infty[$.

Démonstration : En effet, $\sqrt[3]{a}$ est l'unique solution de $x^3 = a$ ainsi $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. De plus la fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $x > \sqrt[3]{a} \iff x^3 > (\sqrt[3]{a})^3 \iff x^3 > a$.

Exemple : Résoudre l'inéquation $-2x^3 + 1 > -15$.

Solution : $-2x^3 + 1 > -15 \iff -2x^3 > -16 \iff x^3 < 8 \iff x < \sqrt[3]{8} \iff x < 2$
L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc l'intervalle $]-\infty\,; 2[$.

II - Fonction inverse



- La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

- Pour tout réel x, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ donc la fonction inverse est **impaire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'origine pour centre de symétrie**.

- La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

Conséquence des variations de la fonction inverse :
La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, pour tous réels a et b **de même signe**, $a < b$ équivaut à $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (l'application de la fonction **change** l'ordre).

Exemple : Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $\dfrac{1}{2{,}48}$ et $\dfrac{1}{4{,}75}$
- $\dfrac{1}{-2{,}8}$ et $\dfrac{1}{-4{,}1}$
- $\dfrac{1}{\pi}$ et $\dfrac{3}{10}$

Solution : On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction inverse.

- $2{,}48 < 4{,}75$ ainsi $\dfrac{1}{2{,}48} > \dfrac{1}{4{,}75}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

- $-2{,}8 > -4{,}1$ ainsi $\dfrac{1}{-2{,}8} < \dfrac{1}{-4{,}1}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

- $\pi < \dfrac{10}{3}$, ainsi $\dfrac{1}{\pi} > \dfrac{1}{\frac{10}{3}} \iff \dfrac{1}{\pi} > \dfrac{3}{10}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété : Soit a un nombre réel non nul. L'unique solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation $\dfrac{1}{x} = a$ est $\dfrac{1}{a}$.

Exemple : Résoudre l'équation $\dfrac{3}{x-1} = 7$

Solution : Cette équation est définie lorsque $x - 1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 1$. Donc on résout l'équation sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Dans ce cas, $\dfrac{3}{x-1} = 7 \iff \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{7}{3}$ (en divisant par 3 de chaque côté de l'égalité).
On obtient ensuite $x - 1 = \dfrac{1}{\frac{7}{3}} \iff x - 1 = \dfrac{3}{7}$ en appliquant la fonction inverse.
On en déduit que $x = \dfrac{3}{7} + 1 = \dfrac{10}{7}$.
Donc $\dfrac{10}{7}$ est l'unique solution de cette équation.

III - Signe d'un produit ou quotient de fonctions affines

L'objectif est de déterminer tous les intervalles sur lesquels une fonction, produit ou quotient de fonctions affines, est strictement positive, strictement négative ou nulle.
Pour réussir, il convient de s'appuyer sur la méthode permettant de déterminer le signe d'une fonction affine.

a) Produit de fonctions affines

Exemple : On souhaite résoudre l'inéquation $(4-3x)(5x+2) \leqslant 0$.
On détermine tout d'abord le signe de chacun des facteurs ($4-3x$ et $5x+2$).

On résout $4 - 3x = 0$, ce qui donne ....

Cette fonction affine étant strictement .... sur $\mathbb{R}$, on obtient le signe de $4-3x$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $4-3x$	

version numérique pour vérifier

On résout ensuite $5x+2=0$, ce qui donne ....

Cette fonction affine étant strictement .... sur $\mathbb{R}$, on obtient le signe de $5x+2$:

x	$-\infty$ $+\infty$
signe de $5x+2$	

version numérique

Consignons alors le signe de $4-3x$ et celui de $5x+2$ dans un même tableau et utilisons la règle des signes pour déterminer le signe du produit. Dans la première ligne, on place les deux valeurs trouvées précédemment **dans l'ordre sur l'axe des réels**.

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $4-3x$			
signe de $5x+2$			
signe du produit			

version numérique

On conclut que l'ensemble des solutions de l'inéquation $(4-3x)(5x+2) \leqslant 0$ est ....

Remarque : Cette méthode s'étend à la recherche du signe d'un produit de plus de deux facteurs.

Exemple : Déterminer le signe de $-2x(4x+2)(3x+2)$.

Solution : On étudie le signe de chacun des facteurs :
On résout

x	$-\infty$			$+\infty$
signe de $-2x$				
signe de $4x+2$				
signe de $2x+3$				
signe du produit				

version numérique

Exercice numérique de construction d'un tableau de signes avec facteurs aléatoires
Ces exercices peuvent être prolongés par une résolution d'inéquation :
Tableau de signes et résolution d'inéquation

b) Cas du quotient de fonctions affines

Exemple : Étudier le signe de $\dfrac{-x-4}{4x-3}$.

On résout $-x-4=0$ et $4x-3=0$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $-x-4$			
signe de $4x-3$			
signe du quotient			

version numérique

Remarque : La « double barre » indique que la valeur $\dfrac{3}{4}$ est une « valeur interdite ».

En effet, $\dfrac{-x-4}{4x-3}$ est défini lorsque $4x-3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \dfrac{3}{4}$.

Exercice numérique avec facteurs aléatoires (tableau de signes)
Tableau de signes + résolution d'inéquation