Chapitre VIII : Probabilités

I - Événements et probabilités

Définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire.
Les résultats possibles de l'expérience sont appelés les issues.

Exemple : Les issues du lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 sont :

. . . .

Définition : Un **événement** est une caractéristique supposée qui sera vérifiée (ou non) lors d'une expérience aléatoire. Lorsque c'est le cas, on dit que l'événement est réalisé.
Mathématiquement, un événement est une partie de l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Lors du jet d'un dé à six faces, l'événement : « le nombre sorti est compris entre 2 et 4 » est réalisé par les . . . . . issues : . . . .

. . . .

Définition :

- Un **événement est élémentaire** si une seule issue le réalise. On peut les noter e_1, e_2, $\ldots e_n$. Un événement élémentaire est aussi appelé une **éventualité**.
- L'ensemble des événements élémentaires est appelé **univers** :

  on note . . . .
- Un événement jamais réalisé est dit **impossible** : aucune issue ne le réalise.

  Cet événement est noté . . . . .
- Un événement toujours réalisé est dit **certain** (c'est . . . . . .) : toutes les issues le réalisent.
- **L'événement contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. Il est noté . . . . .
- Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemples : Dans le tirage d'une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes :

- Un événement élémentaire est par exemple : . . . .
- Un événement impossible est par exemple : . . . .
- Un événement certain est par exemple : . . . .
- L'événement contraire de : « la carte tirée est un nombre à cœur » est : . . . . . .

  . . . .

  . . . .
- Un événement non élémentaire est par exemple : . . . .
- Deux événements incompatibles sont par exemple : . . . .

  . . . .

Définition : À chaque événement élémentaire $\{e_i\}$, on associe un nombre p_i, appelé **probabilité de** $\{e_i\}$ tel que $0 \leqslant p_i \leqslant 1$. On note $P(e_i) = p_i$.

En outre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. On dit que l'on a défini une probabilité sur Ω.

La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.
La probabilité d'un événement est comprise entre 0 (l'événement est impossible) et 1 (l'événement est certain).

Définition - propriété : Dire que les événements élémentaires sont **équiprobables** signifie que . . . .

Si leur nombre est n, alors $P(e_i) =$ . . . . , et la probabilité d'un événement A est donnée par :

$P(A) =$ . . . .

Propriété : Pour tout événement A, on a l'égalité . . . .

II - Événement « A et B », événement « A ou B »

a) Représentation

Définition :

- Soient A et B deux événements. On note $A \cap B$ l'événement « ***A* et *B*** ».

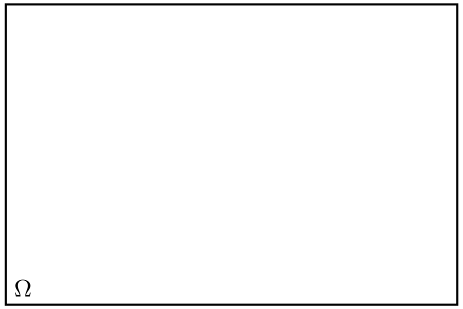
  ....

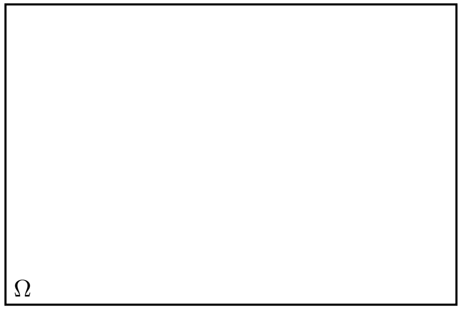
  Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont ....
- On note $A \cup B$ l'événement « ***A* ou *B*** ».

  ....

  ....

Remarque : Le **diagramme de Venn** permet de représenter les différents événements.





Exercice : Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard. On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1. Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?
   Recopier et compléter : $A = \{\cdots\}$ et $B = \{\cdots\}$.
2. Décrire de même les événements :
   - $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A}$ • $\overline{B}$
   - $\overline{A \cup B}$ • $\overline{A \cap B}$ • $\overline{A} \cap \overline{B}$ • $\overline{A} \cup \overline{B}$
3. Certains de ces événements sont-ils identiques ?
4. Décrire les événements suivants par une phrase :
   - $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A}$

b) Propriétés des probabilités

Si les événements A et B ont des issues en commun, ($A \cap B \neq \emptyset$), dans la somme $p(A) + p(B)$, on compte deux fois les probabilités des issues communes.

Propriété : La probabilité de la réunion de A et de B est :

....

Cas particulier : **Si *A* et *B* sont incompatibles**, ($A \cap B = \emptyset$), on a l'égalité :

....

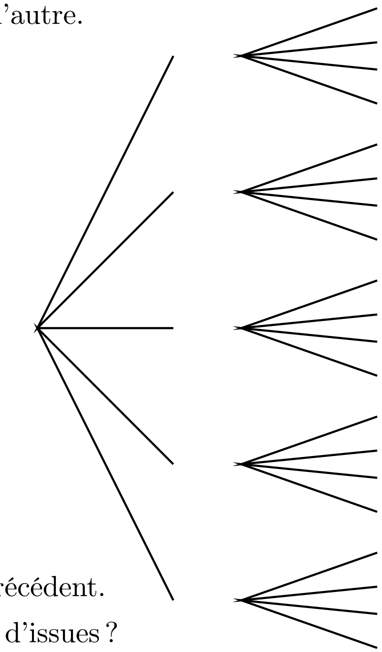
c) Utilisation d'un arbre

Exemple : Un paquet contient cinq bonbons :

• trois à la myrtille ; • un à la framboise ; • un au citron.

Sandrine prend au hasard 2 bonbons l'un après l'autre.

1. Compléter l'arbre des possibles ci-contre.



   Dresser un autre arbre, plus petit que le précédent.
2. Combien cette expérience aléatoire a-t-elle d'issues ?
3. Quelle est la probabilité :
   (a) que Sandrine mange deux bonbons à la myrtille ?
   (b) que Sandrine mange au moins un bonbon à la myrtille ?
   (c) que Sandrine ne mange pas de bonbons à la myrtille ?

III - Fluctuation d'échantillonnage

Lorsqu'on étudie un caractère d'une population, la connaissance de la population entière n'est en général pas envisageable. On doit se contenter de la connaissance d'un

.... de cette population.

Pour prendre des décisions, il est important que l'échantillon soit prélevé

....

Définition : On appelle **échantillon de taille n** une liste de n résultats obtenus par répétitions indépendantes d'une même **expérience aléatoire**.

Exemple : Simulation du lancer de 100 dés à l'aide d'un tableur (LibreOffice).

On pourrait utiliser la fonction .... du tableur qui renvoie un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].
Mais il y a une fonction plus pratique pour notre exemple : ALEA.ENTRE.BORNES qui renvoie un entier choisi aléatoirement entre deux valeurs données.

On écrit alors dans la case A1 : ....
À l'aide de la poignée de recopie, on tire la formule vers le bas jusqu'en A100. On obtient alors l'équivalent sur tableur de 100 lancers d'un dé.

Définition : Pour une population donnée, des échantillons aléatoires produits suivant le même protocole peuvent avoir des compositions différentes : on dit qu'il y a

....

En reprenant l'exemple précédent conçu à l'aide du tableur, on obtient 100 nouveaux lancers en appuyant sur les touches $\boxed{\text{Ctrl}}$ $\boxed{\Uparrow}$ (Shift) $\boxed{\text{F9}}$.

Remarque : La fréquence f d'un caractère dans l'échantillon n'est pas nécessairement égale à la proportion p de ce caractère dans la population.

Exemple : On compte le nombre de valeurs correspondant au critère recherché. Sur le tableur, on utilise la fonction .... :
par exemple pour déterminer le nombre de fois où le 6 est apparu au cours des 100 lancers présents dans la plage de saisie A1:A100, on écrit en B1 :

....

En B2, on calcule alors la fréquence d'apparition du nombre 6 par la formule :

....

On constate que cette fréquence varie d'une expérience à l'autre. Par contre elle reste relativement proche de la valeur $\dfrac{1}{6}$.

Exercice :

1. Écrire un algorithme sous la forme d'une fonction simulant le lancer de 100 dés bien équilibrés et calculant la fréquence d'apparition de la face numéro 6.
2. Comment modifier la fonction précédente pour l'appliquer à un nombre quelconque de tirages ?

Loi des grands nombres :
Si on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'un caractère fini par se stabiliser autour de la probabilité d'apparition (ou proportion) de ce caractère.

Propriété :
Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est p.
Lorsque n est grand, la fréquence observée f d'individus présentant le caractère étudié dans cette population est telle que $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f - p \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dans une majorité des cas.

Repartons de la simulation de 100 lancers d'un dé bien équilibré.

Pour chaque simulation, la fréquence f obtenue devrait être proche de $\dfrac{1}{6}$.

D'après la propriété précédente, cette fréquence devrait vérifier :

Construire une fonction qui réalisera 500 fois cette expérience et qui déterminera le nombre de fois où f est dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{15} ; \dfrac{4}{15}\right]$.