

II - Systèmes linéaires

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition : Soient a, b et c trois nombres réels, a et b n'étant pas tous deux nuls. On appelle **équation linéaire à deux inconnues** x et y une équation de la forme $ax + by = c$ (ceci constitue une équation cartésienne de droite). Résoudre cette équation consiste à trouver tous les couples $(\alpha; \beta)$ de réels vérifiant $a\alpha + b\beta = c$.

Exemple : On donne l'équation $5x - 4y = 7$ d'inconnues x et y . L'équation est celle d'une droite dans le plan.

Le couple $(x; y) = (3; 2)$ est une solution de l'équation car $5 \times 3 - 4 \times 2 = 7$.

De même le couple $(x; y) = (-1; -3)$ est une autre solution de cette équation car $5 \times (-1) - 4 \times (-3) = 7$.

Cela signifie que les points de coordonnées $(3; 2)$ et $(-1; -3)$ sont sur la droite d'équation $5x - 4y = 7$.

Par contre le couple $(x; y) = (4; 1)$ n'est pas une solution de l'équation car $5 \times 4 - 4 \times 1 = 16 \neq 7$. Donc le point de coordonnées $(4; 1)$ n'est pas sur la droite.

Propriété : Une équation linéaire à deux inconnues $ax + by = c$, où $(a; b) \neq (0; 0)$, admet une infinité de couples solutions. Ces solutions sont les coordonnées des points de la droite d'équation $ax + by = c$.

Définition : Un système d'équations linéaires à deux inconnues s'écrit $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant en même temps ces deux équations.

Interprétation géométrique

Dans le cas où $b \neq 0$ et $b' \neq 0$, le système correspond aux équations de deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' de coefficients directeurs $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{a'}{b'}$ (en effet, pour \mathcal{D} , $ax + by = c \iff by = -ax + c \iff y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$).

\mathcal{D} est parallèle à \mathcal{D}' équivaut à $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ c'est-à-dire $ab' = a'b$ ce qui donne $ab' - a'b = 0$.

- $ab' - a'b \neq 0$ équivaut à \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en un point S . Le couple de coordonnées de S est le couple solution du système.

- $ab' - a'b = 0$ équivaut à \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles.

– soit les ordonnées à l'origine des deux droites sont différentes, c'est-à-dire $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$, alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont strictement parallèles et le système n'admet pas de couple solution.

– soit les ordonnées à l'origine sont égales, c'est-à-dire $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$, alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues et tous les couples qui représentent les coordonnées des points de \mathcal{D} sont solutions du système.

$ab' - a'b \neq 0$ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes	$ab' - a'b = 0$ \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles	
	strictement 	confondues
Le système a un seul couple solution $(x_0; y_0)$.	Le système n'a pas de couple solution.	Le système a une infinité de solutions : tous les couples $(x; y)$ vérifiant l'une des équations.

Exercice : Résoudre les deux systèmes suivants : $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + 5y = 13 \end{cases}$ et $\begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 6x - 9y = 3 \end{cases}$