Chapitre X - Droites du plan

I - Caractérisation analytique d'une droite

a) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

On se propose de déterminer une équation de la droite (AB), c'est-à-dire de caractériser analytiquement l'ensemble des points de cette droite.

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à :

$$\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à :

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (x-1)\times(-4) - 3\times(y-2) = 0 \end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (x-1)\times(-4) - 3\times(y-2) = 0 \\
&\iff -4x - 3y + 10 = 0
\end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires équivaut à :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0 &\iff \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix}=0 \\
&\iff (x-1)\times(-4)-3\times(y-2)=0 \\
&\iff -4x-3y+10=0 \\
&\iff -3y=4x-10 \iff y=-\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ -2)$.

$M(x\ ;\ y)$ étant un point de la droite (AB), on obtient :
$-4x-3y+10=0 \iff y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$.

$-4x-3y+10=0$ est une **équation cartésienne** de la droite (AB).
L'**équation réduite** de cette droite est $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$.