Chapitre X : Droites du plan

Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I - Caractérisation analytique d'une droite

a) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Exemple : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on définit les points $A(1\,;\,2)$ et $B(4\,;\,-2)$.
On se propose de déterminer une équation de la droite (AB), c'est-à-dire de caractériser analytiquement l'ensemble des points de cette droite.

① ....

Théorème : Dans le plan muni d'un repère, toute droite $\mathscr{D}$ est caractérisée par une relation de la forme $ax+by+c=0$ appelée **équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.
Si $\mathscr{D}$ est non parallèle à l'axe des ordonnées, alors cette relation peut être écrite sous la forme $y=mx+p$, où m et p sont deux nombres réels constants.
On dit que $y=mx+p$ est **l'équation réduite** de la droite $\mathscr{D}$.

Démonstration : On considère une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées, et deux points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ appartenant à $\mathscr{D}$. Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan.
$M(x\,;\,y)\in\mathscr{D}$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. D'où :

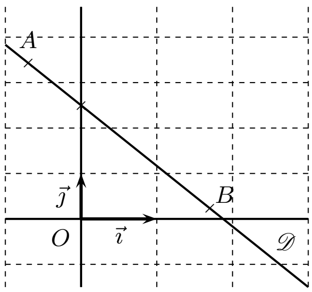
$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0 \iff \begin{vmatrix}x-x_A & x_B-x_A\\ y-y_A & y_B-y_A\end{vmatrix}=0\\ &\iff (x-x_A)(y_B-y_A)-(x_B-x_A)(y-y_A)=0\\ &\iff x(y_B-y_A)-x_A(y_B-y_A)-y(x_B-x_A)+y_A(x_B-x_A)=0.\end{aligned}$$

Les points A et B sont distincts et la droite $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, donc $x_A\neq x_B$.
On peut donc écrire :
$M(x\,;\,y)\in\mathscr{D}$ équivaut à $y=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}x-x_A\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}+y_A$.
On a obtenu une relation de la forme $y=mx+p$, avec $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et $p=-x_A\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}+y_A$.
Cette relation caractérise alors la droite $\mathscr{D}$.

Propriété : Dans le plan muni d'un repère, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.
Plus précisément, si $y=mx+p$ est l'équation réduite de $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{D}$ est la représentation graphique de la fonction affine $f : x\longmapsto mx+p$.

Définition : Le plan est muni d'un repère.
Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points quelconques d'une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées.
(AB) a ainsi une équation de la forme $y=mx+p$ où :

- .... est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.
- L'ordonnée du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=mx+p$ avec l'axe des ordonnées est égale à $\boldsymbol{p}$ et est appelée **ordonnée à l'origine** de la droite $\mathscr{D}$.
- Tout vecteur $\vec{v}$ non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé ....
  ....



Conséquences :

- Si dans un repère, une droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y=mx+p$, alors ....
  ....
- Dans un repère, si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, alors m est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$, cette identification n'étant possible que **pour un vecteur directeur d'abscisse 1**.
- Si dans un repère deux points distincts A et B ont la même **ordonnée**, alors la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses. Son coefficient directeur est alors égal à 0, et une équation de (AB) est de la forme : $\boldsymbol{y=y_A}$.

Exercice 1 : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on donne le point $A(-4\ ;\ 5)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exercice 2 : Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on donne les points $A(1\ ;\ 4)$, $B(4\ ;\ 0)$, $C(7\ ;\ 4)$.
Déterminer une équation des droites (AB) et (AC).

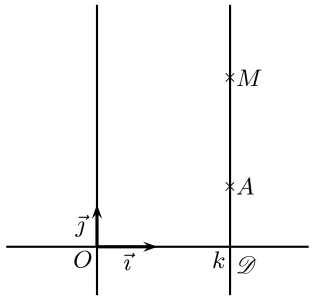
② ....

Propriété : Un point A appartient à une droite d'équation $y = mx+p$ si, et seulement si, ses coordonnées $(x_A\ ;\ y_A)$ vérifient l'équation de la droite c'est-à-dire qu'on a l'égalité $y_A = m \times x_A + p$.

b) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Théorème : Dans le plan muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $x = k$, où k est un nombre réel constant.
On dit que $\boldsymbol{x = k}$ est **l'équation réduite** de la droite $\mathscr{D}$.

Démonstration :
On considère une droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées et un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ appartenant à $\mathscr{D}$.
Pour tout point $M(x\ ;\ y)$ de la droite $\mathscr{D}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{\jmath}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{\jmath}$ colinéaires $\iff \begin{vmatrix}x-x_A & 0\\ y-y_A & 1\end{vmatrix} \iff (x-x_A)\times 1 + 0 \times (y-y_A) = 0$
c'est-à-dire $x - x_A = 0$ équivaut à $x = x_A$.



Remarque : Une droite parallèle à l'axe des ordonnées n'est pas la représentation graphique d'une fonction affine (ni d'aucune fonction).

Exercice : Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, on définit les points $E(-2\ ;\ 4)$ et $F(-2\ ;\ -1)$.
Quelle est l'équation réduite de la droite (EF) ?

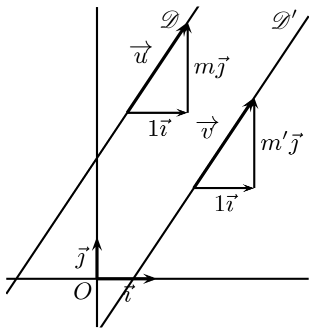
Solution : ....

....

c) Droites parallèles

Propriété : Le plan est muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.
Soient deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $y = mx+p$ et $y = m'x+p'$.
Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs m et m' sont égaux.

Démonstration : Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$.
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles équivaut à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires
$\iff 1 \times m' - 1 \times m = 0$
$\iff m = m'$.



Remarque : Si deux droites parallèles ont la même ordonnée à l'origine, alors elles sont confondues, sinon elles sont strictement parallèles.

Exercice : Soient d la droite d'équation $3x - 5y = 10$ et le point $A(2; 4)$.
Déterminer une équation de la droite d' parallèle à d et passant par A.

③ ....