d) Équations et inéquations

Théorème : Soit a un nombre réel. L'équation $x^2 = a$ admet :

- une unique solution réelle, 0 si $a = 0$;
- deux solutions réelles distinctes, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$;
- aucune solution réelle si $a < 0$.

Remarque : La conjecture du nombre de solutions de ce type d'équation peut être effectuée à l'aide de la parabole représentant la fonction carrée.

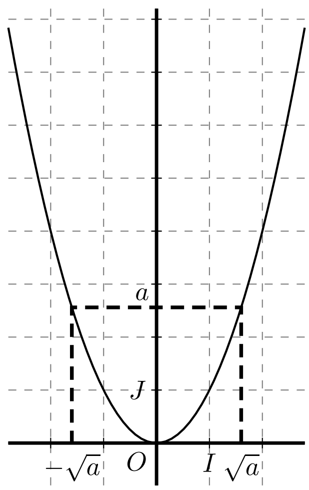
Démonstration :

- si $a = 0$, l'équation devient $x^2 = 0$ qui admet une seule solution : $x = 0$
- si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ devient $x^2 - a = 0$ c'est-à-dire $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ et ainsi $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$ d'où $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ ce qui donne $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
  Donc les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont bien, dans ce cas, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- si $a < 0$, comme $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 2 = -1$.

$3x^2 - 2 = -1 \iff 3x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{3}$.

Comme $\frac{1}{3} > 0$, les solutions de l'équation sont $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.



La résolution de toute inéquation de la forme $x^2 < a$ ou $x^2 > a$ (avec a réel peut s'effectuer à l'aide de la résolution de l'équation $x^2 = a$ et de la courbe représentant la fonction carrée.

Ainsi si $a > 0$, l'ensemble des solutions réelles de $x^2 < a$ est $]-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}[$ et l'ensemble des solutions de $x^2 > a$ est $]-\infty\,;\,-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}\,;\,-\infty[$.

Exemple : Résoudre les inéquations $x^2 < 5$ et $x^2 \geqslant 9$.

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction carrée, on conclut que :

- $x^2 < 5$ sur $]-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}[$;
- $x^2 \geqslant 9$ sur $]-\infty\,;\,-3[\cup]3\,;\,+\infty[$.