Chapitre VIII : Probabilités

I - Événements et probabilités

Définition : Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats, non tous identiques, sont prévisibles mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire.
Les résultats possibles de l'expérience sont appelés les issues.

Exemple : Les issues du lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

Définition : Un **événement** est une caractéristique supposée qui sera vérifiée (ou non) lors d'une expérience aléatoire. Lorsque c'est le cas, on dit que l'événement est réalisé.
Mathématiquement, un événement est une partie de l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemple : Lors du jet d'un dé à six faces, l'événement : « le nombre sorti est compris entre 2 et 4 » est réalisé par les trois issues : « le 2 est sorti » ; « le 3 est sorti » et « le 4 est sorti ».

Définition :

- Un **événement est élémentaire** si une seule issue le réalise. On peut les noter e_1, e_2, $\ldots e_n$. Un événement élémentaire est aussi appelé une **éventualité**.
- L'ensemble des événements élémentaires est appelé **univers** : on note $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
- Un événement jamais réalisé est dit **impossible** : aucune issue ne le réalise. Cet événement est noté $\emptyset$.
- Un événement toujours réalisé est dit **certain** (c'est Ω) : toutes les issues le réalisent.
- **L'événement contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. Il est noté $\overline{A}$.
- Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemples : Dans le tirage d'une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes :

- L'événement : « le roi de cœur est tiré » est un événement élémentaire.
- L'événement : « un trois est tiré » est un événement impossible.
- L'événement : « une carte du jeu est tirée » est un événement certain.
- L'événement contraire de : « la carte tirée est un nombre à cœur » est : « la carte n'est pas un cœur ou bien une figure ». Cela peut être un pique, trèfle ou carreau, voire une figure de cœur.
- Un événement non élémentaire est par exemple : « un as est tiré » (il y a 4 éventualités : chacun des 4 as).
- Deux événements incompatibles sont par exemple : « une figure est tiré » et « un 10 est tiré ».

Définition : À chaque événement élémentaire $\{e_i\}$, on associe un nombre p_i, appelé **probabilité de** $\{e_i\}$ tel que $0 \leqslant p_i \leqslant 1$. On note $P(e_i) = p_i$.
En outre $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. On dit que l'on a défini une probabilité sur Ω.
La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A.
La probabilité d'un événement est comprise entre 0 (l'événement est impossible) et 1 (l'événement est certain).

Définition - propriété : Dire que les événements élémentaires sont **équiprobables** signifie que $P(e_i) = P(e_j)$, pour tous i et j.

Si leur nombre est n, alors $P(e_i) = \dfrac{1}{n}$, et la probabilité d'un événement A est donnée par :
$P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.

Propriété : Pour tout événement A, on a l'égalité $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

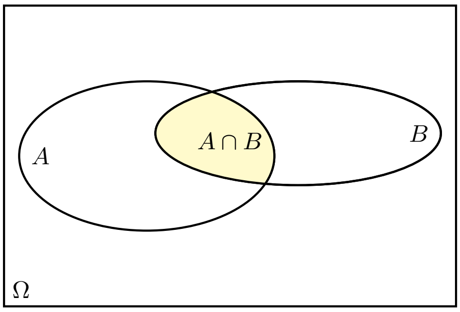
II - Événement « A et B », événement « A ou B »

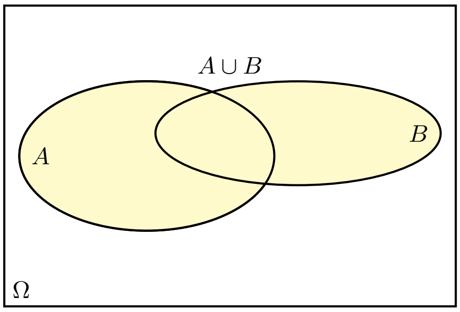
a) Représentation

Définition :

- Soient A et B deux événements. On note $A \cap B$ l'événement « ***A* et *B*** ». Il contient tous les éléments communs à A et B.
  Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles**.
- On note $A \cup B$ l'événement « ***A* ou *B*** ». Il contient tous les éléments qui sont dans A ainsi que tous les éléments qui sont dans B.

Remarque : Le **diagramme de Venn** permet de représenter les différents événements.





Exercice : Un sac contient 12 jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard.
On considère les événements suivants :

- A : « Le numéro du jeton tiré est pair ».
- B : « Le numéro du jeton tiré est un multiple de 3 ».

1. Quels sont les événements élémentaires qui composent A et B ?
   Recopier et compléter : $A = \{\cdots\}$ et $B = \{\cdots\}$.
2. Décrire de même les événements :
   - $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A}$ • $\overline{B}$
   - $\overline{A \cup B}$ • $\overline{A \cap B}$ • $\overline{A} \cap \overline{B}$ • $\overline{A} \cup \overline{B}$
3. Certains de ces événements sont-ils identiques ?
4. Décrire les événements suivants par une phrase :
   - $A \cap B$ • $A \cup B$ • $\overline{A}$

Solution :

1. $A = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$ et $B = \{3 ; 6 ; 9 ; 12\}$.
2. - $A \cap B = \{6 ; 12\}$
   - $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12\}$
   - $\overline{A} = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11\}$
   - $\overline{B} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11\}$
   - $\overline{A \cup B} = \{1 ; 5 ; 7 ; 11\}$
   - $\overline{A \cap B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$
   - $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1 ; 5 ; 7 ; 11\}$
   - $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12\}$
3. On obtient : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $A \cap B$: « le numéro du jeton tiré est pair et est un multiple de 3 ».
   $A \cup B$: « le numéro du jeton tiré est pair ou est un multiple de 3 ».
   $\overline{A}$: « le numéro tiré n'est pas pair ».

b) Propriétés des probabilités

Si les événements A et B ont des issues en commun, $(A \cap B \neq \emptyset)$, dans la somme $p(A) + p(B)$, on compte deux fois les probabilités des issues communes.

Propriété : La probabilité de la réunion de A et de B est $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Cas particulier : **Si A et B sont incompatibles**, $(A \cap B = \emptyset)$, on a l'égalité : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

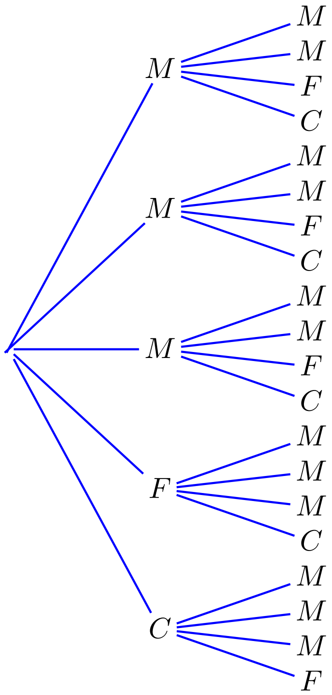
c) Utilisation d'un arbre

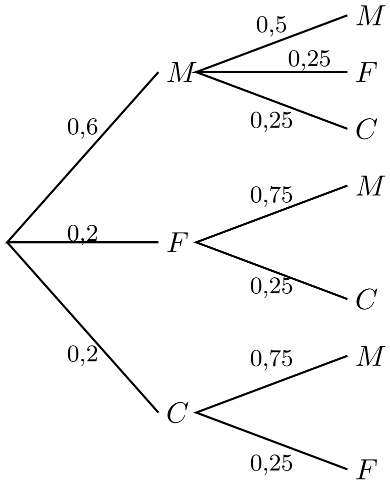
Exemple : Un paquet contient cinq bonbons :

- trois à la myrtille ;
- un à la framboise ;
- un au citron.

Sandrine prend au hasard 2 bonbons l'un après l'autre.

1. Antoine a dessiné l'arbre des possibles ci-dessous.





Dresser un autre arbre, plus petit que le précédent.

2. Combien cette expérience aléatoire a-t-elle d'issues ?

3. Quelle est la probabilité :

   (a) que Sandrine mange deux bonbons à la myrtille ?

   (b) que Sandrine mange au moins un bonbon à la myrtille ?

   (c) que Sandrine ne mange pas de bonbons à la myrtille ?

Solution :

2. Cette expérience aléatoire a 20 issues.

3. (a) La probabilité cherchée vaut $\dfrac{6}{20} = 0{,}03$. On peut aussi la calculer par : $0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$.

   (b) La probabilité cherchée vaut $\dfrac{18}{20} = 0{,}9$.
   On peut aussi la calculer par : $0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}75 + 0{,}2 \times 0{,}75 = 0{,}9$.

   (c) On cherche la probabilité de l'événement contraire du précédent. Donc la probabilité cherchée vaut $1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

III - Fluctuation d'échantillonnage

Lorsqu'on étudie un caractère d'une population, la connaissance de la population entière n'est en général pas envisageable. On doit se contenter de la connaissance d'un **échantillon** de cette population.
Pour prendre des décisions, il est important que l'échantillon soit prélevé **au hasard**.

Définition : On appelle **échantillon de taille n** une liste de n résultats obtenus par répétitions indépendantes d'une même **expérience aléatoire**.

Exemple : Simulation du lancer de 100 dés à l'aide d'un tableur (OpenOffice).
On pourrait utiliser la fonction ALEA() du tableur qui renvoie un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].
Mais il y a une fonction plus pratique pour notre exemple : ALEA.ENTRE.BORNES qui renvoie un entier choisi aléatoirement entre deux valeurs données.
On écrit alors dans la case A1 : =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ;6)
À l'aide de la poignée de recopie, on tire la formule vers le bas jusqu'en A100. On obtient alors l'équivalent sur tableur de 100 lancers d'un dé.

Définition : Pour une population donnée, des échantillons aléatoires produits suivant le même protocole peuvent avoir des compositions différentes : on dit qu'il y a **fluctuation d'échantillonnage**.

En reprenant l'exemple précédent conçu à l'aide du tableur, on obtient 100 nouveaux lancers en appuyant sur les touches Ctrl ⇑ (Shift) F9.

Remarque : La fréquence f d'un caractère dans l'échantillon n'est pas nécessairement égale à la proportion p de ce caractère dans la population.

Exemple : On compte le nombre de valeurs correspondant au critère recherché. Sur le tableur, on utilise la fonction NB.SI :
par exemple pour déterminer le nombre de fois où le 6 est apparu au cours des 100 lancers présents dans la plage de saisie A1:A100, on écrit en B1 : =NB.SI(A1:A100 ;6).
En B2, on calcule alors la fréquence d'apparition du nombre 6 par la formule =B1/100.

On constate que cette fréquence varie d'une expérience à l'autre. Par contre elle reste relativement proche de la valeur $\frac{1}{6}$.

Exercice : Écrire un algorithme sous la forme d'une fonction simulant le lancer de 100 dés bien équilibrés et calculant la fréquence d'apparition de la face numéro 6.

Solution :

```
fonction Frequence6() :
    nb6 ← 0
    Pour n allant de 1 à 100 Faire
        face est un entier aléatoire entre 1 et 6
        Si face = 6 alors
            nb6 prend la valeur nb6+1
        Fin Si
    Fin Pour
    freq6 = nb6/100
    retourner la valeur freq6
```

Fonction créée sous Python :

```python
from random import *
def Frequence6() :
    nb6 = 0
    for n in range(100) :
        face=randint(1,6)
        if face==6 :
            nb6=nb6+1
    freq6=nb6/100
    return freq6
```

Exercice : Comment modifier la fonction précédente pour l'appliquer à un nombre quelconque de tirages ?

Solution : On ajoute un argument à la fonction : Frequence6(nbTirage) :
Ensuite dans le corps de la fonction on remplace 100 par nbTirage.
Frequence6(100) sera alors l'équivalent de la fonction écrite ci-dessus.
Frequence6(1000) renverra cette fois-ci la fréquence de 6 dans le cas de 1000 jets de dé.

Loi des grands nombres :
Si on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la fréquence d'un caractère fini par se stabiliser autour de la probabilité d'apparition (ou proportion) de ce caractère.
version numérique
Propriété :
Soit un caractère dont la proportion dans une population donnée est p.

Lorsque n est grand, la fréquence observée f d'individus présentant le caractère étudiée dans cette population est telle que $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f - p \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dans un majorité des cas.

Repartons de la simulation de 100 lancers d'un dé bien équilibré.

Pour chaque simulation, la fréquence f obtenue devrait être proche de $\dfrac{1}{6}$. D'après la propriété précédente, cette fréquence devrait vérifier $-\dfrac{1}{\sqrt{100}} \leqslant f - \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{100}}$

c'est-à-dire $-\dfrac{1}{10} \leqslant f - \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{10} \iff \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{10} \leqslant f \leqslant \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{10} \iff \dfrac{1}{15} \leqslant f \leqslant \dfrac{4}{15}$.

Construire une fonction qui réalisera 500 fois cette expérience et qui déterminera le nombre de fois où f est dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{15}\ ;\ \dfrac{4}{15}\right]$.

```python
def echantillon():
    nbCas=0
    for i in range(500):
        if 1/15<=Frequence6(100)<=4/15:
            nbCas=nbCas+1
    return nbCas
```