Chapitre XIII : Valeur absolue

I - Définition

Le nombre réel $|x|$ est la distance entre x et 0 et se lit « valeur absolue de x ».

Donc $|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geqslant 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$

Exemples : $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geqslant 0$.

Propriété : x et y sont deux nombres réels.

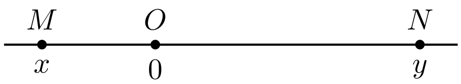
1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

Définition : La distance entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $|x - y|$ ou encore $|y - x|$.

Exemples :
- $|3 - 5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5 - 3 = 2$.
- $|-2 - 3|$ est la distance entre les réels -2 et 3. Cette distance est égale à $3 - (-2) = 5$.
- $\left|\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}\right|$ est la distance entre les réels $\dfrac{3}{2}$ et $\sqrt{3}$. Cette distance est égale à $\sqrt{3} - \dfrac{3}{2}$ car $\dfrac{3}{2} < \sqrt{3}$.

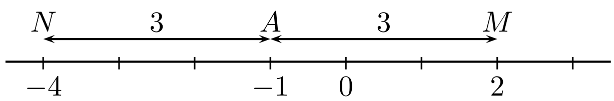
Interprétation graphique de $|x - y|$

Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.
$|x - y|$ est la distance entre les points M et N, c'est-à-dire MN.



Application : Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note a, b et x les abscisses respectives des points A, B et M.
L'égalité $|x - a| = |x - b|$ se traduit par $MA = MB$, avec A, B et M alignés :
cela signifie que M est le milieu du segment $[AB]$.

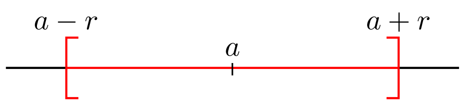
Exercice : Trouver tous les nombres x tels que $|x + 1| = 3$.
A et M sont les points d'abscisses respectives -1 et x sur une droite graduée : $AM = |x - (-1)| = |x + 1|$.
Trouver tous les nombres x tels que $|x+1| = 3$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que $AM = 3$.
Les nombres cherchés sont donc : 2 et -4.



II - L'inégalité $|x - a| \leqslant r$ (a et r fixés, $r > 0$)

Propriété : a est un réel, r est un réel strictement positif.
Dire que $|x - a| \leqslant r$ équivaut à dire que x appartient à l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

Démonstration : $|x - a| \leqslant r$ signifie que la distance de x à a est inférieure ou égale à r, c'est-à-dire que x appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.



Donc $|x - a| \leqslant r$ équivaut à dire que x appartient à $[a - r ; a + r]$ donc équivaut à dire que $a - r \leqslant x \leqslant a + r$.

Application : **test d'égalité de nombres réels sur un ordinateur**
En python, le test d'une égalité de deux nombres entiers se fait simplement : `a == b`.
Ce test ne fonctionne pas toujours avec des nombres non entiers, leur représentation dans un ordinateur n'étant pas toujours exacte (y compris pour certains décimaux).
Par exemple `0.1+0.2 == 0.3` renvoie la valeur `False` alors que `0.1+0.3 == 0.4` renvoie `True`.
De même `1-1/3 == 2/3` renvoie False alors qu'on a pourtant égalité.

En python (mais comme dans tout langage de programmation), pour tester l'égalité entre deux valeurs, on vérifie si l'écart entre ces deux nombres est très faible (inférieur à 10^{-10} est en général suffisant).

Par exemple, nous avons vu que `1-1/3 == 2/3` renvoyait la valeur False, alors qu'il y a pourtant égalité, mathématiquement parlant.
Le test de cette égalité sur un ordinateur peut donc être converti sous la forme :
`abs(1-1/3-2/3)<1e-10` qui vaut cette fois True.

Exemple : Nous allons créer une fonction qui permet de vérifier si, dans un repère orthonormé, un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r.
On rappelle que M est sur le cercle de centre A et de rayon r si et seulement si $AM = r$. Nous devrons donc calculer la distance AM et vérifier si elle est égale à r. Cette fonction aura donc 5 arguments `x`, `y`, `xA`, `yA` et `r`. Voici l'algorithme en français et en python :

En français

fonction appartientCercle(x, y, xA, yA, r) :
  AM=$\sqrt{(\text{x}-\text{xA})^2+(\text{y}-\text{yA})^2}$
  si AM = r :
    renvoyer Vrai
  sinon :
    renvoyer Faux

En python

```python
from math import sqrt
def appartientCercle(x, y, xA, yA, r):
    AM=sqrt((x-xA)**2+(y-yA)**2)
    if abs(AM-r) < 1e-10:
        return True
    else :
        return False
```

Pour que cette fonction puisse être utilisée avec des nombres réels, on utilise l'expression
`abs(AM-r) < 1e-10:` qui se traduit mathématiquement pas $|\text{AM}-\text{r}| < 10^{-10}$ plutôt que l'égalité `AM == r` qui ne fonctionnerait qu'avec les entiers.