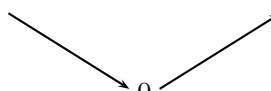


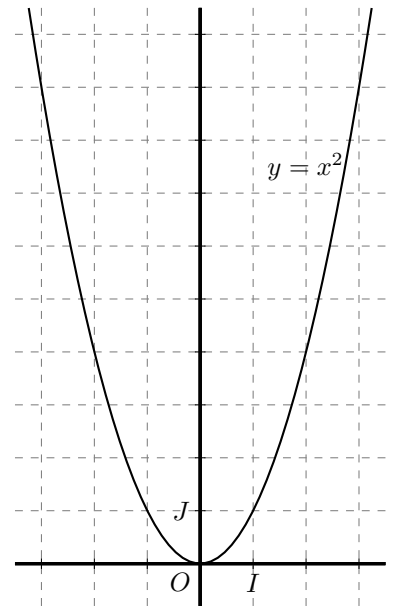
Chapitre IX : Étude de deux fonctions de référence

I - Fonction carrée

a) Synthèse sur la fonction carrée

- La fonction carrée est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
- Sa courbe représentative est une parabole.
- Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. La courbe représentative est alors située au-dessus de l'axe des abscisses.
- Pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$ donc la fonction carrée est **paire**. Sa courbe représentative admet ainsi **l'axe des ordonnées pour axe de symétrie**.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			



Conséquence des variations de la fonction carrée :

- La fonction carrée étant strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, pour tous réels a et b négatifs, si $a < b$ alors $a^2 > b^2$ (l'application de la fonction **change** l'ordre).
- La fonction carrée étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, pour tous réels a et b positifs, si $a < b$ alors $a^2 < b^2$ (l'application de la fonction **conserve** l'ordre).
- Si a et b sont de signe contraire, on ne peut pas comparer leurs carrés si ce n'est en les calculant.

Exemple : Comparer les nombres suivants sans calculatrice.

- $1,325^2$ et $1,874^2$
- $(-2,7)^2$ et $(-2,978)^2$
- π^2 et $3,1^2$
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ et $(-0,6)^2$

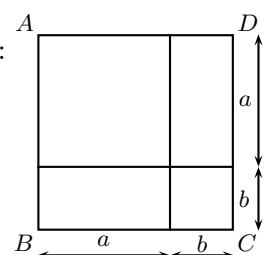
Solution : On peut s'aider de la courbe : on positionne les nombres proposés correctement sur l'axe des abscisses et on compare alors facilement les images de ces nombres par la fonction carrée.

- 1,325 et 1,874 sont deux réels positifs avec $1,325 < 1,874$, ainsi $1,325^2 < 1,874^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- -2,7 et -2,978 sont deux réels négatifs avec $-2,7 > -2,978$, ainsi $(-2,7)^2 < (-2,978)^2$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.
- π et 3,1 sont deux réels positifs avec $\pi > 3,1$, ainsi $\pi^2 > 3,1^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- $-\frac{2}{3}$ et -0,6 sont deux réels négatifs avec $-\frac{2}{3} < -0,6$, ainsi $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 < (-0,6)^2$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

b) Identités remarquables

Propriété : Pour tous réels a et b , chaque ligne du tableau suivant décrit une égalité :

Forme factorisée	Forme développée
$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b)$	$a^2 - b^2$



On considère le carré $ABCD$ ci-contre dont l'aire vaut $(a+b)^2$.

Il a été décomposé en 2 carrés et 2 rectangles.

Un premier carré a pour aire a^2 , l'autre b^2 .

Les deux rectangles ont la même aire ab .

Ceci nous permet d'écrire l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

La deuxième égalité est obtenue à partir de la première en remplaçant b par $-b$ ($(-b)^2$ étant égal à b^2).

Exemple : Développer les expressions suivantes : $(y-11)^2$; $(2x+3)^2$.

- $(y-11)^2 = y^2 - 2 \times y \times 11 + 11^2 = y^2 - 22y + 121$.
- $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

c) Équations et inéquations

Théorème : Soit a un nombre réel. L'équation $x^2 = a$ admet :

- une unique solution réelle, 0 si $a = 0$;
- deux solutions réelles distinctes, \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$ si $a > 0$;
- aucune solution réelle si $a < 0$.

Remarque : La conjecture du nombre de solutions de ce type d'équation peut être effectuée à l'aide de la parabole représentant la fonction carrée.

Démonstration :

- si $a = 0$, l'équation devient $x^2 = 0$ qui admet une seule solution : $x = 0$
- si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ devient $x^2 - a = 0$ c'est-à-dire $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ et ainsi $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$
d'où $x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$ ce qui donne $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
Donc les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont bien, dans ce cas, \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$
- si $a < 0$, comme $x^2 \geq 0$ pour tout réel x , l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3x^2 - 2 = -1$.

$$3x^2 - 2 = -1 \iff 3x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{3}.$$

Comme $\frac{1}{3} > 0$, les solutions de l'équation sont $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

La résolution de toute inéquation de la forme $x^2 < a$ ou $x^2 > a$ (avec a réel) peut s'effectuer à l'aide de la résolution de l'équation $x^2 = a$ et de la courbe représentant la fonction carrée.

Ainsi si $a > 0$, l'ensemble des solutions réelles de $x^2 < a$ est $]-\sqrt{a}; \sqrt{a}[$ et l'ensemble des solutions de $x^2 > a$ est $]-\infty; -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}; +\infty[$.

Exemple : Résoudre les inéquations $x^2 < 5$ et $x^2 \geq 9$.

En s'aidant de la courbe représentative de la fonction carrée, on conclut que :

- $x^2 < 5$ sur $]-\sqrt{5}; \sqrt{5}[$;
- $x^2 \geq 9$ sur $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$.

