Chapitre VII - Fonctions polynômes

Exercice bilan

Une entreprise familiale fabrique des objets en bois.
On suppose qu'elle vend tous les objets qu'elle fabrique. La fabrication peut varier entre 0 et 18 objets. On appelle x le nombre d'objets fabriqués et vendus par l'entreprise.

Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets est donné par la fonction f définie par
$f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68$ dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68$ dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

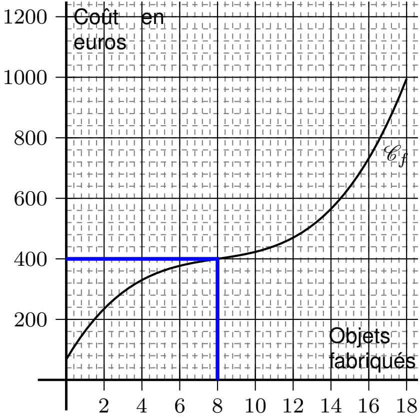
(a) Les coûts fixes sont les coûts existants avant même d'avoir commencé à produire. C'est donc $f(0)$.
Or $f(0) = 68$ donc les coûts fixes s'élèvent à 68 €.

Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68$ dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

(b) $f(6) = \dfrac{1}{2} \times 6^3 - 12 \times 6^2 + 105,5 \times 6 + 68 = 377$.
Donc le coût de fabrication de 6 objets s'élève à 377 €.

Le coût de fabrication en euros d'un nombre x d'objets est donné par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68$ dont on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-contre.

(c) On résout graphiquement $f(x) = 400$. On obtient alors $x = 8$. Donc le coût de fabrication est de 600 € lorsqu'on produit 8 objets.



Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.

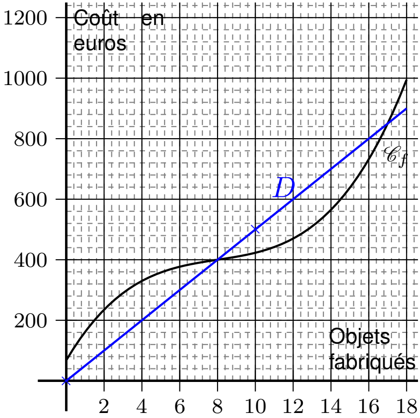
(a) Un objet est vendu 50 € donc pour x objets le prix de vente sera de $50 \times x$ €.
Ainsi $g(x) = 50x$.

Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.

(b) g est représentée par une droite (c'est une fonction affine - même linéaire). On cherche alors l'image de deux nombres par g :
$g(0) = 0$ et $g(10) = 500$ ce qui nous permet de placer deux points et ainsi tracer la droite.

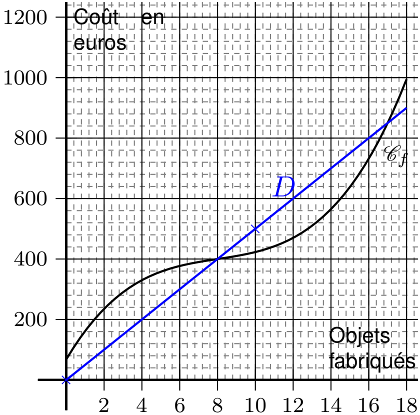
Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.

(b) g est représentée par une droite (c'est une fonction affine - même linéaire). On cherche alors l'image de deux nombres par g :
$g(0) = 0$ et $g(10) = 500$ ce qui nous permet de placer deux points et ainsi tracer la droite.



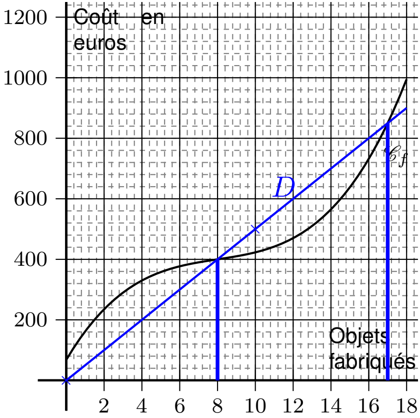
Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.

(c) On cherche quand $g(x) \geqslant f(x)$ c'est-à-dire quand la droite est au-dessus de la courbe.
Graphiquement l'entreprise réalise un bénéfice entre 8 et 17 objets fabriqués et vendus.



Chaque objet fabriqué est vendu 50 €.

(c) On cherche quand $g(x) \geqslant f(x)$ c'est-à-dire quand la droite est au-dessus de la courbe.
Graphiquement l'entreprise réalise un bénéfice entre 8 et 17 objets fabriqués et vendus.



(a) $h(x) = g(x) - f(x) =$ recette $-$ coûts
Donc $h(x)$ représente le bénéfice réalisé pour la fabrication et la vente de x objets.

(b) $h(x) = 50x - \left(\dfrac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68\right)$

(b) $$\begin{aligned} h(x) &= 50x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68\right) \\ &= 50x - \frac{1}{2}x^3 + 12x^2 - 105,5x - 68 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} h(x) &= 50x - \left(\frac{1}{2}x^3 - 12x^2 + 105,5x + 68\right) \\ &= 50x - \frac{1}{2}x^3 + 12x^2 - 105,5x - 68 \\ &= -\frac{1}{2}x^3 + 12x^2 - 55,5x - 68. \end{aligned}$$

(c) $h(8) = -\dfrac{1}{2} \times 8^3 + 12 \times 8^2 - 55,5 \times 8 - 68 = 0$

(c) $h(8) = -\dfrac{1}{2} \times 8^3 + 12 \times 8^2 - 55,5 \times 8 - 68 = 0$

$h(-1) = -\dfrac{1}{2} \times (-1)^3 + 12 \times (-1)^2 - 55,5 \times (-1) - 68 = 0$

(c) $h(8) = -\dfrac{1}{2} \times 8^3 + 12 \times 8^2 - 55,5 \times 8 - 68 = 0$

$h(-1) = -\dfrac{1}{2} \times (-1)^3 + 12 \times (-1)^2 - 55,5 \times (-1) - 68 = 0$

$h(17) = -\dfrac{1}{2} \times 17^3 + 12 \times 17^2 - 55,5 \times 17 - 68 = 0$

(d) D'après la question précédente, on obtient les 3 racines du polynôme : 8 ; -1 et 17.

(d) D'après la question précédente, on obtient les 3 racines du polynôme : 8 ; -1 et 17.
De plus le coefficient devant x^3 est $-\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond à la valeur de a dans l'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

(d) D'après la question précédente, on obtient les 3 racines du polynôme : 8 ; -1 et 17.
De plus le coefficient devant x^3 est $-\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond à la valeur de a dans l'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
Donc la forme factorisée de $h(x)$ est
$$-\frac{1}{2}(x-8)(x-(-1))(x-17)$$

(d) D'après la question précédente, on obtient les 3 racines du polynôme : 8 ; -1 et 17.
De plus le coefficient devant x^3 est $-\dfrac{1}{2}$, ce qui correspond à la valeur de a dans l'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
Donc la forme factorisée de $h(x)$ est
$-\dfrac{1}{2}(x-8)(x-(-1))(x-17) = -\dfrac{1}{2}(x-8)(x+1)(x-17)$.

(e) On construite le tableau en plaçant les racines dans l'ordre.

x	$-\infty$	-1	8	17	$+\infty$
signe de $-\frac{1}{2}$					
signe de $x-8$					
signe de $x+1$					
signe de $x-17$					
signe du produit					

(e) On donne le signe de chacun des facteurs : $-\dfrac{1}{2}$ est d'un signe constant, les autres étant des facteurs affines.

x	$-\infty$		-1		8		17		$+\infty$
signe de $-\frac{1}{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
signe de $x-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $x-17$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe du produit			|		|		|		

(e) On utilise la règle des signes pour trouver le signe du produit.

x	$-\infty$		-1		8		17		$+\infty$
signe de $-\frac{1}{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
signe de $x-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $x-17$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Étude du bénéfice

(f)

x	$-\infty$		-1		8		17		$+\infty$
signe de $-\frac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	
signe de $x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-17$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On cherche à résoudre $h(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,18]$.
D'après le tableau de signes $h(x) \geqslant 0$ sur $[8\,;\,17]$.
Donc l'entreprise réalise un bénéfice entre 8 et 17 objets fabriqués et vendus.