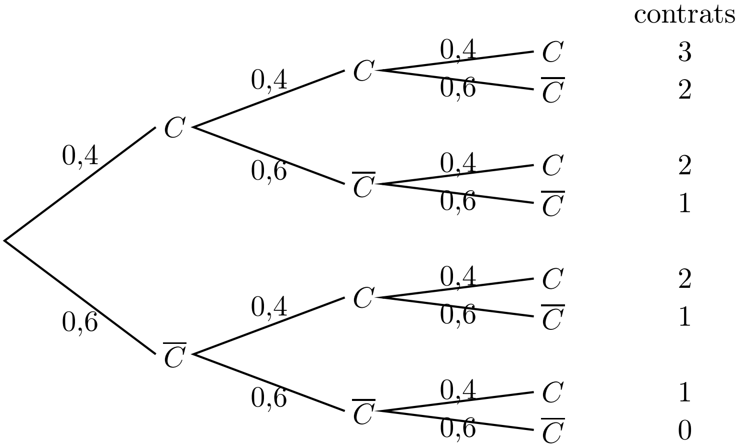
Exercices sur la répétition d'épreuves de Bernoulli

Exercice 41 p. 158



1. On complète l'arbre par le nombre de personnes concluant un contrat à la fin de chaque chemin.

2. Il y a 4 chemins qui conduisent à la valeur 2. La probabilité sur chacun de ces chemins vaut $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6$.
   Donc la probabilité que deux personnes concluent un contrat (sur les 3 personnes démarchées) vaut :
   $4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}384$.

3. Il n'y a qu'un seul chemin conduisant à « aucune personne ne conclut de contrat ». Donc la probabilité cherchée vaut $0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}216$.

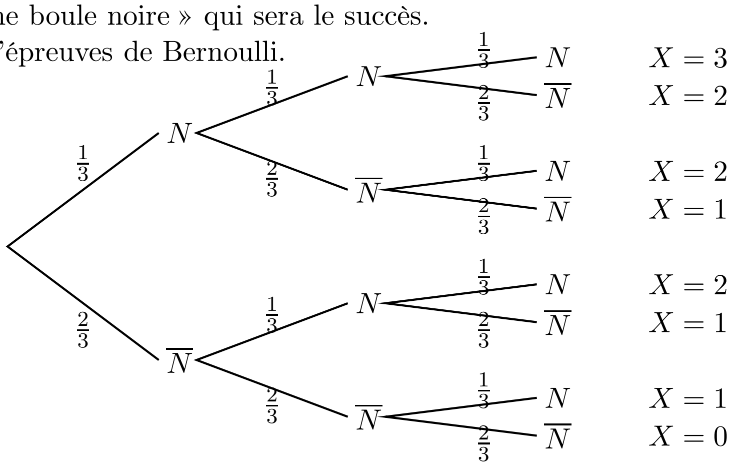
4. « Au plus deux personnes signent un contrat » signifie qu'il y en a 2 ou moins.
   Donc on peut calculer la probabilité d'en avoir 0 ; 1 ou 2. Il est cependant plus simple de passer par l'événement contraire qui est la probabilité que les 3 signent un contrat.

   Cette probabilité vaut $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064$. Donc la probabilité cherchée vaut $1 - 0{,}064 = 0{,}936$.

Exercice 42 p. 158

Cet exercice doit vous faire penser à celui qui a été traité en classe, sauf qu'ici vous avez trois boules à tirer.

1. Après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne. Il y a ainsi indépendance d'un tirage à l'autre.
   De plus, on s'intéresse à l'événement « tirer une boule noire » qui sera le succès.
   Donc nous sommes bien dans une répétition d'épreuves de Bernoulli.

   Au cours de chaque tirage, la probabilité de tirer une boule noire vaut $\dfrac{5}{7+5+3} = \dfrac{1}{3}$.
   Il est alors judicieux de construire un arbre, N étant l'événement « tirer une boule noire ».
   On y ajoute les valeurs de X au bout des branches.

2. $P(X = 1) = 3 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

3. $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$, ce calcul étant assez long, il est judicieux de passer par l'événement contraire :

   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{19}{27}$.

4. Pour obtenir l'espérance, on doit tout d'abord construire la loi de probabilité de X.

x_i	3	2	1	0
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{8}{27}$

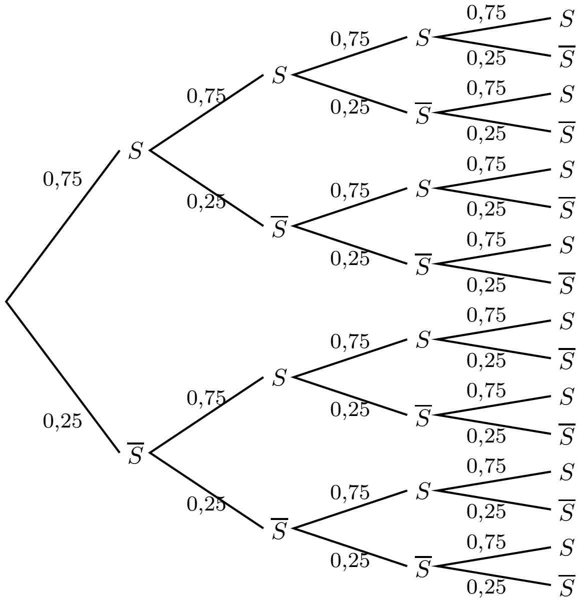
   $E(X) = 3 \times \dfrac{1}{27} + 2 \times \dfrac{2}{9} + 1 \times \dfrac{4}{9} + 0 \times \dfrac{8}{27} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} = 1$.

Exercice 61 p. 161

On choisit de manière aléatoire et indépendante 4 candidats. Nous sommes bien dans une répétition d'épreuves de Bernoulli.

On considère comme étant un succès, le fait que le candidat ait eu son code du premier coup.

On peut représenter cette situation par un arbre :



1. On regarde le nombre de chemin menant à chaque événement $X = 0$, $X = 1$, ... sur l'arbre et on le multiplie par la probabilité de suivre chacun de ses chemins.

   $P(X = 0) = 1 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \simeq 0{,}004$

   $P(X = 1) = 4 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}75 \simeq 0{,}047$

   $P(X = 2) = 6 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \simeq 0{,}211$

   $P(X = 3) = 4 \times 0{,}25 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \simeq 0{,}422$

   $P(X = 4) = 1 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}75 \simeq 0{,}316$

2. La probabilité d'avoir au moins un candidat ayant réussi son code du premier coup peut être écrite : $P(X \geqslant 1)$.

   Deux façons de la calculer :

   $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \simeq 0{,}996$

   ou $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 0{,}996$