

Exercice 56 p. 92

f est une fonction polynôme de degré 3, donc elle s'écrit sous la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Or cette fonction admet pour racines 1 ; -2 et 4, ce qui donne x_1, x_2 et x_3 .

On a alors $f(x) = a(x - 1)(x - (-2))(x - 4) = a(x - 1)(x + 2)(x - 4)$.

Il nous reste à déterminer a .

$$\begin{aligned} \text{Or } f(0) = 16, \text{ ce qui donne } & a(0 - 1)(0 + 2)(0 - 4) = 16 \\ & a \times (-1) \times 2 \times (-4) = 16 \\ & 8a = 16 \\ & a = \frac{16}{8} = 2 \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2(x - 1)(x + 2)(x - 4)$.

Exercice 66 p. 95

f est définie sur $[15 ; 30]$ par $f(x) = -2x^2 + 90x - 400$ (attention car c'est une fonction polynôme de degré 2 ici).

1. On calcule $f(5)$ et $f(40)$.

$$f(5) = -2 \times 5^2 + 90 \times 5 - 400 = 0 \text{ donc } 5 \text{ est une racine de } f(x).$$

$$f(40) = -2 \times 40^2 + 90 \times 40 - 400 = 0 \text{ donc } 40 \text{ est une racine de } f(x).$$

2. La forme factorisée de $f(x)$ est $a(x - x_1)(x - x_2)$ où a est le coefficient devant x^2 , x_1 et x_2 les racines du polynôme.

$$\text{Ainsi } f(x) = -2(x - 5)(x - 40).$$

3. On peut dans un premier temps construire le tableau de signes de $f(x)$ sur \mathbb{R} puis se limiter à $[15 ; 30]$:

x	$-\infty$	5	40	$+\infty$
signe de -2	$-$	$-$	$-$	$-$
signe de $x - 5$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x - 40$	$-$	$-$	0	$+$
signe du produit	$-$	0	$+$	0

Puis en se limitant à l'intervalle $[15 ; 30]$:

x	15	30
signe de $f(x)$		+

4. Les racines du polynôme étant 5 et 40, le polynôme admettra un extremum en $\frac{5 + 40}{2} = 22,5$.

5. Comme $a = -2 < 0$, la fonction admet un maximum en 22,5.

$$\text{Ce maximum vaut } f(22,5) = -2(22,5 - 5)(22,5 - 40) = 612,5$$

On obtient alors le tableau de variations (sur l'intervalle $[15 ; 30]$) - on calcule aussi les images de 15 et 30 :

x	15	22,5	30
f	500	612,5	500

6. Comme $f(x) > 0$ sur tout l'intervalle $[15 ; 30]$, on conclut que l'entreprise réalise du profit quelle que soit la quantité produite entre 1500 et 3000.

Par contre le profit sera maximal quand elle produira 2250 ventilateurs.