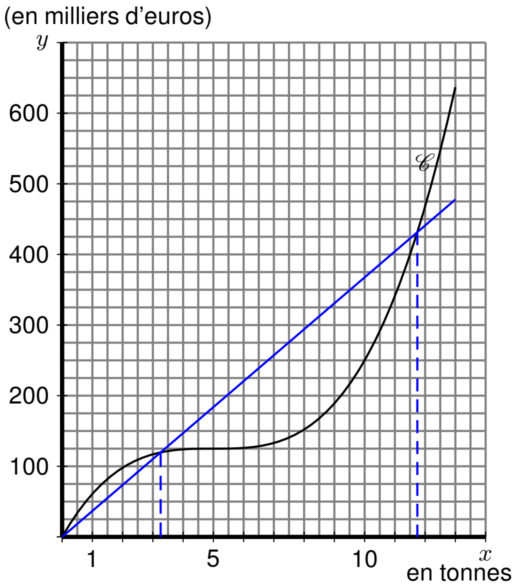
Chapitre V - Dérivation

III - Sens de variation d’une fonction et signe du nombre dérivé

<u>Exercice :</u>
Une entreprise fabrique et commercialise un produit. Sa capacité de production, sur un mois, lui permet de réaliser entre 0 et 13 tonnes de ce produit. On désigne par x le nombre de tonnes de produit fabriqué par l’entreprise en un mois.
Le coût de production, exprimé en milliers d’euros, est donné par :
$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x$.
Cette entreprise vend l’intégralité de ce qu’elle produit au prix de $36,75$ milliers d’euros la tonne.
La recette, pour x tonnes produites, est notée $R(x)$, exprimée en milliers d’euros. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction C sur l’intervalle $[0\ ;\ 13]$.

III - Sens de variation d’une fonction et signe du nombre dérivé



1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

   C est dérivable sur $[0\,;\,13]$ et pour tout $x \in [0\,;\,13]$,
   $C'(x) = 3x^2 - 15 \times 2x + 75 = 3x^2 - 30x + 75$.

1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.

   C est dérivable sur $[0\ ;\ 13]$ et pour tout $x \in [0\ ;\ 13]$,
   $C'(x) = 3x^2 - 15 \times 2x + 75 = 3x^2 - 30x + 75$.
   De plus
   $3(x-5)^2 = 3(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2) = 3(x^2 - 10x + 25) = 3x^2 - 30x + 75$.

1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0~;~13]$.

   C est dérivable sur $[0~;~13]$ et pour tout $x \in [0~;~13]$,
   $C'(x) = 3x^2 - 15 \times 2x + 75 = 3x^2 - 30x + 75$.
   De plus
   $3(x-5)^2 = 3(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2) = 3(x^2 - 10x + 25) = 3x^2 - 30x + 75$.
   Ainsi $C'(x) = 3(x-5)^2$

1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

   C est dérivable sur $[0\,;\,13]$ et pour tout $x \in [0\,;\,13]$,
   $C'(x) = 3x^2 - 15 \times 2x + 75 = 3x^2 - 30x + 75$.
   De plus
   $3(x-5)^2 = 3(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2) = 3(x^2 - 10x + 25) = 3x^2 - 30x + 75$.
   Ainsi $C'(x) = 3(x-5)^2$ et on en déduit que $C'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,13]$.

1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l’intervalle $[0\,;\,13]$.

   C est dérivable sur $[0\,;\,13]$ et pour tout $x \in [0\,;\,13]$,
   $C'(x) = 3x^2 - 15 \times 2x + 75 = 3x^2 - 30x + 75$.
   De plus
   $3(x-5)^2 = 3(x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2) = 3(x^2 - 10x + 25) = 3x^2 - 30x + 75$.
   Ainsi $C'(x) = 3(x-5)^2$ et on en déduit que $C'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,13]$. On en conclut que C est croissante sur $[0\,;\,13]$.

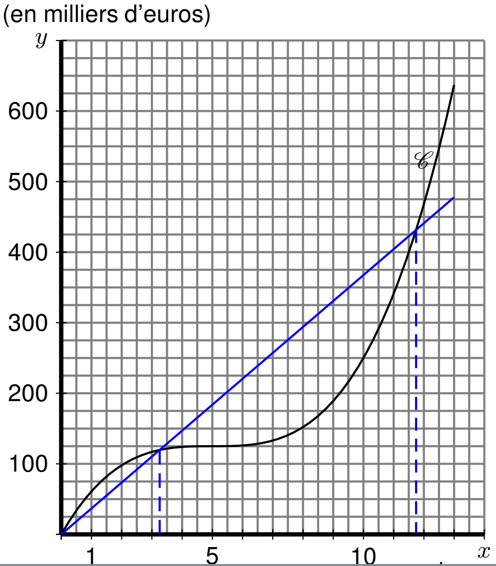
2.(a) Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x et représenter la fonction R dans le même repère que $\mathscr{C}$.

Chaque tonne est vendue $36,75$ milliers d'euros, donc pour x tonnes vendues, la recette en milliers d'euros vaut $R(x) = 36,75x$.

2.(a) Donner l’expression de $R(x)$ en fonction de x et représenter la fonction R dans le même repère que $\mathscr{C}$.

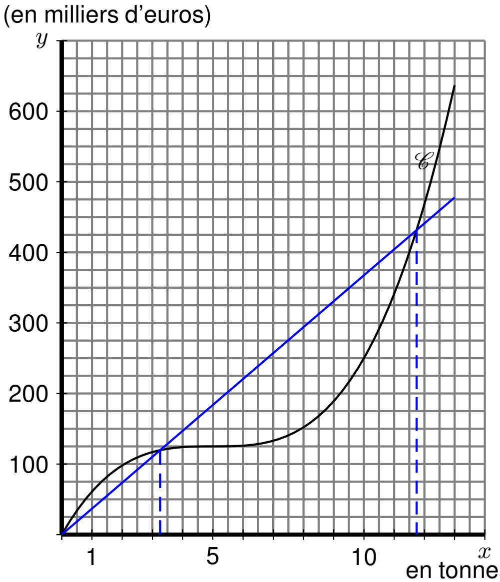
Chaque tonne est vendue $36,75$ milliers d’euros, donc pour x tonnes vendues, la recette en milliers d’euros vaut $R(x) = 36,75x$.

2.(b) Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.



2.(b) Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

Graphiquement, pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut qu'elle produise et vende entre 3,2 et 11,7 tonnes.



3. Dans cette question, on se propose de déterminer la valeur de x permettant d’obtenir un bénéfice maximum.

3.(a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l’intervalle $[0\ ;\ 13]$.
Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$.

3. Dans cette question, on se propose de déterminer la valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximum.

3.(a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,13]$.
Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$.

3.(a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,13]$.
Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$.

Bénéfice = Recettes $-$ Coûts

3.(a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.
Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$.

Bénéfice = Recettes $-$ Coûts

$$B(x) = 36,75x - (x^3 - 15x^2 + 75x)$$

3.(a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.
Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$.

$$\begin{aligned} \text{Bénéfice} &= \text{Recettes} - \text{Coûts} \\ &= 36,75x - (x^3 - 15x^2 + 75x) \\ &= 36,75 - x^3 + 15x - 75x = -x^3 + 15x^2 - 38,25x \end{aligned}$$

3.(b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
Montrer que $B'(x) = -3(x - 8,5)(x - 1,5)$.

On rappelle que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$

3.(b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
Montrer que $B'(x) = -3(x - 8,5)(x - 1,5)$.

On rappelle que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$
$B'(x) = -3x^2 + 15 \times 2x - 38,25 = -3x^2 + 30x - 38,25$.

3.(b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
Montrer que $B'(x) = -3(x - 8,5)(x - 1,5)$.

On rappelle que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$
$B'(x) = -3x^2 + 15 \times 2x - 38,25 = -3x^2 + 30x - 38,25$.

De plus $-3(x - 8,5)(x - 1,5) = -3(x^2 - 1,5x - 8,5x + 12,75)$

3.(b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
Montrer que $B'(x) = -3(x - 8,5)(x - 1,5)$.

On rappelle que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38,25x$
$B'(x) = -3x^2 + 15 \times 2x - 38,25 = -3x^2 + 30x - 38,25$.

De plus
$$\begin{aligned} -3(x - 8,5)(x - 1,5) &= -3(x^2 - 1,5x - 8,5x + 12,75) \\ &= -3x^2 + 4,5x + 25,5x - 38,25 \\ &= -3x^2 + 30x - 38,25. \end{aligned}$$
Donc $B'(x) = -3(x - 8,5)(x - 1,5)$.

3.(c) Déterminer le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,13]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction B sur cet intervalle.

$\rightarrow$ réponse sur la prochaine diapo…

3.(c) On résout $x - 8,5 = 0$ qui donne $x = 8,5$ et $x - 1,5 = 0$ ce qui donne $x = 1,5$.

3.(c) On résout $x - 8,5 = 0$ qui donne $x = 8,5$ et $x - 1,5 = 0$ ce qui donne $x = 1,5$.

x	0			$1,5$			$8,5$		13
signe de -3		$-$		|	$-$		|	$-$	
signe de $x - 8,5$		$-$		|	$-$		0	$+$	
signe de $x - 1,5$		$-$		0	$+$		|	$-$	
signe de $B'(x)$		$+$		0	$-$		0	$+$	

3.(c) On résout $x - 8,5 = 0$ qui donne $x = 8,5$ et $x - 1,5 = 0$ ce qui donne $x = 1,5$.

x	0		$1,5$		$8,5$		13
signe de -3		$-$	|	$-$	|	$-$	
signe de $x - 8,5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $x - 1,5$		$-$	0	$+$	|	$-$	
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau de signe de $B'(x)$ nous permet de construire le tableau de variations de la fonction B :

III - Sens de variation d’une fonction et signe du nombre dérivé

3.(c) On résout $x - 8,5 = 0$ qui donne $x = 8,5$ et $x - 1,5 = 0$ ce qui donne $x = 1,5$.

x	0		$1,5$		$8,5$		13
signe de -3		$-$	|	$-$	|	$-$	
signe de $x - 8,5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x - 1,5$		$-$	0	$+$		$-$	
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau de signe de $B'(x)$ nous permet de construire le tableau de variations de la fonction B :

x	0		$1,5$		$8,5$		13
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B							

3.(c) On résout $x-8,5=0$ qui donne $x=8,5$ et $x-1,5=0$ ce qui donne $x=1,5$.

x	0		$1,5$		$8,5$		13
signe de -3		$-$		$-$		$-$	
signe de $x-8,5$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-1,5$		$-$	0	$+$		$-$	
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau de signe de $B'(x)$ nous permet de construire le tableau de variations de la fonction B :

x	0		$1,5$		$8,5$		13
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

III - Sens de variation d’une fonction et signe du nombre dérivé

3.(c) On résout $x - 8,5 = 0$ qui donne $x = 8,5$ et $x - 1,5 = 0$ ce qui donne $x = 1,5$.

x	0		1,5		8,5		13
signe de -3		$-$	|	$-$	|	$-$	
signe de $x - 8,5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $x - 1,5$		$-$	0	$+$	|	$-$	
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce tableau de signe de $B'(x)$ nous permet de construire le tableau de variations de la fonction B :

x	0		1,5		8,5		13
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$144,5$	$\searrow$	$-159,25$

3.(d) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximum ? Quelle est alors le bénéfice maximal que peut réaliser cette entreprise ?

3.(d) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximum ? Quelle est alors le bénéfice maximal que peut réaliser cette entreprise ?

Le tableau de variation nous permet de répondre à cette question :

x	0		$1,5$		$8,5$		13
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$144,5$	$\searrow$	$-159,25$

3.(d) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximum ? Quelle est alors le bénéfice maximal que peut réaliser cette entreprise ?

Le tableau de variation nous permet de répondre à cette question :

x	0		$1,5$		$8,5$		13
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
B	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$144,5$	$\searrow$	$-159,25$

Le bénéfice est maximal lorsque $x = 8,5$ c'est-à-dire pour 8,5 tonnes produites et vendues et ce bénéfice maximal s'élève à 144 500 €.