II - Fonctions polynômes de degré 3

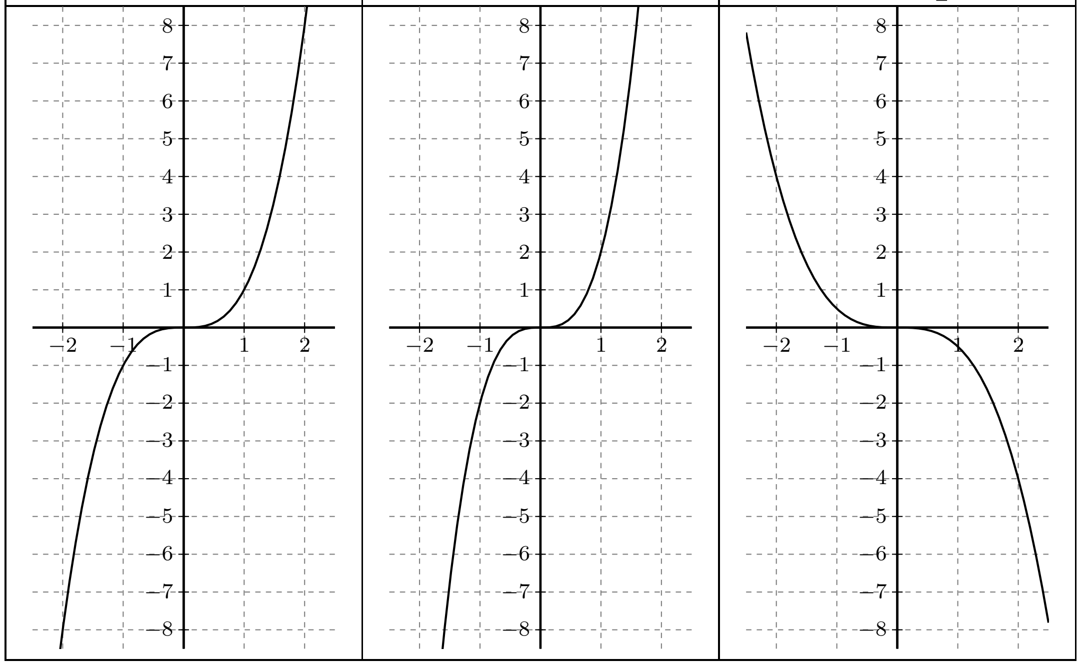
Définition : Une fonction polynôme de degré 3 est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Son expression est de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels ($a \neq 0$) pour tout réel x.

a) Les fonctions $x \longmapsto ax^3 + b$

Propriété :
Les courbes représentatives de toutes les fonctions f de la forme $f(x) = ax^3$ admettent l'origine pour centre de symétrie.

Par exemple, ci-dessous, on retrouve la courbe représentant la fonction cube ($x \longmapsto x^3$) et celles qui représentent deux autres fonctions dont l'expression est de la forme ax^3.

$f(x) = x^3$	$f(x) = 2x^3$	$f(x) = -\dfrac{1}{2}x^3$



Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + b$ avec a et b réels (a non nul).

- si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentant $x \longmapsto ax^3 + b$ est obtenue à partir de celle représentant $x \longmapsto ax^3$ en la « décalant vers le haut ou vers le bas », selon le signe de b.

Sur la figure en lien, on peut modifier les valeurs de a et b pour voir l'impact de ces valeurs sur la courbe représentant la fonction définie par $ax^3 + b$.

Propriété : Soit c un nombre réel. L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
Cette solution est appelée **racine cubique** de c ; on la note $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$.
Graphiquement, la droite d'équation $y = c$ coupe la courbe représentant la fonction cube en un unique point d'abscisse $\sqrt[3]{c}$ comme on peut le vérifier sur la figure en lien.

b) Les fonctions $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - 3)$

Propriété :
Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est une fonction polynôme de degré 3 s'annulant en x_1, x_2 et x_3 (ces nombres sont **les racines de ce polynôme**).
La courbe représentant ce type de fonction coupe alors l'axe des abscisses en trois points de coordonnées $(x_1\ ;\ 0)$, $(x_2\ ;\ 0)$ et $(x_3\ ;\ 0)$.

En effet $f(x) = 0$ équivaut à $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$ ou $x - x_3 = 0$
$x = x_1$ $x = x_2$ $x = x_3$

Remarque : Toute fonction polynôme de degré 3 ne s'écrit pas sous cette forme $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

L'étude du signe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2)$ se fait à l'aide d'un tableau de signes.

Par exemple, déterminons le signe de $4(x - 5)(x + 3)(x - 2)$.
On doit faire apparaitre dans le tableau le signe de chacun des quatre facteurs :
-3 ; $x - 5$; $x + 3$ et $x - 2$.
On résout $x - 5 = 0$; $x + 3 = 0$; $x - 2 = 0$

On complète alors le signe de chacun des facteurs (comme ce qui a été fait dans le cas des polynômes de degré 2) puis on déterminer le signe du produit en comptant le nombre de **facteurs négatifs** :

– lorsqu'il y a un nombre **pair** de facteurs négatifs, alors le produit est positif ;
– lorsqu'il y a un nombre **impair** de facteurs négatifs, alors le produit est négatif.

x	$-\infty$			$+\infty$
signe de 4				
signe de $x - 5$				
signe de $x + 3$				
signe de $x - 2$				
signe du produit				