Correction des exercices

Exercice 1:

1. Il suffit de calculer l'image de chacun de ces nombres par la fonction f :

   $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$ donc 1 est bien une racine de $f(x)$;
   $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$ donc 2 n'est pas une racine de $f(x)$;
   $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) - 3 = 0$ donc -3 est bien une racine de $f(x)$.

2. 1 et -3 étant des racines de $f(x)$, ce polynôme s'écrit sous la forme $a(x-1)(x-(-3)) = a(x-1)(x+3)$.
   De plus le coefficient devant x^2 vaut 1 donc $a = 1$.
   Ainsi $f(x) = (x-1)(x+3)$.

3. On étudie le signe de $f(x)$ à l'aide d'un tableau de signes (sachant qu'on connait les racines du polynôme qui sont les valeurs en lesquelles chaque fonction affine s'annule).

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. f admet 1 et -3 pour racines, donc la courbe doit couper l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et $(-3\ ;\ 0)$. On peut ainsi exclure la courbe B.

   De plus le coefficient devant x^2 vaut 1 qui est positif, donc la parabole est tournée vers le haut. Ainsi la courbe représentant f est la courbe A.

Exercice 2:

f est définie sur $[-3\ ;\ 3]$ par $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12 \times 1 = 3x^2 - 12$ (voir les formules de dérivation du cours).

2. On construit un tableau de signes.

   On résout tout d'abord $x - 2 = 0$ qui donne $x = 2$ puis $x + 2 = 0$ qui donne $x = -2$.

x	-3		-2		2		3
signe de 3		$+$		$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. D'après le signe de $f'(x)$, on peut déterminer le tableau de variations de f. On n'oublie pas de calculer les images.

   Cela peut se faire très rapidement avec un tableau de valeurs sur la calculatrice. On a alors :

   $f(-3) = 10$; $f(-2) = 17$; $f(2) = -15$ et $f(3) = -8$.

x	-3		-2		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	10	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	-8

4. (a) Une équation de Δ, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :
   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ où $f'(0) = 3(0-2)(0+2) = -12$ et $f(0) = 0^3 - 12 \times 0 + 1 = 1$.
   On obtient ainsi $y = -12(x-0) + 1$ c'est-à-dire $y = -12x + 1$.

   (b) $f(x) = -12x + 1$ équivaut à $x^3 - 12x + 1 = -12x + 1$
   c'est-à-dire $x^3 = 0$ ce qui donne $x = 0$.
   Donc la seule solution de cette équation est 0.
   Donc la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite Δ en un unique point d'abscisse 0.