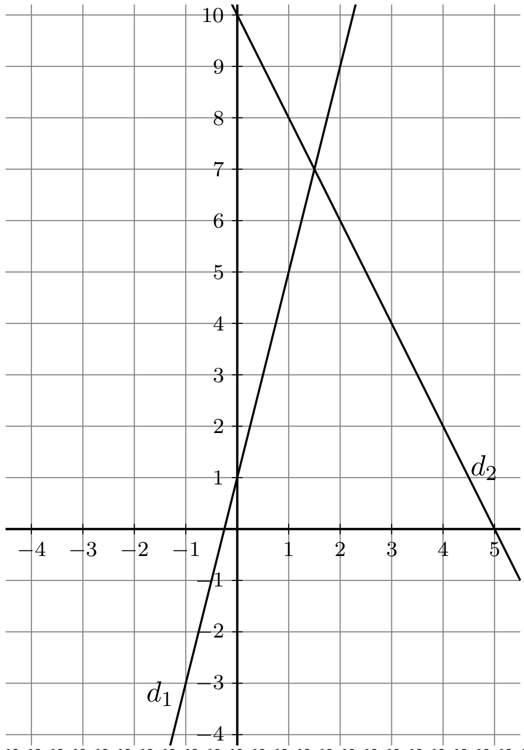
Chapitre V : Dérivation

I - Tangente à une courbe et nombre dérivé

a) Activité

Dans le repère ci-contre, on a tracé les droites d_1 et d_2.

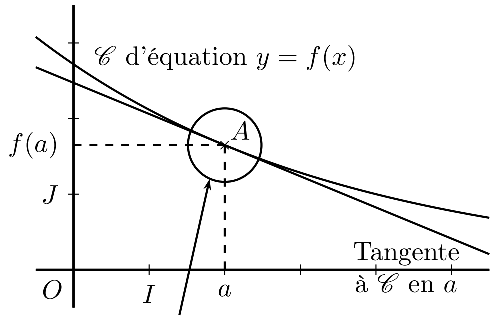


1. (a) Donner, par lecture graphique, les équations des droites d_1 et d_2.
   (b) Construire, dans le même repère, les droites T_1, T_2 et T_3 d'équations respectives $y = 2x + 2$, $y = -4x + 17$ et $y = 5$.
2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
   (a) À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, construire dans le repère ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.
   (b) Quelle particularité ont toutes les droites tracées dans le repère par rapport à cette courbe $\mathscr{C}_f$?

b) Tangente à une courbe

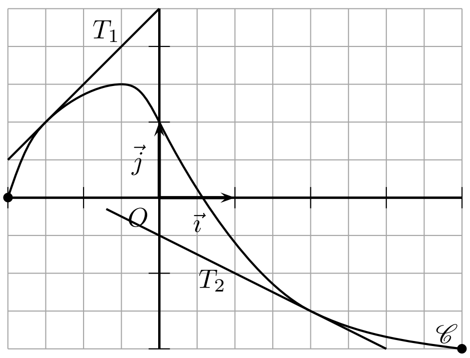
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère, d'une fonction f définie sur un intervalle I.
On considère un point A de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse a.

Au voisinage de A, on peut approcher la courbe $\mathscr{C}$ par sa tangente en A : cette tangente est une approximation de la courbe en ce point.



Pour x voisin de a, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite sont « presque confondues ».

Exercice : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$.



- T_1 et T_2 sont respectivement les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses $-\dfrac{3}{2}$ et 2.
- En $x = -\dfrac{1}{2}$, $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les valeurs de $f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f'(2)$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
2. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$. Déterminer $f'(0)$.
3. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est $y = 3x + 6$. Déterminer $f'(-2)$.

II - Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f admet, pour tout réel x de I, un nombre dérivé, on dit que f est dérivable sur I et on note $f'(x)$ le nombre dérivé de f en tout x de I.
On définit ainsi sur I une fonction f'.

On admettra les résultats suivants :

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ en x
• constante, définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = a$ (où $a \in \mathbb{R}$)	
• affine, définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = ax + b$ (où a et b sont réels)	

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ en x
• carré, définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2$	
• cube, définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^3$	
• polynôme du second degré, défini sur $\mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$)	
• polynôme de degré 3, défini sur $\mathbb{R}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d réels, $a \neq 0$)	

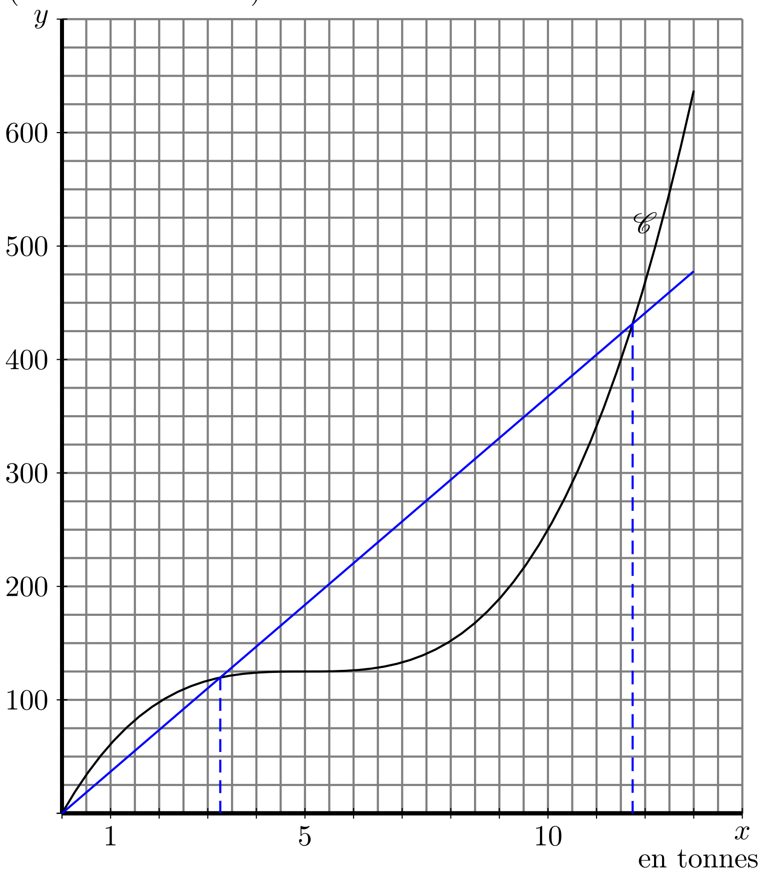
Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice : On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-1; 7]$:

x	-1		1		2		4		7
f	0	↗	2	↘	-1	↗	3	↘	0

Préciser, en fonction du nombre réel x appartenant à $[-1; 7]$, le signe de $f'(x)$.

Exercice :
Une entreprise fabrique et commercialise un produit. Sa capacité de production, sur un mois, lui permet de réaliser entre 0 et 13 tonnes de ce produit. On désigne par x le nombre de tonnes de produit fabriqué par l'entreprise en un mois.
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :
$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x$.
Cette entreprise vend l'intégralité de ce qu'elle produit au prix de 36,75 milliers d'euros la tonne.
La recette, pour x tonnes produites, est notée $R(x)$, exprimée en milliers d'euros. On donne ci-contre la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction C sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.



1. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x) = 3(x-5)^2$.
   En déduire que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.
2. (a) Donner l'expression de $R(x)$ en fonction de x et représenter la fonction R dans le même repère que $\mathscr{C}$.
   (b) Déterminer graphiquement l'intervalle auquel doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice.
3. Dans cette question, on se propose de déterminer la valeur de x permettant d'obtenir un bénéfice maximum.
   (a) On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.
   Montrer que $B(x) = -x^3 + 15x^2 - 38{,}25x$.
   (b) Calculer $B'(x)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
   Montrer que $B'(x) = -3(x - 8{,}5)(x - 1{,}5)$.
   (c) Déterminer le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;\ 13]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction B sur cet intervalle.
   (d) Quelle est la valeur de x qui assure un bénéfice maximum ? Quelle est alors le bénéfice maximal que peut réaliser cette entreprise ?