Exercice 2:

- 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par f(x) = 4(x-1)(x+7).
 - (a) Déterminer les racines de f(x).
 - (b) En déduire l'axe de symétrie de la courbe représentant f.
 - (c) Déterminer la valeur en laquelle f admet un extremum et la valeur de cet extremum. S'agit-il d'un maximum ou un minimum?
 - (d) Construire le tableau de variations de cette fonction.
- 2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -5x^2 15x + 20$.
 - (a) Montrer que 1 est une racine du trinôme.
 - (b) Sachant que la parabole admet la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ pour axe de symétrie, déterminer la deuxième racine de ce trinôme.
 - (c) Résoudre l'équation g(x) = 20.

Solution:

1. (a) Pour trouver les racines de f(x), on résout f(x) = 0, ce qui donne :

$$x-1=0$$
 ou $x+7=0$ $x=1$ $x=-7$

Donc les racines du trinôme sont 1 et -7.

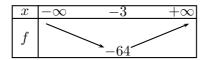
(b) D'après le cours, lorsqu'une fonction s'écrit sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$, alors la parabole la représentant a pour équation x=c où $c=\frac{x_1+x_2}{2}$ (c'est deux valeurs x_1 et x_2 sont les racines du trinôme).

Dans ce cas, $c = \frac{1 + (-7)}{2} = -3$. Donc la droite d'équation x = -3 est l'axe de symétrie de la parabole.

(c) Dans l'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)$, a=4 dans notre exemple. Comme a>0, on en déduit que la fonction admet un **minimum**.

De plus, la valeur c=-3 précédemment trouvée est aussi l'abscisse en laquelle f atteint son extremum (un minimum ici). De plus $f(-3)=4(-3-1)(-3+7)=4\times(-4)\times 4=-64$. Donc f admet un minimum égal à -64 et atteint pour x=-3.

(d) D'après ce qui précède, on obtient le tableau de variations :



- 2. (a) $g(1) = -5 \times 1^2 15 \times 1 + 20 = -5 15 + 20 = 0$. Donc 1 est bien une racine de g(x).
 - (b) La droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ étant l'axe de symétrie de la courbe, alors comme g(x) s'écrit $a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme, alors $-\frac{3}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}$ où $x_1 = 1$ (c'est la racine obtenue à la question 1).

On obtient alors $-\frac{3}{2} = \frac{1+x_2}{2}$ ce qui donne $-3 = 1+x_2$ et $x_2 = -4$. Donc la deuxième racine du trinôme est -4.

(c) g(x) = 20 nous donne $-5x^2 + 15x + 20 = 20$ c'est-à-dire $-5x^2 + 15x = 0$ On factorise alors le membre de gauche, ce qui donne : x(-5x + 15) = 0.

Ceci équivant à x=0 ou -5x+15=0. Cette deuxième équation nous donne -5x=-15 et $x=\frac{-15}{-5}=3$.

Donc les deux solutions de cette équation sont 0 et 3.