Exercice 2 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-1)(x+7)$.
   (a) Déterminer les racines de $f(x)$.
   (b) En déduire l'axe de symétrie de la courbe représentant f.
   (c) Déterminer la valeur en laquelle f admet un extremum et la valeur de cet extremum. S'agit-il d'un maximum ou un minimum ?
   (d) Construire le tableau de variations de cette fonction.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x^2 - 15x + 20$.
   (a) Montrer que 1 est une racine du trinôme.
   (b) Sachant que la parabole admet la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie, déterminer la deuxième racine de ce trinôme.
   (c) Résoudre l'équation $g(x) = 20$.

Solution :

1. (a) Pour trouver les racines de $f(x)$, on résout $f(x) = 0$, ce qui donne :
   $x - 1 = 0$ **ou** $x + 7 = 0$
   $x = 1$ $\qquad$ $x = -7$
   Donc les racines du trinôme sont 1 et -7.
   (b) D'après le cours, lorsqu'une fonction s'écrit sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$, alors la parabole la représentant a pour équation $x = c$ où $c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (c'est deux valeurs x_1 et x_2 sont les racines du trinôme).
   Dans ce cas, $c = \dfrac{1 + (-7)}{2} = -3$. Donc la droite d'équation $x = -3$ est l'axe de symétrie de la parabole.
   (c) Dans l'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)$, $a = 4$ dans notre exemple. Comme $a > 0$, on en déduit que la fonction admet un **minimum**.
   De plus, la valeur $c = -3$ précédemment trouvée est aussi l'abscisse en laquelle f atteint son extremum (un minimum ici). De plus $f(-3) = 4(-3-1)(-3+7) = 4 \times (-4) \times 4 = -64$.
   Donc f admet un minimum égal à -64 et atteint pour $x = -3$.
   (d) D'après ce qui précède, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		$\searrow$	-64	$\nearrow$	

2. (a) $g(1) = -5 \times 1^2 - 15 \times 1 + 20 = -5 - 15 + 20 = 0$. Donc 1 est bien une racine de $g(x)$.
   (b) La droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ étant l'axe de symétrie de la courbe, alors comme $g(x)$ s'écrit $a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme, alors $-\dfrac{3}{2} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ où $x_1 = 1$ (c'est la racine obtenue à la question 1).
   On obtient alors $-\dfrac{3}{2} = \dfrac{1 + x_2}{2}$ ce qui donne $-3 = 1 + x_2$ et $x_2 = -4$.
   Donc la deuxième racine du trinôme est -4.
   (c) $g(x) = 20$ nous donne $-5x^2 + 15x + 20 = 20$ c'est-à-dire $-5x^2 + 15x = 0$
   On factorise alors le membre de gauche, ce qui donne : $x(-5x + 15) = 0$.
   Ceci équivaut à $x = 0$ ou $-5x + 15 = 0$. Cette deuxième équation nous donne $-5x = -15$ et $x = \dfrac{-15}{-5} = 3$.
   Donc les deux solutions de cette équation sont 0 et 3.