Chapitre VI : Variables aléatoires

I - Succession de deux épreuves indépendantes

Définition : Dans une expérience aléatoire, deux événements sont dits **indépendants** lorsque le premier n'a pas d'incidence sur le second.

Exemples :

- On choisit au hasard deux élèves dans deux classes différentes.

  Les événements « l'élève de la première classe est une fille » et « l'élève de la seconde classe est une fille » sont indépendants. En effet, qu'on ait choisi un garçon ou une fille dans la première classe, la probabilité de choisir une fille dans la seconde restera la même.
- Dans une urne contenant des boules noires, rouges et vertes, on tire successivement **avec remise** deux boules. Les événements « la première boule est noire » et « la deuxième boule est verte » sont indépendants : comme on remet la première boule tirée dans l'urne, la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte reste la même quelque soit la première boule tirée.

  Bien entendu, ce n'est plus le cas si on décide de ne pas remettre la première boule dans l'urne.

Cette situation peut être représentée par un arbre permettant d'effectuer des calculs de probabilités.

....

II - Variables aléatoires discrètes

a) Variable aléatoire

$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est l'univers (ensemble des tirages possibles) d'une expérience aléatoire sur lequel est définie une probabilité.
Une **variable aléatoire** X associe à chaque événement élémentaire e_i un nombre réel égal à la probabilité de e_i.
Notons x_1, x_2, $\ldots$, x_q les valeurs de X ($q \leqslant n$).
$X = x_i$ est alors un événement dont on peut calculer la probabilité.
On note p_i la probabilité que X soit égal à x_i, on écrit $p_i = P(X = x_i)$.

Exemples :

- On joue trois fois de suite à PILE ou FACE.
  L'univers est $\Omega = \{$PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF$\}$.
  Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de fois qu'on a obtenu PILE.
  X prend alors les valeurs 0, 1, 2 et 3.

  L'événement $(X = 1)$ peut être traduit par : « on a obtenu une fois PILE sur les trois lancers » et ainsi $(X = 1) = \{$PFF, FPF, FFP$\}$. Il est alors possible de calculer sa probabilité notée $P(X = 1)$: $P(X = 1) = \dfrac{3}{8}$.
- On peut aussi reprendre l'exemple 2 de la partie I (tirage de deux boules avec remise dans l'urne). On définit la variable aléatoire Y égale au nombre de boules noires tirées au cours de ces deux tirages.
  Dans ce cas, Y peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2.

  La probabilité de l'événement $(Y = 2)$ vaut alors $P(Y = 2) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$ d'après l'arbre construit (un seul chemin permet d'obtenir 2 boules noires).

b) Loi de probabilité

Définition : Définir **la loi de probabilité d'une variable aléatoire**, c'est :

- donner les différentes valeurs prises par X : x_1, x_2, $\ldots$, x_n,
- déterminer les probabilités de chacune de ces issues, $P(X = x_i)$: p_1, p_2, $\ldots$, p_n,
- consigner les résultats dans un tableau tel que celui-ci :

valeurs de X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
probabilité	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Remarque : On a $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.