Karlsruher Institut für Technologie

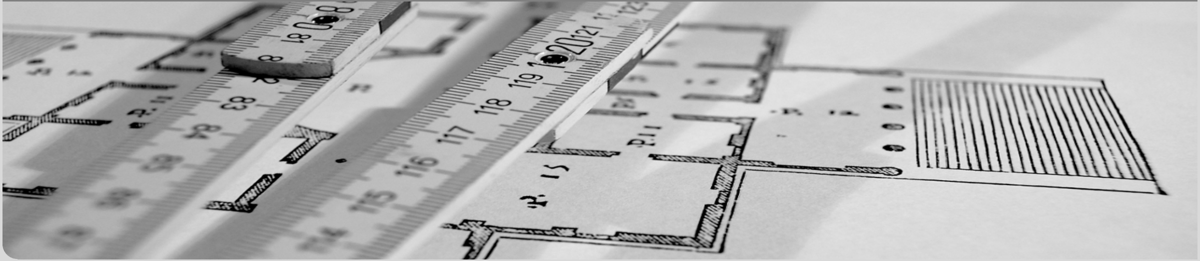
Software Design and Quality

Graphen 3:
Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, Knig

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ??? | 4. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Gliederung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Testing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Block 1

- Bullet This is some test
- Bullet WOs das????????????

Testing

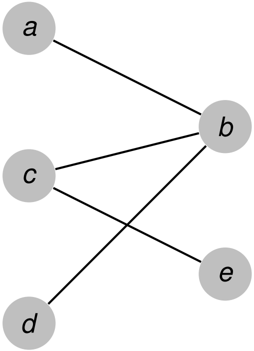
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Block 1

- Bullet This is some test
- Bullet WOs das?????????????

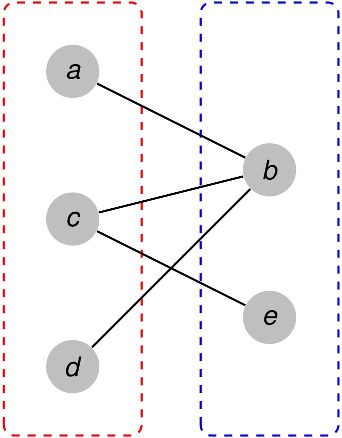
Peter Koepernik, Robert
Brede, Serge Thilges,
Jean-Pierre ???

Bipartite Graphen



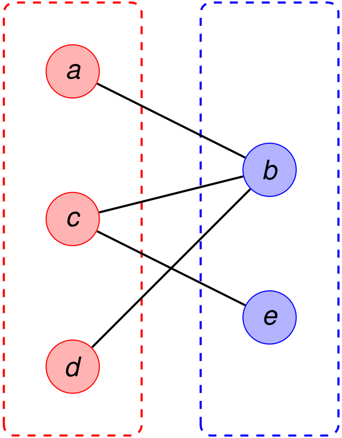
Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

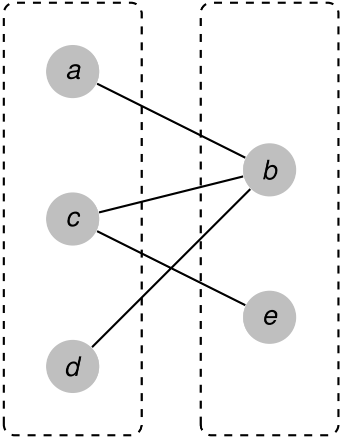
$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für G bipartit: “Maximum Cardinality Bipartite Matching”, kurz **MCBM**.

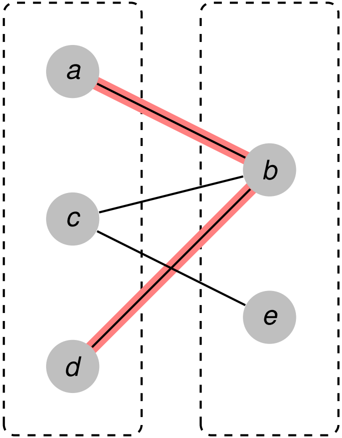
Matchings



Kein Matching

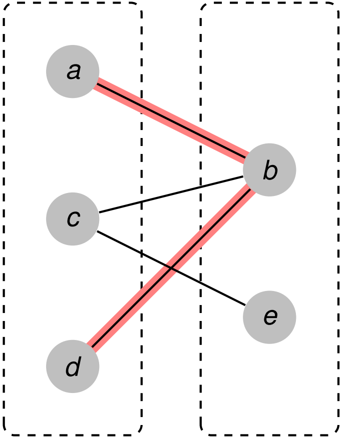
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matchings

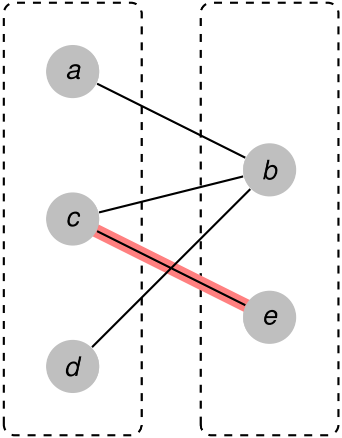
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Kein Matching

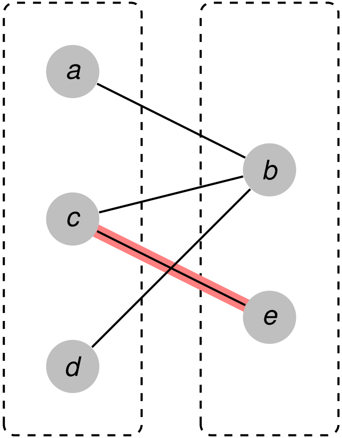
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matchings

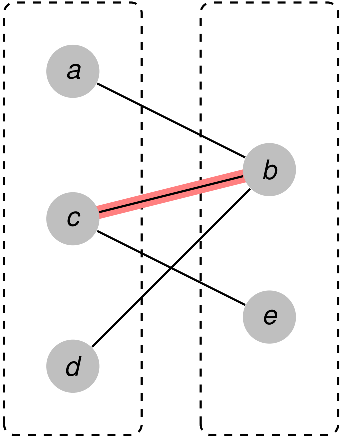
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

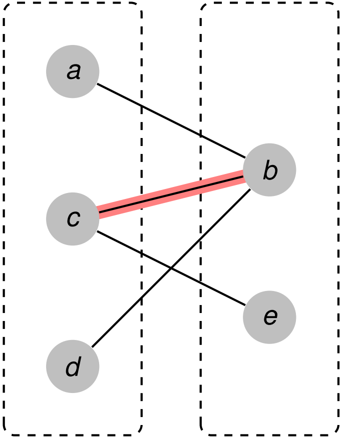
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matchings

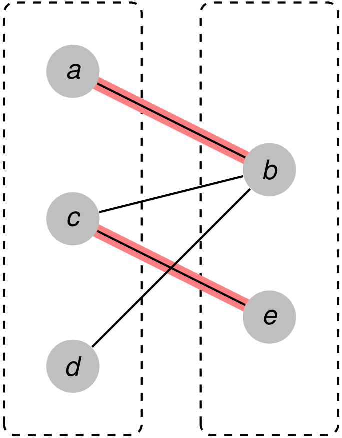
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

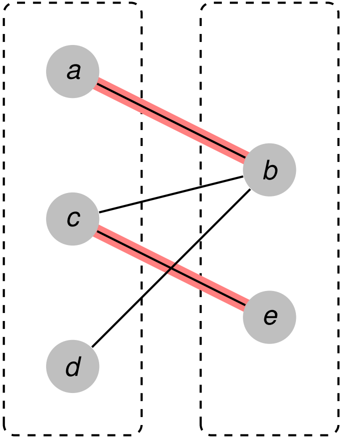
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



Kardinalitätsmaximales Matching

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Complete Prime Pairing

Definition

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

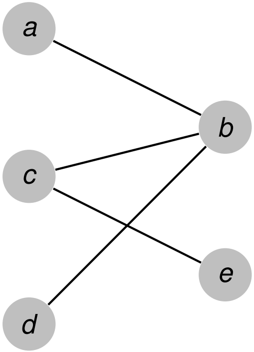
Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.
- Berechne ein MCBM M von G und gebe “Ja” aus, falls $|M| = |V_1| = |V_2|$.

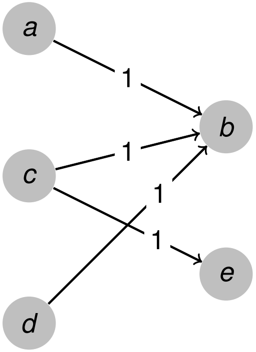
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

MCBM mit Max-Flow



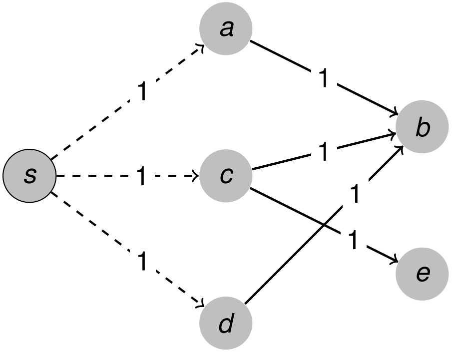
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

MCBM mit Max-Flow



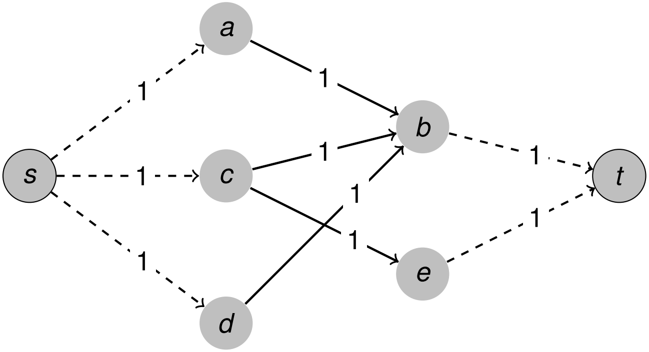
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

MCBM mit Max-Flow



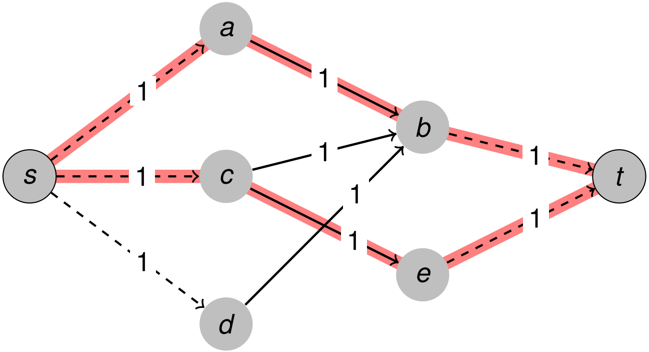
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E),\ V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade}, \\ M, & i \text{ gerade}. \end{cases}$

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path, so ist

$$M' := M \setminus P \cup P \setminus M, \text{ wobei } P := \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, ..., n-1\}\}$$

(flippe die Kanten entlang des Pfades) ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche (greedy) einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche (greedy) einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

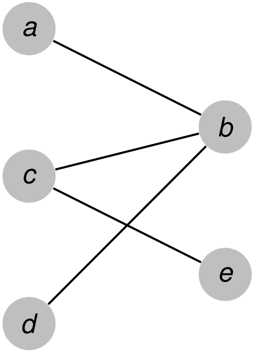
(2) Suche (greedy) einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $O(|V| \cdot |E|)$.

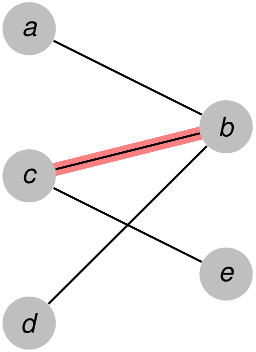
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



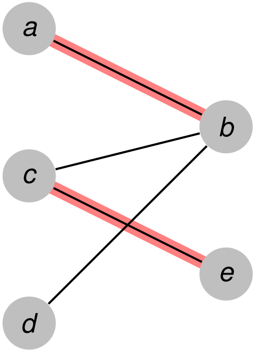
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???



References I

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre ???