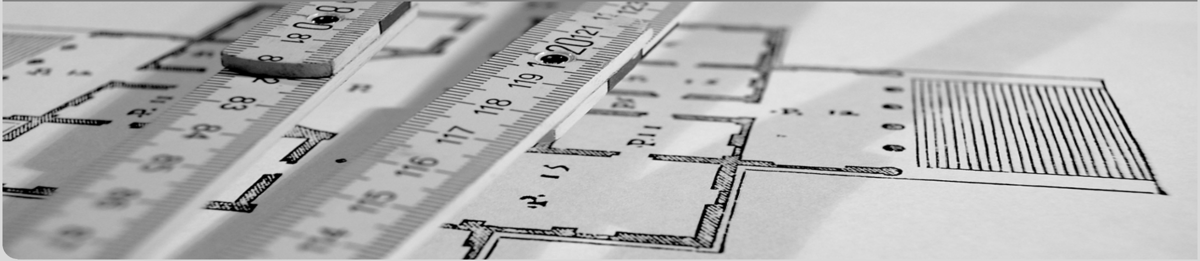
Karlsruher Institut für Technologie

# Graphen 3:
# Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 13. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Beispielaufgabe

Karlsruher Institut für Technologie

## Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität (Autos pro Stunde)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Beispielaufgabe



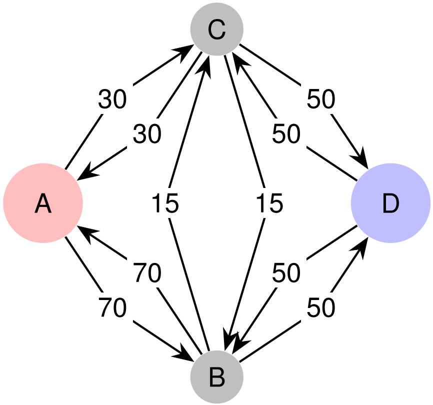
## Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität (Autos pro Stunde)
- Für gewisse Städte A und D sucht man die Anzahl Autos pro Stunde die von A nach D fahren können

# Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

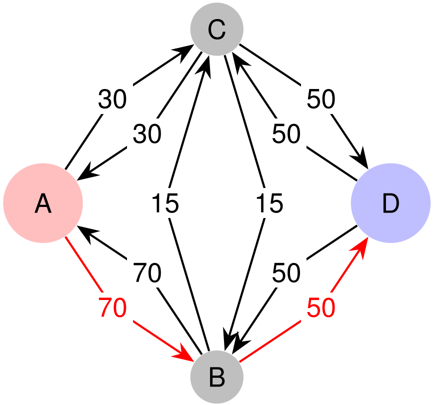




# Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



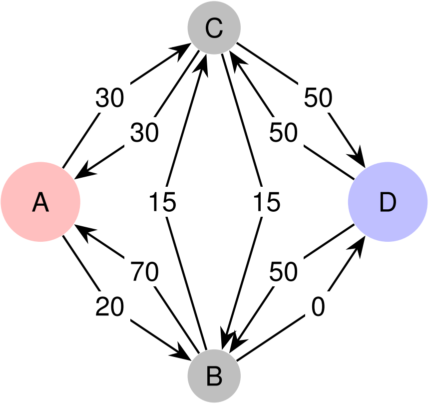


# Motivation



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



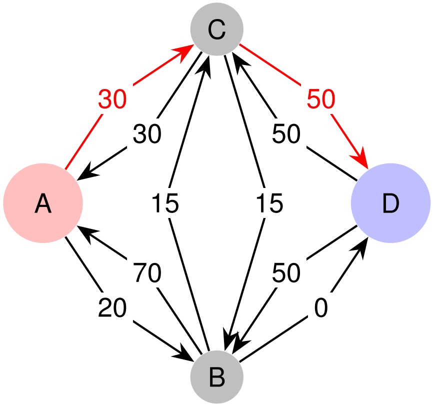



50

# Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



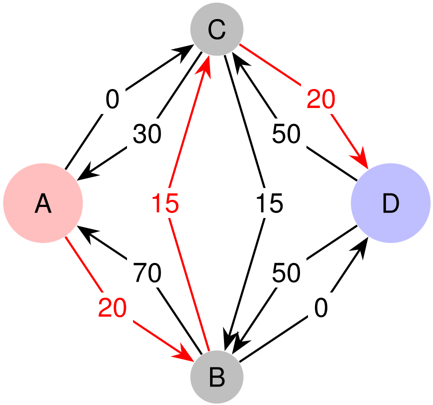



50

# Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



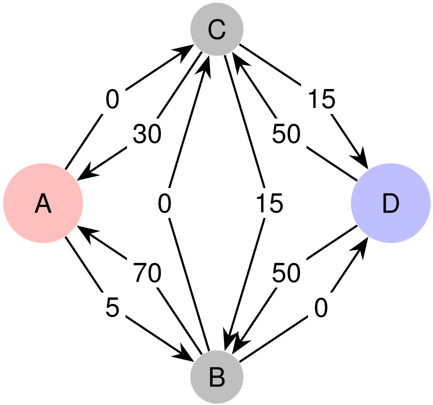



50 + 30

# Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt






50 + 30 + 15 = 95

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





## Ford Fulkerson

- $F = 0$

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von $s$ nach $t$ existiert:

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von $s$ nach $t$ existiert:
  - 1. finde minimale Kante $f$ auf dem Pfad

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von $s$ nach $t$ existiert:
  - 1. finde minimale Kante $f$ auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \to j$) um $f$ reduzieren

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von $s$ nach $t$ existiert:
  - 1. finde minimale Kante $f$ auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \to j$) um $f$ reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \to i$) um $f$ erhöhen

# Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





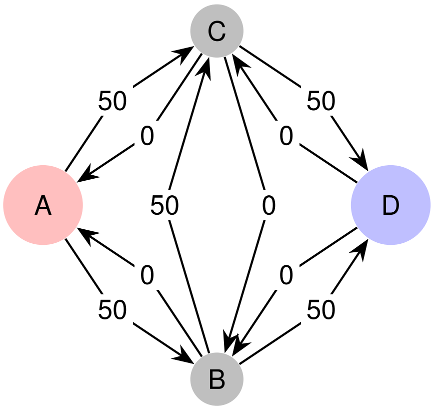
## Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von $s$ nach $t$ existiert:
  - 1. finde minimale Kante $f$ auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \to j$) um $f$ reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \to i$) um $f$ erhöhen
  - $F += f$;

# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

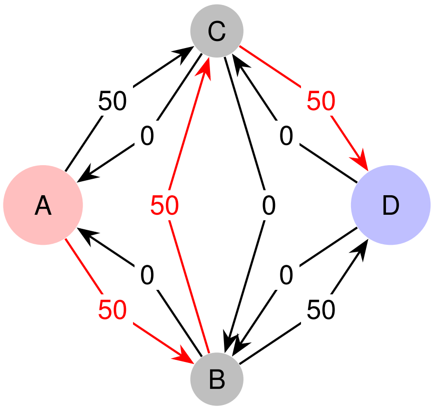




# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

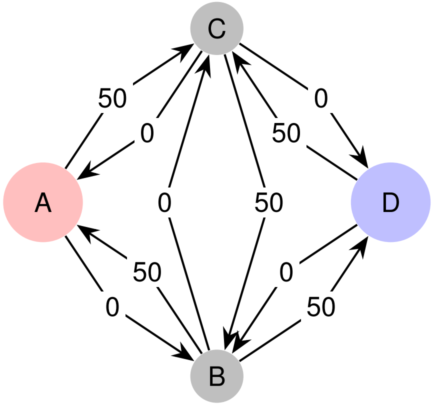




# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

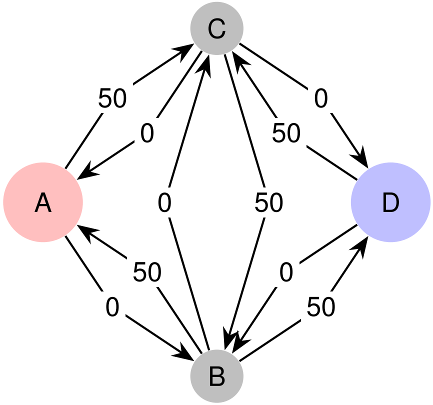




# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

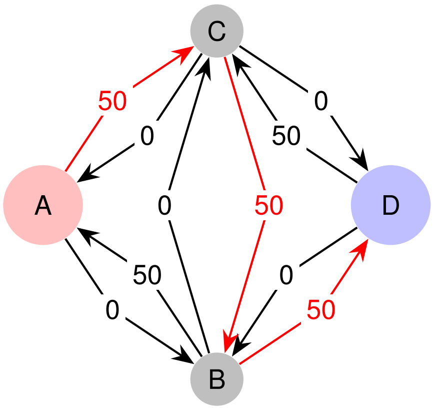




# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

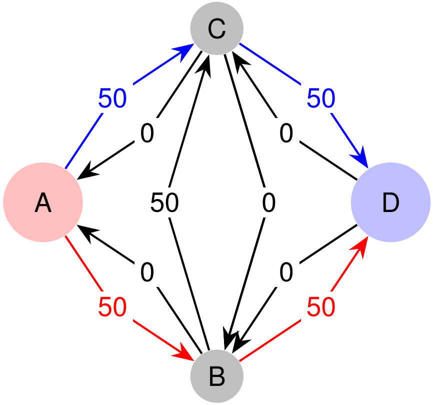




# Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# Laufzeit



## Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$

# Laufzeit

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei $F$ der Wert des maximalen Flusses ist

# Laufzeit

### Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei $F$ der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

# Laufzeit

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Laufzeit Ford Fulkerson

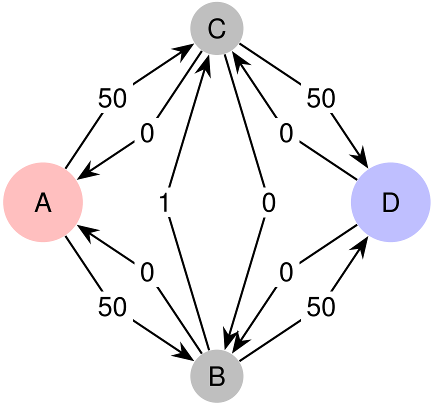
- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei $F$ der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

$\Rightarrow$ kann sehr groß werden

# Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

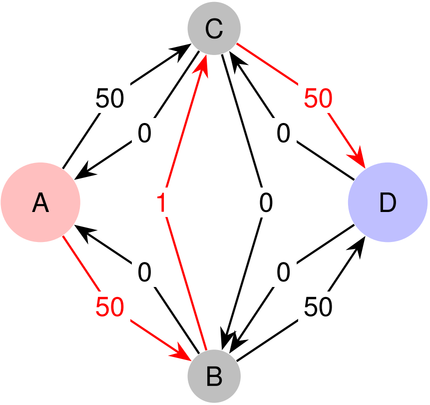




# Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

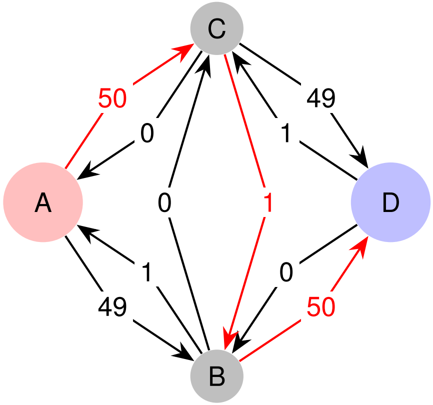




# Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

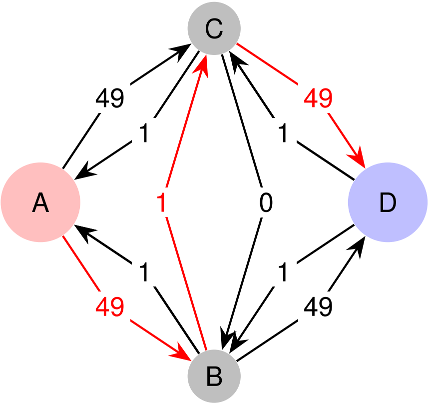




# Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

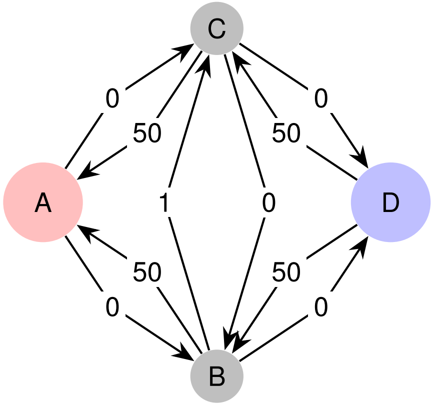




# Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# Edmond Karp

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche

# Edmond Karp

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$

# Edmond Karp

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$
- $\mathcal{O}(VE)$ mal Breitensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft

# Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln

# Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1

# Collector’s Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 10779 - Collector’s Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen

# Collector’s Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 10779 - Collector’s Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)

# Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)
- Wie viele unterschiedliche Karten kann Bob maximal besitzen?

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

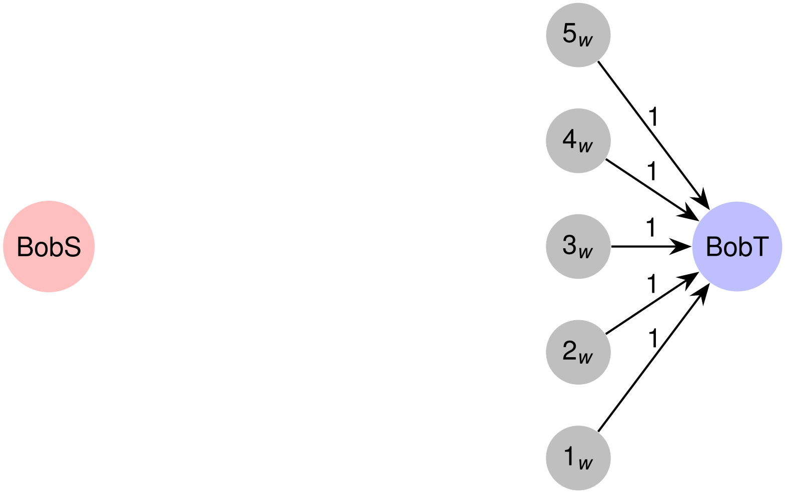


# Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



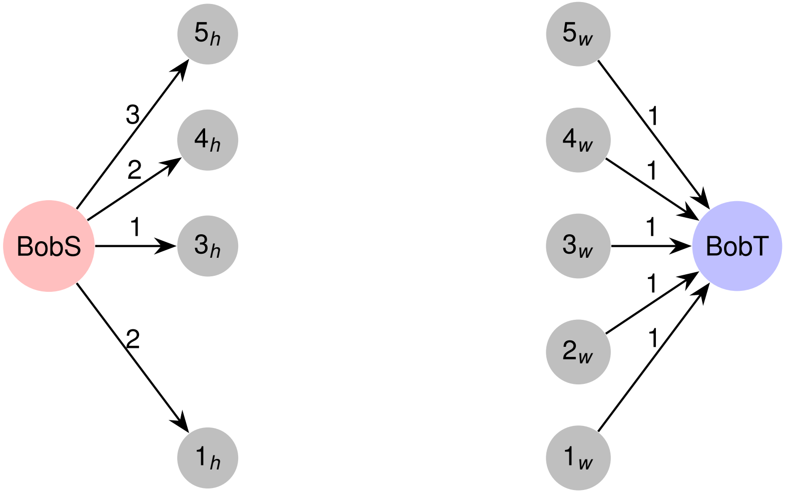
# Einmaliger „greedy“ Tausch



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



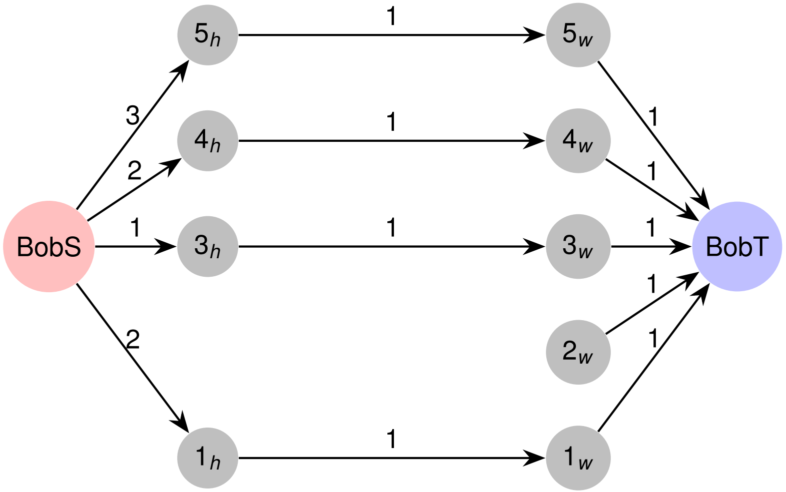
# Einmaliger „greedy“ Tausch



# Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# Einmaliger „greedy“ Tausch

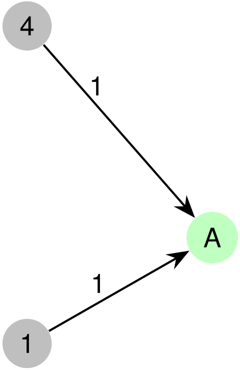
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

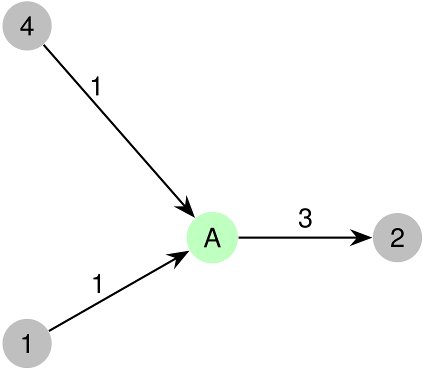




# Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

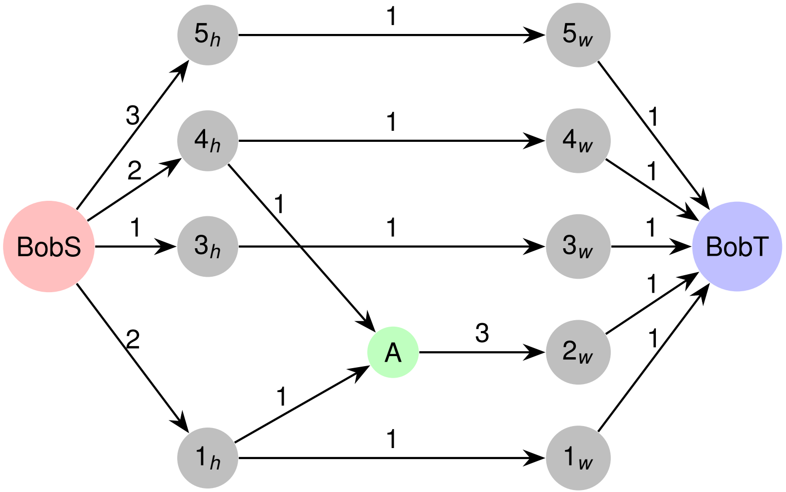




# Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

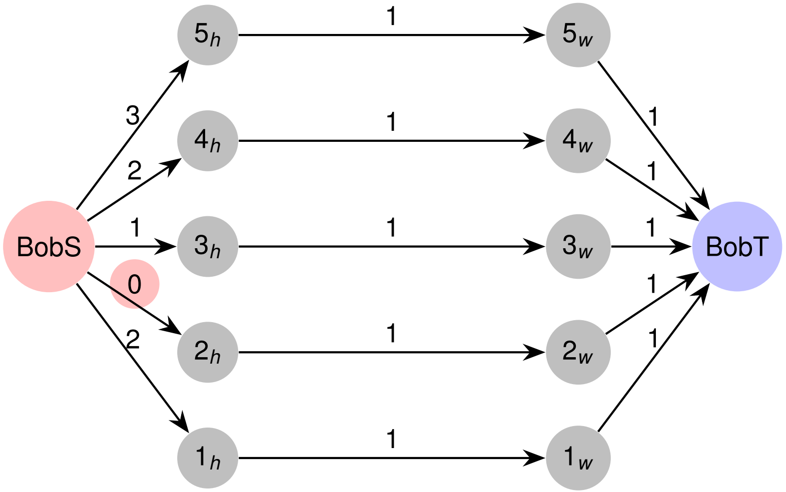




# Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

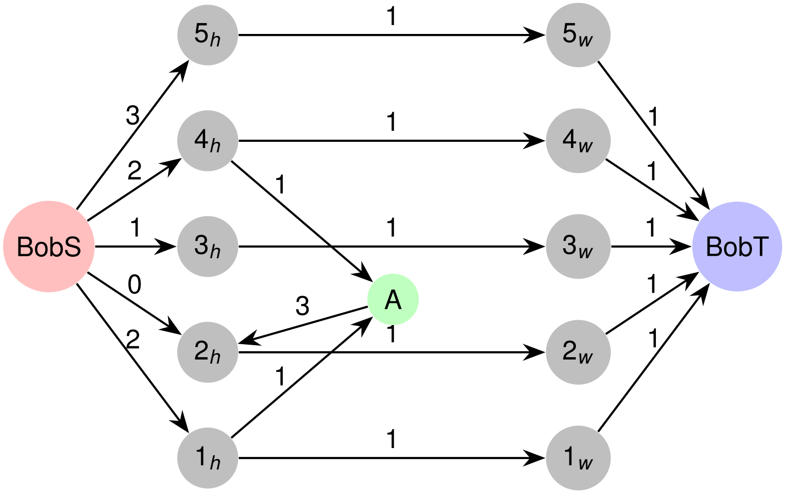




# Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

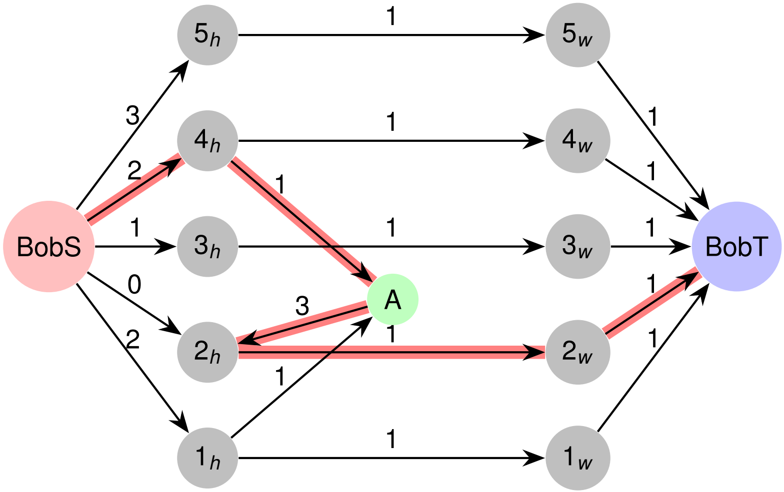




# Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

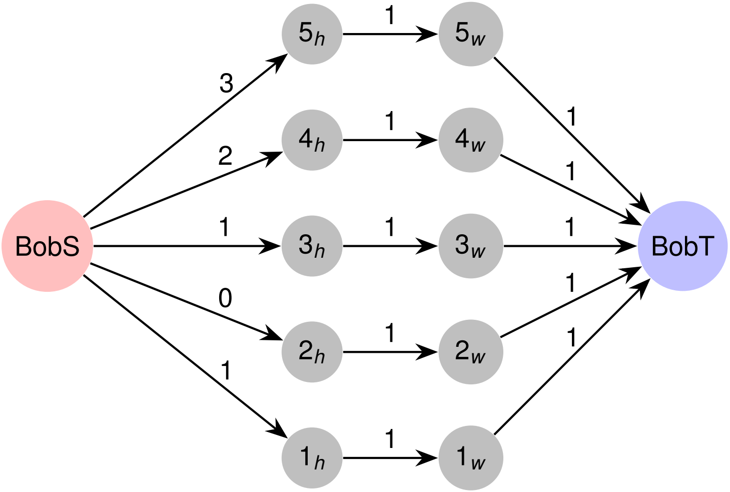




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

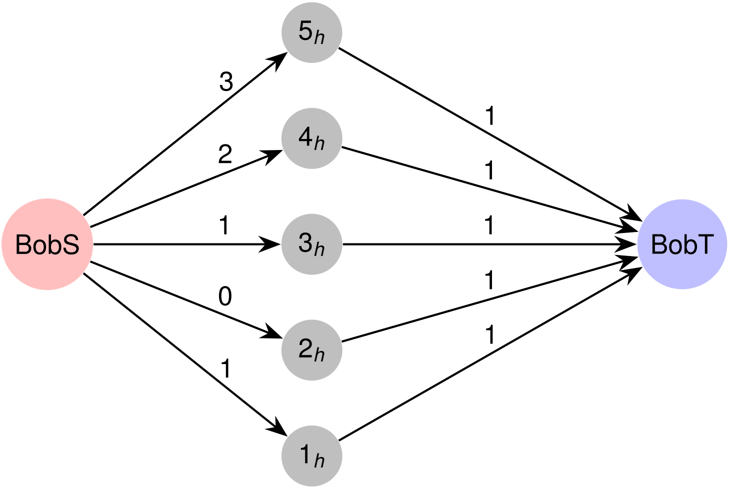




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

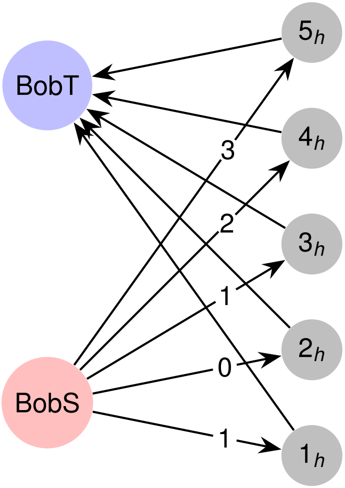




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

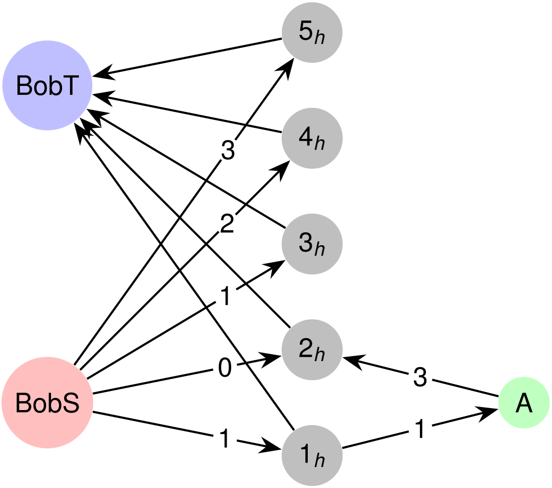




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

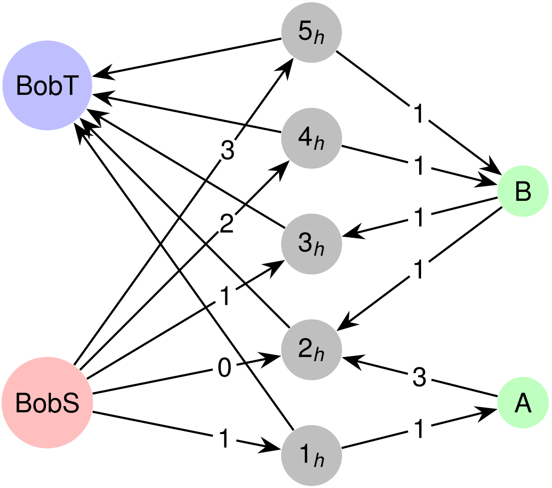




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

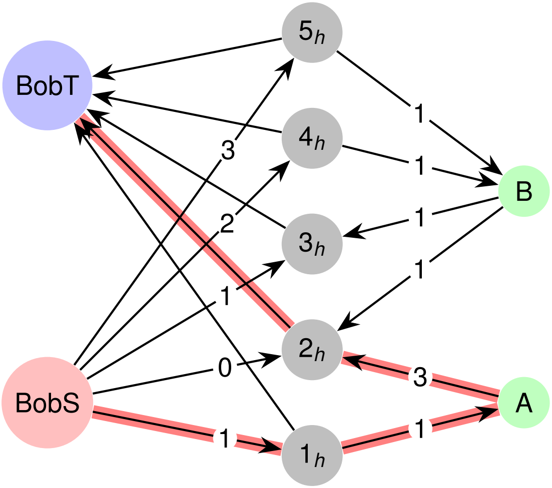




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

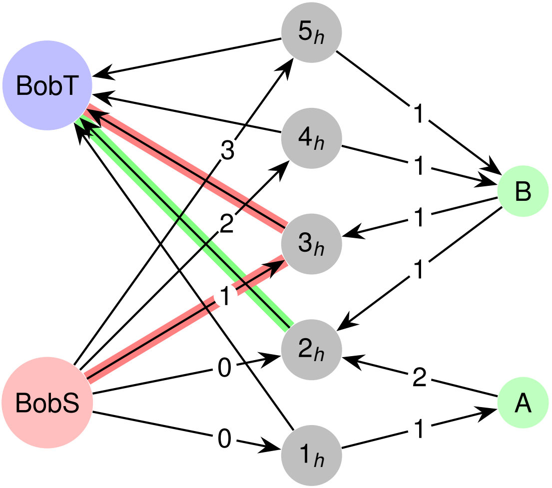




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

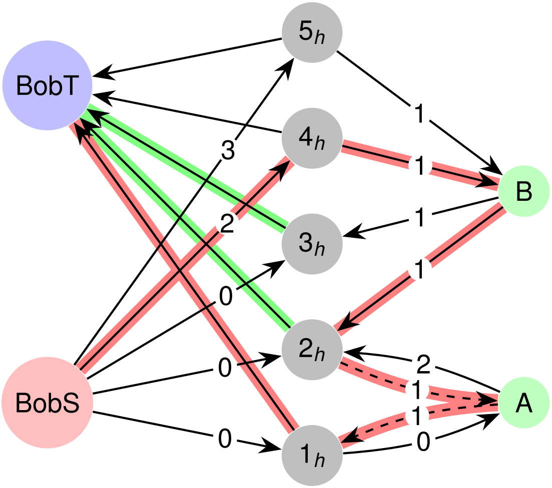




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

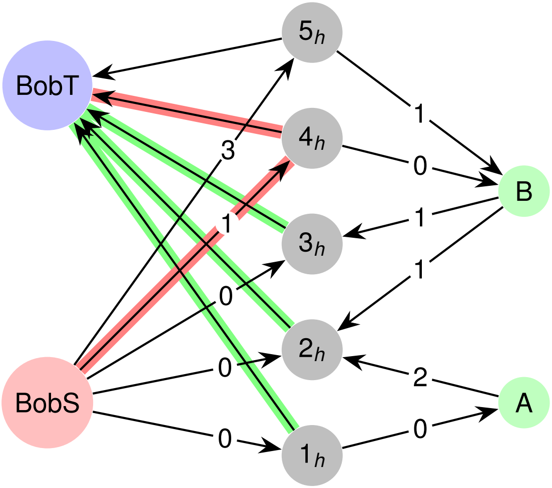




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

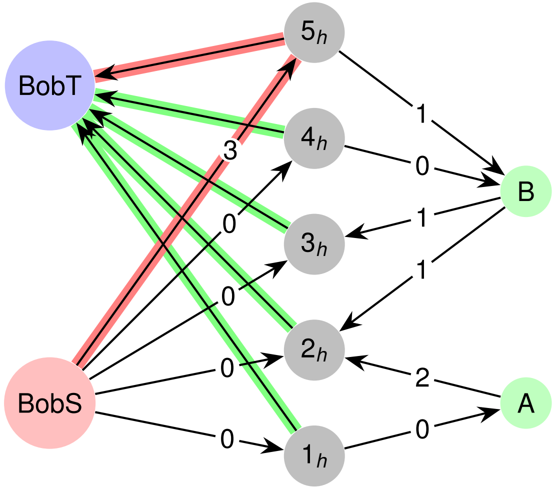




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

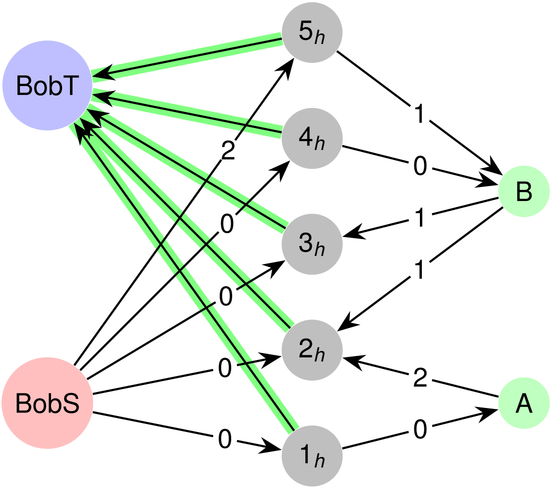




# Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

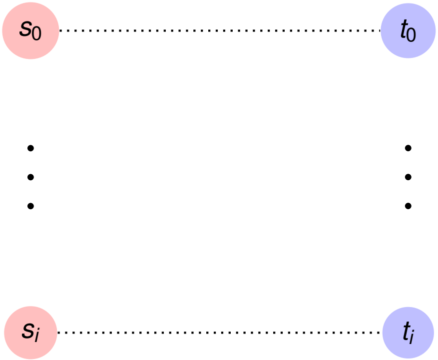


# Multi-source & Multi-sink

# Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

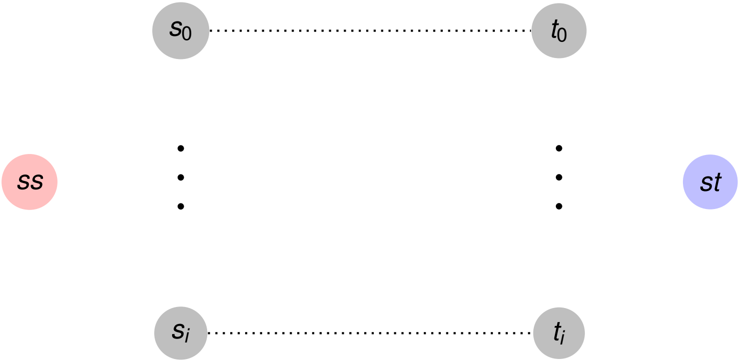




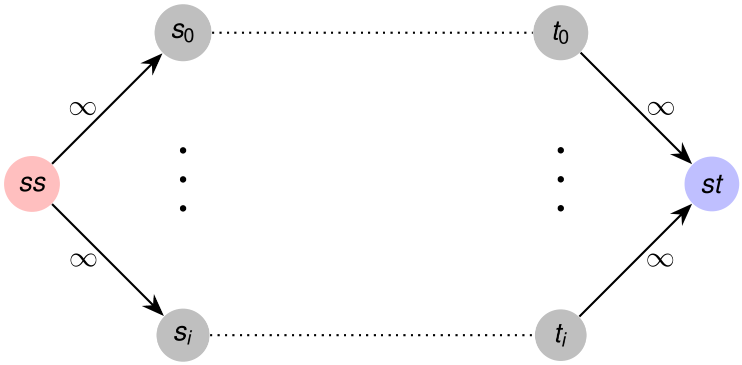
# Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





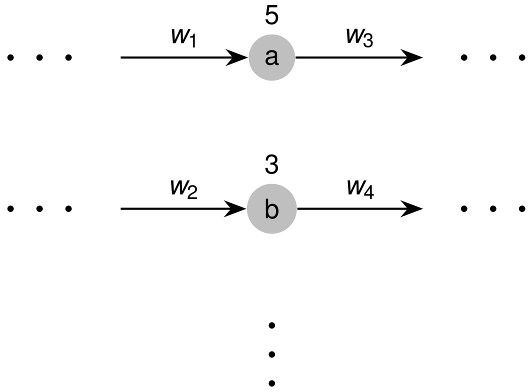
# Multi-source & Multi-sink



# Knoten Kapazität

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

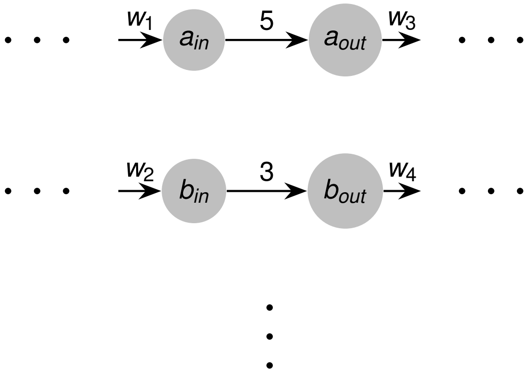




# Knoten Kapazität

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# (Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# (Minimaler) Schnitt

## Definition

Ist $V = S \,\dot\cup\, T$ eine Partition von $V$ mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein $s$-$t$ **cut** (oder $s$-$t$ **Schnitt**).

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# (Minimaler) Schnitt



## Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von $V$ mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Das zu $C$ gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

# (Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





## Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von $V$ mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Das zu $C$ gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

# (Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von $V$ mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Das zu $C$ gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

Ein **Min Cut** ist ein *s*-*t* cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von *s* ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von $s$ ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in $S$

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von $s$ ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in $S$
- $T = V \setminus S$

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von $s$ ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in $S$
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in $X_C$ haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow

# Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von $s$ ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in $S$
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in $X_C$ haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow
- Max-Flow-Min-Cut Theorem

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden
- Was sind die minimalen Kosten um die Verbindung zu zerstören?

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante
- Min Cut

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

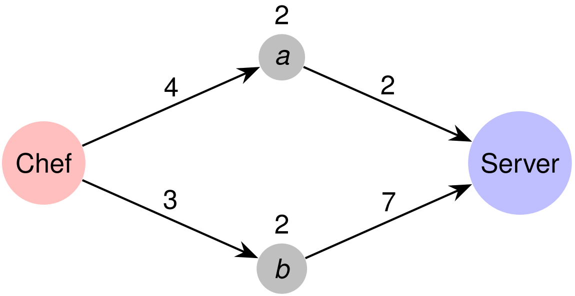
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

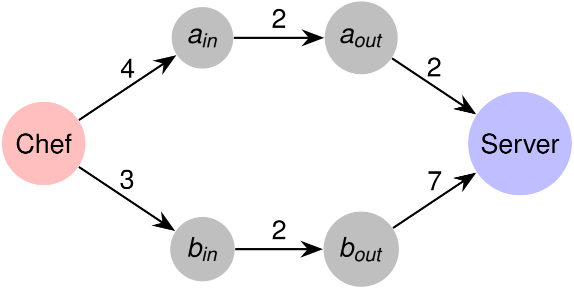




# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

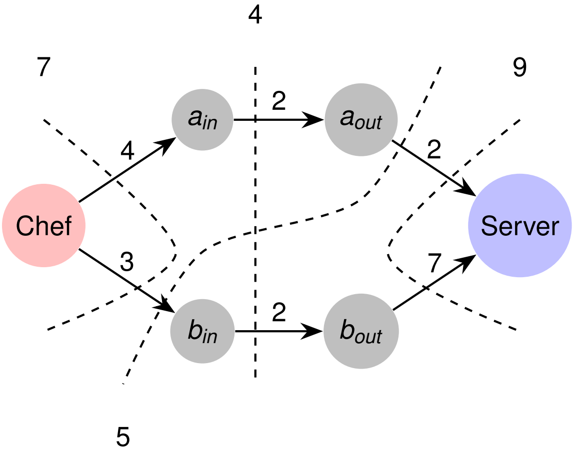




# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

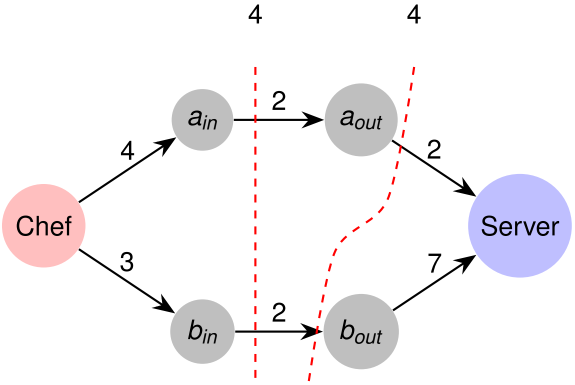




# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

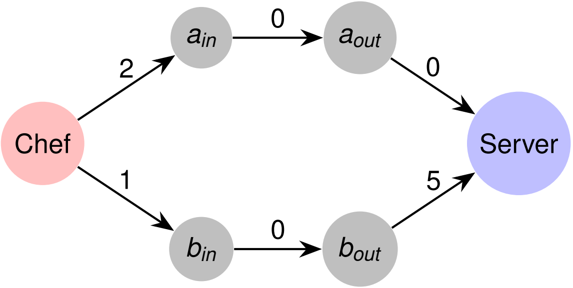




# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



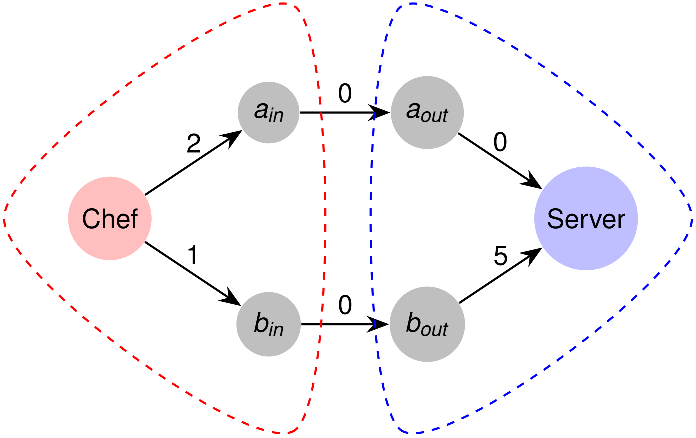



$mf = 4 = mincut$

# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

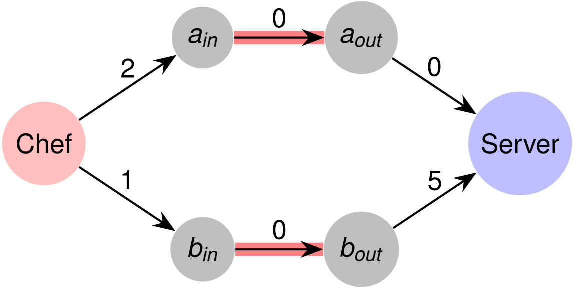




# Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

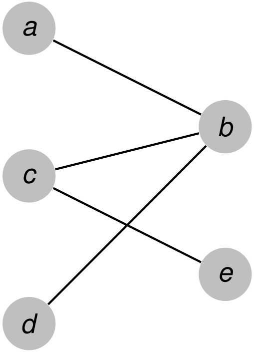




Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



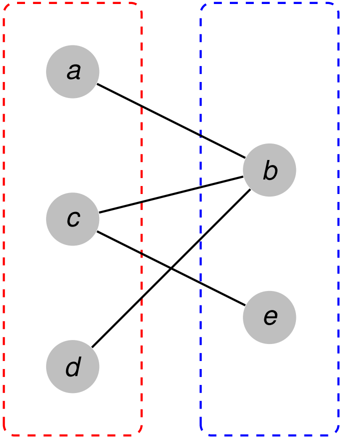
# Bipartite Graphen



# Bipartite Graphen

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

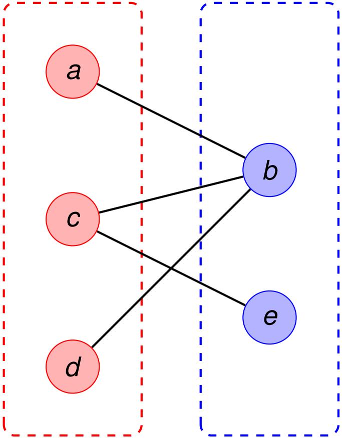




# Bipartite Graphen

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Sei $G = (V, E), \ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

# Matchings

## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

## Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

# Matchings

## Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

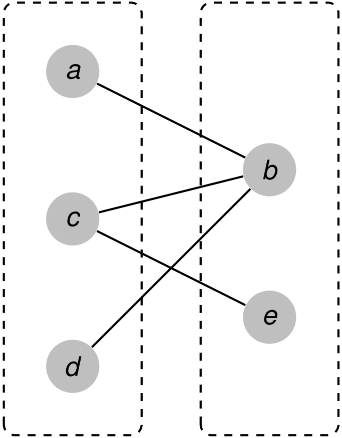
$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für $G$ bipartit: „Maximum Cardinality Bipartite Matching“, kurz **MCBM**.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



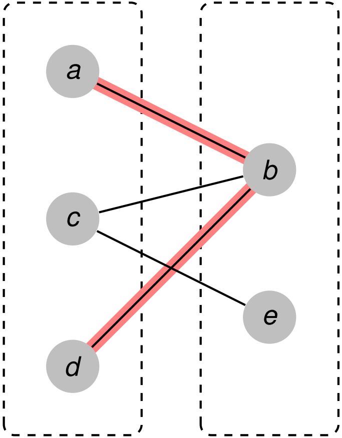
# Matchings



# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

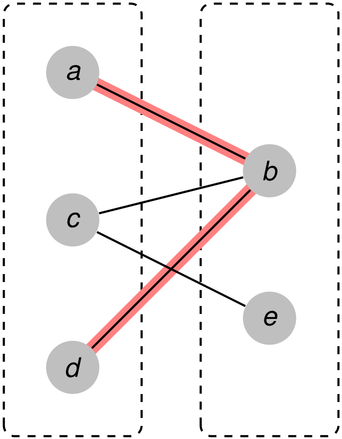




# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



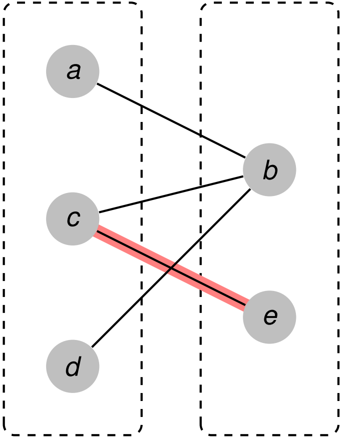



Kein Matching

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

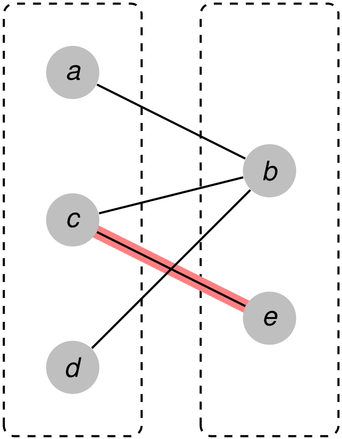




# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



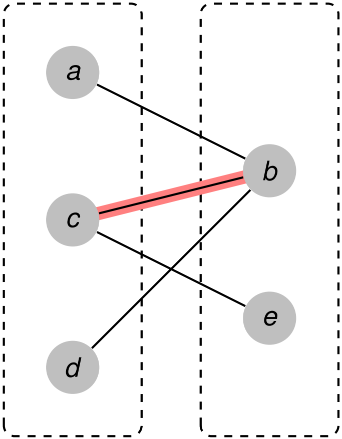



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

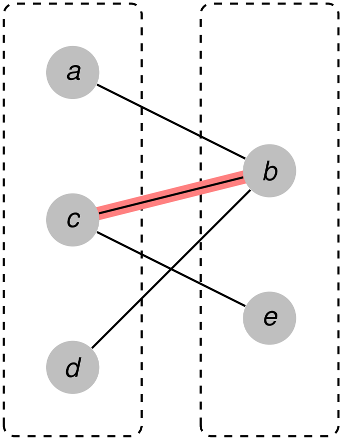




# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



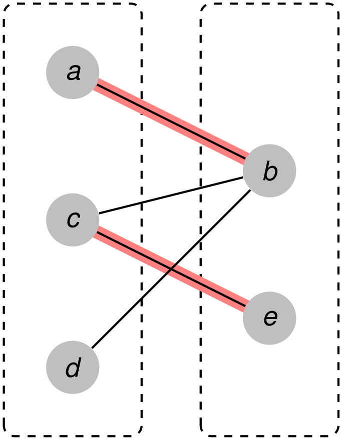



Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

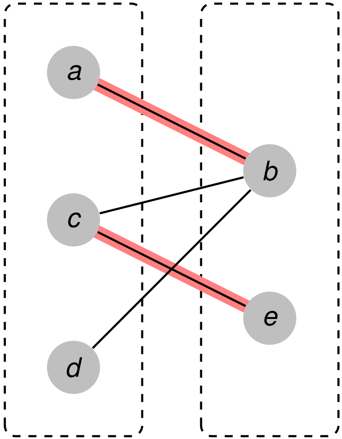




# Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



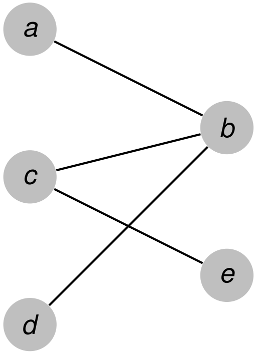



Kardinalitätsmaximales Matching

# MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

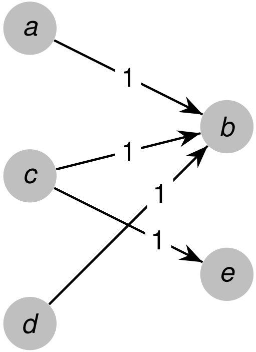




Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



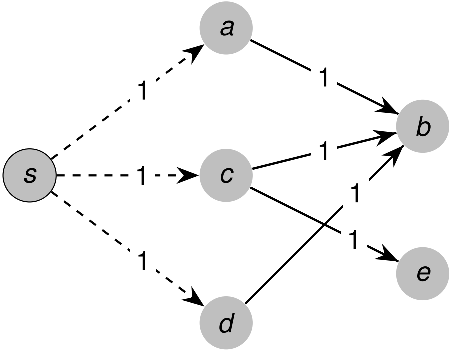
# MCBM mit Max-Flow



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# MCBM mit Max-Flow

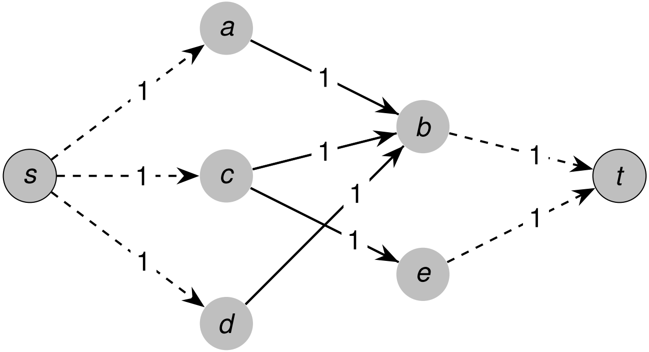


# MCBM mit Max-Flow



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

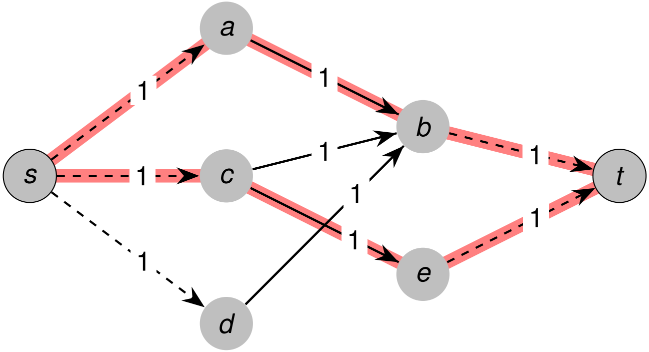




# MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

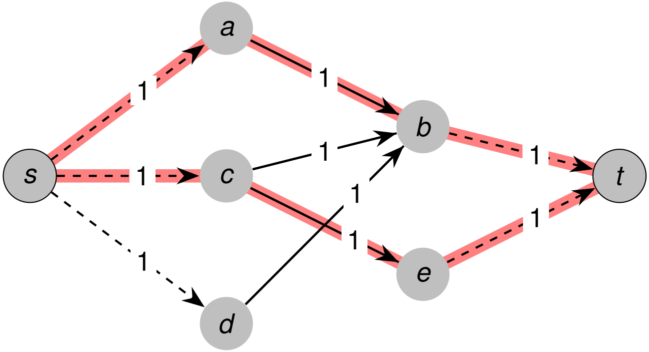




# MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



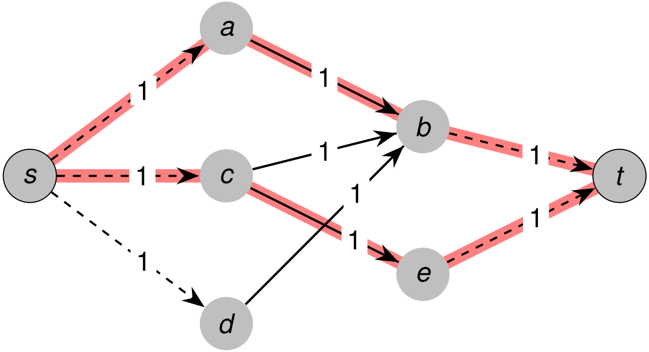



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

# MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



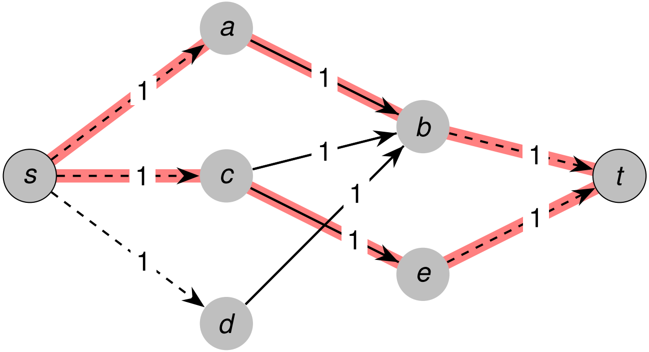



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
- Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(f^* \cdot |E|)$

# MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



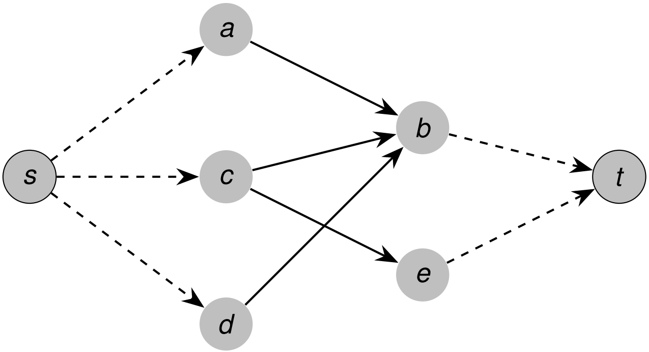



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
- Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(f^* \cdot |E|) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$

# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

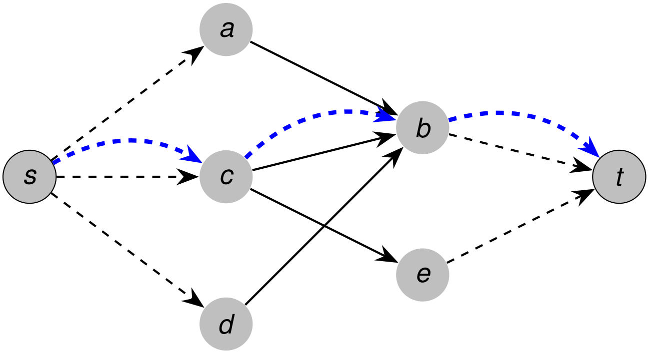




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

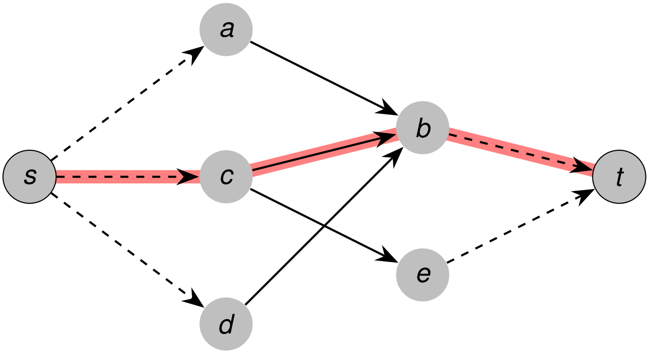




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

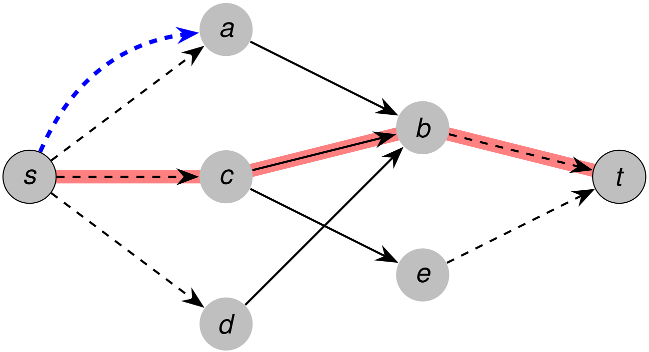




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

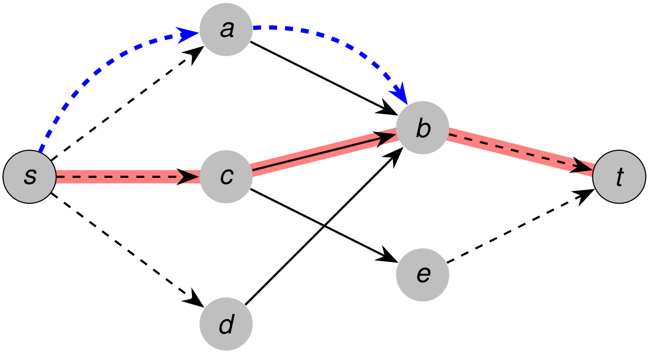




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

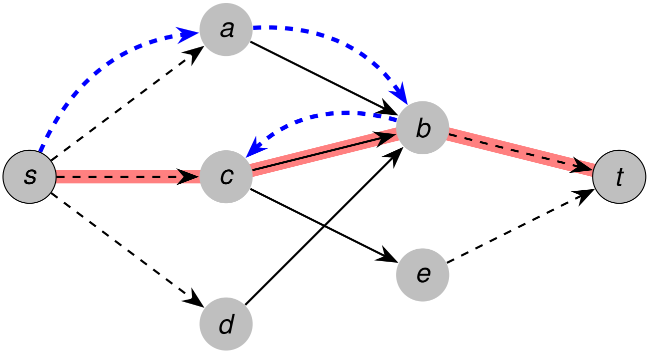




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

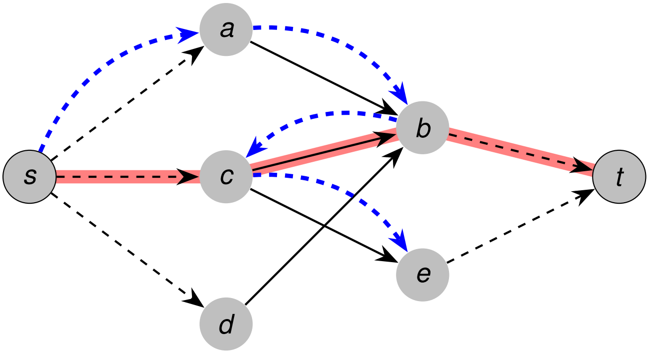




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

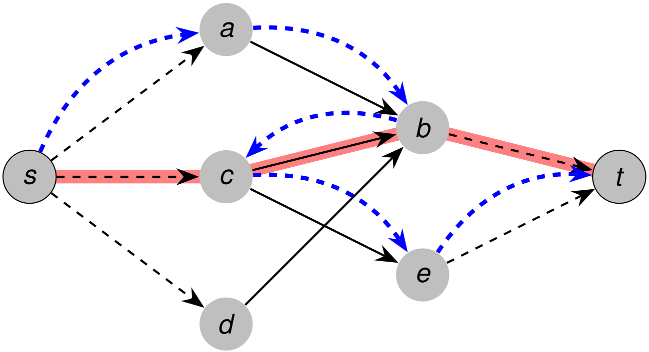




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



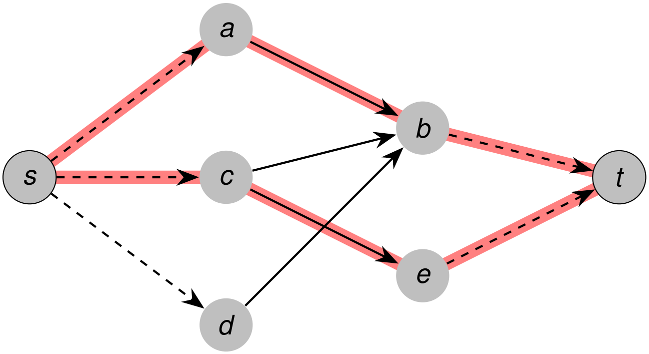


# MCBM mit Ford-Fulkerson



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

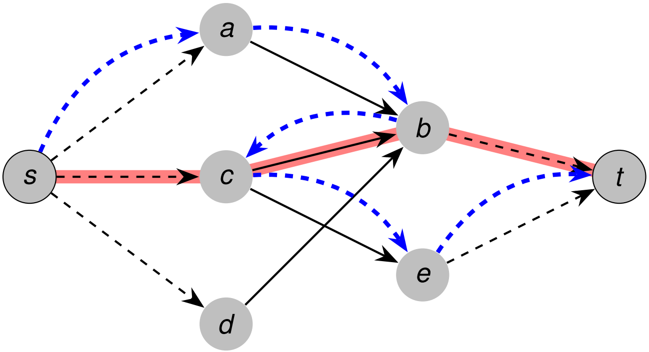




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

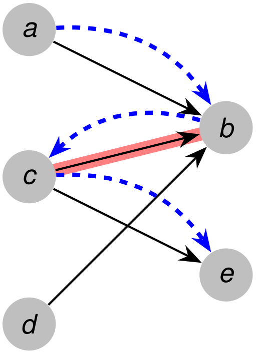




# MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in $G$ heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \,\dot\cup\, V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in $G$ heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ in $G$ heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in $G$ heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)
- $\{v_i, v_{i+1}\}$ ist abwechselnd $\in E \setminus M$ (frei) und $\in M$ (gematcht)

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe $M$ aus, falls keinen gefunden.

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe $M$ aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

# MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe $M$ aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

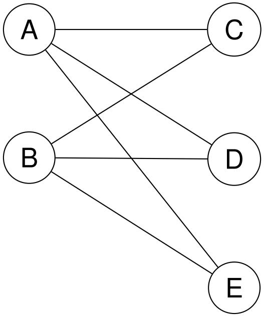
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Independent Set

## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Independent Set $IS$ ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in $IS$ über eine Kante in $G$ verbunden sind.



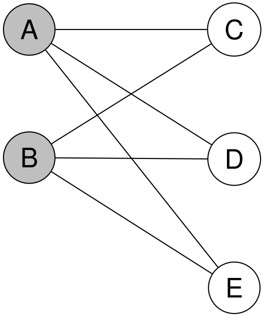
# Independent Set

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Independent Set $IS$ ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in $IS$ über eine Kante in $G$ verbunden sind.



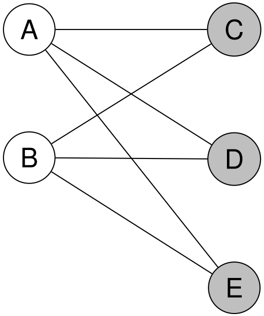
# Independent Set

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Independent Set $IS$ ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in $IS$ über eine Kante in $G$ verbunden sind.



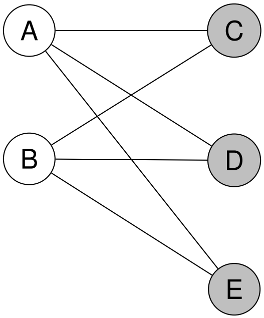
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Independent Set

**Definition**

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Independent Set $IS$ ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in $IS$ über eine Kante in $G$ verbunden sind.




In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

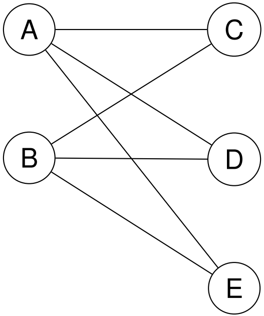


# Vertex Cover



## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Vertex Cover $VC$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in $G$ mit mindestens einem Knoten aus $VC$ verbunden ist.



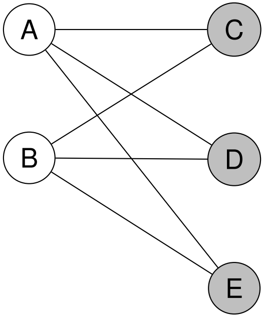
# Vertex Cover

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Vertex Cover $VC$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in $G$ mit mindestens einem Knoten aus $VC$ verbunden ist.



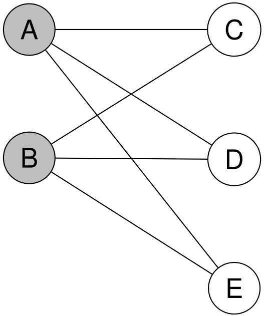
# Vertex Cover

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Vertex Cover $VC$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in $G$ mit mindestens einem Knoten aus $VC$ verbunden ist.



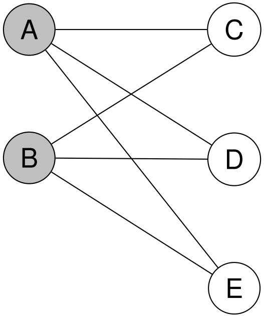
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Vertex Cover

## Definition

Gegeben einen Graphen $G$. Ein Vertex Cover $VC$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in $G$ mit mindestens einem Knoten aus $VC$ verbunden ist.




In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

# Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



**Satz**

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein } \textbf{VC} \text{ von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein } \textbf{IS} \text{ von } G$$

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Zusammenhang zwischen IS und VC

**Satz**

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein } \textbf{VC} \text{ von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein } \textbf{IS} \text{ von } G$$

**Beweis:**

- Sei $X$ ein beliebiges **VC**. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

# Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



**Satz**

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein } \textbf{VC} \text{ von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein } \textbf{IS} \text{ von } G$$

**Beweis:**

- Sei $X$ ein beliebiges **VC**. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante $(u, v)$ wäre vom VC $X$ nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!

# Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Karlsruher Institut für Technologie

## Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein } \textbf{VC} \text{ von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein } \textbf{IS} \text{ von } G$$

**Beweis:**

- Sei $X$ ein beliebiges **VC**. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante $(u, v)$ wäre vom VC $X$ nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

# Größe von IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt





**Definition**

Ein **IS**/**VC** ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des **IS**/**VC** zu behalten.
Ein **IS**/**VC** ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres **IS**/**VC** existiert.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Größe von IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

## Definition

Ein **IS**/**VC** ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des **IS**/**VC** zu behalten.
Ein **IS**/**VC** ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres **IS**/**VC** existiert.

## Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales **IS** oder ein kardinalitätsminimales **VC** auszurechnen is *NP*-schwer.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Satz von König



**Satz (von Dénes König)**

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (**VC**) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (**MCBM**).

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Satz von König



**Satz (von Dénes König)**

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (**VC**) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (**MCBM**).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

# Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Aufgabe

Gegeben sind $N$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Guardian of Decency



## Aufgabe

Gegeben sind $N$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



# Guardian of Decency



## Aufgabe

Gegeben sind $N$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

# Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Aufgabe

Gegeben sind $N$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem **IS**

# Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



## Aufgabe

Gegeben sind $N$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem **IS**
- nutze dafür aus, dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow $|V| - |MCBM| = |V| - |VC| = |IS|$