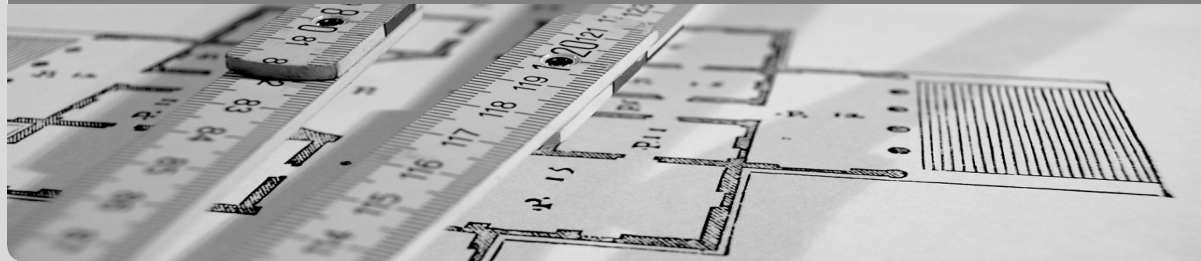


Graphen 3:

Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 14. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität (Autos pro Stunde)

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität (Autos pro Stunde)
- Für gewisse Städte A und D sucht man die Anzahl Autos pro Stunde die von A nach D fahren können

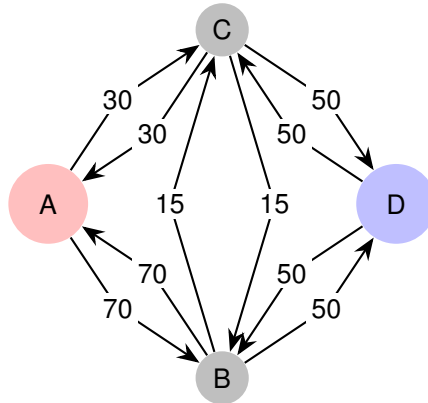
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



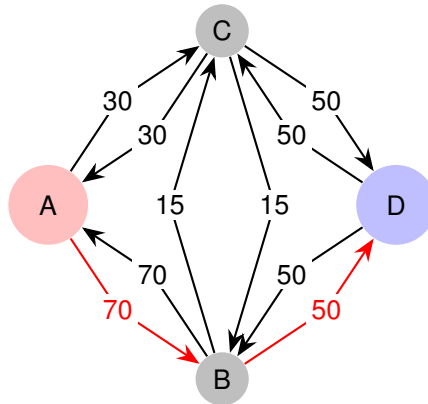
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



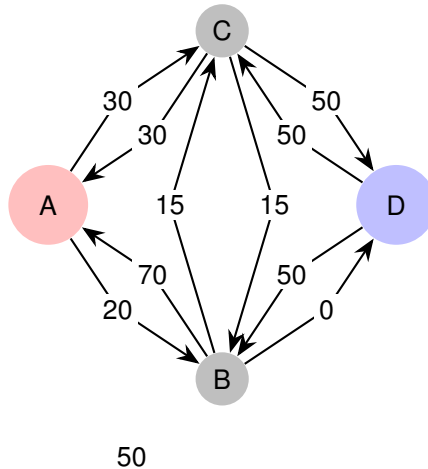
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



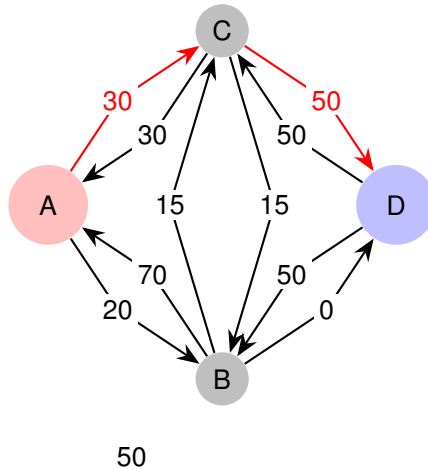
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



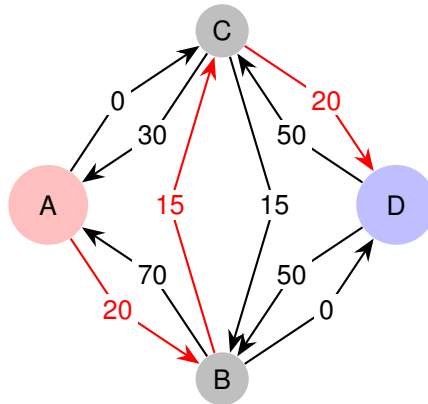
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



50 + 30

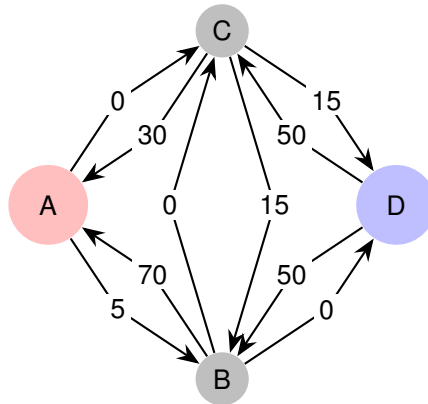
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



$$50 + 30 + 15 = 95$$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

■ $F = 0$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$) von s nach t existiert:

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
 - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
 - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
 - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \rightarrow j$) um f reduzieren

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
 - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
 - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \rightarrow j$) um f reduzieren
 - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \rightarrow i$) um f erhöhen

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
 - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
 - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \rightarrow j$) um f reduzieren
 - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \rightarrow i$) um f erhöhen
 - $F += f$;

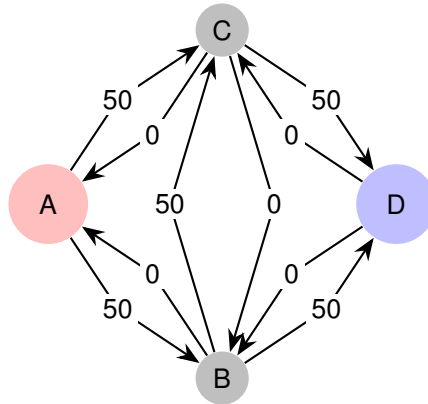
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



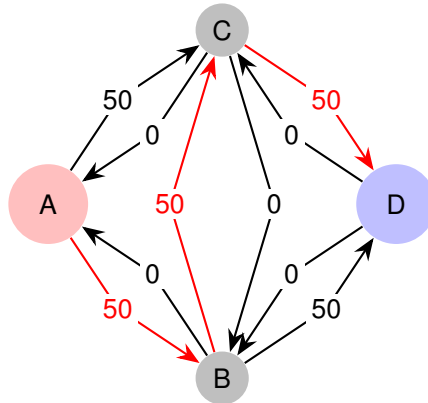
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



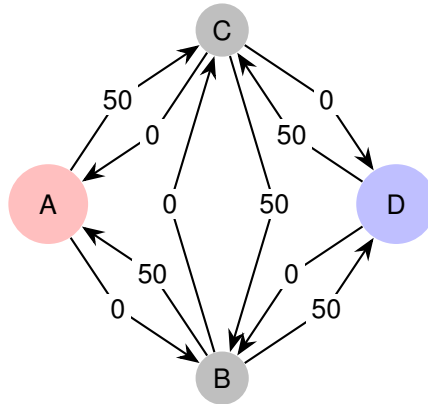
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



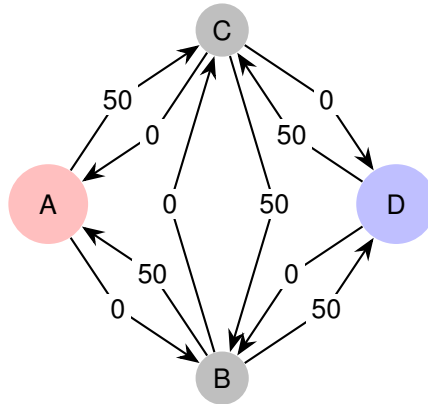
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



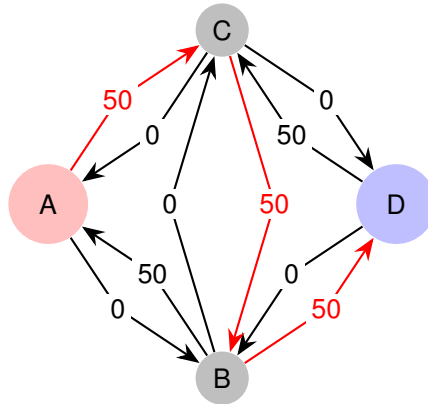
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



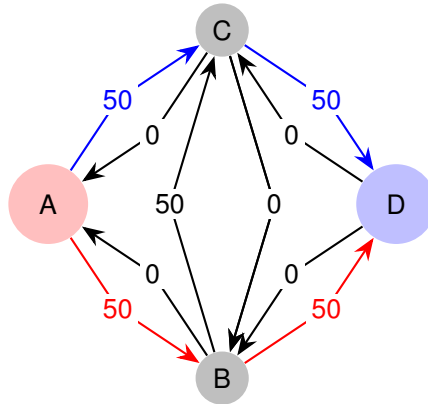
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

⇒ kann sehr groß werden

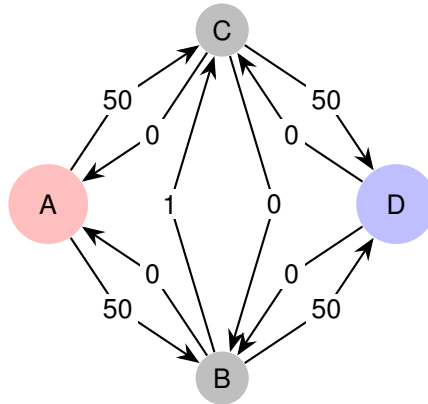
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



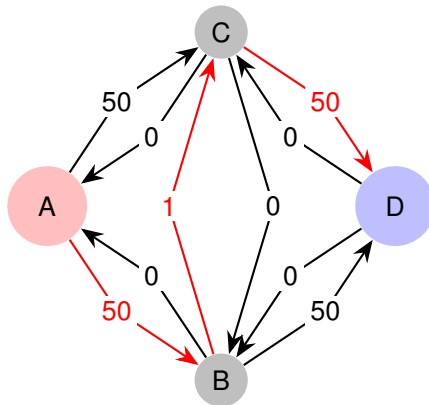
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



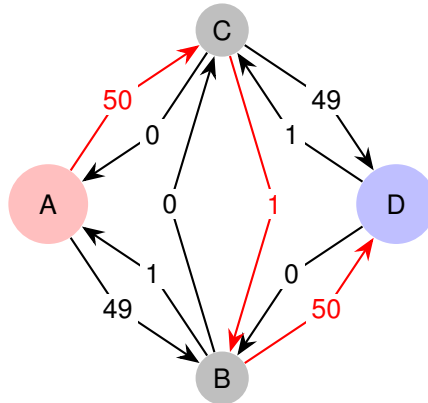
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



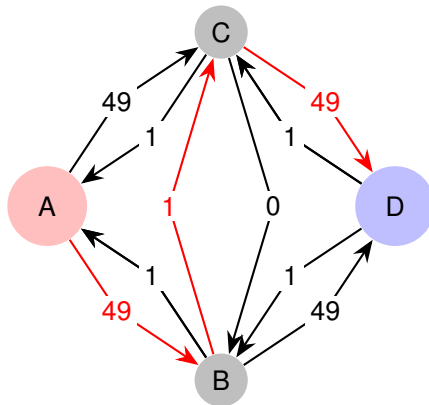
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



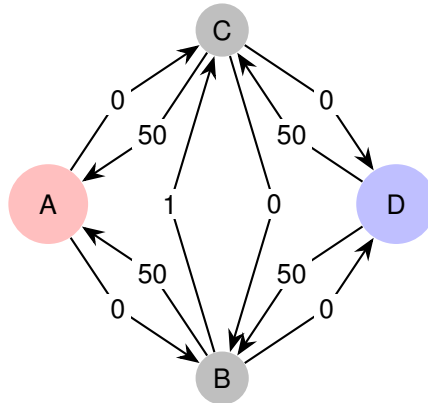
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$
- $\mathcal{O}(VE)$ mal Breitensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)
- Wie viele unterschiedliche Karten kann Bob maximal besitzen?

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



BobS



BobT

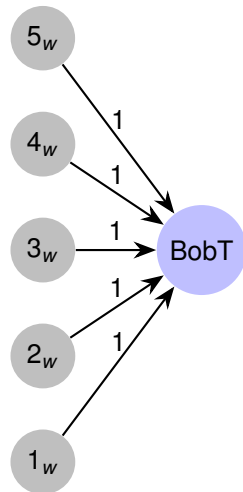
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



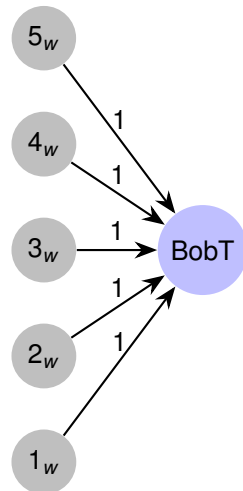
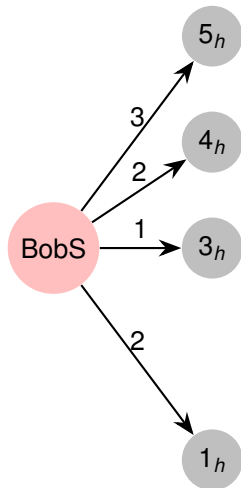
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



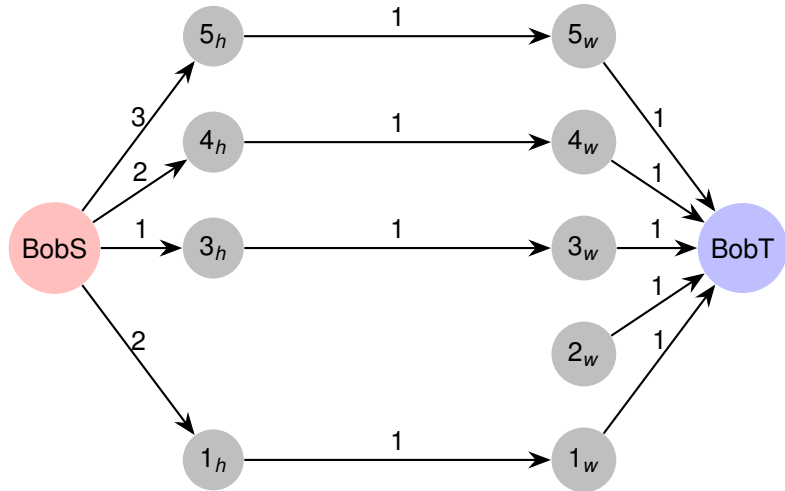
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

A

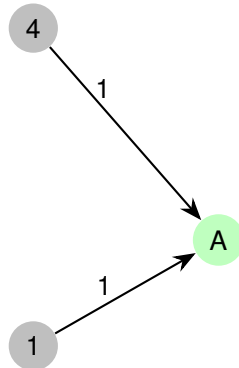
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



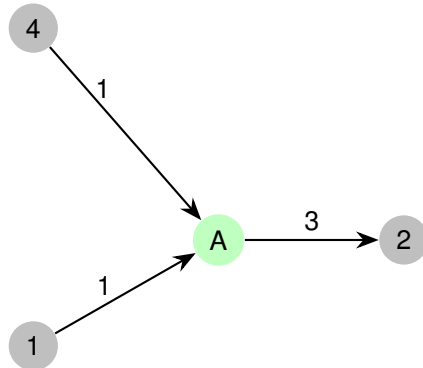
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



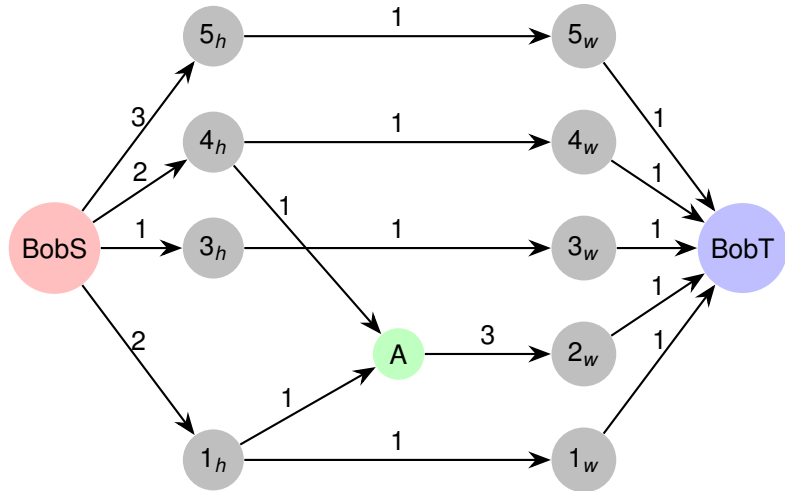
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



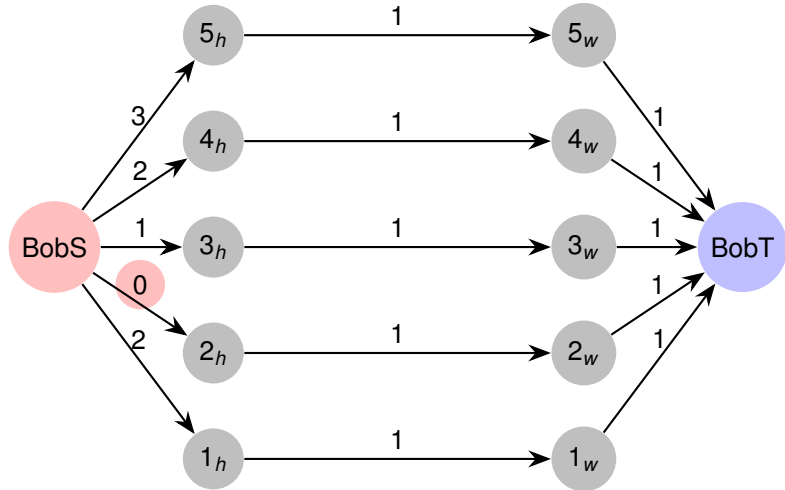
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



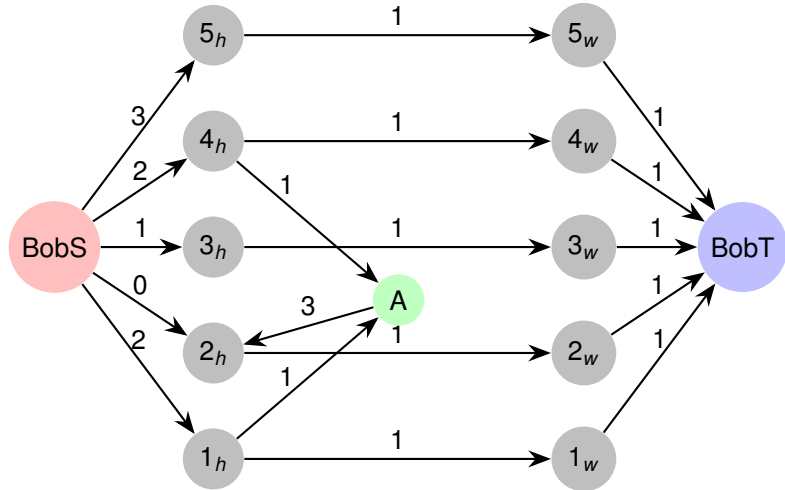
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



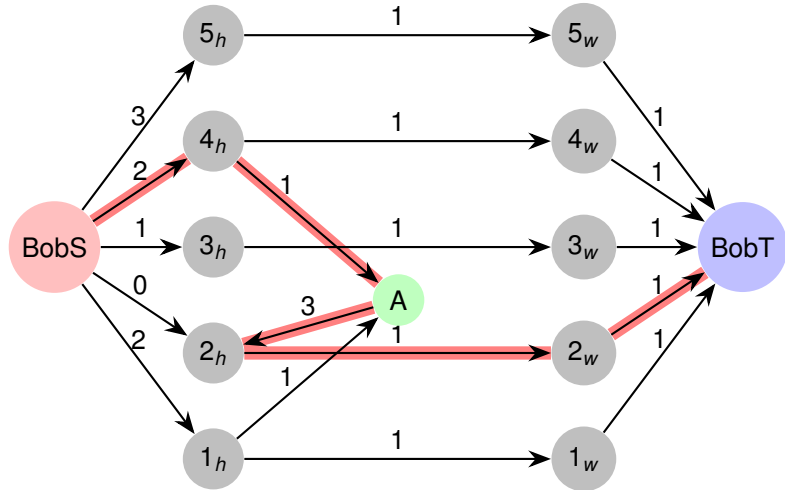
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



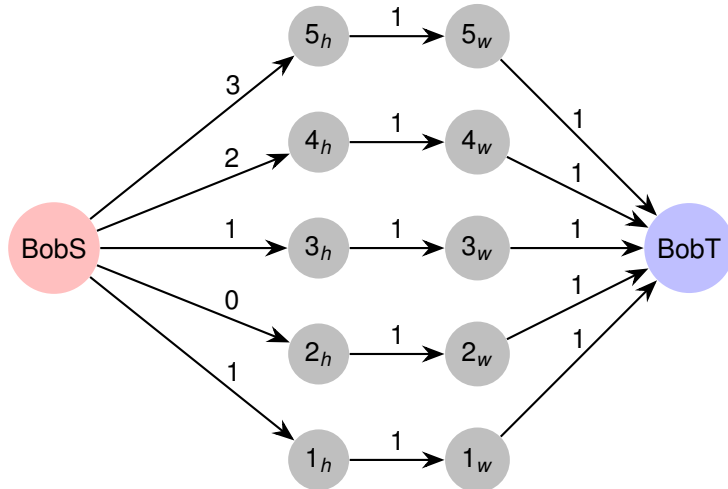
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



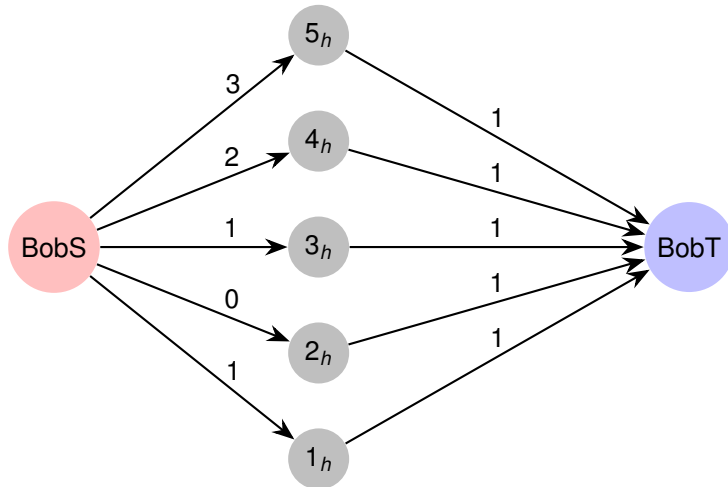
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



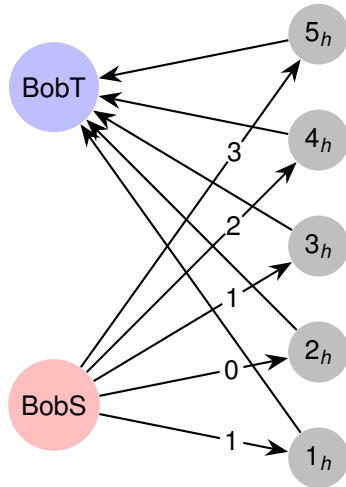
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



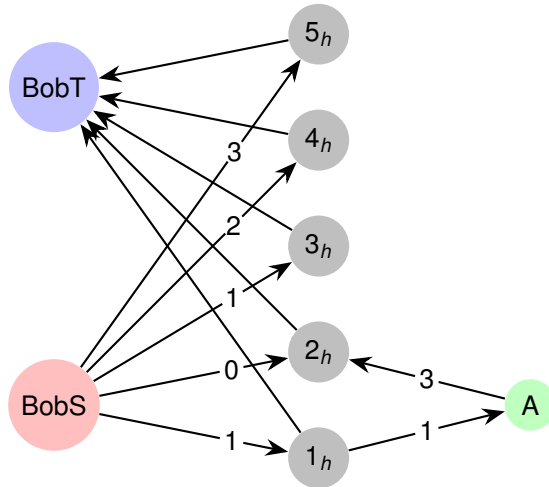
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



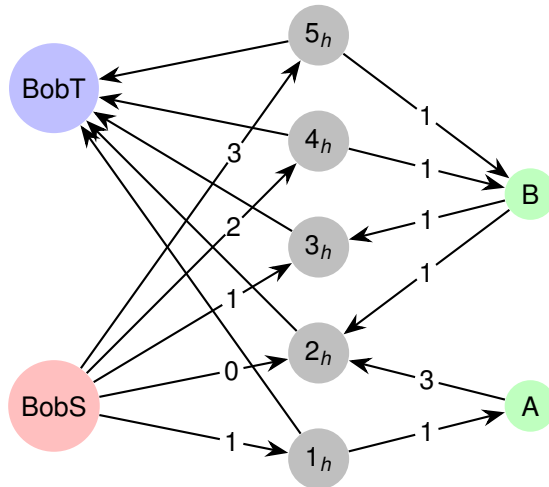
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



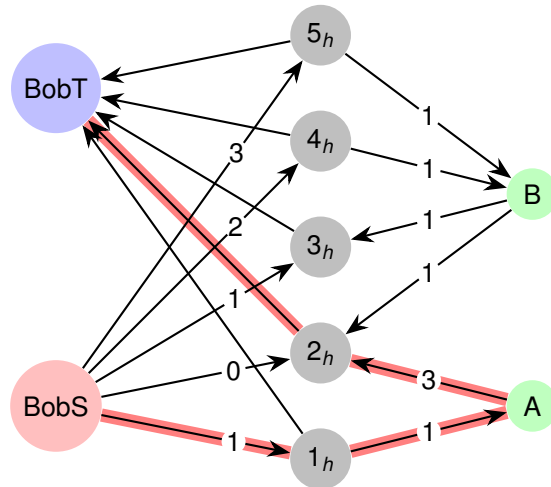
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



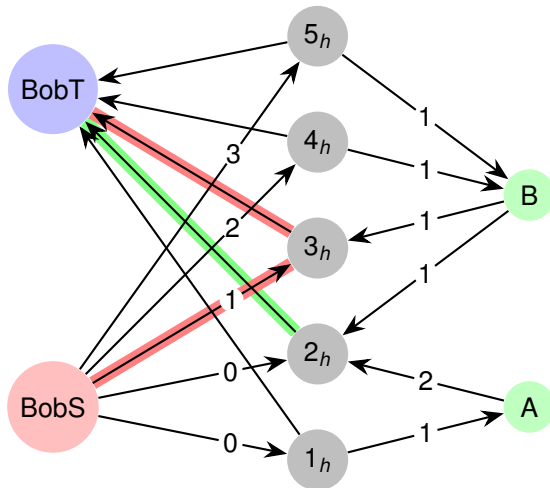
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



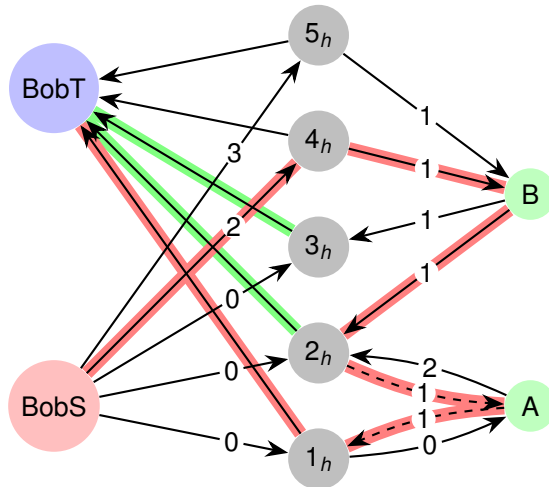
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



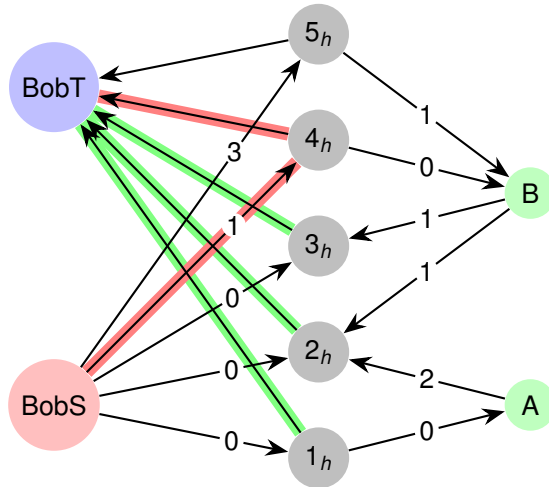
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



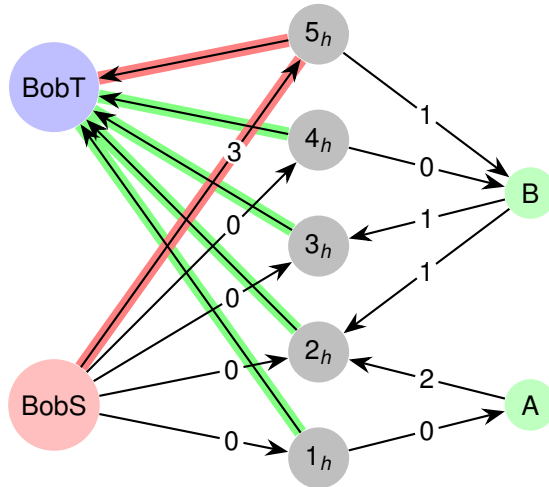
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



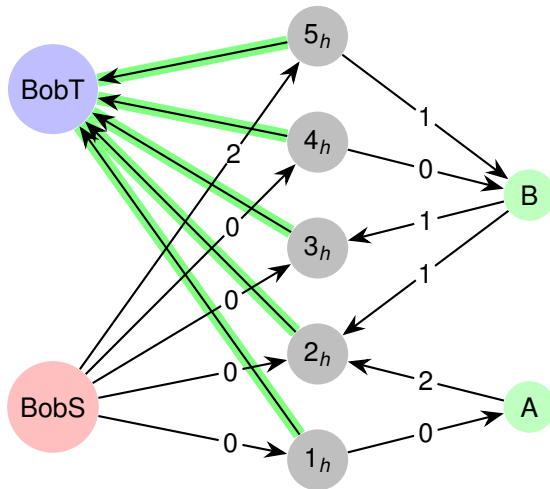
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

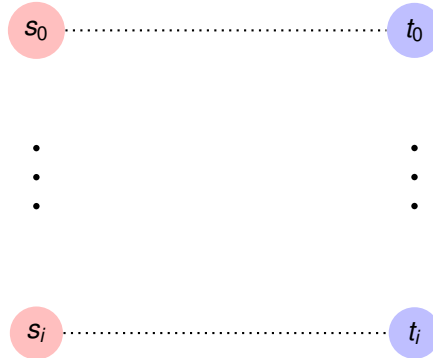
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



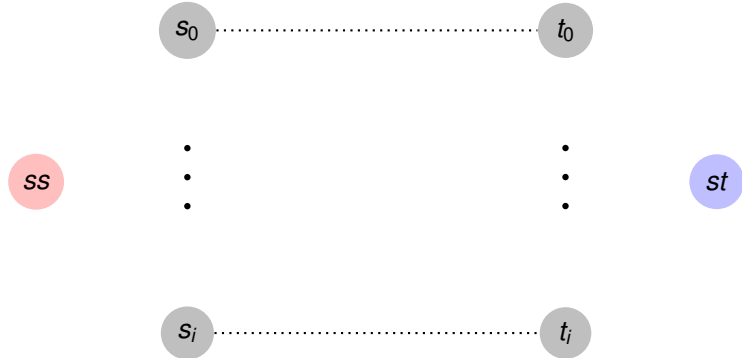
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



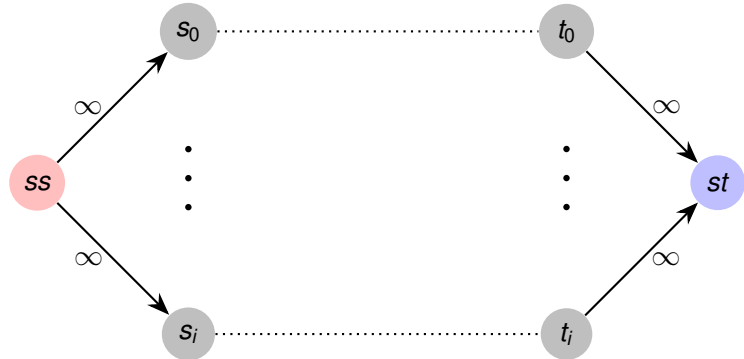
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



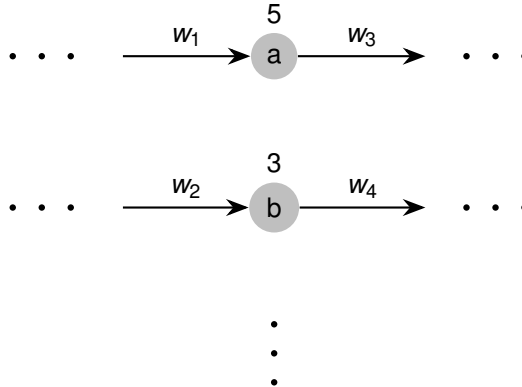
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



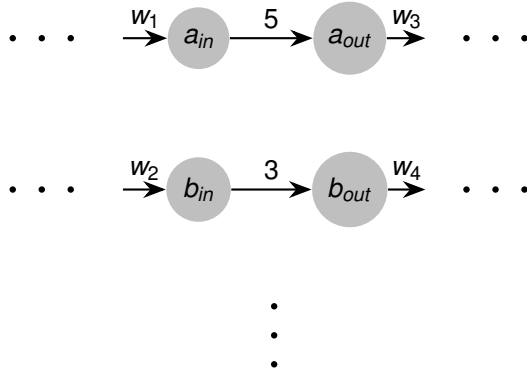
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Definition

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S$, $t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein **s - t cut** (oder **s - t Schnitt**).

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S$, $t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein **s - t cut** (oder **s - t Schnitt**).

Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S$, $t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein **s - t cut** (oder **s - t Schnitt**).

Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S$, $t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein **s - t cut** (oder **s - t Schnitt**).

Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$
Ein **Min Cut** ist ein s - t cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

■ Nebenprodukt von Max Flow

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 \implies Min Cut = Max Flow

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 \implies Min Cut = Max Flow
- Max-Flow-Min-Cut Theorem

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden
- Was sind die minimalen Kosten um die Verbindung zu zerstören?

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante
- Min Cut

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Chef

Server

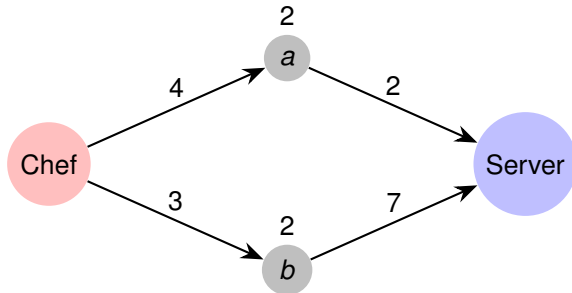
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



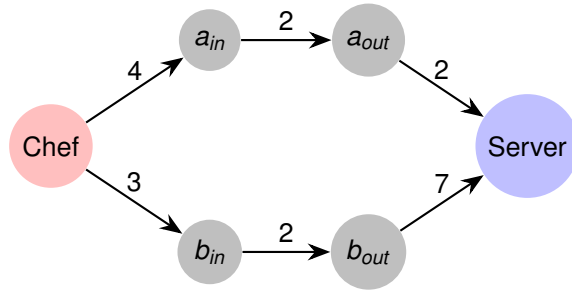
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



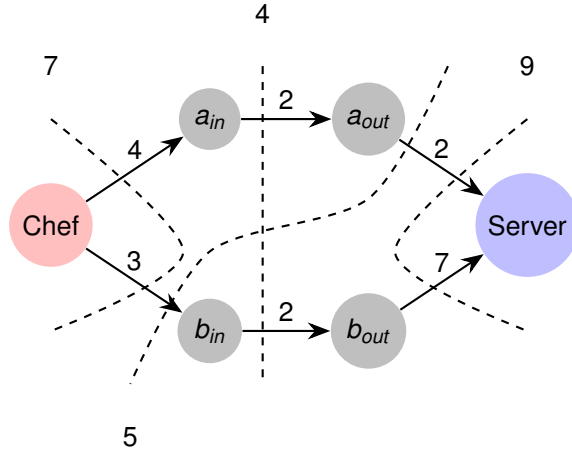
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



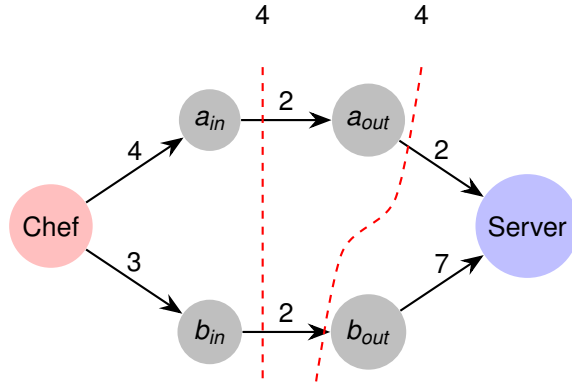
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



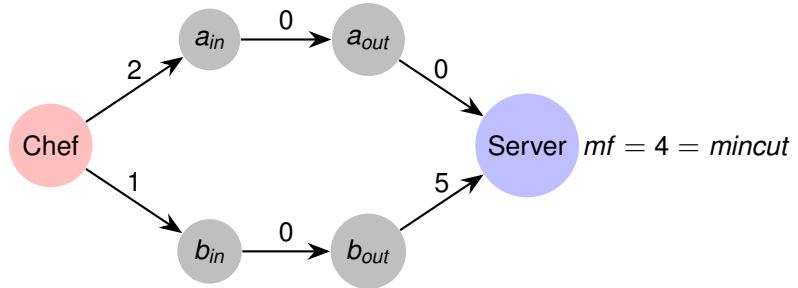
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



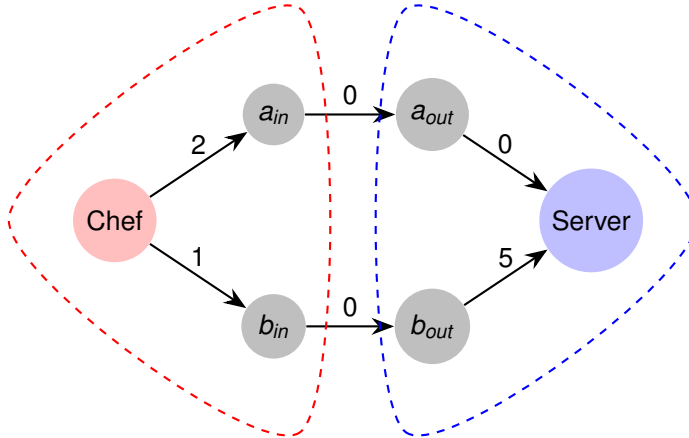
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



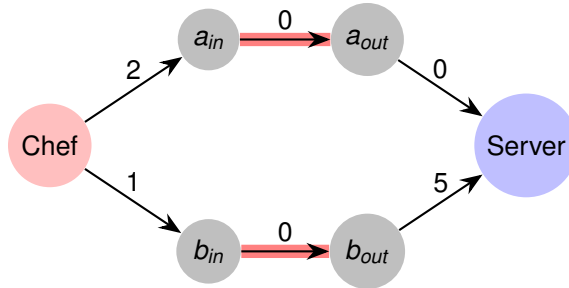
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



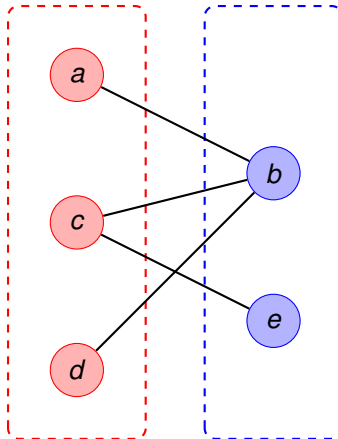
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für G bipartit: „Maximum Cardinality Bipartite Matching“, kurz **MCBM**.

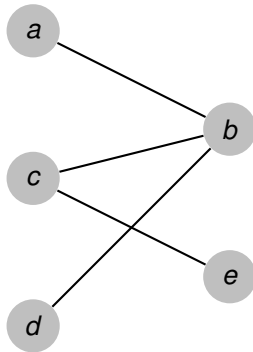
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



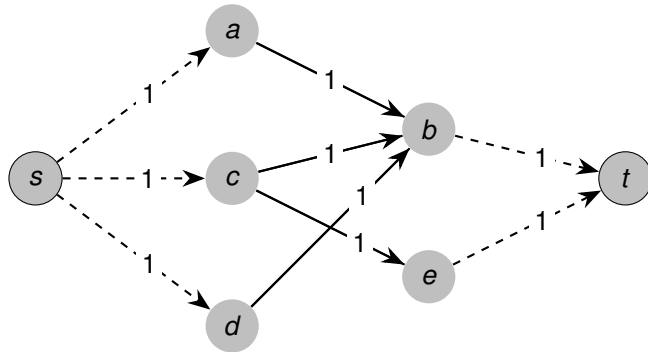
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



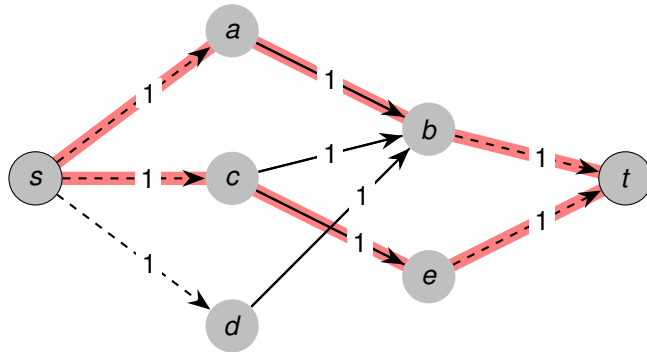
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



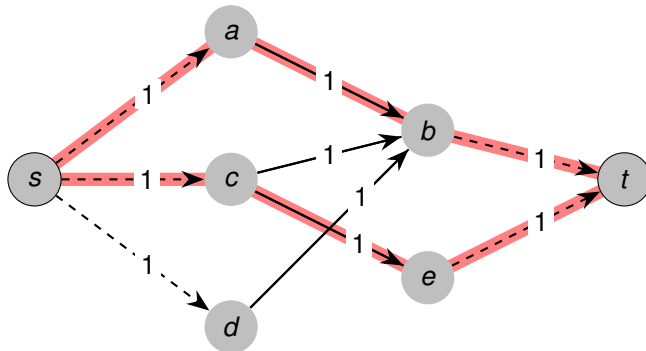
Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
- Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(f^* \cdot |E|) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

Ein Pfad (v_1, \dots, v_n) in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)
- $\{v_i, v_{i+1}\}$ ist abwechselnd $\in E \setminus M$ (frei) und $\in M$ (gematcht)

Augmenting Path Algorithmus

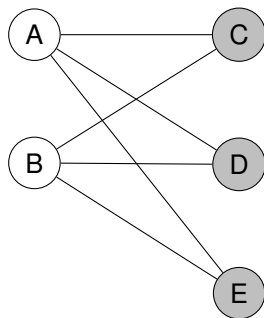
Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

- (1) Initialisiere $M := \emptyset$.
- (2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.
- (3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Definition

Gegeben einen Graphen G . Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

Maximum Flow

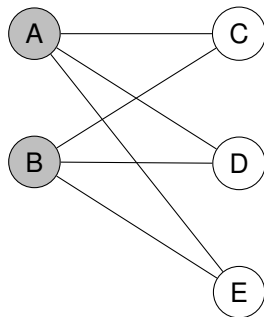
Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Definition

Gegeben einen Graphen G . Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein } \mathbf{VC} \text{ von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein } \mathbf{IS} \text{ von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges **VC**. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein **IS** ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
 - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
 - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom **VC** X nicht abgedeckt \Rightarrow Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Definition

Ein **IS/VC** ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des **IS/VC** zu behalten.
Ein **IS/VC** ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres **IS/VC** existiert.

Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales **IS** oder ein kardinalitätsminimales **VC** auszurechnen ist *NP*-schwer.

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (**VC**) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (**MCBM**).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.

Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:

$$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$$

Robert Brede, Peter
Koepernik, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

Modellierung und
Variationen

Bipartite Graphen

IS und VC

Aufgabe

Gegeben sind N Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.

Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem **IS**
- nutze dafür aus, dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow $|V| - |MCBM| = |V| - |VC| = |IS|$