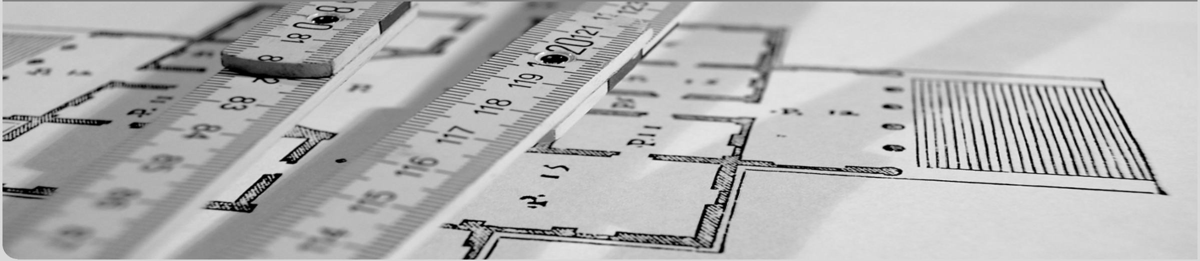
Karlsruher Institut für Technologie

Graphen 3:
Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König

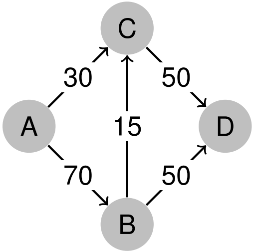
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 9. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



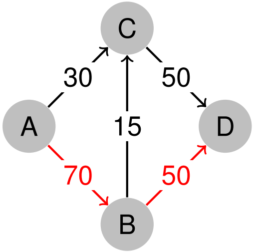
Motivation

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



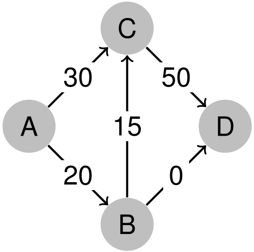
Motivation

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Motivation

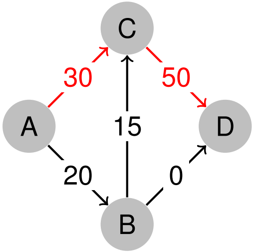
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50

Motivation

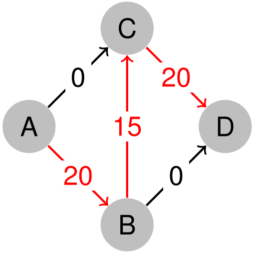
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50

Motivation

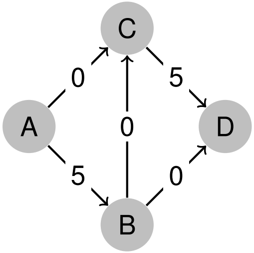
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50 + 30

Motivation

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50 + 30 + 15 = 95

Ford Fulkerson

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;

Ford Fulkerson

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;
- Solange ein Pfad p (s $\rightarrow$ ... i $\rightarrow$ j $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ t) von source nach t existiert:

Ford Fulkerson

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;
- Solange ein Pfad p (s $\rightarrow$ ... i $\rightarrow$ j $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ t) von source nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad

Ford Fulkerson

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;
- Solange ein Pfad p (s $\rightarrow$ ... i $\rightarrow$ j $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ t) von source nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. i $\rightarrow$ j) um f reduzieren

Ford Fulkerson

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;
- Solange ein Pfad p (s $\rightarrow$ ... i $\rightarrow$ j $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ t) von source nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. i $\rightarrow$ j) um f reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. j $\rightarrow$ i) um f erhöhen

Ford Fulkerson

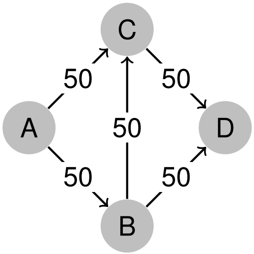
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- mf = 0;
- Solange ein Pfad p (s $\rightarrow$ ... i $\rightarrow$ j $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ t) von source nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. i $\rightarrow$ j) um f reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. j $\rightarrow$ i) um f erhöhen
  - mf += f;

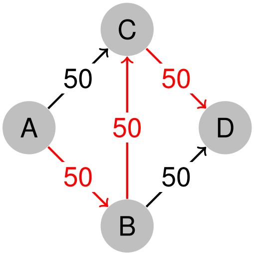
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Rückkante



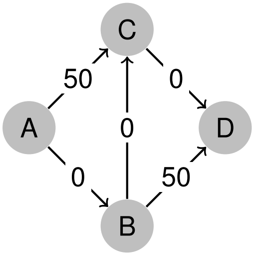
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Rückkante

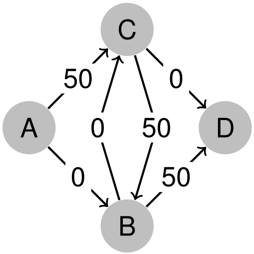


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Rückkante

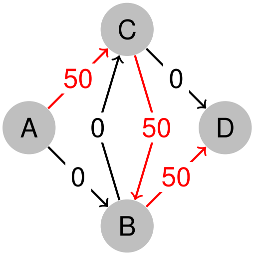


Rückkante



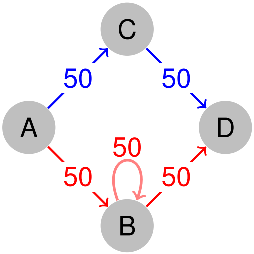
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Rückkante



Rückkante

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

Laufzeit Ford Fulkerson

- O(ES)

Laufzeit

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit Ford Fulkerson

- O(ES)
- wobei S die Lösung ist

Laufzeit

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit Ford Fulkerson

- O(ES)
- wobei S die Lösung ist
- O(S) mal Tiefensuche, was in O(E) läuft, da $E \geq$ V - 1

Laufzeit

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

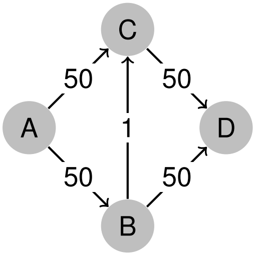
Laufzeit Ford Fulkerson

- O(ES)
- wobei S die Lösung ist
- O(S) mal Tiefensuche, was in O(E) läuft, da $E \geq$ V - 1

$\Rightarrow$ kann sehr groß werden

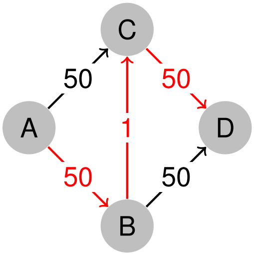
Laufzeit Beispiel

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



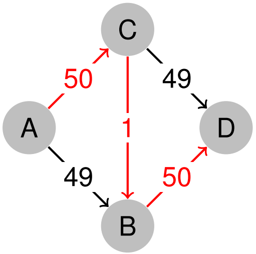
Laufzeit Beispiel

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



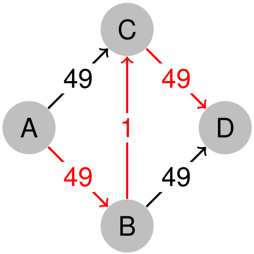
Laufzeit Beispiel

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



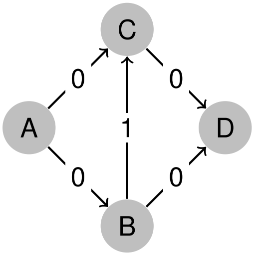
Laufzeit Beispiel

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Laufzeit Beispiel

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Edmond Karp

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche

Edmond Karp

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit O(VE^2)

Edmond Karp

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit O(VE^2)
- O(VE) mal Breitensuche, was in O(E) läuft

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

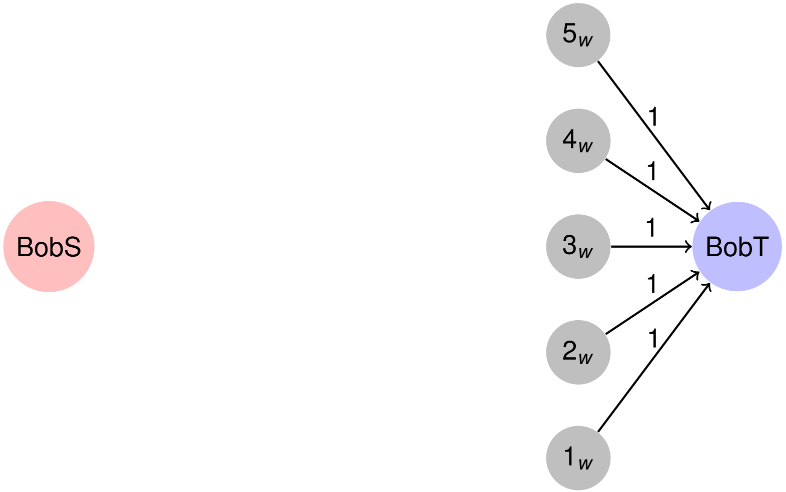
UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)
- Wie viele unterschiedliche Karten kann Bob maximal besitzen?

Einmaliger „greedy" Tausch

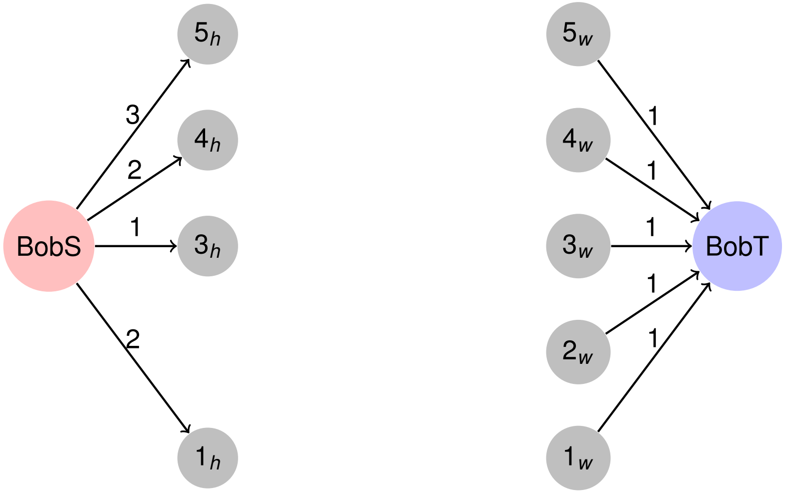
Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



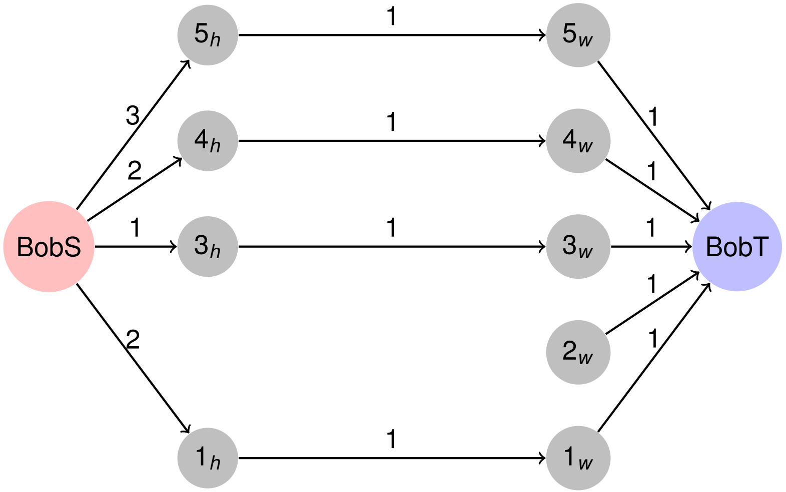
Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

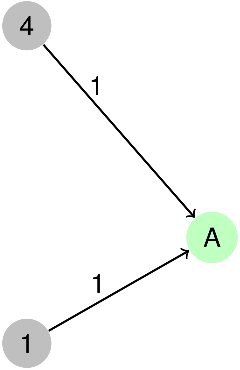


Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

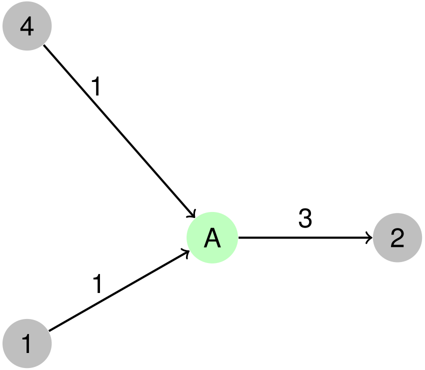
Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



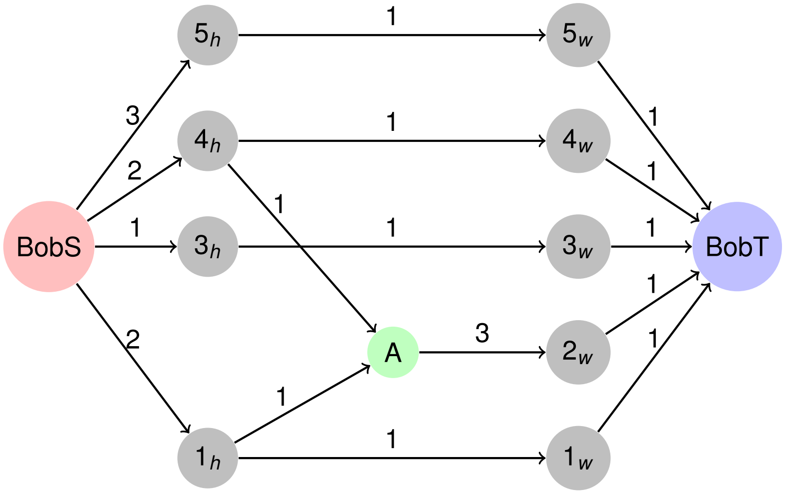
Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Einmaliger „greedy“ Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Mehrfacher beliebiger Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

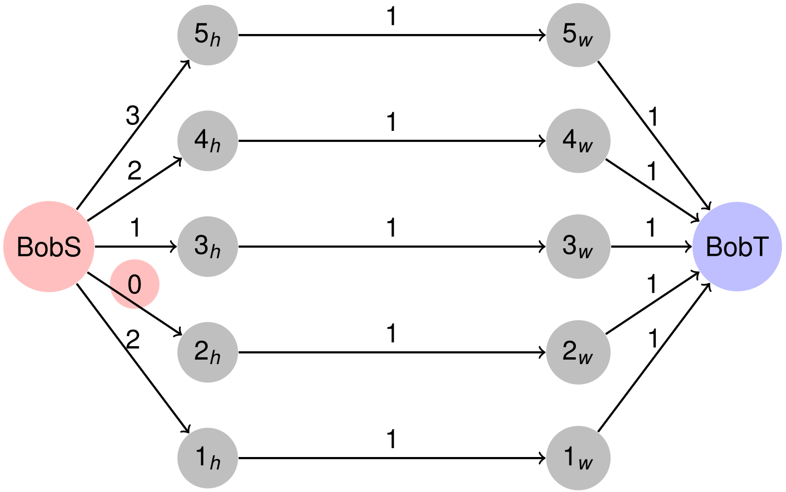
Maximum Flow

UVa 10779 - Collector's Problem

Variationen von Network Flow

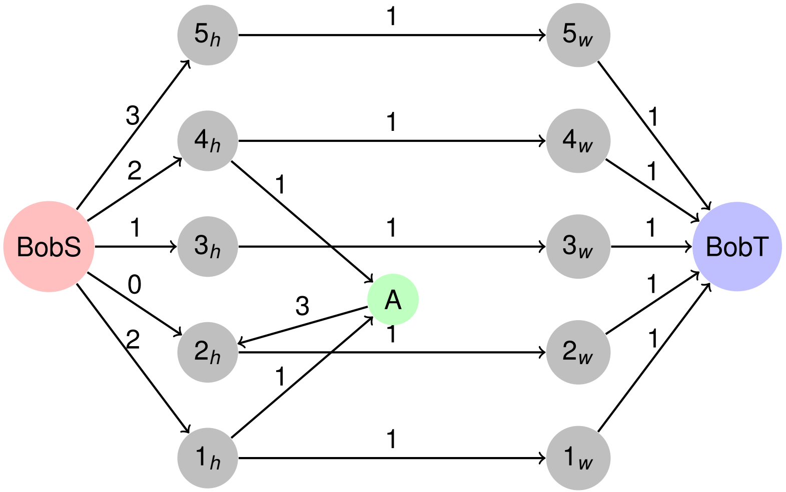
Bipartite Graphen

IS und VC



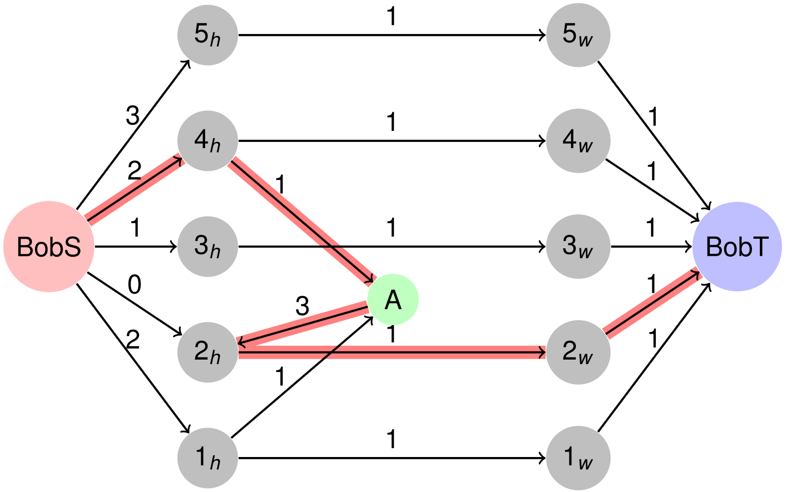
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Mehrfacher beliebiger Tausch



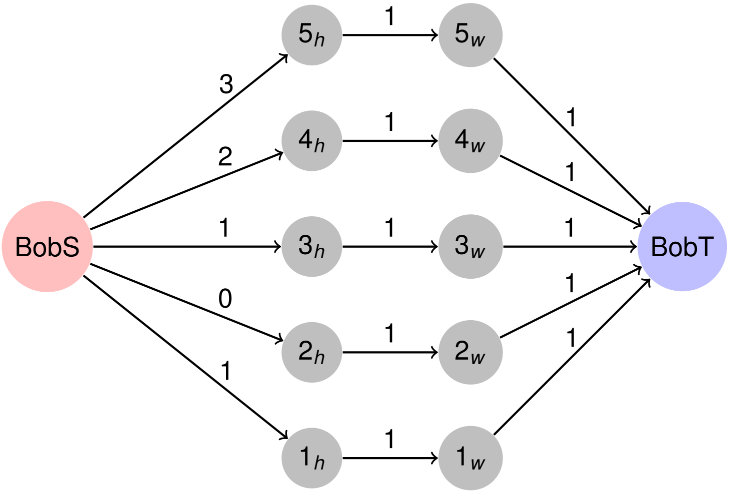
Mehrfacher beliebiger Tausch

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



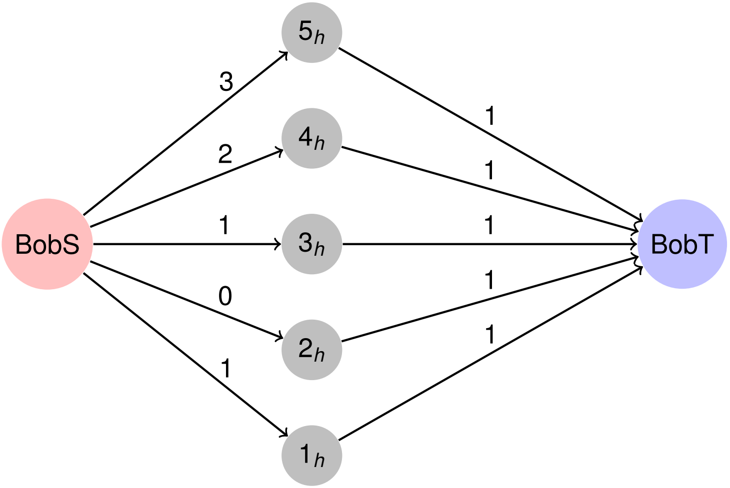
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



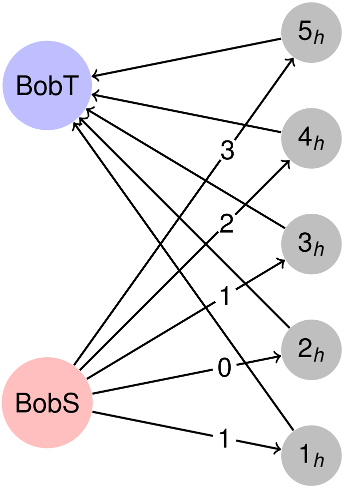
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



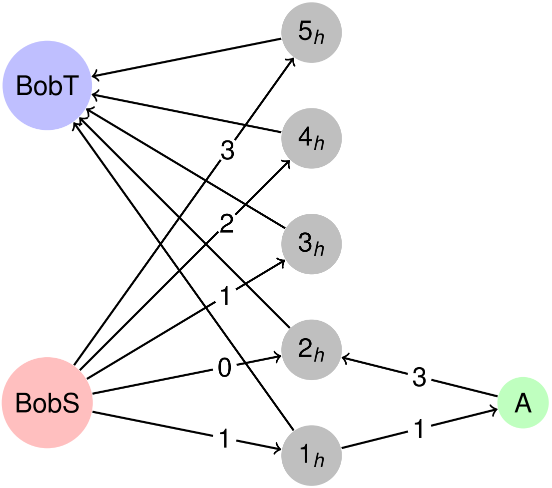
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



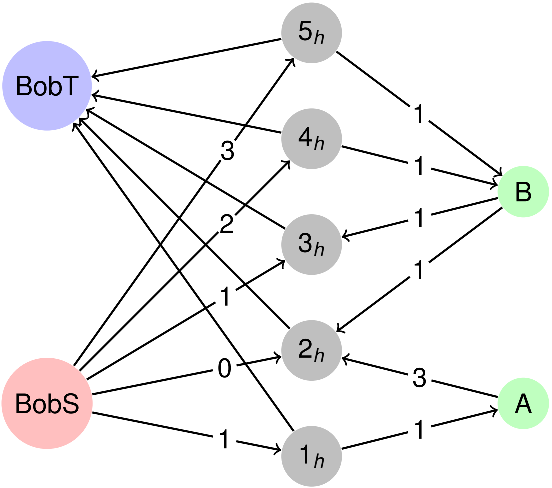
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



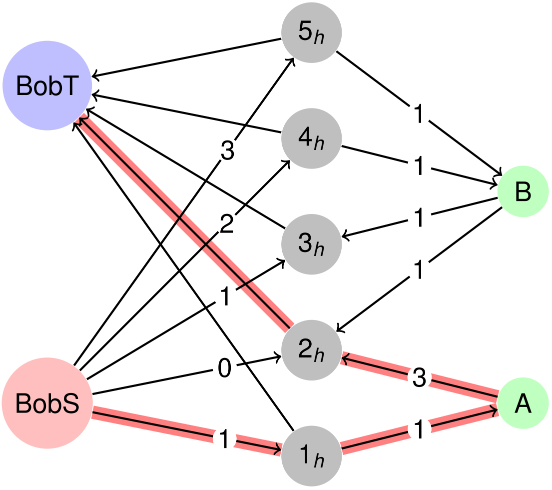
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



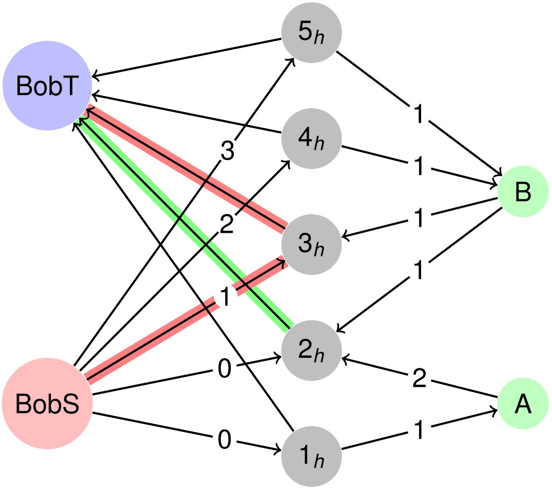
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



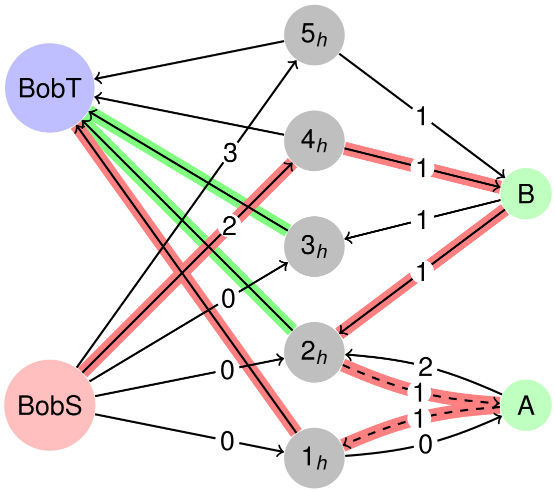
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



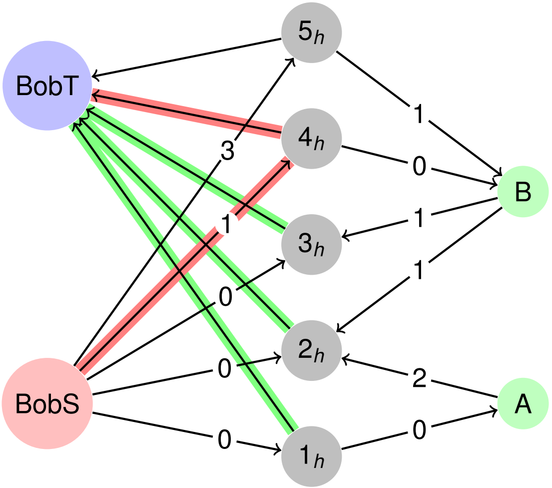
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



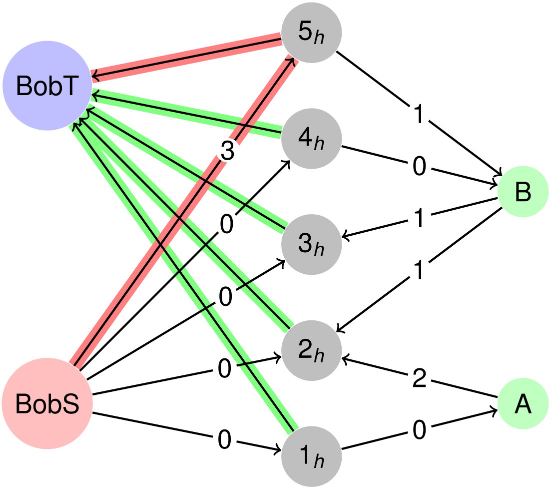
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



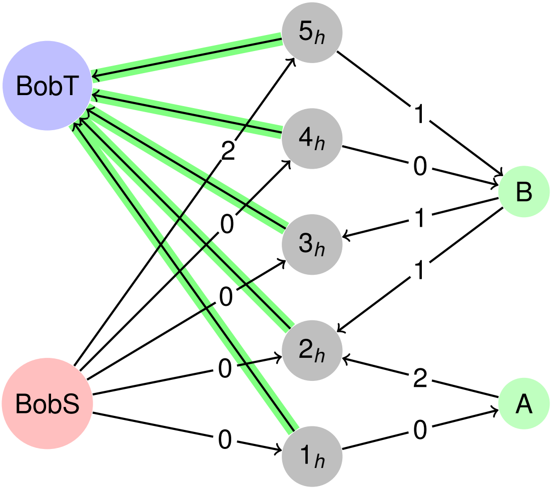
Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Vereinfachung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



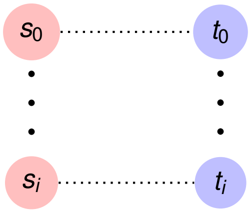
Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

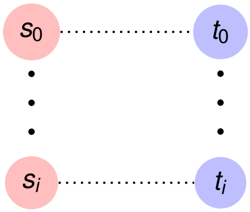
- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$



Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Multi-source & Multi-sink

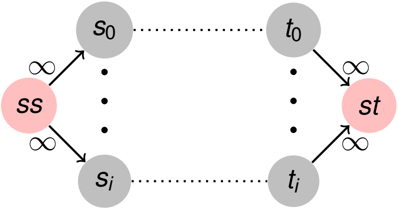
- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*



Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

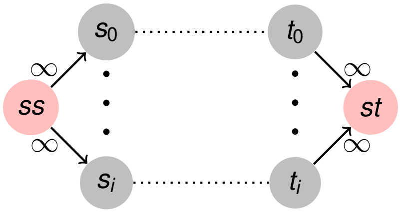
- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i$: Füge (ss, s_x) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni y \leq j$: Füge (t_y, st) mit Gewicht ∞ zu E hinzu



Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i$: Füge (ss, s_x) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni y \leq j$: Füge (t_y, st) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- Berechne Max-Flow von *ss* nach *st*



Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Knoten Kapazität

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Knoten Kapazität

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Situation: Knoten $v_0, \dots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \dots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v\_in_x, v\_out_x)) := w(v_x)$

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Situation: Knoten $v_0, \dots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \dots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v\_in_x, v\_out_x)) := w(v_x)$
- Doppelte Anzahl an Knoten!

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Schnitt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein s-t **cut** (oder s-t **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Min Cut** ist ein s-t cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.

Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Min Cut** ist ein s-t cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.
Für einen solchen gilt insbesondere:

$$\forall e \in X_C, X'_C := X_C \setminus e : \text{ Es existiert ein Weg von } s \text{ nach } t \text{ in } (V, E \setminus X'_C)$$

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von *s* ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden
- Was sind die minimalen Kosten um die Verbindung zu zerstören?

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Maximum Flow

UVa 10779 - Collector's Problem

Variationen von Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

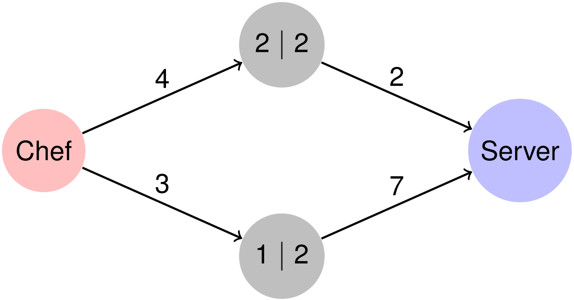
- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante
- Min Cut

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

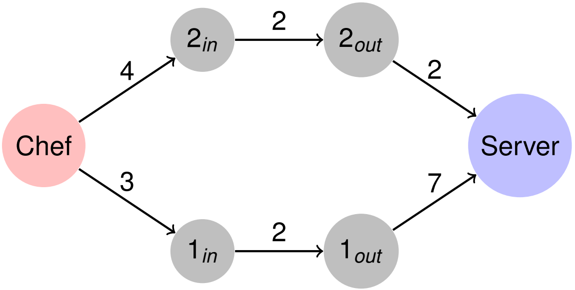
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



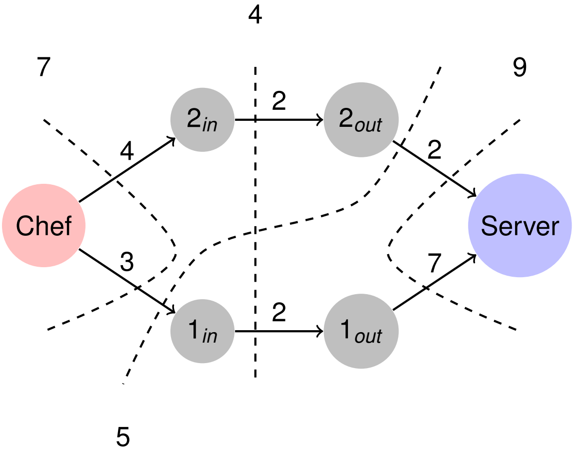
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



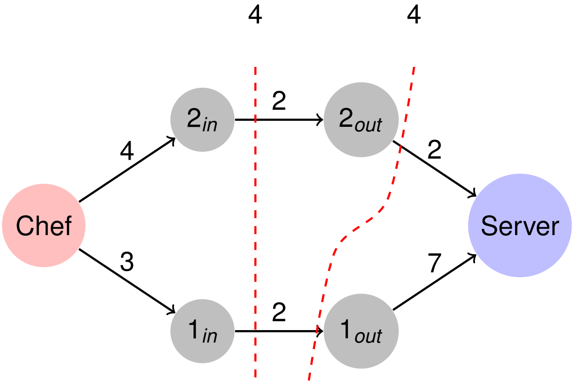
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



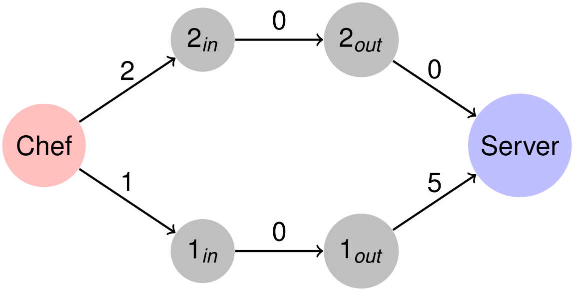
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

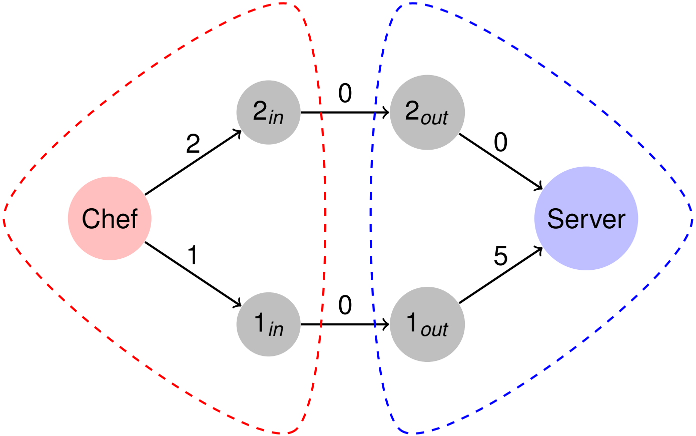
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



$mf = 4 = mincut$

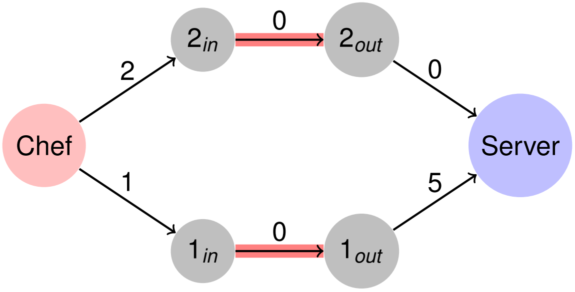
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



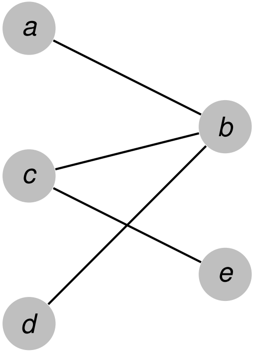
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



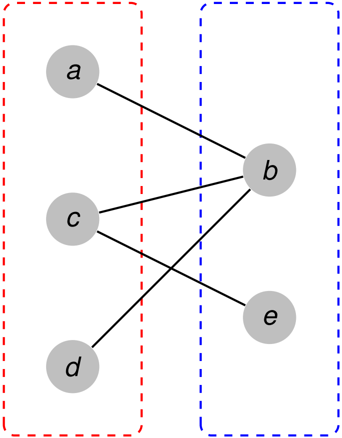
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Bipartite Graphen



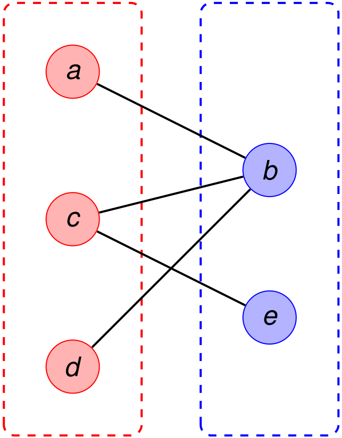
Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

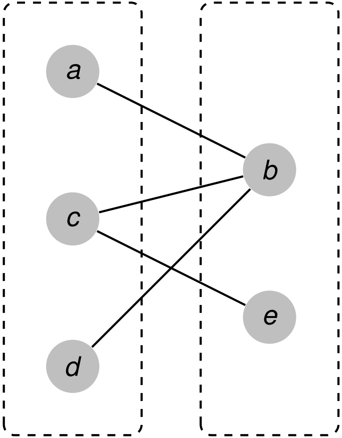
$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für G bipartit: „Maximum Cardinality Bipartite Matching“, kurz **MCBM**.

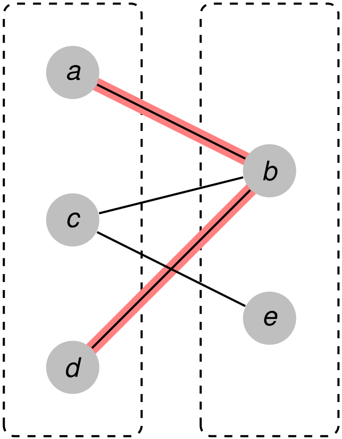
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



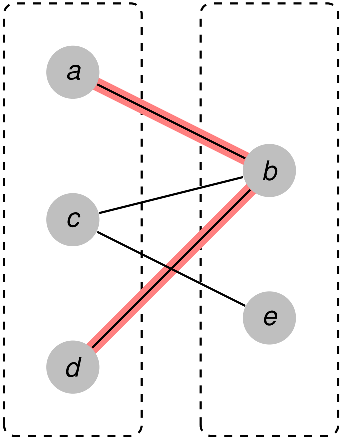
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

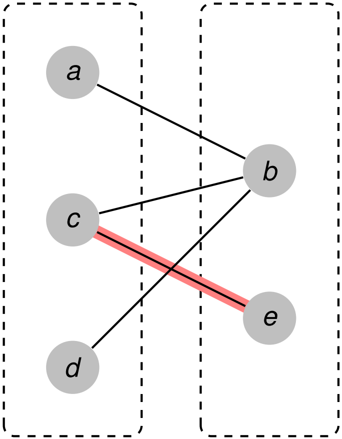
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kein Matching

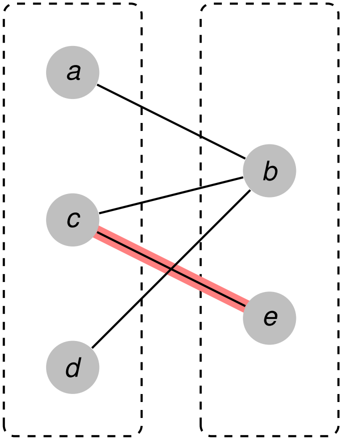
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

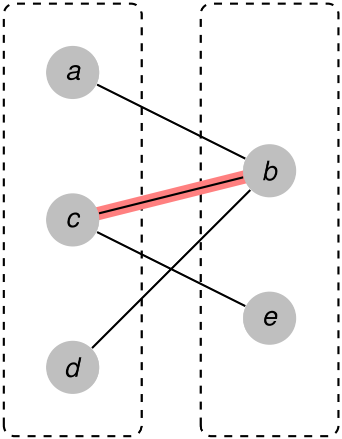
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

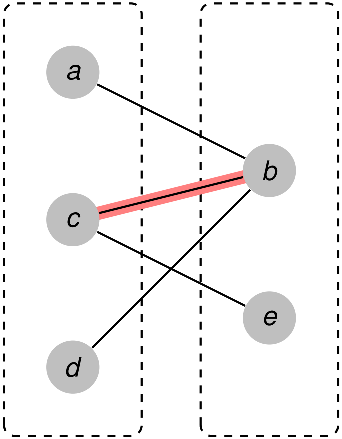
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

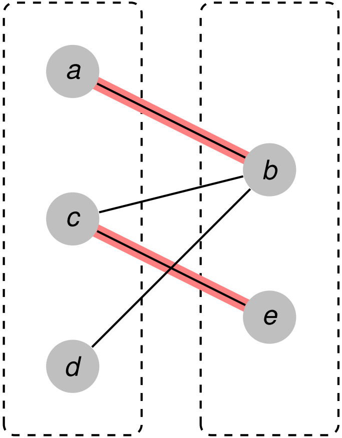
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

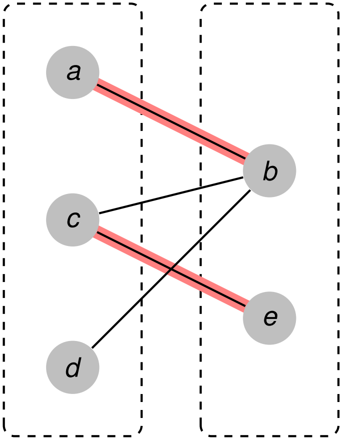
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kardinalitätsmaximales Matching

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe „Nein“ aus.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe „Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe „Nein“ aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe „Nein“ aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

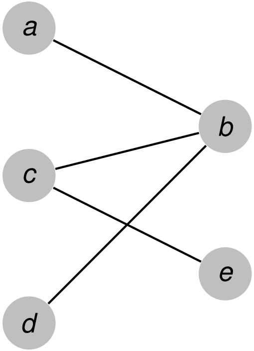
Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe „Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.
- Berechne ein MCBM M von G und gebe „Ja" aus, falls $|M| = |V_1| = |V_2|$.

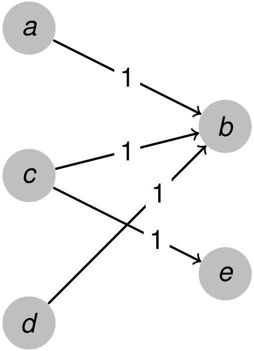
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



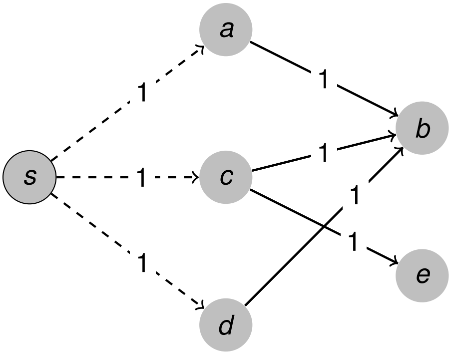
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



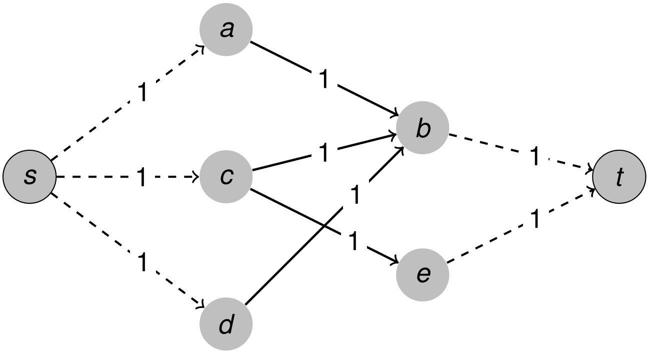
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



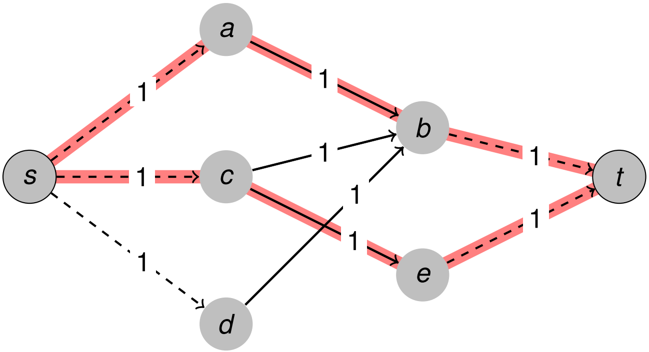
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E),\ V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path, so ist

$$M' := M \setminus P \cup P \setminus M, \text{ wobei } P := \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, ..., n-1\}\}$$

(flippe die Kanten entlang des Pfades) ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

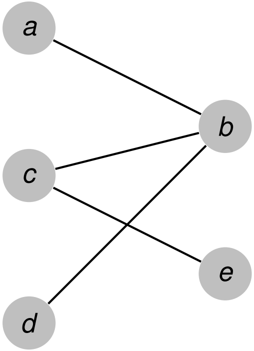
(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $O(|V| \cdot |E|)$.

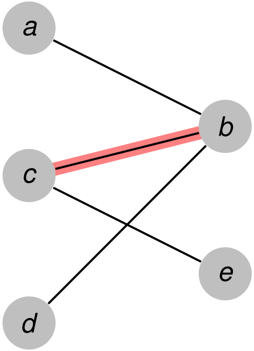
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



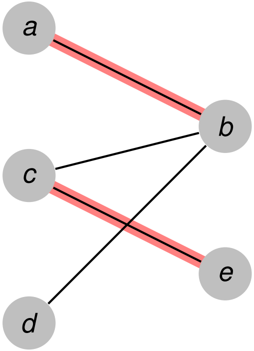
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

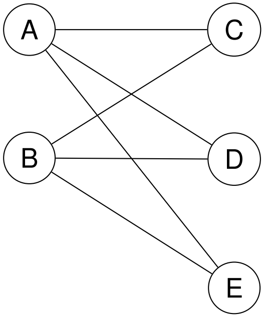


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

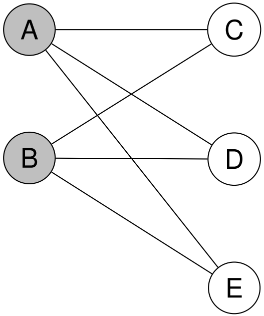


Independent Set

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen *G*. Ein Independent Set *IS* ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in *IS* über eine Kante in *G* verbunden sind.

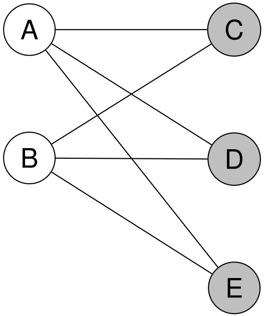


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



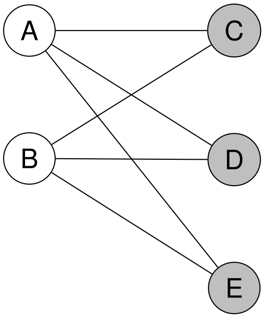
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



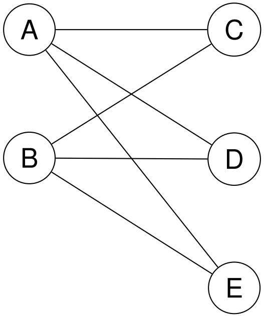
In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

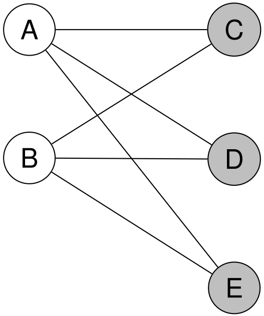


Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

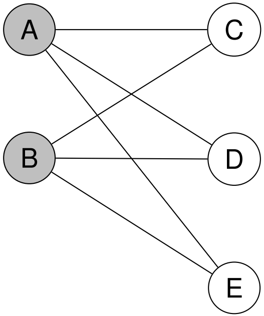


Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

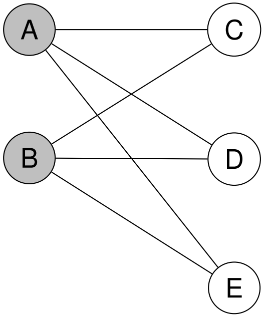


Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

Zusammenhang zwischen IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Zusammenhang zwischen IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Zusammenhang zwischen IS und VC

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!

Zusammenhang zwischen IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

Größe von IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.
Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten. Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales IS oder ein kardinalitätsminimales VC auszurechnen is *NP*-schwer.

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz von König

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Mit diesem Satz und den uns bekannten Verfahren erhalten wir nur die Größen der Mengen nicht aber deren Elemente. Um auch an die Elemente der Mengen ran zu kommen, braucht es noch mehr Verfahren. Die Mengen sind allerdings nicht eindeutig.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS

Guardian of Decency

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS
- nutze dafür aus dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow ein MCBM und daraus die Größe von IS