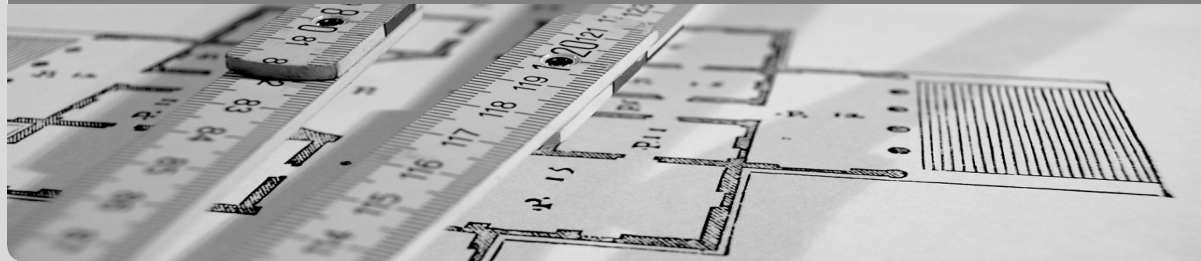


# Graphen 3:

## Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König  
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 10. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität
- Für gewisse Städte A und D sucht man die Anzahl Autos die von A nach D fahren können

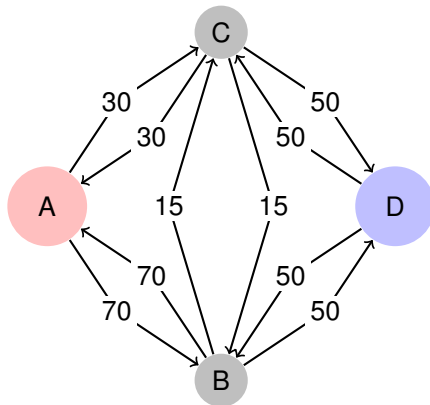
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



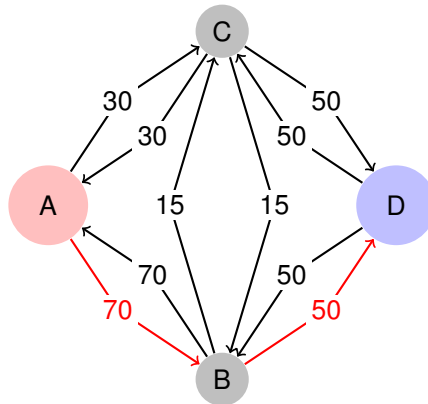
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



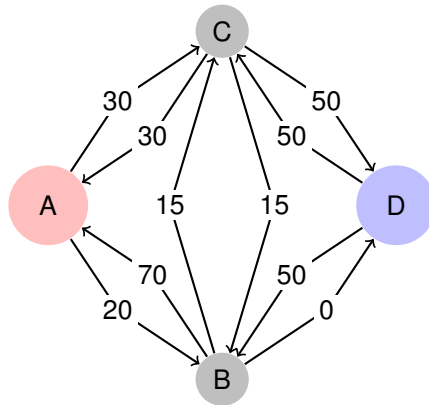
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



50

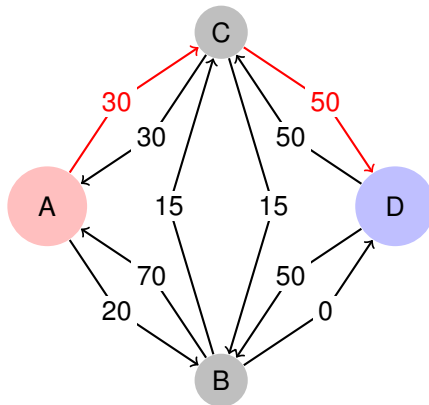
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



50

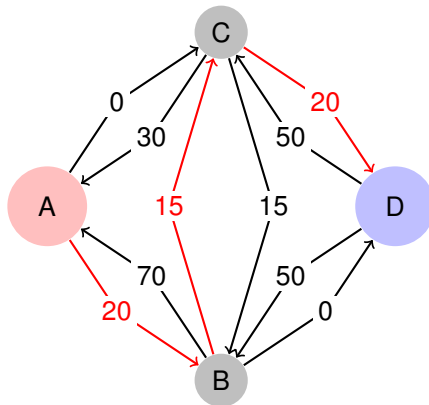
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



$$50 + 30$$



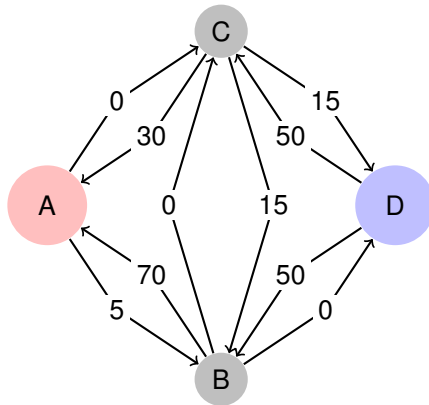
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



$$50 + 30 + 15 = 95$$

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Ford Fulkerson

- $mf = 0;$

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Ford Fulkerson

- $mf = 0$ ;
- Solange ein steigender Pfad  $p$  ( $s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$ ) von source nach  $t$  existiert:

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Ford Fulkerson

- $mf = 0$ ;
- Solange ein steigender Pfad  $p$  ( $s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$ ) von source nach  $t$  existiert:
  - 1. finde minimale Kante  $f$  auf dem Pfad

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Ford Fulkerson

- $mf = 0$ ;
- Solange ein steigender Pfad  $p$  ( $s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$ ) von source nach  $t$  existiert:
  - 1. finde minimale Kante  $f$  auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B.  $i \rightarrow j$ ) um  $f$  reduzieren

## Ford Fulkerson

- $mf = 0$ ;
- Solange ein steigender Pfad  $p$  ( $s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$ ) von source nach  $t$  existiert:
  - 1. finde minimale Kante  $f$  auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B.  $i \rightarrow j$ ) um  $f$  reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B.  $j \rightarrow i$ ) um  $f$  erhöhen

## Ford Fulkerson

- $mf = 0$ ;
- Solange ein steigender Pfad  $p$  ( $s \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \dots \rightarrow t$ ) von source nach  $t$  existiert:
  - 1. finde minimale Kante  $f$  auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B.  $i \rightarrow j$ ) um  $f$  reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B.  $j \rightarrow i$ ) um  $f$  erhöhen
  - $mf += f$ ;

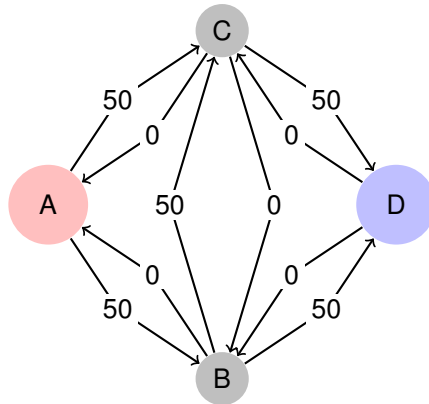
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





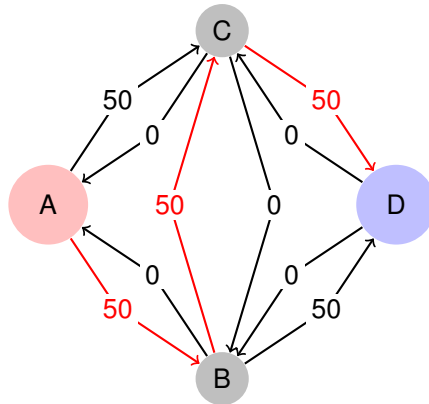
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



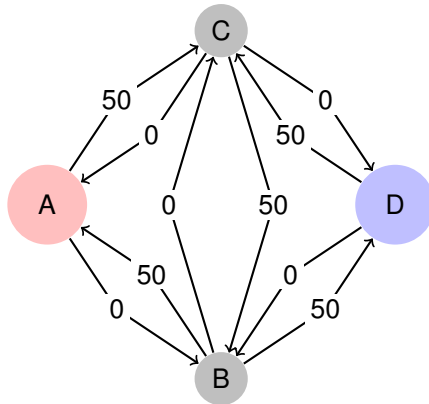
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



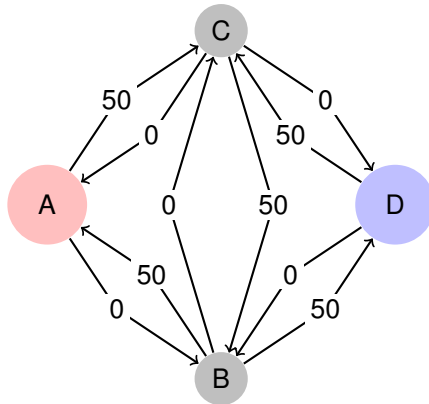
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



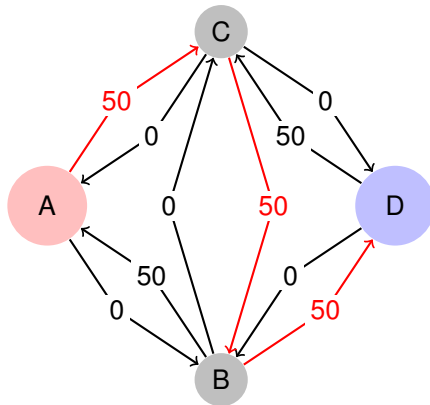
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



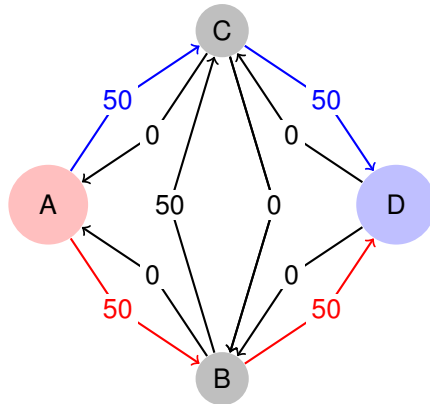
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Laufzeit Ford Fulkerson

- $O(ES)$

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Laufzeit Ford Fulkerson

- $O(ES)$
- wobei  $S$  die Lösung ist

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Laufzeit Ford Fulkerson

- $O(ES)$
- wobei  $S$  die Lösung ist
- $O(S)$  mal Tiefensuche, was in  $O(E)$  läuft, da  $E \geq V - 1$



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Laufzeit Ford Fulkerson

- $O(ES)$
- wobei  $S$  die Lösung ist
- $O(S)$  mal Tiefensuche, was in  $O(E)$  läuft, da  $E \geq V - 1$

⇒ kann sehr groß werden

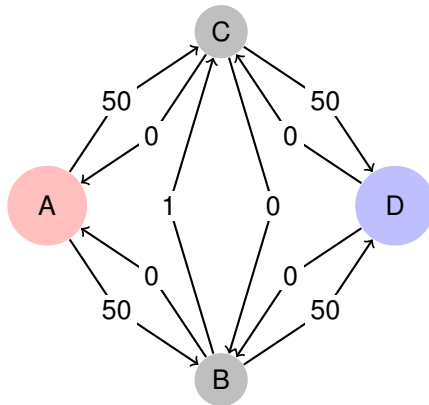
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



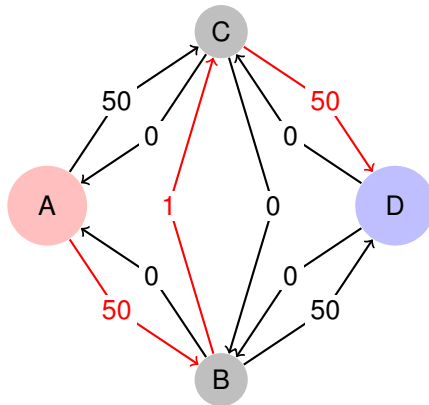
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



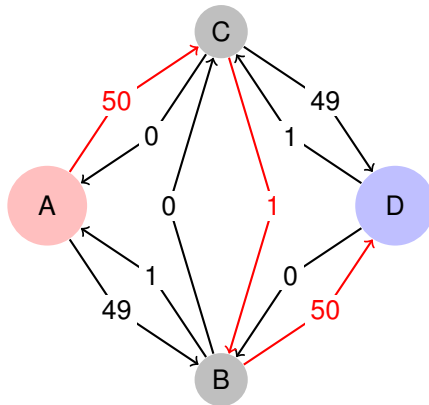
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



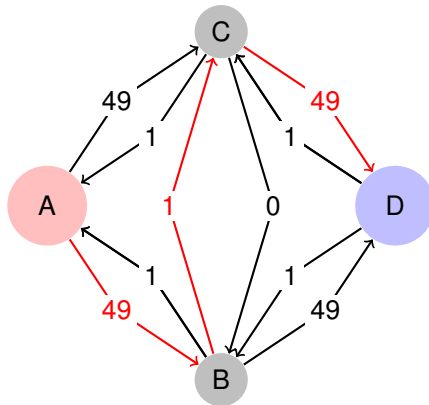
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



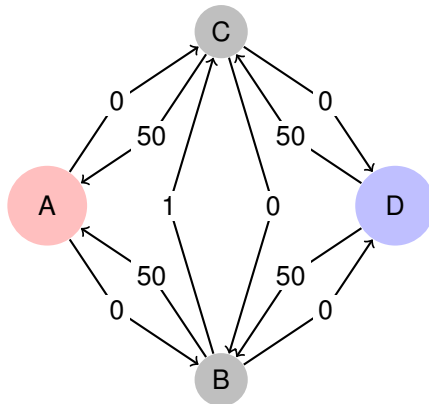
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

### Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit  $O(VE^2)$



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

### Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit  $O(VE^2)$
- $O(VE)$  mal Breitensuche, was in  $O(E)$  läuft

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)
- Wie viele unterschiedliche Karten kann Bob maximal besitzen?

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



BobS



BobT

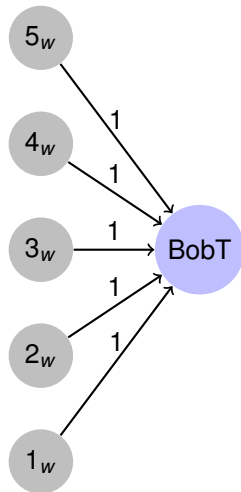
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





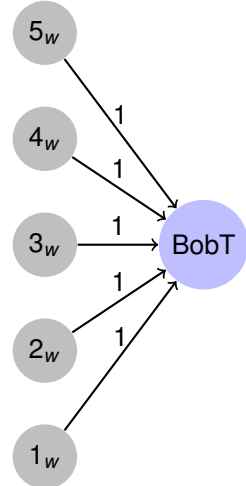
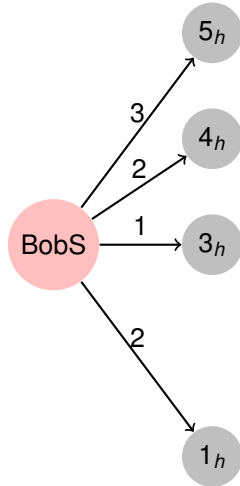
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



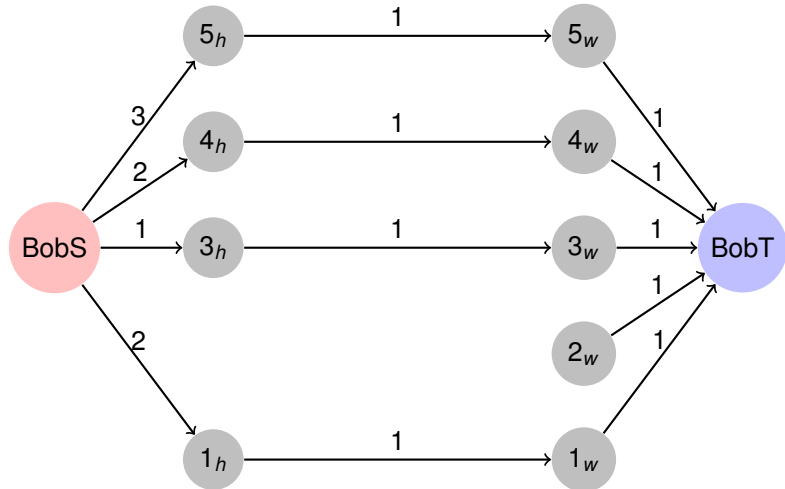
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



A

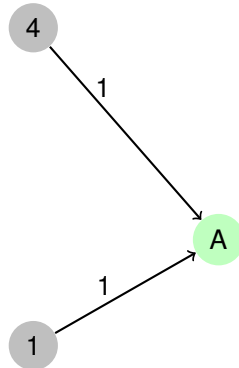
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



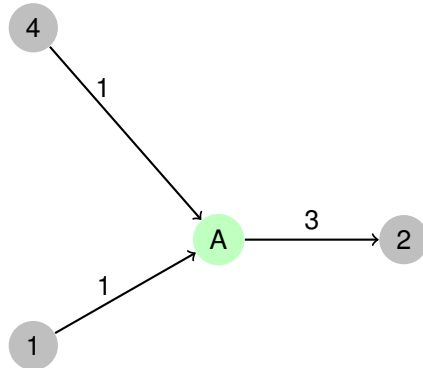
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



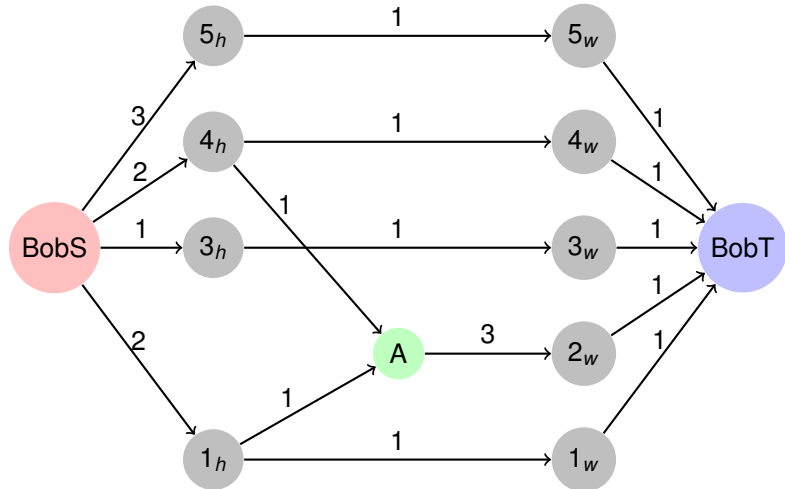
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



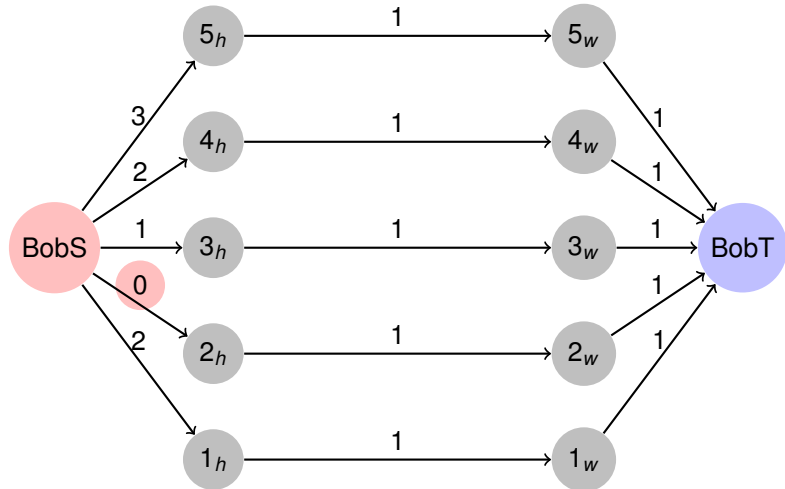
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



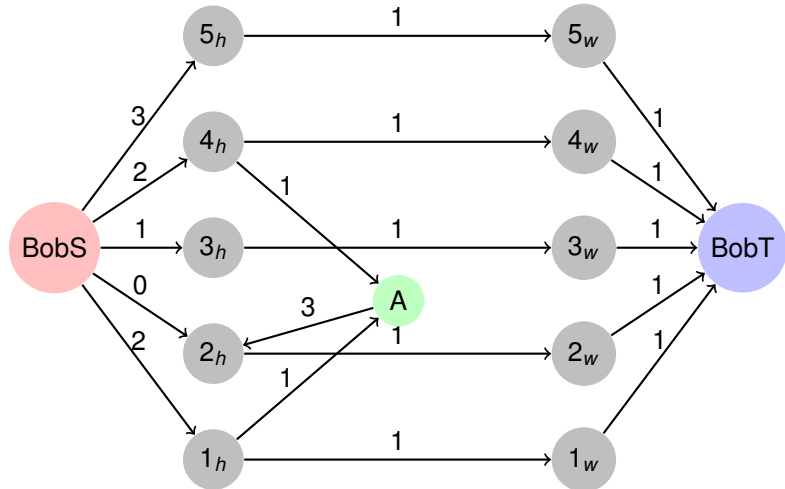
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





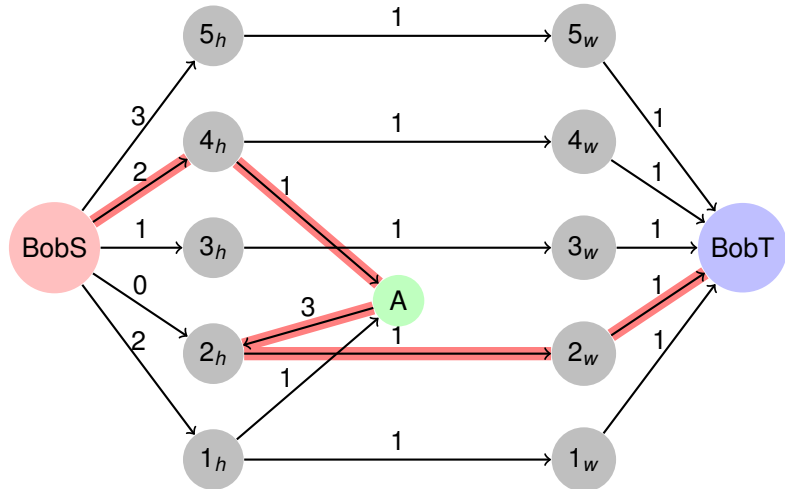
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



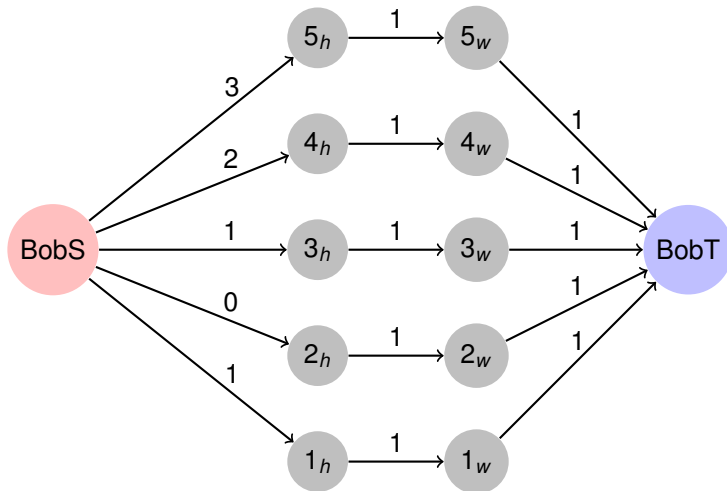
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



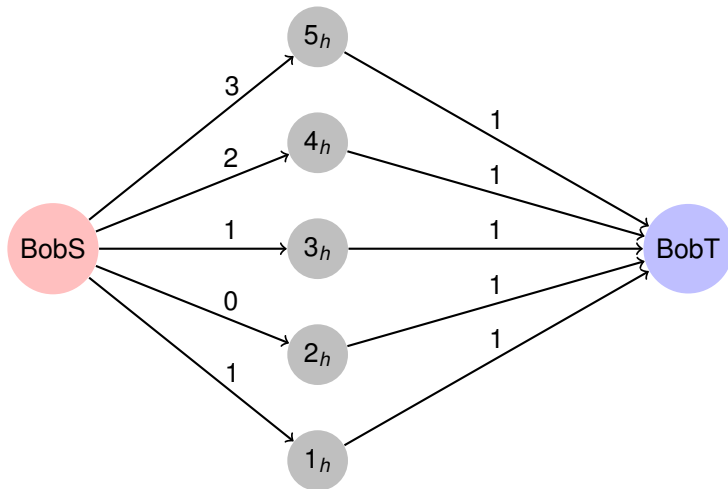
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



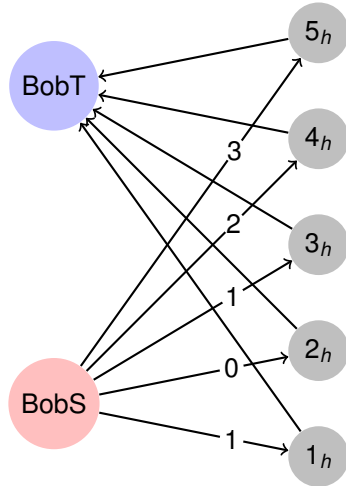
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



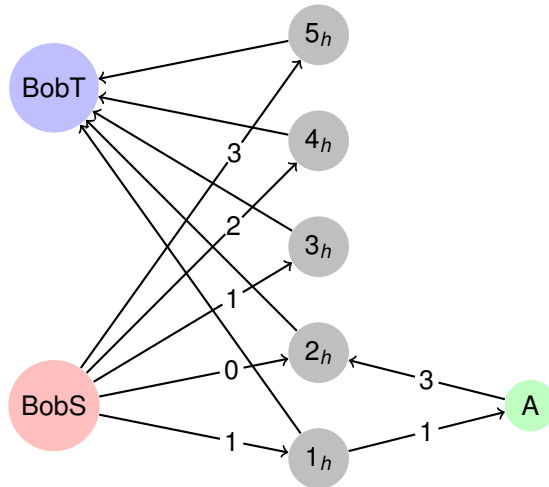
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



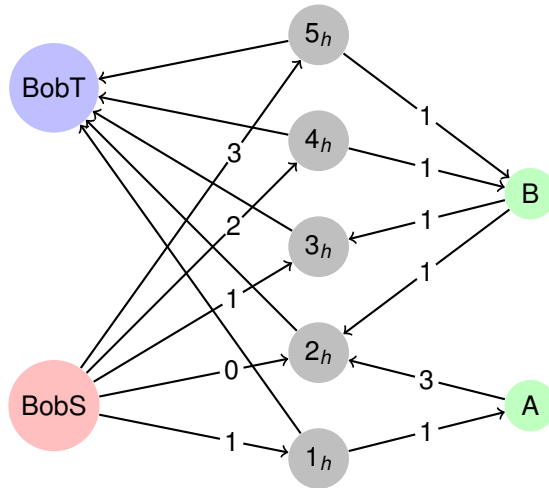
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



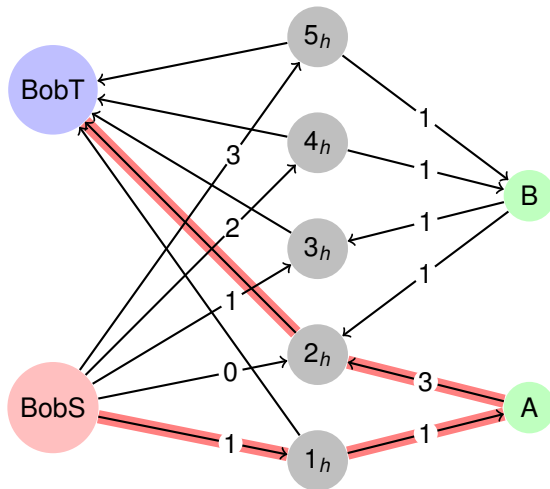
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



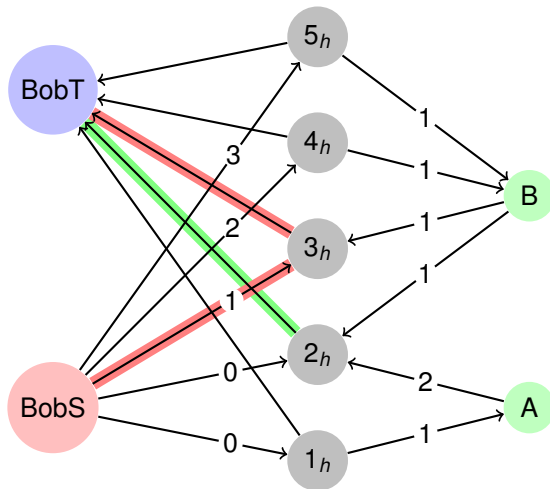
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





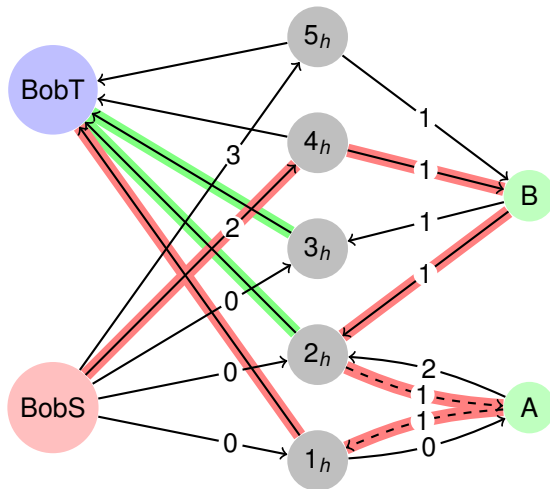
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



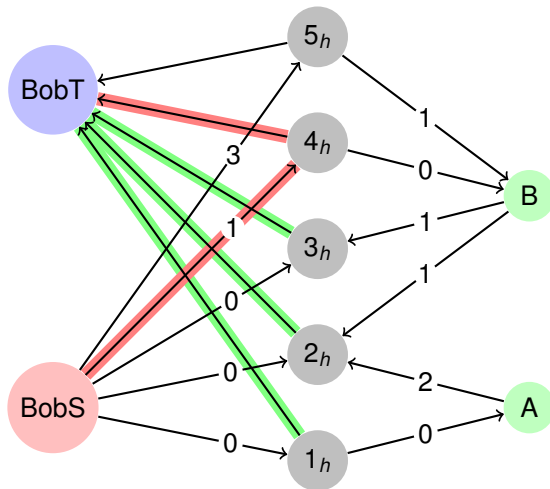
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



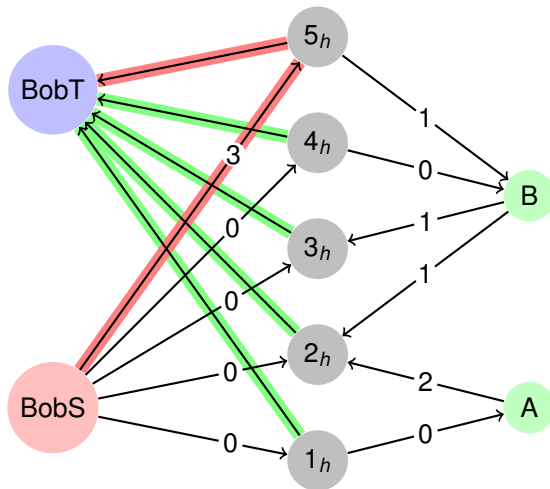
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



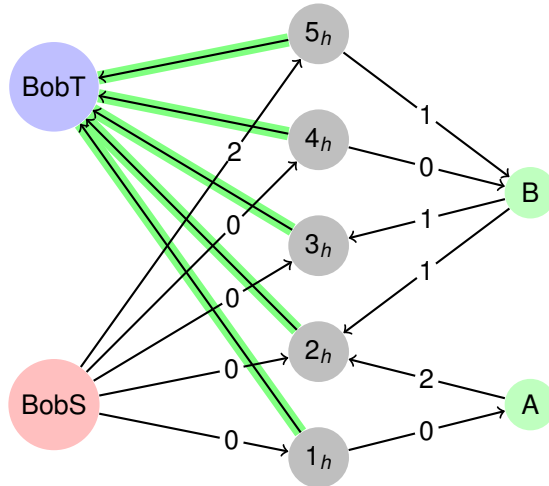
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

**Bipartite Graphen**

IS und VC

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

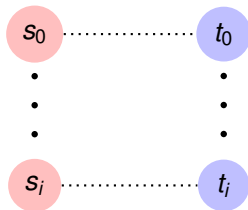
UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Mehrere sources  $s_0, \dots, s_i$  und sinks  $t_0, \dots, t_j$



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

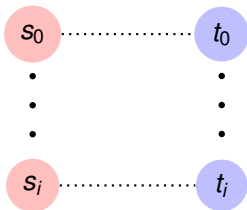
UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Mehrere sources  $s_0, \dots, s_i$  und sinks  $t_0, \dots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source  $ss$  und ein super sink  $st$



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

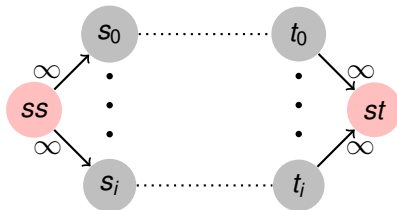
UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Mehrere sources  $s_0, \dots, s_i$  und sinks  $t_0, \dots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source  $ss$  und ein super sink  $st$
- $\forall N_0 \ni x \leq i$ : Füge  $(ss, s_x)$  mit Gewicht  $\infty$  zu  $E$  hinzu
- $\forall N_0 \ni y \leq j$ : Füge  $(t_y, st)$  mit Gewicht  $\infty$  zu  $E$  hinzu





Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

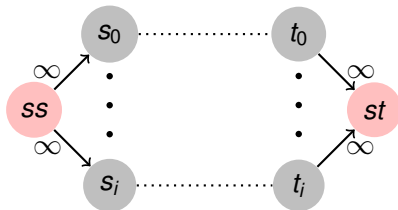
UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Mehrere sources  $s_0, \dots, s_i$  und sinks  $t_0, \dots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source  $ss$  und ein super sink  $st$
- $\forall N_0 \ni x \leq i$ : Füge  $(ss, s_x)$  mit Gewicht  $\infty$  zu  $E$  hinzu
- $\forall N_0 \ni y \leq j$ : Füge  $(t_y, st)$  mit Gewicht  $\infty$  zu  $E$  hinzu
- Berechne Max-Flow von  $ss$  nach  $st$



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

**Bipartite Graphen**

IS und VC

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten  $v_x$  durch zwei Knoten  $v_{in_x}$  und  $v_{out_x}$  und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten  $v_x$  durch zwei Knoten  $v\_in_x$  und  $v\_out_x$  und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \dots, v\_in_i, v\_out_i\}$

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten  $v_x$  durch zwei Knoten  $v\_in_x$  und  $v\_out_x$  und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \dots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten  $v_x$  durch zwei Knoten  $v_{in_x}$  und  $v_{out_x}$  und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v_{in_0}, v_{out_0}, \dots, v_{in_i}, v_{out_i}\}$
  - $E' := E \cup \{(v_{in_x}, v_{out_x}) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v_{in_x}, v_{out_x})) := w(v_x)$

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Situation: Knoten  $v_0, \dots, v_i$  haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten  $v_x$  durch zwei Knoten  $v\_in_x$  und  $v\_out_x$  und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \dots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v\_in_x, v\_out_x)) := w(v_x)$
- Doppelte Anzahl an Knoten!



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

**Bipartite Graphen**

IS und VC

## Definition

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Ist  $V = S \dot{\cup} T$  eine Partition von  $V$  mit  $s \in S$ ,  $t \in T$ , so heißt  $C := (S, T)$  ein  **$s$ - $t$  cut** (oder  **$s$ - $t$  Schnitt**).

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Ist  $V = S \dot{\cup} T$  eine Partition von  $V$  mit  $s \in S$ ,  $t \in T$ , so heißt  $C := (S, T)$  ein  **$s$ - $t$  cut** (oder  **$s$ - $t$  Schnitt**).

Das zu  $C$  gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Ist  $V = S \dot{\cup} T$  eine Partition von  $V$  mit  $s \in S$ ,  $t \in T$ , so heißt  $C := (S, T)$  ein **s-t cut** (oder **s-t Schnitt**).

Das zu  $C$  gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch  $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Ein **Min Cut** ist ein  $s$ - $t$  cut  $C = (S, T)$  mit minimalen Kosten.

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Ein **Min Cut** ist ein  $s$ - $t$  cut  $C = (S, T)$  mit minimalen Kosten.

Für einen solchen gilt insbesondere:

$$\forall e \in X_C, X'_C := X_C \setminus e : \text{Es existiert ein Weg von } s \text{ nach } t \text{ in } (V, E \setminus X'_C)$$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## ■ Nebenprodukt von Max Flow



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von  $s$  ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von  $s$  ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in  $S$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von  $s$  ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in  $S$
- $T = V \setminus S$

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von  $s$  ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in  $S$
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in  $X_C$  haben Restkapazität 0  $\implies$  Min Cut = Max Flow

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden
- Was sind die minimalen Kosten um die Verbindung zu zerstören?



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

**UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung**

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante
- Min Cut

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Chef

Server

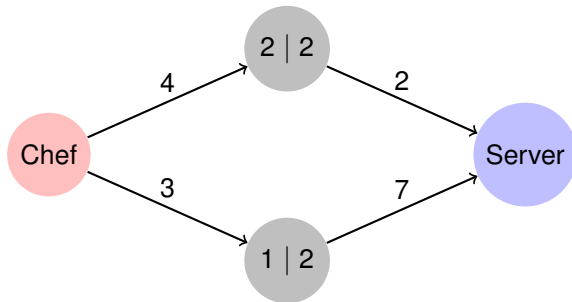
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



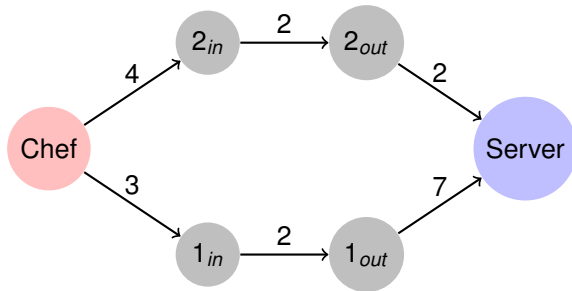
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



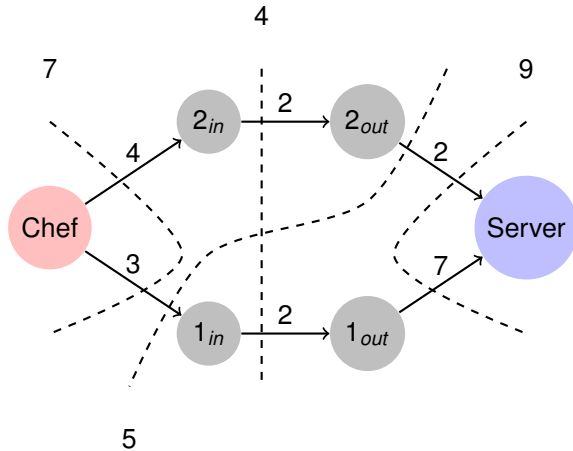
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





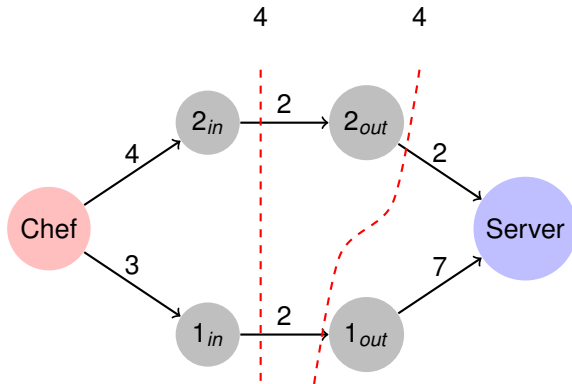
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



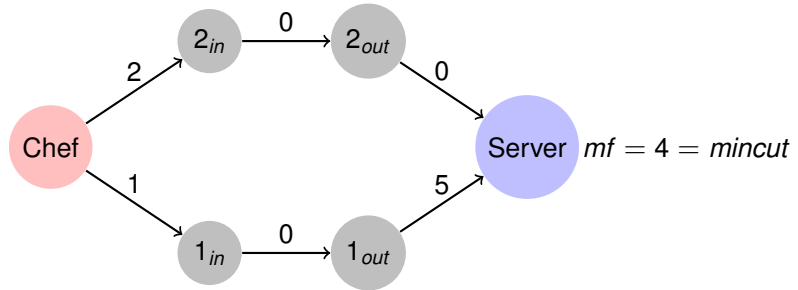
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



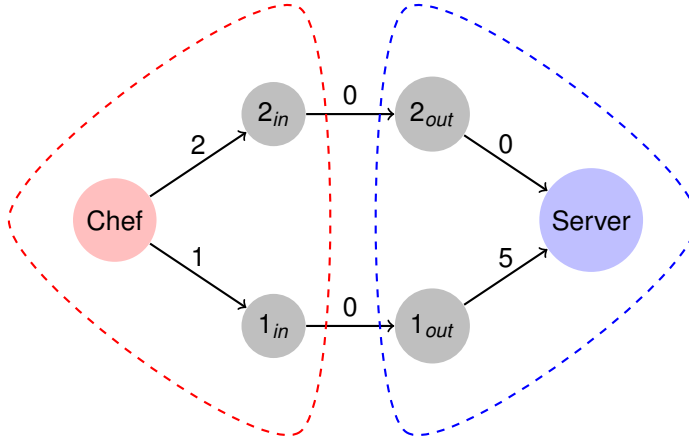
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



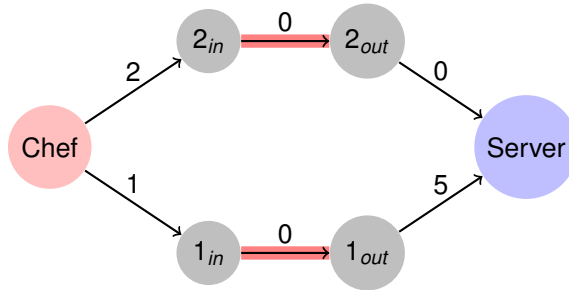
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



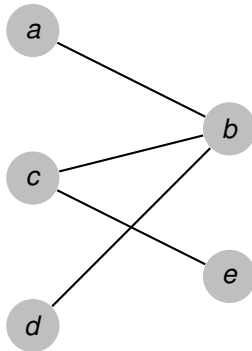
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



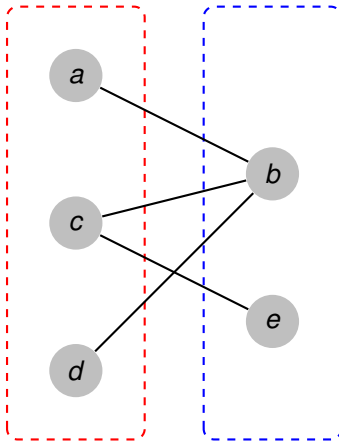
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



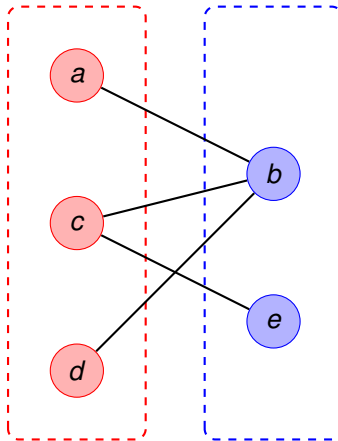
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

### Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

### Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.  
Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.  
Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.  
Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$  heißt **inklusionsmaximal**

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.

Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$  heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.

Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$  heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$  heißt **kardinalitätsmaximal**

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.  
Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$  heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$  heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

## Definition

Sei  $G = (V, E)$ ,  $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  ein ungerichteter Graph.

Eine Menge von Kanten  $M \subseteq E$  heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \emptyset.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$  heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$  heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für  $G$  bipartit: „Maximum Cardinality Bipartite Matching“, kurz **MCBM**.

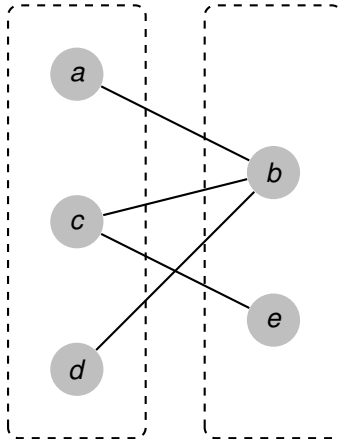
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





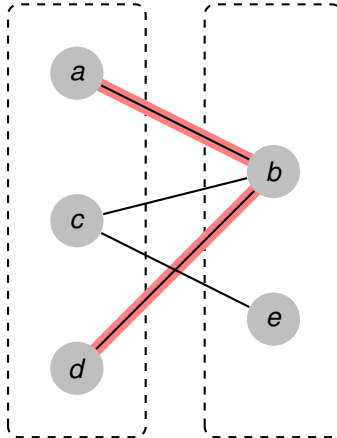
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



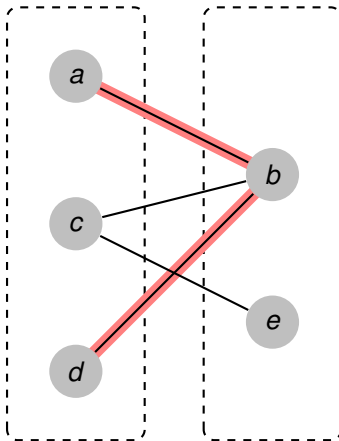
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Kein Matching

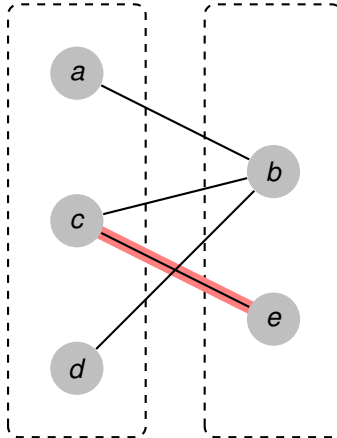
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



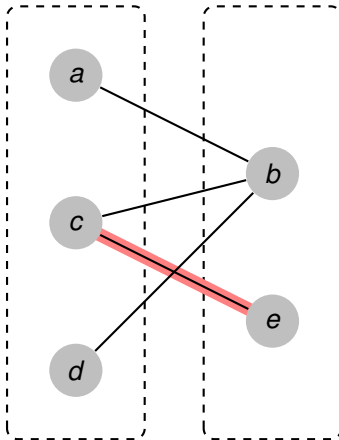
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

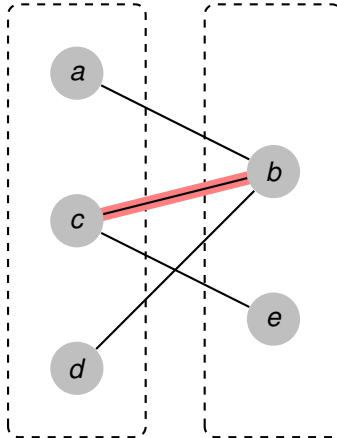
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



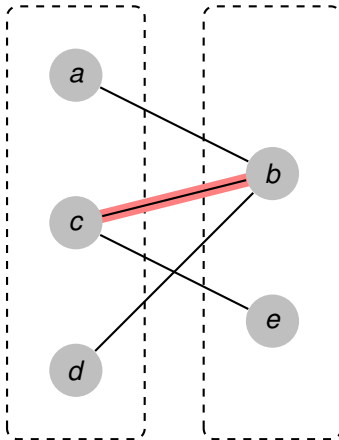
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Inklusions-, aber nicht kardinalitätsmaximales Matching

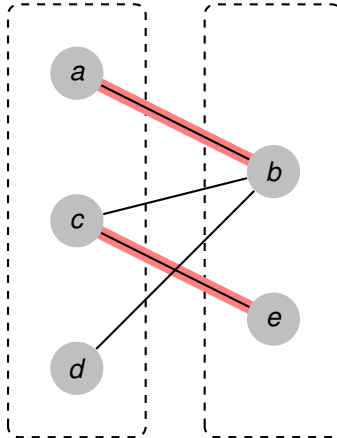
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



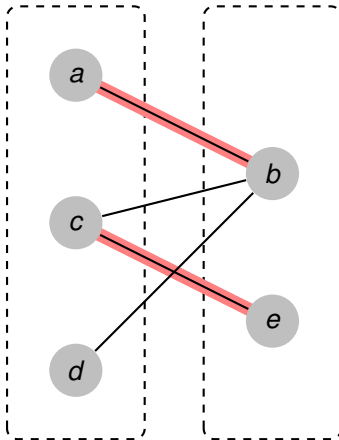
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Kardinalitätsmaximales Matching



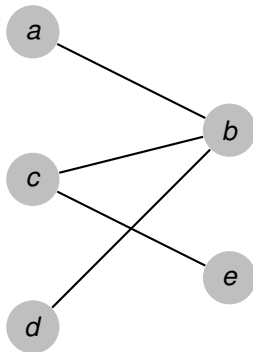
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



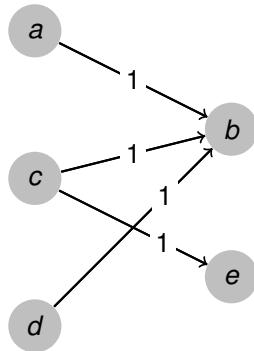
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



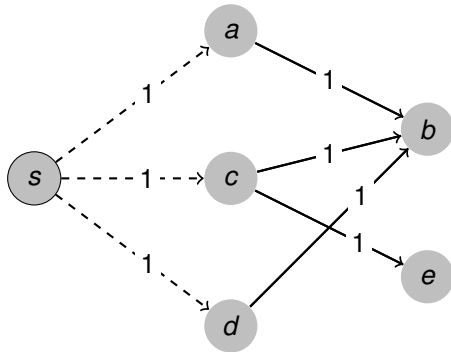
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



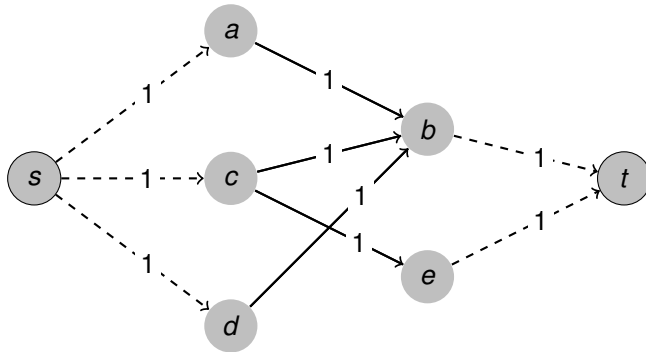
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



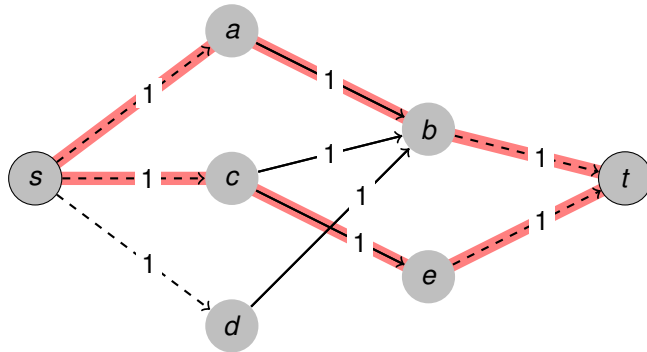
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Paths

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Paths

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Ein Pfad  $(v_1, \dots, v_n)$  in  $G$  heißt **Augmenting Path** (in  $G$  bzgl.  $M$ )

## Augmenting Paths

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Ein Pfad  $(v_1, \dots, v_n)$  in  $G$  heißt **Augmenting Path** (in  $G$  bzgl.  $M$ ), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$  (freier Knoten links)



## Augmenting Paths

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Ein Pfad  $(v_1, \dots, v_n)$  in  $G$  heißt **Augmenting Path** (in  $G$  bzgl.  $M$ ), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$  (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \{v_i, v_{i+1}\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$

## Augmenting Paths

Sei  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \dot{\cup} V_2$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Ein Pfad  $(v_1, \dots, v_n)$  in  $G$  heißt **Augmenting Path** (in  $G$  bzgl.  $M$ ), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$  (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \{v_i, v_{i+1}\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$  (freier Knoten rechts)

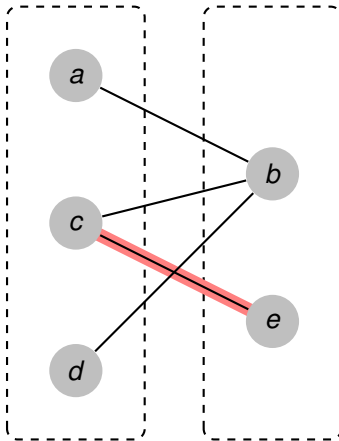
Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



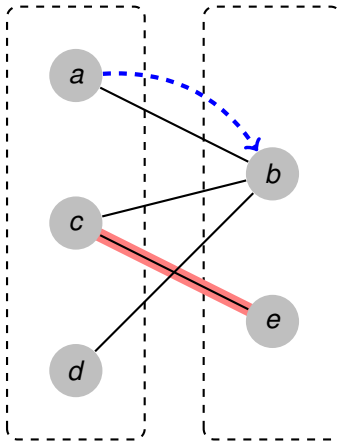
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



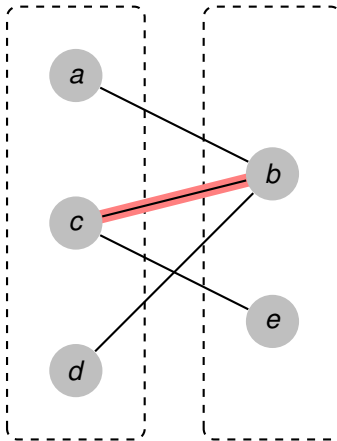
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



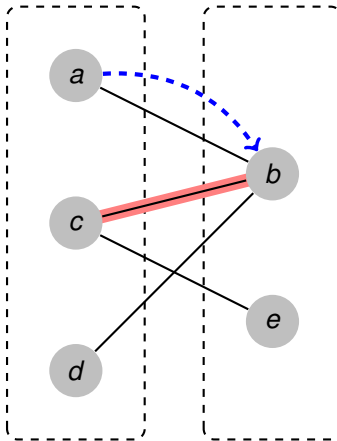
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



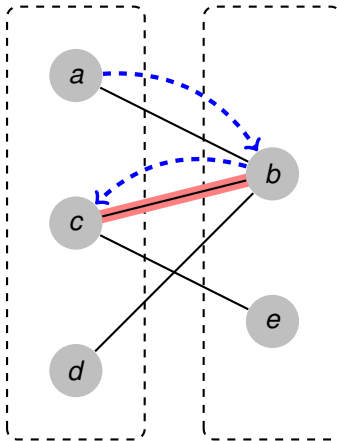
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



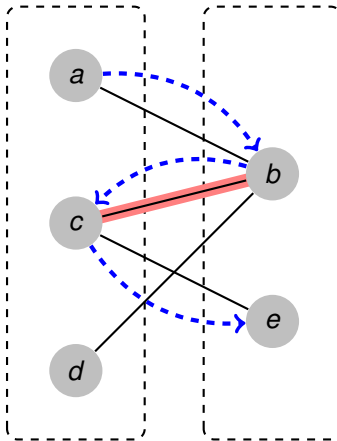
Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC





Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Lemma von Claude Berge

Sei  $G = (V, E)$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching.

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Lemma von Claude Berge

Sei  $G = (V, E)$  bipartit und  $M \subseteq E$  ein Matching. Dann ist  $M$  kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in  $G$  bzgl.  $M$  existiert.

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

## ■ Beweisidee:

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

- Beweisidee: „Flippe“ alle Kanten entlang des Augmenting Paths.

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

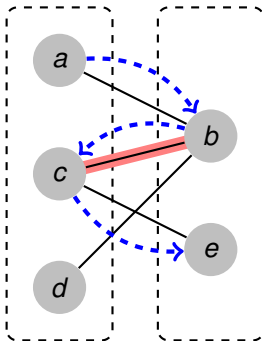
- Beweisidee: „Flippe“ alle Kanten entlang des Augmenting Paths.

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

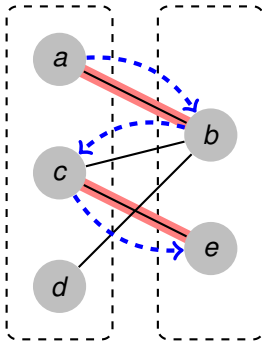
- Beweisidee: „Flippe“ alle Kanten entlang des Augmenting Paths.

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

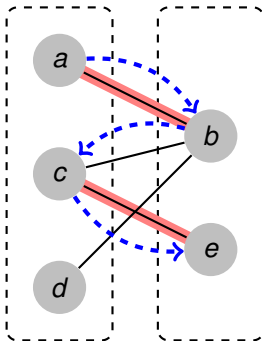
UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

- Beweisidee: „Flippe“ alle Kanten entlang des Augmenting Paths.



- So entsteht ein neues Matching, das um eine Kante größer ist.

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph  $G = (V, E)$ .



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph  $G = (V, E)$ .

(1) Initialisiere  $M := \emptyset$ .

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph  $G = (V, E)$ .

- (1) Initialisiere  $M := \emptyset$ .
- (2) Suche einen Augmenting Path. Gebe  $M$  aus, falls keinen gefunden.

## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph  $G = (V, E)$ .

- (1) Initialisiere  $M := \emptyset$ .
- (2) Suche einen Augmenting Path. Gebe  $M$  aus, falls keinen gefunden.
- (3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph  $G = (V, E)$ .

- (1) Initialisiere  $M := \emptyset$ .
- (2) Suche einen Augmenting Path. Gebe  $M$  aus, falls keinen gefunden.
- (3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit  $O(|V| \cdot |E|)$ .

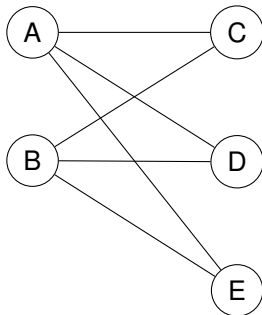
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Independent Set  $IS$  ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in  $IS$  über eine Kante in  $G$  verbunden sind.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



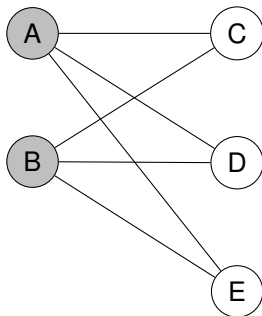
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Independent Set  $IS$  ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in  $IS$  über eine Kante in  $G$  verbunden sind.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



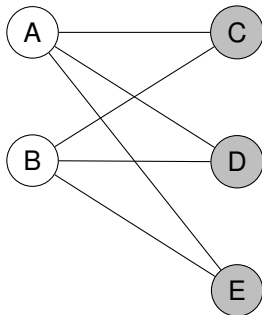
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Independent Set  $IS$  ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in  $IS$  über eine Kante in  $G$  verbunden sind.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

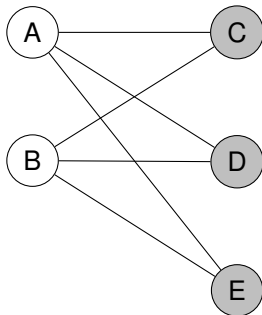
Bipartite Graphen

IS und VC



## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Independent Set  $IS$  ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in  $IS$  über eine Kante in  $G$  verbunden sind.



In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.



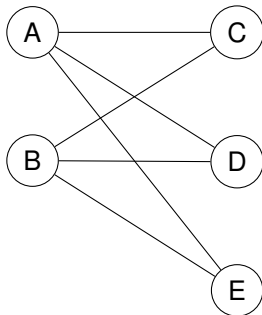
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Vertex Cover  $VC$  ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in  $G$  mit mindestens einem Knoten aus  $VC$  verbunden ist.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



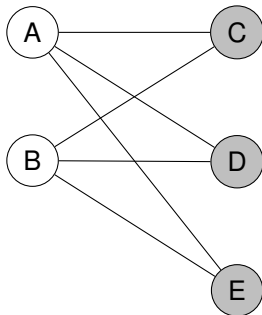
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Vertex Cover  $VC$  ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in  $G$  mit mindestens einem Knoten aus  $VC$  verbunden ist.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



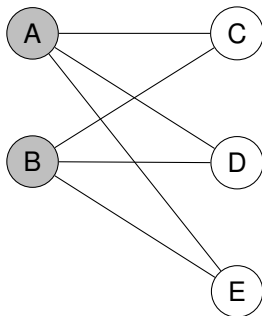
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Vertex Cover  $VC$  ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in  $G$  mit mindestens einem Knoten aus  $VC$  verbunden ist.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



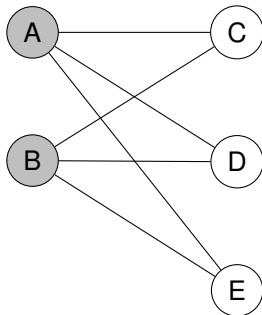
## Definition

Gegeben einen Graphen  $G$ . Ein Vertex Cover  $VC$  ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in  $G$  mit mindestens einem Knoten aus  $VC$  verbunden ist.

UVa 10779 -  
Collector's ProblemVariationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

## Satz

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $X \subseteq V$  eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

### Satz

Sei  $G = (V, E)$  eine Graph und  $X \subseteq V$  eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

### Beweis:

- Sei  $X$  ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass  $V \setminus X$  ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

## Satz

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $X \subseteq V$  eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

## Beweis:

- Sei  $X$  ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass  $V \setminus X$  ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde  $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$  existieren mit  $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber  $u, v \notin X$  und die Kante  $(u, v)$  wäre vom VC  $X$  nicht abgedeckt  $\Rightarrow$  Widerspruch!

## Satz

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $X \subseteq V$  eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

## Beweis:

- Sei  $X$  ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass  $V \setminus X$  ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde  $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$  existieren mit  $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber  $u, v \notin X$  und die Kante  $(u, v)$  wäre vom VC  $X$  nicht abgedeckt  $\Rightarrow$  Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich



Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

### Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

### Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten. Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

### Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten. Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

### Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales IS oder ein kardinalitätsminimales VC auszurechnen ist *NP*-schwer.

Peter Koepernik, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

### Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

### Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit  $|VC| = |MCBM|$ .

Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:

$$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$$

### Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit  $|VC| = |MCBM|$ .

Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:

$$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$$

Mit diesem Satz und den uns bekannten Verfahren erhalten wir nur die Größen der Mengen nicht aber deren Elemente. Um auch an die Elemente der Mengen ran zu kommen, braucht es noch mehr Verfahren. Die Mengen sind allerdings nicht eindeutig.

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Aufgabe

Gegeben sind  $N \leq 500$  Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.



Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Aufgabe

Gegeben sind  $N \leq 500$  Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

## Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Aufgabe

Gegeben sind  $N \leq 500$  Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

## Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS

Peter Koepf, Robert  
Brede, Serge Thilges,  
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 -  
Collector's Problem

Variationen von  
Network Flow

Bipartite Graphen

IS und VC

## Aufgabe

Gegeben sind  $N \leq 500$  Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

## Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS
- nutze dafür aus dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow ein MCBM und daraus die Größe von IS