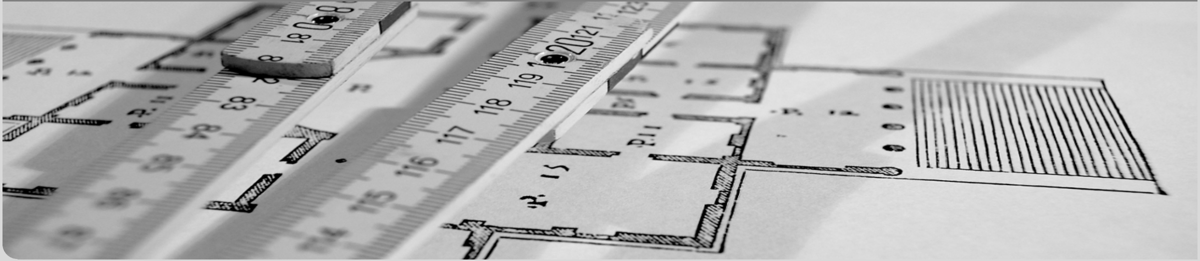
Karlsruher Institut für Technologie

Graphen 3: Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 12. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Beispielaufgabe

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität

Beispielaufgabe

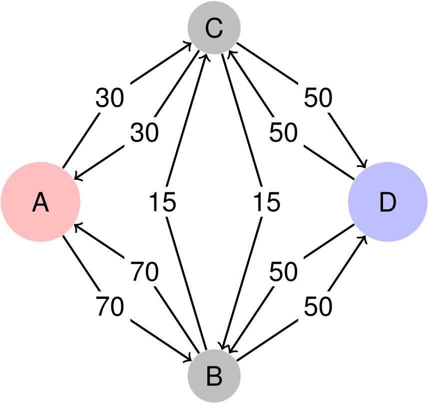
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Beispielaufgabe

- Gegeben sei ein Netz mit Städten und Straßen mit einer Kapazität
- Für gewisse Städte A und D sucht man die Anzahl Autos die von A nach D fahren können

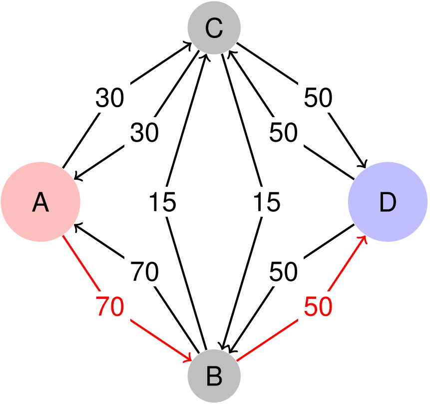
Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



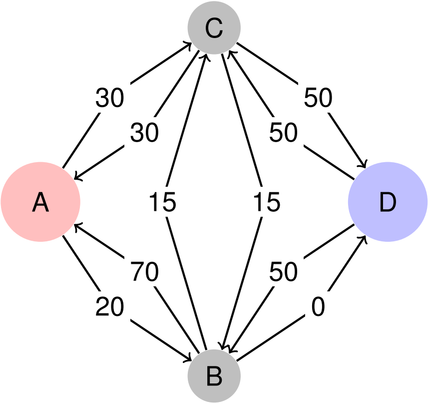
Motivation

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

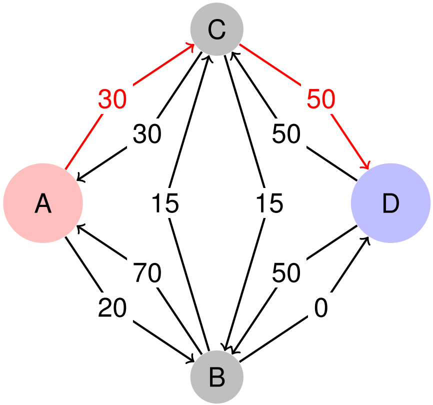
Motivation



50

Motivation

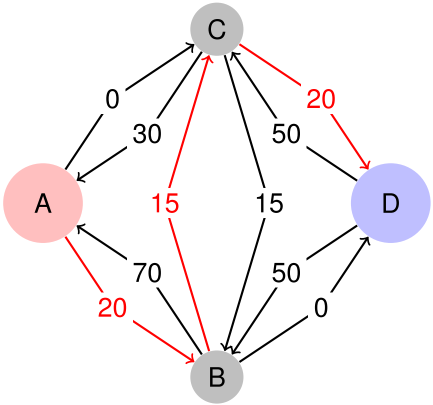
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50

Motivation

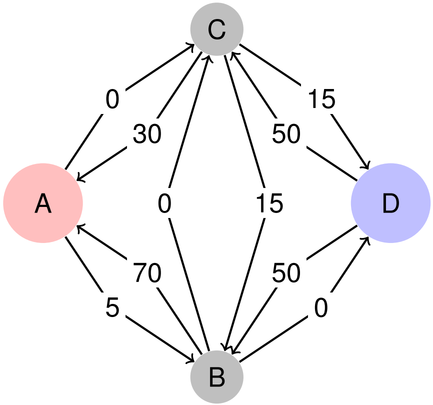
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



50 + 30

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Motivation



50 + 30 + 15 = 95

Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- $F = 0$

Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Karlsruher Institut für Technologie

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von s nach t existiert:

Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \cdots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \cdots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \rightarrow \cdots \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow \cdots \rightarrow t$) von s nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \rightarrow j$) um f reduzieren

Ford Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von s nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \to j$) um f reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \to i$) um f erhöhen

Ford Fulkerson

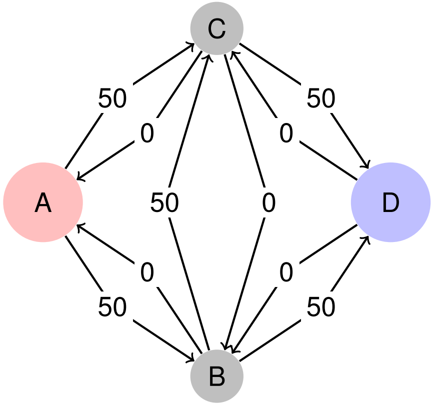
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Ford Fulkerson

- $F = 0$
- Solange ein steigender Pfad p ($s \to \cdots \to i \to j \to \cdots \to t$) von s nach t existiert:
  - 1. finde minimale Kante f auf dem Pfad
  - 2. Kapazität aller Kanten in Pfadrichtung (z.B. $i \to j$) um f reduzieren
  - 3. Kapazität aller Kanten gegen Pfadrichtung (z.B. $j \to i$) um f erhöhen
  - $F += f$;

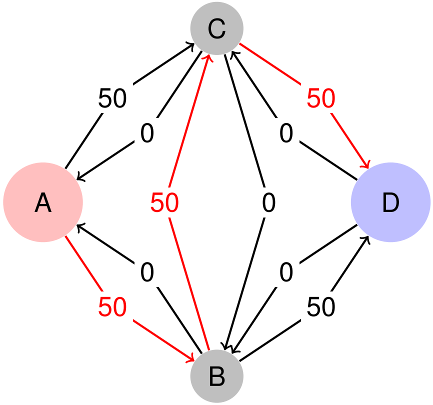
Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



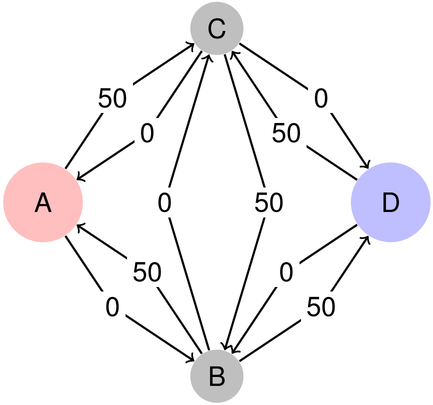
Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



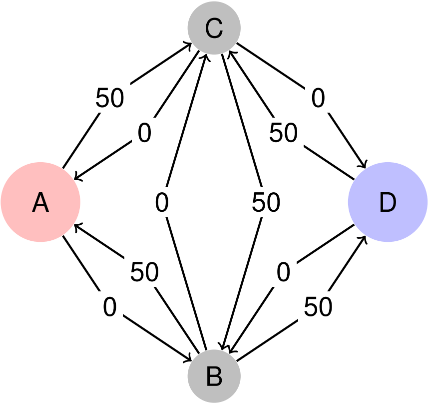
Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



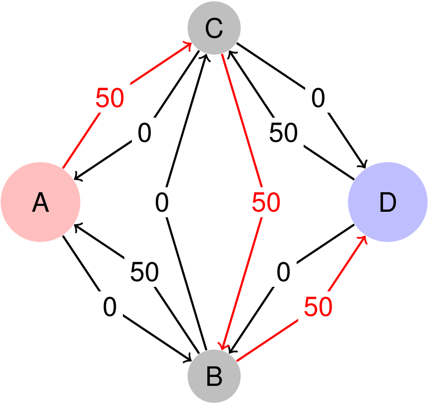
Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



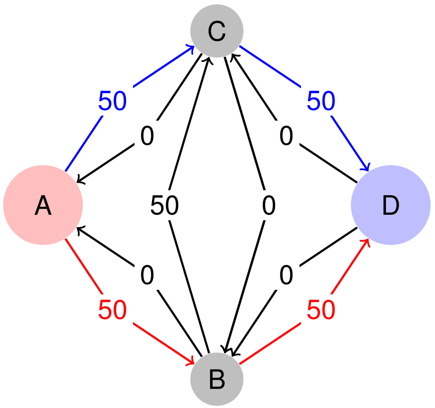
Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Rückkante

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist

Laufzeit

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Laufzeit

Karlsruher Institut für Technologie

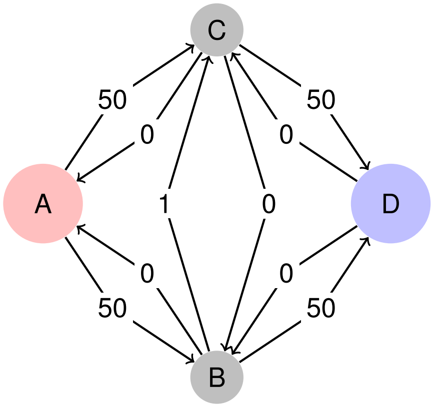
Laufzeit Ford Fulkerson

- $\mathcal{O}(F \cdot T_{DFS}) = \mathcal{O}(F \cdot E)$
- wobei F der Wert des maximalen Flusses ist
- $\mathcal{O}(F)$ mal Tiefensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft, da $E \geq V - 1$

$\Rightarrow$ kann sehr groß werden

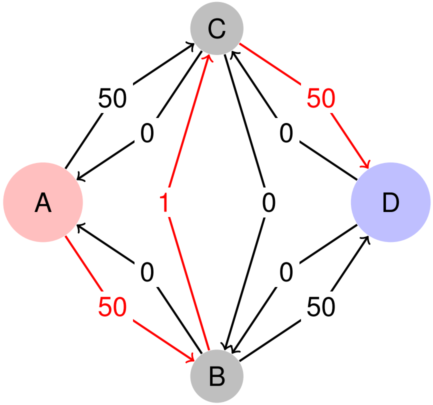
Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



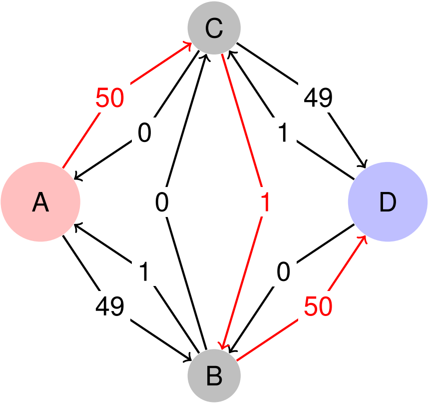
Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



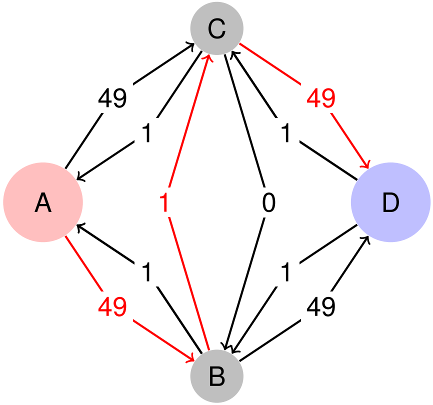
Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



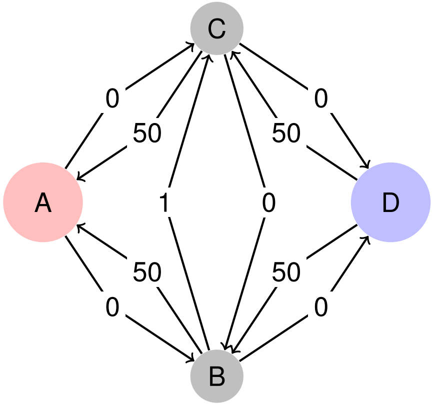
Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Laufzeit Beispiel

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Edmond Karp

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Edmond Karp

Karlsruher Institut für Technologie

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$

Edmond Karp

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Unterschied zu Ford Fulkerson

- Breitensuche statt Tiefensuche
- Laufzeit $\mathcal{O}(VE^2)$
- $\mathcal{O}(VE)$ mal Breitensuche, was in $\mathcal{O}(E)$ läuft

Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln

Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1

Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen

Collector's Problem (UVa 10779)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Collector’s Problem (UVa 10779)

UVa 10779 - Collector’s Problem

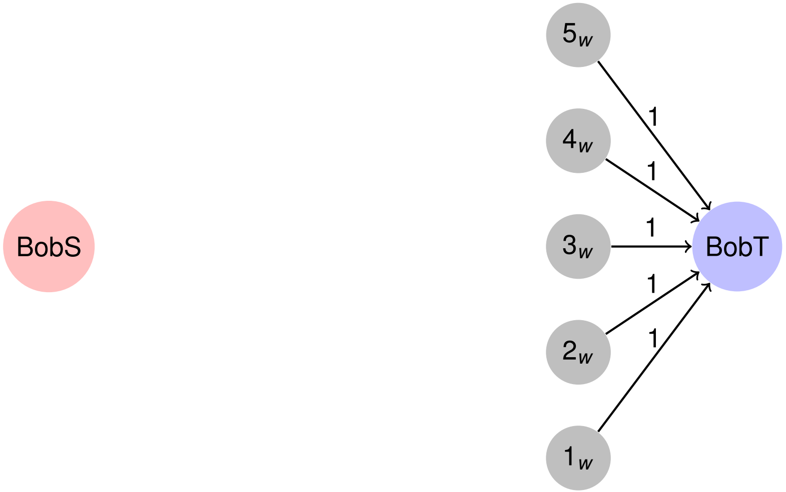
- Unterschiedliche Karten zum Sammeln
- Alle Karten sind gleich viel Wert, Tausch 1 zu 1
- Andere Sammler tauschen nur eigene Duplikate gegen Karten, die sie noch nicht besitzen
- Bob tauscht beliebig (auch Einzelstücke ein und gegen Karten, die er bereits besitzt)
- Wie viele unterschiedliche Karten kann Bob maximal besitzen?

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Einmaliger „greedy“ Tausch

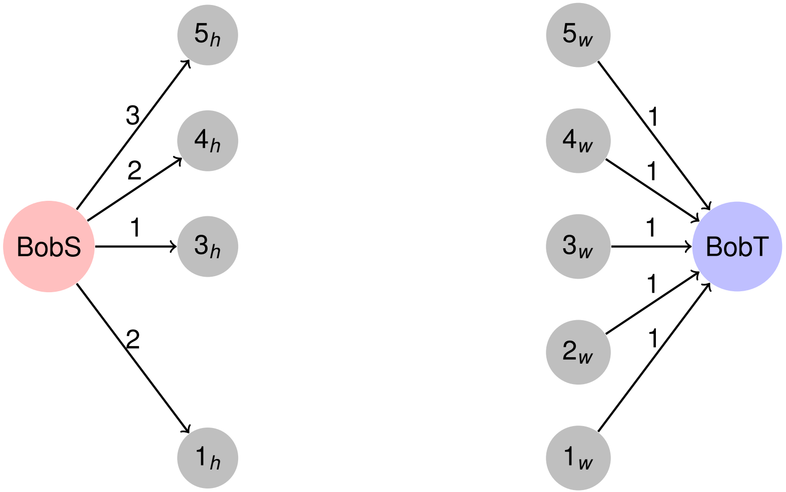
Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



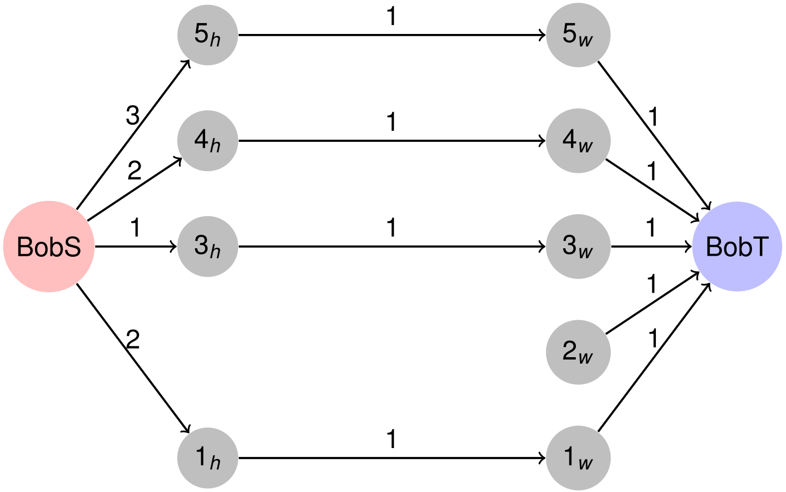
Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

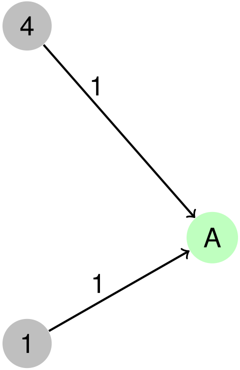


Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

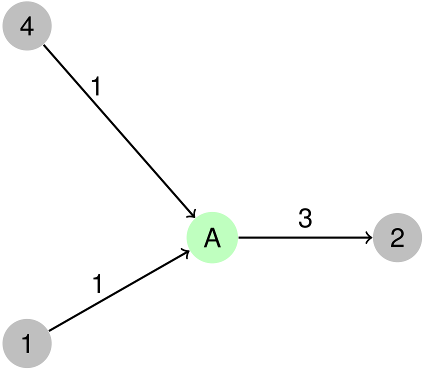
Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



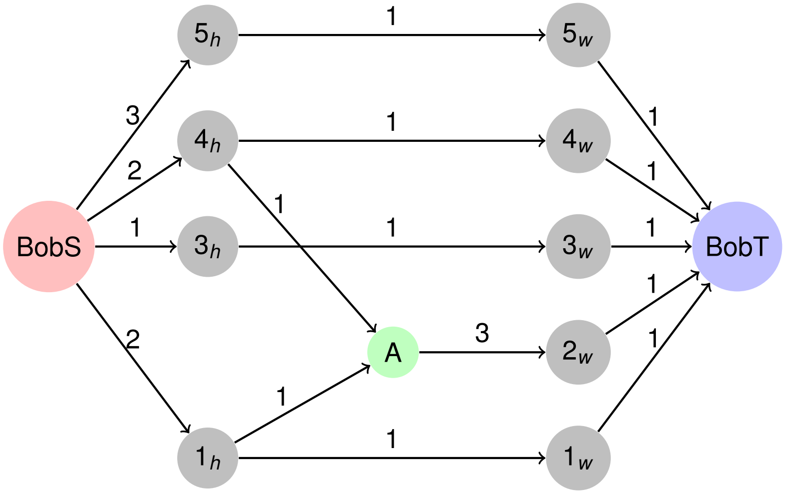
Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



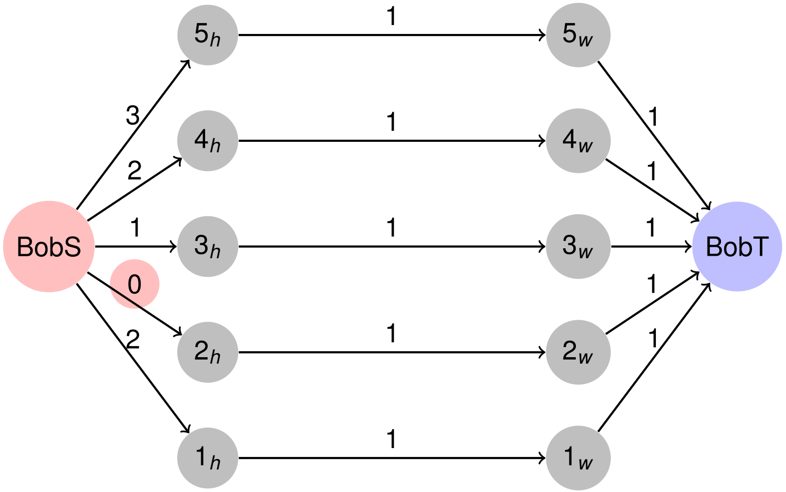
Einmaliger „greedy“ Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



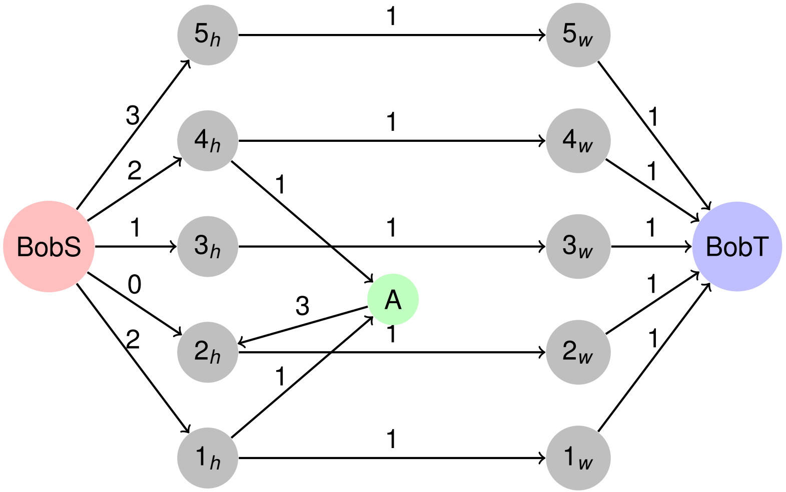
Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



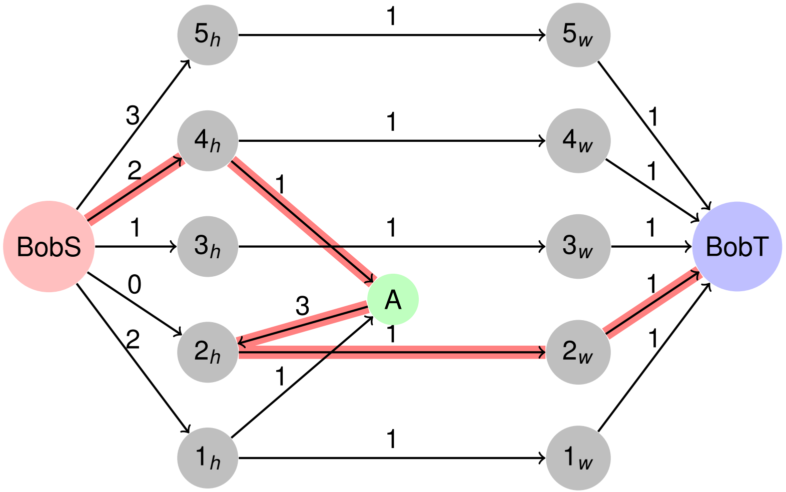
Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



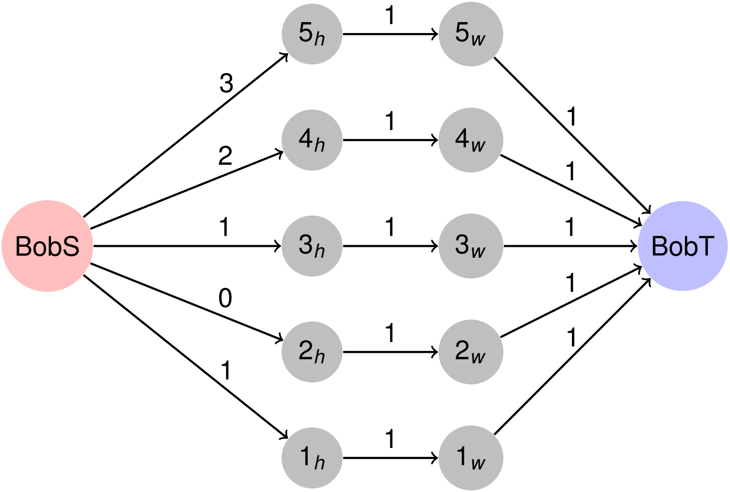
Mehrfacher beliebiger Tausch

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



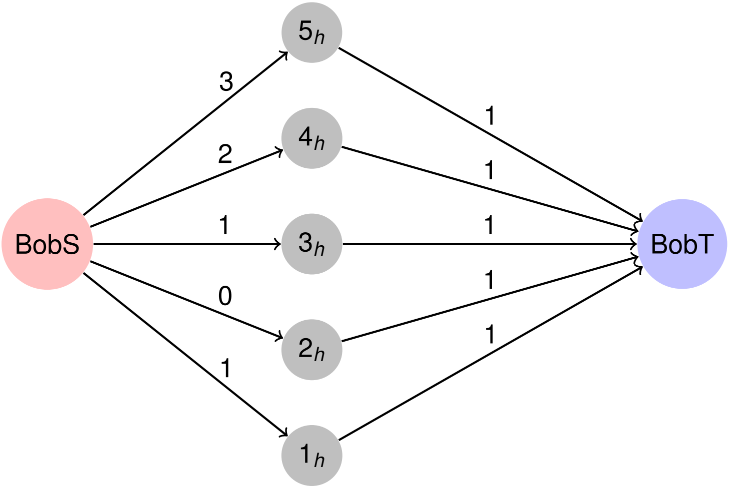
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



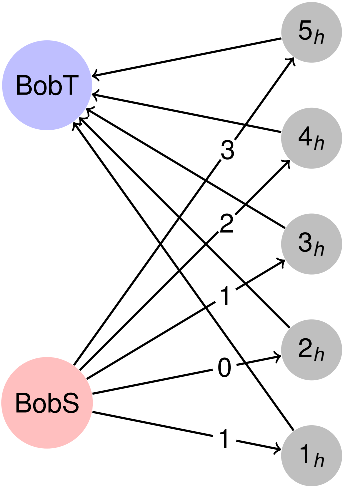
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



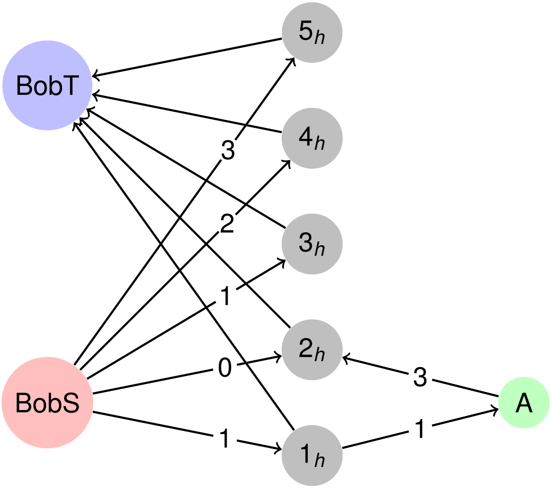
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Vereinfachung



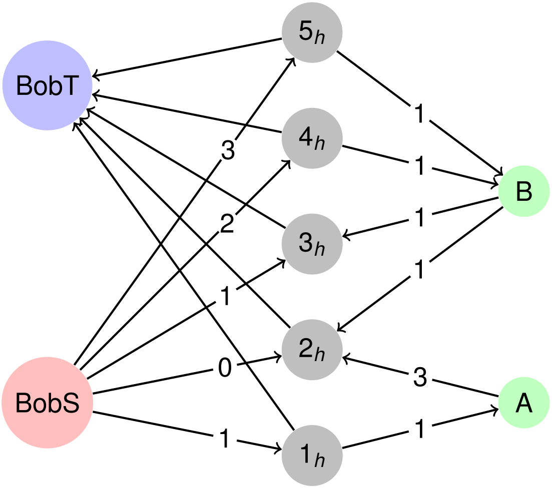
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



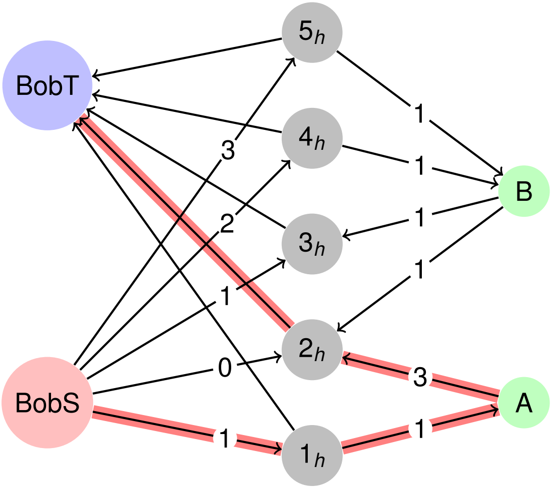
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



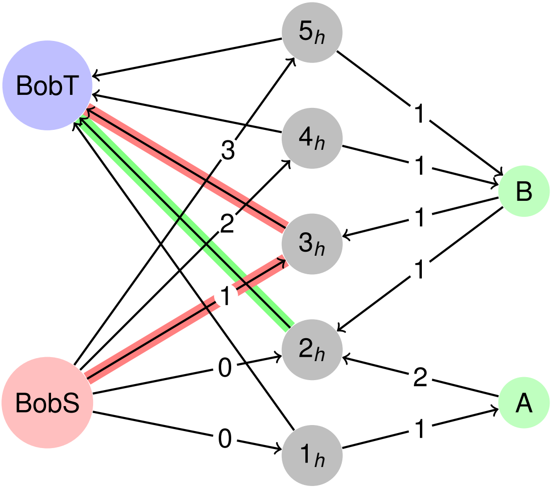
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



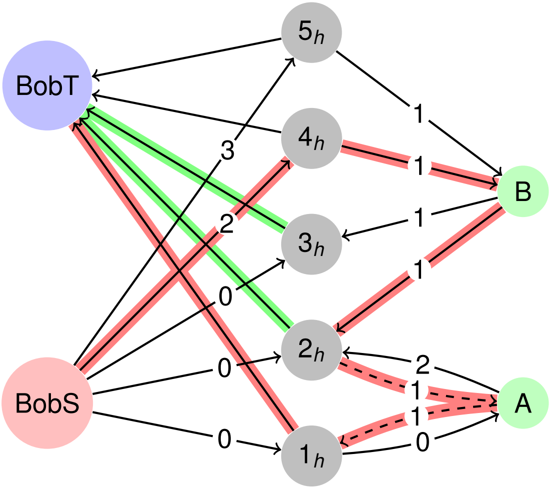
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



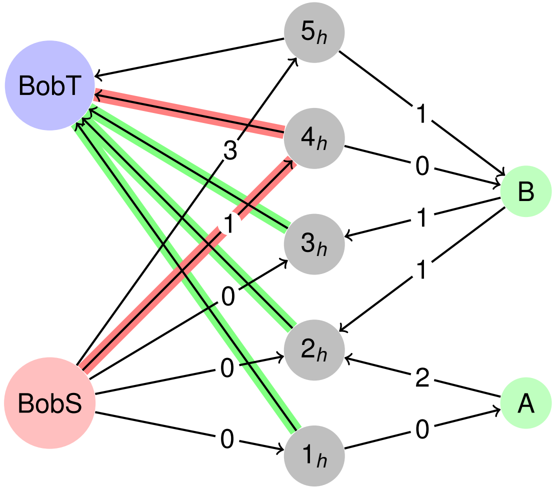
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



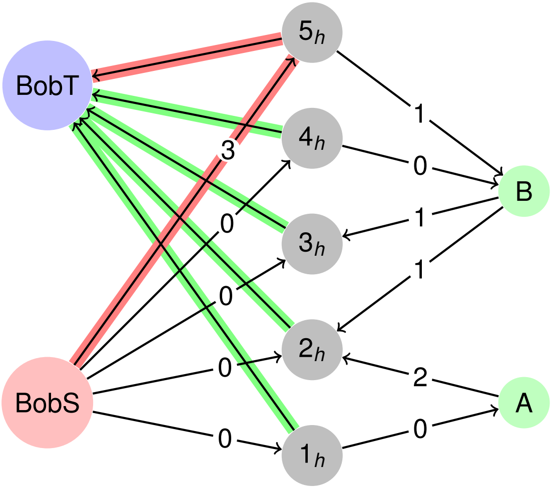
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



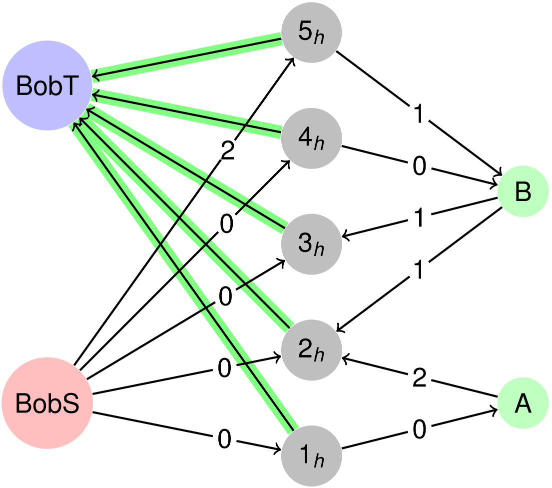
Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Vereinfachung

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

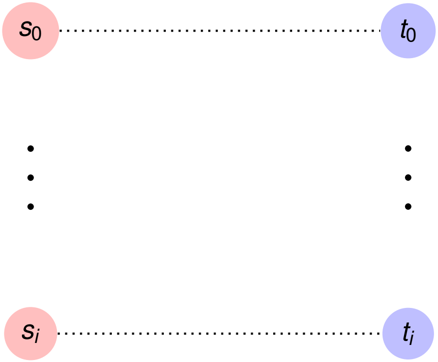


Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

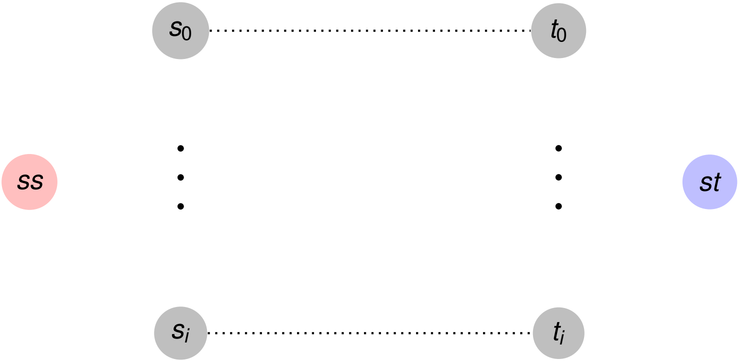
Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



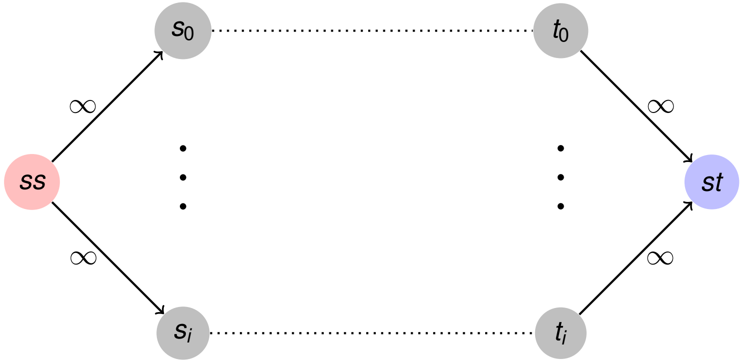
Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



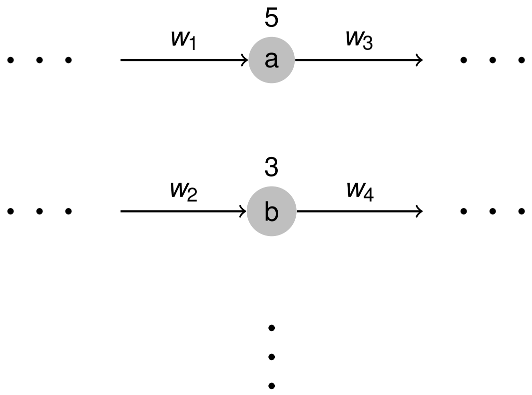
Multi-source & Multi-sink

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



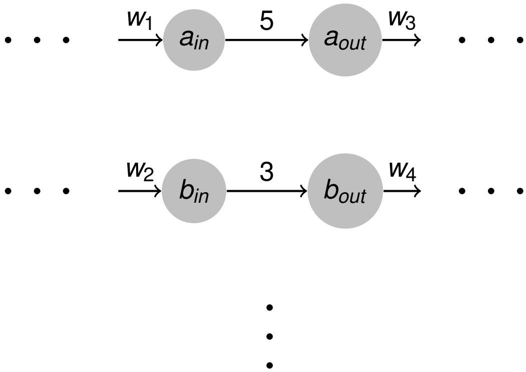
Knoten Kapazität

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Knoten Kapazität

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



(Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

(Minimaler) Schnitt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

(Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

(Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v)\in X_C} c(u, v)$

(Minimaler) Schnitt

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$
Ein **Min Cut** ist ein *s*-*t* cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow

Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$

Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow

Berechnung Min Cut

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Kanten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow
- Max-Flow-Min-Cut Theorem

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer

- Gefeuerter Programmierer will sich rächen und Netzwerk zerstören
- Kann Computer und Kabel (verbinden je einen Computer mit einem Anderen) zerstören, jeweils mit bekannten Kosten
- Computer des Chefs und Server sind unzerstörbar und Verbindung soll getrennt werden
- Was sind die minimalen Kosten um die Verbindung zu zerstören?

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 11506 - Angry Programmer - Lösung

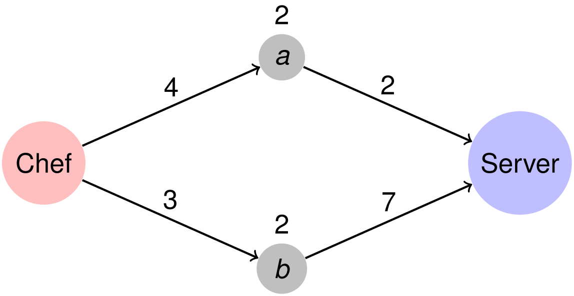
- Computer sind Knoten, Kabel sind Kanten
- Aufteilen der Knoten mit Gewicht in in- & out-Knoten mit gewichteter Kante
- Min Cut

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

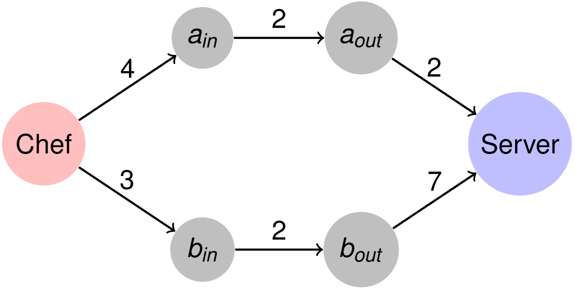
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



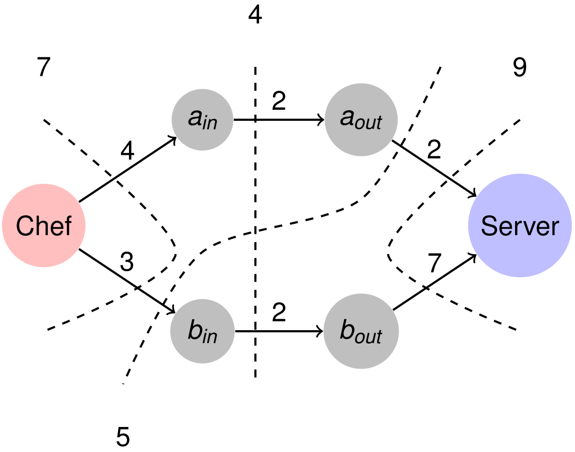
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



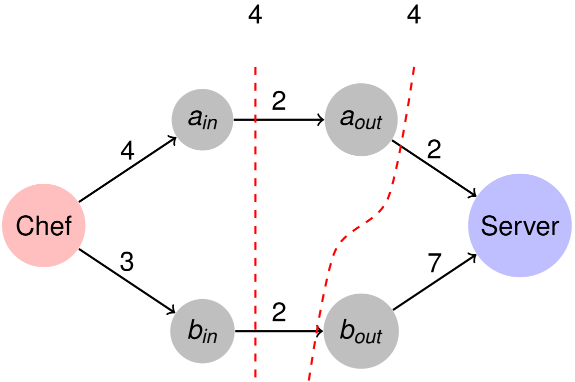
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



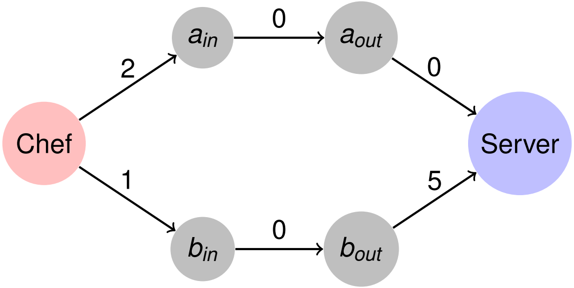
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

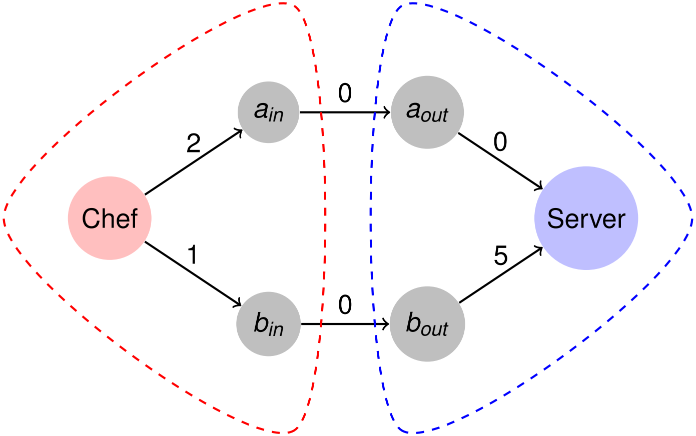
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



$mf = 4 = mincut$

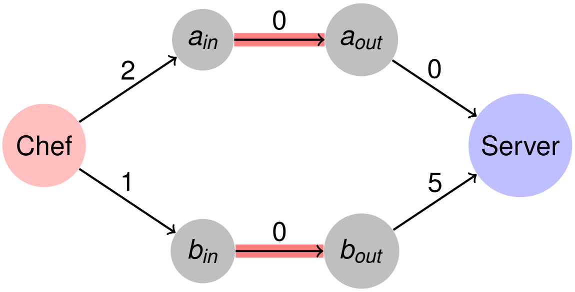
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



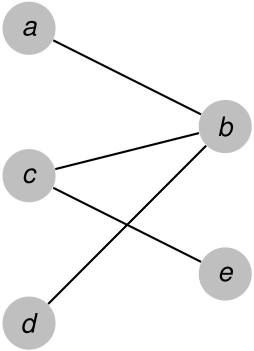
Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



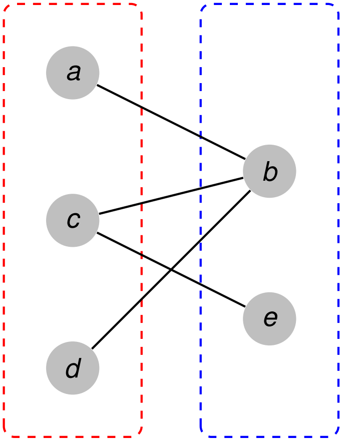
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Bipartite Graphen



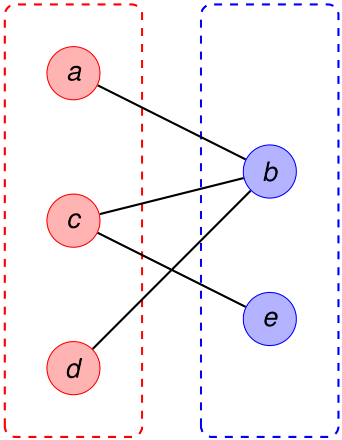
Bipartite Graphen

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Bipartite Graphen

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

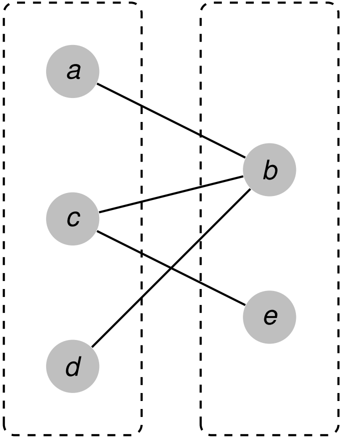
$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für G bipartit: „Maximum Cardinality Bipartite Matching“, kurz **MCBM**.

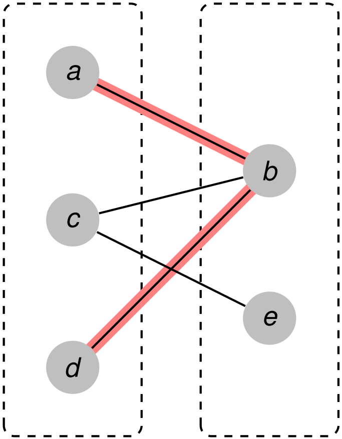
Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



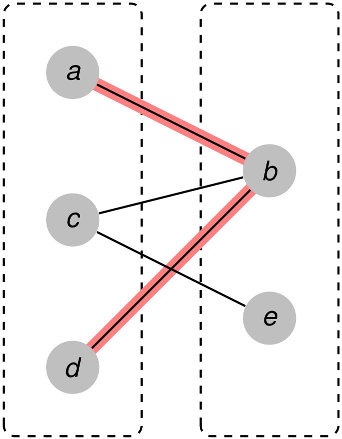
Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

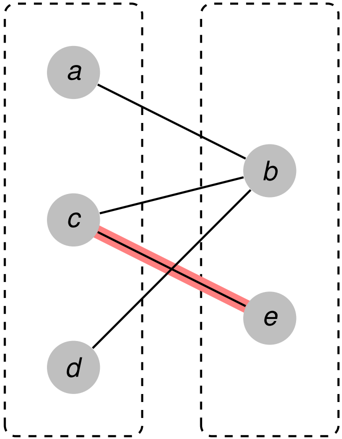
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kein Matching

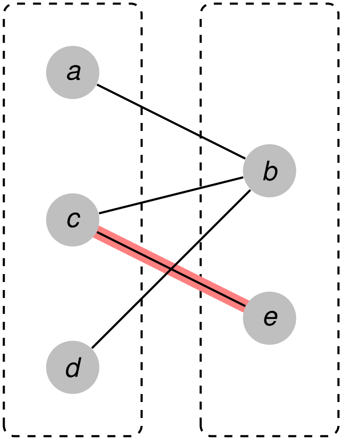
Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

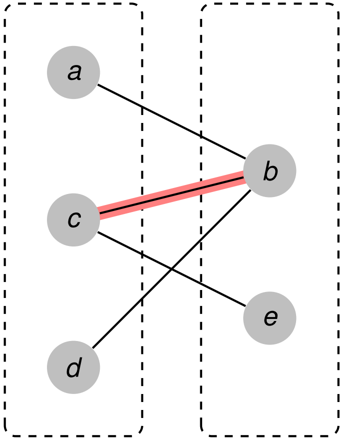
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

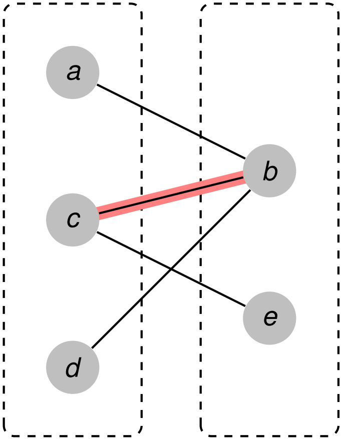
Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

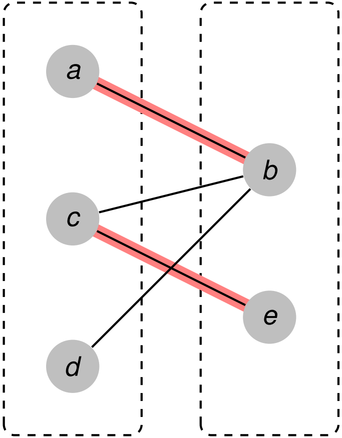
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

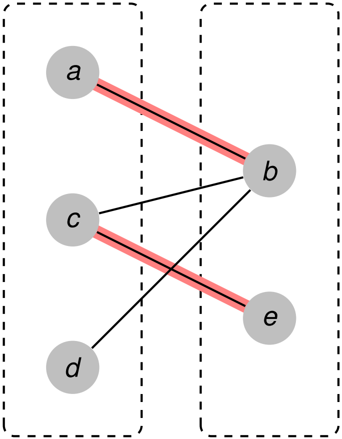
Matchings

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

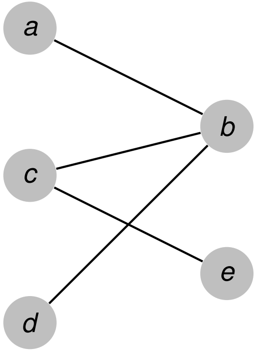
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kardinalitätsmaximales Matching

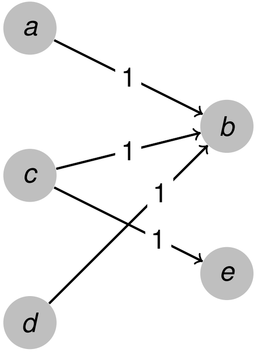
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



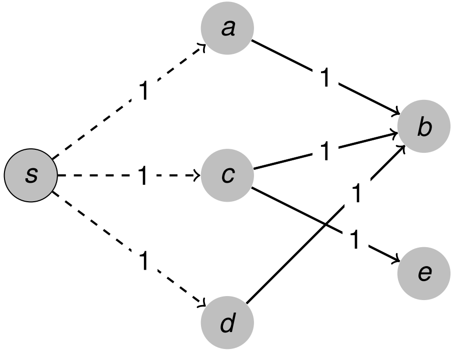
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



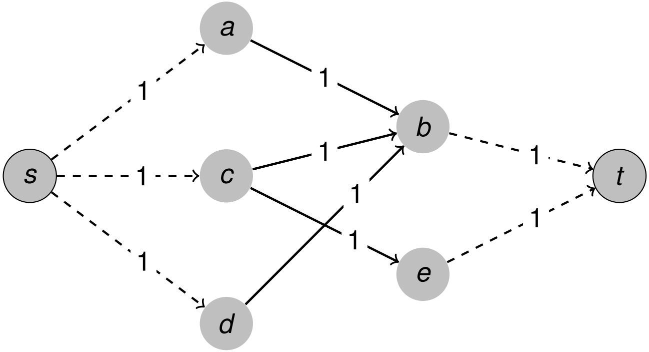
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



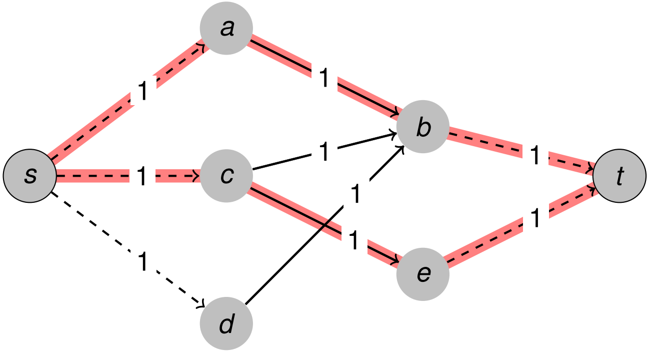
MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



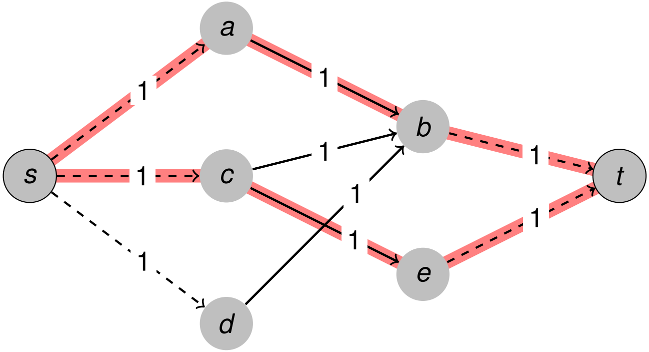
MCBM mit Max-Flow

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Max-Flow

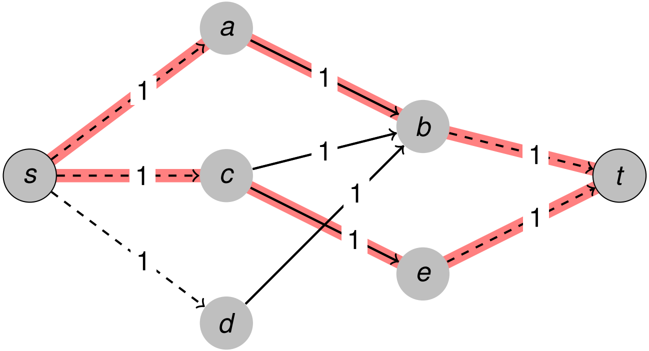
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

MCBM mit Max-Flow

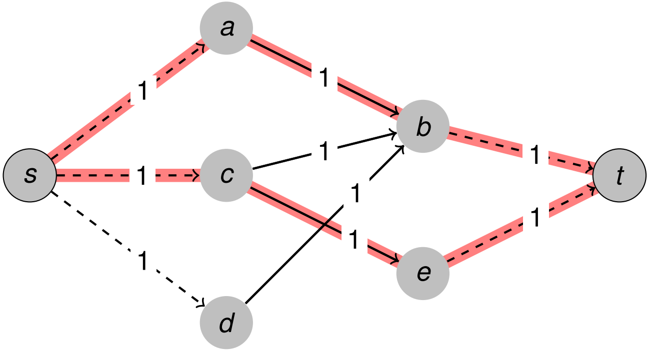
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
- Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(f^* \cdot |E|)$

MCBM mit Max-Flow

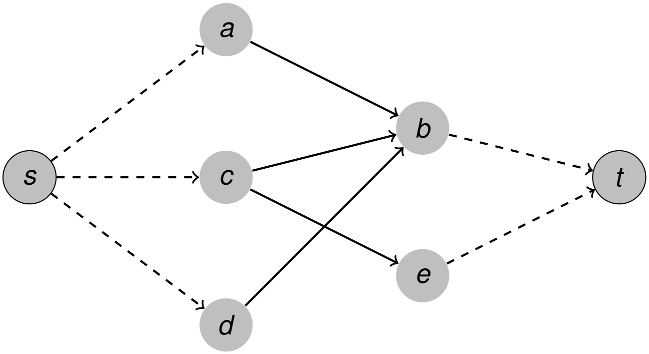
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



- Edmond-Karp: $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$
- Ford-Fulkerson: $\mathcal{O}(f^* \cdot |E|) = \mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$

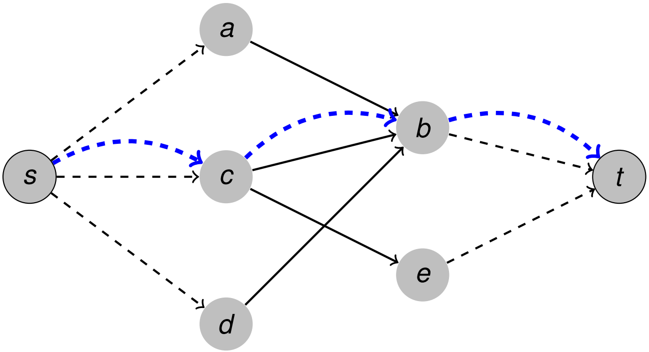
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



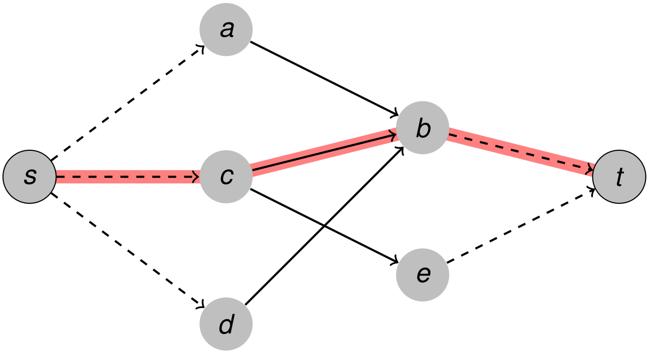
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



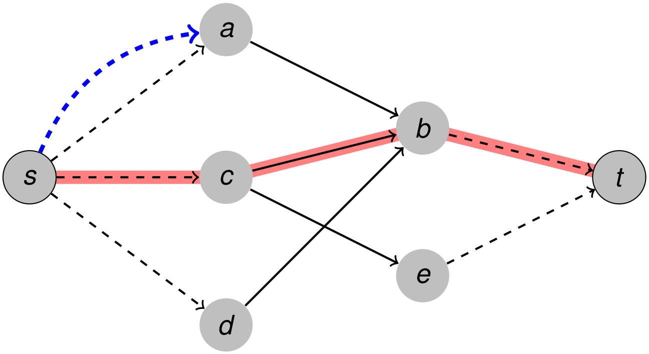
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



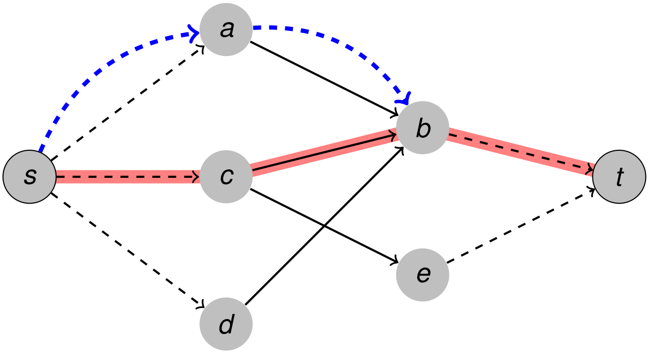
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



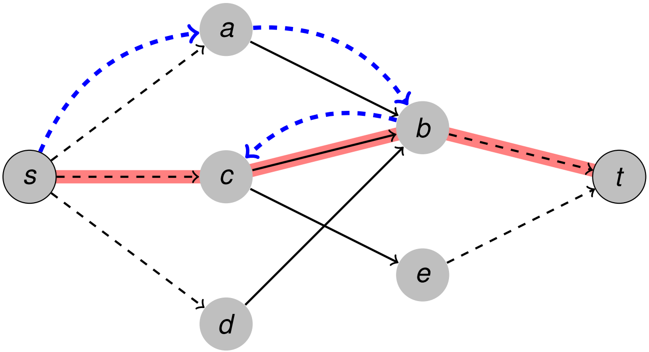
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



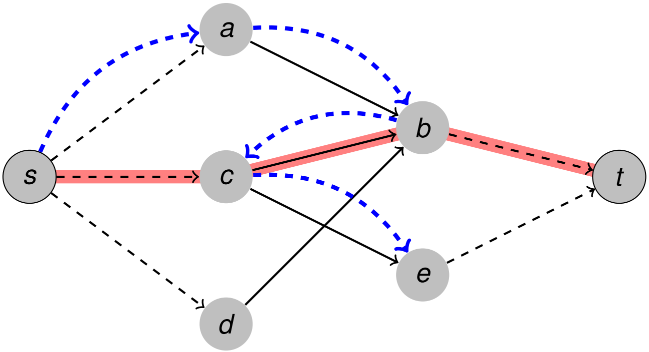
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



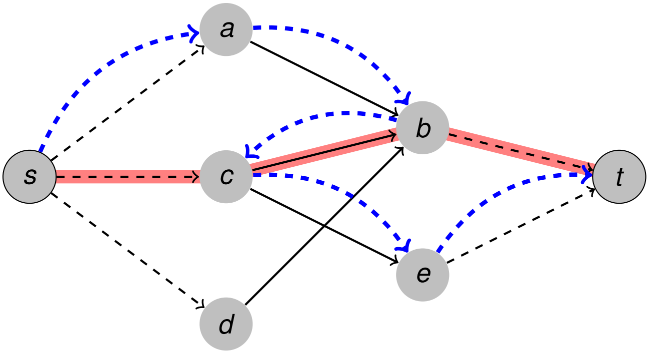
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



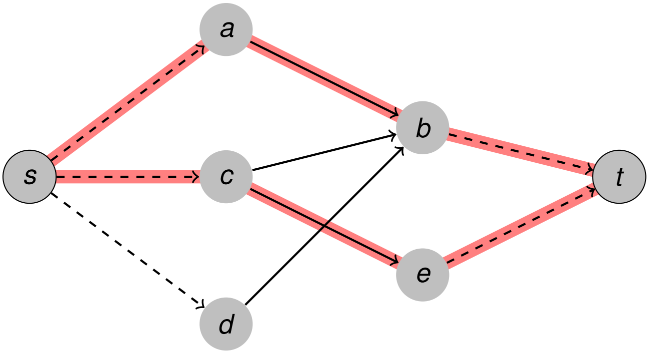
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



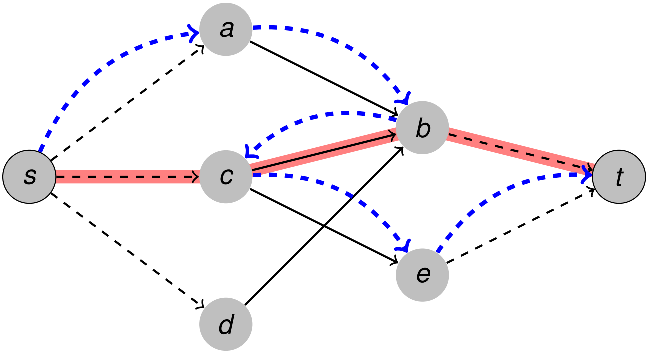
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



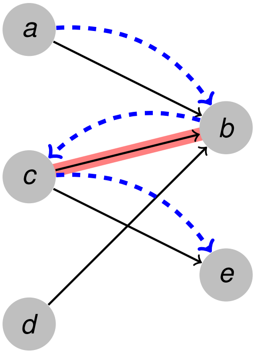
MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Ford-Fulkerson

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \,\dot{\cup}\, V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, \dots, v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \,\dot{\cup}\, V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, \ldots, v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)
- $\{v_i, v_{i+1}\}$ ist abwechselnd $\in E \setminus M$ (frei) und $\in M$ (gematcht)

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

MCBM mit Augmenting Paths

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Karlsruher Institut für Technologie

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

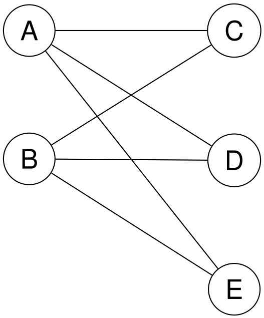
Findet MCBM in Laufzeit $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

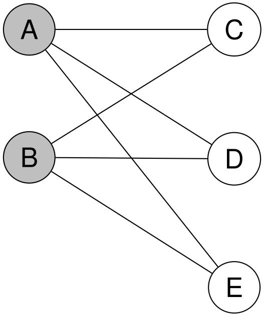


Independent Set

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

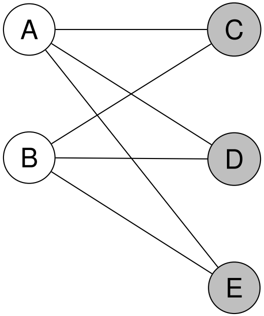


Independent Set

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



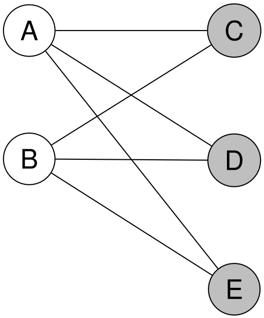
Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



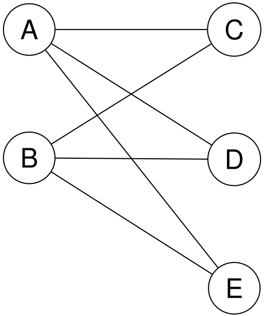
In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

Vertex Cover

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

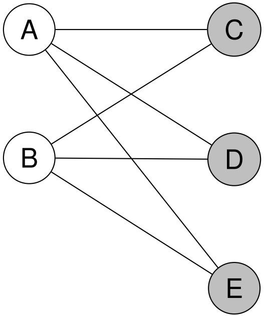


Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

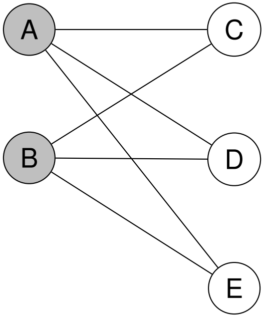


Vertex Cover

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

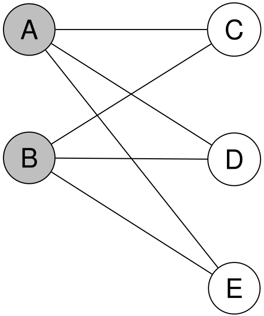


Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Zusammenhang zwischen IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!

Zusammenhang zwischen IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.

Größe von IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.
Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Größe von IS und VC

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.
Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales IS oder ein kardinalitätsminimales VC auszurechnen is *NP*-schwer.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz von König

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz von König

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.

Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

Guardian of Decency

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS

Robert Brede, Peter Koepernik, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Karlsruher Institut für Technologie

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden.
Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS
- nutze dafür aus, dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow $|IS| = |V| - |VC| = |V| - |MCBM|$