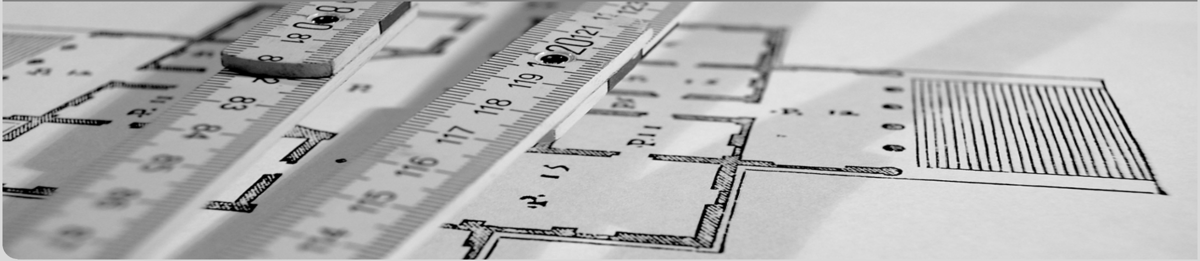
Karlsruher Institut für Technologie

Graphen 3:
Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 6. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Gliederung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

1. UVa 10779 - Collector's Problem
   - Aufgabenstellung
   - Lösung
2. Variationen von Network Flow
   - Multi-source & Multi-sink
   - Knoten Kapazität
   - Min Cut
3. Bipartite Graphen
   - Matchings
   - MCBM mit Max-Flow
   - MCBM mit Augmenting Paths
4. Independent Set und Vertex Cover
   - Definition
   - Sätze

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Testing

Karlsruher Institut für Technologie

Block 1

- Bullet This is some test

Testing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Block 1

- Bullet This is some test
- Bullet WOs das????????????

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

UVa 10779 - Collector's Problem

UVa 10779 - Collector's Problem

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

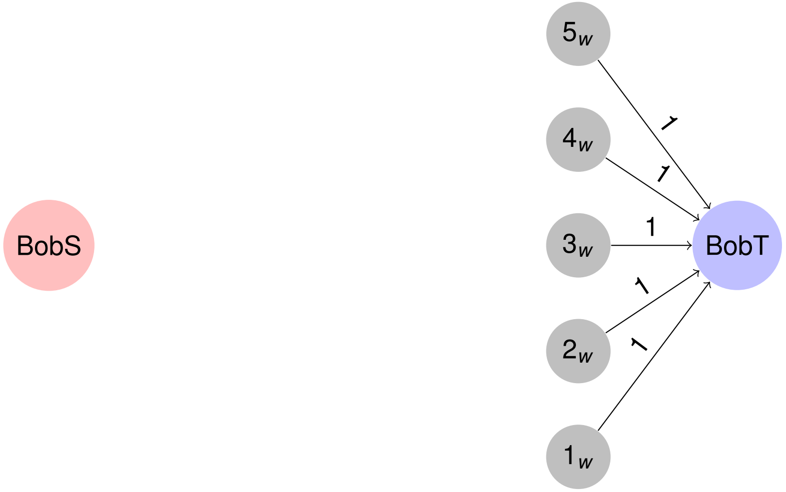
UVa 10779 - Collector’s Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut

Ohne in Doppelte eintauschen

Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

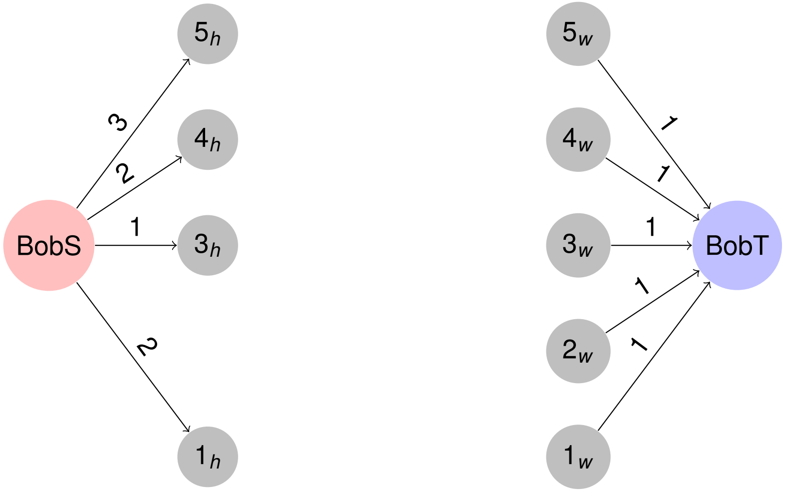
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

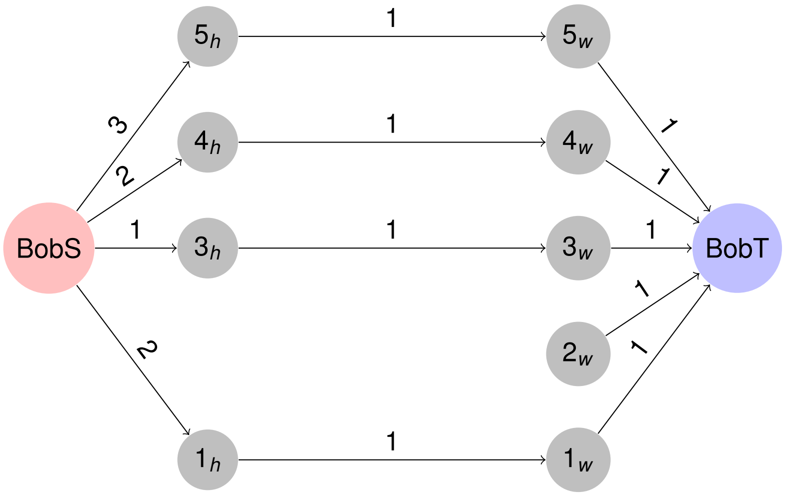
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Ohne in Doppelte eintauschen

UVa 10779 - Collector’s Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

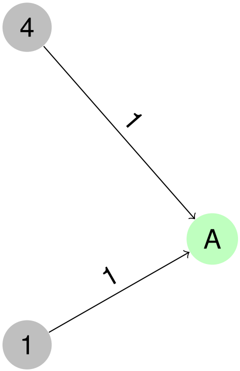
Knoten Kapazität

Min Cut

Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

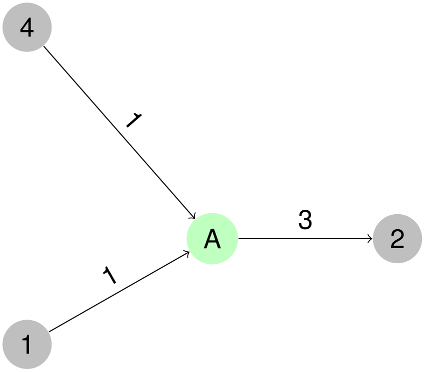
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

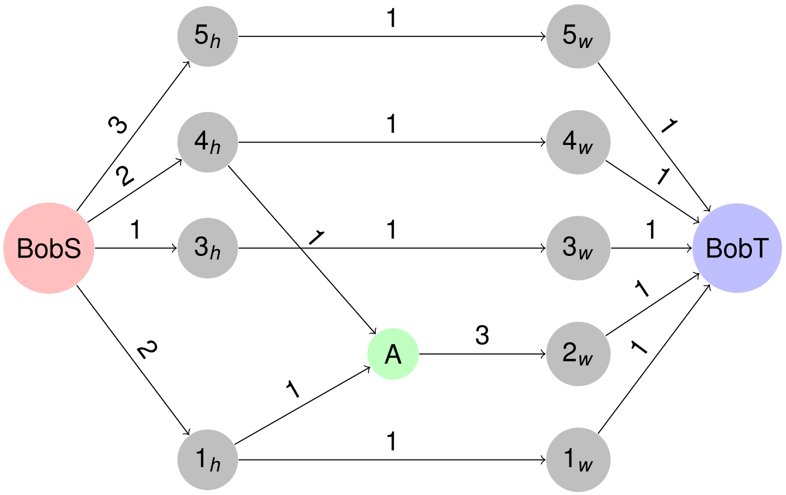
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Ohne in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

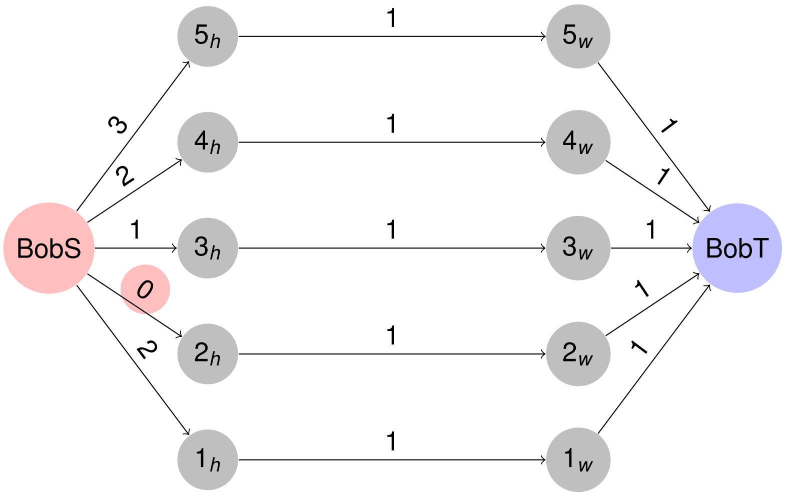
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Mit in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

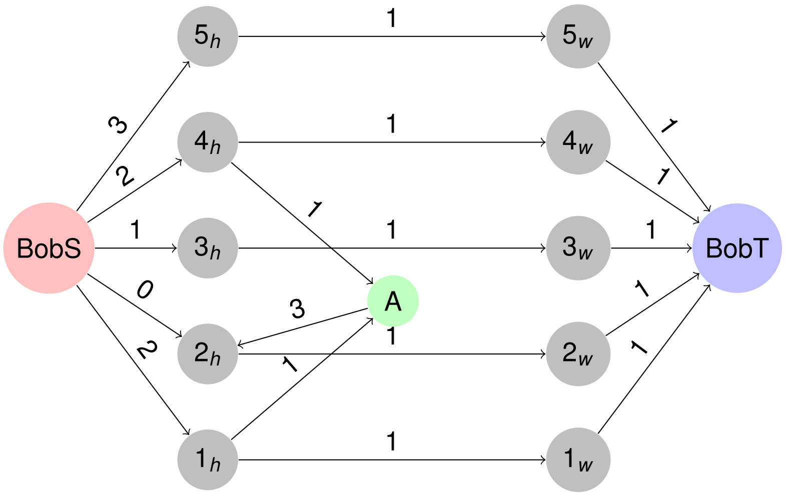
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Mit in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Mit in Doppelte eintauschen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

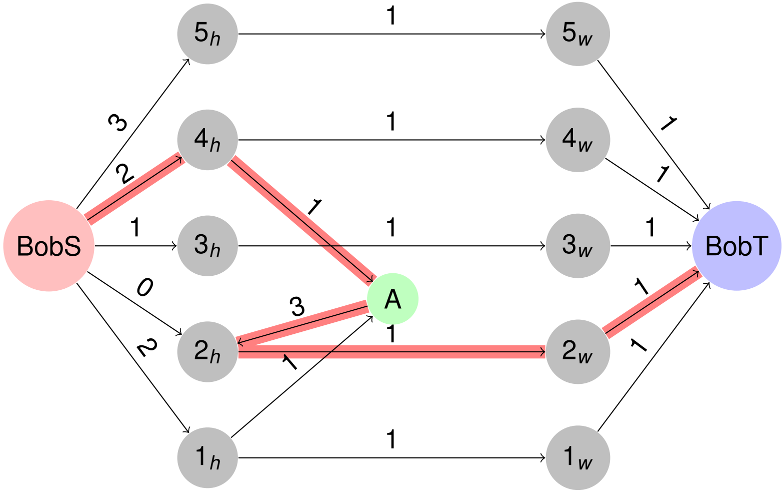
Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut



Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut

- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$

Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Multi-source & Multi-sink

- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i$: Füge (ss, s_x) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni y \leq j$: Füge (t_y, st) mit Gewicht ∞ zu E hinzu

Multi-source & Multi-sink

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Mehrere sources $s_0, \ldots, s_i$ und sinks $t_0, \ldots, t_j$
- Füge zwei neue Knoten hinzu, eine super source *ss* und ein super sink *st*
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i$: Füge (ss, s_x) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- $\forall \mathbb{N}_0 \ni y \leq j$: Füge (t_y, st) mit Gewicht ∞ zu E hinzu
- Berechne Max-Flow von *ss* nach *st*

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$

Knoten Kapazität

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v\_in_x, v\_out_x)) := w(v_x)$

Knoten Kapazität

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Situation: Knoten $v_0, \ldots, v_i$ haben eigene Kapazität
- Ersetze jeden Knoten v_x durch zwei Knoten v_in_x und v_out_x und verbinde sie durch eine gerichtete Kante mit der Knotenkapazität als Gewicht
  - $V' := \{v\_in_0, v\_out_0, \ldots, v\_in_i, v\_out_i\}$
  - $E' := E \cup \{(v\_in_x, v\_out_x) : \mathbb{N}_0 \ni x \leq i\}$
  - $\forall \mathbb{N}_0 \ni x \leq i : w((v\_in_x, v\_out_x)) := w(v_x)$
- Doppelte Anzahl an Knoten!

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Schnitt

Definition

Ist $V = S \dot\cup T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Schnitt

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ist $V = S \dot{\cup} T$ eine Partition von V mit $s \in S,\ t \in T$, so heißt $C := (S, T)$ ein *s*-*t* **cut** (oder *s*-*t* **Schnitt**).
Das zu C gehörige **cut-set** ist

$$X_C := \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \in T\} = (S \times T) \cap E$$

Die **Kosten** des Schnittes sind definiert durch $c(S, T) := \sum_{(u,v) \in X_C} c(u, v)$

Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Min Cut

Definition

Ein **Min Cut** ist ein s-t cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Min Cut

Definition

Ein **Min Cut** ist ein s-t cut $C = (S, T)$ mit minimalen Kosten.
Für einen solchen gilt insbesondere:

$$\forall e \in X_C, X'_C := X_C \setminus e : \text{ Es existiert ein Weg von } s \text{ nach } t \text{ in } (V, E \setminus X'_C)$$

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Bipartite Graphen

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Knoten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Berechnung Min Cut

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Knoten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Knoten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$

Berechnung Min Cut

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

- Nebenprodukt von Max Flow
- DFS/BFS von s ausführen (nur Knoten mit streng positiver restlicher Kapazität traversierbar)
- Jeder gefundene Knoten ist in S
- $T = V \setminus S$
- Alle Kanten in X_C haben Restkapazität 0 $\implies$ Min Cut $=$ Max Flow

Aufgabe zu Min Cut & Vertex Capacities

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

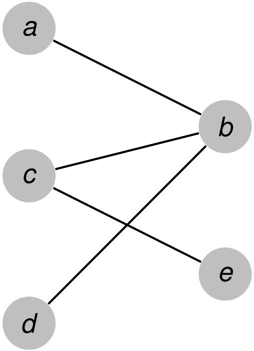
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

UVa 11506 - Angry Programmer

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut

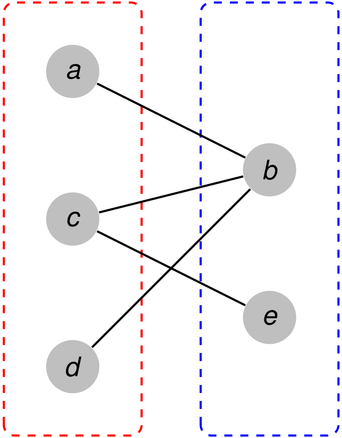
Bipartite Graphen



Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

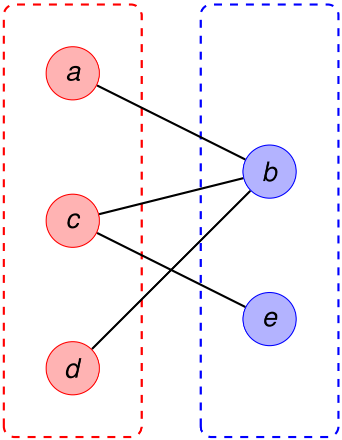
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Bipartite Graphen

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Matchings

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

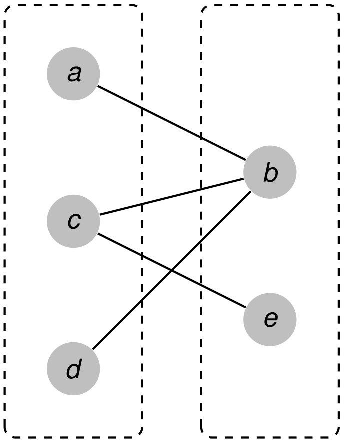
$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Für G bipartit: "Maximum Cardinality Bipartite Matching", kurz **MCBM**.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

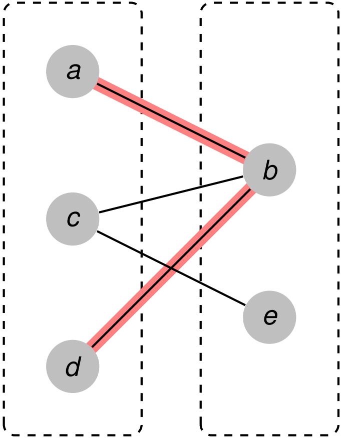
Matchings



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

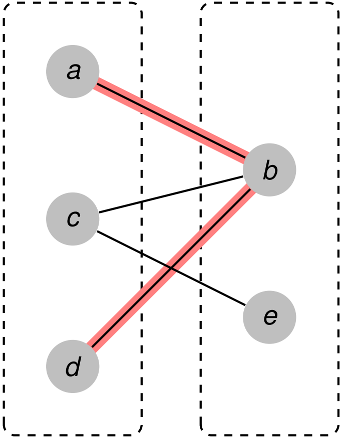
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

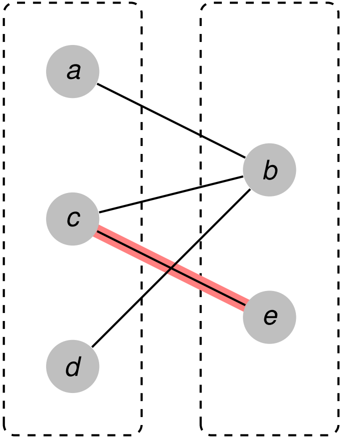


Kein Matching

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

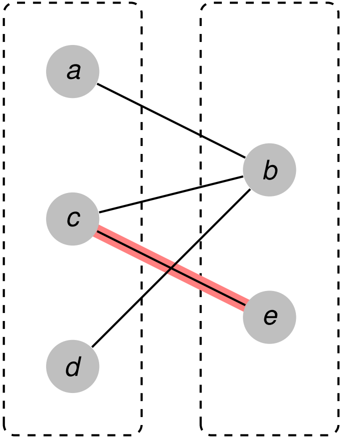
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

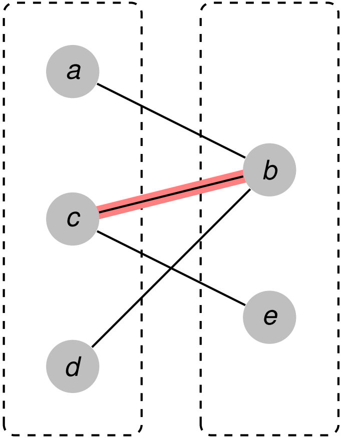


Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

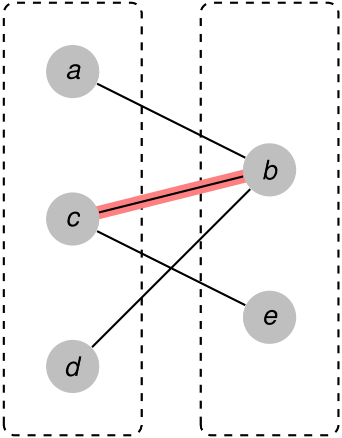
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

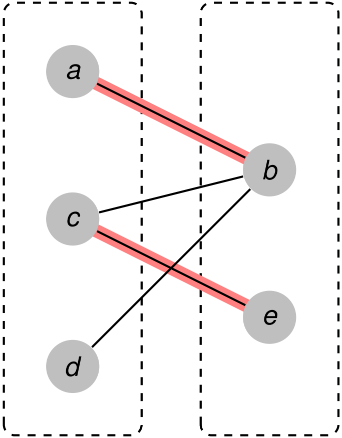


Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

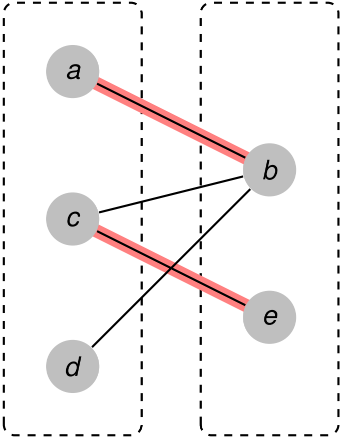
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



Matchings

Peter Koepernik, Robert
Brede, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



Kardinalitätsmaximales Matching

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Complete Prime Pairing

KIT Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

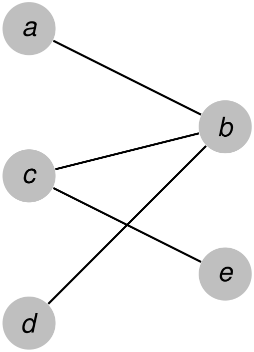
Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.
- Berechne ein MCBM M von G und gebe "Ja" aus, falls $|M| = |V_1| = |V_2|$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

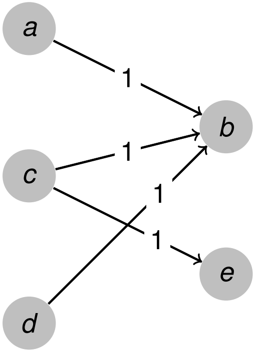
MCBM mit Max-Flow



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

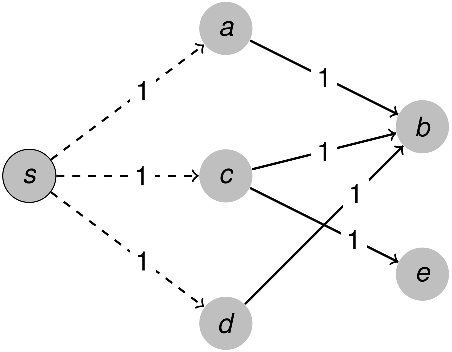
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

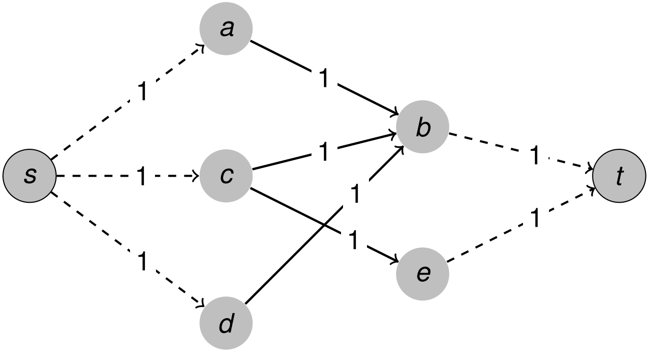
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

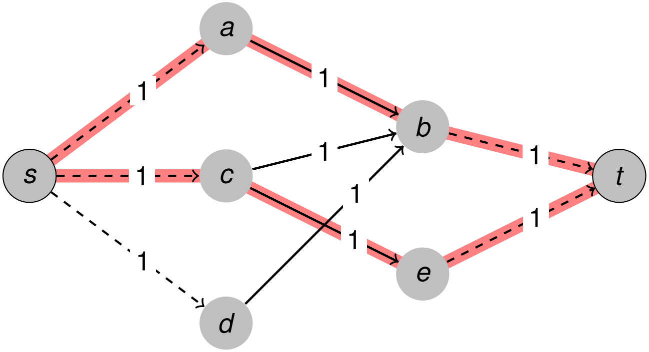
UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path, so ist

$$M' := M \setminus P \cup P \setminus M, \text{ wobei } P := \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, ..., n-1\}\}$$

(flippe die Kanten entlang des Pfades) ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

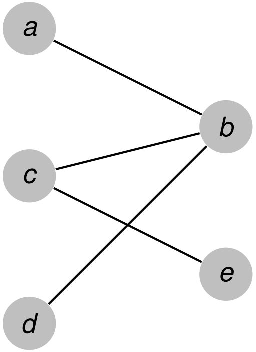
(1) Initialisiere $M := \varnothing$.
(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.
(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $O(|V| \cdot |E|)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

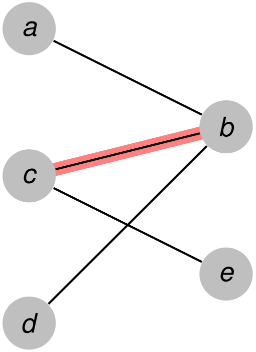
Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

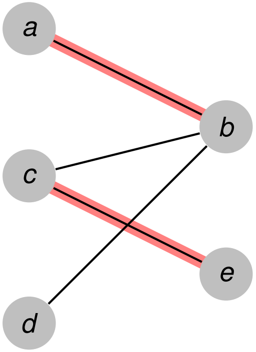
Min Cut



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen



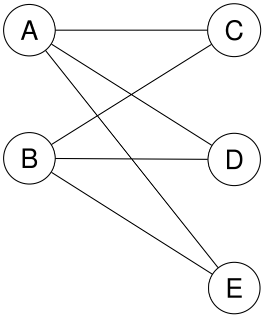
Independent Set

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



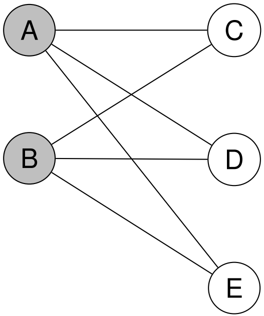
Independent Set

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Gegeben einen Graphen *G*. Ein Independent Set *IS* ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in *IS* über eine Kante in *G* verbunden sind.



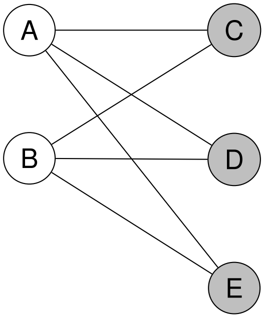
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen *G*. Ein Independent Set *IS* ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in *IS* über eine Kante in *G* verbunden sind.



Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

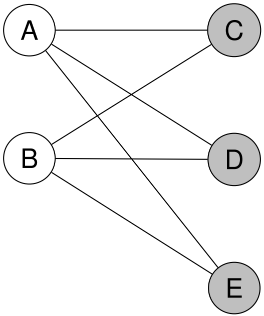
UVa 10779 - Collector’s Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Independent Set

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

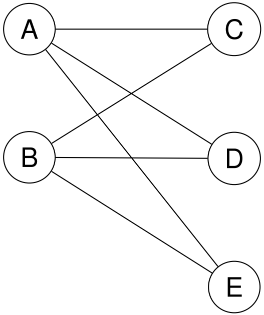
Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



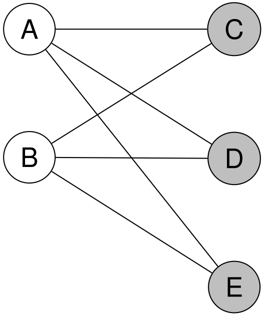
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



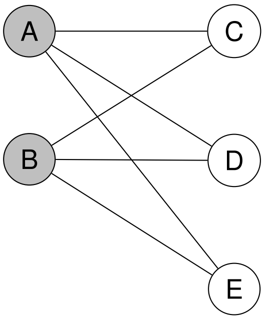
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



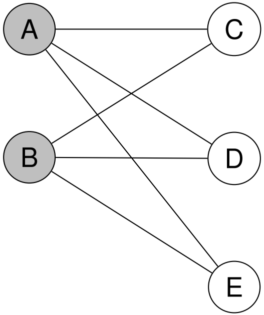
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

Zusammenhang zwischen IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Zusammenhang zwischen IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Zusammenhang zwischen IS und VC

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Zusammenhang zwischen IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.
Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Größe von IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector’s Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten. Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Bemerkung

Ein kardinalitätsmaximales IS oder ein kardinalitätsminimales VC auszurechnen is *NP*-schwer.

Satz von König

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Bipartite Graphen

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem

Aufgabenstellung

Lösung

Variationen von Network Flow

Multi-source & Multi-sink

Knoten Kapazität

Min Cut

Bipartite Graphen

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Mit diesem Satz und den uns bekannten Verfahren erhalten wir nur die Größen der Mengen nicht aber deren Elemente. Um auch an die Elemente der Mengen ran zu kommen, braucht es noch mehr Verfahren. Die Mengen sind allerdings nicht eindeutig.

Guardian of Decency

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

UVa 10779 - Collector's Problem
Aufgabenstellung
Lösung
Variationen von Network Flow
Multi-source & Multi-sink
Knoten Kapazität
Min Cut
Bipartite Graphen

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS
- nutze dafür aus dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow ein MCBM und daraus die Größe von IS

References I

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt