Karlsruher Institut für Technologie

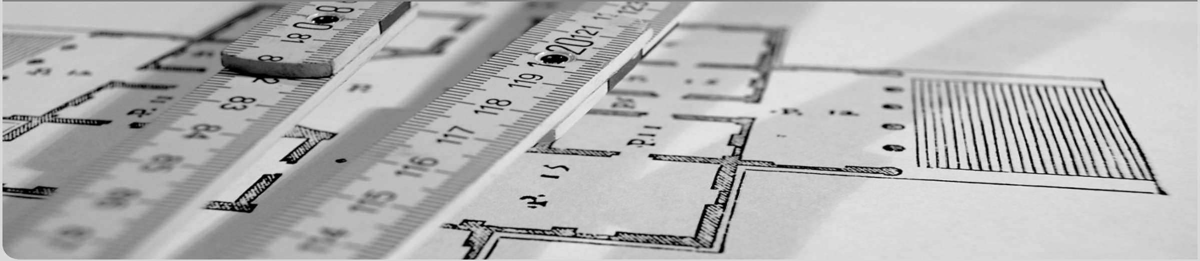
Software Design and Quality

Graphen 3:
Maximum Flow, Bipartite Matching

Ford-Fulkerson, Edmond-Karp, Max Flow, Min Cut, MCBM, Bipartite Graphen, Vertex Cover, König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt | 4. Juni 2019

BASISPRAKTIKUM ZUM ICPC PROGRAMMIERWETTBEWERB



Gliederung

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Testing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Block 1

- Bullet This is some test

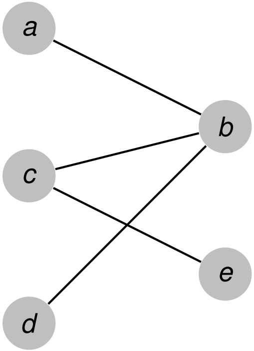
Testing

Block 1

- Bullet This is some test
- Bullet WOs das?????????????

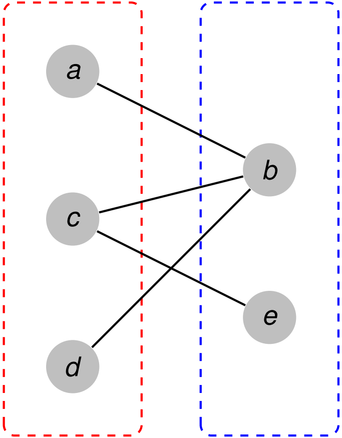
Peter Koepernik, Robert
Brede, Serge Thilges,
Jean-Pierre von der Heydt

Bipartite Graphen



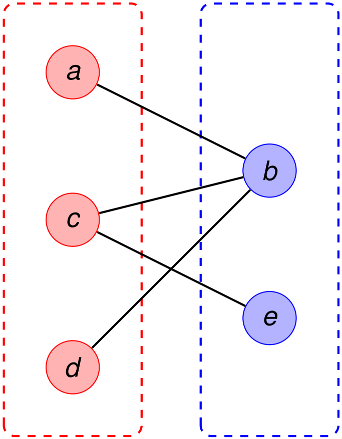
Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Bipartite Graphen

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E),\ E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Sei $G = (V, E)$, $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ ein ungerichteter Graph.
Eine Menge von Kanten $M \subseteq E$ heißt **Matching**, falls

$$\forall e_1, e_2 \in M : e_1 \neq e_2 \Rightarrow e_1 \cap e_2 = \varnothing.$$

$M \in \mathcal{M} := \{M \subseteq E \mid M \text{ ist Matching}\}$ heißt **inklusionsmaximal**, falls

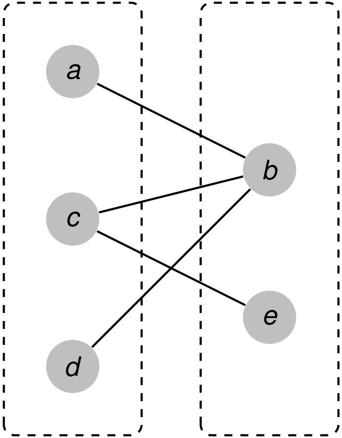
$$\forall M' \in \mathcal{M} : M \subseteq M' \Rightarrow M = M'.$$

$M \in \mathcal{M}$ heißt **kardinalitätsmaximal**, falls

$$\forall M' \in \mathcal{M} : |M| \geq |M'|$$

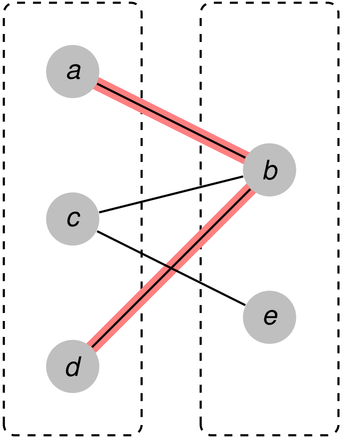
Für G bipartit: “Maximum Cardinality Bipartite Matching”, kurz **MCBM**.

Matchings



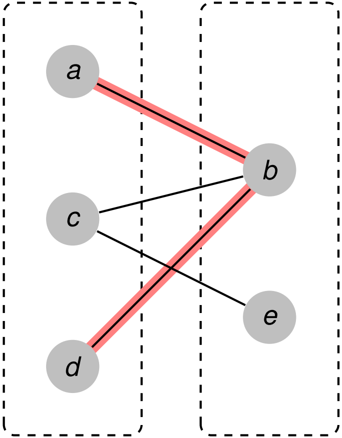
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

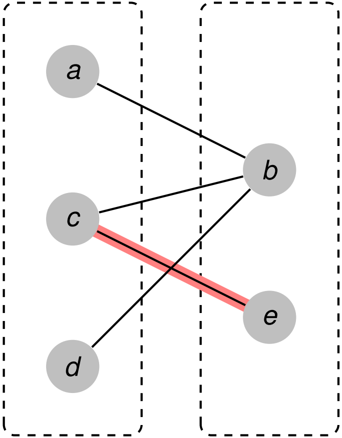
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kein Matching

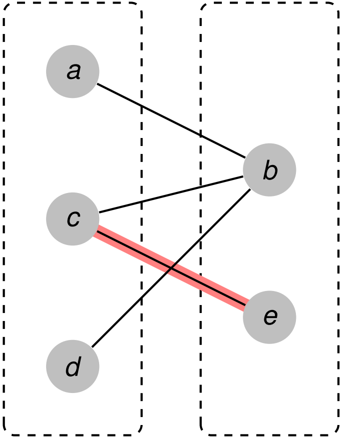
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

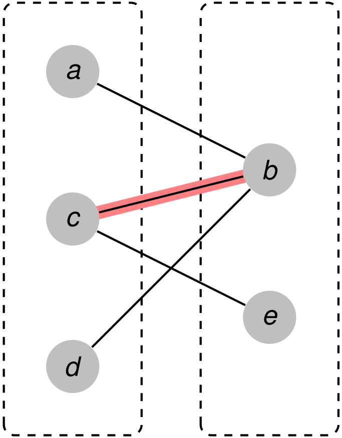
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matching, aber weder inklusions- noch kardinalitätsmaximal

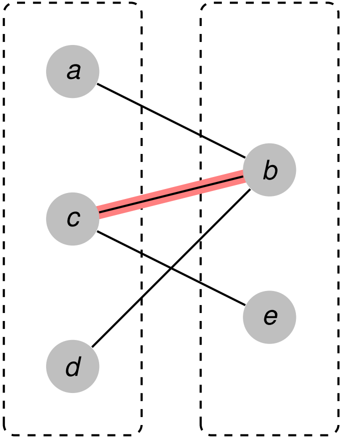
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

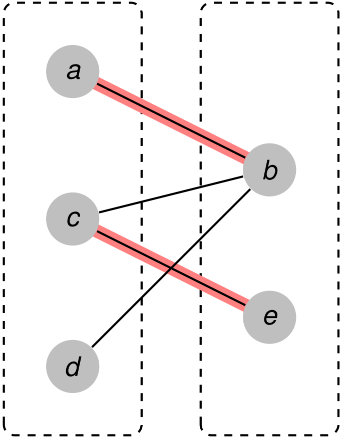
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Inklusions-, aber nicht kardinalitäsmaximales Matching

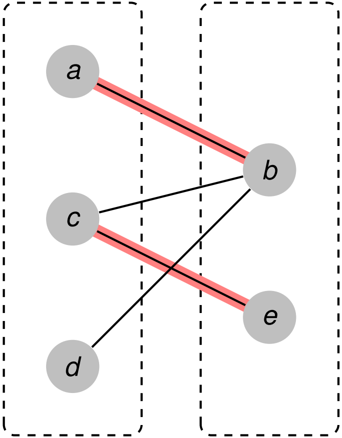
Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Matchings

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



Kardinalitätsmaximales Matching

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Karlsruher Institut für Technologie

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Complete Prime Pairing

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f \colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe “Nein” aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.

Complete Prime Pairing

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Ein **Complete Prime Pairing** einer Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine selbstinverse, fixpunktfreie Abbildung $f\colon A \to A$, sodass $\forall a \in A : a + f(a) \in \mathbb{P}$.

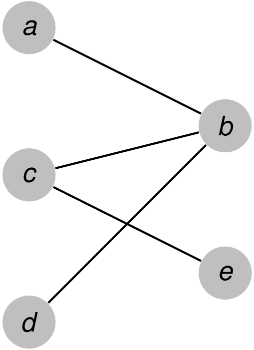
Problem

Gegeben eine Liste N von natürlichen Zahlen und $a, b \in N$ $(a \neq b)$, existiert ein Complete Prime Pairing von N, in dem a und b gepaart werden?

- Falls $a + b \notin \mathbb{P}$, gebe "Nein" aus. Ansonsten entferne a, b aus N.
- Setze $V_1 := \{v \in N \mid v \text{ gerade}\}$, $V_2 := N \setminus V_1$.
- Setze $V := N$ und $E := \{\{a, b\} \mid a, b \in N \text{ und } a + b \in \mathbb{P}\}$. Dann ist $G := (V, E)$ bipartit.
- Berechne ein MCBM M von G und gebe "Ja" aus, falls $|M| = |V_1| = |V_2|$.

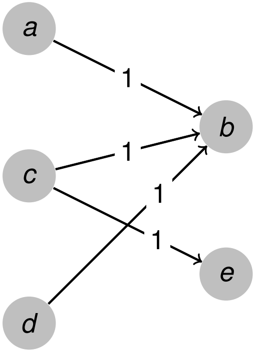
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



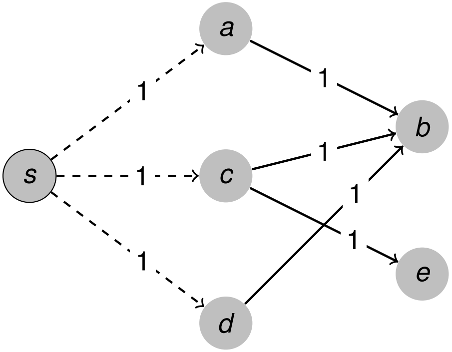
Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

MCBM mit Max-Flow



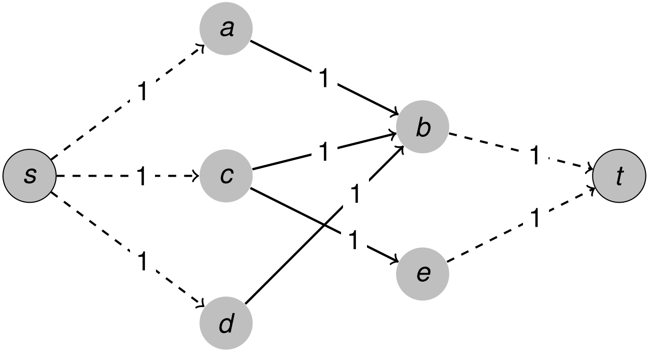
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



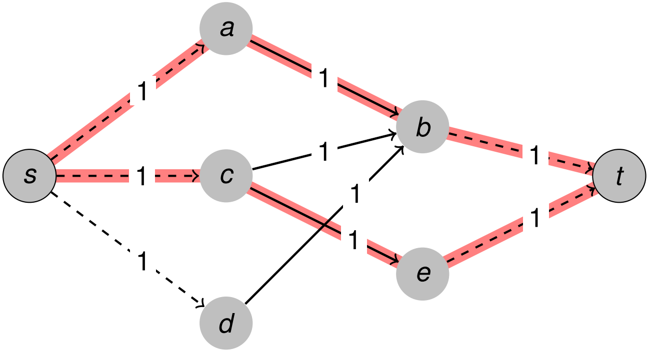
MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Max-Flow

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot\cup V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Paths

Sei $G = (V, E)$, $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.
Ein Pfad $(v_1, ..., v_n)$ in G heißt **Augmenting Path** (in G bzgl. M), falls

- $v_1 \in V_1 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten links)
- $\forall i \in \{1, ..., n-1\} : \{v_i, v_i + 1\} \in \begin{cases} E \setminus M, & i \text{ ungerade,} \\ M, & i \text{ gerade.} \end{cases}$
- $v_n \in V_2 \setminus \bigcup M$ (freier Knoten rechts)

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Lemma von Claude Berge

Sei $G = (V, E)$ bipartit und $M \subseteq E$ ein Matching. Dann ist M kardinalitätsmaximal, genau dann wenn kein Augmenting Path in G bzgl. M existiert.

Beweisidee

Ist M ein Matching und $(v_1, ..., v_n)$ ein Augmenting Path, so ist

$$M' := M \setminus P \cup P \setminus M, \text{ wobei } P := \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i \in \{1, ..., n-1\}\}$$

(flippe die Kanten entlang des Pfades) ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Augmenting Path Algorithmus

Gegeben: bipartiter Graph $G = (V, E)$.

(1) Initialisiere $M := \varnothing$.

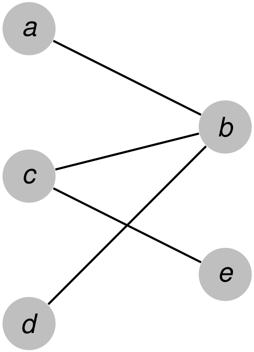
(2) Suche einen Augmenting Path. Gebe M aus, falls keinen gefunden.

(3) Flippe die Kanten entlang des gefundenen Pfades. Gehe zu (2).

Findet MCBM in Laufzeit $O(|V| \cdot |E|)$.

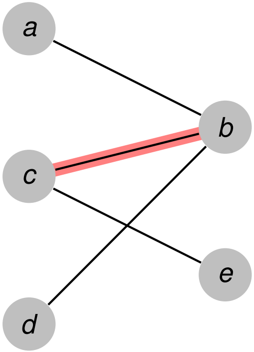
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



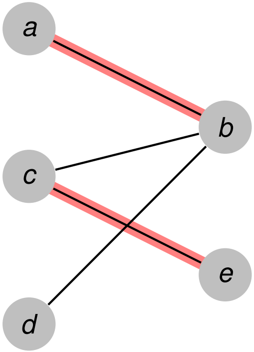
MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt



MCBM mit Augmenting Paths

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

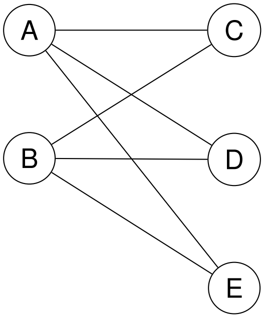


Independent Set

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

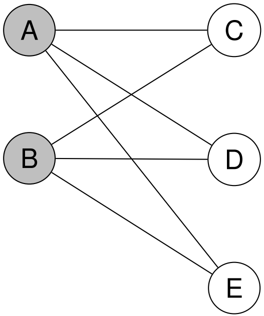


Independent Set

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

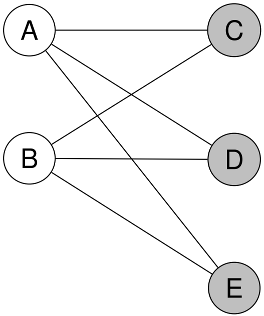


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.

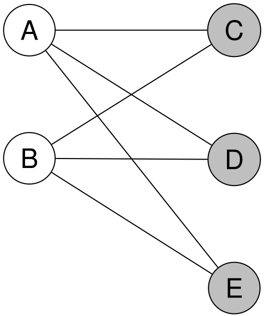


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Independent Set

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Independent Set IS ist eine Menge von Knoten, sodass keine zwei Knoten in IS über eine Kante in G verbunden sind.



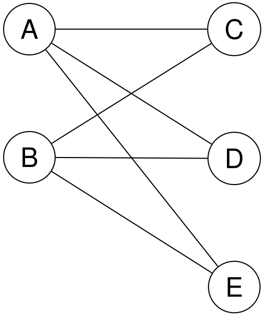
In der Regel wird nach einem möglichst großen Independent Set gesucht.

Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

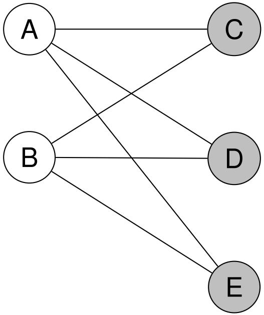


Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Vertex Cover

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

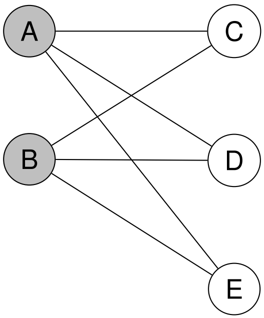


Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.

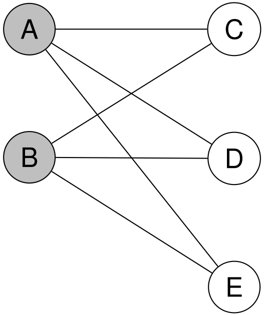


Vertex Cover

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Definition

Gegeben einen Graphen G. Ein Vertex Cover VC ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante in G mit mindestens einem Knoten aus VC verbunden ist.



In der Regel wird nach einem möglichst kleinen Vertex Cover gesucht.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Zusammenhang zwischen IS und VC

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Zusammenhang zwischen IS und VC

Karlsruher Institut für Technologie

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Zusammenhang zwischen IS und VC

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!

Zusammenhang zwischen IS und VC

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz

Sei $G = (V, E)$ eine Graph und $X \subseteq V$ eine Menge von Knoten. Dann gilt:

$$X \text{ ist ein VC von } G \iff V \setminus X \text{ ist ein IS von } G$$

Beweis:

- Sei X ein beliebiges VC. Wir behaupten, dass $V \setminus X$ ein IS ist.
- Nehmen wir also das Gegenteil an und führen dies zum Widerspruch:
  - Angenommen es würde $\{u, v\} \subseteq V \setminus X, u \neq v$ existieren mit $(u, v) \in E$
  - Dann wäre aber $u, v \notin X$ und die Kante (u, v) wäre vom VC X nicht abgedeckt $\Rightarrow$ Widerspruch!
- Die andere Richtung folgt ähnlich

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten.
Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Größe von IS und VC

Es ist trivial beliebige IS oder VC anzugeben. Deswegen suchen wir in der Regel nach möglichst großen IS und möglichst kleinen VC. Das wollen wir formalisieren:

Definition

Ein IS/VC ist **inklusions maximal/minimal**, wenn kein Knoten hinzugefügt/entfernt werden kann ohne die Eigenschaft des IS/VC zu behalten. Ein IS/VC ist **kardinalitäts maximal/minimal**, wenn kein größeres/kleineres IS/VC existiert.

Definition

Ein kardinalitätsmaximales IS oder ein kardinalitätsminimales VC auszurechnen is *NP*-schwer.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz von König

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Satz von König

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Satz (von Dénes König)

In einem bipartiten Graphen ist die Größe eines kardinalitätsminimalem Vertex Cover (VC) gleich der Größe eines Max Cardinality Bipartite Matching (MCBM).

Etwas informeller aufgeschrieben erhalten wir damit $|VC| = |MCBM|$.
Und mit unserem Wissen aus dem vorangegangenen Satz folgt:
$|V| = |VC| + |IS| = |MCBM| + |IS|$

Mit diesem Satz und den uns bekannten Verfahren erhalten wir nur die Größen der Mengen nicht aber deren Elemente. Um auch an die Elemente der Mengen ran zu kommen, braucht es noch mehr Verfahren. Die Mengen sind allerdings nicht eindeutig.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten

Guardian of Decency

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt

Guardian of Decency

Aufgabe

Gegeben sind $N \leq 500$ Schüler, beschrieben durch Größe, Geschlecht und Musikgeschmack. Der Lehrer möchte wissen wie viele Schüler maximal auf Klassenfahrt kommen können, ohne dass die Gefahr besteht, dass zwei Schüler ein Paar werden. Zwei Schüler laufen Gefahr ein Paar zu werden, wenn sie ein unterschiedliches Geschlecht, maximal 40cm Größendifferenz und einen gleichen Musikgeschmack haben.

Lösungsansatz:

- Modelliere das Problem als Graphen mit den Schülern als Knoten
- Verbinde Schüler, wenn sie ein Paar werden könnten
- Suche nach einem maximalem IS
- nutze dafür aus dass der Graph bipartit ist, indem Männchen und Weibchen voneinander getrennt werden
- Berechne mittels Flow ein MCBM und daraus die Größe von IS

References I

Peter Koepernik, Robert Brede, Serge Thilges, Jean-Pierre von der Heydt