

Problem Set 3

Introduction to Finance

Due Date: May 29, 2024 (Wednesday), 23:59

Question 1 (10pts)

Consider a simple collateralized debt obligation (CDO) based on a collateral pool that contains two zero-coupon corporate bonds. Bond A has face value of \$15 million and Bond B has face value of \$25 million, so the principal amount of the collateral pool is \$40 million. Both of the bonds are rated B, which corresponds to a default probability of 20%, but they have different expected recoveries. Bond A is expected to recover 40% in the event of default, while Bond B is expected to recover 60%.

The CDO has a senior tranche and a junior tranche. The priority waterfall dictates that the junior tranche absorbs the first \$10 million of losses, then the senior tranche absorbs any further losses on the collateral pool.

(a) Assume that defaults occur independently. There are four possible scenarios of default and survival for the pair of bonds (both bonds default, both survive, A defaults and B survives, A survives and B defaults). Compute the probability of each scenario along with the associated payoff to the collateral pool. What is the expected payoff of the collateral pool (in dollars)? (3pts)

(b) If defaults are independent, then what is the expected payoff of the senior tranche? Answer in terms of a percentage of the senior tranche's principal amount. (2pts)

(c) If defaults are independent, then what is the expected payoff of the junior tranche? Answer in terms of a percentage of the junior tranche's principal amount. (2pts)

(d) What are the expected payoffs of the senior and junior tranches if the default probabilities of the bonds are perfectly correlated? Answer in terms of percentages of the respective principal amounts of the tranches. (3pts)

Question 2 (5pts)

当前零息债券的期限结构 (term structure) 如下表所示:

今日 $t = 0$	
期限	到期收益率 (%)
1	4
2	5
3	8

- (a) 计算一年后到期的、面值为 1000 的零息债券 (zero coupon bond) 在今日的价格。(1pt)
- (b) 计算两年后到期的、面值为 1000 的零息债券在今日的价格。(1pt)
- (c) 计算第二年和第三年的远期利率 (forward rate)。(1pt)
- (d) 假设投资者在一年后投资 1000 元到期限为两年的债券中,最终获得的收益是多少?(1pt)
- (e) 考虑一个期限为两年的固定收益证券,它在一年后支付 500 元,在两年后支付 2000 元。计算该债券今日的价格。(1pt)

Question 3 (8pts)

考虑一个投资方案，该投资方案是由几个具有相同标的资产、相同到期日 (expiration date)、和不同行权价 (strike prices) 的期权所构建：

- 买入一只看跌期权，行权价为 \$40 (buy a put option with strike price \$40),
- 卖出一只看跌期权，行权价为 \$50 (write a put option with strike price \$50),
- 卖出一只看涨期权，行权价为 \$60 (write a call option with strike price \$60),
- 买入一只看涨期权，行权价为 \$70 (buy a call option with strike price \$70).

S_T 记为标的资产在到期日的价格。

(a) 通过图和表格两种方式描述该投资方案的收益 (payoff) 和 S_T 的关系。(2pts)

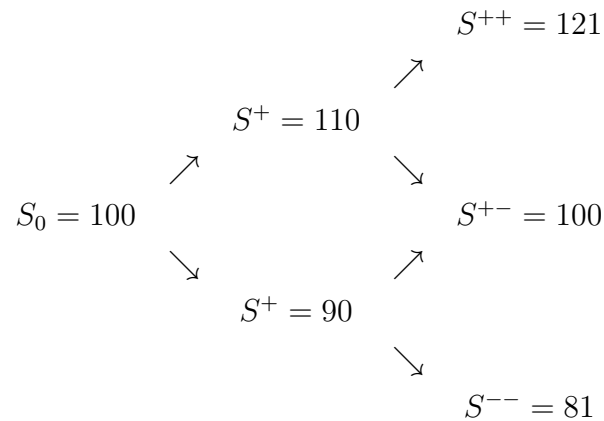
(b) 当 S_T 为多少时该投资方案可以达到最高利润 (highest profit)? 当 S_T 为多少时，该投资方案可以达到最低利润 (lowest profit)? (2pts)

(c) 假设目前标的资产的价格为 \$55。投资者对标的资产价格的未来变动有怎样的预期，该投资方案才是合理的? (2pts)

(4) 行权价为 40 和 50 的看跌期权价格分别为 P^{40} 和 P^{50} ，行权价为 60 和 70 的看涨期权价格分别为 C^{60} 和 C^{70} 。比较 P^{40} 和 P^{50} 的大小；比较 C^{60} 和 C^{70} 的大小。(2pts)

Question 4 (10pts)

假设一只股票当前的价格为 $S_0 = \$100$ 。6 个月之后，股票的价格有 2 种可能性；12 个月之后，股票的价格有 3 种可能性。股票在 12 个月内都不支付股利。股票价格变化如图所示：



年化后的无风险收益率为 4%。

(a) 如果不存在套利机会，计算一个以该股票为标的资产的看涨期权 (call option) 的价格，其中行权价为 \$97，到期日为 12 个月之后。(3pts)

(b) 具有相同到期日和行权价的一个看跌期权 (put option) 的价格为多少？(2pts)

(c) 假设公司在 12 月后行权之前会支付投资者每股 \$2 的股利，求解 (a) 问中看涨期权 (call option) 的价格。(3pts)

(d) 在考虑股利的前提下，求解 (b) 问中看跌期权 (put option) 的价格。(2pts)

Question 5 (12pts)

今年年初的股灾使得许多雪球资产暴雷，也让“雪球”这个词频频冲上热搜。我们来分析一个基本的雪球资产：假设这个雪球资产和它的标的资产价格均为 \$100，存续期为 3 年，承诺收益率为每年 $i\%$ （按照单利计算），敲出价格为 \$103，敲入价格为 \$75。雪球资产的实际收益按照如下方法计算：

- 如果标的资产在存续期内上涨到敲出价格以上，合约立刻停止，按照承诺收益率支付本息
- 如果标的资产在存续期内没有上涨到敲出价格以上，也没有下跌到敲入价格以下，3 年期满后合约停止，按照承诺收益率支付本息
- 如果标的资产在存续期内下跌到敲入价格以下，并且没有重新上涨到敲出价格以上，3 年期满后不再支付利息，仅支付标的资产的期末价格
- 如果标的资产在存续期内下跌到敲入价格以下，但是又重新上涨到敲出价格以上，参考第 1 条，合约立刻停止，按照承诺收益率支付本息

为了简单起见，我们假设无风险收益率为 $r_f = 0\%$ 。

(a) 这个雪球资产的年化收益率随着标的资产价格的变化情况和下列哪个更接近？(1pts)

A. 买入看涨期权 B. 卖出看涨期权 C. 买入看跌期权 D. 卖出看跌期权

(b) 假设标的资产价格每年变化一次，每次变化有上涨 25% 和下跌 20% 两种可能。利用套利定价理论计算这个雪球资产的承诺收益率 $i\%$ 。(5pts)

(c) 延续 (b) 的条件，如果投资机构出售了一份雪球资产，他不会直接通过雪球和购买者对赌，而是会选择买入标的资产对冲掉自己的风险，最后向购买者收取手续费稳定获利。我们接下来通过投资机构的行為和市场供需关系分析一下雪球资产对市场的影响：

完成以下填空并**通过计算详细说明理由** (5pts)

(i) 当标的资产价格上涨时，投资机构会（ ）标的资产，这会导致标的资产价格（ ）

(ii) 当标的资产价格下降，但没有跌破敲入价时，投资机构会（ ）标的资产，这会导致标的资产价格（ ）

(iii) 当标的资产价格下降并跌破敲入价时，投资机构会（ ）标的资产，这会导致标的资产价格（ ）

A. 买入 B. 卖出 C. 上涨 D. 下跌

(d) 延续 (b) 和 (c) 的条件，通过以上分析可以看到，情况（ ）降低了标的资产的波动，情况（ ）加剧了标的资产的波动。今年年初的股灾导致各个 A 股市场指数大幅下跌，以这些指数为标的资产的雪球类似于情况（ ）

(从 i、ii、iii 种选择一个或多个填入，**不需要说明理由**) (1pts)

Question 6 (5pts)

考虑以下信息：

- 美元的一年期无风险利率： $r_{USD} = 3\%$
- 英镑的一年期无风险利率： $r_{GBP} = 8\%$
- 美元兑英镑的即期汇率： $S_0 = 1.25$ 美元/英镑
- 一年后到期的美元兑英镑远期合约价格： F_0 美元/英镑

(a) 如果不存在套利机会，计算 F_0 (1pts)

(b) 如果远期合约在兑现时要缴纳 1% 的手续费，并且市场上不存在套利机会，计算 F_0 的取值范围 (2pts)

(c) 延续 (b) 的条件，如果 $F_0 = 1.22$ ，将 1 年后的美元兑英镑的即期汇率记为 S_1 ，为一个随机变量。请通过表格详细描述套利策略 (arbitrage strategy)，给出投资者在当期和一年后的现金流 (cash flow) 情况，并说明该套利策略无风险 (risk-free)。(2pts)