1

(a) 计算每种情况下的概率及对应的抵押品池的回报

1. **两只债券都违约**
   - 概率：0.2 * 0.2 = 0.04
   - 回收金额：0.4 * $15M + 0.6*$25M = $6M+$15M = $21M
2. **两只债券都存续**
   - 概率：0.8 * 0.8 = 0.64
   - 回收金额：$15M+$25M = $40M
3. **A违约B存续**
   - 概率：0.2 * 0.8 = 0.16
   - 回收金额：0.4 * $15M+$25M = $6M+$25M = $31M
4. **A存续B违约**
   - 概率：0.8 * 0.2 = 0.16
   - 回收金额：$15M + 0.6*$25M = $15M+$15M = $30M

预期回报计算：

$$E[\text{回报}] = 0.04 \times 21 + 0.64 \times 40 + 0.16 \times 31 + 0.16 \times 30$$

$$E[\text{回报}] = 0.84 + 25.6 + 4.96 + 4.8 = 36.2$$

所以，抵押品池的预期回报是 $36.2M。

(b) 高级债券的预期回报（以百分比表示）

- 高级债券吸收前$10M损失后的剩余回报。
- 各种情况的回报：
  - 两只债券都违约：$21M
  - 两只债券都存续：$40M-$10M = $30M
  - A违约B存续：$31M-$1M = $30M
  - A存续B违约：$30M

预期回报计算：

$$E[\text{高级债券回报}] = 0.04 \times 21 + 0.64 \times 30 + 0.16 \times 30 + 0.16 \times 30 = 29.64$$

所以，高级债券的预期回报是 $26.2M，占其本金的百分比为：\frac{39.64}{30} \times 100$$

(c) 次级债券的预期回报（以百分比表示）

- 次级债券吸收前$10M损失后的剩余回报。

- 各种情况的回报：
  - 两只债券都违约：$0M$（由于损失超过10M）
  - 两只债券都存续：$10M
  - A违约B存续：$1M
  - A存续B违约：$0M

预期回报计算：

$$E[\text{次级债券回报}] = 6.56$$

所以，次级债券的预期回报是 $10M$，占其本金的百分比为：$\frac{6.56}{10} \times 100\$$

(d) 违约概率完全相关时的预期回报（以百分比表示）

- 如果违约概率完全相关，那么只有两种情况：
  1. **两只债券都违约**：
     - 概率：0.2
     - 回收金额：$21M
     - 高级债券：$21M
     - 次级债券：$0M
  2. **两只债券都存续**：
     - 概率：0.8
     - 回收金额：$40M
     - 高级债券：$30M
     - 次级债券：$10M

预期回报计算：

$$E[\text{高级债券回报}] = 0.2 \times 21 + 0.8 \times 30 = 28.2$$

$$\text{占本金的百分比} = \frac{26.2}{30} \times 100\% \approx 94\%$$

$$E[\text{次级债券回报}] = 0.8 \times 10$$

$$\text{占本金的百分比} = \frac{8}{10} \times 100\% = 80\%$$

所以，当违约概率完全相关时：

- 高级债券的预期回报是 94%
- 次级债券的预期回报是 80%

2

(a)(b)

一年到期:

$$P = \frac{1000}{1.04} = 961.54$$

两年到期:

$$P = \frac{1000}{1.05^2} = 907.03$$

(c)

$$f_2 = \frac{1.05^2}{1.04} = 6.01\%$$

$$f_3 = \frac{1.08^3}{1.05^2} = 14.26\%$$

(d)

最终收益为

$$1000 * (1 + f_2) * (1 + f_3) = 1121.54$$

(e)

今日的价格为:

$$\frac{500}{1.04} + \frac{2000}{1.05^2} = 2294.83$$

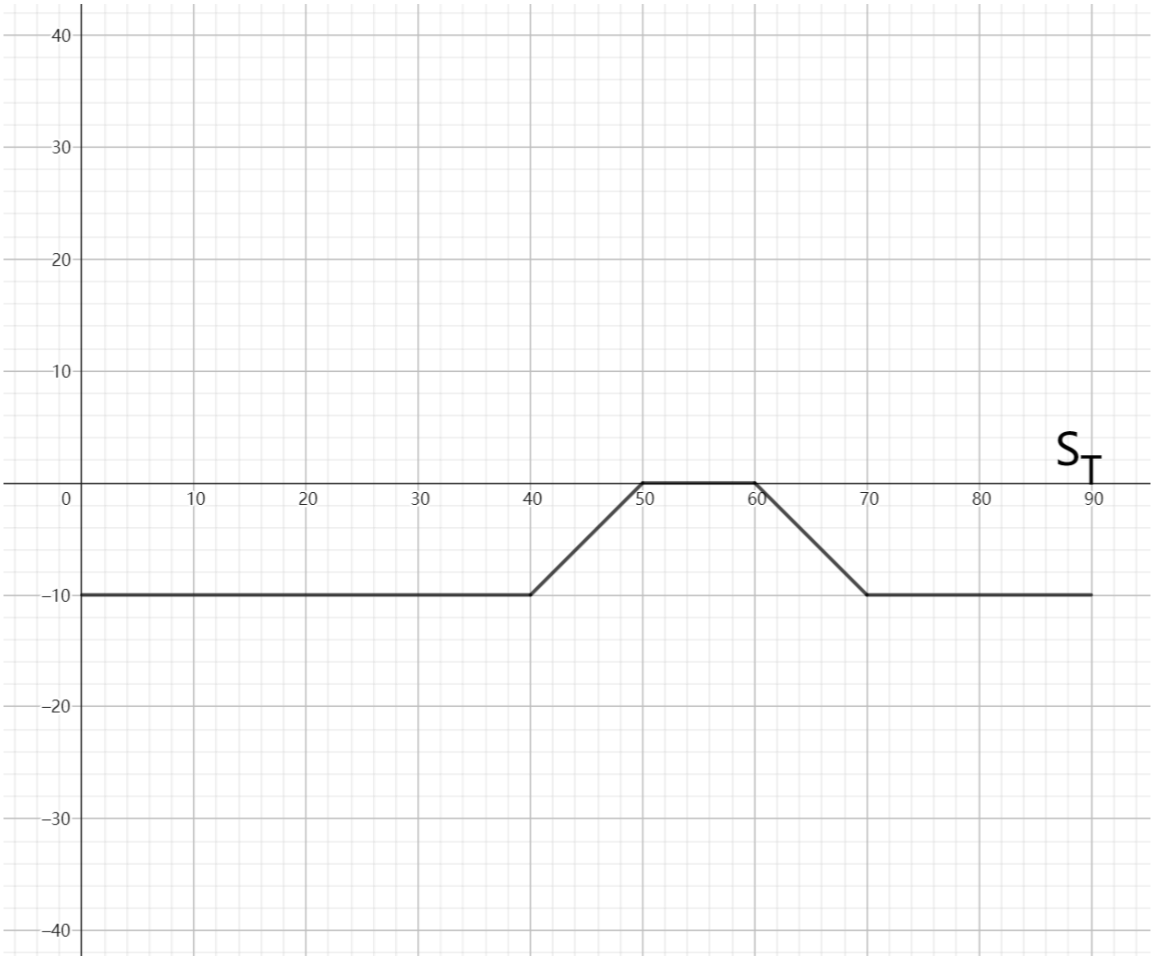
3

(a)

收益表格

S_T	**买入看跌期权(K=$40)**	**卖出看跌期权(K=$50)**	**卖出看涨期权(K=$60)**	**买入看涨期权(K=$70)**	**总收益**
$S_T < 40$	$40 - S_T$	$-(50 - S_T)$	0	0	-10
$40 \leq S_T < 50$	0	$S_T - 50$	0	0	$S_T - 50$
$50 \leq S_T < 60$	0	0	0	0	0
$60 \leq S_T < 70$	0	0	$60 - S_T$	0	$60 - S_T$
$S_T \geq 70$	0	0	$60 - S_T$	$S_T - 70$	-10

收益图



在该图中，横轴表示标的资产价格 S_T，纵轴表示总收益。曲线显示了不同 S_T 下的总收益。

(b)

根据表格和图形分析：

- **最高利润**：$50 \leq S_T < 60$
- **最低利润**：$S_T < 40$ 或 $S_T \geq 70$

(c)

假设目前标的资产的价格为 55。根据收益表格，该投资方案在 S_T 处于50 和 60之间时的利润最高。因此，投资者预期标的资产的未来价格在50 和 $60 之间变动时，该投资方案是合理的。这种预期表明投资者认为标的资产的价格将保持在相对窄的区间内波动，而不会大幅上涨或下跌。

(d)

- **行权价为 40和50 的看跌期权价格**：由于行权价 50高于行权价40，且看跌期权的价格随着行权价的增加而增加，因此 $P_{50} > P_{40}$。
- **行权价为 60和70 的看涨期权价格**：由于行权价 60低于行权价70，且看涨期权的价格随着行权价的增加而减少，因此 $C_{60} > C_{70}$。

4

(a) 计算看涨期权的价格

首先，我们需要计算6个月后的期权价格，然后推导到当前价格。

1. 计算12个月后各节点的期权价格

看涨期权行权价 $K = 97$。

- $S_{++} = 121$，行权价为 97，收益为 $\max(121 - 97, 0) = 24$。
- $S_{+-} = 100$，行权价为 97，收益为 $\max(100 - 97, 0) = 3$。
- $S_{--} = 81$，行权价为 97，收益为 $\max(81 - 97, 0) = 0$。

2. 计算6个月后各节点的期权价格

假设6个月后的价格是 $S_+ = 110$ 和 $S_- = 90$。

期权价格 C_+ 和 C_- 可以通过折现计算得到：

$$\Delta H = \frac{C^{++} - C^{+-}}{S^{++} - S^{+-}} = 1$$

构建投资组合:

	$S_T = 121$	$S_T = 100$
write 1 call option	-24	-3
buy 1 stock	121	100
total	97	97

根据一价定律:

$$110 - C^+ = \frac{97}{1.04^{0.5}} \Rightarrow C^+ = 14.884$$

同理可得,$C^- = 1.669$

3. 计算当前期权价格

$$\Delta H = \frac{C^+ - C^-}{S^+ - S^-} = 0.661$$

构建投资组合:

	$S_T = 110$	$S_T = 90$
write 1 call option	-14.884	-1.669
buy 0.661 stock	72.678	59.464
total	57.795	57.795

因此

$$C_0 = 0.661 \times 100 - \frac{57.795}{1.04^{0.5}} = 9.399$$

(b) 计算看跌期权的价格

使用期权平价公式 $S_0 + P_0 = C_0 + \frac{X}{(1+r_f)^T}$，求看跌期权价格。

已知:

- $C = 9.399$
- $S_0 = 100$
- $X = 97$
- $r = 0.04$
- $T = 1$ 年

所以,看跌期权的当前价格约为 2.668

(c) 计算考虑股利后看涨期权的价格

首先，我们需要计算6个月后的期权价格，然后推导到当前价格。

1. 计算12个月后各节点的期权价格

看涨期权行权价 $K = 97$。

- $S_{++} = 121$，行权价为 97，收益为 $\max(121 - 97, 0) = 24$。
- $S_{+-} = 100$，行权价为 97，收益为 $\max(100 - 97, 0) = 3$。
- $S_{--} = 81$，行权价为 97，收益为 $\max(81 - 97, 0) = 0$。

2. 计算6个月后各节点的期权价格

假设6个月后的价格是 $S_+ = 110$ 和 $S_- = 90$。

期权价格 C_+ 和 C_- 可以通过折现计算得到:

$$\Delta H = \frac{C^{++} - C^{+-}}{S^{++} - S^{+-}} = 1$$

构建投资组合:

	$S_T = 121$	$S_T = 100$
write 1 call option	-24	-3
buy 1 stock	121+2	100+2
total	99	99

根据一价定律:

$$110 - C^+ = \frac{99}{1.04^{0.5}} \Rightarrow C^+ = 12.92$$

同理可得,$C^- = 1.36$

3. 计算当前期权价格

$$C_0 = 8.12$$

(d) 计算看跌期权的价格

使用期权平价公式 $S_0 + P_0 = C_0 + \frac{X}{(1+r_f)^T}$，求看跌期权价格。

已知:

- $C = 8.12$
- $S_0 = 100$
- $X = 97 + 2$
- $r = 0.04$
- $T = 1$ 年

所以,看跌期权的当前价格约为 3.31

5

(a)

- **D. 卖出看跌期权**

(b)

1.png

标的资产价格变化如上图.

由题意可以得到以下情况的最终收益:

- $C^{+}=100+i$
- $C^{-++}=C^{-+-}=100+3i$
- $C^{--+}=80$
- $C^{---}=51.2$

1.计算C^{-+}

$$\Delta H=\frac{C^{-++}-C^{-+-}}{S^{-++}-S^{-+-}}=0$$

$$S^{-+}\Delta H-C^{-+}=\frac{S^{-++}\Delta H-C^{-++}}{1+r_f}\Rightarrow C^{+-}=100+3i$$

2.计算C^{--}

$$\Delta H=\frac{C^{--+}-C^{---}}{S^{--+}-S^{---}}=1$$

$$S^{--}\Delta H-C^{--}=\frac{S^{--+}\Delta H-C^{--+}}{1+r_f}\Rightarrow C^{--}=64$$

3.计算C^{-}

$$\Delta H=\frac{C^{-+}-C^{--}}{S^{-+}-S^{--}}=1+i/12$$

$$S^{-}\Delta H-C^{-}=\frac{S^{-+}\Delta H-C^{-+}}{1+r_f}\Rightarrow C^{-}=80+4i/3$$

4.计算C_0

$$\Delta H=\frac{C^{+}-C^{-}}{S^{+}-S^{-}}=4/9-i/135$$

$$S_0\Delta H-C_0=\frac{S^{+}\Delta H-C^{+}}{1+r_f}\Rightarrow C_0=800/9+32i/27$$

由题意,$C_0=100$,从而解得$i=75/8$,也即承诺收益率为9.375%

(c) 投资机构的对冲行为对市场的影响

- 对于投资机构卖出的每份雪球资产,记一开始买入a_0份标的资产,每个时间点持有标的资产的a_i份,此时价格为$p_i,i\in[n]$,记雪球资产结算给客户的价格为C,规定$a_{-1}=a_n=0$,雪球结算时长为T.
- 投资机构收益率为:

$$U=(p_0-C-\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_{i-1})p_i)/T$$

- 下分类讨论a_{t+1}的取值
  - 若$p_{t+1}>p_t$,记$a_{t+1}>a_t$时最终收入为U^+,反之为U^-买入资产导致资产价格上涨,卖出资产导致资产价格下降.

    $$U^+-U^-=[C^--C^++\sum_{i=t+1}^{n}(a_i^--a_{i-1}^-)p_i^--(a_i^+-a_{i-1}^+)p_i^+]/T$$

    由于

    $$E[C^-/T]<E[C^+/T]$$

    $$a_{t+1}^+p_i^+-a_{t+1}^-p_i^->0$$

    因此$E(U^+)<E(U^-)$
- 所以条件(i)时应当卖出资产
- 若$p_{t+1}<p_t$,若此时未敲出,同理可得$E(U^+)>E(U^-)$,所以条件(ii)时应当买入资产
- 若已敲出,即条件(iii),有$C=p_n$,利用Abel变换,有

$$UT=-\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}(p_{i-1}+p_i)-a_np_n=\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}-1)(p_i-p_{i-1}$$

  - 由于$a_{i-1}<1$,价格越低投资机构的效用越大(损失越小),因此投资机构不断卖出资产并导致降价

条件	行为	结果
(i)	A. 卖出	C. 下跌
(ii)	B. 买入	D. 上涨
(iii)	A. 卖出	C. 下跌

(d) 通过以上分析可以看到：

情况 **(i)(ii)** 降低了标的资产的波动，情况 **(iii)** 加剧了标的资产的波动。今年年初的股灾导致各个 A 股市场指数大幅下跌，以这些指数为标的资产的雪球类似于情况 **(iii)**。

6

(a)

根据无套利定价144hgee原理，远期汇率 F_0 的计算公式为：

$$F_0 = S_0 \times \frac{(1 + r_{USD})}{(1 + r_{GBP})}$$

已知:

- 美元的一年期无风险利率 $r_{USD} = 3\%$
- 英镑的一年期无风险利率 $r_{GBP} = 8\%$
- 美元兑英镑的即期汇率 $S_0 = 1.25$ 美元/英镑

所以:

$$F_0 = 1.25 \times \frac{(1 + 0.03)}{(1 + 0.08)}$$

$$F_0 = 1.25 \times \frac{1.03}{1.08}$$

$$F_0 \approx 1.25 \times 0.9537$$

$$F_0 \approx 1.1921$$

所以，如果不存在套利机会，计算得到的远期汇率 F_0 约为 1.1921 美元/英镑。

(b)

如果远期合约在兑现时要缴纳 1% 的手续费，远期汇率的取值范围需要考虑手续费的影响。

手续费使得远期汇率的实际价格 F_0' 必须满足:

$$1 + r_{USD} > (1 + r_{GBP}) \frac{F_0(1 - 0.01)}{S_0}$$

$$1 + r_{GBP} > (1 + r_{USD}) \frac{S_0(1 - 0.01)}{F_0}$$

也即 $F_0 \in [1.280, 1.204]$

(c)

表格如下:

操作	CF_0 (\$)	CF_1 (\$)
借入1美元兑换为 $\frac{1}{S_0}$ 英镑	1	$-(1 + r_{USD}) = -1.03$

操作	CF_0 (\$)	CF_1 (\$)
借出$\frac{1}{S_0}$英镑	-1	$(1+r_{GBP})\frac{S_1}{S_0}=\frac{1.08S_1}{1.25}$
利用远期合约,兑换$(1+r_{GBP})\frac{1}{S_0}$英镑得到$(1+r_{GBP})\frac{0.99F_0}{S_0}$美元	0	$(1+r_{GBP})\frac{F_0-S_1}{S_0}=\frac{1.08}{1.25}(1.22*0.99-S_1)$
Total	0	0.0135

这种情况下，净现金流为正，所以投资者可以通过套利获得无风险收益。