

Problem Set 2

Introduction to Finance

Due Date: April 25, 2024 (Thursday), 23:59

Question 1 (10pts)

假设 Alice 负责管理一个风险资产投资组合，它的期望收益率 (expected return) 是 18%，标准差 (standard deviation) 是 28%。假设短期国库券收益率 (T-bill rate) 是 8%。

(a) Bob 选择投资 70% 于 Alice 的风险资产投资组合中，投资剩下的 30% 于无风险资产中。求 Bob 的投资组合的期望收益率 (expected return) 和收益率的标准差 (standard deviation)。(1pt)

(b) 假设 Alice 的风险资产投资组合包含了以下投资标的。它们在组合中的比例如下表所示

Stock A: 25%

Stock B: 32%

Stock C: 43%

求解这三只股票和 T-bills 在 Bob 的投资组合中的比例。(2pts)

(c) 求解 Alice 和 Bob 各自的 Sharpe ratio (S)。(1pt)

(d) 画出 Alice 管理的风险资产投资组合的资本配置线 (Capital Allocation Line, CAL)。CAL 的斜率是多少？并在图中标出 Bob 的投资组合。(2pts)

(e) 假设 Bob 选择投资比例 y 于 Alice 管理的风险资产投资组合中。Bob 希望能获得 16% 的期望收益率。

i. 计算投资比例 y (1pt)

ii. 计算 Bob 的投资组合收益率的标准差。(1pt)

(f) 假设 Bob 选择投资比例 y 于 Alice 管理的风险资产投资组合中。Bob 希望能获得尽可能高的期望收益率，同时须满足收益率的标准差不超过 18%。

i. 计算投资比例 y (1pt)

ii. 计算 Bob 获得的期望收益率。(1pt)

Question 2 (10pts)

两个资产 P 和 Q 有各自统计量: $E(r_p) = 10\%$, $\sigma_p = 10\%$, $E(r_q) = 15\%$, $\sigma_q = 25\%$ 。短期国库券的收益率 (risk-free rate) 为 5% 。假设投资者无法借钱。投资者的效用函数 (Utility Function) 为

$$U = E(r) - A\sigma^2$$

投资者可以选择将短期国库券和 P 或者 Q 混合投资, 但是只能选择 P 和 Q 中的一个。

(a) 解释为什么只有当 Q 的投资比率超过 50% 的时候, 投资者才会考虑将其和短期国库券组合投资。(可以用 standard deviation – expected return diagram 辅助解释) (3pts)

(b) 考虑一个风险偏好中性的投资者 ($A = 0$)。他会选择哪种投资方式? 其投资组合中的无风险资产比例为多少? (可以用 standard deviation – expected return diagram 辅助解释) (3pts)

(c) 考虑一个风险厌恶的投资者 ($A > 0$)。当 A 满足什么条件时, 投资者会选择 Q 而不是 P 来和短期国库券构建投资组合? (4pts)

Question 3 (10pts)

假设 Grace 有 90 万美元完全分散化 (well-diversified) 的证券投资组合, 随后她继承了价值 10 万美元的 A 公司普通股。Grace 原来持有的投资组合的期望收益率 (expected return) 是 10%, 标准差是 5%; A 公司普通股的期望收益率是 15%, 标准差是 8%。A 公司股票与原投资组合收益率的相关系数是 0.5。

(a) 假设 Grace 在持有原有投资组合的基础上, 同时持有新继承的 A 公司普通股, 请计算她目前持有的新投资组合的规模 (size), 期望收益率, 和标准差。(3pts)

假设短期国库券收益率 (T-bill rate) 是 4%。

(b) 求 Grace 新投资组合的 Sharpe ratio, 并画出该投资组合对应的资本配置线 (Capital Allocation Line, CAL)。(2pts)

假设, 市场上还存在 B 公司的股票, 其期望收益率为 15%, 标准差是 8%。

(c) Grace 认为, 如果将手中的 A 公司股票完全置换为 B 公司股票, 得到的新投资组合与持有 A 公司股票无差异。这一说法是正确的吗? 请解释你的答案。(2pts)

现在, 假设 Grace 不想持有 A 公司的股票, 想将其全部卖出, 并买入等额的短期国库券。

(d) 请计算此时 Grace 投资组合的预期收益率, 标准差和 Sharpe ratio。(3pts)

Question 4 (10pts)

假设投资者构建一个含有五只证券的投资组合。组合中每只证券的权重都相等 (equally weighted)。证券的月度超额收益率 (monthly excess return) 满足

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

其中, R_m 为 S&P 500 的月度超额收益率。已知其中的两只证券 A 和 B 的 β 为 0.8, 其他三只证券 C、D 和 E 的 β 为 1.5。每一只证券的特有风险 (idiosyncratic risk) 均为 $\sigma^2(e_i) = 0.02$, S&P 500 的风险为 $\sigma_m^2 = 0.002$ 。

- (a) 计算每一只证券收益率的方差, 并计算各自特有风险所占的百分比。(2pts)
- (b) 计算投资组合收益率的方差, 并计算其中特有风险 (idiosyncratic risk) 所占的百分比。(4pts)
- (c) 如何利用证券 A 和 C 构建一个零贝塔投资组合 (zero-beta portfolio)? 计算零贝塔投资组合收益率的方差, 以及系统性风险所占比例。(4pts)

Question 5 (10pts)

假设风险资产的收益率满足以下单因子模型 (Single Factor Model):

$$r_i = E(r_i) + \beta_i F + e_i$$

其中 F 为影响所有风险资产收益率的因子 (factor), 而 e_i 为来自公司层面冲击的影响 (firm-specific shock)。为了简化计算, 我们假设 $Var(F) = 1, Cov(F, e_i) = 0, Var(e_i) = \sigma_i^2$. 假设无风险收益率为 $r_f = 4\%$, 假设允许借钱, 也允许做空。考虑两个已经充分分散化的投资组合 (well-diversified portfolios) P 和 Q , 已知它们各自的期望收益率和贝塔值:

$$E(r_P) = 12\% \quad \beta_P = 1$$

$$E(r_Q) = 24\% \quad \beta_Q = 2$$

- (a) 构建一个零头寸投资组合 (zero net investment portfolio), 该投资组合能够确保未来收益始终为正, 并且不需要借钱。说明构建零投资组合的方案。(3pts)
- (b) 假设两个投资组合的贝塔值是准确无误的, 再假设 $E(r_P)$ 保持不变, 当投资组合 Q 的期望收益率为多少时, 市场上没有套利机会? (2pts)
- (c) 在上一问的基础上, 计算投资组合 P 与 Q 的 Sharpe ratio. (3pts)
- (d) 若有一个新投资组合 S , 其贝塔值为 β_S , 在无套利条件成立的情况下, 求其预期收益率 (用 β_S 表示)。(2pts)

Question 6 (10pts)

一个投资组合中证券的构成包括风险股票 X、股票指数基金 M 与国库券。X 与 M 的相关系数是-0.2, 这些证券的主要指标信息如下：

	预期收益率 (%)	标准差 (%)
X	16	40
M	15	20
国库券	5	0

通过构建 X 与 M 的所有可能投资机会组合，可得到最优的风险组合 P。假设 P 的构成中，X 的比重为 25%, M 的比重为 75%。

- (a) 计算最优风险组合 P 的预期收益率和标准差。(3pts)
- (b) 计算国库券与组合 P 构成的投资组合所对应的资本市场线的斜率。(3pts)
- (c) 假定投资者将 20% 的资金投资于风险组合 P，余下的资金投资于国库券，计算整个投资组合 C 中三项资产的配量权重，并计算投资组合 C 的预期收益率和标准差。(注：涉及到标准差的地方可以用开根号的形式给出，不需要计算最终结果) (4pts)