2025 年数理经济学笔记

授课: 杨佳楠老师

作者: 徐靖

组织: PKU

时间: Febuary 27, 2025

声明: 请勿用于个人学习外其他用途!

Pkuhub.cn

个人笔记, 如有谬误, 欢迎指正! 联系方式: 2200012917@stu.pku.edu.cn

目录

第 1 章 From Thick to Thin **1**

第 1 章 From Thick to Thin

笔者的一些 insights, 便于理解和记忆数理经济学的体系, 也是考前的复习提纲

期中部分

前三章 介绍了前置数学工具, 包括线性代数, 欧式空间 (的拓扑性质), 以及多元微分. 其中相对核心的有:

- 正定矩阵及其判定
- 点集拓扑, 紧性
- 拉格朗日乘数法

1. 极值与零点

- **无约束优化**: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，求 x^* 使 $f(x^*)$ 最小
- **函数组零点**: $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，求 x^* 使 $F(x^*)=0$

以上两个问题的交集在于 FOC:

$$F=\nabla f=0$$

笔记 换句话说, 优化问题求解的第一步是零点问题, 零点问题的一些特例可以还原成优化问题 (显然不是所有的方程组都是某个函数的 FOC), 假如 $F=\nabla f$, 有:

- f 的 Hessian 矩阵是 F 的 Jacobian 矩阵, 他们都是对称矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

1.1 零点求解方法

第四章 介绍了五种方法

- **Bisection**: 二分法, 适用于单变量函数, 需要函数在区间上连续, 且两端异号
- **Secant**: 割线法, 适用于单变量函数, 需要函数在区间上连续, 且两端异号, 但不需要函数可微
- **False Position**: 假位法, 适用于单变量函数, 需要函数在区间上连续, 且两端异号, 但不需要函数可微, 但比割线法更快收敛
- **Newton Raphson**: 牛顿法, 适用于单变量函数, 需要函数在区间上连续, 且两端异号, 需要函数可微, 但不需要函数二阶可微
- **Gradient Descent**: 梯度下降法, 适用于多变量函数, 需要函数在区间上连续, 且两端异号, 需要函数可微, 但不需要函数二阶可微

1.2 极值点判定

规范方法: 判断 Hessian 矩阵的正定性, 本课程用顺序主子式法[1]来判断会比较快

H_f	H_i	x^*
正定	$H_i > 0$	极小值
负定	$H_i < 0$	极大值
不定	$H_i \neq 0$, 但不属于以上两种	鞍点

实用技巧:

- 正定矩阵的特征值都是正数, 负定矩阵的特征值都是负数
- 先代入临界点排除明显非极值情况
- 结合 f 的凹凸性判断, 如果严格凸或者严格凹, 则临界点一定是极小值或者极大值

2. 无约束优化与约束优化

约束优化是第五章的内容, 即在可微函数组 $g(x) = 0$ 上求 f 的极值, 沟通二者的桥梁是拉格拉日乘数法与 **NDCQ**

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

然后 (x^*, λ^*) 是一阶条件 $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$ 的解, 我们似乎回到了无约束优化

2.1 非退化约束条件

NDCQ (非退化约束条件) 是让拉格朗日乘数法成立的条件

定理 1.1

假设 x 是 k 维向量, λ 是 m 维向量, 则 L 是 $k+m$ 维向量, 考虑

$$Dg(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

NDCQ: $\text{rank}(Dg(x^*)) = m$

- 假如 **NDCQ** 得到满足, 则 (x^*, λ^*) 可能是极值点
- 假如不满足, 即约束 g 是退化的, 此时可能仍然存在极值点, 但无法由拉格朗日乘数法得到

2.2 加边海色矩阵

加边海色矩阵是判断有约束优化问题极值点的工具:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^\top & H_f(x^*) \end{pmatrix}$$

[1]正小负大

加边后显然不正定了, 判断方法[2]也有变化:

$\bar{H}$	$H_i, i \in [2m+1, n+m]$	x^*
	$\text{sgn}H_i = (-1)^m$	极小值
	$\text{sgn}H_i = (-1)^{i-m}$	极大值
	$\text{sgn}H_i \neq 0$, 但不属于以上两种	鞍点

笔记 对加边海色矩阵的一个直观理解[3]: 假如 f 在 $g = 0$ 这个 $n - m$ 维的嵌入 $\mathbb{R}^n$ 的流形上表现出了类似正定负定的性质, 那么可以判断是极值还是鞍点, 比如我们在 3 维空间中的球面上找极值.

做题时如果从几何解释出发, 可以避免犯错

3. 内生与外生

第六章 的内容, 现在我们要探究变量间的相互影响, 实际上, 探究外生变量 (作为经济模型的输入) 对内生变量 (经济模型的输出) 的单对单的影响 (偏导数)

期末部分

[2]判断方法和完整证明参考Northwestern University 的笔记. 实际上, 课堂上只讲了 $m = 1$ 的情形, 在此情形下极小值对应主子式恒负, 极大值对应符号交替, 这样就不对称, 和无约束优化问题的海色矩阵对比起来显得不自然. 经济学中最简单的 $m = 1, n = 2$ 的情形, 自然只需看 $|\bar{H}|$ 的符号, 正大负小

[3]这个直观理解来自于 CMU 的笔记