



# 2025 年数理经济学笔记

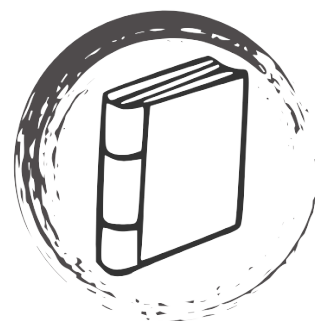
授课: 杨佳楠老师

作者: 徐靖

组织: PKU

时间: February 27, 2025

声明: 请勿用于个人学习外其他用途!



**Pkuhub.cn**

个人笔记, 如有谬误, 欢迎指正! 联系方式: 2200012917@stu.pku.edu.cn


# 目录

第 1 章 Multi-Variable Optimization with Equality Constraints
---

# 第 1 章 Multi-Variable Optimization with Equality Constraints

## Keywords

- Equality Constraints 等式约束
- Lagrange Multiplier 拉格朗日乘数法
- Nondegenerate Constraint Qualification, NDCQ
- 非退化约束条件
- Cobb-Douglas Utility Function 柯布-道格拉斯效用函数

 **笔记** 现在我们考虑有约束条件的优化问题, 这一关键是将约束视为函数方程并引入拉格朗日乘数法.

### 定义 1.1 (Optimization with Equality Constraints)

设  $f(x)$  是可微函数组,  $g(x) = 0$  是可微约束条件组, 那么我们要优化的问题可以表示为:

$$\max f(x) \quad s.t. \quad g(x) = 0 \quad (1.1)$$

设  $f$  是  $n$  维向量,  $g$  是  $m$  维向量,  $x$  是  $k$  维向量.



### 定义 1.2 (Lagrange Multiplier)

对于上述问题, 我们可以构造拉格朗日函数:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) \quad (1.2)$$

其中  $\lambda$  是拉格朗日乘数. 通过对  $L$  求导数, 我们可以得到一组方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) = 0 \quad (1.3)$$

其解  $(x^*, \lambda^*)$  就是我们要找的最优解.



### 定义 1.3 (NDCQ)

如果  $g(x)$  在  $x^*$  处可微, 且  $Dg(x^*)$  的秩为  $m$ , 那么我们称  $g(x)$  满足非退化约束条件 (NDCQ). 其中,


$$Dg(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$



### 定理 1.1 (Lagrange Multiplier Theorem)

设  $f(x)$  和  $g(x)$  都是可微函数, 且  $g(x)$  满足非退化约束条件. 那么  $(x^*, \lambda^*)$  是上述优化问题的最优解.



 **笔记** 我们需要进一步判断最大值还是最小值.

### 定义 1.4 (Borderde Hessian Matrix)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & D^2 f(x^*) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

其中  $D^2 f(x^*)$  是  $f(x)$  在  $x^*$  处的 Hessian 矩阵,  $Dg(x^*)$  是  $g(x)$  在  $x^*$  处的 Jacobian 矩阵.

本质是求 Lagrange 函数的 Hessian 矩阵, 它是  $k + m$  维的.



### 定理 1.2 (Sufficient Condition for Maximum)

设  $H$  是上述的 Borderde Hessian 矩阵, 那么如果  $H$  是正定的, 那么  $(x^*, \lambda^*)$  是最大值. 如果  $H$  是负定的, 那么  $(x^*, \lambda^*)$  是最小值.

