2025 年数理经济学笔记

授课: 杨佳楠老师

作者：徐靖

组织：PKU

时间：Febuary 27, 2025

Pkuhub.cn

个人笔记, 如有谬误, 欢迎指正! 联系方式: 2200012917@stu.pku.edu.cn

目录

第 1 章 Multi-Variable Optimization with Equality Constraints

Keywords

- Equality Constraints 等式约束
- Lagrange Multiplier 拉格朗日乘数法
- Nondegenerate Constraint Qualification, NDCQ 非退化约束条件
- Cobb-Douglas Utility Function 柯布-道格拉斯效用函数

笔记 现在我们考虑有约束条件的优化问题, 这一关键是将约束视为函数方程并引入拉格朗日乘数法.

定义 1.1 (Optimization with Equality Constraints)

设 $f(x)$ 是可微函数组, $g(x)=0$ 是可微约束条件组, 那么我们要优化的问题可以表示为:

$$\max f(x) \quad s.t. \quad g(x)=0 \tag{1.1}$$

设 f 是 n 维向量, g 是 m 维向量, x 是 k 维向量.

定义 1.2 (Lagrange Multiplier)

对于上述问题, 我们可以构造拉格朗日函数:

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda^T g(x) \tag{1.2}$$

其中 λ 是拉格朗日乘数. 通过对 L 求导数, 我们可以得到一组方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x)=0 \tag{1.3}$$

其解 (x^*,λ^*) 就是我们要找的最优解.

定义 1.3 (NDCQ)

如果 $g(x)$ 在 x^* 处可微, 且 $Dg(x^*)$ 的秩为 m, 那么我们称 $g(x)$ 满足非退化约束条件 **(NDCQ)**. 其中,

$$Dg(x^*)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

定理 1.1 (Lagrange Multiplier Theorem)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可微函数, 且 $g(x)$ 满足非退化约束条件. 那么 (x^*,λ^*) 是上述优化问题的最优解.

笔记 我们需要进一步判断最大值还是最小值.

定义 1.4 (Borderde Hessian Matrix)

$$H=\begin{pmatrix} 0 & Dg(x^*) \\ Dg(x^*)^T & D^2f(x^*) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

其中 $D^2f(x^*)$ 是 $f(x)$ 在 x^* 处的 Hessian 矩阵, $Dg(x^*)$ 是 $g(x)$ 在 x^* 处的 Jacobian 矩阵.

本质是求 Lagrange 函数的 Hessian 矩阵, 它是 $k+m$ 维的.

定理 1.2 (Sufficient Condition for Maximum)

设 H 是上述的 Borderde Hessian 矩阵, 那么如果 H 是正定的, 那么 (x^*, λ^*) 是最大值. 如果 H 是负定的, 那么 (x^*, λ^*) 是最小值. ♡