1. $P^2 v = P(\lambda v) = \lambda(Pv) = \lambda^2 v$

$P^2 v = Pv = \lambda v$

$\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda) v = 0$

由于 $v \neq 0$，因此 λ 是 $\lambda^2 - \lambda = 0$ 的解，$\lambda = 0$ 或 1 证毕

2. 由于 A 对称，根据谱定理，存在正交矩阵 Q 使得：

$Q^T A Q = diag\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n\}$

$\forall$ 非0向量 $y \in R^n$，令 $x = Qy$，则

$y^T diag\{\lambda_1, \cdots \lambda_n\} y = y^T Q^T A Q y = x^T A x > 0$ （A 正定）

~~取 $x = e_i$ 则 e_i^T~~ 取 $y = e_i$，则 $e_i^T diag\{\lambda_1, \cdots \lambda_n\} e_i = \lambda_i > 0$. 证毕

3. 对 A 作谱分解，$A = Q \Lambda Q^T$，其中 $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n\}$，$\lambda_i \geq 0$

令 $B = Q\sqrt{\Lambda} Q^T$ $\sqrt{\Lambda} = diag\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots \sqrt{\lambda_n}\}$

$B^2 = Q\sqrt{\Lambda} Q^T Q \sqrt{\Lambda} Q^T = Q \Lambda Q^T = A$

对称：$B^T = Q \sqrt{\Lambda}^T Q^T = Q\sqrt{\Lambda} Q^T = B$

半正定：$x^T B x = y^T \sqrt{A} y = \sum \sqrt{\lambda_i} y_i^2 \geq 0$

证毕

(1) 开集任意并是开:

4. $\forall x\in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, $\exists \alpha_0\in I$ s.t. $x\in A_{\alpha_0}$, A_{α_0}开,因此 $\exists\, \varepsilon>0$, s.t.

开球 $B(x,\varepsilon)\subseteq A_{\alpha_0}\subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, 因此 ~~$A_\alpha$开~~ $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ 开

开集有限交是开:

$\forall x\in \bigcap_{i=1}^n A_i$ $\exists\, \varepsilon_i>0$ s.t. $B(x,\varepsilon_i)\subseteq A_i$. 取 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_i\}>0$,

则 $B(x,\varepsilon)\subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$ 因此 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 开.

(2) 闭集任意交是闭

~~$x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$~~

设 ~~x是$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$的极限点~~ x是$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$的极限点, $\forall \varepsilon>0$, $\exists y\neq x$ s.t. ~~$B(x,\varepsilon$~~ $y\in B(x,\varepsilon)\cap_{\alpha\in I}A_\alpha$.

$\therefore \forall\alpha$, $y\in A_\alpha$. 由于A_α闭, 因此 $x\in A_\alpha$. $\Rightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$, $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$闭

闭集有限并是闭

设x是$\bigcup_{i=1}^n A_i$的极限点, $\exists\{y_k\}\in\bigcup_{i=1}^n A_i$, $y_k\to x$, 至少$\exists$一个A_i包含无穷个$\{y_k\}$中元素, $\therefore$ x是A_i的极限点, 由A_i闭知 $x\in A_i\subseteq\bigcup_{i=1}^n A_i$, 因$\bigcup_{i=1}^n A_i$闭