一、1. K是欧氏空间（$\mathbb{R}^2$）上的有界闭集（圆盘），自然是紧的.

2. f连续，K是紧集，可知f在K上必取最大值和最小值.

实际上，$f=x^2+y^2\in[0,1]$ 当且仅当 $(0,0)$ 处取0，

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 处取1

3. 注意到 $(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)\le 2 \Rightarrow x+y\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

因此 $g(x,y)=x^2+y^2-2(x+y)+2\le 1-2(-\sqrt{2})+2=3+2\sqrt{2}$

等号当且仅当 $\cancel{x=y}$ $(x,y)=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时取到.

另一方面，$x\le\sqrt{x^2+y^2}=1$，$y\le\sqrt{x^2+y^2}=1$，因此 $\forall x$，

$\cancel{g(x,y)\ge g(\sqrt{1-y^2},y)}$ $y=\sqrt{1-x^2}$ 时 $g(x,y)=\min\limits_{y} g(x,y)$

此时 $x^2+y^2=1$，$g(x,y)=3-2(x+y)\ge 3-2\sqrt{2}$

等号当且仅当 $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时取到.

$$\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}=\frac{1}{2}|1-x-y|\le\frac{1}{2}$$ $\frac{1}{2}<1$，因此 f是压缩映射

2. $f(x)=x \Rightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2=x \Rightarrow x=0,-1$，由于 $x\in[0,1]$ ∴不动点 $x=0$ 唯一.

3. 对于 $g(x)=kx(1-x)$ $\quad g(x)=x \Rightarrow kx(1-\frac{1}{k}-x)=0 \Rightarrow x=0,1-\frac{1}{k}$

由于 $k\in(0,1)$ ∴ $1-\frac{1}{k}\in(-\infty,0)$ 因此不动点 $x=0$ 唯一.

1. $\nabla\langle x,y\rangle=\left(\frac{\partial\langle x,y\rangle}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial\langle x,y\rangle}{\partial x_n}\right)=(y_1,\cdots,y_n)=y$

$\nabla\langle x,Ax\rangle=\left(\frac{\partial\langle x,Ax\rangle}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial\langle x,Ax\rangle}{\partial x_2}\right)=2Ax$ （对称矩阵）

∴ $\nabla f=\nabla\langle x,y\rangle-\frac{1}{2}\langle x,Ax\rangle=y-Ax$