2014-2015 学年数学分析 1 期中考试试题

周蜀林

2014.11.17

注: 本试题为回忆版本, 具体叙述可能与原问题略有差别.

1. 求下列极限:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})$.

   (2) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{x^x}$.

2. 设 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 是实数列, 记 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|, c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 证明若 $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均收敛.

3. 叙述单调有界收敛原理和 Bolzano-Weierstrass 定理并用 Bolzano-Weierstrass 定理证明单调有界收敛原理.

4. 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$. 证明若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 一致连续. 反之若 $f(x)$ 一致连续, 是否一定有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在?

5. 设 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的有界函数, 且一致连续. 证明存在实数 A,B, 使得对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $a_1,b_1\in(a,b)$, 使得 $a_1-b_1<\varepsilon$, 且 $f(a_1)=A, f(b_1)=B$.

6. 设定义在开区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 处处具有非负的左右导数. 证明 $f(x)$ 单调上升.

7. 设 $x(t),y(t)$ 是定义在同一区间上的关于 t 的二阶可导函数, 且 $x'(t)\neq 0$. 证明 y 关于 x 的函数 $y(x)$ 存在, 并求出其二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

8. 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶连续可导, 并且

   $$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\arcsin x}{x^3}=\frac{1}{3}$$

   试求出 $f(0),f'(0),f''(0)$.

9. 设 $f(x),g(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数,$g(0)=1$ 且 $g(x)$ 单调递增无上界. 若存在实数 A, 使得对任何 $\varepsilon>0$, 均可找到 M, 使得对任何 $x_1,x_2>M$, 均有

   $$\Big|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}-A\Big|<\varepsilon$$

   证明

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$