微分流形初步*

童嘉骏

北京大学 2023-2024 学年秋季学期 数学分析 (III)

本讲义简要介绍微分流形 (differentiable manifolds) 中的相关概念. 主要的参考资料为 [?, ?].

一言以蔽之, 微分流形指的是 “局部长得像欧氏空间且具有光滑结构的拓扑空间”. 为了理解这个说法, 我们首先介绍一些基础的拓扑学概念.

1 拓扑空间

拓扑的概念主要是为了说清楚什么是 “连续” 的映射. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 标准的欧氏拓扑是由欧氏度量诱导的: 在有了度量 (即距离) 的概念后, 就不难定义开球、邻域、以及开集, 然后就可以讨论序列收敛和映射连续的概念了. 但对于一般的集合, 我们并不能期待其上存在一个度量, 因此邻域和开集的概念并不能由其他结构诱导而来. 所以我们采取的策略是在一个集合上指定哪些子集叫做开集, 不过这种指定方式需要满足一定的条件. 这就引出了拓扑的定义.

定义 1.1 (拓扑空间)**.** 设 X 是一个非空集合. $\mathscr{O} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的一个子集族, 即对任意的 $\alpha \in \Lambda$, 都有 $U_\alpha \subset X$. 如果 $\mathscr{O}$ 满足以下三个条件, 则称它为 X 上的一个拓扑 (topology):

(i) $\varnothing \in \mathscr{O}$, $X \in \mathscr{O}$;

(ii) $\mathscr{O}$ 中任意多元素的并集仍是 $\mathscr{O}$ 中的元素;

(iii) $\mathscr{O}$ 中有限多元素的交集仍是 $\mathscr{O}$ 中的元素.

集合 X 与它的一个拓扑 $\mathscr{O}$ 一起称为一个拓扑空间, 记作 $(X, \mathscr{O})$, 也时常简写为 X. 称 $\mathscr{O}$ 中的元素为 X 上的开集.

注记 1.1. 不难发现, 上述对于 $\mathscr{O}$ 的三个条件正好对应于 $\mathbb{R}^n$ 中通常的开集的全体所具有的性质. 因此上述定义是对 $\mathbb{R}^n$ 中通常开集概念的推广, 上述三个条件也被称为开集公理.

例 1.1. 给定非空集合 X.

1. 若令 $\mathscr{O} = \{\varnothing, X\}$, 不难验证它是 X 上的一个拓扑. 这个拓扑被称为平凡拓扑.
2. 若令 $\mathscr{O} = \{X\text{的所有子集}\}$, 同样不难验证它是 X 上的一个拓扑. 这个拓扑被称为离散拓扑.

定义 1.2. 设 X 是一个拓扑空间. 称 $A \subset X$ 是 X 中的闭集, 如果 A^c 是 X 中的开集.

定义 1.3 (内点和邻域)**.** 设 X 是一个拓扑空间, $A \subset X$, $x \in A$. 如果存在开集 U 使得 $x \in U \subset A$, 那么称 x 为 A 的一个内点, 称 A 为 x 的一个邻域.

*最后更新日期：2023 年 12 月 26 日

思考题 1.1 (度量拓扑)**.** 对于度量空间 (X,d), 其度量可以诱导 X 上的一个拓扑. 首先定义 "开球": 对任意的 $x\in X$ 和 $r>0$, 令 $B_r(x):=\{y\in X: d(x,y)<r\}$. 然后定义 "开集": $A\subset X$ 被称为 X 的一个 "开集", 如果对任意的 $x\in A$, 都存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B_\varepsilon(x)\subset A$.

请证明, 这样定义的 "开集" 的全体, 记作 $\mathscr{O}$, 构成了 X 上的一个拓扑. $\mathscr{O}$ 被称为 X 上由 d 诱导的度量拓扑. 如果 $X=\mathbb{R}^n$ 而 d 是欧氏度量, 那么称这样得到的 $\mathscr{O}$ 为欧氏拓扑.

有了邻域的概念后就可以定义序列的收敛和映射的连续性了.

定义 1.4 (序列收敛)**.** 设 X 是一个拓扑空间, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ 为其中的一个序列, $x\in X$. 如果对于 x 的任意邻域 A, 都可以找到 $N>0$, 使得 $x_n\in A$ 对所有 $n>N$ 成立, 那么就称 x_n 收敛到 x, 记作 $x_n\to x$.

例 1.2. 我们继续例 1.1 的讨论. 给定非空集合 X.

1. 如果在 X 上取平凡拓扑, 那么 X 中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 都收敛, 且收敛到 X 中的任意元素. 也就是说, 这种拓扑下序列极限不具有唯一性, 与欧氏空间中点列的收敛十分不同. 事实上, 平凡拓扑将 X 中的所有元素 "捆绑" 在了一起, 它们从收敛性上讲是不可区分的, 表现得就像是一个元素一样.

2. 如果在 X 上取离散拓扑, 那么序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ 要收敛到 $x\in X$, 当且仅当存在 $N>0$ 使得 $x_n=x$ 对所有 $n>N$ 成立.

定义 1.5 (连续映射)**.** 设 X,Y 都是拓扑空间, $f:X\to Y$. 对于 $x\in X$, 如果对 Y 中 $f(x)$ 的任一邻域 V, $f^{-1}(V)$ 总是 x 的邻域, 那么就称 f 在 x 处连续. 如果 $f:X\to Y$ 在任意 $x\in X$ 都连续, 则称 f 为 X 上的连续映射.

注记 1.2. 此处 $f^{-1}(V):=\{x\in X: f(x)\in V\}$ 是指 V 在 f 下的原象. 因此上面的条件就是在说 "f 将 x 附近的点都映到了 $f(x)$ 附近".

定义 1.6 (同胚映射)**.** 如果 $f:X\to Y$ 是双射, 且 f, f^{-1} 均连续, 则称 f 是一个同胚映射, 简称同胚. 此时称拓扑空间 X 和 Y 同胚.

两个拓扑空间同胚就表明其上的拓扑结构是完全等价的, 即在讨论连续性和收敛性层面, 这两个空间没有区别.

下面介绍 Hausdorff 空间的概念.

定义 1.7 (Hausdorff 空间)**.** 设 X 是一个拓扑空间. 若 X 中任意两个不同的点都有不相交的邻域, 即对任意 $x,y\in X$, $x\neq y$, 存在开集 $U_1,U_2\subset X$, 使得 $x\in U_1$, $y\in U_2$, 且 $U_1\cap U_2=\varnothing$, 那么就称 X 是一个 Hausdorff 空间 (或称 X 满足 T_2 分离公理).

注记 1.3. T_2 分离公理 (即上述 Hausdorff 空间的条件) 是四个分离公理中最常用的一个. 它对于序列极限具有重要意义: 如果 X 是一个 Hausdorff 空间, 那么 X 中收敛序列的极限必然唯一. 这一命题的证明留给读者思考.

下面介绍拓扑基和第二可数空间的概念. 拓扑基的概念源于如下的思考: 所有开集的全体 $\mathscr{O}$ 可能比较复杂, 但有没有可能取出一部分 (可能比较简单的) 开集, 用它们可以生成所有的开集? 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 这是可行的: 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集, 那么 $U=\cup_{x\in U}B_{r_x}(x)$, 这里的 $r_x>0$ 是一个依赖于 U 以及 $x\in U$ 的半径. 换句话说, 我们可以用开球通过取并生成所有 $\mathbb{R}^n$ 欧氏拓扑中的开集.

定义 1.8. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个子集族. 定义

$$\begin{aligned}\bar{\mathscr{A}}&:=\{U\subset X: \forall x\in U, \text{ 存在 } A\in\mathscr{A}, \text{s.t. } x\in A\subset U\}\\&=\{U\subset X: U \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 中若干元素的并集}\}.\end{aligned}$$

换句话说, $\bar{\mathscr{A}}$ 是由 $\mathscr{A}$ 中集合在取并操作下生成的 X 的子集族. 请读者自行验证上面定义中的第二个等号.

定义 1.9 (拓扑基)**.** 设 $(X, \mathscr{O})$ 是一个拓扑空间, $\mathscr{A}$ 为 X 的一个子集族. 如果 $\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{O}$, 则称 $\mathscr{A}$ 为这个拓扑空间的一个拓扑基 (basis).

如果 $\mathscr{A}$ 是 $(X, \mathscr{O})$ 的一个拓扑基, 那么 $\mathscr{A}$ 中的开集就起到了上述 "用于生成一般开集的基本单元" 的作用. 显然, 拓扑基不是唯一的.

例 1.3. 设 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 赋予欧氏拓扑, 即 $\mathscr{O} := \{\mathbb{R}^n$ 中由欧氏度量定义的开集$\}$ (参见思考题 1.1). 若取 $\mathscr{A} := \{B_r(x) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, 此处 $B_r(x)$ 为开球, 则有 $\bar{\mathscr{A}} = \mathscr{O}$, 故 $\mathscr{A}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{O})$ 的一个拓扑基.

类似的结论对于一般的度量空间也成立. 请结合思考题 1.1 中的讨论自行推广.

定义 1.10 (第二可数空间)**.** 如果拓扑空间 $(X, \mathscr{O})$ 具有可数拓扑基, 则称它为第二可数 (second countable) 空间, 或称完全可分空间.

例 1.4. $\mathbb{R}^n$ 赋予欧氏拓扑后是一个第二可数空间. 注意到, 例 1.3 中构造的拓扑基不是可数的, 但我们可以找到另一组可数的拓扑基 $\tilde{\mathscr{A}} := \{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$. 请读者用定义自行验证它也是拓扑基.

2 微分流形

2.1 流形的定义

定义 2.1 (拓扑流形)**.** 设 M 是一个第二可数的 Hausdorff 空间. 若对任意 $p \in M$, 都存在 p 的一个 (开) 邻域 U, 使得 U 与 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集同胚, 则称 M 为一个 n 维的拓扑流形 (topological manifold).

换句话说, "局部上长得像欧氏空间" 的拓扑空间就称为流形. 这里的 n 是一个与 p 无关的自然数.

注记 2.1. 该定义中暂未考虑流形带边的情况. 直观地说, 流形的 "边界" 处应与半空间 $\mathbb{R}^n_+$ 的边界类似, 故需要单独定义.

既然拓扑流形 M 局部上与 $\mathbb{R}^n$ 的一个局部建立了同胚, 那就自然可以将 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标搬到 M 的这个局部上去, 即为 M 这个局部上的每个点赋予坐标.

定义 2.2 (坐标图卡和局部坐标)**.** 给定 m 维拓扑流形 M 和 $p \in M$. 按定义, 存在 p 的邻域 U 和其上的映射 $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 使得 φ 是 U 到 $\varphi(U)$ 的同胚. 称 (U, φ) 为 M 的一个坐标图卡 (coordinate chart), 或简称坐标卡. 对于任意的 $q \in U$, 定义 $x^i = (\varphi(q))^i$ $(i = 1, \cdots, n)$ 为 q 的局部坐标 (local coordinate), 这里的上标表示分量.

通常 M 上有多个不同的坐标图卡. 设 (U, φ) 和 (V, ψ) 为 M 上的两个坐标图卡, 且 $U \cap V \neq \varnothing$. 此时, 重叠部分 $U \cap V$ 中的点就会在这两个坐标图卡下被赋予两个不同的局部坐标, 而这两种不同的局部坐标间可以相互转换. 具体来说, $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ 为 $\varphi(U \cap V)$ 到 $\psi(U \cap V)$ 的同胚, 其逆为 $\varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$.

定义 2.3 (C^r 相容性)**.** 称坐标图卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 C^r 相容的 (C^r-compatible), 如果 $U \cap V = \varnothing$, 或者 $U \cap V \neq \varnothing$ 且 $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ 为 $\varphi(U \cap V)$ 到 $\psi(U \cap V)$ 的 C^r 微分同胚.

这里的 C^r 可以取 C^∞. 以上 C^r 相容定义即是说, 不同的坐标图卡如果有重叠, 那么在重叠部分上, 它们所定义的局部坐标之间需要具有 C^r 的相互转换关系.

定义 2.4 (图集与微分结构)**.** 设 M 是一个 n 维拓扑流形, 令 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为 M 上的一族坐标图卡. 如果 $\mathscr{A}$ 满足:

(i) $\cup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha = M$, 即 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 M 的一个开覆盖;

(ii) 对任意的 $\alpha,\beta\in\Lambda$, $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 与 (U_β,φ_β) 是 C^r 相容的;

则称 $\mathscr{A}$ 是 M 的一个 C^r 图集 (atlas of class C^r).

一个极大 (maximal) 的 C^r 图集 $\mathscr{A}$ 被称为 M 上的一个 C^r 微分结构 (differentiable structure). 这里称图集 $\mathscr{A}$ 是极大的是指, 如果 M 的一个图卡 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})$ 与 $\mathscr{A}$ 中所有的图卡都 C^r 相容, 那么必然有 $(\tilde{U},\tilde{\varphi})\in\mathscr{A}$.

定义 2.5 (微分流形)**.** 一个 m 维拓扑流形 M 上赋予一个 C^r 微分结构就被称为一个 n 维的 C^r 微分流形 (C^r-differentiable manifold). 特别地, 如果 $r=\infty$, 则可称 M 为一个光滑流形 (smooth manifold).

注记 2.2. C^r 微分结构总可以由一个 C^r 图集扩充而来. 具体来说, 假设 $\mathscr{A}$ 是一个 C^r 图集, 令 $\tilde{\mathscr{A}}$ 为与 $\mathscr{A}$ 中所有图卡都 C^r 相容的坐标图卡的全体, 那么可以证明 $\tilde{\mathscr{A}}$ 就构成了 M 的一个 C^r 微分结构, 它是由 $\mathscr{A}$ 唯一确定的. 因此只需确定一个 C^r 图集便可给定拓扑流形 M 上的一个 C^r 微分结构, 从而使之成为一个 C^r 微分流形.

下面我们只考虑 $r=\infty$ 的情形.

例 2.1. 我们来看一些光滑流形的例子.

(1) 令 $M=\mathbb{R}^n$ 并赋予欧氏拓扑. 若取 $U=M$, $\varphi=id$, 则 $\{(U,\varphi)\}$ 构成了一个图集 (由于只含有一个坐标图卡, 所以自然是 C^∞ 相容的). 因此 $\mathbb{R}^n$ 赋予了上述图集所定义的微分结构后是一个 n 维光滑流形.

(2) 取 $M=\mathbb{R}$ 并赋予欧氏拓扑. 若取 $U=M$, $\psi(x)=x^3$, 则 $\{(U,\psi)\}$ 构成了一个图集. $\mathbb{R}$ 赋予了这一图集所定义的微分结构后是一个 1 维光滑流形.

需要指出的是, 如果与前一个例子 $n=1$ 的情形比较, 那里定义的坐标图卡 (U,φ) 和本例中定义的 (U,ψ) 不是 C^1 相容的, 它们分属不同的微分结构, 因此这两个例子中定义出的是两个不同的流形.

(3) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个区域, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 是一个光滑函数. 令 $M=\{(x,f(x)) : x\in\Omega\}$, 即函数 $y=f(x)$ 的图像. 取 $U=\Omega$, 且定义 $\varphi: M\to\Omega$ 如下: 如果 $p\in M$ 可以表示为 $p=(x,y)$ $(x\in\Omega,\ y\in\mathbb{R})$, 那么 $\varphi(p)=x$. 于是 $\{(U,\varphi)\}$ 构成了一个图集, M 赋予了这一图集所定义的微分结构后是一个 n 维光滑流形.

这里对 f 正则性的要求可以降低为仅要求 f 是连续的. 直观地说, 在这种微分结构下 M 和一个平坦的 Ω 是完全一样的, 我们看不见 M 的 “上下起伏”.

(4) 上述例子中的流形都具有整体的坐标表示. 但有相当多的曲面都不具有这样的性质, 例如球面.

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}.$$

可以用 $2n$ 块坐标图卡来覆盖整个球面, 每块图卡盖住一个半球. 具体来说, 令

$$\begin{aligned} U_{2j-1} &:= \{x\in\mathbb{S}^{n-1} : x_j>0\}, \quad \varphi_{2j-1}(x) := (x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n),\\ U_{2j} &:= \{x\in\mathbb{S}^{n-1} : x_j<0\}, \quad \varphi_{2j}(x) := (x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n). \end{aligned}$$

可以证明 $\{(U_k,\varphi_k)\}_{k=1}^{2n}$ 构成了一个 C^∞ 图集, 故 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 $(n-1)$ 维光滑流形.

(5) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射, 这里 $m \leq n$. 对于 $c \in \mathbb{R}^n$, 考虑 $f^{-1}(c)$. 如果 $f^{-1}(c)$ 非空, 且对任意 $x \in f^{-1}(c)$, 都有 $\nabla f(x)$ 满秩 (即只秩为 m), 那么 $f^{-1}(c)$ 是一个 $(n-m)$ 维的光滑流形. 这可以通过在每一点 $x \in f^{-1}(c)$ 处使用隐函数定理来证明. 我们留给读者完成.

如果有了这一命题, 上一个球面的例子就变得比较简单. 这是因为如果取 $f(x) = |x|^2$, 那么 $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(1)$, 为了证明 $\mathbb{S}^{n-1}$ 是 $(n-1)$ 维光滑流形只需验证上述满秩条件即可.

(6) 考虑正交群 $O(n)$, 其中的元素 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^{\intercal} = A^{-1}$. 为了简单起见, 只考虑 $n = 3$.

设 $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$. 那么 $A \in O(3)$ 当且仅当

$$\sigma_{jk} := (A^{\intercal}A)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{如果} j = k, \\ 0, & \text{如果} j \neq k. \end{cases}$$

因此在 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 上定义向量值函数

$$f : A \mapsto (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}),$$

其中 σ_{jk} 如上定义. 于是 $O(3) = f^{-1}((1,1,1,0,0,0))$. 下面只需验证 f 满秩的条件 (留给读者尝试), 就可以利用前一例子中的结论推出 $O(3)$ 是一个 3 维光滑流形.

值得注意的是 $O(3)$ 不是一个道路连通的拓扑空间, 它有两个连通分支, 在其上的行列式取值分别为 1 和 -1. 其中, 行列式取值为 1 的连通分支正是特殊正交群 $SO(3)$.

注记 2.3. 尽管上面的例子中的流形都是一个更高维的欧氏空间中的子集, 但流形本身的定义是内蕴的, 它们不需要被 "放置" 于更高维的空间中. 事实上, 就流形本身的定义而言, 并不存在流形的 "周围空间" 或者 "外在空间" 的说法, 也不能讨论 "流形的法向量". 不过我们的确可以采用一种外在的观点将流形 "放置" 于更高维的欧氏空间中来研究和计算, 这就涉及流形的浸入 (immersion)、嵌入 (embedding)、以及子流形 (submanifold) 等概念, 比较著名的结果有 Whitney 嵌入定理, Nash 嵌入定理等等. 篇幅所限, 这里就不加以讨论了.

2.2 光滑函数和光滑映射

定义 2.6. 设 M 是一个 n 维光滑流形, $f : M \to \mathbb{R}^d$. 取 $p \in M$, 如果存在一个包含 p 的坐标图卡 (U, φ), 使得 $f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑函数, 则称 f 在 p 处光滑.

如果 f 在 M 上每一点处都光滑, 则称 f 在 M 上光滑.

换句话说, f 的光滑性是通过它在局部坐标下的形式 $f \circ \varphi^{-1}$ 的光滑性来判断的. 这里只需要一个包含 p 的图卡就可以判断光滑性. 这是因为如果有另一个坐标图卡 (V, ψ) 也包含了 p, 那么由 (U, φ) 和 (V, ψ) 的 C^∞ 相容性可以推出 $f \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(U \cap V)$ 上也是光滑函数.

利用同样的方式可以定义流形之间的光滑映射.

定义 2.7. 设 M, N 是两个光滑流形 (可以有不同的维数), $f : M \to N$. 取 $p \in M$, 如果存在 M 上一个包含 p 的坐标图卡 (U, φ) 以及 N 上一个包含 $f(p)$ 的坐标图卡 (V, ψ), 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 $\varphi(U)$ 上的光滑函数, 那么就称 f 在 p 处光滑.

如果 f 在 M 上每一点处都光滑, 则称 f 是 M 到 N 的光滑映射.

2.3 切空间和余切空间

设 M 是一个光滑流形. 我们称光滑映射 $c:(a,b)\to M$ 为 M 上的一条光滑参数曲线. 固定 $p\in M$, 令 c 是一条 M 中穿过 p 点的光滑参数曲线, 即对于某个 $\delta>0$, $c:(-\delta,\delta)\to M$ 光滑, 且 $c(0)=p$. 记这样曲线的全体为 Γ_p.

定义 2.8. 对于曲线 $c_1,c_2\in\Gamma_p$, 如果对于任意定义在 p 的某个邻域上的光滑实值函数 f 都有 $(f\circ c_1)'(0)=(f\circ c_2)'(0)$, 就称 c_1 与 c_2 相切.

注记 2.4. 如果考虑 $M=\mathbb{R}^n$ 的情形, 那么 $(f\circ c_j)'(0)=\nabla f(p)\cdot c_j'(0)$. 由 f 的任意性可知曲线 c_1 与 c_2 相切等价于 $c_1'(0)=c_2'(0)$. 所以这里的相切概念是 $\mathbb{R}^n$ 中通常的曲线速度向量相等的推广. 由此也可以看出, 两曲线相切不仅需要 “切方向” 一致, 而且在两曲线各自的参数化下, 点沿着曲线移动的 “速度大小” 也需要一致.

命题 2.1. 在 p 处的相切关系是 Γ_p 上的一个等价关系 $\sim$.

这不难通过验证等价关系的三个要件来证明, 即自反性、对称性和传递性. 我们留给读者完成.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 在同一点处具有相同速度向量的曲线被认为具有相同的切向量, 这就引出了一般切向量的定义.

定义 2.9 (切向量和切空间)**.** 设 M 是一个 n 维光滑流形. 给定 $p\in M$. p 处的一个切向量 (tangent vector) 是指 Γ_p 在上述等价关系 $\sim$ 下的一个等价类, 一般用 v_p 或者 v 表示. 如果需要特指曲线 c 所在的等价类, 则可用 $[c]$ 或 $c'(0)$ 或 $\dot{c}(0)$ 来表示.

p 处的全体切向量的集合记为 T_pM, 即 $T_pM=\Gamma_p/\sim$, 它被称为 M 在 p 处的切空间 (tangent space).

尽管流形并非放置在一个高维欧氏空间中, 因而我们不能将曲线的 “切方向” 可视化为我们熟悉的欧氏空间中的向量, 但以上定义的曲线等价类事实上就对应于曲线的 “切方向”. 下面的定理表明, 这些 “切方向” 构成的切空间具有线性结构, 就像我们熟悉的 $\mathbb{R}^3$ 中曲面的切平面那样.

定理 2.1. 切空间 T_pM 是一个 n 维线性空间.

证明. 证明的大致思路如下: 由于 M 的局部已经和 $\mathbb{R}^n$ 中的一块开集建立了联系, 我们自然希望将 $\mathbb{R}^n$ 的切空间所具有的线性结构通过坐标图卡转移到 T_pM 上, 不过也需要论证这种线性结构和局部坐标的选取无关.

任取一个包含 p 的图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$. 对任意的 $w\in\mathbb{R}^n$ (我们最终会意识到这个 w 事实上是 $\mathbb{R}^n$ 在 $\varphi_\alpha(p)$ 处的一个切向量), 定义 M 上的一条参数曲线

$$\gamma_w:\, t\mapsto\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(p)+tw\big). \tag{1}$$

这至少对充分接近于 0 的 t 都可以良好定义. 然后定义 $b_\alpha:\mathbb{R}^n\to T_pM$

$$b_\alpha:\, w\mapsto[\gamma_w]. \tag{2}$$

(1) 我们想要证明 b_α 是 $\mathbb{R}^n$ 到 T_pM 的双射.

为证明单射, 考虑 $w,\tilde{w}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $[\gamma_w]=[\gamma_{\tilde{w}}]$. 此时, 对任意定义在 p 的某个邻域上的光滑函数 f, 都有 $(f\circ\gamma_w)'(0)=(f\circ\gamma_{\tilde{w}})'(0)$. 由 γ_w 和 $\gamma_{\tilde{w}}$ 的定义, 这意味着

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\big[f\circ\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(p)+tw\big)\big]=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\big[f\circ\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(p)+t\tilde{w}\big)\big].$$

利用链式法则计算左右得

$$\nabla[f\circ\varphi_\alpha^{-1}]|_{\varphi_\alpha(p)}\cdot w=\nabla[f\circ\varphi_\alpha^{-1}]|_{\varphi_\alpha(p)}\cdot\tilde{w}.$$

由于此式对任意的光滑函数 f 成立, 特别地可取 f 为坐标函数的各个分量, 即 φ_α^j $(j=1,\cdots,n)$, 由此可推出 $w=\tilde{w}$.

为证明满射, 取 $[c]\in T_pM$, 设 $c:(-\delta,\delta)\to M$. 令 $w:=(\varphi_\alpha\circ c)'(0)$, 希望证明 $[c]=[\gamma_w]$. 事实上, 对于任意定义在 p 的某个邻域上的光滑函数 f,

$$\begin{aligned}(f\circ\gamma_w)'(0)=&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\big[f\circ\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(p)+tw\big)\big]=\nabla[f\circ\varphi_\alpha^{-1}]|_{\varphi_\alpha(p)}\cdot w\\ &=\nabla[f\circ\varphi_\alpha^{-1}]|_{\varphi_\alpha(p)}\cdot(\varphi_\alpha\circ c)'(0)\\ &=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\big[f\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ c\big]=(f\circ c)'(0).\end{aligned}$$

因此 $[c]=[\gamma_w]=b_\alpha(w)$. 这样就证明了 b_α 是满射.

(2) 进一步断言不同坐标图卡所定义的映射 b_α 之间具有线性相容性: 对任意两个包含 p 的图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β), 对任意的 $w\in\mathbb{R}^n$,

$$b_\beta^{-1}\circ b_\alpha(w)=\nabla(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(p)}w,$$

故 $b_\beta^{-1}\circ b_\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性同胚. 上式右端表示矩阵 $\nabla(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(p)}$ 和向量 w 的乘法.

上式的证明如下. 由前一步的推导知, $b_\beta^{-1}([c])=(\varphi_\beta\circ c)'(0)$. 因此对任意的 $w\in\mathbb{R}^n$, 由于 $b_\alpha(w)=[\gamma_w]$ 由上面 (1) 和 (2) 式用图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 定义,

$$b_\beta^{-1}\circ b_\alpha(w)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\varphi_\beta\circ\gamma_w)=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\big[\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\big(\varphi_\alpha(p)+tw\big)\big]=\nabla(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|_{\varphi_\alpha(p)}w.$$

(3) 这样就可以进一步在 T_pM 上定义出线性结构.

任取 $v_1,v_2\in T_pM$, 定义 T_pM 上的加法

$$v_1+v_2:=b_\alpha\big(b_\alpha^{-1}(v_1)+b_\alpha^{-1}(v_2)\big)$$

我们验证这一式子的右端与图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的选取无关, 具体来说, 如果 (U_β,φ_β) 是包含 p 的另一图卡, 那么

$$\begin{aligned}b_\alpha\big(b_\alpha^{-1}(v_1)+b_\alpha^{-1}(v_2)\big)&=b_\beta\circ(b_\beta^{-1}\circ b_\alpha)\big(b_\alpha^{-1}(v_1)+b_\alpha^{-1}(v_2)\big)\\ &=b_\beta\big[b_\beta^{-1}\circ b_\alpha\circ b_\alpha^{-1}(v_1)+b_\beta^{-1}\circ b_\alpha\circ b_\alpha^{-1}(v_2)\big]\\ &=b_\beta\big(b_\beta^{-1}(v_1)+b_\beta^{-1}(v_2)\big).\end{aligned}$$

其中第二个等号使用了 $b_\beta^{-1}\circ b_\alpha$ 的线性性. 同理对任意 $a\in\mathbb{R}$ 定义 T_pM 上的数乘

$$av_1:=b_\alpha\big(ab_\alpha^{-1}(v_1)\big).$$

同理可以证明右端与图卡选取无关

$$b_\alpha\big(ab_\alpha^{-1}(v_1)\big)=b_\beta\circ b_\beta^{-1}\circ b_\alpha\big(ab_\alpha^{-1}(v_1)\big)=b_\beta\big[ab_\beta^{-1}\circ b_\alpha\big(b_\alpha^{-1}(v_1)\big)\big]=b_\beta\big(ab_\beta^{-1}(v_1)\big).$$

进一步可以验证线性空间定义中的其他条件, 从而证明 T_pM 是一个线性空间, 且维数为 n. 我们将细节留给读者补全.

□

注记 2.5 (切空间的自然基底). 利用局部坐标我们可以定义线性空间 T_pM 的一组自然的基. 设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 是一个包含 p 的坐标图卡, 由它可定义 b_α. 由于 $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\{e_j\}_{j=1}^n$, 其中 $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 是仅有第 j 个分量为 1 的向量, 由以上的证明可知 $\{b_\alpha(e_j)\}_{j=1}^n$ 构成了 T_pM 的一组基. 我们引入记号

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p := b_\alpha(e_j) \quad (j = 1, \cdots, n).$$

$\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\}_{j=1}^n$ 被称为 T_pM 在由 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 给出的局部坐标下的一组自然基底 (natural basis). 不同的局部坐标会定义出不同的 T_pM 的自然的基.

请注意这里的 $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ 目前还只是一个记号, 它指代的是在 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 给出的局部坐标下, M 上通过 p 的第 j 条单位速度的坐标曲线 $\gamma_{e_j} : t \mapsto \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + te_j)$ 所处的等价类. 之所以可以使用这样的记号, 下一条注记给出了解释.

注记 2.6 (切向量与求导算子). $p \in M$ 处的每个切向量都对应了 p 处的一种求 (方向) 导数的方式. 为简便起见, 设 $f : M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑实值函数 (事实上可以局部化到仅在 p 的一个邻域内光滑). 取 $v_p \in T_pM$, 不妨设 $v_p = [c]$, 于是可以定义算子

$$f \mapsto (f \circ c)'(0)$$

容易验证它只与 $[c] = v_p$ 有关, 而与在等价类中具体选哪一条曲线无关 (见定义 2.8). 我们将该算子仍记作 $v_p(\cdot)$, 即 $v_p(f) := (f \circ c)'(0)$, 其中 $[c] = v_p$.

在坐标图卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 下, 假设

$$v_p = \sum_{j=1}^n a^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p, \tag{3}$$

也即 $b_\alpha^{-1}(v_p) = (a_1, \cdots, a_n) =: w$, 故 $v_p = [\gamma_w]$. 利用定义计算 $v_p(f)$ (过程同定理 2.1 证明中的推导)

$$v_p(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma_w) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(f \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p) + tw)\right) = \sum_{j=1}^n a^j \left.\frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi_\alpha(p)}. \tag{4}$$

此式中的 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ 为局部坐标下通常的偏导数. 由此式可以看出, 算子 v_p 在局部坐标下其实是一个求方向导数的算子. 特别地, 切向量 $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ 对应的算子是

$$f \mapsto \left.\frac{\partial(f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi_\alpha(p)},$$

即将 f 拉到局部坐标中之后再沿着 x^j 方向求导. 这说明了记号 $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ 的合理性. 从此, 我们将不再区分切向量 v_p 和由它按如上方式定义的求导算子 v_p.

可以进一步证明:

(i) $v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ 与图卡选取无关;

(ii) v_p 关于自变量 $f \in C^\infty(M)$ 是线性映射;

(iii) v_p 满足 Leibniz 法则, 即 $v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$.

思考题 2.1. 证明 (3) 式中的系数 a^j 可表示为 $a^j = v_p(\varphi_\alpha^j)$. 这里 φ_α^j 是映射 φ_α 的第 j 个分量, 也可以写成 x^j. 这样 (3) 就可以写成

$$v_p = \sum_{j=1}^n v_p(x^j) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p.$$

定义 2.10 (余切向量和余切空间)**.** 切空间 T_pM 的对偶空间被称为余切空间 (cotangent space), 记作 T_p^*M, 其中的元素被称为余切向量 (cotangent vector).

由定义, 余切空间 T_p^*M 是一个 n 维线性空间, 其中的每个余切向量都是切空间上的线性函数. 一个很自然的问题是余切向量有什么更具体的含义. 我们先做如下讨论.

给定 $p \in M$ 和包含它的一个坐标图卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. 给定光滑函数 $f : U_\alpha \to \mathbb{R}$, 考虑 T_pM 上的函数

$$[c] \mapsto (f \circ c)'(0).$$

容易验证 (亦见注记 2.6) 此式右端的 $(f \circ c)'(0)$ 仅与 $[c]$ 有关, 而与曲线 c 的具体选取无关; 如果记 $v_p = [c]$, 则右端等于 $v_p(f)$. 此外, 上述表达式关于 $[c]$ 线性 (请读者自行验证, 参见定理 2.1 的证明和注记 2.6), 所以它是 T_pM 上的线性函数, 即这个式子定义了 T_p^*M 中的一个元素. 我们将它记为 $df|_p$ 或者 df, 即

$$\langle df|_p,\, v_p \rangle := (f \circ c)'(0) = v_p(f), \quad \forall\, v_p = [c] \in T_pM. \tag{5}$$

此式左边的 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 T_pM 和 T_p^*M 中元素的配对. 我们称 $df|_p$ 为 f 在 p 处的微分 (differential), 因为上述定义表明它只与函数 f 在点 p 附近的 "线性行为" 有关.

在坐标图卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 所定义的局部坐标下, 如果考虑坐标函数 φ_α 的各个分量 $x^1, \cdots, x^n$ 的微分 (注意每个 x^j 都是 U_α 上的一个函数), 则由上述定义以及 (4) 可以得到

$$\left\langle dx^j,\, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p \right\rangle = \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_p (x^j) = \frac{\partial (x^j \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^k} = \delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{如果} j = k, \\ 0, & \text{如果} j \neq k. \end{cases}$$

由于注记 2.5 说明了

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \ \text{为切空间}\ T_pM\ \text{的一组自然基底},$$

那么上述推导就告诉我们

$$dx^1|_p, \cdots, dx^n|_p\ \text{为余切空间}\ T_p^*M\ \text{的一组与之对偶的基}.$$

思考题 2.2. 设 f 是一个在 $p \in M$ 附近光滑的函数, 证明:

$$df|_p = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^j}\right|_{\varphi_\alpha(p)} dx^j|_p$$

这里的 $df|_p$ 由 (5) 定义.

(本讲义未完待续)

参考文献

[1] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义（第二版）. 北京大学出版社, 2001.

[2] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry.* American Mathematical Society, 2009.