

20240911作业

1. 确定极限是否存在, 若存在则求出极限值: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \ln(x^2 + y^2)$.
2. 确定极限是否存在, 若存在则求出极限值: $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x| + |y|}\right)^{\frac{x^2}{|x| + |y|}}$.
3. 确定极限是否存在, 若存在则求出极限值: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{x+y}$.
4. 确定极限是否存在, 若存在则求出极限值: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + z^2}$.
5. 试构造二元函数 $f(x, y)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, 使得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, K$, 但是 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 不存在, 其中 $K \in \mathbb{Z}^+$ 是确定的数.
6. 设函数 $f(x, y)$ 在 \mathbb{R}^2 内除两直线 $x = a, y = b$ 外处处有定义, 并且满足:
 - (a) $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = g(x)$ 对 $\forall x \neq a$ 存在; (b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = h(y)$ 一致存在, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $|f(x, y) - h(y)| < \varepsilon, \forall (x, y) \in \{(x, y) \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.
 证明: (1) $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} h(y) = c$; (2) $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$;
 (3) $\lim_{E \ni (x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = c$, 其中 $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x = a \text{ 或 } y = b\}$.