

满分 100 分，时间 110 分钟。

1. (18 分) 叙述序列极限与下极限的定义，并举例说明他们的差异.

2. (15 分) 证明 $\left\{\left[1+(-1)^n\right]^n\right\}$ 无界但非无穷大.

3. (15 分) 判断 $\{n \sin n\}$, $\{\sin n\}$, $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时极限是否存在.

4. (12 分) 序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

5. (10 分) 用有限覆盖定理证明确界原理.

6. (10 分) 任意序列是否一定存在广义收敛的单调子列?

7. (10 分) p 为无理数, 序列 $\{x_n = np - [np]\}$, 求集合 $A = \{a \mid a \text{ 为 } x_n \text{ 某个子列的极限}\}$.

8. (10 分) 有界序列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 和实数 $a \geq 1$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} + ax_k) = 0$, 则 $\{x_n\}$ 是否收敛?