

2015-2016 学年第二学期数学分析 II 期中考试（李伟固）

April 25, 2016

一、(15 分) 求下列积分:

(1) $\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx (m, n \in \mathbb{N}^*)$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx$; (3) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

二、(15 分) 讨论下列积分和级数的敛散性和绝对收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx$; (2) $\int_0^{+\infty} \sin(x^p) dx$; (3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

三、(10 分) 求星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长.

四、(15 分) $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的非负连续函数, 求证 $\int_0^{+\infty} x f(x) dx < +\infty$ 当且仅当

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{+\infty} f(x) dx < +\infty.$$

五、(15 分) 设 $f(x) > 0$ 且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$, $g(x)$ 是一个周期为 1 的连续周期函数, 求证

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) g(\lambda x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx.$$

六、(15 分) $\{x_n\}$ 是一个单调下降正数列满足: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, 求证:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = +\infty.$$

七、(15 分) $f(0) = 0, f(1) = 1, f''(x) \leq 0, x \in [0, 1]$. 求证: $3 \int_0^1 f(x)^2 dx \geq 2 \int_0^1 f(x) dx$.