北京大学数学科学学院期中试题

2010 - 2011 **学年第二学期**

考试科目： **数学分析**　　**考试时间：** 2011 **年** 04 **月** 21 **日**

姓　　名： ________　　**学　　号：** ________

本试题共 8 **道大题，满分** 100 **分**

1. (20 分) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，证明： $f(x) \in R[a,b]$ 的充分必要条件是 $f^{+}(x), f^{-}(x) \in R[a,b]$, 其中
$$f^{\pm}(x) = \max_{x\in[a,b]}\{\pm f(x), 0\}.$$

2. (20 分) 设 $P_n(x)$ $(n \geq 1)$ 是 n 次多项式，则对任何闭区间 $[a,b]$ 有
$$\int_a^b |P_n'(x)|dx \leq 2n \max_{x\in[a,b]}\{|P_n(x)|\}.$$

3. (15 分) 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{\sin x}{x})\, dx$ 的敛散性.

4. (15 分) 讨论无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$ 的敛散性.

5. (10 分) 计算定积分 $\int_0^{\pi}(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt\ )dx$ 的值。

6. (10 分) 设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 严格单调下降趋于零，$R_n = a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots$. 证明：对任意自然数 p, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n^p$ 与级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ 有完全相同的敛散性.

7. (5 分) 计算：
$$\tan(\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{2}{n^2}).$$

8. (5 分) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上非负连续可微函数，在 $[0,1]$ 上的弧长刚好等于 $f(1)$. 证明下面的等周问题：

   (i) $\sqrt{1+f'^2(x)} - \sqrt{1-x^2} \geq xf'(x)$.

   (ii) $\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{\pi}{4}$

   (iii) 当且仅当曲线 $y = f(x)$ 是圆周 $x^2 + (y-\frac{\pi}{2})^2 = 1$ 的第一象限内的下半四分之一圆周时， (ii) 中的等号成立.