

北京大学数学科学学院试题

考试科目: 数学分析 II (实验班) 任课教师: 李伟固

考试时间: 2021 年 5 月 5 日 8:00—10:00

食用须知: 本试卷由元培学院 2020 级同学王骏澎靠记忆整理, 因此不能保证与原卷完全一致, 但可以保证与原卷没有大的出入且所有题目可做。

第一题 (15 分) 讨论下列积分和级数的收敛性和绝对收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{x}\right) dx \quad (2) \int_0^{+\infty} \sin(x^p) dx \quad (3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \ln n}{n^p}$$

第二题 (15 分):

$\{a_n\}$ 是正数列, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$, 求证: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛。

第三题 (15 分):

试构造一个发散级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 使得无穷乘积 $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + a_n)$ 收敛。

第四题 (15 分):

设 $f(x)$ 在任意有限区间上可积, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

第五题 (15 分):

设单调递增函数 $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, $f(0) > 0$ 。已知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)}$ 收敛, 求证: 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ 收敛。

第六题 (15 分):

$f \in C[0, 1]$, 求证: f 在 $[0, 1]$ 上可被整系数多项式一致逼近的充分必要条件是 $f(0), f(1)$ 均为整数。

第七题 (10 分):

设 $f(x) \in R[0, 2]$, 定义函数列 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$, $x \in [0, 1]$, 令 $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, 求证: $S_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 且 $S(x) \in C[0, 1]$ 。