北京大学数学科学学院期末试题

2011 - 2012 学年 第一学期

考试科目： 数学分析　　考试时间： 11 年 12 月 30 日

姓　名：　　学　号：

本试题共 八 道大题满分 100 分

1. (15) 求导数

   (1) $y=(1+x^2)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

   (2) $x=ln(1+t^2); y=t-arctant$ ，求 $\frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{dx^2}$;

   (3) $y=y(x)$ 由方程 $tany-xy=0$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

2. (15) 求极限

   (1)$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{tanx})$;

   (2) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[7]{x^7+x^6}-\sqrt[7]{x^7-x^6})$;

   (3) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}arctanx)^x$.

3. (15) 求不定积分

   (1) $\int x^{\frac{1}{3}}ln^2xdx$;

   (2) $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

   (3) $\int \frac{cosxdx}{\sqrt{2+cos^2x}}$.

4. (10) (1) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导且无界，证明 $f'(x)$ 的值域是一个无界区间；(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，是否 $f'(x)$ 的值域一定是一个有界区间？（说明理由）

5. (12) 证明 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}lnx$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续.

6. (15) (1) 求 $f(x)=x^2sinx$ 在 $x=1$ 处的带 Peano 余项的 Taylor 公式；(2) 求 $f^{(n)}(1), n=0,1,....$

7. (10) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 可导且 $f(a)=0, f(b)=1$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$f'(\xi)\xi^3(b^2-a^2)=2a^2b^2.$$

8. (8) 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 可微， $f'(0)=1$ 并且对于 $\forall x,y,x+y\in(-1,1)$ 满足 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 求 $f(x)$.