2024-09-09

1.

求集合

$$E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right)\middle|k=1,2,\ldots\right\}$$

的聚点.

Answer:
聚点是 $(1,0),(1,1),(1,-1)$

Proof:

注意到:

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=1$$

以及

$$\sin\frac{k\pi}{2}=-1,0,1。$$

充分性:
通过取$\sin\frac{k\pi}{2}$分别为 -1, 0 和 1 的E 的子列, 可以发现 $(1,0)$, $(1,1)$ 和 $(1,-1)$ 是集合 E 的聚点。

必要性:
对于平面上任意一点 $A=(x,y)$, 如果 $x\neq 1$ 或 $y\notin\{0,1,-1\}$, 容易发现存在邻域 $U_0(A,\delta)$, 使得 $U_0(A,\delta)\cap E=\emptyset$. 因此, 集合 E 没有其他聚点

2.

设 $\{(x_k,y_k)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个点列, 判断如下命题是否正确: 点列 $\{(x_k,y_k)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充要条件是 $\{x_ky_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中有聚点.

Answer:
不正确

Proof:
令 $x_k=0,y_k=k$,发现$\{x_k\},\{x_ky_k\}$ 存在聚点$(0,0)$, $\{y_k\}$没有聚点

3.

构造 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘 $\Delta=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内的一个点列 $\{(x_k,y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰好为单位圆周 $\delta\Delta$.

Answer:
构造的点列为$\{(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cos k,\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\sin k)\}$

Proof:
对平面上点 $A=(r_0\cos\theta_0,r_0\sin\theta_0)$ 和它的邻域 $U=\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\big||r-r_0|<\Delta r,|\theta-\theta_0|<\Delta\theta\}$,

- 将平面分成$\pi/\Delta\theta$个扇形,其中一个以θ_0为对称轴,则该点列落在不同扇形的机会均等,因此满足$|\theta-\theta_0|<\Delta\theta$的点有无穷多个,组成原点列的子列
- 由于$\lim_{k\to}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=1$,当且仅当$r_0=1$时,$\exists K\forall k>K$,使得$(x_k,y_k)\in U$

从而点 A 是该点列聚点 $\Leftrightarrow r_A=1\Leftrightarrow A\in\delta\Delta$

4.

设 $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ 是互不相交的闭集, 证明: 存在开集 O_1,O_2 使得 $A\subseteq O_1$, $B\subseteq O_2$, 且 $O_1\cap O_2=\emptyset$.

Proof:

定义距离函数：

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

和

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$$

由于 A 和 B 是闭集且它们不相交，所以对于 $x \in A$，有 $d(x, B) > 0$，对于 $x \in B$，有 $d(x, A) > 0$

定义开集 O_A 和 O_B 如下：

$$O_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$O_B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, B) < d(x, A)\}$$

由于 $d(A, B) > 0$，可以保证 $O_A \cap O_B = \emptyset$。同时，O_A 包含 A，O_B 包含 B。因此，O_A 和 O_B 是两个将 A 和 B 分开的互不相交的开集。

2024-9-11

确定极限是否存在，若存在则求出极限值

1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(x^2 + y^2)$$

Answer:

$$|x \ln(x^2 + y^2)| = |3xln(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}})| \leq |\frac{3x}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}| \leq |3\sqrt[3]{x}| \to 0$$

2

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$$

Answer:

考虑点列$\{(0,n)\}$与$\{(n,0)\}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|n|}\right)^0=1\neq e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{|n|}\right)^{|n|}$$

极限不存在

3

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$$

Answer:

考虑点列$\{(0,1/n,1/n)\}$与$\{(1/n,1/n,1/n)\}$

$$\lim_{n\to+\infty}0^{2/n}=0\neq 1=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3n}\right)^{2/n}$$

极限不存在

4

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\frac{\sin(xyz)}{x^2+z^2}$$

Answer:

考虑点列$\{(0,1,1/n)\}$与$\{(1/n,1,1/n)\}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\sin 0 = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin 1/n^2}{2/n^2}$$

极限不存在

5.

试构造二元函数 $f(x,y)$ ($x,y\in\mathbb{R}^2$)，使得

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^k)=0,\quad k=1,2,\dots,K,$$

但 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，其中 $K\in\mathbb{Z}^+$ 是确定的数。

Answer:

- 令$f(x,y)=\sin\frac{x^K}{y}$, 则对$y=x^k, k\in[K]$, 有$\lim_{x\to 0} f(x,x^k)=\lim_{x\to 0} 0 = 0$
- 考虑点列$\{(1/n, 1/n^{K+1})\}$, $\sin n$ 当$n\to+\infty$ 时没有极限,因此 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在,符合要求

6.

设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内除两直线 $x=a, y=b$ 外处处有定义，并且满足：

(a) $\lim_{y\to b} f(x,y)=g(x)$ 对 $\forall x\neq a$ 存在;

(b) $\lim_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 一致存在，即 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，使得

$$|f(x,y)-h(y)|<\epsilon,\quad \forall(x,y)\in\{(x,y)\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

证明：

(1) $\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)=\lim_{y\to b} h(y)=c$;

(2) $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to a} g(x) = c$;

(3) $\lim_{\mathbf{E}(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$，其中 $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = a \text{ 或 } y = b\}$。

Proof:

(2)

- $h(y)$ 一致存在 $\Rightarrow \forall\epsilon\exists\delta,\ s.t.\ \forall x_1,x_2 \in U_0(a,\delta), |f(x_i,y)-h(y)| < \epsilon/4. i \in [2]$
- $g(x)$ 存在 $\Rightarrow \exists y_0 \neq b,\ s.t. |f(x_i,y_0)-g(x_i)| < \epsilon/4$
- 从而, $|g(x_1)-g(x_2)| \le \sum_{i\in[2]} |f(x_i,y_0)-g(x_i)| + |f(x_i,y)-h(y)| < \epsilon$
- 由柯西收敛准则知$\lim_{x\to a} g(x)$存在,记为c

(1)

- $h(y)$ 一致存在 $\Rightarrow \forall\epsilon\exists\delta_1,\ s.t.\ \forall x \in U_0(a,\delta_1), |f(x,y)-h(y)| < \epsilon/3$
- 由(2), $\exists x_0 \in U_0(a,\delta_1), |g(x_0)-c| < \epsilon/3$
- $g(x)$ 存在 $\Rightarrow \exists\delta_2\forall y \in U_0(b,\delta_2)\ s.t. |f(x_0,y)-g(x_0)| < \epsilon/3$
- 从而, $|h(y)-c| \le |f(x_0,y)-g(x_0)| + |f(x_0,y)-h(y)| + |g(x_0)-c| < \epsilon$
- 因此$\lim_{y\to b} h(x)$存在且值为c

(3)

- 由(1), $\forall\epsilon\exists\delta_1,\ s.t.\ \forall y_{\in} U_0(b,\delta_1), |h(y)-c| < \epsilon/2$
- $h(y)$ 一致存在 $\Rightarrow \forall\epsilon\exists\delta_2,\ s.t.\ \forall x \in U_0(a,\delta_2), |f(x,y)-h(y)| < \epsilon/2$
- 从而$|f(x,y)-c| \le |h(y)-c| + |f(x,y)-h(y)| < \epsilon$
- 因此$\lim_{\mathbf{E}(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$存在且值为$c$