北京大学数学科学学院期中试题

2008 – 2009 学年第二学期

考试科目：数学分析　　考试时间：2009 年 04 月 09 日

姓　　名：________　　学　　号：________

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1. (15 分) 设 $f(x)$ 连续，证明：

$$\int_0^x \left[\int_0^t f(x)dx\right]dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$

2. (15 分) 计算星形曲线 $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$ 的周长.

3. (20 分) 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin(\frac{\sin x}{x})dx$ 的收敛性和绝对收敛性.

4. (20 分) 判断下列级数的敛散性：

   (1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

   (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$

5. (10 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 区间上的正连续函数. 证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{f(x)}dx=+\infty.$$

6. (10 分) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}\}$ 是单调递减的正项数列，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散.
   证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n e^{-\frac{a_n}{a_{n+1}}}$ 也发散.

7. (5 分) 试判断级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{[\sqrt{n}]}}$ 的敛散性.

8. (5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上黎曼可积， $0\le f(x)\le 1$, 且 $\int_0^\pi f(x)dx=1$.
   对满足上述条件的一切函数 $f(x)$, 求 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx$ 的最大值和最小值.

全卷完