速记

记号与数值

wgx体系

> 写向量一定要打箭头
> $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 表示行列式 $\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|$ 表示其绝对值

场论

- 梯度场：$\nabla f=\mathrm{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$
- 散度场：$\nabla\cdot\vec{F}=\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$
- 旋度场：$\nabla\times\vec{F}=\mathrm{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}$
- 拉普拉斯算子：$\Delta f=\nabla\cdot\nabla f=\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

常用导数

- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{arctanh}\, x)'=\frac{1}{1-x^2}$
- $(\mathrm{arcsinh}\, x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\mathrm{arccosh}\, x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

题型1：求积分

- 求累次积分
- 求线积分
  - 一类 $(\mathrm{d}s)$
    - $\mathrm{d}s=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$
  - 二类 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$
    - 平面：二维Stokes公式(Green公式)
    - 空间：三维Stokes公式
- 求面积分
  - 一类 $(\mathrm{d}\sigma)$
    - $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
  - 二类 $(\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$
    - 平面：二维Gauss公式
    - 空间：三维Gauss公式

维度	散度 (Gauss公式)	旋度 (Stokes公式) (二维情形下又称 Green公式)
二维	平面闭区域 $\sim$ 边界 $\iint_\Sigma(\mathrm{div}\,\boldsymbol{F})\mathrm{d}\sigma_{xy}=\oint_{\delta\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$	平面闭区域 $\sim$ 边界 $\iint_\Sigma(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\mathrm{d}\sigma_{xy}=\oint_{\delta\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$
三维	空间闭区域 $\sim$ 边界 $\iiint_\Omega(\mathrm{div}\,\boldsymbol{F})\mathrm{d}v=\oiint_{\delta\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$	空间双侧曲面 $\sim$ 边界 $\iint_\Sigma(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\delta\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$

- $\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)$
- $\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ or $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$
- $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$
- $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\sigma_{xy}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{bmatrix}$
- $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\begin{bmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{bmatrix}$

> 两个公式在二维实质上等价

题型2：反例

二重积分与累次积分的存在性问题

> (1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:
>
> $$D=[0,1]^2, f=\begin{cases}\frac{1}{k}, & x=x_k, y\in\mathbb{Q}, k\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$
>
> 固定 x 后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.
> (2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:
>
> $$D=[-1,1]^2, f=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q},\\ y, & \text{o.w.}\end{cases}$$
>
> (3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:
>
> $$D=[0,1]^2, f=\begin{cases}1, & x,y\text{都是既约分数且分母相等},\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

广义重积分的敛散性

> 两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:
>
> $$D=(0,1)^2, f(x,y)=\begin{cases}2^n, & x=\frac{2m-1}{2^n}<1, 0<y\le\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N},\\ 0 & o.w.\end{cases}$$
>
> $g(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$
>
> 在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:
>
> $$D=(0,1)^2, f(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1,\\ \frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1\\ 0 & x=y\end{cases}$$

单连通区域积分与路径无关的充要条件

> 全微分$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \forall(x,y)\in D$ 存在 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \forall(x,y)$, 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的 $\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 这是因为 $\arctan\frac{y}{x}$ 不能在整个环形区域上可微.

题型3 穷竭列

- def : 设 $D\subset\mathbb{R}^2$, $\forall R>0$, $D\cap\{x^2+y^2\le R^2\}$ 可求面积, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列有界可求面积闭集, 满足
  - $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D$
  - $\forall$ 有界闭集 $F\subset D, \exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $F\subset D_m$
    则称 $\{D_n\}$ 是 D 的一个**穷竭列**.
- theorem : 区域的两个穷竭列将互相套娃式包含
- def : 如果 f 在 D 上任何可求面积的有界闭子区域上可积, 则称 f 在 D 上**内闭可积**
- def : 设 f 在 D 上内闭可积, 若 $\forall\{D_n\}$ 都有 $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在唯一, 则称 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛, 并称此极限为 f 在 D 上的**广义重积分** :

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

题型4 敛散性判断

- 优先使用穷竭列
- 重积分
  - 一次积分存在 + 重积分存在 $\Rightarrow$ 二次积分存在且等于重积分

- 广义重积分
    - 重积分收敛与绝对收敛等价
    - 广义矩形上, 若两累次积分有一绝对收敛, 则二重积分收敛
    - 广义矩形上, 若两累次积分有一"绝对"发散, 则二重积分发散
- 含参变量广义积分
    - 证明
        - Cauchy 一致收敛 $\Rightarrow$ 一致收敛
        - Weiersrass 判别法 : 找一个控制函数夹住 f, 如果该函数一致收敛则 f 一致收敛
        - Dirichlet 判别法 : f 一致有界, g 关于 y 单调且 $g(x,y) \rightrightarrows 0$, 则 $\int fg\mathrm{d}y$ 一致收敛
        - Abel 判别法 : f 一致收敛, g 单调有界, 则 $\int fg\mathrm{d}y$ 一致收敛
    - 性质
        - 一致收敛 $\Rightarrow$ 绝对一致收敛
        - 广义积分一致收敛 $\Leftrightarrow$ 函数列一致收敛
        - 一致收敛 $\Rightarrow$ 连续, 可导, 可交换
        - 非负函数逐点收敛则一致收敛 (Dini定理)

题型5 算子题

- $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$
- $\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$

题型6 Γ 函数与 B 函数

函数	$\Gamma(x)$	$\mathrm{B}(x,y)$
定义	$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\ x>0$	$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,\ x>0, y>0$
性质 1	$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta$ $(t=\sin^2\theta)$
性质 2	$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$ $(t=s^2)$	$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s$ $(t=\frac{s}{1+s})$
性质 3	$\Gamma(x) \in C^\infty(0,+\infty)$	$\mathrm{B}(x,y) \in C^\infty((0,+\infty)\times(0,+\infty))$
性质 4	$\Gamma(x)$ 和 $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸	
关系	$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (累次积分转化为重积分后极坐标变换)	$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \mathrm{B}(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$

第十五章 重积分

二重积分

§ 15.1

曲顶柱体体积

§ 15.1.1

- def : 曲顶为 $z=f(x,y)$, 定义在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上, 对 D 作划分 $D=\cup_{i\in[n]}\{\Delta\sigma_i\}$. 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i, \Delta v_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$, 记 $d_i = \mathrm{diam}(\Delta\sigma_i), d=\max d_i$, 则定义:

$$V = \lim_{d\to 0}\sum_{i\in[n]} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面集合面积

§ 15.1.2

- def : 对集合 $A\subset\mathbb{R}$, A° 为内部, $\overline{A}$ 为闭包, 做间隔为 $\frac{1}{2^n}$ 的网格线划分, 内部小块之和为 Q_n^-, 包含边界和内部的小块之和为 Q_n^+, 记面积为 mQ_n^-, mQ_n^+, 若 $\lim_{n\to+\infty} mQ_n^- = \lim_{n\to+\infty} mQ_n^+$, 则称 A **可求面积**, 此极限值记为 mA

- theorem : 平面点集 A 可求面积 $\Leftrightarrow \delta A$ 面积为 0.

二重积分的定义

§ 15.1.3

- def : 若平面有界有面积集合 D 的 $\forall\Delta=\{\Delta\sigma_i\}_n, \forall(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$, 对应的 Riemann 和极限存在且唯一, 则称 f 在 D 上可积, I 为 D 上**二重积分**.

$$I=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i\in[n]}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

- theorem : 有界闭区域上可积函数必有界

> $\|\Delta\|\to 0\Rightarrow n\to+\infty$, 反之不然.

二元函数可积

§ 15.1.4

- def, 记 $M_i=\sup_{\Delta_i}f(x,y),\ m_i=\inf_{\Delta_i}f(x,y),\ \omega_i=M_i-m_i$. $\overline{S}(f,\Delta)=\sum M_i\Delta\sigma_i$ 为**达布大和**, $\underline{S}(f,\Delta)=\sum m_i\Delta\sigma_i$ 为**达布小和**

> 此处 $\sum$ 与 $\sup,\inf$ 可交换
> 对 Δ 细化, 大和不增, 小和不减
> 划分1的小和<划分2的大和

- def : **上,下积分**
- theorem : (**Darboux 定理**)

$$f(x,y)\in R(D)\Leftrightarrow\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum\omega_i\Delta\sigma_i=0$$

  - 只计算内部区域块也对.

二元可积函数类

§ 15.1.5

- theorem : $E\subset D$(有界有面积), $mE=0$, $f(x,y)\in C(D\setminus E)$, 则 $f\in R(D)$.
  - 有界闭区域上连续函数和分片连续函数可积.
  - 两可积函数的乘积可积
- theorem : $m\le f(x,y)\le M$, $\varphi(z)\in C([m,M])$, 则 $f\in R(D)\Rightarrow\varphi\circ f\in R(D)$

> 涉及到有理数稠密等的函数可积性问题, 直接构造划分用振幅解决

化二重积分为累次积分

§ 15.1.7

- 设 $f\in R(D), D=[a,b]\times[c,d]$
  - 若 $\forall x\in[a,b], I=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\ \exists$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$
    - 将 c,d 替换成在 $C([a,b])$ 的元素也成立
  - 若 $f\in C(D)$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\cdots$
  - 若 $f(x,y)=g(x)h(y)$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x\int_c^d h(y)\mathrm{d}y$
- theorem : (重积分第一中值定理) 若 $f\in C(D), g\in R(D), g\ge 0$, 则 $\exists\xi\in D$ s.t.

$$\int_D f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}v=f(\boldsymbol{\xi})\int_D g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}v$$

二重积分与累次积分的存在性问题

> (1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:
>
> $$D=[0,1]^2, f=\begin{cases}\frac{1}{k}, & x=x_k, y\in\mathbb{Q}, k\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$
>
> 固定 x 后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.
> (2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:

> $$D=[-1,1]^2, f=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q},\\ y, & \text{o.w.}\end{cases}$$
>
> (3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:
>
> $$D=[0,1]^2, f=\begin{cases}1, & x,y\text{都是既约分数且分母相等},\\ 0, & \text{o.w.}\end{cases}$$

三重积分

§ 15.2

---

n重积分

§ 15.3

- n 重积分的定义性质等不必赘述, 关注如何计算即可.

> 连续函数具备大多数好的性质

___## 变量替换
§ 15.4

二重积分的变量替换

- def : 设变量替换 $T:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$,$D_{xy}\to D_{uv}=T(D_{xy})$ 是微分同胚, 即 $T\in C^1(D_{uv}), \det J_T\neq 0$. (这导致 $T^{-1}\in C^1(D_{xy})$). 其中 D_{xy}, D_{uv} 边界可求长, 区域可求面积. 则 T 满足:
- T 把 δD_{xy} 映满边界 δD_{uv}

> $\delta\Omega$ 的正向 : 逆时针, 沿着边界走动时, 区域在左边.

- theorem : 设同胚变换 T 满足上述条件, T 的 Jacobi 行列式 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\det J_T\neq 0$, $f(x,y)\in R(D_{xy})$, 则:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma_{xy}=\iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|\mathrm{d}\sigma_{uv}$$

> 注意极坐标要挖一条缝, $D_{r\theta}=\{(r,\theta)|0\le r\le R, 0\le\theta\le 2\pi\}$, 极坐标变化隐含了一个极限过程 (穷竭列 $D^{\epsilon}_{r\theta}, D^{\epsilon}_{xy}$)

多重积分的变量替换

定理概念略

> 普遍来说定义域好看了积分会变复杂, 积分好看了定义域会变复杂. 但是出题往往会根据定义域来凑积分, 因为定义域更直观, 因此做题还是定义域变换优先, 比如变成某种长方体.### 常用坐标系的微元
> 柱面坐标系: (r,θ,z), 平面极坐标系: (r,θ)
>
> $$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}, |J|=r$$
>
> 球面坐标系: (r,θ,ϕ)
>
> $$\begin{cases}x=r\sin\phi\cos\theta\\ y=r\sin\phi\sin\theta\\ z=r\cos\phi\end{cases}, |J|=r^2\sin\phi$$
>
> 三角锥变平行多面体 : $0\le x_i, \sum x_i\le 1\Rightarrow u_i\in[0,1]$

> $$\begin{cases} x_1 = u_1(1-u_2) \\ x_2 = u_1u_2(1-u_3) \\ \dots \\ x_{n-1} = u_1u_2\dots u_{n-1}(1-u_n) \\ x_n = u_1u_2\dots u_n \end{cases}, |J| = \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{n-i}$$
>
> 积分限是什么? 先定最外层, 因为最外层是常数, 对于确定的最外层变元, 逐层确定内层变元的范围

广义重积分

§ 15.5

- def : 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $\forall R > 0, D \cap \{x^2+y^2 \le R^2\}$ 可求面积, $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列有界可求面积闭集, 满足
  - $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$
  - $\forall$ 有界闭集 $F \subset D, \exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $F \subset D_m$
    则称 $\{D_n\}$ 是 D 的一个**穷竭列**.
- theorem : 区域的两个穷竭列将互相套娃式包含
- def : 如果 f 在 D 上任何可求面积的有界闭子区域上可积, 则称 f 在 D 上**内闭可积**
- def : 设 f 在 D 上内闭可积, 若 $\forall \{D_n\}$ 都有 $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在唯一, 则称 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛, 并称此极限为 f 在 D 上的**广义重积分** :

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

- theorem : f 在 区域 $D \subset \mathbb{R}^2$上内闭可积, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \text{ 收敛} \Leftrightarrow \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma \text{ 收敛}$$

> 广义积分只有绝对收敛, 没有条件收敛. 这是因为使用了穷竭列, 不需要列中闭集是联通的, 而不是像一元函数那样使用连续递增的子区间列.
> 比如 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 用穷竭列定义发散, 取 $D_n = [0, 2k_{n-1}\pi] \cup \left(\bigcup_{k=k_{n-1}}^{k_n} [2k\pi, 2k\pi+\pi]\right)$. 这里是因为原积分条件收敛, 正部分发散, $\{k_n\}$ 可被取出.

- theorem : 设 $f(x,y) \ge 0$ 在 D 上内闭可积, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛的充要条件是存在 D 的一个穷竭列 $\{D_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 存在. 且这两者有一存在时, 二者相等
  - 若 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散, 则任意的穷竭列 $\iint_{D_n} |g(x,y)|\mathrm{d}\sigma = +\infty$

> 因为穷竭列是相互控制的
> 注意这个针对非负函数, 一般函数可能存在一个穷竭列收敛, 另一个发散的情况### 二元广义积分与累次广义积分的关系
> § 15.5.3

- theorem : f 在矩形区域 $D = [a,b] \times [c,d]$(可无限, 可暇) 内闭可积.
  - 若 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b |f(x,y)|\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 收敛且 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
  - 若 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b |f(x,y)|\mathrm{d}x, \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d |f(x,y)|\mathrm{d}y$ 中有一个 $+\infty$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 发散

> 在广义矩形区域上, 若两累次积分有一绝对收敛, 则二重积分收敛. 反之则不真. 而不广义的累次积分和二元积分没有相互决定的关系.
> 两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:
>
> $$D = (0,1)^2, f(x,y) = \begin{cases} 2^n, & x = \frac{2m-1}{2^n} < 1, 0 < y \le \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$
>
> $g(x,y) = f(x,y) + f(y,x)$
>
> 在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:
>
> $$D = (0,1)^2, f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & x = y \end{cases}$$

广义积分的变量替换

§ 15.5.4

- theorem : 对于微分同胚, $\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma_{xy}$ 和 $\iint_{D_{uv}} f(x,y)|J(u,v)|\mathrm{d}\sigma_{uv}$ 同敛散, 且收敛时二者相等

> 本质上是穷竭链的映射
> 这里极坐标变换也适用
> 二重反常积分的敛散性不仅依赖于被积函数, 还依赖于积分区域的形状
> 判断广义积分敛散性的方法: 变量替换, 比较判别法, 构造穷竭列 (都是累次积分绝对收敛)___

第十六章 曲线积分与曲面积分

基本概念

§ 16.0 这一节其实是对第七章的复习

- def : 平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$, 若 $x(t), y(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则称 L 为**连续曲线**
- def : 若 $(x(t_1), y(t_1)) \ne (x(t_2), y(t_2))$, 则称 L 为**简单曲线**
- def : 若 $(x(t_1), y(t_1)) \ne (x(t_2), y(t_2))$ 但 $(x(a), y(a)) \ne (x(b), y(b))$, 则称 L 为**简单闭曲线**

曲线弧长

- def : 记 $\sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$, 其中 M_i 是 Γ 上的分点, Δ_Γ 是分点集, 若 $\sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) < +\infty$, 则称 Γ **可求长**, 记为 $|\Gamma|$
- def : Γ 的每一个分割 $A = M_0, M_1, \cdots, M_n = B$ 对应了参数区间 $[a,b]$ 的一个分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 称 $(\Delta_\Gamma, \Delta_t)$ 为 Γ 的**分割对**
  - 连续非闭合曲线上分割对"尺度小"是一致的, 即 $\lambda(\Delta_\Gamma) \to 0 \Leftrightarrow \lambda(\Delta_t) \to 0$
- theorem : Γ 可求长的充要条件是 $x(t), y(t) \in BV[a,b]$
  - $\sup_{\forall \Delta} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty$, 记为 $f \in BV[a,b]$, f 为**有界变差函数**
  - 有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差
  - 有界变差函数有界
- 对于非闭合可求长的连续曲线(段) Γ, 弧长为:

$$|\Gamma| = \sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \lim_{\lambda_\Delta \to 0} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

- 对于可分割成至多可列个非闭合的连续曲线弧段的平面连续曲线, 定义其弧长为各段弧长之和, 也即:

$$|\Gamma| = \sum_{i=1}^n |\Gamma_i| = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

- 设 $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 \ne 0$, 则 Γ 最多时有有限个闭合点.

I型曲线积分

§ 16.1

- def : 设 Γ 是平面可求长曲线, $f(x,y)$ 在 Γ 上有定义, 若对任意分割的任意取点, $\lim_{\lambda(\Delta_\Gamma) \to 0} \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i))\Delta s_i$ 存在且唯一, 则称此极限为 $f(x,y)$ 在 Γ 上的**第一型曲线积分**, 记为 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$. 对简单闭曲线, 记为 $\oint_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$.
  - $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t \ge 0$
- theorem : Γ 是可求长简单曲线且 $f(x,y) \in C(\Gamma)$, 则 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s \exists$

$$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

- property:
  - $\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\widehat{BA}} f(x,y)\mathrm{d}s$
  - $\int_\Gamma (k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y))\mathrm{d}s = k_1 \int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s + k_2 \int_\Gamma g(x,y)\mathrm{d}s$
  - $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y)\mathrm{d}s \Leftrightarrow \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$## II型曲线积分
    § 16.2
- def : 设 Γ 是有向非闭合连续线段, A, B 分别表示起点和终点. 定义在 $\widehat{AB}$ 上的矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 连续, 若对任意分割的任意取点和 $S_n(\Delta) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\xi_i) \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i$, 极限 $\lim_{\lambda \to 0} S_n(\Delta)$ 存在, 则称此极限为 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的**第二型曲线积分**, 记作 $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 或 $\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$.

> 第二型曲线积分是有积分方向的, $\mathrm{d}s$ 与第一型曲线积分的 $\mathrm{d}s$ 不同
> 被积函数是矢量函数, 被积元是矢量, 积分结果是标量

- property :
  - $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{\widehat{BA}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$
  - $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_{\widehat{AC}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int_{\widehat{CB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$
  - 闭路积分 : $\oint_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$
  - $\left|\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right| \leqslant \int_{\Gamma} \|\boldsymbol{F}\|\mathrm{d}s$
- 若使用余弦计法 : $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z) = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$, 其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 都是 x,y,z 的连续函数, 则

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\Gamma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

- theorem : 设 Γ 是有向光滑曲线 (即 $x(t),y(t),z(t)\in C^1[a,b]$, $x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2\neq 0$), $\boldsymbol{F}(x,y,z)\in C(\Gamma)$, 则第二型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot(x'(t),y'(t),z'(t))\mathrm{d}t$$

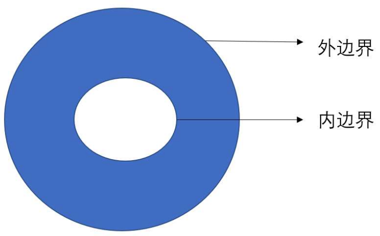
- theorem : Γ 是 D 内简单闭曲线, 则 $\forall\epsilon>0$, $\exists$ 节点在 Γ 上的闭折线 Λ, D_Γ, D_Λ 分别为曲线围成的有界闭区域. 使得.

$$\left|\oint_{\Lambda} F\cdot\mathrm{d}s - \oint_{\Gamma} F\cdot\mathrm{d}s\right| < \epsilon, ||D_\Lambda| - |D_\Gamma|| < \epsilon$$

> 规定 δD 的微元的正向是区域在左侧## 两类线积分之间的联系
> § 16.3

Green 公式

§ 16.3.1



- theorem : (Green 公式) 平面闭区域由有限条可求长简单闭曲线围成, ∂D 表示正向边界, $P,Q,\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}\in C(D)$. 则有:

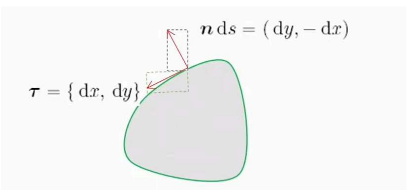
$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma$$

> 边界正向选取 : 内顺外逆
> Green 公式是联系平面积分与边界线积分的桥梁
> 非闭曲线上的线积分可以变成闭曲线上线积分再用 Green 公式

- Green 公式的向量形式 :

$$\oint_{\partial D}(P,Q)\cdot\mathrm{d}s = \oint_{\partial D}(P,Q)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \oint_{\partial D}(P,Q)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 表示正向单位切向量, $\boldsymbol{\tau} = (\cos\theta,\sin\theta) = \frac{(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}s}$



- theorem : (二维 Stokes 公式) $P,Q,\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial x}\in C(D)$. 则有:

$$\oint_{\partial D}(P\cos(\boldsymbol{n},x) + Q\cos(\boldsymbol{n},y))\mathrm{d}s = \oint_{\partial D}\{P,Q\}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s = \iint_D(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial x})\mathrm{d}\sigma$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示外法向量, 两个余弦内角是其分别与 x,y 轴正向的夹角.

> $\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}s=(\mathrm{d}y,-\mathrm{d}x)$, 所以两个公式其实就是互换 P,Q
> Green 公式描述 P,Q 在切向量上的投影, 二维 Stokes 公式描述 P,Q 在法向量上的投影

wgx物理小课堂

- 流场 $v=(P(x,y),Q(x,y))$
- 点的**旋度** : $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$
- 边界 ∂D 的**环流量** : $\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

> 边界线上环流量等于区域上各点旋度的叠加. ⇔ Green公式
> $$\oint_{\partial D}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\iint_D\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}\mathrm{d}\sigma$$

- 点的**散度** : $\mathrm{div}\ v=\nabla\cdot v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$ (这个没有方向), 单位体积单位时间生出的流体量
  - 散(san,四声)
  - **汇, 源** : 有水漏出, 有水生成的地方
- 边界的**总通量** : $\oint\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$

> 边界线上总通量等于区域上各点散度的叠加. ⇔ Gauss公式二维情形
> $$\oint_{\partial D}v\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iint_D\mathrm{div}\ v\mathrm{d}\sigma$$
>
> wgx认为这个积分用好了后面都很自然

调和函数

- def : $\Delta u=0$, 则称 u 为**调和函数**.
  - $\Delta u=\nabla\cdot\nabla u$
- theorem : (Green 第二公式) D 由有限条逐段光滑曲线围成, $u,v\in C^2(D)$, 则有

$$\iint_D\Delta u\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$$
$$\iint_D v\Delta u\mathrm{d}\sigma=-\iint_D(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}\sigma+\oint_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$$
$$\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}\sigma=\oint_{\partial D}(v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}})\mathrm{d}s$$

> $\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u$

平面曲线积分与路径无关的条件

§ 16.3.2

- theorem : $\forall A,B\in D$, $\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件是任意闭曲线 $C\subset D$ 均有 $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

> 这是区域 D 性质, 不是指定两点的性质.

- theorem : $\forall A,B\in D,P,Q\in C(D)$, $\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件是 $\exists$ 定义在 D 上的可微函数 u, 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\forall(x,y)\in D$

> 积分与路径无关的充要条件是, 在整个区域上, 被积表达式是一个全微分.

- theorem : 设 $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$, 在单连通区域上连续, 则 "...与路径无关" ⇔

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)$$

> 这个条件的充分性由 Green 公式和单联通区域的定义保证.
> 全微分$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\forall(x,y)\in D$ 存在 $\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\forall(x,y)$, 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的 $\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 这是因为 $\arctan\frac{y}{x}$ 不能在整个环形区域上可微.
> 关于被积表达式是否是全微分, 有三种方法确定, 直接积, 积单变量, 直接观察.

曲面积分

§ 16.4

曲面面积

§ 16.4.1

- theorem : 若曲面由 $z=f(x,y)$ 给定, 投影区域为 D_{xy}, 则

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\mathrm{d}\sigma_{xy}$$

- def : (参数式曲面) $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, 均$\in C^1$, 且 $A=\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|, B=\cdots$ 不同时为 0.
  - theorem : $\tau_1=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}), \tau_2=\cdots, E=|\tau_1|^2, G=|\tau_2|^2, F=|\tau_1\cdot\tau_2|$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}\sigma_{uv}=\sqrt{EG-F^2}d\sigma_{uv}$$

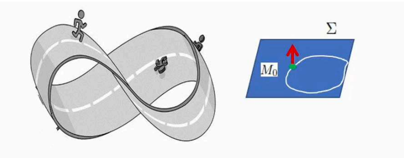
  ### I型曲面积分
  § 16.4.2
- def : 设 Σ 是分片光滑曲面, $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$, 为**I型曲面积分**.

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S&=\iint_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\mathrm{d}\sigma_{xy}\\&=\iint_{D_{uv}}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\sigma_{uv}\end{aligned}$$

II型曲面积分

§ 16.4.3

- def : 光滑曲面 Σ (连续可微函数表达的曲面) 上任取一点 M_0. 选定在 M_0 点的 Σ 的一个法向量朝向, 当 M_0 点连同法向量沿 Σ 上任意闭曲线连续滑行一周后回到初始位置时法向量的方向没变, 则称 Σ 为**双侧曲面**. 否则,称为**单侧曲面**, (即存在某点, 某闭曲线, 使得滑行一周回来后, 法向量和原来此点的法向量方向相反.)



- def : 设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 是分片光滑可求面积的双侧曲面, 若它有边界, 则它的边界是由有限条光滑曲面组成. 给定 Σ 一侧, Σ 上每点 (x,y,z) 处的该侧的单位法向量记为 $\boldsymbol{n}(x,y,z)$, 向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在 Σ 上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为 $\iint_\Sigma\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, 为**II型曲面积分**.

> $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 夹角是锐角, 则 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ 是正的, 反之是负的. 这里 $\mathrm{d}S$ 是恒正的.
> 闭曲面上积分记为 $\oiint_\Sigma\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$

> 如果把 $\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 看作向量, 记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 则 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\cos\alpha\mathrm{d}S,\cos\beta\mathrm{d}S,\cos\gamma\mathrm{d}S)$
> 已知 $|\cos\alpha|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma_{yz}$, $|\cos\beta|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma_{xz}$, $|\cos\gamma|\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma_{xy}$. 而这与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 中的 $\cos\alpha\mathrm{d}S$ 有别, 因此记 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma F(x,y,z)\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=\iint_\Sigma F(x,y,z)\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&\xlongequal{\text{与I型积分的联系}}\iint_\Sigma[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S\\&\xlongequal{\text{新形式}}\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

> wgx : 如果只是记忆公式, 而不理解这些都是二型曲面积分的形式, 则对思考问题没有多少帮助. 事实也的确如此, 微元是否取绝对值与计算中分类的数目有关.
> 这里的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与二重积分中的有本质不同, 考试中混用可能导致老王下狠手, 后者建议用 σ_{xy}

两类面积分之间的联系

- theorem : (Gauss 公式), 有界闭 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, 其边界曲面 $(\partial\Omega)$ 分片光滑, $P,Q,R,\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}\in C(Q)$, 则有

$$\oiint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

- theorem : (Stokes 公式), 设光滑双侧曲面 Σ 有界有边含于空间区域 Ω, 其边界 $\partial\Sigma$ 由有限条分段光滑曲线组成, 并且 Σ 的正侧与边界 $\partial\Sigma$ (空间闭曲线) 正向按右手法则取定, 函数 $P,Q,R\in C^1(\Omega)$, 则有

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\
=&\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

其中

$$
\oint_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)
$$

> 换一个好记的写法:
>
> $$
> \begin{aligned}
> &\oint_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\
> =&\iint_{\Sigma}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{bmatrix}\mathrm{d}S \\
> &\iint_{\Sigma}\begin{bmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{bmatrix}
> \end{aligned}
> $$
>
> ## 散度与旋度
> § 16.5

- def : 矢量算子 $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$
- def : 设流速为 $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, 则定义 $\vec{F}$ 的**旋度**为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{F}&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

> Stokes 公式的向量形式
>
> $$
> \iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oint_{L}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}
> $$

- def : 定义 $\vec{F}$ 的**散度**为

$$
\mathrm{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{F}
$$

> 注意 ∇f 和 $\nabla\cdot F$ 的区别, 前者是梯度
> Gauss 公式的向量形式
>
> $$
> \oiint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{F}\mathrm{d}v
> $$

- def : 如果区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 内的任何简单闭曲面所围的体都完全属于 Ω, 则称其为**单连通区域** (没有空腔)
- theorem : (散度定理, 空间面积分与面位无关) 对单连通区域 Ω, 任意点的散度为 $0\Leftrightarrow$ 任意闭曲面上通量为 $0\Leftrightarrow$ II型曲面上通量只与边界有关与面位无关

> 为什么 stokes 公式是对的? 因为旋通量与面位无关, 换句话说旋度的散度为 0 : $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{F})=0$

- def : 如果区域 Ω 内的任何闭曲线都可以张成(至少)一张完全属于 Ω 的曲面, 则称 Ω 为 **线单连通区域** (区域内任何简单闭曲线都可以连续收缩成一点)

> 球壳线单连通, 但不单连通. 轮胎单连通, 但不线单连通

- theorem : (空间线积分与路径无关) Ω 是线单连通区域, 两点间积分与路径无关 $\Leftrightarrow$ 存在可微函数 u 的全微分是 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\Leftrightarrow$ 旋度处处为 0.

> 路径流量与路径无关 $\Leftrightarrow$ 有势场 $\Leftrightarrow$ 无旋场

第十七章 含参变量积分

含参变量的定积分

§ 17.1

- def : 所谓**含参变量定积分**, x 是参变量

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

- lemma : 设 $f\in C(D)$, $F(x,y)=\int_c^y f(x,t)\mathrm{d}t, y\in[c,d]$, 则 $F(x,y)\in C(D)$ (二元连续函数对其中一个变量做变上限积分, 则结果是二元连续函数)
- theorem : $f\in C(D)\Rightarrow I(x)\in C([a,b])$, 且此时**对参数取极限与积分运算可交换**

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y$$

- theorem :

$$f\in C(D)\Rightarrow J(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\in C([a,b])$$

- theorem : $f\in C(D), f'_x\in C(D)\Rightarrow I(x)\in C^1([a,b])$, 且**此时对参数求导与积分运算可交换**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t=\int_c^d\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}t$$

- theorem : $f\in C(D), f'_x\in C(D), \psi,\varphi$ 在$[a,b]$可微,$c\le\psi,\varphi\le d\Rightarrow J(x)\in C^1([a,b])$, 且此时

$$J'(x)=\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f'_x(x,t)\mathrm{d}t-f(x,\psi(x))\psi'(x)+f(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

条件	含参变量积分	含参变量变限积分
$f(x,y)\in C(D)$	$I(x)\in C([a,b])$, 积分与 $\lim_{x\to x_0}$ 可交换, 两累次积分顺序可交换	$J(x)\in C([a,b])$
$f\in C(D), f'_x\in C(D)$	$I(x)\in C^1([a,b])$, 积分与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 可交换	$J(x)\in C^1([a,b])$, 求导结果另行计算

含参变量的广义积分

§ 17.2

一致收敛

§ 17.2.1

- def : 若 $\forall\epsilon>0,\exists A_0>c$ s.t. $\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\epsilon,\forall x\in[a,b],\forall A>A_0$, 则称 $\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上**一致收敛**.

> 我认为所谓的"一致"就是对于某个参数 x 的取值范围共用一个 $\epsilon-N$
> 将 $[a,b]$ 换成 $\mathbb{R}$ 的一般区间同样定义
> Cauchy 一致收敛 : 一致收敛等价于在 $[A',A'']$ 上的积分 $<\epsilon$
> Weiersrass 判别法 : 找一个控制函数夹住 f, 如果该函数一致收敛则 f 一致收敛
> Dirichlet 判别法 : f 一致有界, g 关于 y 单调且 $g(x,y)\rightrightarrows 0$, 则 $\int fg\mathrm{d}y$ 一致收敛
> Abel 判别法 : f 一致收敛, g 单调有界, 则 $\int fg\mathrm{d}y$ 一致收敛

- theorem : (Dirichlet 判别法) 若
(1) $\exists M>0$ s.t. $\left|\int_c^A f(x,y)\mathrm{d}y\right|\le M,\forall A>c,\forall x\in E$, 即关于 x 及 A **一致有界**
(2) $\forall x\in E$, $g(x,y)$ 关于 y 单调, 且 $g(x,y)\rightrightarrows 0(y\to+\infty,x\in E)$
则 $\int_c^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 对 $x\in E$ 一致收敛
- theorem : (Abel 判别法) 若
(1) $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in E$ 一致收敛

(2) $\forall x \in E, g(x,y)$ 关于 y 单调, 且 $\exists M>0$ s.t. $|g(x,y)| \le M, \forall x \in E, \forall y \in [c,+\infty)$
则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 对 $x \in E$ 一致收敛.

含参变量无穷积分的性质

§ 17.2.2

- def : 若 $\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y$ 关于 $x \in E$ 一致收敛, 则称 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x \in E$ **绝对一致收敛**.

> 一致收敛 $\Rightarrow$ 绝对一致收敛

- theorem : (将无穷积分理解为函数列的极限) $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x \in E$ 一致收敛的充分必要条件是, 对任意的满足条件 $c<t_1<t_2<\cdots<t_n<+\infty, \lim_{n\to+\infty} t_n=+\infty$ 的序列 $\{t_n\}$, 函数列 $F_n(x)=\int_c^{t_n} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x \in E$ 一致收敛
- theorem : (含参变量无穷积分的连续性) 设 f 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x \in E$ 一致收敛, 则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 E 上连续
- theorem : (积分可交换) 设 f 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x \in [a,b]$ 一致收敛, 则

$$\int_a^b \left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

- theorem : (可导) 设 $f(x,y), f_x'(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f'(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛, 且存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\int_c^{+\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y$ 收敛, 则
(1) $J(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛
(2) $J'(x)=\int_c^{+\infty} f_x'(x,y)\mathrm{d}y$

> 可导和可交换是照搬含参变量定积分的性质

- theorem : (类似 Dini 定理) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续非负, $\forall x\in[a,b], \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 收敛, 且 $I(x)\in C[a,b]$, 则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,b]$ 一致收敛

> 非负函数逐点收敛则一致收敛

- theorem : (关于两个参数的一致收敛) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[a,+\infty)$ 内闭一致收敛, 且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,+\infty)$ 内闭一致收敛, 且 $\int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ 与 $\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 有一存在, 则

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

- theorem : 设$f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,\infty)$ 上连续非负, 且 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 连续, 且 $\int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ 与 $\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 有一存在, 则两者存在且相等

Γ 函数与 B 函数

§ 17.3

Γ 函数

- def : $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, x>0$
- property :
  - $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
  - $\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty} s^{2x-1}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$ (变换$t=s^2$)
  - $\Gamma(x)\in C^\infty(0,+\infty)$
  - $\Gamma(x)$ 与 $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸

B 函数

- def : $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t, x>0, y>0$'
- property:
  - $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$
  - $\mathrm{B}(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x-1,y)$
  - $\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta$ (变换$t=\sin^2\theta$)
  - $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s$ (变换$t=\frac{s}{1+s}$)

Γ 函数与 B 函数的关系

- $\mathrm{B}(x, y)=\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- (余元公式) $\Gamma(x) \Gamma(1-x)=\mathrm{B}(x, 1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$