

北京大学数学学院期中考试试题

2013 - 2014 学年 第一学期

考试科目: 数学分析 考试时间: 13 年 11 月 10 日

姓 名: 学 号:

本试题共 八 道大题满分 100 分

1. (10') 叙述

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq -\infty$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ 不存在的柯西准则.

2. (20') 用定义证明

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1.2^n} = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

3. (10') 设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}, n = 1, 2, \dots$ 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求之.

4. (20') 求极限

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \frac{1}{x})^{\sqrt{1+x^4}}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \frac{1}{x})(\ln(1+x) - \ln x)^{-1}$.

5. (10') 用有限覆盖定理证明: 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取最大值. 默认 f 在 $[a, b]$ 上有上确界

6. (10') 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续且有界, 证明: 存在 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n+1) - f(x_n)) = 0$.

7. (10') 证明 $f(x) = x \cos \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续.

8. (10') 试构造一个定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$, 使得它的间断点集为 $[0, 1]$ 中的有理数集并且其中有无穷多个第二类间断点.