北京大学数学学院期末考试试题

2018 - 2019 学年 第一学期

考试科目：数学分析 (1)　　考试时间：19 年 01 月 17 日

姓　名：[redacted]　　学　号：[redacted]

本试题共 八 道大题满分 100 分

1. (10') 设 $x = t\cos t, y = t\sin t$. (1) 求 $t = \frac{\pi}{4}$ 时对应于曲线上的点处的切线方程；(2) 对该参数方程确定的函数 $y = f(x)$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2. (20') 求极限

   (1) $\lim_{x\to+\infty} x^2[(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) - 1]$;

   (2) $\lim_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

3. (10') 求 $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极值，拐点以及渐近线.

4. (20') 计算不定积分

   (1) $\int \frac{\sin x\cos x dx}{1-\sin^4 x}$;

   (2) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

5. (10') 求 $f(x) = x\sin(x^2-2x)$ 在 $x=1$ 处带 Peano 余项的 Taylor 公式并求 $f^{(2019)}(1)$.

6. (10') 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微且满足 $f(x) > 0$；$f'(0) = 0$ 并且对于 $\forall x, y \in (-\infty,+\infty)$ 成立 $f(x+y) = f(x)f(y)e^{2xy}$. 求 $f(x)$.

7. (10) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导并且对于 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$ 有 $1 \le |f'(x)| \le 2$. 再设 $g(x)$ 是一个具有基本周期 $T>0$ 的周期函数并且在 $(-\infty,+\infty)$ 具有连续的导函数. 试问 $f(x)g(x)$ 可否在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续？（说明理由）

8. (10) 设 $f(x) \in C^\infty(-\infty,+\infty)$ 并且对于 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$ 以及任意的正整数 n 成立 $|f^{(n)}(x)| \le n$. 再设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 有无穷多个零点. 证明 $f(x) \equiv 0, x \in (-\infty,+\infty)$.