北京大学数学学院期末考试试题

2013 - 2014 学年 第一学期

考试科目：数学分析　　考试时间：13 年 12 月 30 日

姓　名：________　　学　号：________

本试题共 八 道大题满分 100 分

1. (10') 求曲线 $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

2. (15') 求导数

   (1) $y = (x + \cos x)^{\sin\frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

   (2) 函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + \ln y = 1$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. (15') 求极限

   (1) (8') $\lim\limits_{x\to+\infty}(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}))^x$;

   (2) (7') $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x - e^{-2x^2}}{x^4}$.

4. (15') 求不定积分

   (1) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^4 x}$;

   (2) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

   (3) $\int \ln^2 x dx$.

5. (10') 设 $f(x) = \frac{x\sin(x^2+1)}{1+x^2}$, 求 $f^{(9)}(0)$.

6. (10') 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导， $f(a) \le 1$ 并且 $f(x) + f'(x) < 1, x \in (a,b)$. 证明：对于 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f(x) < 1$.

7. (15') (1) 证明 $f(x) = \frac{x^\alpha \ln x}{1+x}(0 < \alpha < 2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续， (2) 试写出一个定义在 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 使得它同时满足以下各个条件：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续，具有连续的导数且 $\lim_{x\to 0+0} f'(x) = \infty$ 及 $\overline{\lim}_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

8. (10') 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且 $f(0) = 0$ ，证明存在 $\xi \in (0,1)$ 使得以下等式成立： $2\xi^3(f(1) - f'_+(0)) = \xi f'(\xi) - f(\xi)$.