数学分析(III)期末试题

20210111

答题应标明题号写在答题纸上，写在本试题纸无效

本卷共10题, 每题10分, 卷面满分为100分

1. 设$D \subset \mathbb{R}^2$由$y=x, y=\sqrt{x}$围成, 计算$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} d\sigma$.

2. 设$f(x,y) \in R(D), D=[a,b]\times[c,d]$, 是否$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$? 为什么?

3. $\mathbb{R}^n \quad (n>2)$中区域$\Omega_n$ : $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$ 上计算$\int \cdots \int\limits_{\Omega_n} \left(\prod_{k=1}^n x_k\right) \quad dx_1 \cdots dx_n$.

4. 设有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$具有光滑边界面$\partial\Omega$, $u(x,y,z), v(x,y,z) \in C^2(\overline{\Omega})$, 证明
$\iiint\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) d\mathrm{v} = \oiint\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) dS$, 其中$\vec{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量.

5. 计算曲线积分$I_j = \int_{\Gamma_j} \left[\frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\right] dx + \left[\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right] dy$,
$j=1,2,3,4$. 其中$\Gamma_1 = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2=\frac{1}{4}\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}\right\}$,
$\Gamma_3 = \left\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}\right\}$, $\Gamma_4 = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$, 都是逆时针方向.

6. 计算$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2)^\alpha} dx$.

7. 证明: 使用穷竭列逼近法(类似多元无穷积分)定义广义积分时, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$发散.

8. 设$F(t) = \iint\limits_{\Sigma_t} (1-x^2-y^2-z^2) dS$, 其中
$\Sigma_t = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=t,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$, $t \in \mathbb{R}$. 计算$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt$.

9. 设$\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2\sin(y^2),\ x^2\sin(z^2),\ x^2+y^2\right)$, $\Sigma$是曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$位于$xoy$平面以上的部分, $\vec{n}$是$\Sigma$的向上的单位法向量. 计算$\mathrm{rot}\vec{F}$ 和积分$I = \iint\limits_\Sigma \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

10. 证明积分$I(t) = \int_1^{+\infty} e^{-t^2(x-t)^2} dx$关于$t \in [\delta, +\infty)$一致收敛, 其中$\delta > 0$.

1. 设$D\subset\mathbb{R}^2$由$y=x,y=\sqrt{x}$围成, 计算$I=\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}d\sigma$.

【解】: $I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$

$=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy=1-\cos 1+\int_0^1 yd\cos y$

$=1-\cos 1+y\cos y|_0^1-\int_0^1\cos ydy=1-\cos 1+\cos 1-\sin y|_0^1=1-\sin 1.$

2. 设$f(x,y)\in R(D),D=[a,b]\times[c,d]$, 是否$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$? 为什么?

【不一定】. 定理原文为:

设$f(x,y)\in R(D),D=[a,b]\times[c,d]$, 且$\forall x\in[a,b],I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$存在,

则$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$存在, 且$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$.

这里的条件"$\forall x\in[a,b],I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$存在"是必要的. 类似于累次极限和整体极限的关系, 累次积分与二重积分也不具有相互决定性. 即二重积分存在并不保证累次积分存在, 如 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & x=x_k,y\in\mathbb{Q},\quad k\in\mathbb{N},\\ 0, & otherwise.\end{cases}$, 则$f(x,y)\in R(D)$(可不严格证明)

且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$. 但是, 由于$f(x_k,y)=\frac{1}{k}D(y)$, $\int_0^1 f(x_k,y)dy\nexists$, 所以, $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 不能使用累次积分$\int_0^1 dx\int_0^1 dyf(x,y)$计算.

3. 在$\mathbb{R}^n$ $(n>2)$中区域$\Omega_n: 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1$上计算$\int\cdots\int\limits_{\Omega_n}\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)dx_1\cdots dx_n$.

【解】: $\int\cdots\int\limits_{\Omega_n}\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)dx_1\cdots dx_n=\int_0^1 x_ndx_n\int_0^{x_n}x_{n-1}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}x_2dx_2\int_0^{x_2}x_1dx_1$

$=\int_0^1 x_ndx_n\int_0^{x_n}x_{n-1}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}x_2\cdot\frac{x_2^2}{2}dx_2=\frac{1}{2}\int_0^1 x_ndx_n\int_0^{x_n}x_{n-1}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}x_2^3dx_2$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 x_ndx_n\int_0^{x_n}x_{n-1}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_4}x_3^5dx_3=\cdots\cdots$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdots\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 x_n^{2n-1}dx_n=\frac{1}{(2n)!!}.$

如果使用另一种顺序$\int_0^1 x_1dx_1\int_{x_1}^1 x_2dx_2\cdots\cdots\int_{x_{n-1}}^1 x_ndx_n$, 计算将非常麻烦...

4. 设有界区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$具有光滑边界面$\partial\Omega$, $u(x,y,z),v(x,y,z)\in C^2(\overline{\Omega})$, 证明
$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)d\mathrm{v}=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS,$$ 其中$\vec{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量.

【证明】:

$\nabla\cdot(u\nabla v)=\nabla u\cdot\nabla v+u\Delta v \quad\Rightarrow\quad u\Delta v=\nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla u\cdot\nabla v;$

$\nabla\cdot(v\nabla u)=\nabla v\cdot\nabla u+v\Delta u \quad\Rightarrow\quad v\Delta u=\nabla\cdot(v\nabla u)-\nabla v\cdot\nabla u.$

$$\iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)d\mathrm{v}=\iiint\limits_{\Omega}(\nabla\cdot(u\nabla v)-\nabla\cdot(v\nabla u))d\mathrm{v}=\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot(u\nabla v-v\nabla u)d\mathrm{v}$$

$$\xlongequal{\text{Gauss}}\oiint\limits_{\partial\Omega}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}dS=\oiint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)dS.$$

5. 计算曲线积分$I_j=\int_{\Gamma_j}\left[\frac{y}{(x-1)^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, $j=1,2,3,4$. 其中$\Gamma_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=\frac{1}{4}\right\}$, $\Gamma_2=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}\right\}$, $\Gamma_3=\left\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}\right\}$, $\Gamma_4=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$, 都是逆时针方向.

【解】:

$$I_j=\int_{\Gamma_j}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_j}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}.$$

前一个积分以$(0,0)$为奇点, 在不包含$(0,0)$于内部点的闭路积分为0, 在包含$(0,0)$为内部点的闭路积分为$2\pi$;

后一个积分以$(1,0)$ 为奇点, 在不包含$(1,0)$于内部点的闭路积分为0, 在包含$(1,0)$为内部点的闭路积分为$2\pi$.

$$I_1=\int_{\Gamma_1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_1}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=2\pi-0=2\pi;$$
$$I_2=\int_{\Gamma_2}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_2}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=0-2\pi=-2\pi;$$
$$I_3=\int_{\Gamma_3}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_3}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=0-0=0;$$
$$I_4=\int_{\Gamma_4}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_4}\frac{(x-1)dy-ydx}{(x-1)^2+y^2}=2\pi-2\pi=0.$$

6. 计算$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2)^\alpha}dx$.

【解】:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2)^\alpha}dx=2\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^{2\alpha}}dx\ \xlongequal{2\alpha=t}\ 2\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^t}dx\ =2\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx.$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx\ \xlongequal[x=t^{\frac{1}{\alpha}}]{x^\alpha=t}\ \int_0^{+\infty}e^{-t}\frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})=\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1).$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}dx=\lim_{\alpha\to+\infty}\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)=\Gamma(1)=1.$$ 所以, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^{2\alpha}}dx=2.$

【或者】$\int_0^{+\infty}e^{-x^{2\alpha}}dx\ \xlongequal{x^{2\alpha}=t}\ \int_0^{+\infty}e^{-t}\ \frac{1}{2\alpha}\ t^{\frac{1}{2\alpha}-1}\ dt=\frac{1}{2\alpha}\Gamma(\frac{1}{2\alpha})=\Gamma(\frac{1}{2\alpha}+1).$

【或者】对$\int_0^{+\infty}e^{-x^{2\alpha}}dx=\int_0^{1+\delta}\cdots+\int_{1+\delta}^{A}\cdots+\int_A^{+\infty}\cdots$ 直接逼近，这需要写清楚全部过程.

7. 证明: 使用穷竭列逼近法(类似多元无穷积分)定义广义积分时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$发散.

【证明】: 因为, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\frac{\sin x}{x}dx \geqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}=+\infty$,

$\Rightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\frac{\sin x}{x}dx \geqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi}=+\infty.$

又$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=A,\quad (A=\frac{\pi}{2})\quad\Rightarrow\quad \left|\int_0^{2n\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant |A|,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$

从而, $\forall n\in\mathbb{N},\quad \exists k_n\in\mathbb{N}\ \ s.t.\quad \int_0^{2n\pi}\frac{\sin x}{x}dx+\sum\limits_{k=n}^{k_n}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}\frac{\sin x}{x}dx>n.$

从而, 对穷竭列$D_n=[0,2n\pi]\bigcup\left(\bigcup\limits_{j=n}^{k_n}[2j\pi,2j\pi+\pi]\right)$ 来说, $\int_{D_n}\frac{\sin x}{x}dx>n,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{D_n}\frac{\sin x}{x}dx=+\infty$. 所以按穷竭列定义法, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$发散.

注意, 关键是所作的集合列要满足穷竭列的定义.

8. 设$F(t)=\iint\limits_{\Sigma_t}(1-x^2-y^2-z^2)dS$, 其中$\Sigma_t=\{(x,y,z)\mid x+y+z=t,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\},\quad t\in\mathbb{R}.$

计算$I=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)dt$.

【解】: $|t|>\sqrt{3}$时, $\Sigma_t=\varnothing\quad\Rightarrow\quad F(t)=0.$

$t\in[\sqrt{3},\sqrt{3}]$时, 如图, $\forall(x,y,z)\in\Sigma_t$,

$x^2+y^2+z^2=r^2+\frac{t^2}{3},\ \Sigma_t=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}\right\},\quad dS=rdrd\theta.$

所以, $F(t)=\iint\limits_{\Sigma_t}(1-x^2-y^2-z^2)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\left[1-(r^2+\frac{t^2}{3})\right]rdr$

$=2\pi\left[(1-\frac{t^2}{3})\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\quad=2\pi\left[\frac{1}{2}(1-\frac{t^2}{3})^2-\frac{1}{4}(1-\frac{t^2}{3})^2\right]$

$=\frac{\pi}{2}(1-\frac{t^2}{3})^2=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$

$I=\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)dt=I=\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}F(t)dt=2\int_0^{+\sqrt{3}}F(t)dt=\frac{\pi}{9}\int_0^{+\sqrt{3}}(9-6t^2+t^4)dt$

$=\frac{\pi}{9}\left(9\sqrt{3}-2\ \sqrt{3}^3+\frac{1}{5}\ \sqrt{3}^5\right)=\frac{\pi}{9}\left(9\sqrt{3}-6\ \sqrt{3}+\frac{9}{5}\ \sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{9}\cdot\frac{24}{5}\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{15}\pi.$

【或者】作标准正交变换$\begin{cases} u=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)\\ v=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z\\ w=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z\end{cases}$

$|J|=1,\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1\ \leftrightarrow\ u^2+v^2+w^2\leqslant 1.$

$\Sigma_t\ \leftrightarrow\ \Sigma_u:\quad v^2+w^2\leqslant 1-\frac{t^2}{3}.$ (如图)

$F(t)=\iint\limits_{\Sigma_u}\left(1-\frac{t^2}{3}-v^2-w^2\right)d\sigma_{vw}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\left[1-\frac{t^2}{3}-r^2\right]rdr=\cdots$

9. 设$\vec{F}(x,y,z)=\left(z^2\sin(y^2),\ x^2\sin(z^2),\ x^2+y^2\right)$, $\Sigma$是曲面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=1$位于$xoy$平面以上的部分, $\vec{n}$是$\Sigma$的向上的单位法向量. 计算$\mathrm{rot}\vec{F}$ 和积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS$.

【解】:

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2\sin(y^2) & x^2\sin(z^2) & x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$=(2y+2zx^2\cos z^2,\ -2x+2z\sin y^2,\ 2x\sin z^2-2yz^2\cos y^2)$.

记$\Sigma_0$为$\begin{cases} z=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1\end{cases}$ 的下侧, $\vec{n}_0=(0,0,-1)$; $\Gamma=\left\{(x,y,0)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\right\}$, 如图.

【法一】: $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\xlongequal{\text{与面位无关}}\iint\limits_{\Sigma_0}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{\Sigma_0}(2y,-2x,0)\cdot(0,0,1)dS=0.$

【法二】:$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS\xlongequal{\text{Stokes}}\oint\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot(dx,dy,dz)=\oint\limits_{\Gamma}(0,0,x^2+y^2)\cdot(dx,dy,0)=0.$

【法三】: $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}dS$

$=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{g(x,y,z)}\left\{\dfrac{1}{2}(xy+zx^3\cos z^2)+\dfrac{2}{9}(-xy+yz\sin y^2)+2(xz\sin z^2-yz^3\cos y^2)\right\}dS$

$\xlongequal{\text{对称性}}0.$ 　　其中, $\vec{n}=\left(\dfrac{x}{4},\dfrac{y}{9},z\right)/\sqrt{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{81}+z^2}=\dfrac{(\frac{x}{4},\frac{y}{9},z)}{g(x,y,z)}$.

10. 证明积分$I(t)=\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx$关于$t\in[\delta,+\infty)$一致收敛, 其中$\delta>0$.

【证明】:

$\forall t\in[\delta,+\infty),\quad I(t)=\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx$

$\xlongequal{t(x-t)=y}\displaystyle\int_{t(1-t)}^{+\infty}e^{-y^2}\frac{dy}{t}=\frac{1}{t}\int_{t(1-t)}^{+\infty}e^{-y^2}dy\leqslant\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{B}{t},$

其中$B=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\quad(=\sqrt{\pi})$.

往证: $\forall\varepsilon>0,\ \ \exists A>1\ \ s.t.\ \ (0<)\displaystyle\int_A^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx<\varepsilon,\quad\forall t\in[\delta,+\infty)$.

首先, $\exists T>1\ \ s.t.\ \ \displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx\leqslant\frac{B}{t}<\varepsilon,\quad\forall t>T$.

对于$t\in[\delta,T]$, $X>T$, $\displaystyle\int_X^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx\leqslant\int_X^{+\infty}e^{-\delta^2(x-T)^2}dx$.

由于$\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-\delta^2(x-T)^2}dx$收敛, 所以, $\exists A>T,\ \ s.t.\ \ \displaystyle\int_A^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx\leqslant\int_A^{+\infty}e^{-\delta^2(x-T)^2}dx<\varepsilon$.

从而, $\forall\varepsilon>0,\ \ \exists A>T>1\ \ s.t.\ \ (0<)\displaystyle\int_A^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx<\varepsilon,\quad\forall t\in[\delta,+\infty)$.

所以$I(t)=\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t^2(x-t)^2}dx$关于$t\in[\delta,+\infty)$一致收敛.