2024/11/20

习题 20

利用 Green 公式计算下列第二型曲线积分:
(2) $\oint_\Gamma 2xy\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是由两条连接点 $(0,0),(4,2)$ 的曲线组成的封闭曲线 : $y=\frac{x}{2}, y=\sqrt{x}$

Answer:

$$I=\iint_D -2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{sqrtx} -2x\mathrm{d}y=-\frac{64}{15}$$

(4) $\oint_\Gamma (x^3-x^2y)\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是 $D=\{(x,y)|4\le x^2+y^2\le 16\}$ 的边界.

Answer:

$$I=\iint_D (y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=120\pi$$

(5) $\int_\Gamma (2x^2y-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是抛物线 $x=\frac{\pi}{2}y^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的部分.

Answer:

取 Γ' : $(x,y)=(\frac{\pi}{2}t,t), t\in[0,1]$, 则 $\Gamma\cup\Gamma'$ 为约当曲线. 记其所围成有界闭区域为 D, 则有:

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\Gamma'}(2x^2y-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y+\iint_D(6xy^2-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}t^3-t^2\cos\frac{\pi}{2}t\right)+\left(1-2t\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{3\pi^2}{4}t^4\right)\right)\mathrm{d}t\\
&-\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}x^2}^{\frac{\pi}{2}x}(6xy^2-2x^2)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi^3}{14}+\frac{3\pi^2}{28}
\end{aligned}$$

习题 23

利用格林公式证明约当曲线 Γ 所围有界闭区域在极坐标下的求面积公式 $A=\frac{1}{2}\int_{\Gamma} r^{2}\mathrm{d}\theta$. 并求 $r=3\sin 2\theta$ 所围有界闭区域在第一象限部分的面积.

Answer:

$$A=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}r^{2}\mathrm{d}\theta, S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin 2\theta)^{2}\mathrm{d}\theta=\frac{9\pi}{8}$$

习题 26

设 D 为单位闭圆盘, $a,b,\alpha\in\mathbb{R}$, 求证: $\oint_{\partial D}a(x^{2}+y^{2})^{\alpha}\mathrm{d}x+b(x^{2}+y^{2})^{\alpha}\mathrm{d}y=0$

Answer:

$$I=\iint_{D}2\alpha(bx-ay)(x^{2}+y^{2})^{\alpha-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}2\alpha(b\sin\theta-a\cos\theta)r^{2\alpha}\mathrm{d}r=0$$