

# 北京大学数学科学学院期末试题

2005-2006 学年第一学期

考试科目: \_\_\_\_\_

考试时间: 2006 年 1 月 5 日

姓 名: \_\_\_\_\_

学 号: 00546136

本试题共 8 道大题, 满分 100 分

1. (18 分) 求下列函数的导数  $\frac{dy}{dx}$ :

(1)  $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\sin x} \quad (x > 0)$ ;  ~~$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{\sin x} \left(\ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \cos x + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{x \sin x}{x^2 + 1}\right)$~~

(2) 函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 3at \\ y = 3at^3 \end{cases} \quad (a > 0)$  所确定;  ~~$\frac{3}{t^2}$~~

(3) 函数  $y = y(x)$  由方程  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \quad (a > 0)$  所确定.  ~~$-\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}}$~~

2. (10 分) 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\ln |x|), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  证明  $f'(0)$  存在, 而  $f''(0)$  不存在.

3. (15 分) 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; e^{-1}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}; \frac{1}{2}$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[ \sqrt[n]{e^{-1}} - n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]; -\frac{5}{24}$

4. (18 分) 求下列积分:

(1)  $\int x^3 \ln x dx; \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$

(2)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}} dx; \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) + \ln |\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1| + C$

(3)  $\int \tan^4 x \sin x dx; \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$