

20240923作业

- 试举出一个函数 $u = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 使得它同时满足下述条件:
 - $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的各个方向导数都存在;
 - $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的各个偏导数存在;
 - $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 连续但不可微.
- 求函数的梯度: $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|e^{-|\mathbf{x}|}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} (n \geq 2)$.
- 若 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处沿3个不同方向的方向导数均为1, 则 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可微.
- 求复合函数的偏导数, 其中 f 是可微函数: $u = f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2, \prod_{i=1}^n x_i^2, x_3, \dots, x_n\right)$.
- 设 $f(x, y)$ 具有连续的偏导数, 求函数 $\varphi(x) = f(x^2, f(x, x))$ 的导数.
- 证明: 可微函数 $f(x, y, z)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z)$.