数学分析 (III) 期中考试参考答案

北京大学 2023-2024 学年秋季学期*

共 9 题, 总分 100 分

本参考答案仅供进一步学习、查漏补缺之用.

1 (8 分)**.** 令

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{1/2} \sin \frac{1}{x^2}, & \text{如果 } x \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } x = 0, \end{cases}$$

且定义 $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$. 请问极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in\Omega}} \frac{x \sin y}{4x^2 + y^2}$$

是否存在? 请证明你的论断.

<u>思路</u>. 考虑到函数 $\frac{x \sin y}{4x^2+y^2}$ 在 $(0, 0)$ 附近基本等同于齐次函数 $\frac{xy}{4x^2+y^2}$, 故可沿着不同斜率的直线选点列趋近于 $(0, 0)$, 证明极限不同.

解答. 极限不存在. 令 $x_n = (n\pi)^{-1/2}$, 显然 $f(x_n) = 0$. 因此, 考虑点列 $(x_n, x_n) \to (0, 0)$ 以及 $(x_n, 2x_n) \to (0, 0)$, 它们均在 Ω 中. 不难验证,

$$\frac{x_n \sin x_n}{4x_n^2 + x_n^2} \to \frac{1}{5}, \quad \frac{x_n \sin(2x_n)}{4x_n^2 + (2x_n)^2} \to \frac{1}{4},$$

极限不等, 因而上述极限不存在. □

2 (8 分)**.** 计算 $f(x, y) = e^{-x^2 y} \cdot \sin x$ 在 $(0, 0)$ 处的所有 2023 阶偏导数.

<u>思路</u>. Taylor 公式直接计算. 过程从略.

3 (10 分)**.** 构造一个函数 $f = f(x, y, z)$ 满足: (a) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $(0, 0, 0)$ 的一个邻域内存在; (b) $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $(0, 0, 0)$ 的一个邻域内连续; (c) 但 f 在 $(0, 0, 0)$ 处不连续. 请写出论证过程.

<u>思路</u>. 只需找一个和 z 无关的函数的例子即可, 即取 $f(x, y, z) = g(x, y)$. 这样只需要 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 的一个邻域内存在但 g 在 $(0, 0)$ 处不连续. 这种类型的例子通常可以考虑齐次函数: 如果要求在原点不连续, 可以考虑 0 次齐次函数; 如果要求在原点不可微, 那么可以考虑 1 次齐次函数. 齐次函数的定义见教材习题十四第 25 题.

解答. 利用极坐标的记号, 令 $g(x, y) = \sin 2\theta = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. 不难验证它满足 $\frac{\partial g}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 的一个邻域内存在但 g 在 $(0, 0)$ 处不连续 (过程从略). 然后定义 $f(x, y, z) = g(x, y)$ 即可. □

*考试时间: 2023 年 11 月 6 日 10:10 - 12:00.

注记. 请将此问题与教材定理 14.1.2 以及习题十四的第 15 题对比.

4 (10 分)**. 本题为错题.** 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续. 令 $A:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathbf{x}$ 是 f 的极值点$\}$. 证明: A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集.

解答. 在一维中, 可考虑 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ (在 $x=0$ 处补充定义为 0). $x=0$ 不是它的极值点, 却是极小值点和极大值点集合的聚点. 故该命题不成立. 高维情形类似.

5 (10 分)**.** 设 $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ 连续可微, 满足

$$(ax-y)\frac{\partial f}{\partial x}+(ay+x)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

其中 $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 证明 $f(x,y)$ 在任一条极坐标表示为 $r(\theta)=Ce^{a\theta}$ 的对数螺线上都取常值 (这里 $\theta\in\mathbb{R}$, $C>0$ 为常数).

思路. 直接检验沿着对数螺线 f 导数为 0, 即证明 $\frac{d}{d\theta}f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)=0$. 过程从略.

6 (12 分)**.** 证明: 不存在从 $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1\}\cup\{(1,0)\}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的同胚.

思路. 反证, 如果存在同胚 $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^2$, 可以证明它在 $(1,0)$ 点的一个邻域中 Φ 有界, 但在 Ω 的其他边界点附近都必须无界. 于是在 $(1,0)$ 附近导致矛盾.

解答. 反证, 假设存在同胚 $\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^2$.

一方面, 取 $x_*\in\partial\Omega\setminus\{(1,0)\}$, 易知 $x_*\notin\Omega$. 考虑一个点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Omega$ 使得 $x_n\to x_*$. 我们断言 $\{\Phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的无界点列. 如不然, 则它有界, 故可以抽收敛子列, 记作 $\{\Phi(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$, 使得对于某个 $y_*\in\mathbb{R}^2$, $\lim_{k\to+\infty}\Phi(x_{n_k})=y_*$. 于是由 Φ^{-1} 的存在性和连续性,

$$\Phi^{-1}(y_*)=\lim_{k\to+\infty}\Phi^{-1}\circ\Phi(x_{n_k})=\lim_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_*\notin\Omega.$$

这与 $\Phi^{-1}:\mathbb{R}^2\to\Omega$ 矛盾. 故点列 $\{\Phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的无界.

另一方面, 由 Φ 的连续性, 存在 $\delta>0$, 使得 Φ 在 $U((1,0),\delta)\cap\Omega$ 中有界 (因为可以要求它包含在 $\Phi((1,0))$ 的一个单位大小的球形邻域中). 如果取 $x_*\in\partial\Omega\setminus\{(1,0)\}$ 满足 $|x_*-(1,0)|<\delta$, 那么对趋向于 x_* 的 $U((1,0),\delta)\cap\Omega$ 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 必然有 $\{\Phi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界. 矛盾. □

注记. 不能用 "开集在连续映射下的原象是开集" 证明, 因为这里的后一个 "开集" 是指相对开集, 它的定义如下: 设 $A\subset\mathbb{R}^n$, $E\subset A$ 被称为 A 中的 (相对) 开集, 如果存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 O 使得 $E=A\cap O$. 所以, 上述结论的准确叙述是 "开集在连续映射下的原象是定义域中的相对开集".

注记. 不宜用从 Ω 去掉一条线然后利用连通性来证明. 这是因为一条连续曲线在同胚下的像可以非常怪异, 无法凭直观简单刻画.

7 (12 分)**.** 考虑方程

$$x_1x_2+u+\sinh\left[(|\mathbf{x}|^2+1)u\right]=0.$$

这里 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$.

(1) (5 分) 证明该方程在 $\mathbb{R}^n$ 上唯一确定了一个光滑隐函数 $u=u(\mathbf{x})$;

(2) (7 分) 计算上述隐函数 u 的所有二阶导数的表达式.

注记. 这里 $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$. 二阶导数的最终表达式中仅可包含 $\mathbf{x}$ 或其分量 x_i $(i = 1, \cdots, n)$, 以及 u.

思路. 用左端函数关于 u 的单调性和在无穷远处的增长证明隐函数的存在唯一性, 再用隐函数定理说明光滑性. 第二问为直接计算, 采用合适的记号可以让计算整洁一些.

解答. 令 $F(\mathbf{x}, u) = x_1x_2 + u + \sinh[(|\mathbf{x}|^2 + 1)u]$, 它是光滑函数. 直接计算得

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{x}, u) = 1 + (|x|^2 + 1)\cosh[(|\mathbf{x}|^2 + 1)u] \geq 1.$$

因此对于任意给定的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \mapsto F(\mathbf{x}, u)$ 严格单调增且当 $u \to \pm\infty$ 时, 分别有 $F(\mathbf{x}, u) \to \pm\infty$. 由介值定理, 存在唯一依赖于 $\mathbf{x}$ 的 $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ 使得 $F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0$.

任意给定的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 在 $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ 处使用隐函数定理, 得到局部光滑的隐函数. 由于上面已经证明了唯一性, 这一局部隐函数必然是上面的 $u(\mathbf{x})$ 在局部上的限制. 因此 $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$ 光滑.

下面计算二阶导数. 为简便起见, 记

$$f(\mathbf{x}) := x_1x_2, \quad S(\mathbf{x}) := \sinh\left[(|\mathbf{x}|^2 + 1)u(\mathbf{x})\right], \quad C(\mathbf{x}) := \cosh\left[(|\mathbf{x}|^2 + 1)u(\mathbf{x})\right].$$

对恒等式

$$f(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) + \sinh\left[(|\mathbf{x}|^2 + 1)u(\mathbf{x})\right] = 0$$

两边求梯度得

$$\nabla f + \nabla u + C(\mathbf{x})\left[2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u\right] = 0. \tag{1}$$

故

$$\nabla u = -\left[1 + C(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2 + 1)\right]^{-1}\left[\nabla f(\mathbf{x}) + 2uC(\mathbf{x})\mathbf{x}\right]. \tag{2}$$

对 (1) 再求梯度得

$$\begin{aligned} \nabla^2 f + \nabla^2 u + S(\mathbf{x})\left[2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u\right] \otimes \left[2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u\right] \\ + C(\mathbf{x})\left[2uId + 2\mathbf{x} \otimes \nabla u + 2\nabla u \otimes \mathbf{x} + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla^2 u\right] = 0. \end{aligned}$$

这里的记号 Id 是指 n 阶单位阵. $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ 是一个由向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 得到的 $m \times n$ 的秩一矩阵, 其中 $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} := \mathbf{a}_i\mathbf{b}_j$. 因此,

$$\begin{aligned} &\left[1 + C(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2 + 1)\right]\nabla^2 u \\ = &-\nabla^2 f - S(\mathbf{x})\left[2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u\right] \otimes \left[2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u\right] \\ &- C(\mathbf{x})\left[2uId + 2\mathbf{x} \otimes \nabla u + 2\nabla u \otimes \mathbf{x}\right]. \end{aligned}$$

利用 (1) 知,

$$2\mathbf{x}u + (|\mathbf{x}|^2 + 1)\nabla u = -C(\mathbf{x})^{-1}\left[\nabla f + \nabla u\right].$$

故上式可稍化简为

$$\begin{aligned} &\left[1 + C(\mathbf{x})(|\mathbf{x}|^2 + 1)\right]\nabla^2 u \\ = &-\nabla^2 f - S(\mathbf{x})C(\mathbf{x})^{-2}\left[\nabla f + \nabla u\right] \otimes \left[\nabla f + \nabla u\right] \\ &- C(\mathbf{x})\left[2uId + 2\mathbf{x} \otimes \nabla u + 2\nabla u \otimes \mathbf{x}\right]. \end{aligned}$$

最后将 (2) 代入即可. 过程从略. □

<u>注记</u>. 不能仅使用隐函数定理而不依靠单调性直接证明第一小题. 这是因为隐函数定理仅保证了局部存在唯一的隐函数. 如果想基于局部的隐函数做延拓, 则首先需要证明可以延拓到整个 $\mathbb{R}^n$, 且所得函数和延拓的方式与路径无关, 其次需要证明整体唯一性, 而这大概绕不开单调性. 在本题中, 隐函数定理仅仅是用来比较方便地证明光滑性的.

8 (14 分)**.** 在 $V = \{f = f(x) \in C^1([0,1]),\ f'(0) = 0\}$ 中求带约束变分问题

$$\min_{f\in V} \int_0^1 \frac{1}{2} x f'(x)^2 + x^2 f(x)\, dx, \quad \text{s.t.} \int_0^1 x f(x)\, dx = 1$$

的最小值点 f_*. 在求解过程中可以假设 $f_* = f_*(x)$ 存在唯一且 C^2 光滑.

<u>思路</u>. 参见变分问题讲义例 1.3 和例 1.4.

解答. 引入 Lagrange 增广函数

$$F(f,\lambda) := \int_0^1 \frac{1}{2} x f'(x)^2 + x^2 f(x)\, dx + \lambda \left(\int_0^1 x f(x)\, dx - 1 \right),$$

其中 $f \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 则最小值点 f_* 需满足存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使得

$$\frac{\delta F}{\delta f}(f_*, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(f_*, \lambda) = 0.$$

基于 $\frac{\delta F}{\delta f} = 0$, 我们计算如下. 由于 V 为线性空间, 任取扰动函数 $\eta \in V$. 那么

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(f_* + t\eta) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_0^1 \frac{1}{2} x (f_*' + t\eta')^2 + x^2 (f_* + t\eta)\, dx + \lambda \left(\int_0^1 x (f_* + t\eta)\, dx - 1 \right) \\ &= \int_0^1 x f_*' \eta' + x^2 \eta\, dx + \lambda \int_0^1 x\eta\, dx. \end{aligned}$$

由分部积分,

$$0 = \left(x f_*' \eta \right)\Big|_{x=0}^1 + \int_0^1 -(x f_*')'\eta + x^2\eta + \lambda x \eta\, dx,$$

可化简为

$$0 = f_*'(1)\eta(1) + \int_0^1 \left[-(x f_*')' + x^2 + \lambda x \right] \eta\, dx. \tag{3}$$

定义 $V_0 := \{v = v(x) \in C^1([0,1]),\ v'(0) = 0,\ v(1) = 0\} \subset V$. 先令 η 在 V_0 中任取, 上式进一步化简为

$$0 = \int_0^1 \left[-(x f_*')' + x^2 + \lambda x \right] \eta\, dx.$$

由于假设 f_* 具有 C^2 光滑性, 上式括号中的函数连续. 由于 $\eta \in V_0$ 任意, 故

$$-(x f_*')' + x^2 + \lambda x = 0, \quad \forall x \in (0,1). \tag{4}$$

将此式代回 (3) 得到 $f_*'(1)\eta(1) = 0$ 对任意 $\eta \in V$ 成立, 于是必然有 $f_*'(1) = 0$. 此外由 V 的定义, $f_*'(0) = 0$.

对 (4) 积分得

$$xf_*'(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + C.$$

取 $x = 0$ 知 $C = 0$. 所以

$$f_*'(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}\lambda x.$$

$f_*'(0) = 0$ 自然被满足, 而由 $f_*'(1) = 0$ 可以解得 $\lambda = -\frac{2}{3}$, 故

$$f_*'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x.$$

进一步积分得

$$f_*(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \tilde{C}.$$

利用约束 (也即 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$) 得

$$1 = \int_0^1 x f_*(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \tilde{C}x\,dx = \frac{1}{45} - \frac{1}{24} + \frac{1}{2}\tilde{C}.$$

因此 $\tilde{C} = \frac{367}{180}$. 综上,

$$f_*(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{367}{180}.$$

$\square$

9 (16 分)**.** 设

$$f(x, y; \mu) := (x^3 - 2y^3)e^{-\mu x^2} + (2 + \mu\cos y)x^2 - 3y^2 + x.$$

这里 $\mu \in \mathbb{R}$ 是一个参数.

(1) (8 分) 取定 $\mu = 0$. 求二元函数 $(x, y) \mapsto f(x, y; 0)$ 的极小值点;

(2) (8 分) 证明存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $\mu \in (-\delta, \delta)$, 二元函数 $(x, y) \mapsto f(x, y; \mu)$ 均至少有一个极小值点.

思路. 第一小题为直接计算. 第二小题, 当 μ 很小时, 自然会猜测极小点应该在 $\mu = 0$ 情形的极小点附近, 而且关于 μ 连续地变动. 可以用隐函数定理证明这一点. 这一想法中包含着连续延拓 (continuation) 的思想.

解答. 首先计算得 $f(x, y; 0) = x^3 - 2y^3 + 2x^2 - 3y^2 + x$, 所以

$$\nabla f(x, y; 0) = (3x^2 + 4x + 1, -6y^2 - 6y).$$

令 $\nabla f = 0$, 可以解得 $x = -1, -\frac{1}{3}$ 以及 $y = 0, -1$. 故此函数有四个临界点 $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{3}, 0)$ 和 $(-\frac{1}{3}, -1)$. 进一步计算可得

$$\nabla^2 f(x, y; 0) = \begin{pmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & -12y - 6 \end{pmatrix}.$$

所以各临界点处的 Hessian 矩阵为

$$\nabla^2 f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f\left(-\frac{1}{3}, -1\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

仅有 $(-\frac{1}{3},-1)$ 处的 Hessian 矩阵为正定, 其余为负定或者不定. 所以 $(-\frac{1}{3},-1)$ 为 f 唯一的极小值点.

对于一般取值的 μ, 极小值点的必要条件是

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y;\mu)&=0,\\ \partial_y f(x,y;\mu)&=0.\end{aligned}$$

不妨将该方程组记作 $\mathbf{G}(x,y;\mu)=\mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{G}(x,y;\mu):=(\partial_x f(x,y;\mu),\,\partial_y f(x,y;\mu))^\intercal$. 我们上面已经得到当 $\mu=0$ 时 $(x,y)=(-\frac{1}{3},-1)$ 是一个解. 因此想用隐函数定理证明, 存在 $\delta_0>0$ 使得当 $\mu\in(-\delta_0,\delta_0)$ 时, 存在连续的隐函数组 $\mu\mapsto(x(\mu),y(\mu))$ 满足 $(x(0),y(0))=(-\frac{1}{3},-1)$, 且

$$\mathbf{G}\big(x(\mu),y(\mu);\mu\big)=\mathbf{0},\quad \mu\in(-\delta_0,\delta_0).$$

为实现这一目标, 由于 $\mathbf{G}$ 光滑, 只需检验

$$\left.\frac{\partial\mathbf{G}(x,y;\mu)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y,\mu)=(-\frac{1}{3},-1,0)}\neq 0.$$

注意上式左边没有关于 μ 求导, 故可以在计算之前就将 $\mu=0$ 代入. 于是可以发现

$$\left.\frac{\partial\mathbf{G}(x,y;\mu)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y,\mu)=(-\frac{1}{3},-1,0)}=\left.\frac{\partial\mathbf{G}(x,y;0)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y)=(-\frac{1}{3},-1)}=\det\left[\nabla^2 f\left(-\frac{1}{3},-1\right)\right]\neq 0.$$

最后一步可以利用上一小题的计算结果. 这样就获得了上述的隐函数组 $\mu\mapsto(x(\mu),y(\mu))$. 由它的连续性以及 f 的光滑性, 可以取 $\delta\in(0,\delta_0)$ 充分小, 使得

$$\nabla^2 f(x(\mu),y(\mu);\mu)>0,\quad \forall\,\mu\in(-\delta,\delta).$$

这样 $(x(\mu),y(\mu))$ 就是 $(x,y)\mapsto f(x,y;\mu)$ 的一个极小点. $\square$