2024/9/23

1.

举出一个函数 $u=f(x), x\in\mathbb{R}^n$, 使得它同时满足下述条件:

- (1) f(x) 在 x = 0 的各个方向导数都存在;
- (2) f(x) 在 x = 0 的各个偏导数存在;
- (3) f(x) 在 x = 0 连续但不可微.

Answer:

$$f(x,y) = egin{cases} rac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2
eq 0, \ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

• 连续性:

$$\left|rac{2xy^3}{x^2+y^4}
ight|=\left|rac{2xy^2}{x^2+y^4}
ight||y|\leq |y| o 0$$

• 方向导数存在: 令 $v = (\cos \theta, \sin \theta)$,

$$\left. rac{\partial f}{\partial v}
ight|_{m{x}=0} = \lim_{t o 0^+} rac{f(t\cos heta, t\sin heta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t o 0^+} rac{2t\cos heta\sin^3 heta}{\cos^2 heta + t^2\sin^4 heta} = 0$$

- 偏导数存在: 方向导数存在, 偏导数自然存在
- 不可微:

$$\lim_{\Delta x = \Delta y^2, \Delta y o 0} rac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta y o 0} rac{1}{\sqrt{\Delta y^2 + 1}} = 1$$

2.

求函数的梯度:

$$f(x)=|x|e^{-|x|}, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, n\geq 2.$$

Answer:

$$abla f = \left(rac{\partial f(oldsymbol{x})}{\partial x_1}, rac{\partial f(oldsymbol{x})}{\partial x_2}, \ldots, rac{\partial f(oldsymbol{x})}{\partial x_n}
ight) = \left(rac{1}{|oldsymbol{x}|} - 1
ight) \mathrm{e}^{-|oldsymbol{x}|}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

3.

证明: 若 z=f(x,y) 在 (0,0) 处沿 3 个不同方向的方向导数均为 1, 则 z=f(x,y) 在 (0,0) 处不可 微.

Proof:

设这三个方向为 $v_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i), i\in[3]$, 假设 z 在 (0,0) 处可微, 因此有:

$$z_x'(0,0)\cos heta_i+z_y'(0,0)\sin heta_i=1, orall i\in[3]$$

这表明单位圆上有不同的三个点与向量 $(z_x'(0,0),z_y'(0,0))$ 内积为 1. 矛盾, 因为最多只有两个符合条件的点.

因此 z 在 (0,0) 不可微.

4.

求复合函数的偏导数,其中 f 是可微函数:

$$u=f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2,\prod_{i=1}^n x_i^2,x_3,\ldots,x_n
ight).$$

Answer:

利用链锁法则,

$$egin{aligned} rac{\partial u}{\partial x_i} &= f_1' rac{\partial \sum_{i=1}^n x_i^2}{\partial x_i} + f_2' rac{\partial \prod_{i=1}^n x_i^2}{\partial x_i} + \sum_{j=3}^n f_j' rac{\partial x_j}{\partial x_i} \ &= egin{cases} 2x_i \left(f_1' + f_2' \prod_{j \in [n], j
eq i} x_j^2
ight) & i = 1, 2 \ 2x_i \left(f_1' + f_2' \prod_{j \in [n], j
eq i} x_j^2
ight) + f_i' & i \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

5.

设 f(x,y) 具有连续的偏导数, 求函数 $\varphi(x)=f(x^2,f(x,x))$ 的导数.

Answer:

利用链锁法则,

$$egin{aligned} rac{\partial arphi(x)}{\partial x} &= f_1'(x^2,f(x,x))rac{\partial x^2}{\partial x} + f_2'(x^2,f(x,x))rac{\partial f(x,x)}{\partial x} \ &= 2xf_1'(x^2,f(x,x)) + f_2'(x^2,f(x,x))\left(f_1'(x,x) + f_2'(x,x)
ight) \end{aligned}$$

6.

证明: 可微函数 f(x,y,z) 是 n 次齐次函数的充要条件是:

$$xrac{\partial f}{\partial x}+yrac{\partial f}{\partial y}+zrac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z).$$

必要性:

 $t^n f(x,y,z) = f(tx,ty,tz)$ 两端对 t 求导得,

$$nt^{n-1}f(x,y,z) = xf_1'(tx,ty,tz) + yf_2'(tx,ty,tz) + zf_3'(tx,ty,tz)$$

$$nf(x, y, z) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

充分性:

注意到

$$trac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial t}=txf_1'(tx,ty,tz)+tyf_2'(tx,ty,tz)+tzf_3'(tx,ty,tz)=nf(tx,ty,tz)$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}f(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)} = \frac{n\mathrm{d}t}{t}$$

两边对 t 积分得

$$\ln f(tx, ty, tz) - \ln f(x, y, z) = n \ln t$$

也即

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

2024/9/25

1.

设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), 求下列向量函数的导数:

(1)
$$oldsymbol{f}(oldsymbol{x}) = oldsymbol{x} \|oldsymbol{x}\|$$

Answer:

$$oldsymbol{f}'(oldsymbol{x}) = \left(rac{\partial x_i \|oldsymbol{x}\|}{\partial x_j}
ight)_{n imes n} = egin{pmatrix} \|oldsymbol{x}\| + rac{x_1^2}{\|oldsymbol{x}\|} & rac{x_1x_2}{\|oldsymbol{x}\|} & \cdots & rac{x_1x_n}{\|oldsymbol{x}\|} \ rac{x_2x_1}{\|oldsymbol{x}\|} & \|oldsymbol{x}\| + rac{x_2^2}{\|oldsymbol{x}\|} & \cdots & rac{x_2x_n}{\|oldsymbol{x}\|} \ dots & dots & \ddots & dots \ rac{x_nx_1}{\|oldsymbol{x}\|} & rac{x_nx_2}{\|oldsymbol{x}\|} & \cdots & \|oldsymbol{x}\| + rac{x_n^2}{\|oldsymbol{x}\|} \end{pmatrix}$$

(2)
$$oldsymbol{f}(oldsymbol{x}) = rac{oldsymbol{x}}{\|oldsymbol{x}\|}$$
 (当 $\|oldsymbol{x}\|
eq 0$ 时)

Answer:

$$m{f}'(m{x}) = \left(rac{\partial rac{x_i}{\|m{x}\|}}{\partial x_j}
ight)_{n imes n} = egin{pmatrix} rac{1}{\|m{x}\|} - rac{x_1^2}{\|m{x}\|^3} & -rac{x_1x_2}{\|m{x}\|^3} & \cdots & -rac{x_1x_n}{\|m{x}\|^3} \ -rac{x_2x_1}{\|m{x}\|^3} & rac{1}{\|m{x}\|} - rac{x_2^2}{\|m{x}\|^3} & \cdots & -rac{x_2x_n}{\|m{x}\|^3} \ dots & dots & \ddots & dots \ -rac{x_nx_1}{\|m{x}\|^3} & -rac{x_nx_2}{\|m{x}\|^3} & \cdots & rac{1}{\|m{x}\|} - rac{x_n^2}{\|m{x}\|^3} \end{pmatrix}$$

2.

设 $m{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), 求函数 $f(m{x}) = (Am{x}) \cdot (Am{x})$ 的导数, 其中 A 为 $n \times n$ 矩阵.

Answer:

$$f'(oldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j
ight)^2 = 2A^T A oldsymbol{x}$$

3.

设 $m f:\mathbb R\to\mathbb R^n$ ($n\ge 2$) 是可微向量函数,且 $\|m f(x)\|=1$, $\forall x\in\mathbb R$. 证明 $m f'(x)\cdot m f(x)=0$,并给出该结论的几何解释.

Answer:

注意到

$$(\|\boldsymbol{f}(x)\|^2)' = (\boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{f}(x))' = 2\boldsymbol{f}'(x) \cdot \boldsymbol{f}(x)$$

由 $\| \boldsymbol{f}(x) \|$ 为常值可知 $\boldsymbol{f}'(x) \cdot \boldsymbol{f}(x) = 0$ 几何意义即,若向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 长度不变,则 $\boldsymbol{f}(x)$ 与 $\boldsymbol{f}'(x)$ 垂直.