

北京大学数学科学学院期中试题

2020 - 2021 学年第一学期

考试科目: 数学分析

考试时间: 2020 年 11 月 16 日

姓 名: _____

学 号: _____

本试题共 8 道大题, 满分 100 分

1. (15分) 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{n-2}{n-1})^{2n+1}$; (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$

2. (15分) 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$; (2) $y = x^{x^x}$;

(3) $y = \frac{\pi}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{a} (a > 0)$.

3. (15分) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = m$. $f'(0)$ 存在且等于 m .

4. (15分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内定义, 并且对任意的 $\xi \in (a, b)$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (\xi - \delta, \xi)$ 时, $f(x) < f(\xi)$; 当 $x \in (\xi, \xi + \delta)$ 时, $f(x) > f(\xi)$. 求证: $f(x)$ 在 (a, b) 内严格递增.

5. (10分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 如果 f, g 都是有界的, 求证: fg 是一致连续的. 如果将 f, g 有界的条件减弱为 fg 有界, 结论还一定成立吗? 给出你的理由.

6. (10分) 连续函数 $f: R \rightarrow R$ 满足: 对任意 $a < b$ 都存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ 或 $f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常值函数.

7. (10分) 已知存在正实数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 满足 $t = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1)$. 求 t 的取值范围.

8. (10分) 令 $f(x): [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个正连续函数. 假设对任意 $a > 0$, 方程 $f(x) = ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上有解.

(1) 证明对任意 $a > 0$, 方程 $f(x) = ax$ 有无穷多个解.

(2) $f(x)$ 是否可以是一个严格递增函数?