数学分析 (III) 期末考试

北京大学 2023-2024 学年秋季学期*

共 8 题, 总分 100 分

1 (10 分)**.** 设 M 是一个 n 维光滑流形, $p \in M$. 请陈述 p 点处 M 的切空间和余切空间的定义.

> **解答.** 考虑流形 M 上一条通过 p 的光滑参数曲线 c, 满足 $c(0) = p$. 这样的参数曲线的全体记为集合 Γ_p. 对于曲线 $c_1, c_2 \in \Gamma_p$, 如果对于任意定义在 p 的某个邻域上的光滑实值函数 f 都有 $(f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0)$, 就称 c_1 与 c_2 相切. 可以证明相切关系是 Γ_p 上的一个等价关系 $\sim$.
>
> 流形 M 在 p 处的切空间定义为 $T_pM := \Gamma_p/\sim$, 即流形 M 上通过 p 的光滑参数曲线在 p 处相切关系下的等价类的集合. 可以证明 T_pM 是一个 n 维线性空间. 它的对偶空间被称为 p 处流形 M 的余切空间 T_p^*M.

2 (10 分)**.** 设 $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为一个光滑向量场, $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$. 证明恒等式

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\vec{f} = \nabla \operatorname{div}\vec{f} - \Delta\vec{f}.$$

这里的 curl 算子等于教材中的 rot, 等式右边的 $\Delta\vec{f}$ 表示 Laplace 算子分别作用在 $\vec{f}$ 的三个分量上.

> **解答.** 下面简记 $\partial_j := \partial_{x_j}$, $\partial^2_{jk} := \partial^2_{x_j x_k}$. 直接计算得
>
> $$\begin{aligned}\operatorname{curl}\operatorname{curl}\vec{f} = \operatorname{curl}\begin{pmatrix}\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2\\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3\\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\partial_2(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) - \partial_3(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)\\ \partial_3(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2) - \partial_1(\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)\\ \partial_1(\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3) - \partial_2(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_1(\partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) - (\partial^2_{22} f_1 + \partial^2_{33} f_1)\\ \partial_2(\partial_1 f_1 + \partial_3 f_3) - (\partial^2_{11} f_2 + \partial^2_{33} f_2)\\ \partial_3(\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2) - (\partial^2_{11} f_3 + \partial^2_{22} f_3)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_1 \operatorname{div} f - (\partial^2_{11} f_1 + \partial^2_{22} f_1 + \partial^2_{33} f_1)\\ \partial_2 \operatorname{div} f - (\partial^2_{11} f_2 + \partial^2_{22} f_2 + \partial^2_{33} f_2)\\ \partial_3 \operatorname{div} f - (\partial^2_{11} f_3 + \partial^2_{22} f_3 + \partial^2_{33} f_3)\end{pmatrix} = \nabla \operatorname{div}\vec{f} - \Delta\vec{f}.\end{aligned}$$

3 (12 分)**.** 请计算马鞍面 $z = x^2 - y^2$ 落在圆柱体 $x^2 + y^2 \le 1$ 范围内的部分的曲面面积.

*考试时间: 2024 年 1 月 10 日 8:30 - 10:30.

解答. 记 $B_1 := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$, $f(x,y) := x^2-y^2$. 本题所考察的马鞍面的部分为

$$S = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1,\, z = x^2-y^2\big\}.$$

其面积 I 由如下公式给出 (见教材定理 16.3.2 证明末尾的注记):

$$I = \int_{B_1} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dx\,dy = \int_{B_1} \sqrt{1+(2x)^2+(-2y)^2}\,dx\,dy.$$

注意到该积分具有旋转对称性, 利用极坐标变换得

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\cdot\frac{1}{2}\,d(r^2) = \pi\int_0^1\sqrt{1+4\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5}-1\big).$$

4 (12 分)**.** 考虑 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数 ($x=0,1$ 处的定义经过适当修改):

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{如果 } x \in \mathbb{Q}\cap(0,1) \text{ 且 } x = \frac{q}{p}\ (p,q \text{ 互素}),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

特别地, 这一定义中 $R(0)=R(1)=0$.

证明 $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],\, R(x)\le y\le 2\}$ 是 Jordan 可测的 (即可求体积的).

解答. 只需证明 $\partial\Omega$ 是零体积集 (定理 15.1.1). 注意到

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \big\{(x,y) : x=0,1,\, y\in[0,2]\big\}\cup\big\{(x,2) : x\in[0,1]\big\}\cup\big\{(x,y) : x\in[0,1],\, y\in[0,R(x)]\big\}\\ &=: \Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3.\end{aligned}$$

Γ_1 和 Γ_2 都是零体积集, 因为它们由有限条可求长曲线构成 (参见例 15.1.1). 下面证明 Γ_3 零体积.

任意取定 $\varepsilon>0$. 取闭长方体 $A_0 := [-1,2]\times[-\varepsilon/10,\varepsilon/10]$. 于是, $\Gamma_3\setminus A_0^\circ$ 中仅包含有限条平行于 y 轴的线段, 不妨设有 N 条 (N 依赖于 ε), 并假设它们的横坐标为 $x_1,\cdots,x_N$. 然后取闭长方体

$$A_k := \left[x_k-\frac{\varepsilon}{10N},\, x_k+\frac{\varepsilon}{10N}\right]\times[0,2]\quad (k=1,\cdots,N)$$

用于分别覆盖这些线段. 不难验证

$$\overline{\Gamma_3} = \Gamma_3 \subset \left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right)^\circ,$$

而且

$$V\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \le V(A_0)+\sum_{k=1}^N V(A_k) = 3\cdot\frac{\varepsilon}{5}+N\cdot\frac{\varepsilon}{5N}\cdot 2 = \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 故 Γ_3 为零体积集.

综上, $\partial\Omega$ 是零体积集, 故 Ω 是 Jordan 可测的.

注记. 注意, 在证明零体积集的过程中, 无需要求闭长方体是内部不交的.

5 (12 分)**.** 令 $D = [0, +\infty) \times [0, 1]$. 问无穷重积分

$$\int_D e^{-xy} \sin x \, dx \, dy$$

是否收敛? 请给出判断并证明.

解答. 不收敛.

由教材定理 15.5.3 知, 上述无穷重积分的敛散性等价于

$$\int_D |e^{-xy} \sin x| \, dx \, dy$$

的敛散性. 而为了说明这一积分不收敛, 由定理 15.5.2, 只需证明

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{[0,k\pi]\times[0,1]} |e^{-xy} \sin x| \, dx \, dy = +\infty \tag{1}$$

即可.

对任意给定的 $k \in \mathbb{Z}_+$, 由于被积函数的连续性, 可以将重积分化为累次积分

$$\int_{[0,k\pi]\times[0,1]} |e^{-xy} \sin x| \, dx \, dy = \int_0^{k\pi} \left(\int_0^1 e^{-xy} \, dy \right) |\sin x| \, dx = \int_0^{k\pi} \frac{1}{x} \left(1 - e^{-x}\right) |\sin x| \, dx.$$

当 $x \geq \pi$ 时, $1 - e^{-x} > \frac{1}{2}$. 故当 $k \in \mathbb{Z}_+$ 且 $k \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int_{[0,k\pi]\times[0,1]} |e^{-xy} \sin x| \, dx \, dy &\geq \sum_{j=2}^{k} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{1}{2x} |\sin x| \, dx \\ &\geq \sum_{j=2}^{k} \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} \frac{1}{2\pi j} |\sin x| \, dx = \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{\pi j}. \end{aligned}$$

故 (1) 得证. 综上, 原无穷重积分不收敛.

6 (14 分)**.** 令 Γ 为圆锥面 $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ 和平面 $z = x + 1$ 的交线, 定向取为从原点看向 Γ 时沿逆时针转. 计算

$$\int_\Gamma (y + e^{-z}) \, dx + x \sin y \, dy + xy \, dz.$$

提示. Stokes 公式.

解答. 联立两曲面方程得

$$(x+1)^2 = 2x^2 + 2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + 2y^2 = 2.$$

所以交线 Γ 是平面 $z = x + 1$ 上的一条曲线, 它在 xOy 平面上的投影是椭圆 $(x-1)^2 + 2y^2 = 2$,

其中心位于 $(1,0)$, 长短轴分别平行于 x 轴和 y 轴, 长短半轴长度分别为 $\sqrt{2}$ 和 1, 左右端点分别为 $1-\sqrt{2}$ 和 $1+\sqrt{2}$. 特别地, Γ 上 $z=x+1\geq(1-\sqrt{2})+1>0$ 表明 Γ 完全位于 $z>0$ 的半空间中.

定义平面 $z=x+1$ 上被圆锥面截出的有界部分

$$S:=\big\{(x,y,z):\,z=x+1\big\}\cap\big\{(x,y,z):\,z\geq\sqrt{x^2+y^2}\big\}.$$

S 的边界是 Γ, 为了匹配 Γ 的定向, S 的定向需取下侧. 由于平面 $z=x+1$ (也就是 $x-z+1=0$) 的一个法向量为 $(1,0,-1)$, 故对应于 S 定向的单位法向量为 $(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

记

$$(P,Q,R):=(y+e^{-z},\,x\sin y,\,xy).$$

由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma(y+e^{-z})\,dx+x\sin y\,dy+xy\,dz\\
=&\int_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\\
=&\int_S x\,dy\,dz-(e^{-z}+y)\,dz\,dx+(\sin y-1)\,dx\,dy\\
=&\int_S\big(x,\,-(e^{-z}+y),\,\sin y-1\big)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dS\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_S x-\sin y+1\,dS.
\end{aligned}$$

定义椭圆形平面区域

$$\Omega:=\big\{(x,y):\,(x-1)^2+2y^2\leq 2\big\}.$$

则由前面的计算知, S 是 Ω 上 $z=x+1$ 的图像. 故

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma(y+e^{-z})\,dx+x\sin y\,dy+xy\,dz\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\int_\Omega(x-\sin y+1)\sqrt{1+1}\,dx\,dy\\
=&\int_\Omega(x-1)+\sin y+2\,dx\,dy=\int_\Omega 2\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

最后一行中用了 Ω 关于直线 $x=1$ 以及 y 轴对称的性质. 由于椭圆形区域 Ω 的面积为 $\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 1$ (参见教材第二册例 7.6.3, 或者用坐标变换化成圆即可简单计算), 故

$$\int_\Gamma(y+e^{-z})\,dx+x\sin y\,dy+xy\,dz=2\sqrt{2}\pi.$$

7 (14 分)**.** 设 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 为定义在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的光滑函数. 记 $r:=\sqrt{x^2+y^2}$. 已知对任意的光滑函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, 曲线积分

$$\int_\Gamma f(r)u(x,y)\,dx+f(r)v(x,y)\,dy$$

在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 内与路径无关. 请证明: 存在一个光滑函数 $\lambda : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, 使得

$$\big(u(x,y),\, v(x,y)\big) = \big(\lambda(r)x,\, \lambda(r)y\big).$$

提示. 如有必要, 可以取一些特殊的 f 来看看能推出什么性质.

解答. 由定理 16.7.3 知, 曲线积分与路径无关可以推出存在可微函数 w 使得 $dw = f(r)u(x,y)\,dx + f(r)v(x,y)\,dy$. 由 f,u,v 的光滑性知, w 是光滑函数, 因而

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[f(r)u(x,y)\big] = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\big[f(r)v(x,y)\big].$$

将两边展开并利用 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ 及 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ 得,

$$f'(r)\frac{y}{r}u + f(r)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\frac{x}{r}v + f(r)\frac{\partial v}{\partial x},$$

即

$$\frac{f'(r)}{r}(uy - vx) = f(r)\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

取 $f(r) \equiv 1$ 得

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0. \tag{2}$$

将它反代入上面的等式后进一步得到, 对任意光滑的 f, 都有

$$\frac{f'(r)}{r}(uy - vx) = 0,$$

因而 $(u,v)\cdot(y,-x) \equiv 0$. 由此可以推出 (u,v) 必处处与向量 (x,y) 共线, 即存在一个光滑函数 $\mu = \mu(x,y)$ 使得 $(u,v) = (\mu x, \mu y)$. 将这一形式代入 (2) 得

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}y - \frac{\partial \mu}{\partial y}x \equiv 0.$$

即 $\nabla\mu\cdot(y,-x) = 0$, 这说明 μ 实际上仅是 r 的函数. 这可以用极坐标表示来严格论证: 在极坐标变换下, 令 $\lambda(r,\theta) = \mu(x,y)$, 那么上式就等价于 $\partial_\theta\lambda(r,\theta) \equiv 0$, 故 λ 仅依赖于 r.

综上, 存在关于 r 的光滑函数 $\lambda = \lambda(r)$ 使得 $(u,v) = (\lambda x, \lambda y)$.

8 (16 分)**.** 定义 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2-1\}$, 定向取上侧 (即单位法向量的 z 分量为正). 记 $B_R := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. 计算

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R\cap S}\frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

提示. 用 Gauss 公式将积分化到一个更容易计算积分的曲面上.

解答. 记

$$(P,Q,R) := \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

注意到向量场 (P,Q,R) 在 $(0,0,0)$ 处具有奇性, 但在 $\mathbb{R}^3$ 中的其他地方都是光滑的. 此外,

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

可以完全对称地计算 $\frac{\partial Q}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial R}{\partial z}$. 于是, 对任意的 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$,

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right](x,y,z) = \frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \equiv 0.$$

定义

$$\Omega := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \le x^2+y^2-1\big\}, \quad \Omega_R := B_R \cap \Omega.$$

Ω_R 为球体 B_R 落在抛物面下方的部分, 不包含原点, 所以由上面的计算以及 Gauss 公式得

$$0 = \int_{\Omega_R} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega_R} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

这里 $\partial\Omega_R$ 的定向取外侧. 最右的积分包含两部分: $B_R \cap S$ 上的积分和球面区域 $\Omega \cap \partial B_R$ 上的积分. 注意 $\partial\Omega_R$ 的定向限制在 $B_R \cap S$ 上和题目规定的 $B_R \cap S$ 的定向一致, 而限制在 $\Omega \cap \partial B_R$ 上的定向也是外侧. 因此,

$$\begin{aligned}\int_{B_R\cap S} \frac{x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= -\int_{\Omega\cap\partial B_R} \frac{x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= -R^{-3}\int_{\Omega\cap\partial B_R} (x,y,z)\cdot\vec{n}\, dS.\end{aligned}$$

这里 $\vec{n}$ 是单位外法向量, $\vec{n} = (x,y,z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 故在 $\Omega \cap \partial B_R$ 上, $(x,y,z)\cdot\vec{n} \equiv R$.

在球坐标中, 球面区域 $\Omega \cap \partial B_R$ 对应于 $\varphi \in [\varphi_R, \pi]$ 的部分, 其中 φ_R 是由如下方程确定的:

$$R\cos\varphi_R = z = x^2+y^2-1 = \big(R\sin\varphi_R\big)^2 - 1,$$

即

$$\big(R\cos\varphi_R\big)^2 + R\cos\varphi_R = R^2 - 1$$

可以发现当 $R \to +\infty$ 时, $\varphi_R \to 0^+$. 利用球坐标变换继续上面的计算得

$$\begin{aligned}\int_{B_R\cap S} \frac{x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= -R^{-3}\int_{\Omega\cap\partial B_R} R\, dS \\ &= -R^{-2}\int_0^{2\pi}\int_{\varphi_R}^{\pi} R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta = -2\pi\int_{\varphi_R}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi.\end{aligned}$$

这里的第二个等号见教材 §15.4 中关于球坐标变换的讨论. 因此,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R\cap S} \frac{x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi \lim_{R\to+\infty} \cos\varphi\big|_{\varphi=\varphi_R}^{\pi} = -4\pi.$$

注记. 也可以选择其他改变积分曲面的方式:

(a) 取球冠 $\partial B_R \setminus \Omega$ (也即球面 ∂B_R 位于抛物面上方的部分) 和 $B_R \cap S$ 拼成一个闭合的曲面. 我们希望对这个曲面围成的区域使用 Gauss 公式, 但此时需要额外挖去以原点为球心、ε 为半径的小球以避开原点处的奇性. 可以利用 Gauss 公式将 $B_R \cap S$ 上的积分和球冠 $\partial B_R \setminus \Omega$ 上的积分以及 ∂B_ε 上的积分联系起来, 并且证明当 $R \to +\infty$ 时, 球冠上的积分趋于 0;

(b) 上一方法中的球冠像是一个弧形的 "盖子", 但我们也可以选择一个平的 "盖子" ——注意 S 和 ∂B_R 的交线是一条圆形曲线, 其上 z 为常值 $R\cos\varphi_R$, 故可用平面 $z = R\cos\varphi_R$ 被抛物面 S 所截的部分来和 $B_R \cap S$ 拼合成一个闭合曲面.

这些解法留给读者研究.