2015-2016 学年第二学期数学分析 II 期中考试（伍胜健）

April 25, 2016

一、（10 分）设 $f(x)=[\sin[\frac{1}{x}]], x\in(0,1], f(0)=0$，试问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 是否可积（说明理由）.

二、（10 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，$f(1)=1$ 且对于 $\forall u>0, g(x)=\int_x^{ux} f(t)\mathrm{d}t$ 是一个常数函数，求 $f(x)$.

三、（10 分）求心脏线 $r=a(1-\cos\theta), \theta\in[0,2\pi]$ 的弧长.

四、（10 分）讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^\alpha}\mathrm{d}x, (\alpha>0)$ 的敛散性.

五、（15 分）讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\frac{a}{1+a^x}\mathrm{d}x, (a>0)$ 的敛散性，如果收敛，讨论是否绝对收敛.

六、（10 分）讨论数项级数 $\sum_{n=1}^\infty(\sqrt[n]{n}-1)^p, (p>0)$ 的敛散性.

七、（15 分）讨论数项级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}{n^\alpha}, (\alpha>0)$ 的敛散性，如果收敛，讨论是否绝对收敛.

八、（10 分）设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，处处大于 0，且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷积分 $\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 证明：如果 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，则无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且存在 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 成立.

九、（10 分）试构造一个发散的数项级数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$，使得它满足 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$，并且对该级数加上一些括号后得到的级数是收敛的.