2024/9/14

1.

设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域, $z = f(x, y)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数, 且对 $\forall (x, y) \in D$, 有 $f(x, y) > 0$. 再设 $z = g(x, y)$ 在 D 上有定义, 且$\exists (x_0, y_0) \in D$ s.t. $g(x_0, y_0) > 0$, 以及 $f(x, y) = g(x, y)$, 对 $\forall (x, y) \in \overline{D} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ 成立. 问:

1. 当 $g(x_0, y_0)$ 满足什么条件时, $\{(x, y, z)|(x, y) \in D, 0 < z < g(x, y)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的开集?
2. 当 $g(x_0, y_0)$ 满足什么条件时, $\{(x, y, z)|(x, y) \in \overline{D}, 0 \leq z \leq g(x, y)\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭集?

Answer:

1. $g(x_0, y_0) \leq f(x_0, y_0)$
2. $g(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_0)$

Proof:
注意到 $g(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$ 时,两问的要求都得到了满足,分别设得到了开集A和闭集B,此时 $g(x_0, y_0)$ 的变化相当于为原集合并/割了一条线段,设为 $A \cup L_+, B \cup L_+, A \setminus L_-, B \setminus L_-$. 多出 L_+ 等价于为原集合增加孤立点,减去L_-等价于原集合的补集增加孤立点,因此只有$A \cup L_-$开,只有$B \setminus L_-$闭.
从而1和2要求的充要条件分别是$g(x_0, y_0) \leq f(x_0, y_0)$和$g(x_0, y_0) \geq f(x_0, y_0)$

2.

证明函数 $f(x, y) = \sqrt{xy}$ 在闭区域 $D = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}$ 上不一致连续.

Proof:
对给定的 ϵ 和 $\forall \delta$, 令 $\mathbf{x}_1 = (\lceil \frac{2\epsilon^2}{\delta} \rceil, 0), \mathbf{x}_2 = (\lceil \frac{2\epsilon^2}{\delta} \rceil, \frac{\delta}{2})$.
此时 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \frac{\delta}{2}$, 而 $|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| = \sqrt{\lceil \frac{2\epsilon^2}{\delta} \rceil \frac{\delta}{2}} \geq \epsilon$.
因此不一致连续.

3.

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 它的最大值为 M, 最小值为 m. 证明: $\forall c\in(m,M)$, 存在无限多个 $(\xi,\eta)\in D$, s.t. $f(\xi,\eta)=c$.

Proof:
当 $M=m$ 时, 结论平凡. 当 $M>m$ 时, 设 $f(x_1,y_1)=M$, $f(x_2,y_2)=m$, 则 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 是不同的两个点, 它们之间存在无穷多条两两交集仅有端点的道路. 根据中值定理, 对于每一条道路, $\exists(\xi,\eta)\in D$, s.t. $f(\xi,\eta)=c$, 因此结论成立.

4.

设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义, 且对固定的 x, $f(x,y)$ 是 y 的连续函数, 对固定的 y , $f(x,y)$ 是 x 的连续函数. 证明：当满足下列条件之一时, 则 $f(x,y)$ 在 D 内连续:

1. 对固定的 x, $f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数;
2. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ s.t. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$, 对 $\forall x\in[0,1]$, $\forall y_1,y_2\in[0,1]$, 只要 $|y_1-y_2|<\delta$. 即 $f(x,y)$ 关于 y 一致连续.

Proof:
对于固定的 y_0，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|y-y_0|<\delta$ 时,

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$$

对 $\forall x\in[0,1]$ 成立，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证明1.
考虑某个固定的 x，由介值原理，存在 $\delta_x>0$，使得

$$f(x,y_0-\delta_x)-\epsilon<f(x,y_0)<f(x,y_0+\delta_x)$$

并且

$$f(x,y_0-\delta_x)<f(x,y_0)<f(x,y_0+\epsilon)+\delta_x),$$

因此，当 $|y-y_0|<\delta_x$ 时，有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon。$$

取 $\delta=\min\{\delta_x,\delta_y\}$，当 $|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立

证明2.

考察 D 上的任一点 (x_0, y_0)，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $x \in N(x_0, \delta_1)$ 时，有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

存在 $\delta_2 > 0$，当 $x \in [0, 1]$ 且 $y \in N(y_0, \delta_2)$ 时，有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当 $(x, y) \in N((x_0, y_0), \delta)$ 时，有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。$$

故 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续，从而 $f(x, y)$ 在 D 上连续。证毕。

5.

设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个非空开集, 证明：向量函数 $f : U \to \mathbb{R}^m$ 在 U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集.

Proof:

- 必要性: 假设 U_1 的原像 $f^{-1}(U_1)$ 中存在孤立点 x_0. 由于 $f(x_0)$ 是 U_1 的聚点, $\exists \epsilon > 0$ s.t. $f(x_0) \in U_1$ 并且 $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset U_1$. 由 f 的连续性, $\exists \delta > 0$ s.t. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(U_1)$, 这与 x_0 是 $f^{-1}(U_1)$ 中的孤立点矛盾. 因此, $f^{-1}(U_1)$ 是开集, 即开集的原像是开集.
- 充分性: 假设 f 在 $x_0 \in U$ 处不连续, 则 $\exists \epsilon > 0$ s.t.$\forall \delta > 0$, $\exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ s.t. $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. 这意味着开集 $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ 的原像 $f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$ 中存在孤立点 x_0, 这与开集的原像是开集矛盾. 因此, f 在 U 上连续.

2024/9/18

1.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，映射 $T : D \to D$，且存在常数 $\theta \in [0,1), k \in \mathbb{N}$，使得对任意 $x, y \in D$，都有

$$\|T^k(x) - T^k(y)\| \leq \theta \|x - y\|$$

证明：T 有唯一的不动点。

唯一性:
假设 a, b 都是 T 的不动点, $\|a-b\| \neq 0$, 则有,

$$\|a-b\| = \|T^k(a) - T^k(b)\| \leq \theta \|a-b\| \Rightarrow 1 \leq \theta$$

矛盾, 因此 T 最多只有一个不动点.
以上唯一性证明对 T^k 同样成立, 也即 $S = T^k$ 最多只有一个不动点
存在性:
任取 $a_0 \in D$, 生成点列 $\{a_n\}$ $s.t.$ $a_{n+1} = T(a_n)$, 设 $c = \max_{i \in [n]} \|a_i - a_{i-1}\|$
注意到

$$\|a_{n+1} - a_n\| \leq \theta^{[n/k]} \|T(a_{n-k[n/k]}) - a_{n-k[n/k]}\| \leq \theta^{n/k} c$$

从而

$$\|a_m - a_n\| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \|a_{i+1} - a_i\| \leq \sum_{i=n}^{m-1} \theta^{i/k} c = \frac{\theta^{n/k} - \theta^{m/k}}{1 - \theta^{1/k}} c \to 0,\ (m > n \to +\infty)$$

因此 $\{a_n\}$ 是柯西列,设其极限为 a ,则有,

$$\begin{aligned}\|T^k(a) - a\| &\leq \|T^k(a) - T^k(a_n)\| + \|a_{n+k} - a\| \\ &\leq \theta \|a - a_n\| + \|a_{n+k} - a\| \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

因此 a 是 T^k 的唯一不动点, 从而有 $T^k(T(a))=T^{k+1}(a)=T(T^k(a))=T(a)$, 因此$T(a)$ 也是 T^k 的不动点, 从而 $T(a)=a$, 也即 T 存在不动点

2.

设函数 $u=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n$ 中存在各个偏导数，且所有偏导数在该邻域内有界，证明 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

同时，举例说明存在这样的函数 $u=g(x)$，它的各个偏导数在 x_0 的任何邻域内无界，但它在 x_0 点连续。

Proof:
利用微分中值定理,注意到

$$\begin{aligned}&f(x_1+\Delta x_1,\dots x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\\=&f(x_1+\Delta x_1,\dots x_{i-1}+\Delta x_{i-1},x_i,\dots,x_n)\\+&\Delta x_i f'_{x_i}(x_1+\Delta x_1,\dots x_i+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)\end{aligned}$$

令 $c=\max_{i\in[n]}f'_{x_i}(x_1+\Delta x_1,\dots x_i+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$,令 i 遍历 $[n]$ 联立上式得,

$$f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})\le c\left(\sum_{i\in[n]}|\Delta x_i|\right)\to 0,\ (\sum_{i\in[n]}|\Delta x_i|\to 0)$$

从而 $\lim_{E\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$, 也即 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续
Example:
令 $\boldsymbol{x}_0=(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

连续 : $|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0|\le|x^2+y^2|\le|x|+|y|<\epsilon$
偏导数无界 : $f'_x=2x\left(\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$此时令$y=0,x=\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$,则有

$$f'_x = -2\sqrt{2k\pi} \to -\infty,\ (k \to +\infty)$$

f'_y同理

3.

举例说明在 $\mathbb{R}^2$ 内存在函数 $z = f(x, y)$，使得 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 内处处不连续，但它在原点处存在两个偏导数。

Example:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \ or \ y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x, y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

处处不连续: 由有理数和无理数的稠密性, 任一点的邻域一定同时存在函数值为 1 和 0 的点
存在两个偏导数: x 轴和 y 轴上点都是 1 , 因此原点处偏导数都存在且值为 0

4.

求函数 $u = \ln(1 + \|\boldsymbol{x}\|)$ 的各个偏导数，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

规定 $x_{-i}^2 = \sum_{j \neq i} x_j^2$, 则有 $u = \ln(1 + \sqrt{x_i^2 + x_{-i}^2})$, 此时,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{x_i^2 + x_{-i}^2 + \sqrt{x_i^2 + x_{-i}^2}} = \frac{x_i}{\sum_{j \in [n]} x_j^2 + \sqrt{\sum_{j \in [n]} x_j^2}}$$

5.

求函数 $f(x) = \ln(\|x\|)$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，的全微分。

$$df = \sum_{i \in [n]} \frac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|^2} dx_i$$