20240930作业

1. 设$u=f(\boldsymbol{x})$在区域$D\subset\mathbb{R}^n$上各偏导连续、有界.

   (1) 如果D是凸的, 证明$f(\boldsymbol{x})$在区域D上一致连续.

   (2) 如果D不是凸的, 举例说明$f(\boldsymbol{x})$在区域D上有可能不一致连续.

2. 设定义在凸区域$D\subset\mathbb{R}^n$上的可微映射$\boldsymbol{f}$满足$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\ \forall\boldsymbol{x}\in D$,
   证明$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\equiv(c,\cdots,c)^T$为常值映射.

3. 设$u(x,y),v(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$,
   且$\exists C>0$ s.t. $(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2\geqslant C\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]$,
   $\forall(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2,\ u_i=u(x_i,y_i),v_i=v(x_i,y_i),\ i=1,2.$
   证明: $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\neq 0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$

4. 设f具有二阶连续导数, 求函数$z=f(x^2+y^2,xy)$的所有二阶偏导数.

5. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\ln(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i)$, 其中$a_i,(i=1,2,...,n)$ 为常数. 求函数的高阶偏导数$\dfrac{\partial^{\sum\limits_{i=1}^n m_i}f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}$.