13. 多元函数的极限和连续

习题 13.1　证明 $\mathbb{R}^n$ 中两点间的距离满足三角不等式：对 $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$，成立

$$|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|.$$

分析　本题考察两点间的距离的定义式.

证明　设 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，$\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$，$\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$，并令 $a_i=x_i-y_i$，$b_i=y_i-z_i$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$，则

$$|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^2\le\sum_{i=1}^n\left(a_i^2+b_i^2\right)+2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2},$$

由柯西—施瓦茨不等式知最后一式成立，于是命题成立．证毕.

习题 13.2　若 $\lim\limits_{k\to\infty}|\mathbf{x}_k|=+\infty$，则 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\left\{\mathbf{x}_k=\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right)\right\}$ 趋于 ∞，试判断下列命题是否正确：

(1) 对 $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$，序列 $\{x_i^k\}$ 趋于 ∞；

(2) $\exists i_0\in\{1,2,\ldots,n\}$，使得序列 $\{x_{i_0}^k\}$ 趋于 ∞.

分析　考察满足下述要求的点列 $\left\{\mathbf{x}_k=\left(x_1^k,x_2^k,\ldots,x_n^k\right)\right\}$：$x_i^k=\begin{cases}k, & k\equiv i\pmod n,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

解答　结论均是否定的.

习题 13.3　求下列集合的聚点集：

(1) $E=\left\{\left(\dfrac{q}{p},\dfrac{q}{p},1\right)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,p,q\in\mathbb{N},(p,q)=1,q<p\right\}$；

(2) $E=\left\{\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k,\sin\dfrac{k\pi}{2}\right)\,\middle|\,k\in\mathbb{N}\right\}$；

(3) $E=\left\{\left(r\cos\left(\tan\dfrac{\pi}{2}r\right),r\sin\left(\tan\dfrac{\pi}{2}r\right)\right)\,\middle|\,r\in[0,1)\right\}$.

分析　本题考察成为聚点的充要条件.

证明　(1) $E'=\left\{(x,x,1)\middle|x\in[0,1]\right\}$；

(2) $E'=\left\{(1,-1),(1,0),(1,1)\right\}$；

(3) $E'=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2=1\right\}$.

习题 13.4　求下列集合的内部、外部、边界及闭包：

(1) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x,y>0,z=1\right\}$；

(2) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x>0,x^2+y^2-2x>1\right\}$.

分析　本题考察集合的内部、外部、边界和闭包.

证明　(1) $E^\circ=\varnothing$，$\left(E^c\right)^\circ=\mathbb{R}^3\setminus\left\{(x,y,1)\middle|x,y\geq 0\right\}$，$\partial E=\overline{E}=\left\{(x,y,1)\middle|x,y\geq 0\right\}$；

(2) $E^\circ=E$，$\left(E^c\right)^\circ=\mathbb{R}^3\setminus\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,x^2+y^2-2x\geq 1\right\}$，

$\partial E=\left\{(x,y)\middle|x=0,y^2\geq 1\right\}\cup\left\{(x,y)\middle|x>0,x^2+y^2-2x=1\right\}$，$\overline{E}=\left\{(x,y)\middle|x\geq 0,x^2+y^2-2x\geq 1\right\}$.

评注　本题的结论具有鲜明的几何意义：(1)的图像是空间直角坐标系中平面$z=1$上在第一卦限的部分，(2)的图像是平面直角坐标系中y轴以右的部分挖去以点$(1,0)$为圆心、$\sqrt{2}$为半径的圆.

习题 13.5　设$\left\{(x_k,y_k)\right\}\subset\mathbb{R}^2$是一个点列，判断如下命题是否为真：点列$\left\{(x_k,y_k)\right\}$在$\mathbb{R}^2$中有聚点的充分必要条件是$\left\{x_k y_k\right\}$在$\mathbb{R}$中有聚点.

分析　必要性的反例如$\left\{\left(0,\frac{1}{k}\right)\middle|k\in\mathbb{N}\right\}$，点列有聚点$(0,0)$，而单元集$\{0\}$没有聚点；充分性的反例如$\left\{\left(k+1,\frac{1}{k}\right)\middle|k\in\mathbb{N}\right\}$，点列没有聚点，而$\left\{\frac{k+1}{k}\right\}$有聚点 1.

解答　结论是否定的.

习题 13.6　设$E\subset\mathbb{R}^n$，求证：

(1) $\overline{E}=E^\circ\cup\partial E$；

(2) $E'=\overline{E}'$.

分析　根据集合的内部、边界、闭包和导集的定义验证即可.

证明　(1) 由$\left(\overline{E}\right)^c=\left(E^c\right)^\circ=\left(E^\circ\cup\partial E\right)^c$，知$\overline{E}=E^\circ\cup\partial E$. 证毕.

(2) 由 $\overline{E}'=\left(E\cup E'\right)'=E'\cup\left(E'\right)'$，知只需证 $\left(E'\right)'\subseteq E'$．事实上，对 $\forall\mathbf{x}\in\left(E'\right)',\delta>0$，有 $U_0\left(\mathbf{x},\dfrac{\delta}{2}\right)\cap E'\neq\varnothing$，而对 $\forall\mathbf{x}'\in E',\delta>0$，有 $U_0\left(\mathbf{x}',\dfrac{\delta}{2}\right)\cap E\neq\varnothing$，利用习题 13.1 的结论即得，对 $\forall\mathbf{x}\in\left(E'\right)',\delta>0$，有 $U_0\left(\mathbf{x},\delta\right)\cap E\neq\varnothing$，故 $\mathbf{x}\in E'$．证毕．

评注　(1) 在某些教科书中，集合的边界 ∂E 就定义为 $\overline{E}\setminus E^\circ$．

(2) 集合的导集的导集仍包含于集合的导集，这是基本的结论．

习题 13.7　设 $\left\{A_\lambda\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合，求证：

(1) 当 Λ 为有限指标集时，成立 $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$，$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^\circ\subseteq\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ$；

(2) 对任意的指标集，成立 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^\circ\subseteq\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ$，$\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$．

分析　对两道题，均只需要证其中的一半．以(1)题为例，若 $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ 成立，分别对 A_λ 取补集，得 $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c}\subseteq\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda^c}$，再对两边取补集，由德 • 摩根公式，有

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(A_\lambda\right)^\circ=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\overline{A_\lambda^c}\right)^c=\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda^c}\right)^c\subseteq\left(\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c}\right)^c=\left(\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c\right)^c\right)^\circ=\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ,$$

即 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^\circ\subseteq\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^\circ$．(2)题的思路是类似的．

证明　(1) $\overline{A_\lambda}$ 是闭集，Λ 有限，故 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ 也是闭集，从而 $\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\overline{\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}}=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$．证毕．

(2) $\overline{A_\lambda}$ 是闭集，故 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ 也是闭集，从而 $\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subseteq\overline{\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}}=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$．证毕．

评注　事实上，(1)题的结论可以加强为等号必然成立，(2)题却容易找到不取等的例子．

习题 13.8　设 $E\subset\mathbb{R}^n$，求证：

(1) E' 是闭集；

(2) ∂E 是闭集．

分析　根据闭集的定义或成为闭集的等价命题 $E=\overline{E}$ 验证即可．

证明　(1) 由习题 13.6 的评注，$\left(E'\right)'\subseteq E'$，知 $E'=E'\cup\left(E'\right)'=\overline{E'}$，故 E' 是闭集．证毕．

(2) 由 $E^\circ,\left(E^c\right)^\circ$ 是开集，知 $E^\circ\cup\left(E^c\right)^\circ$ 是开集，故 $\partial E=\left(E^\circ\cup\left(E^c\right)^\circ\right)^c$ 是闭集．证毕．

评注　我们又得到一个基本结论：集合的边界的导集仍包含于集合的边界．

习题 13.9　设 $E\subset\mathbb{R}^2$，记 $E_1=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\exists(x,y)\in E\right\}$，$E_2=\left\{y\in\mathbb{R}\middle|\exists(x,y)\in E\right\}$，判断下列命题是否为真：

(1) E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开（闭）集时，E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开（闭）集；

(2) E_1 和 E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开（闭）集时，E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开（闭）集.

分析　(1) 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集 $E=\left\{\left(\frac{1}{k},k\right)\middle|k\in\mathbb{N}\right\}$，$E_1=\left\{\frac{1}{k}\middle|k\in\mathbb{N}\right\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的开集．对开集，对 $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in E=E^c$，$\exists\delta>0$，使得 $N(\mathbf{x},\delta)\subset E$，故对 $\forall x_i\in E_i$，有 $N(x_i,\delta)\subset E_i$，$i=1,2$，故 E_1,E_2 均为 $\mathbb{R}$ 中的开集.

(2) 考虑 $E=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2<4\right\}$，$E_1=E_2=(-2,2)$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的开集，而 E 不为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集；再考虑 $E=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2\le 4\right\}$，$E_1=E_2=[-2,2]$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的闭集，而 E 不为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

解答　(1) 对开集，结论是肯定的；对闭集，结论是否定的.

(2) 结论是否定的.

评注　其中的真命题可以推广为：设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，则 $E_i=\left\{x_i\in\mathbb{R}\middle|\exists(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E\right\}$，$i=1,2,\dots,n$ 均为 $\mathbb{R}$ 中的开集.

习题 13.10　构造 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘 $\Delta=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$ 上的一个点列 $\{(x_k,y_k)\}$，使得它的点构成的集合的聚点集恰为单位圆周 $\partial\Delta$.

分析　考虑极坐标形式的点列 $\{(r_k\cos\theta_k,r_k\sin\theta_k)\}\left(r_k\in[0,1),\theta_k\in[0,2\pi)\right)$，其聚点集 $\partial\Delta=\{(\cos\theta,\sin\theta)\}$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=1$ 且 $\{\theta_k\}$ 有收敛于 $[0,2\pi)$ 中任意实数的子列．注意两者的收敛是独立的过程，因此可以很方便地构造出很多满足要求的点列.

解答　答案不唯一，如

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\cos\pi,\frac{1}{2}\sin\pi\right),\left(\frac{1}{2}\cos2\pi,\frac{1}{2}\sin2\pi\right),\left(\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi}{3},\frac{2}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right),\right.$$

$$\left(\frac{2}{3}\cos\frac{4\pi}{3},\frac{2}{3}\sin\frac{4\pi}{3}\right),\left(\frac{2}{3}\cos2\pi,\frac{2}{3}\sin2\pi\right),\dots,\left(\frac{n}{n+1}\cos\frac{1}{n+1}2\pi,\frac{n}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}2\pi\right),$$

$$\left.\left(\frac{n}{n+1}\cos\frac{2}{n+1}2\pi,\frac{n}{n+1}\sin\frac{2}{n+1}2\pi\right),\dots,\left(\frac{n}{n+1}\cos2\pi,\frac{n}{n+1}\sin2\pi\right),\dots\right\}.$$

评注　也可以参考习题 13.3.3 的结论.

习题 13.11　设 $E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$ 为两个非空集合，定义 E_1,E_2 间的距离如下：

$$d\left(E_1,E_2\right)=\inf_{\mathbf{x}\in E_1,\mathbf{y}\in E_2}\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|.$$

(1) 举例说明存在开集 E_1,E_2，使得 $E_1\bigcap E_2=\varnothing$，但 $d\left(E_1,E_2\right)=0$；

(2) 举例说明存在闭集 E_1,E_2，使得 $E_1\bigcap E_2=\varnothing$，但 $d\left(E_1,E_2\right)=0$；

(3) 求证：若紧集 E_1,E_2 满足 $d\left(E_1,E_2\right)=0$，则必有 $E_1\bigcap E_2\neq\varnothing$.

分析　(3) 根据成为紧集的等价命题验证即可.

解答　(1) 答案不唯一，如 $E_1=\left(-1,0\right),E_2=\left(0,1\right)\subset\mathbb{R}$.

(2) 答案不唯一，如 $E_1=\left\{\left(x,0\right)\middle|x\in\mathbb{R}\right\},E_2=\left\{\left(x,\mathrm{e}^x\right)\middle|x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathbb{R}^2$.

(3) 由 $d\left(E_1,E_2\right)=0$，知 $\exists\left\{\mathbf{x}_k\right\}\subseteq E_1,\left\{\mathbf{y}_k\right\}\subseteq E_2$，使得 $\left\{\left|\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\right|\right\}$ 收敛于 0，即 $\left\{\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\right\}$ 收敛于 $\mathbf{0}$. 由 E_1 有界，知 $\left\{\mathbf{x}_k\right\}$ 是有界点列. 又由波尔查诺—魏尔斯特拉斯定理，知其存在收敛子列 $\left\{\mathbf{x}_{k_j}\right\}$. $\left\{\mathbf{x}_{k_j}-\mathbf{y}_{k_j}\right\}$ 显然收敛，故 $\left\{\mathbf{y}_{k_j}\right\}$ 也收敛. 由 E_1 是闭集，知 $\left\{\mathbf{x}_{k_j}\right\}$ 的极限 $\mathbf{x}_0\in E_1$，同理 $\left\{\mathbf{y}_{k_j}\right\}$ 的极限 $\mathbf{y}_0\in E_2$. 又由 $\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0=\mathbf{0}$，知 $\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0\in E_1\bigcap E_2$，故 $E_1\bigcap E_2\neq\varnothing$. 证毕.

习题 13.12　设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集，$E\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，且 $F\subset E$，求证：存在开集 O，使得 $F\subset O\subset\overline{O}\subset E$.

分析　利用有限覆盖定理.

解答　对 $\forall\mathbf{x}\in F\subset E$，$\exists\delta_{\mathbf{x}}>0$，使得 $U\left(\mathbf{x},\delta_{\mathbf{x}}\right)\subset E$. 而 $\bigcup_{\mathbf{x}\in F}U\left(\mathbf{x},\dfrac{\delta_{\mathbf{x}}}{2}\right)$ 是 F 的一个开覆盖，必存在一个有限子覆盖 $O=\bigcup_{i=1}^{n}U\left(\mathbf{x}_i,\dfrac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2}\right)$，满足 $F\subset O\subset E$. 再设 $O_1=\bigcup_{i=1}^{n}U\left(\mathbf{x}_i,\delta_{\mathbf{x}_i}\right)$，则有 $O\subset\overline{O}\subset O_1\subset E$，故 $F\subset O\subset\overline{O}\subset E$. 证毕.

习题 13.13　求下列函数的定义域：

(1) $f\left(x,y,z\right)=\ln\left(y-x^2-z^2\right)$；

(2) $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$；

(3) $f\left(x,y,z\right)=\dfrac{\ln\left(x^2+y^2-z\right)}{\sqrt{z}}$.

分析　本题考查多元函数的定义域的概念.

解答　(1) $\left\{(x,y,z)\middle| y-x^2-z^2>0\right\}$.

(2) $\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2-z^2\ge 0\right\}$.

(3) $\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2>z>0\right\}$.

习题 13.14　确定下列函数极限是否存在，若存在则求出极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}$，其中 $E=\left\{(x,y)\middle| y>x^2\right\}$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\ln\left(x^2+y^2\right)$；

(3) $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$；

(4) $\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|+|y|}\right)^{\frac{x^2}{|x|+|y|}}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\left(\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)^{x+y}$；

(6) $\lim\limits_{(x,y,z)\in E\to(0,0,0)} x^{yz}$，其中 $E=\left\{(x,y,z)\middle| x,y,z>0\right\}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)}\dfrac{\sin xyz}{x^2+z^2}$；

(8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；

(9) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{|\mathbf{x}|^2}$.

分析　(1)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}\right| &\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y}\right|=\left|y^2-x^2y+x^4+\frac{x^3\left(1-x^3\right)}{x^2+y}\right|\\ &\le\left|y^2-x^2y+x^4\right|+\left|\frac{x^3\left(1-x^3\right)}{x^2+y}\right|<\left|y^2-x^2y+x^4\right|+\left|\frac{x^3\left(1-x^3\right)}{x^2+x^2}\right|\\ &=\left|y^2-x^2y+x^4\right|+\left|\frac{x\left(1-x^3\right)}{2}\right|\to 0\left((x,y)\to(0,0)\right).\end{aligned}$$

(2) 不妨设 $x^2+y^2<1$，则

$$\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right|=\left|4x\ln\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right|<\left|\frac{4x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\right|<\left|\frac{4x}{\sqrt{|x|}}\right|<4\sqrt{|x|}\to 0\left((x,y)\to(0,0)\right).$$

(3) 不妨设 $x^2+y^2>1$，则

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}\right|=\left|\mathrm{e}^{\ln\left(x^2+y^2\right)-(|x|+|y|)}\right|<\left|\mathrm{e}^{4\ln\sqrt[4]{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\left|\mathrm{e}^{4\sqrt[4]{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$=\left|\mathrm{e}^{4-\left(\sqrt[4]{x^2+y^2}-2\right)^2}\right|\to 0\left(|(x,y)|\to+\infty\right).$$

(4) 考虑点列 $\{(0,k)\}$ 和 $\{(k,0)\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^0=1\neq \mathrm{e}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

(5) 考虑点列 $\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$ 和 $\left\{\left(0,\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{2}{k}}=1\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}0^{\frac{1}{k}}$.

(6) 考虑点列 $\left\{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{\sqrt{k}},\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}$ 和 $\left\{\left(\frac{1}{k!},\frac{1}{\sqrt{k}},\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}=1\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}$.

(7) 考虑点列 $\left\{\left(\frac{1}{k},1,\frac{1}{k}\right)\right\}$ 和 $\left\{\left(0,1,\frac{1}{k}\right)\right\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}}=\frac{1}{2}\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{k^2}}$.

(8) $\left|\frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|\leq\left|\frac{xyz}{\sqrt{3}\sqrt[3]{xyz}}\right|=\frac{|xyz|^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}}\to 0\left((x,y,z)\to(0,0,0)\right)$.

(9) 考虑点列 $\left\{\left(\frac{1}{k},0,0,\ldots,0\right)\right\}$ 和 $\left\{\left(\frac{1}{k},-\frac{1}{k},0,0,\ldots,0\right)\right\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=1\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{0}{\frac{2}{k^2}}$.

解答 (1) 存在，$\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y}=0$.

(2) 存在，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}x\ln\left(x^2+y^2\right)=0$.

(3) 存在，$\lim\limits_{|(x,y)|\to+\infty}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}=0$.

(4)(5)(6)(7) 不存在.

(8) 存在，$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$.

(9) 不存在.

习题 13.15 试给出三元函数 $f(x,y,z)$ 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)$ 的定义，并构造一个三元函数 $f(x,y,z)$，使得它满足：$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在.

分析 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 的定义：设 $f(x,y)$ 在 $E\subset\mathbb{R}^2$ 上有定义，且 $N_0((x_0,y_0),\delta_0)\subset E(\delta_0>0)$. 若在 $N_0((x_0,y_0),\delta_0)$ 上，对每个固定的 $x\neq x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，则记 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$.

考虑13.2.3正文中对二元函数的情形的构造：设 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，而对 $\forall x\neq 0,\dfrac{1}{k\pi}(k\in\mathbb{Z})$，$\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在.

解答 三元函数 $f(x,y,z)$ 的累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)$ 的定义：设 $f(x,y,z)$ 在 $E\subset\mathbb{R}^3$ 上有定义，且 $N_0((x_0,y_0,z_0),\delta_0)\subset E(\delta_0>0)$. 若在 $N_0((x_0,y_0,z_0),\delta_0)$ 上，对每个固定的 $x\neq x_0$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)=\varphi(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，则记 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}f(x,y,z)=A$.

考虑 $f(x,y,z)=\begin{cases}(x+y+z)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{1}{z}, & xyz\neq 0,\\ 0, & xyz=0\end{cases}$，则有 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}f(x,y,z)=0$，而对 $\forall x=\dfrac{1}{\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi}(k\in\mathbb{Z})$，$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{z\to 0}f(x,y,z)$ 不存在.

习题 13.16 设 $y=f(x)$ 在 $U_0(0,\delta_0)\subset\mathbb{R}$ 中有定义，满足 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且对 $\forall x\in U_0(0,\delta_0)$，有 $f(x)\neq 0$. 记 $E=\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$，求证：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)}$ 不存在；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\dfrac{yf^2(x)}{f^4(x)+y^2}$ 不存在.

分析 类似于习题 13.14，总的想法还是让 (x,y) 以两种不同的特殊方式趋于 $(0,0)$，证明在这两种方式下的极限不相等，从而原极限不存在.

证明　(1) 任取 $x_1\in U_0\left(0,\delta_0\right)$，由 $f\left(x_1\right)\neq 0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0$，知 $\exists x_2\in U_0\left(0,\dfrac{\left|x_1\right|}{2}\right)$，使得 $f\left(x_2\right)\in U_0\left(0,\dfrac{\left|f\left(x_1\right)\right|}{2}\right)$．同理，假设 x_{n-1} 已被取出，则 $\exists x_n\in U_0\left(0,\dfrac{\left|x_{n-1}\right|}{2}\right)$，使得 $f\left(x_n\right)\in U_0\left(0,\dfrac{\left|f\left(x_{n-1}\right)\right|}{n}\right)$．重复上述操作，得到无穷小量 $\left\{x_n\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{f\left(x_{n+1}\right)}{f\left(x_n\right)}\right\}$．考虑趋于 $(0,0)$ 的点列 $\left\{\left(x_k,x_k\right)\right\}$ 和 $\left\{\left(x_k,x_{k+1}\right)\right\}$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f\left(x_k\right)f\left(x_k\right)}{f^2\left(x_k\right)+f^2\left(x_k\right)}=\dfrac{1}{2}\neq 0=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f\left(x_k\right)f\left(x_{k+1}\right)}{f^2\left(x_k\right)+f^2\left(x_{k+1}\right)}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\dfrac{f\left(x\right)f\left(y\right)}{f^2\left(x\right)+f^2\left(y\right)}$ 不存在．证毕．

(2) 考虑 $\left(x,y\right)$ 分别沿曲线 $y=f^2\left(x\right)$ 和 $y=\dfrac{1}{2}f^2\left(x\right)$ 趋于 $\left(0,0\right)$，有 $\lim\limits_{y\to 0+0}\dfrac{yy}{y^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{2}{5}=\lim\limits_{y\to 0+0}\dfrac{y\cdot 2y}{\left(2y\right)^2+y^2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(0,0)}\dfrac{yf^2\left(x\right)}{f^4\left(x\right)+y^2}$ 不存在．证毕．

习题 13.17　试构造二元函数 $f\left(x,y\right)\left(\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right)$，使得对 $k=1,2,\dots,K$，有 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,x^k\right)=0$，但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)$ 不存在．

分析　本题以构造性的角度验证了这一事实：即使 $f\left(x,y\right)$ 在 $\left(x,y\right)$ 以相当多种不同的特殊方式趋于 $\left(0,0\right)$ 时能得到相等极限，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)$ 仍有可能不存在．

解答　答案不唯一，如 $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^{K+1}}{x^{K+1}+y}$，对 $k=1,2,\dots,K$，有 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,x^k\right)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x,x^{K+1}\right)=\dfrac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f\left(x,y\right)$ 不存在．

习题 13.18　设函数 $f\left(x,y\right)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上除直线 $x=a$ 与 $y=b$ 外处处有定义，并且满足：

(a) $\lim\limits_{y\to b}f\left(x,y\right)=g\left(x\right)$ 存在；(b) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x,y\right)=h\left(y\right)$ 一致存在．

求证：存在 $c\in\mathbb{R}$，使得有：

(1) $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f\left(x,y\right)=\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=c$；

(2) $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f\left(x,y\right)=\lim\limits_{y\to b}h\left(y\right)=c$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\in E\to(a,b)}f\left(x,y\right)=c$，其中 $E=\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(x,y\right)\middle|x=a\text{或}y=b\right\}$．

分析　注意“存在”与“一致存在”的区别：在$\varepsilon-\delta$语言下，“存在”的δ依赖于ε和x，而“一致存在”的δ仅依赖于ε．这使得(1)题可迅速获证，而(2)题需要借助于(1)题的结果．

证明　(1) 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得对$\forall x_1,x_2\in U_0(a,\delta),y\neq b$，有$\left|f(x_1,y)-h(y)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$，$\left|f(x_2,y)-h(y)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$；$\exists y_0\neq b$，使得$\left|f(x_1,y_0)-g(x_1)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$，$\left|f(x_2,y_0)-g(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$．故$\left|g(x_1)-g(x_2)\right|\leq\left|f(x_1,y_0)-h(y_0)\right|+\left|f(x_2,y_0)-h(y_0)\right|+\left|f(x_1,y_0)-g(x_1)\right|+\left|f(x_2,y_0)-g(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$．由柯西收敛准则，知$\lim\limits_{x\to a}g(x)$存在，记其为$c$．证毕．

(2) 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_0>0$，使得对$\forall x\in U_0(a,\delta_0),y\neq b$，有$\left|f(x,y)-h(y)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$；由(1)题，$\exists x_0\in U_0(a,\delta_0)$，使得$\left|g(x_0)-c\right|<\frac{\varepsilon}{3}$；$\exists\delta>0$，使得对$\forall y\in U_0(b,\delta)$，有$\left|f(x_0,y)-g(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$．故$\left|h(y)-c\right|\leq\left|f(x_0,y)-h(y)\right|+\left|g(x_0)-c\right|+\left|f(x_0,y)-g(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$，从而$\lim\limits_{y\to b}h(y)=c$．证毕．

(3) 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得对$\forall x\in U_0(a,\delta_1),y\neq b$，有$\left|f(x,y)-h(y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$；由(1)题，$\exists\delta_2>0$，使得对$\forall y\in U_0(b,\delta_2)$，有$\left|h(y)-c\right|<\frac{\varepsilon}{2}$．故$\left|f(x,y)-c\right|\leq\left|f(x,y)-h(y)\right|+\left|h(y)-c\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，从而$\lim\limits_{(x,y)\in E\to(a,b)}f(x,y)=c$．证毕．

习题 13.19　设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，函数$g(x)$在$[0,1]$上有唯一的第一类间断点$y_0=\frac{1}{2}$．试求函数$F(x,y)=f(x)g(y)$在$D=[0,1]\times[0,1]$上的全体间断点．

分析　$F(x,y)$在$\left\{(x,y)\middle|0\leq x,y\leq1,y\neq\frac{1}{2}\right\}$上连续，故我们只需讨论其在$\left\{\left(x,\frac{1}{2}\right)\middle|0\leq x\leq1\right\}$上的连续性．

解答　一方面，对$\forall x_0\in\left\{x\middle|0\leq x\leq1,f(x)\neq0\right\}$，若$F(x,y)$在$\left(x_0,\frac{1}{2}\right)$处连续，则$g(y)=\frac{F(x,y)}{f(x)}$在$y_0=\frac{1}{2}$处连续，矛盾，故$\left\{\left(x,\frac{1}{2}\right)\middle|0\leq x\leq1,f(x)\neq0\right\}$中的点都是$F(x,y)$的间断点．另一方面，对$\forall x_0\in\left\{x\middle|0\leq x\leq1,f(x)=0\right\}$，由连续性容易验证$\lim\limits_{(x,y)\to\left(x_0,\frac{1}{2}\right)}F(x,y)=F\left(x_0,\frac{1}{2}\right)=0$，故$F(x,y)$在$\left(x_0,\frac{1}{2}\right)$处连续．于是$F(x,y)$在$D$上的间断点集为$\left\{\left(x,\frac{1}{2}\right)\middle|0\leq x\leq1,f(x)\neq0\right\}$．

习题 13.20　设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上有定义，且对固定的 x，$f(x,y)$ 是 y 的连续函数，对固定的 y，$f(x,y)$ 是 x 的连续函数．求证：若 $f(x,y)$ 满足下列条件之一：

(1) 对固定的 x，$f(x,y)$ 是 y 的单调上升函数；

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $y_1,y_2\in[0,1]$ 且 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立，

则 $f(x,y)$ 在 D 上连续．

分析　方便起见，补充定义 $f(x,y)=\begin{cases} f(0,y), & x<0,0\le y\le 1,\\ f(1,y), & x>1,0\le y\le 1,\\ f(x,0), & y<0,\\ f(x,1), & y>1.\end{cases}$ 容易验证，$f(x,y)$ 在 ∂D 上的点处的连续性只取决于 $f(x,y)$ 在 D 上的性质，这样 ∂D 上的点的邻域就都有定义了．我们只需证明：若 $f(x,y)$ 满足：对固定的 y_0，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续．事实上，它是(2)的必要条件．对(1)，考虑某个固定的 x，由介值定理，$\exists\delta_x>0$，使得 $f(x,y_0+\delta_x)-\varepsilon<f(x,y_0)<f(x,y_0+\delta_x)$，$f(x,y_0-\delta_x)<f(x,y_0)<f(x,y_0-\delta_x)+\varepsilon$，故当 $|y-y_0|<\delta_x$ 时，有 $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$．取 $\delta=\min\limits_{x\in[0,1]}\{\delta_x\}>0$，则当 $|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$ 对 $\forall x\in[0,1]$ 成立，这说明它也是(1)的必要条件．

证明　考察 D 上的任一点 (x_0,y_0)，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in N(x_0,\delta_1)$ 时，有 $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$；$\exists\delta_2>0$，当 $x\in[0,1],y\in N(x_0,\delta_2)$ 时，有 $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$．取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则当 $(x,y)\in N((x_0,y_0),\delta)$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$ $+|f(x,y)-f(x,y_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，从而 $f(x,y)$ 在 D 上连续．证毕．

习题 13.21　设 $E\subset\mathbb{R}^n$，求证：向量函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x}):E\to\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbf{x}_0\in E$ 处连续的充分必要条件是对任何在 $U(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0),\delta)(\delta>0)$ 上连续的函数 $h(\mathbf{y})$，$h(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处连续．

分析　根据向量函数的连续的定义验证即可．

证明　必要性：由多元复合向量函数的连续性定理知其成立.

充分性：反设$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$在$\mathbf{x}_0$处不连续，则$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$的某一分量在$\mathbf{x}_0$处不连续，不妨设其为$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$的第$i\left(1\le i\le m\right)$分量．令$h\left(\mathbf{y}\right)=y_i$，其中$y_i$为$\mathbf{y}$的第$i$分量，则$h\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)\right)$在$\mathbf{x}_0$处不连续，矛盾．故$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$在$\mathbf{x}_0$处连续．证毕.

习题 13.22　设$U\subset\mathbb{R}^n$是一个非空开集，求证：向量函数$\mathbf{f}:U\to\mathbb{R}^m$在$U$上连续的充分必要条件是开集的原像是开集.

分析　根据向量函数的连续的定义验证即可.

证明　必要性：反设开集$U_1\subset\mathbb{R}^m$的原像$\mathbf{f}^{-1}\left(U_1\right)$中存在孤立点$\mathbf{x}_0$，由$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right)$是$U_1$的聚点，知$\exists\varepsilon>0$，使得$U\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right),\varepsilon\right)\subset U_1$．由$\mathbf{f}$的连续性，知$\exists\delta>0$，使得$\mathbf{f}\left(U\left(\mathbf{x}_0,\delta\right)\right)\subset U\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right),\varepsilon\right)$，故$U\left(\mathbf{x}_0,\delta\right)\subset\mathbf{f}^{-1}\left(U_1\right)$，这与$\mathbf{x}_0$是$\mathbf{f}^{-1}\left(U_1\right)$中的孤立点矛盾．故$\mathbf{f}^{-1}\left(U_1\right)$是开集，即开集的原像是开集.

充分性：反设$\mathbf{f}$在$\mathbf{x}_0\in U$处不连续，则$\exists\varepsilon>0$，使得对$\forall\delta>0$，$\exists\mathbf{x}_1\in U_0\left(\mathbf{x}_0,\delta\right)$，使得$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_1\right)\notin U\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right),\varepsilon\right)$，则开集$U\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right),\varepsilon\right)$的原像$\mathbf{f}^{-1}\left(U\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{x}_0\right),\varepsilon\right)\right)$有孤立点$\mathbf{x}_0$，这与开集的原像是开集矛盾，故$\mathbf{f}$在$U$上连续．证毕.

习题 13.23　设$D\subset\mathbb{R}^2$是一个有界区域，$z=f\left(x,y\right)$是$\overline{D}$上的连续函数，且对$\forall\left(x,y\right)\in D$，有$f\left(x,y\right)>0$．再设$z=g\left(x,y\right)$在$\overline{D}$上有定义，且存在$\left(x_0,y_0\right)\in D$，使得$g\left(x_0,y_0\right)>0$，以及对$\forall\left(x,y\right)\in\overline{D}\setminus\left\{\left(x_0,y_0\right)\right\}$，有$f\left(x,y\right)=g\left(x,y\right)$．问：

(1) 当$g\left(x_0,y_0\right)$满足什么条件时，$\left\{\left(x,y,z\right)\middle|\left(x,y\right)\in D,0<z<g\left(x,y\right)\right\}$是$\mathbb{R}^3$中的开集？

(2) 当$g\left(x_0,y_0\right)$满足什么条件时，$\left\{\left(x,y,z\right)\middle|\left(x,y\right)\in\overline{D},0\le z\le g\left(x,y\right)\right\}$是$\mathbb{R}^3$中的闭集？

分析　显然当$g\left(x_0,y_0\right)=f\left(x_0,y_0\right)$时，两问的要求都得到了满足．在此基础上，增大或减小$g\left(x_0,y_0\right)$，相当于延长或缩短直线$\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0\end{cases}$上的“线段”．对(1)题，当给定集合是开集时，缩短“线段”相当于使其补集并上了一个闭集，故得到的集合仍为开集；延长“线段”会使其出现孤立点，得到的集合就不是开集．对(2)题，当给定集合是闭集时，延长“线段”相当于使其并上了一个闭集，故得到的集合仍为闭集；缩短“线段”会使其补集出现孤立点，得到的集合就不是闭集.

解答　(1) $g(x_0,y_0)\le f(x_0,y_0)$.

(2) $g(x_0,y_0)\ge f(x_0,y_0)$.

习题 13.24　设 $E=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Q}\}$，求证：

(1) E 是可数集；

(2) $\mathbb{R}^2\setminus E$ 是连通集.

分析　根据可数集和连通集的定义验证即可.

证明　(1) 已知 $\mathbb{Q}$ 为可数集，故可将 $\mathbb{Q}$ 中所有的元素排成序列 $\{a_n\}$. 利用对角线排法把 E 排成序列 $\{b_n\}$，即 $b_{\frac{n(n-1)}{2}+i}=(a_{n+1-i},a_i)(n=1,2,\dots,1\le i\le n)$，这说明 E 是可数集．证毕.

(2) 从 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 中的任一点引出的射线都是不可数的，由(1)题结论，必有无穷多条射线包含于 $\mathbb{R}^2\setminus E$，故 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 中的任两点都存在一条道路，从而 $\mathbb{R}^2\setminus E$ 是连通集．证毕.

评注　(1)的结论可以推广为：有限个可数集的笛卡尔积仍为可数集.

习题 13.25　设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续，它的最大值为 M，最小值为 m．求证：对 $\forall c\in(m,M)$，存在无限多个 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=c$.

分析　注意到 D 是一个闭区域，任两点都存在无穷多条两两交集仅有端点的道路.

证明　当 $M=m$ 时，结论平凡．当 $M>m$ 时，设 $f(x_1,y_1)=M$，$f(x_2,y_2)=m$，则 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 是不同的两个点，它们存在无穷多条两两交集仅有端点的道路．对每一条道路用介值定理，都 $\exists(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=c$，故结论成立．证毕.

习题 13.26　设 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n(n\ge 2)$ 非退化矩阵，求证：$\exists\lambda>0$，对 $\forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，有 $|\mathbf{Ax}|\ge\lambda|\mathbf{x}|$.

分析　利用紧集上的连续函数的最值定理.

证明　当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时，显然 $|\mathbf{Ax}|\ge\lambda|\mathbf{x}|$ 对 $\forall\lambda>0$ 成立．当 $\mathbf{x}\ne\mathbf{0}$ 时，$\hat{\mathbf{x}}=\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ 为单位向量，设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$，则 $|\mathbf{Ax}|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\alpha}_2\mathbf{x}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\mathbf{x}\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\hat{\mathbf{x}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2\hat{\mathbf{x}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\hat{\mathbf{x}}\end{pmatrix}\right||\mathbf{x}|\triangleq f(\hat{\mathbf{x}})|\mathbf{x}|$．由 $\mathbf{A}$ 非退化，知 $f(\hat{\mathbf{x}})>0$ 恒成立．而 $f(\hat{\mathbf{x}})$ 在 $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\,\|\mathbf{x}|=1\}$ 上连续，故 $\exists\lambda>0$，使得 $f(\hat{\mathbf{x}})\ge\lambda$ 恒成立，即 $|\mathbf{Ax}|\ge\lambda|\mathbf{x}|$ 恒成立．证毕.

习题 13.27　设 $E\subset\mathbb{R}^n$，求证：函数 $f(\mathbf{x})=\inf\limits_{\mathbf{y}\in\mathbf{E}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

分析　根据一致连续的定义验证即可.

证明　由习题 13.1 的结论，对 $\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^n,\mathbf{y}\in E$，有 $|\mathbf{x}_2-\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|+|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，故 $f(\mathbf{x}_2)=\inf\limits_{\mathbf{y}\in\mathbf{E}}|\mathbf{x}_2-\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|+|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，即 $|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|\ge f(\mathbf{x}_2)-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，故 $f(\mathbf{x}_1)=\inf\limits_{\mathbf{y}\in\mathbf{E}}|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|\ge f(\mathbf{x}_2)-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，即 $f(\mathbf{x}_2)\le f(\mathbf{x}_1)+|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$. 同理有 $f(\mathbf{x}_2)\ge f(\mathbf{x}_1)-|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，故 $|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|\le|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|$，从而对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon>0$，当 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^n$ 且 $|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|<\delta$ 时，有 $|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)|<\delta=\varepsilon$，进而 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续. 证毕.

习题 13.28　求证：函数 $f(x,y)=\sqrt{xy}$ 在闭区域 $D=\{(x,y)|x,y\ge0\}$ 上不一致连续.

分析　利用不一致连续的等价命题.

证明　考虑点列 $\left\{\left(k,\dfrac{1}{k}\right)\right\}$ 和 $\{(k,0)\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\left(k,\dfrac{1}{k}\right)-(k,0)\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$，而

$$\lim_{k\to\infty}\left|f\left(k,\frac{1}{k}\right)-f(k,0)\right|=1\neq0,$$

故 $f(x,y)$ 在 D 上不一致连续. 证毕.

习题 13.29　试用有限覆盖定理与聚点定理分别证明 $\mathbb{R}^n$ 中紧集上的连续函数一致连续.

分析　利用一致连续的定义和不一致连续的等价命题.

证明　(1) 考虑紧集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$，对 $\forall\varepsilon>0,\mathbf{x}\in D$，$\exists\delta_{\mathbf{x}}>0$，使得对 $\forall\mathbf{y}\in U(\mathbf{x},\delta_{\mathbf{x}})\cap D$，有 $|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 注意到 $\left\{U\left(\mathbf{x},\dfrac{\delta_{\mathbf{x}}}{2}\right)\right\}_{\mathbf{x}\in D}$ 是 D 的一个开覆盖，故其存在有限子覆盖 $\left\{U\left(\mathbf{x}_i,\dfrac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2}\right)\right\}_{i=1}^n$. 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2}\right\}_{i=1}^n$，则 $\exists i\in\{1,2,\dots,n\}$，使得 $\mathbf{x}\in U\left(\mathbf{x}_i,\dfrac{\delta_{\mathbf{x}_i}}{2}\right)\subset U(\mathbf{x}_i,\delta_{\mathbf{x}_i})$，故对 $\forall\mathbf{y}\in U(\mathbf{x},\delta)$，有 $\mathbf{y}\in U(\mathbf{x}_i,\delta_{\mathbf{x}_i})$，从而 $|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{y})|\le|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)|+|\mathbf{f}(\mathbf{y})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，进而 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上一致连续. 证毕.

(2) 反设考虑紧集 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 不一致连续，则 $\exists\varepsilon_0>0,\{\mathbf{x}_k\},\{\mathbf{y}_k\}\subset\mathbb{R}^n$，使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $|\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k|<\dfrac{1}{k}$，$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)-\mathbf{f}(\mathbf{y}_k)|\ge\varepsilon$. 先后取出 $\{\mathbf{x}_k\},\{\mathbf{y}_k\}$ 的收敛子列后，其极限点 $\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0$ 必然相等，而 $|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-\mathbf{f}(\mathbf{y}_0)|\ge\varepsilon$，矛盾，故 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 D 上一致连续. 证毕.

习题 13.30　求证：函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^n$ 上一致连续的充分必要条件是存在 $\overline{U(\mathbf{0},1)}$ 上的连续函数 $g(\mathbf{x})$，使得在 $U(\mathbf{0},1)$ 上处处成立 $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$.

分析　充分性由习题 13.29 的结论立得，下证必要性.

证明　由 $f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{0},1)$ 上一致连续，知对任意单位向量 $\mathbf{x}$，$\exists\{\mathbf{x}_k\}\subset U(\mathbf{0},1)$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=\mathbf{x}$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\mathbf{x}_k)$ 收敛，并记 $g(\mathbf{x})=\lim\limits_{k\to\infty}f(\mathbf{x}_k)$. 任取满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}'_k=\mathbf{x}$ 的点列 $\{\mathbf{x}'_k\}\subset U(\mathbf{0},1)$，由 $f(\mathbf{x})$ 在 $U(\mathbf{0},1)$ 上一致连续，知

$$\left|\lim_{k\to\infty}f(\mathbf{x}_k)-\lim_{k\to\infty}f(\mathbf{x}'_k)\right|=\left|\lim_{k\to\infty}\left(f(\mathbf{x}_k)-f(\mathbf{x}'_k)\right)\right|=\lim_{k\to\infty}\left|f(\mathbf{x}_k)-f(\mathbf{x}'_k)\right|\le K\lim_{k\to\infty}\left|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}'_k\right|=0,$$

其中 $K>0$ 为仅依赖于 $f(\mathbf{x})$ 的常数，故 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\mathbf{x}'_k)=\lim\limits_{k\to\infty}f(\mathbf{x}_k)=g(\mathbf{x})$. 补充定义 $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$，$\mathbf{x}\in U(\mathbf{0},1)$，则 $g(\mathbf{x})$ 在 $\overline{U(\mathbf{0},1)}$ 上连续．证毕.

习题 13.31　求证：$\mathbb{R}^n$ 中任何开集都是可数个分支的并.

分析　由习题 13.24 的评注，$\mathbb{R}^n$ 中的有理点是可数的.

证明　对于任一区域，任取其上一点，其任一邻域都包含至少一个有理点，故任一区域都包含至少一个有理点，从而 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集包含的有理点到其所属分支的映射是满射，进而 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集的分支是可数的．证毕.

习题 13.32　试构造 $\Delta=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2<1\right\}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个同胚映射.

分析　本题考察同胚映射的定义.

解答　答案不唯一，如 $\sigma:\Delta\to\mathbb{R}^2$　$(x,y)\mapsto\left(\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{1-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

14. 多元微分学

习题 14.1　设函数$u=f\left(\mathbf{x}\right)$在$U\left(\mathbf{x}_0,\delta_0\right)\subset\mathbb{R}^n\left(\delta_0>0\right)$上存在各个偏导数，并且所有的偏导数在该邻域上有界，证明$f\left(\mathbf{x}\right)$在$\mathbf{x}_0$处连续；举例说明存在函数$u=g\left(\mathbf{x}\right)$，它在$\mathbf{x}_0$的某个邻域上存在无界的各个偏导数，但它在$\mathbf{x}_0$处连续．

分析　利用拉格朗日微分中值定理．

解答　设$\mathbf{x}_0=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，对$\forall\Delta x_i\in U\left(x_i,\delta_0\right)$，$\exists\theta_i\in\left(0,1\right)$，$i=1,2,\ldots,n$，使得

$$\begin{aligned}f\left(x_1+\Delta x_1,x_2,\ldots,x_n\right)&=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)+\Delta x_1 f'_{x_1}\left(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2,\ldots,x_n\right),\\ f\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,x_3,\ldots,x_n\right)&=f\left(x_1+\Delta x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\Delta x_2 f'_{x_2}\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3,\ldots,x_n\right),\\ &\cdots\\ f\left(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n\right)&=f\left(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n\right)\\ &\quad+\Delta x_n f'_{x_n}\left(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_{n-1}+\Delta x_{n-1},x_n+\theta_n\Delta x_n\right).\end{aligned}$$

再设$\exists M>0$，使得对$\forall\mathbf{x}\in U\left(\mathbf{x}_0,\delta_0\right)$，有$\left|f'_{x_i}\left(\mathbf{x}\right)\right|\le M$，$i=1,2,\ldots,n$，则

$$\left|f\left(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right|\le M\left(\left|\Delta x_1\right|+\ldots+\left|\Delta x_n\right|\right)\to 0\left(\left(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n\right)\to\mathbf{0}\right),$$

故$\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f\left(\mathbf{x}\right)=f\left(\mathbf{x}_0\right)$，即$f\left(\mathbf{x}\right)$在$\mathbf{x}_0$处连续．证毕．

$g\left(\mathbf{x}\right)$的构造不唯一，如例 14.1.5 给出的函数$g\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$．

习题 14.2　举例说明在$\mathbb{R}^2$上存在函数$z=f\left(x,y\right)$，使得$f\left(x,y\right)$在$\mathbb{R}^2$上处处不连续，但它在原点处存在两个偏导数．

分析　可以考虑由狄利克雷函数改造．

解答　答案不唯一，如$f\left(x,y\right)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\text{或}y\in\mathbb{Q},\\ 0, & x,y\notin\mathbb{Q}\end{cases}$．

习题 14.3　求下列函数在指定点处的偏导数：

(1)　$f\left(x,y\right)=xy\ln\left(x^2+\sin xy^2+\sin xy\right)$，求$f'_x\left(1,-1\right),f'_y\left(1,-1\right)$；

(2)　$f\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y^2\right)\cos\dfrac{xz}{x+y}$，求$f'_x\left(1,0,\pi\right)$．

分析　本题考查多元函数的偏导数．

解答　(1)　$f_x'(1,-1)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(f(x,-1)\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(-x\ln x^2\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=-2$，

$$f_y'(1,-1)=\left.\frac{\mathrm{d}\left(f(1,y)\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=-1}=\left.\frac{\mathrm{d}\left(y\ln\left(1+\sin y^2+\sin y\right)\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=-1}=\cos 1.$$

(2)　$f_x'(1,0,\pi)=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(f(x,0,\pi)\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(-x^2\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=-2$.

习题 14.4　求下列函数的各个偏导数：

(1)　$z=\dfrac{x}{2x^2+y^3+xy}$；

(2)　$z=x\sqrt{x^2-y^2}$；

(3)　$z=\tan\left(x^2+2y^3\right)$；

(4)　$u=(x+y+z)\mathrm{e}^{xyz}$；

(5)　$u=\sin y\mathrm{e}^{xz}$；

(6)　$u=\ln\left(xy+x^4+z^2\right)$；

(7)　$u=\sqrt[3]{1-z\sin^2(x+y)}$；

(8)　$u=\dfrac{\sin xz}{\cos x^2+y}$；

(9)　$u=\ln\left(\sec\sqrt{x+y-z}\right)$；

(10)　$u=\mathrm{e}^{-xz}\tan y$；

(11)　$u=\mathrm{e}^z\left(x^2+y^2+z^2\right)$；

(12)　$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$；

(13)　$u=\ln\left(1+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\right)$；

(14)　$u=x_1x_2\ldots x_n+\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^n$.

分析　本题考查多元函数的偏导数.

解答　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-2x^2+y^3}{\left(2x^2+y^3+xy\right)^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x\left(3y^2+x\right)}{\left(2x^2+y^3+xy\right)^2}$.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sec^2\left(x^2+2y^3\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=6y^2\sec^2\left(x^2+2y^3\right)$.

(4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(1+yz\left(x+y+z\right)\right)\mathrm{e}^{xyz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(1+xz\left(x+y+z\right)\right)\mathrm{e}^{xyz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(1+xy\left(x+y+z\right)\right)\mathrm{e}^{xyz}$.

(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xz}\cos y\mathrm{e}^{xz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{xz}\cos y\mathrm{e}^{xz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xy\mathrm{e}^{xz}\cos y\mathrm{e}^{xz}$.

(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y+4x^3}{xy+x^4+z^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{xy+x^4+z^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{xy+x^4+z^2}$.

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z\sin 2\left(x+y\right)}{3\left(1-z\sin^2\left(x+y\right)\right)^{\frac{2}{3}}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sin\left(x+y\right)^2}{3\left(1-z\sin^2\left(x+y\right)\right)^{\frac{2}{3}}}$.

(8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z\left(\cos x^2+y\right)\cos xz+2x\sin x^2\sin xz}{\left(\cos x^2+y\right)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\sin xz}{\left(\cos x^2+y\right)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x\cos xz}{\cos x^2+y}$.

(9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sec\sqrt{x+y-z}}{2\sqrt{x+y-z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\sec\sqrt{x+y-z}}{2\sqrt{x+y-z}}$.

(10) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-z\mathrm{e}^{-xz}\tan y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{-xz}\sec^2 y$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-x\mathrm{e}^{-xz}\tan y$.

(11) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{z}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\mathrm{e}^{z}\left(x^2+y^2+z^2+2z\right)$.

(12) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$.

(13) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}$.

(14) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\prod\limits_{1\le k\le n,k\ne i}x_k+n\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^{n-1}$.

习题 14.5　证明下列函数 $u\left(x,y\right)$ 与 $v\left(x,y\right)$ 成立 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$：

(1) $u(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$，$v(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y$；

(2) $u(x,y)=\cos x\cosh y+\sin x\sinh y$，$v(x,y)=\cos x\cosh y-\sin x\sinh y$.

分析　本题考查多元函数的偏导数.

证明　(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 证毕.

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\sinh y-\sin x\cosh y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos x\sinh y+\sin x\cosh y=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 证毕.

习题 14.6　根据方向导数的定义，求 $f(x,y)=x^2\sin y$ 在 $(1,0)$ 处分别沿方向 $\mathbf{i},-\mathbf{j}$ 以及 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$ 的方向导数.

分析　本题考查多元函数的方向导数.

解答　$\dfrac{\partial f(1,0)}{\partial\mathbf{i}}=\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f(1+t,0)-f(1,0)}{t}=0$，

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial(-\mathbf{j})}=\lim_{t\to0+0}\frac{f(1,-t)-f(1,0)}{t}=\lim_{t\to0+0}\frac{\sin(-t)}{t}=-1,$$

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})\right)}=\lim_{t\to0+0}\frac{f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}},-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)-f(1,0)}{t}=\lim_{t\to0+0}\frac{\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\sin\left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{t}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

评注　如果不囿于方向导数的定义，我们可以用方向导数与偏导数的关系来求解：

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial\mathbf{i}}=\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(1,0)}{\partial(-\mathbf{j})}=-\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}=-\cos y\big|_{y=0}=-1,$$

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f(1,0)}{\partial y}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

习题 14.7　设函数 $f(x,y,z)=x^2-xy+y^2+z^2$，求它在 $(1,1,1)$ 处的沿各个方向的方向导数，并求出方向导数的最大值、最小值以及方向导数为零的所有方向.

分析　本题考查多元函数的方向导数.

解答　设单位向量 $\mathbf{v}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x}\cos\theta_1 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial y}\cos\theta_2 + \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial z}\cos\theta_3 \\
&= (2x-1)\big|_{x=1}\cos\theta_1 + (2y-1)\big|_{y=1}\cos\theta_2 + 2z\big|_{z=1}\cos\theta_3 \\
&= \cos\theta_1 + \cos\theta_2 + 2\cos\theta_3 .
\end{aligned}
$$

由柯西不等式，知$\left|\cos\theta_1+\cos\theta_2+2\cos\theta_3\right| \le \sqrt{\left(1^2+1^2+2^2\right)\left(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3\right)} = \sqrt{6}$，故 $f(x,y,z)$在$(1,1,1)$处的方向导数的最大值$\max\left\{\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)} = \sqrt{6}$，最小值$\min\left\{\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)} = -\sqrt{6}$．为求方向导数为零的所有方向，记$t=\cos\theta_3$，则$\begin{cases}\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+t^2=1, \\ \cos\theta_1+\cos\theta_2+2t=0\end{cases}$，解得$\mathbf{v}\in\left\{\pm\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}}-t,\mp\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}}-t,t\right\}\left(|t|\le\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

评注　事实上，由梯度的意义，知$\max\left\{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\left(\frac{\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)}{\left|\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\right|}\right)} = \left|\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\right|$，$\min\left\{\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}\right\} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\left(-\frac{\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)}{\left|\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\right|}\right)} = -\left|\mathbf{grad}f(\mathbf{x}_0)\right|$.

习题 14.8　设函数$z=u(x,y)$在$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$上可微，令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，在$Oxy$平面上作单位向量$\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta$，其中$\mathbf{e}_r$表示$\theta$固定时沿$r$增加的方向，$\mathbf{e}_\theta$表示$r$固定时沿$\theta$增加的方向．求证：$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r}=\frac{\partial u}{\partial r}$，$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$.

分析　本题考查多元函数的方向导数与链锁法则.

证明　由$\mathbf{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\mathbf{e}_\theta=\left(\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta},\frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)=(-\sin\theta,\cos\theta)$，知

$$
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r},
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_\theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta = \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}.
$$

证毕.

习题 14.9　试举出一个函数 $u=f\left(\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\right)$，使得它同时满足下述条件：

(1)　$f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处各个方向导数都存在；

(2)　$f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处各个偏导数都存在；

(3)　$f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处连续但不可微.

分析　注意到(1)蕴含(2)，关键是避免满足可微性．一种想法是先让 $f\left(\mathbf{x}\right)\equiv 0$，再微调某些点的函数值，这样在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处各个方向导数仍然是 0，但 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{f\left(\mathbf{x}\right)}{|\mathbf{x}|}$ 不存在.

解答　答案不唯一，如 $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\begin{cases}\sqrt{x_n}, & x_n=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2,\\ 0, & x_n\neq x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2.\end{cases}$

习题 14.10　设定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f\left(\mathbf{x}\right)=\begin{cases}|\mathbf{x}|^2\sin\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}, & |\mathbf{x}|\neq 0,\\ 0, & |\mathbf{x}|=0\end{cases}$，求证：对 $\forall i=1,2,\ldots,n$，$\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i}$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处不连续，但 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处可微.

分析　本题考察多元函数的全微分.

证明　由 $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i}=2x_i\left(\sin\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}-\dfrac{x_i^2}{|\mathbf{x}|^4}\cos\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$，知 $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{0}\right)}{\partial x_i}$ 不存在，故 $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i}$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处不连续，而在 $\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$ 上连续，从而 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$ 上可微．而 $f\left(\mathbf{x}\right)=|\mathbf{x}|^2\sin\dfrac{1}{|\mathbf{x}|^2}=o\left(|\mathbf{x}|\right)\left(|\mathbf{x}|\to 0\right)$，故 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 处也可微．证毕.

习题 14.11　试求下列函数在指定点处的微分：

(1)　$f\left(x,y\right)=3x^2-xy^2+y^2$，在 $\left(1,2\right)$ 处；

(2)　$f\left(x,y\right)=x\mathrm{e}^y+x^y$，在 $\left(1,0\right)$ 处.

分析　本题考察多元函数的全微分.

解答　(1)　$\mathrm{d}f\left(1,2\right)=\dfrac{\partial f\left(1,2\right)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f\left(1,2\right)}{\partial y}\mathrm{d}y=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(3x^2-4x+4\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(3\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=2}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$.

(2)　$\mathrm{d}f\left(1,0\right)=\dfrac{\partial f\left(1,0\right)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f\left(1,0\right)}{\partial y}\mathrm{d}y=\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(x+1\right)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^y+1\right)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

习题 14.12　求下列函数的微分：

(1) $f\left(x,y\right)=y^2\sin x+2x^2y$；

(2) $f\left(x,y\right)=x\mathrm{e}^{-2y}+3y^4$；

(3) $f\left(x,y,z\right)=y^2\ln\left(x^2+2\right)\left(z^2+1\right)$；

(4) $f\left(\mathbf{x}\right)=\left|\mathbf{x}\right|,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$；

(5) $f\left(\mathbf{x}\right)=\ln\left|\mathbf{x}\right|,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$.

分析　本题考察多元函数的全微分.

解答　(1) $\mathrm{d}f\left(x,y\right)=\left(y^2\cos x+4xy\right)\mathrm{d}x+\left(2y\sin x+2x^2\right)\mathrm{d}y$.

(2) $\mathrm{d}f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}x+\left(-2x\mathrm{e}^{-2y}+12y^3\right)\mathrm{d}y$.

(3) $\mathrm{d}f\left(x,y,z\right)=y^2\ln\left(x^2+2\right)\left(z^2+1\right)=\dfrac{2xy^2}{x^2+2}\mathrm{d}x+\left(2y\ln\left(x^2+2\right)\left(z^2+1\right)\right)\mathrm{d}y+\dfrac{2zy^2}{z^2+2}\mathrm{d}z$.

(4) $\mathrm{d}f\left(\mathbf{x}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\left|\mathbf{x}\right|}\mathrm{d}x_i,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$.

(5) $\mathrm{d}f\left(\mathbf{x}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{\left|\mathbf{x}\right|^2}\mathrm{d}x_i,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}$.

习题 14.13　设函数 $f\left(x,y\right)=x^2y-3y$，求 $f\left(x,y\right)$的微分，并求 $f\left(5.12,6.85\right)$的近似值.

分析　本题考察多元函数的全微分.

解答　$\mathrm{d}f\left(x,y\right)=2xy\mathrm{d}x+\left(x^2-3\right)\mathrm{d}y$，$f\left(5.12,6.85\right)\approx f\left(5,7\right)+2\times5\times7\times0.12+\left(5^2-3\right)\times\left(-0.15\right)=159.1$.

习题 14.14　利用函数的微分求近似值：

(1) $\sqrt{1.02^2+2.03^2+3.02^2}$；

(2) $3.01^{0.99}$.

分析　本题考察多元函数的全微分.

解答　(1) $\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\sqrt{1.02^2+2.03^2+3.02^2}\approx\sqrt{1^2+2^2+3^2}+\dfrac{1\times0.02+2\times0.03+3\times0.02}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=1.01\sqrt{14}\approx3.78$.

(2) $\mathrm{d}\left(x^{y}\right)=yx^{y-1}\mathrm{d}x+\left(x^{y}\ln x\right)\mathrm{d}y$， $3.01^{0.99}\approx 3^{1}+1\times 3^{0}\times 0.01+3^{1}\times\ln 3\times(-0.01)\approx 2.98$.

习题 14.15　设函数$u=f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n\,(n\geq 2)$的邻域$U(\mathbf{x}_0,\delta_0)(\delta_0>0)$上存在$n$个偏导数，且有$n-1$个偏导数在该邻域上都连续．求证：$u=f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处可微．

分析　利用拉格朗日微分中值定理．

证明　设$\mathbf{x}_0=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，其中$\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$在$U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$上都连续，则对$\forall\Delta x_i\in U(x_i,\delta_0)$，$i=1,2,\ldots,n$，$\exists\theta_i\in(0,1)$，$i=1,2,\ldots,n-1$，使得

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&=f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)\Delta x_1+f(x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&=f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)\Delta x_1+f'_{x_2}(x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3+\Delta x_3,\ldots,x_n+\Delta x_n)\Delta x_2\\
&\quad+f(x_1,x_2,x_3+\Delta x_3,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&=\ldots\\
&=f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)\Delta x_1+f'_{x_2}(x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3+\Delta x_3,\ldots,x_n+\Delta x_n)\Delta x_2+\ldots\\
&\quad+f'_{x_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)\Delta x_{n-1}+f'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_n+o(\Delta x_n)(\Delta x_n\to 0).
\end{aligned}$$

由$\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$在的连续性，知

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \cdots\\ \Delta x_n\to 0}}f'_{x_1}(x_1+\theta_1\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,\ldots,x_n+\Delta x_n)=f'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x_2\to 0\\ \Delta x_3\to 0\\ \cdots\\ \Delta x_n\to 0}}f'_{x_2}(x_1,x_2+\theta_2\Delta x_2,x_3+\Delta x_3,\ldots,x_n+\Delta x_n)=f'_{x_2}(x_1,\ldots,x_n),$$

$$\ldots$$

$$\lim_{\substack{\Delta x_{n-1}\to 0\\ \Delta x_n\to 0}}f'_{x_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1},x_n+\Delta x_n)=f'_{x_{n-1}}(x_1,\ldots,x_n),$$

代入已证的式子，得

$$\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&=f'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_1+o\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}\right)+f'_{x_2}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_2+o\left(\sqrt{\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}\right)\\
&+\ldots+f'_{x_{n-1}}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_{n-1}+o\left(\sqrt{\Delta x_{n-1}^2+\Delta x_n^2}\right)+f'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_n+o(\Delta x_n),\\
&=f'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_1+\ldots+f'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)\Delta x_n+o\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}\right)\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2}\to 0\right).
\end{aligned}$$

故$u=f(\mathbf{x})$在$\mathbf{x}_0$处可微．证毕．

评注　从证明过程看出，条件可以减弱为“有$n-1$个偏导数在$\mathbf{x}_0$处连续”.

习题 14.16　求下列函数的梯度：

(1) $f\left(x,y,z\right)=x^2\sin yz+y^2\mathrm{e}^{xz}+z^2$；

(2) $f\left(\mathbf{x}\right)=\left|\mathbf{x}\right|\mathrm{e}^{-\left|\mathbf{x}\right|},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{\mathbf{0}\right\}\left(n\geq 2\right)$.

分析　本题考察多元函数的梯度.

解答　(1) $\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)=\left(\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x},\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y},\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}\right)=$

$\left(2x\sin yz+y^2z\mathrm{e}^{xz},x^2z\cos yz+2y\mathrm{e}^{xz},x^2y\cos yz+xy^2\mathrm{e}^{xz}+2z\right)$.

(2) $\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)=\left(\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_1},\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_2},\dots,\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_n}\right)=\left(\dfrac{1}{\left|\mathbf{x}\right|}-1\right)\mathrm{e}^{-\left|\mathbf{x}\right|}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$.

习题 14.17　求函数 $f\left(x,y,z\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中各点处的梯度，并求点 $\left(x,y,z\right)$，使得该点的梯度分别垂直于 z 轴、平行于 z 轴以及梯度为零.

分析　本题考察多元函数的梯度.

解答　$\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)=\left(3x^2-3yz,3y^2-3xz,3z^2-3xy\right)$,

$\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)\perp\left(0,0,1\right)\Leftrightarrow 3z^2-3xy=0\Leftrightarrow\left(x,y,z\right)=\left(a,b,\pm\sqrt{ab}\right)$,

$\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)/\!/\left(0,0,1\right)\Leftrightarrow 3x^2-3yz=3y^2-3xz=0\Leftrightarrow\left(x,y,z\right)=\left(0,0,a\right)$或$\left(a,a,a\right)$,

$\mathbf{grad}f\left(x,y,z\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow 3x^2-3yz=3y^2-3xz=3z^2-3xy=0\Leftrightarrow\left(x,y,z\right)=\left(a,a,a\right)$.

习题 14.18　设函数 $z=f\left(x,y\right)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 处可微，且沿方向 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的方向导数为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，而沿 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 的方向导数为 $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 试求它在 $\left(x_0,y_0\right)$ 处沿方向 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 的方向导数及梯度.

分析　利用可微函数的一个基本结论：$\dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial\mathbf{v}}=\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{v}\left(\left|\mathbf{v}\right|=1\right)$.

解答　解向量方程 $\begin{cases}\mathbf{grad}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ \mathbf{grad}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)=1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$，得

$$\mathbf{grad}f\left(x_0,y_0\right)=\left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1}{2},\frac{-3\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{2}+7}{2}\right),$$

故 $\dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial \mathbf{i}}=\dfrac{3\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-1}{2}$， $\dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial \mathbf{j}}=\dfrac{-3\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{2}+7}{2}$.

习题 14.19　求函数 $f\left(x,y,z\right)=2x^3y-3y^2z$ 在 $\left(1,2,-1\right)$ 处所有的方向导数构成的集合.

分析　设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ 是单位向量，则映射 $\sigma:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{v}=\left|\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)\right|\cos\left\langle\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right),\mathbf{v}\right\rangle$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的所有单位向量构成的集合到实数集 $\left[-\left|\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)\right|,\left|\mathbf{grad}f\left(\mathbf{x}\right)\right|\right]$ 的一个满射．由习题 14.18 的分析中的基本结论，所求集合就是 $\left[-\left|\mathbf{grad}f\left(1,2,-1\right)\right|,\left|\mathbf{grad}f\left(1,2,-1\right)\right|\right]$.

解答　$\left|\mathbf{grad}f\left(1,2,-1\right)\right|=\left|\left(12,14,-12\right)\right|=22$，故所求集合为 $\left[-22,22\right]$.

习题 14.20　设 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\left(n\ge 2\right)$，试求下列向量（或多元）函数的导数：

(1) $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{x}\left|\mathbf{x}\right|$；

(2) $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)=\dfrac{\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}\right|}\left(\left|\mathbf{x}\right|\ne 0\right)$；

(3) 设 $\mathbf{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵， $f\left(\mathbf{x}\right)=\left(\mathbf{A}\mathbf{x}\right)\cdot\left(\mathbf{A}\mathbf{x}\right)$.

分析　本题考察向量函数的导数.

解答　(1) $$\mathbf{f}'\left(\mathbf{x}\right)=\left(\frac{\partial\left|\mathbf{x}\right|x_i}{\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}\left|\mathbf{x}\right|+\dfrac{x_1^2}{\left|\mathbf{x}\right|} & \dfrac{x_1x_2}{\left|\mathbf{x}\right|} & \cdots & \dfrac{x_1x_n}{\left|\mathbf{x}\right|}\\ \dfrac{x_2x_1}{\left|\mathbf{x}\right|} & \left|\mathbf{x}\right|+\dfrac{x_2^2}{\left|\mathbf{x}\right|} & \cdots & \dfrac{x_2x_n}{\left|\mathbf{x}\right|}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{x_nx_1}{\left|\mathbf{x}\right|} & \dfrac{x_nx_2}{\left|\mathbf{x}\right|} & \cdots & \left|\mathbf{x}\right|+\dfrac{x_n^2}{\left|\mathbf{x}\right|}\end{pmatrix}.$$

(2) $$\mathbf{f}'\left(\mathbf{x}\right)=\left(\frac{\partial\dfrac{x_i}{\left|\mathbf{x}\right|}}{\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\left|\mathbf{x}\right|}-\dfrac{x_1^2}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & -\dfrac{x_1x_2}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & \cdots & -\dfrac{x_1x_n}{\left|\mathbf{x}\right|^3}\\ -\dfrac{x_2x_1}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & \dfrac{1}{\left|\mathbf{x}\right|}-\dfrac{x_2^2}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & \cdots & -\dfrac{x_2x_n}{\left|\mathbf{x}\right|^3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\dfrac{x_nx_1}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & -\dfrac{x_nx_2}{\left|\mathbf{x}\right|^3} & \cdots & \dfrac{1}{\left|\mathbf{x}\right|}-\dfrac{x_n^2}{\left|\mathbf{x}\right|^3}\end{pmatrix}.$$

(3) $f'\left(\mathbf{x}\right)=2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$.

习题 14.21 设函数 $f(\mathbf{u})=f(u_1,u_2,\dots,u_m)$ 在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 上有定义，并且在 $\mathbf{u}_0=(u_1^0,u_2^0,\dots,u_m^0)\in\Omega$ 处可微. 设向量函数 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})=(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}),\mathbf{u}_2(\mathbf{x}),\dots,\mathbf{u}_m(\mathbf{x}))$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有定义，在 $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D$ 处可偏导，并且 $\mathbf{u}_0=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$. 求证：对 $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$，$f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处关于 x_i 可偏导，并且 $\dfrac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_i}=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial u_j}\cdot\dfrac{\partial u_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$.

分析 利用类似于定理 14.2.2 的方法.

证明 由 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 处可偏导，对 $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$，有 $\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)=\mathbf{u}(\mathbf{x}_0+\Delta x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i)-\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)=\dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)$ 依赖于 Δx_i，且满足 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\to\mathbf{0}(\Delta x_i\to 0)$. 再由 $f(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_0$ 处可微，有 $\Delta f(\mathbf{u}_0)=f(\mathbf{u}_0+\Delta\mathbf{u})-f(\mathbf{u}_0)=f'(\mathbf{u}_0)\Delta\mathbf{u}+\beta(|\Delta\mathbf{u}|)$，其中 $\beta(|\Delta\mathbf{u}|)$ 依赖于 $\Delta\mathbf{u}$，且满足 $\dfrac{\beta(|\Delta\mathbf{u}|)}{\Delta\mathbf{u}}\to 0(|\Delta\mathbf{u}|\to 0)$. 规定 $\beta(0)=0$，则 $\beta(|\Delta\mathbf{u}|)$ 在 $\Delta\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 处连续. 对 $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$，有

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))&=f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0+\Delta x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i))-f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\\&=f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\left(\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)\right)+\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\\&=f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)+\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\\&\triangleq f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\gamma(\Delta x_i).\end{aligned}$$

下证 $\dfrac{\gamma(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\to 0(\Delta x_i\to 0)$. 事实上，$\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\left|\dfrac{f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\right|\le\left|f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\right|\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\left|\dfrac{\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\right|=0$. 由 $\left|\dfrac{\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\Delta x_i}\right|=\begin{cases}\dfrac{|\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))|}{|\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|}\cdot\dfrac{|\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|}{|\Delta x_i|}, & |\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|\ne 0,\\ 0, & |\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|=0\end{cases}$，其中 $\dfrac{|\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)|}{|\Delta x_i|}=\dfrac{\left|\dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i+\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)\right|}{|\Delta x_i|}\le\dfrac{\left|\dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\Delta x_i\right|+|\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)|}{|\Delta x_i|}=\left|\dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\right|+\dfrac{|\boldsymbol{\alpha}(\Delta x_i)|}{|\Delta x_i|}$，故 $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\left|\dfrac{\beta(\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\Delta x_i}\right|=0$. 将两式相加，即得 $\dfrac{\gamma(\Delta x_i)}{\Delta x_i}\to 0(\Delta x_i\to 0)$. 故对 $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$，有 $\dfrac{\partial f(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))}{\partial x_i}=f'(\mathbf{u}(\mathbf{x}_0))\dfrac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\partial f(\mathbf{u}_0)}{\partial u_j}\cdot\dfrac{\partial u_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$. 证毕.

习题 14.22　求下列复合函数的偏导数，其中 f 是可微函数：

(1) $z=f\left(xe^{y},xe^{-y}\right)$；

(2) $u=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\prod_{i=1}^{n}x_i^2,x_3,\dots,x_n\right)$.

分析　利用链锁法则.

解答　(1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\left(xe^{y}\right)}{\partial x}f_1'+\frac{\partial\left(xe^{-y}\right)}{\partial x}f_2'=e^{y}f_1'+e^{-y}f_2'$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\left(xe^{y}\right)}{\partial y}f_1'+\frac{\partial\left(xe^{-y}\right)}{\partial y}f_2'=xe^{y}f_1'-xe^{-y}f_2'.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f_1'\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+f_2'\frac{\partial}{\partial x_1}\prod_{i=1}^{n}x_i^2+f_i'\sum_{i=3}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_1}=2x_1\left(f_1'+f_2'\prod_{i=2}^{n}x_i^2\right)$，

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=f_1'\frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+f_2'\frac{\partial}{\partial x_2}\prod_{i=1}^{n}x_i^2+f_i'\sum_{i=3}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_2}=2x_2\left(f_1'+f_2'\prod_{1\le i\le n,i\ne 2}x_i^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=f_1'\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+f_2'\frac{\partial}{\partial x_k}\prod_{i=1}^{n}x_i^2+f_i'\sum_{i=3}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}=2x_k\left(f_1'+f_2'\prod_{1\le i\le n,i\ne k}x_i^2\right)+f_k'\left(k=3,4,\dots,n\right).$$

习题 14.23　设函数 $u=f\left(\mathbf{x}\right)$ 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上存在 n 个连续偏导数，并且各个偏导数都有界．求证：

(1) 当 D 是凸域时，$f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 D 上一致连续；

(2) 当 D 不是凸域时，$f\left(\mathbf{x}\right)$ 在 D 上有可能不一致连续.

分析　利用拉格朗日微分中值定理.

证明　(1) 由 D 是凸域，知对 $\forall\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right),\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_n\right)\in D,\eta_i\in\left(x_i,y_i\right)\left(x_i<y_i\right)$，$i=k+1,\dots,n$，有 $\left(x_1,\dots,x_k,\eta_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n\right),\dots,\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_{n-1},\eta_n\right)\in D$，故 $\exists M>0,\xi_i\in\left(x_i,y_i\right),i=k+1,\dots,n$，使得

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)-f\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_n\right)=&\left(f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)-f\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},x_{k+2}\dots,x_n\right)\right)+\dots+\\&\left(f\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_{n-1},x_n\right)-f\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_n\right)\right)\\=&\ f_{k+1}'\left(x_1,\dots,x_k,\eta_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n\right)\left(x_{k+1}-y_{k+1}\right)+\dots+\\&f_n'\left(x_1,\dots,x_k,y_{k+1},\dots,y_{n-1},\eta_n\right)\left(x_n-y_n\right)\\\le&\ M\sum_{i=k+1}^{n}\left(x_i-y_i\right).\end{aligned}$$

故对$\forall\varepsilon>0,\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)\in D$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{Mn}>0$，当$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta$时，有

$$\left|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\right|\le\left|M\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right|\le M\left|\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right|\le Mn|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\varepsilon,$$

故$f(\mathbf{x})$在D上一致连续．证毕．

(2) 考虑定义在区域$D=N(\mathbf{0},1)\setminus\{(x_1,...,x_{n-1},0)|0\le x_1,...,x_{n-1}<1\}$上的函数

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{cases}0, & x_1,x_2,...,x_n>0,\\ x_n^2, & \text{其它}.\end{cases}$$

容易验证$u=f(\mathbf{x})$在D上存在n个连续偏导数，并且各个偏导数都有界，但$f(\mathbf{x})$在D上不一致连续．证毕．

习题 14.24　设函数$z=f(x,y)$在区域D上处处存在两个偏导数，求证：

(1) 若D是凸域，且对$\forall(x,y)\in D$，有$f_x'(x,y)=0$，则存在函数$h(y)$，使得在D上，有$f(x,y)\equiv h(y)$；

(2) 若对$\forall(x,y)\in D$，$f_x'(x,y)=f_y'(x,y)=0$，则存在常数C，使得在D上，有$f(x,y)\equiv C$；

(3) 当D不是凸域时，(1)题结论可能不真．

分析　利用拉格朗日微分中值定理．

证明　(1) 由D是凸域，知对$\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D,y\in(y_1,y_2)(y_1<y_2)$，有$(x,y)\in D$，故$\exists y_0\in(y_1,y_2)$，使得$f(x,y_1)-f(x,y_2)=f_x'(x,y_0)(y_1-y_2)=0$，即$f(x,y_1)=f(x,y_2)$，从而存在函数$h(y)$，使得在$D$上，有$f(x,y)\equiv h(y)$．证毕．

(2) 由D是区域，知D上任意两点都存在道路，故可用以道路上各点为心的邻域覆盖，从而存在有限开覆盖，进而存在以其为端点的折线段，每条折线都平行于某条坐标轴．类似于(1)题，反复利用拉格朗日微分中值定理，则D上任意两点的函数值都相等，即存在常数C，使得在D上，有$f(x,y)\equiv C$．证毕．

(3) 考虑定义在区域$D=N(\mathbf{0},1)\setminus\{(x,0)|0\le x<1\}$上的函数$f(x,y)=\begin{cases}0, & x,y>0,\\ y^2, & \text{其它}.\end{cases}$容易验证$z=f(x,y)$在$D$上处处存在两个偏导数，且对$\forall(x,y)\in D$，有$f_x'(x,y)=0$，但不存在函数$h(y)$，使得在$D$上，有$f(x,y)\equiv h(y)$．证毕．

习题 14.25　设K次齐次函数$f(\mathbf{x})$在D上具有各个$k(1\le k\le K)$阶连续偏导数，求证：$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\mathbf{x})=K(K-1)\dots(K-k+1)f(\mathbf{x})$.

分析　根据齐次函数的定义验证即可.

证明　由$f(\mathbf{x})$是K次齐次函数，知对$\forall t>0$，有$f(t\mathbf{x})=t^K f(\mathbf{x})$，故

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}f(t\mathbf{x})=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}t^K f(\mathbf{x}),$$

即$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(t\mathbf{x})=K(K-1)\dots(K-k+1)t^{K-k}f(\mathbf{x})$. 令$t=1$，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\mathbf{x})=K(K-1)\dots(K-k+1)f(\mathbf{x}).$$

证毕.

习题 14.26　设函数$z=\mathrm{e}^{xy^2}$，其中$x=t\cos t$，$y=t\sin t$，试求$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

分析　利用链锁法则.

解答　$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0\times1=-\frac{\pi^3}{8}$.

习题 14.27　设函数$u=z\sin\frac{y}{x}$，其中$x=3r^2+2s$，$y=4r-2s^3$，$z=2r^2-3s^2$，试求$\frac{\partial u}{\partial r}$及$\frac{\partial u}{\partial s}$.

分析　利用链锁法则.

解答　$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=-\frac{6yzr}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x}+4r\sin\frac{y}{z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x}-\frac{6zs^2}{x}\cos\frac{y}{x}-6s\sin\frac{y}{z}.$$

习题 14.28　设函数$x=r\cos\alpha-t\sin\alpha$，$y=r\sin\alpha+t\cos\alpha$，其中$\alpha\in\mathbb{R}$为常数，求证：对任意可微函数$f(x,y)$，成立$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$.

分析　利用链锁法则.

证明

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)^2+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

证毕.

习题 14.29　设函数 $\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{x^2+y^2}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2}\end{pmatrix}$，求证：$\mathbf{f}(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 到自身的 C^1 同胚映射，并求 $\mathbf{f}(x,y)$ 在 $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 处的雅可比行列式.

分析　根据 C^1 同胚映射的定义验证即可.

解答　由 $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$，知 $\mathbf{f}(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上是 C^1 的，故 $\mathbf{f}^{-1}(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{u}{u^2+v^2}\\ -\dfrac{v}{u^2+v^2}\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上也是 C^1 的. 显然 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 到自身的双射，故 $\mathbf{f}$ 是 C^1 同胚映射. 证毕.

$$\left|\mathbf{f}'(x,y)\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}.$$

习题 14.30　求下列函数的高阶偏导数 $\dfrac{\partial^{\sum_{i=1}^n m_i}f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\ldots\partial x_n^{m_n}}$：

(1)　$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n x_i}$；

(2)　$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\ln\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)$，其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 为常数.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

解答　(1) $\dfrac{\partial^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}} = \mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$.

(2) $\dfrac{\partial^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}} = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - 1} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i - 1\right)! \left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{m_i}\right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^{-\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$.

习题 14.31　求下列函数的二阶偏导数，其中函数 f 具有二阶连续导数：

(1) $z = f\left(x^2 + y^2, xy\right)$；

(2) $z = f\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

解答　(1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial\left(2xf_1' + yf_2'\right)}{\partial x} = 2f_1' + 2x\left(2xf_{11}'' + yf_{21}''\right) + y\left(2xf_{12}'' + yf_{22}''\right) \\ &= 4x^2 f_{11}'' + 4xyf_{12}'' + y^2 f_{22}'' + 2f_1',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial\left(2xf_1' + yf_2'\right)}{\partial y} = 2x\left(2yf_{11}'' + xf_{21}''\right) + f_2' + y\left(2yf_{12}'' + xf_{22}''\right) \\ &= 4xyf_{11}'' + \left(2x^2 + 2y^2\right) f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial\left(2yf_1' + xf_2'\right)}{\partial y} = 2f_1' + 2y\left(2yf_{11}'' + xf_{21}''\right) + x\left(2yf_{12}'' + xf_{22}''\right) \\ &= 4y^2 f_{11}'' + 4xyf_{12}'' + x^2 f_{22}'' + 2f_1'.\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f'}{\partial x_i} = f''$.

习题 14.32　验证下列函数满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$：

(1) $z = \arctan \dfrac{y}{x}$；

(2) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

证明　(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0$. 证毕.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$. 证毕.

习题 14.33　验证函数 $u=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^{-1}$ 满足拉普拉斯方程 $\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=0$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

证明　$\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(-\dfrac{2x_i}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^2}\right)=\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{8x_i^2-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^3}=0$. 证毕.

习题 14.34　设 $f(x)$ 是一个二次可微函数，求证：$F(x,t)=\dfrac{1}{2}\left(f(x-ct)+f(x+ct)\right)$ 满足偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$，其中 c 为常数.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

证明　$\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}=\dfrac{(-c)^2 f''(x-ct)}{2}+\dfrac{c^2 f''(x+ct)}{2}=c^2\left(\dfrac{f''(x-ct)}{2}+\dfrac{f''(x+ct)}{2}\right)=c^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$. 证毕.

习题 14.35　求证：在极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 下，拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的形式为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

证明

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\\
&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta\right)\\
&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}2\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)+\\
&\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}2r^2\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta\right)\\
&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.
\end{aligned}
$$

证毕.

习题 14.36　设函数 $u(x,y,z)=\dfrac{x-y+z}{x+y-z}$，求证：

(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$；

(2) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

证明　(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2x(y-z)}{(x+y-z)^2}-\dfrac{2xy}{(x+y-z)^2}+\dfrac{2xz}{(x+y-z)^2}=0$. 证毕.

(2)

$$
\begin{aligned}
&x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\
&=x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2(y-z)}{(x+y-z)^2}\right)+y^2\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{(x+y-z)^2}\right)+z^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2x}{(x+y-z)^2}\right)+\\
&2xy\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2x}{(x+y-z)^2}\right)+2xz\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{(x+y-z)^2}\right)+2yz\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{(x+y-z)^2}\right)\\
&=\frac{4x^2(-y+z)}{(x+y-z)^3}+\frac{4xy^2}{(x+y-z)^3}+\frac{4xz^2}{(x+y-z)^3}+\frac{4xy(x-y+z)}{(x+y-z)^3}-\frac{4xz(x-y+z)}{(x+y-z)^3}-\frac{4xyz}{(x+y-z)^3}=0.
\end{aligned}
$$

证毕.

习题 14.37　设 $x=2r-s$， $y=r+2s$，求 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial r\partial s}$，其中函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

解答　$\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial r\partial s}=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(-f'_x+2f'_y\right)=-\left(2f''_{xx}+f''_{xy}\right)+2\left(2f''_{xy}+f''_{yy}\right)=-2f''_{xx}+3f''_{xy}+2f''_{yy}$.

习题 14.38　试将函数 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 写成函数 $F(x-1,y-1)$ 的形式.

分析　不一定要囿于对泰勒公式的应用，直接作变量替换即可.

解答

$$
\begin{aligned}
F(x-1,y-1)&=a(x-1+1)^2+2b(x-1+1)(y-1+1)+c(y-1+1)^2\\
&=a(x-1)^2+2b(x-1)(y-1)+c(y-1)^2+(2a+2b)(x-1)\\
&\quad+(2b+2c)(y-1)+(a+2b+c).
\end{aligned}
$$

习题 14.39　求 e^{x+y} 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式，并证明 $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$.

分析　由 e^x 的幂级数展开 $e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$，可以直接获得 e^{x+y} 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式.

解答　$e^{x+y}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{K}\frac{(x+y)^k}{k!}+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^K\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right)$.

$e^x\cdot e^y=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{y^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sum_{l=0}^{k}C_k^l x^l y^{k-l}}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=e^{x+y}$. 证毕.

习题 14.40　将下列函数在原点处展成泰勒公式（到四次项）：

(1) $\frac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}$;

(2) $\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$.

分析　求高阶偏导数的计算量太大，因此我们可以考虑一些“旁门左道”：

方法一：利用一元函数的泰勒公式．以(1)题为例，我们有

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}=1-(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2+o\left((x^2+y^2)^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right),$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}&=(1+x+y+2xy)\left(1-(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2\right)+o\left((x^2+y^2)^2\right)\\&=(1+x+y+2xy)\left(1-(x^2+y^2)\right)+(x^2+y^2)^2+o\left((x^2+y^2)^2\right)\\&=1+x+y-x^2+2xy-y^2-x^3-x^2y-xy^2-y^3+x^4-2x^3y+\\&\quad 2x^2y^2-2xy^3+y^4+o\left((x^2+y^2)^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right).\end{aligned}$$

方法二：按升幂顺序做多项式除法，直到余式的次数大于 4．仍以(1)题为例，我们有

$$\begin{aligned}&1+x+y+2xy\\&=(1+x^2+y^2)\left(1+x+y-x^2+2xy-y^2-x^3-x^2y-xy^2-y^3+x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4\right)\\&+o\left((x^2+y^2)^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right).\end{aligned}$$

由泰勒公式的唯一性，所得商式就是 $\frac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}$ 在原点处的泰勒公式.

解答　(1) $\dfrac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}=1+x+y-x^2+2xy-y^2-x^3-x^2y-xy^2-y^3+x^4-2x^3y+$

$2x^2y^2-2xy^3+y^4+o\left(\left(x^2+y^2\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right)$.

(2) $\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{1-\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)}=\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(1+x_1+x_2+\ldots+x_n+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+$

$+o\left(\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)^2\right)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\to 0\right)$.

习题 14.41　勒让德多项式 $P_n(x)$ 由下式定义：$f(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$. 验证：

(1) $P_n(1)=1$；

(2) $P_n(-1)=(-1)^n$；

(3) $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$.

分析　由泰勒公式，知 $P_n(x)=\dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n f(x,0)}{\partial t^n}$，再代入验证即可.

证明　记 $f^{(n)}=\dfrac{\partial^n f(x,t)}{\partial t^n}$，则 $f'=\dfrac{x-t}{\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，故 $(t-x)f+\left(1-2xt+t^2\right)f'=0$. 由莱布尼茨公式，知 $\left(1-2xt+t^2\right)f^{(n+1)}+(2n+1)(t-x)f^{(n)}+n^2f^{(n-1)}=0$. 令 $t=0$，得 $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$. 初值条件 $P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$.

(1) 令 $x=1$，得 $(n+1)\left(P_{n+1}(1)-P_n(1)\right)=n\left(P_n(1)-P_{n-1}(1)\right)$，故 $\left\{n\left(P_n(1)-P_{n-1}(1)\right)\right\}$ 为常序列，即 $n\left(P_n(1)-P_{n-1}(1)\right)=P_1(1)-P_0(1)=1-1=0$，从而 $P_n(1)=P_{n-1}(1)$，进而 $\left\{P_{n-1}(1)\right\}$ 为常序列，即 $P_{n-1}(1)=P_0(1)=1$. 证毕.

(2) 令 $x=-1$，得 $(-1)^{n+1}(n+1)\left(P_{n+1}(-1)-P_n(-1)\right)=(-1)^n n\left(P_n(-1)-P_{n-1}(-1)\right)$，故 $\left\{(-1)^n n\left(P_n(1)-P_{n-1}(1)\right)\right\}$ 为常序列，即 $\left\{(-1)^n n\left(P_n(1)+P_{n-1}(1)\right)\right\}=-\left(P_1(1)+P_0(1)\right)=1-1=0$，从而 $P_n(1)=-P_{n-1}(1)$，进而 $\left\{(-1)^{n-1}P_{n-1}(1)\right\}$ 为常序列，即 $P_n(-1)=(-1)^n P_0(-1)=(-1)^n$. 证毕.

(3) 令 $n=1$，得 $2P_2(x)-3xP_1(x)+P_0(x)=0$，故 $P_2(x)=\dfrac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$. 证毕.

习题 14.42　设函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}$，对 $\forall k\in\mathbb{N}$，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的所有 k 阶偏导数.

分析　利用泰勒公式的唯一性.

解答　由 $\mathrm{e}^{xy}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(xy)^k}{k!}$，知 $\frac{1}{(2k)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2k}f(0,0)=\frac{(xy)^k}{k!}$. 比较系数，得

$$\frac{\partial^k f(0,0)}{\partial x^i\partial y^{k-i}}=\begin{cases}k!, & k=2i,\\ 0, & k\neq 2i.\end{cases}$$

习题 14.43　举例说明存在原点某个邻域 $U((0,0),\delta_0)(\delta_0>0)$ 上的连续函数 $z=F(x,y)$，满足 $F(0,0)=0$ 和下述条件之一：

(1) $F_y'(0,0)$ 不存在；

(2) $F_y'(0,0)$ 存在，且 $F_y'(0,0)=0$，

但 $F(x,y)=0$ 在 $U((0,0),\delta_0)$ 上唯一确定一个连续的隐函数 $y=f(x)(-\delta_0<x<\delta_0)$，使得 $f(0)=0$，并且当 $x\in(-\delta_0,\delta_0)$ 时，$F(x,f(x))=0$.

分析　考虑不依赖于 x 的函数 $z=F(x,y)=G(y)$，其满足 $G'(0)$ 不存在或 $G'(0)=0$，但 $G(0)=0$ 在 $U((0,0),\delta_0)$ 上唯一确定一个连续的隐函数 $y=f(x)=0(-\delta_0<x<\delta_0)$，显然此时有 $f(0)=0$，并且当 $x\in(-\delta_0,\delta_0)$ 时，$F(x,f(x))=F(x,0)=G(0)=0$.

解答　(1) 答案不唯一，如 $F(x,y)=|y|$.

(2) 答案不唯一，如 $F(x,y)=y^3$.

评注　本题事实上说明了隐函数存在定理的条件并不是必要的.

习题 14.44　证明方程 $x^2-2xy+z+x\mathrm{e}^z=0$ 在点 $(1,1,0)$ 的某个邻域上唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒公式（到二次项）.

分析　利用隐函数存在定理与泰勒公式的唯一性.

解答　设 $F(x,y,z)=x^2-2xy+z+x\mathrm{e}^z$，则 $F(1,1,0)=0$，$F(x,y,z)$ 和 $F_z'(x,y,z)=\mathrm{e}^z+1$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，$F_z'(1,1,0)=2\neq 0$，故方程 $x^2-2xy+z+x\mathrm{e}^z=0$ 在 $(1,1,0)$ 的某个邻域上唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$. 设 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒公式为

$$f(x,y)=a_1(x-1)+a_2(y-1)+b_{11}(x-1)^2+b_{12}(x-1)(y-1)+b_{22}(y-1)^2$$
$$+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\to 0\right),$$

则

$$\begin{aligned}
&F(x,y,f(x,y))\\
&=x^2-2xy+f(x,y)+xe^{f(x,y)}\\
&=x^2-2xy+f(x,y)+(x-1+1)\left(1+f(x,y)+\frac{f^2(x,y)}{2}+o\left(f^2(x,y)\right)\right)\\
&=(x-1)^2-2(x-1)(y-1)-2(y-1)-1+f(x,y)+(x-1)\left(1+a_1(x-1)+a_2(y-1)\right)\\
&\quad+\left(1+f(x,y)+\frac{\left(a_1(x-1)+a_2(y-1)\right)^2}{2}\right)+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)\\
&=(2a_1+1)(x-1)+(2a_2-2)(y-1)+\left(\frac{a_1^2}{2}+a_1+2b_{11}+1\right)(x-1)^2\\
&\quad+(a_1a_2+a_2+2b_{12}-2)(x-1)(y-1)+\left(\frac{a_2^2}{2}+2b_{22}\right)(y-1)^2+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right).
\end{aligned}$$

由 $F(x,y,f(x,y))=0$ 在 $(1,1,0)$ 的某个邻域上成立，知 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_2=1$，$b_{11}=-\frac{5}{16}$，$b_{12}=\frac{3}{4}$，$b_{22}=-\frac{1}{4}$，故 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒公式为

$$f(x,y)=-\frac{1}{2}(x-1)+(y-1)-\frac{5}{16}(x-1)^2+\frac{3}{4}(x-1)(y-1)-\frac{1}{4}(y-1)^2$$
$$+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\to 0\right).$$

习题 14.45　证明方程 $x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)z^2+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域上唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$，并求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的所有三阶偏导数.

分析　利用隐函数存在定理与泰勒公式的唯一性.

解答　设 $F(x,y,z)=x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)z^2+\sin z$，则 $F(0,0,0)=0$，$F(x,y,z)$ 和 $F_z'(x,y,z)=2\left(x^2+y^2\right)z+\cos z$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，$F_z'(0,0,0)=1\neq 0$，故方程 $x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)z^2+\sin z=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域上唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$．设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的泰勒公式为

$$f(x,y)=a_1x+a_2y+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2+c_{111}x^3+c_{112}x^2y$$
$$+c_{122}xy^2+c_{222}y^3+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\to 0\right),$$

则

$$\begin{aligned}
&F\left(x,y,f(x,y)\right)\\
&=x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)f^2(x,y)+\sin f(x,y)\\
&=x+x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)f^2(x,y)+\left(f(x,y)-\frac{f^3(x,y)}{6}+o\left(f^3(x,y)\right)\right)\\
&=(a_1+1)x+a_2y+(b_{11}+1)x^2+b_{12}xy+(b_{22}+1)y^2+\left(c_{111}-\frac{a_1^3}{6}\right)x^3\\
&\quad+\left(c_{112}-\frac{a_1^2a_2}{2}\right)x^2y+\left(c_{122}-\frac{a_1a_2^2}{2}\right)xy^2+\left(c_{222}-\frac{a_2^3}{6}\right)y^3+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

由 $F\left(x,y,f(x,y)\right)=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域上成立，知 $c_{111}=-\frac{1}{6}$， $c_{112}=c_{122}=c_{222}=0$，故

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}=-1,\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}=0.$$

习题 14.46　设函数 $z=F(x,y)$ 在区域 D 上具有连续偏导数，且处处成立 $F'_x(x,y)\neq 0$，$F'_y(x,y)\neq 0$．求证：对 $\forall (x_0,y_0)\in D$，方程 $F(x,y)=F(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上确定的隐函数 $y=f(x)$ 及 $x=g(y)$ 互为反函数.

分析　利用隐函数存在定理.

证明　考虑 $G(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)$，有 $G(x_0,y_0)=0$，$G(x,y),G'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上连续，$G'_y(x_0,y_0)=F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，故方程 $G(x,y)=0$，即 $F(x,y)=F(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上确定的隐函数 $y=f(x)$ 存在且唯一. 同理，$F(x,y)=F(x_0,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上确定的隐函数 $x=g(y)$ 存在且唯一．注意到 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上的导数不变号，故其在该邻域上存在反函数．由唯一性， $y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 互为反函数．证毕.

习题 14.47　求由下列方程所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数：

(1)　$F(x+y+z,xyz)=0$；

(2)　$F\left(x^2+y^2,x^2+y^2+z^2\right)=0$.

分析　本题考察隐函数求导法.

解答　(1) 由 $\dfrac{\partial F\left(x+y+z,xyz\right)}{\partial x}=\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)F_1'+\left(yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)F_2'=0$，知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'+yzF_2'}{F_1'+xyF_2'}$.

由 $\dfrac{\partial F\left(x+y+z,xyz\right)}{\partial y}=\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)F_1'+\left(xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)F_2'=0$，知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'+xzF_2'}{F_1'+xyF_2'}$.

(2) 由 $\dfrac{\partial F\left(x^2+y^2,x^2+y^2+z^2\right)}{\partial x}=2xF_1'+\left(2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)F_2'=0$，知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x\left(F_1'+F_2'\right)}{zF_2'}$.

由 $\dfrac{\partial F\left(x^2+y^2,x^2+y^2+z^2\right)}{\partial y}=2yF_1'+\left(2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)F_2'=0$，知 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y\left(F_1'+F_2'\right)}{zF_2'}$.

习题 14.48　求由下列方程所确定的隐函数的偏导数（或导数）：

(1) $x^3+y^3-3xy=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

(2) $x+\mathrm{e}^{yz}+z^2=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

分析　本题考察隐函数求导法.

解答　(1) 两边对 x 求导，得 $3x^2+3y^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y-3x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$，故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y-x^2}{y^2-x}\right)&=\frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x\right)\left(y^2-x\right)-\left(y-x^2\right)\left(2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)}{\left(y^2-x\right)^2}\\&=\frac{\left(\dfrac{y-x^2}{y^2-x}-2x\right)\left(y^2-x\right)-\left(y-x^2\right)\left(2y\cdot\dfrac{y-x^2}{y^2-x}-1\right)}{\left(y^2-x\right)^2}\\&=-\frac{2xy\left(x^3+y^3-3xy+1\right)}{\left(y^2-x\right)^3}=-\frac{2xy}{\left(y^2-x\right)^3}.\end{aligned}$$

(2) 两边对 x 求偏导，得 $1+y\mathrm{e}^{yz}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，即 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{y\mathrm{e}^{yz}+2z}$，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(y^2\mathrm{e}^{yz}+2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^2}=-\frac{y^2\mathrm{e}^{yz}+2}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^3}.$$

两边对 y 求偏导，得 $\mathrm{e}^{yz}\left(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，即 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z\mathrm{e}^{yz}}{y\mathrm{e}^{yz}+2z}$，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\left(\mathrm{e}^{yz}\frac{\partial z}{\partial y}+z\mathrm{e}^{yz}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)-z\mathrm{e}^{yz}\left(\left(\mathrm{e}^{yz}+y\mathrm{e}^{yz}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^2}$$

$$=\frac{\left(z\mathrm{e}^{2yz}-2z^3\mathrm{e}^{yz}\right)\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)+z\mathrm{e}^{yz}\left(y\mathrm{e}^{2yz}+2yz^2\mathrm{e}^{yz}\right)}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^3}=\frac{2z^2\mathrm{e}^{yz}\left(\mathrm{e}^{yz}-2z^2\right)}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{z\mathrm{e}^{yz}}{y\mathrm{e}^{yz}+2z}\right)=-\frac{yz\mathrm{e}^{yz}\frac{\partial z}{\partial x}\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)-z\mathrm{e}^{yz}\left(y^2\mathrm{e}^{yz}+2\right)\frac{\partial z}{\partial x}}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^2}$$

$$=\frac{yz\mathrm{e}^{yz}-\frac{z\mathrm{e}^{yz}\left(y^2\mathrm{e}^{yz}+2\right)}{y\mathrm{e}^{yz}+2z}}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^2}=\frac{2z\mathrm{e}^{yz}\left(yz-1\right)}{\left(y\mathrm{e}^{yz}+2z\right)^3}.$$

习题 14.49　设函数$u=u(x,y)$是由$u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$所确定，求$\frac{\partial u}{\partial x}$及$\frac{\partial u}{\partial y}$.

分析　本题考察隐函数求导法.

解答
$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x}=f_1'+\frac{\partial z}{\partial x}f_3'+\frac{\partial t}{\partial x}f_4',\\ \frac{\partial g(y,z,t)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}g_2'+\frac{\partial t}{\partial x}g_3'=0,\\ \frac{\partial h(z,t)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}h_1'+\frac{\partial t}{\partial x}h_2'=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=f_1',$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y}=f_2'+\frac{\partial z}{\partial y}f_3'+\frac{\partial t}{\partial y}f_4',\\ \frac{\partial g(y,z,t)}{\partial y}=g_1'+\frac{\partial z}{\partial y}g_2'+\frac{\partial t}{\partial y}g_3'=0,\\ \frac{\partial h(z,t)}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}h_1'+\frac{\partial t}{\partial y}h_2'=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+\frac{f_3'g_1'h_2'}{g_3'h_1'-g_2'h_2'}+\frac{f_4'g_1'h_1'}{g_2'h_2'-g_3'h_1'}.$$

习题 14.50　通过自变量变换$\begin{cases}u=x-2\sqrt{y},\\ v=x+2\sqrt{y}\end{cases}$化简偏微分方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0\left(y>0\right)$.

分析　本题考察多元函数的高阶偏导数.

解答　$4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

习题 14.51　设变换$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，求$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$.

分析　利用$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\cdot\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=1$.

解答　由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r$，知$\dfrac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

习题 14.52　设变换$\begin{cases} x = \dfrac{u^2-v^2}{2}, \\ y = uv, \\ z = z \end{cases}$，求$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}$.

分析　本题考察雅可比行列式的计算.

解答　$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=u^2+v^2$.

评注　该变换事实上没有作用于z分量，故有$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

习题 14.53　设椭圆球坐标变换为$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\varphi \end{cases}$，求$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}$.

分析　本题考察雅可比行列式的计算.

解答

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & ar\cos\varphi\cos\theta & -ar\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & br\cos\varphi\sin\theta & br\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\varphi & cr\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=abcr^2\sin\varphi.$$

评注　当$a=b=c$时，有$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，这就是例 14.1.8 的结论.

习题 14.54　求证：不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m\left(m<n\right)$ 的 C_1 同胚映射．

分析　利用秩不等式 $\operatorname{rank}\left(\mathbf{AB}\right)\le\min\left\{\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}\right),\operatorname{rank}\left(\mathbf{B}\right)\right\}$．

证明　反设存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C_1 同胚映射 $\mathbf{f}=\left(f_1,f_2,\dots,f_m\right)$，$\mathbf{y}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$，$\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$，$\mathbf{y}=\left(y_1,y_2,\dots,y_m\right)$，记其逆映射为 $\mathbf{f}^{-1}=\left(f_1^{-1},f_2^{-1},\dots,f_n^{-1}\right)$，则恒同映射 $\mathbf{f}^{-1}\mathbf{f}$ 在点 $\mathbf{x}$ 处的导数为

$$\mathbf{f}^{-1}\mathbf{f}'\left(\mathbf{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_m}\\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n^{-1}}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m^{-1}}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

为 n 级矩阵，其秩必不大于 m，故其不可能为恒同映射，矛盾．故不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C_1 同胚映射．证毕．

习题 14.55　求下列函数的极值点：

(1) $f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3x-12y+1$；

(2) $f\left(x,y\right)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$．

分析　本题考察多元函数的通常极值问题．

解答　(1) 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-12=0\end{cases}$，得驻点 $(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)$．考虑海色矩阵 $\mathbf{H}_f=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix}$，$\mathbf{H}_f\left(1,2\right)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$ 是正定的，$\mathbf{H}_f\left(-1,-2\right)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$ 是负定的，$\mathbf{H}_f\left(1,-2\right)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$,$\mathbf{H}_f\left(-1,2\right)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$ 是不定的，故 $f\left(x,y\right)$ 有唯一极小值点 $\left(1,2\right)$ 和唯一极大值点 $\left(-1,-2\right)$．

(2) 解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x\left(\ln\left(x^2+y^2\right)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right)=0\end{cases}$，得驻点 $\left(0,\pm1\right),\left(\pm1,0\right),\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$,

$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$．考虑海色矩阵

$$\mathbf{H}_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2xy\left(x^2+3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^4+8x^2y^2+2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2x^4+8x^2y^2+2y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \frac{2xy\left(3x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{pmatrix},$$

$\mathbf{H}_f(0,\pm1)=\mathbf{H}_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$是不定的，故它们都不是$f(x,y)$的极值点．注意到$\left|f(x,y)\right|=\left|xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\le\frac{1}{2}\left|\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$，考察函数$g(z)=\frac{1}{2}\left|z\ln z\right|$，其有唯一极小值点$z=1$，故$f(x,y)$有极小值点$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$和极大值点$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},-\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$．

评注　(2)题中的$\mathbf{H}_f\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}},\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}\right)$等矩阵不满秩，故必须用其他方法考察其是否为极值点．

习题 14.56　求证：

(1) $(0,0)$是函数$f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-3x^2\right)$的鞍点；

(2) 当函数$f(x,y)$的定义域限制在过$(0,0)$的任一条直线上时，它在$(0,0)$处取极小值．

分析　(2) 利用多元函数的方向导数．

证明　(1) 对$\forall\delta\in(0,1)$，$\exists\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta^2}{2}\right),\left(\frac{\delta}{2},0\right)\in U(\mathbf{0},\delta)$，使得$f\left(\frac{\delta}{2},\frac{\delta^2}{2}\right)<0<f\left(\frac{\delta}{2},0\right)$．而$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，故$(0,0)$是$f(x,y)$的鞍点．证毕．

(2) 由$\frac{\partial f(0,0)}{\partial(\cos\theta,\sin\theta)}=\left.\left(\left(-8xy+12x^3\right)\cos\theta+\left(2y-4x^2\right)\sin\theta\right)\right|_{(0,0)}=0$，$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial(\cos\theta,\sin\theta)^2}=\left.\left(\left(-8y+36x^2\right)\cos^2\theta-16x\cos\theta\sin\theta+2\sin^2\theta\right)\right|_{(0,0)}=2\sin^2\theta>0$，知$f(x,y)$在过点$(0,0)$的任一条直线上在$(0,0)$处取极小值．证毕．

习题 14.57　设方程$F(x,u,v)=0$与$G(x,u,v)=0$确定可微函数组$\begin{cases}u=u(x),\\ v=v(x)\end{cases}$，求$u=u(x)$的驻点所满足的条件．

分析　根据驻点的定义验证即可.

解答　即关于$\dfrac{\partial u}{\partial x}$的方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=F_1'+\dfrac{\partial u}{\partial x}F_2'+\dfrac{\partial v}{\partial x}F_3'=0,\\ \dfrac{\partial G}{\partial x}=G_1'+\dfrac{\partial u}{\partial x}G_2'+\dfrac{\partial v}{\partial x}G_3'=0\end{cases}$仅有零解，故$F_1'G_3'=F_3'G_1'$.

习题 14.58　分别求$\mathbb{R}^2$中单位圆内接三角形和内接长方形的最大面积.

分析　本题考察多元函数的通常极值问题.

证明　设三角形的三个顶点坐标分别为$(1,0),(\cos x,\sin x),(\cos y,\sin y)(0<x<y<2\pi)$，则三角形的面积$f(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y+\sin(y-x)}{2}$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\cos x-\cos(y-x)}{2}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\cos y+\cos(y-x)}{2}=0\end{cases},$$

得驻点$\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，其海色矩阵

$$\mathbf{H}_f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$=\left.\begin{pmatrix}-\dfrac{\sin x+\sin(y-x)}{2} & \dfrac{\sin(y-x)}{2}\\ \dfrac{\sin(y-x)}{2} & \dfrac{\sin y-\sin(y-x)}{2}\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

为负定矩阵，故$f(x,y)$有唯一极大值点$\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，即其最大值点，从而$\mathbb{R}^2$中单位圆内接三角形的最大面积为$f\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

设长方形的四个顶点坐标分别为$\pm(\cos x,\sin x),\pm(\cos x,-\sin x)\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则长方形的面积$g(x)=2\sin 2x$，故$\mathbb{R}^2$中单位圆内接长方形的最大面积为$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.

习题 14.59　设函数 $u=u(x,y)$ 在单位圆盘 $\Delta=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 的闭包上具有二阶连续偏导数，在 Δ 上满足 $u(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 并且在 $\partial\Delta$ 上 $u(x,y)\equiv 0$．求证：在 $\overline{\Delta}$ 上，$u(x,y)\equiv 0$．

分析　由 $u(x,y)$ 的连续性，知 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上有最值点，故结论的反面就是 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上的最小值小于 0 或最大值大于 0．

证明　反设 $\exists(x_0,y_0)\in\Delta$，使得 $u(x_0,y_0)\neq 0$，则 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上的最小值小于 0 或最大值大于 0．不妨设 (x_0,y_0) 就是 $u(x,y)$ 在 $\overline{\Delta}$ 上的最小值点，则 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}=u(x_0,y_0)<0$，故必有 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$ 或 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0$．不妨设 $\dfrac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$，由 (x_0,y_0) 为极小值点，知 $\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=0$，这与 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处在 x 方向上的极小值性矛盾，故 $u(x,y)\equiv 0$．证毕．

习题 14.60　某工厂要生产一批容积为 1m^3 的铁皮圆桶，供装汽油用，试问：什么样的尺寸可使用料最省？

分析　本题考察多元函数的条件极值问题．

解答　设圆筒的底面半径为 x m，高为 y m，则用料面积 $f(x,y)=2\pi x(x+y)$，约束条件为 $\varphi(x,y)=\pi x^2y-1=0$．由拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\pi(2x+y+\lambda xy)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\pi x(2+\lambda x)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial\lambda}=\pi x^2y-1=0\end{cases}$，得驻点 $(0,0)$，$\left(\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac13},\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{\frac13}\right)$．由实际问题的意义，舍去 $(0,0)$ 一解，故 $\left(\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac13},\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{\frac13}\right)$ 必为最小值点，即底面半径为 $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac13}$ m、高为 $\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{\frac13}$ m 时用料最省．

习题 14.61　求点 $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ 到平面 $\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i=0$ 的距离，其中 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 为常数．

分析　本题考察多元函数的条件极值问题．

解答　点 $\mathbf{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ 到点 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 的距离 $f(\mathbf{x})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i-x_i^0\right)^2}$，约束条件

$\varphi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$．由拉格朗日乘数法，作函数 $F(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})+\lambda\varphi(\mathbf{x})$，解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{x_i-x_i^0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)^2}}+\lambda a_i=0,(i=1,2,\dots,n)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0\end{cases},$$

得唯一驻点 $\mathbf{x}_1=\left(x_1^0-\dfrac{a_1\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^0}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2},x_2^0-\dfrac{a_2\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^0}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2},\dots,x_n^0-\dfrac{a_n\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^0}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\right)$，其海色矩阵

$$\begin{aligned}&\mathbf{H}_F(\mathbf{x}_1)\\&=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial x_1^2}&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2}&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_2^2}&\cdots&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_n}&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_n}&\cdots&\dfrac{\partial^2F}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}_1}\\&=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left.\begin{pmatrix}\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne1}\left(x_i-x_i^0\right)^2&-\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_2-x_2^0\right)&\cdots&-\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_n-x_n^0\right)\\-\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_2-x_2^0\right)&\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne2}\left(x_i-x_i^0\right)^2&\cdots&-\left(x_2-x_2^0\right)\left(x_n-x_n^0\right)\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-\left(x_1-x_1^0\right)\left(x_n-x_n^0\right)&-\left(x_2-x_2^0\right)\left(x_n-x_n^0\right)&\cdots&\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne n}\left(x_i-x_i^0\right)^2\end{pmatrix}\right|_{\mathbf{x}_1}\\&=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^0\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}\begin{pmatrix}\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne1}a_i^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_1a_2&\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne2}a_i^2&\cdots&-a_2a_n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_1a_n&-a_2a_n&\cdots&\sum\limits_{1\le i\le n,i\ne n}a_i^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

为正定矩阵，故 $f(\mathbf{x})$ 有唯一极小值点 $\mathbf{x}_1$，即其最小值点，从而点 $\mathbf{x}_0$ 到平面 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$ 的距离为 $f(\mathbf{x}_1)=\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^0\right|\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

习题 14.62　求原点到椭圆$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$的最小与最大距离.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　设$\left(x, y, z\right)$为椭圆上一点，其到原点的距离 $f\left(x, y, z\right) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，约束条件为 $\begin{cases} \varphi_1\left(x, y, z\right) = z - x^2 - y^2 = 0, \\ \varphi_2\left(x, y, z\right) = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$. 由拉格朗日乘数法，作函数

$$F\left(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2\right) = f\left(x, y, z\right) + \lambda_1 \varphi_1\left(x, y, z\right) + \lambda_2 \varphi_2\left(x, y, z\right),$$

解方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = z - x^2 - y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$，得驻点

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, 2-\sqrt{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 2+\sqrt{3}\right).$$

考虑海色矩阵

$$\mathbf{H}_F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2 + z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda_1 & -\dfrac{xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^2 + z^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda_1 & -\dfrac{yz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\dfrac{xz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{yz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^2 + y^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{H}_F\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, 2-\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} 14\sqrt{3}-23 & -1 & 1-\sqrt{3} \\ -1 & 14\sqrt{3}-23 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$是正定的，

$$\mathbf{H}_F\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^{\frac{5}{2}}}\begin{pmatrix}14\sqrt{3}+23 & 1 & -1-\sqrt{3}\\ 1 & 14\sqrt{3}+23 & -1-\sqrt{3}\\ -1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}$$ 是负定的，

故 $f(x,y,z)$ 有唯一极小值点 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)$，即其最小值点，有唯一极大值点 $\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$，即其最大值点，从而原点到椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最小距离为

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2},2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{9-5\sqrt{3}},$$

最大距离为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$.

习题 14.63　求函数 $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ 在平面 $2x+3y+4z=12$ 上的最小值点.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　由拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，其中 $\varphi(x,y,z)=2x+3y+4z-12$，解方程组 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=8x+2\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+3\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=10z+4\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=2x+3y+4z-12=0\end{cases}$，得驻点 $\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$，其海色矩阵

$$\mathbf{H}_F\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial^2F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2F}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2F}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2F}{\partial z^2}\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&10\end{pmatrix}$$ 为正定矩阵，故 $f(x,y,z)$ 有唯一极小值点 $\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$，即其最小值点.

习题 14.64　求原点到曲线 $\begin{cases}xyz=1,\\ y=2x\end{cases}$ 的最小距离.

分析　可从一元函数的观点解题，从而规避求多元函数的高阶导数的繁琐.

解答　曲线$\begin{cases} xyz=1, \\ y=2x \end{cases}$的点可以表示为$\left(x,2x,\dfrac{1}{2x^2}\right)$，其到原点的距离 $f(x)=\sqrt{5x^2+\dfrac{1}{4x^4}}$，可求得其最小值为 $f\left(10^{-\frac{1}{6}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{10}}{2}$.

习题 14.65　求曲线$\begin{cases} x-y+4z=1, \\ 2x^2+4y^2=3 \end{cases}$上最高点与最低点的高度.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　设 $f(x,y)=z=\dfrac{-x+y+1}{4}$，约束条件为$\varphi(x,y)=2x^2+4y^2-3=0$. 由拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，解方程组$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{1}{4}+4\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{4}+8\lambda y=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2x^2+4y^2-3=0 \end{cases}$，得驻点 $\pm\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$. 考虑海色矩阵$\mathbf{H}_F=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4x} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{4y} \end{pmatrix}$，$\mathbf{H}_F\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$是正定的，$\mathbf{H}_F\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$是负定的，故 $f(x,y)$有唯一极小值点$\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$，即其最小值点，唯一极大值点$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$，即其最大值点，从而曲线$\begin{cases} x-y+4z=1, \\ 2x^2+4y^2=3 \end{cases}$上最高点的高度为 $f\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$，最低点的高度为 $f\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

习题 14.66　(1) 求函数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 在球面 $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$上的最大值.

(2) 求证：$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　(1) 记 $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，由拉格朗日乘数法，作函数 $F\left(\mathbf{x},\lambda\right)=f\left(\mathbf{x}\right)+\lambda\varphi\left(\mathbf{x}\right)$，其中 $\varphi\left(\mathbf{x}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1$，解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=1+2\lambda x_i=0,\left(i=1,2,\ldots,n\right)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-1=0\end{cases}$，得驻点 $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 考虑海色矩阵 $\mathbf{H}_F=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{x_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{x_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{1}{x_n}\end{pmatrix}$，

$$\mathbf{H}_F\left(-\frac{1}{\sqrt{n}},-\frac{1}{\sqrt{n}},\ldots,-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}\mathbf{I}$$

是正定的，$\mathbf{H}_F\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=-\sqrt{n}\mathbf{I}$ 是负定的，故 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 有唯一极大值点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，即其最大值点，从而 $f\left(\mathbf{x}\right)$ 的最大值为 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ldots,\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}$.

(2) 由齐次性，不妨设 $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$，再由(1)题结论立得．证毕.

评注　(2)题的结论就是平方—算术平均不等式，其另一证明可参考例 5.4.10.

习题 14.67　设函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上可积，求关于 $\left(a,b,c\right)$ 的函数

$$g\left(a,b,c\right)=\int_0^1\left(f\left(x\right)-ax^2-bx-c\right)^2\mathrm{d}x\left(\left(a,b,c\right)\in\mathbb{R}^3\right)$$

的最小值点.

分析　本题考察多元函数的通常极值问题.

解答　解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial a}=\dfrac{2}{5}a+\dfrac{1}{2}b+\dfrac{2}{3}c-\displaystyle\int_0^1 2x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial b}=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{2}{3}b+c-\displaystyle\int_0^1 2xf\left(x\right)\mathrm{d}x=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial c}=\dfrac{2}{3}a+b+2c-\displaystyle\int_0^1 2f\left(x\right)\mathrm{d}x=0\end{cases}$，得驻点

$$\left(a_0,b_0,c_0\right)=\left(\int_0^1 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x,\int_0^1 xf\left(x\right)\mathrm{d}x,\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)\begin{pmatrix}180 & -180 & 30\\ -180 & 192 & -36\\ 30 & -36 & 9\end{pmatrix}.$$

由海色矩阵 $\mathbf{H}_g=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2 g}{\partial a\partial c}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial b\partial c}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial a\partial c} & \frac{\partial^2 g}{\partial b\partial c} & \frac{\partial^2 g}{\partial c^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & 2\end{pmatrix}$ 恒为正定矩阵，故 $g(a,b,c)$ 有唯一极小值点 (a_0,b_0,c_0)，即其最小值点.

习题 14.68　(1) 求函数 $z=\frac{1}{2}\left(x^K+y^K\right)$ 在约束条件 $x+y=c(c>0)$ 下的极值.

(2) 求证：对 $\forall a,b\geq 0,K\in\mathbb{N}$，有 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^K\leq\frac{a^K+b^K}{2}$.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　(1) 记 $z=f(x,y)$，约束条件为 $\varphi(x,y)=x+y-c=0$. 由拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，解方程组 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{Kx^{K-1}}{2}+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{Ky^{K-1}}{2}+\lambda=0,,\\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=x+y-c=0\end{cases}$ 得唯一驻点 $\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$，其海色矩阵 $\mathbf{H}_F\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)=\left.\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)}=\left.\frac{K(K-1)}{2}\begin{pmatrix}x^{K-2} & 0\\ 0 & y^{K-2}\end{pmatrix}\right|_{\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)}=\frac{K(K-1)c^{K-2}}{2^{K-1}}\mathbf{I}$ 是正定的，故 $f(x,y)$ 有唯一极小值点 $\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$，极小值 $f\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)=\frac{c^K}{2^K}$.

(2) 由齐次性，不妨设 $a+b=c$，再由(1)题结论立得. 证毕.

评注　可参考习题 14.66 的评注.

习题 14.69　椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ 与平面 $x+y-z=0$ 的交线为一椭圆，求该椭圆在该平面上所围区域的面积.

分析　本题考察多元函数的条件极值问题.

解答　设 (x,y,z) 为椭圆上一点，其到椭圆中心即原点的距离 $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

约束条件为$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{25}-1=0,\\ \varphi_2(x,y,z)=x+y-z=0\end{cases}$．由拉格朗日乘数法，作函数$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$，解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{\lambda_1 x}{2}+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{2\lambda_1 y}{5}+\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{2\lambda_1 z}{25}-\lambda_2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{25}-1=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2}=x+y-z=0\end{cases}$$

，得驻点$\pm\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{19}}\right)$，$\pm\left(\dfrac{40}{\sqrt{646}},-\dfrac{35}{\sqrt{646}},\dfrac{5}{\sqrt{646}}\right)$．考虑海色矩阵

$$\mathbf{H}_F=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\lambda_1}{2} & -\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ -\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{2\lambda_1}{5} & -\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ -\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{2\lambda_1}{25}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_F\left(\pm\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{19}}\right)\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{129}{38\sqrt{10}} & -\dfrac{3}{19\sqrt{10}} & -\dfrac{\sqrt{5}}{19\sqrt{2}}\\ -\dfrac{3}{19\sqrt{10}} & \dfrac{21\sqrt{5}}{38\sqrt{2}} & -\dfrac{3\sqrt{5}}{38\sqrt{2}}\\ -\dfrac{\sqrt{5}}{19\sqrt{2}} & -\dfrac{3\sqrt{5}}{38\sqrt{2}} & \dfrac{141}{190\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$是正定的，

$$\mathbf{H}_F\left(\pm\left(\frac{40}{\sqrt{646}},-\frac{35}{\sqrt{646}},\frac{5}{\sqrt{646}}\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{515}{228\sqrt{51}} & \frac{28\sqrt{17}}{285\sqrt{3}} & -\frac{4\sqrt{17}}{285\sqrt{3}}\\ \frac{28\sqrt{17}}{285\sqrt{3}} & -\frac{121}{114\sqrt{51}} & \frac{7\sqrt{17}}{570\sqrt{3}}\\ -\frac{4\sqrt{17}}{285\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{17}}{570\sqrt{3}} & \frac{1579}{570\sqrt{51}}\end{pmatrix}\text{是负定的,}$$

故 $f(x,y,z)$ 有极小值点 $\pm\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{19}}\right)$ 和极大值点 $\pm\left(\frac{40}{\sqrt{646}},-\frac{35}{\sqrt{646}},\frac{5}{\sqrt{646}}\right)$，从而该椭圆的半长轴长 $a=f\left(\frac{40}{\sqrt{646}},-\frac{35}{\sqrt{646}},\frac{5}{\sqrt{646}}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$，半短轴长 $b=f\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{19}},\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{19}}\right)=\sqrt{10}$，在该平面上所围区域的面积 $S=\pi ab=\frac{5\sqrt{510}}{17}\pi$.

评注　事实上，我们不需要借助海色矩阵的正定性来判断驻点是否为极值点，因为关于原点对称的两组驻点中，必有一组为长轴顶点，而另一组为短轴顶点.

习题 14.70　设可微函数 $x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v)$ 满足 $F(x,y,z)=0$，其中 $F(x,y,z)$ 是 C^1 函数，求证：$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}x+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}y+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}z=0$.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

证明　由 $F(x,y,z)=0$ 在 (x,y,z) 处的法向量为 $\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$ 立得结论. 证毕.

习题 14.71　求曲线 $\begin{cases}3x^2y+y^2z+2=0,\\ 2xz-x^2y-3=0\end{cases}$ 在 $(1,-1,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

解答　令 $F(x,y,z)=3x^2y+y^2z+2$，$G(x,y,z)=2xz-x^2y-3$，则 $\frac{\partial F}{\partial x}=6xy$，$\frac{\partial F}{\partial y}=3x^2+2yz$，$\frac{\partial F}{\partial z}=y^2$，$\frac{\partial G}{\partial x}=2z-2xy$，$\frac{\partial G}{\partial y}=-x^2$，$\frac{\partial G}{\partial z}=2x$，故 $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}=3$，$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}1&-6\\2&4\end{vmatrix}=16$，$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,-1,1)}=\begin{vmatrix}-6&1\\4&-1\end{vmatrix}=2$，从而所求切线方程为 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{16}=\frac{z-1}{2}$，法平面方程为 $3(x-1)+16(y+1)+2(z-1)=0$，即 $3x+16y+2z+11=0$.

习题 14.72　求下列曲面的切平面方程与法线方程：

(1) $x^2+y^2-z^2-4=0$，在$(2,1,1)$处；

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

解答　(1) 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=-2z$，故所求切平面的方程为 $4(x-2)+2(y-1)-2(z-1)=0$，即 $2x+y-z-4=0$，所求法线方程为 $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$，即 $\dfrac{x-2}{2}=y-1=-z+1$.

(2) 令 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{2x}{a^2}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{2y}{b^2}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{2z}{c^2}$，故该曲面在 (x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为 $\dfrac{2x_0}{a_0^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b_0^2}(y-y_0)+\dfrac{2z_0}{c_0^2}(z-z_0)=0$，即

$$\frac{x_0}{a_0^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b_0^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c_0^2}(z-z_0)=0,$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\frac{2x_0}{a_0^2}}=\dfrac{y-y_0}{\frac{2y_0}{b_0^2}}=\dfrac{z-z_0}{\frac{2z_0}{c_0^2}}$，即 $\dfrac{a_0^2(x-x_0)}{x_0}=\dfrac{b_0^2(y-y_0)}{y_0}=\dfrac{c_0^2(z-z_0)}{z_0}$.

习题 14.73　在曲面 $z=x^2-2xy-y^2-8x+4y$ 上找出所有的点 (x,y,z)，使得在这些点处曲面的切平面是水平的.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

解答　令 $F(x,y,z)=z-x^2+2xy+y^2+8x-4y$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-2x+2y+8$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=2x+2y-4$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=1$，故该曲面在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$(-2x_0+2y_0+8)(x-x_0)+(2x_0+2y_0-4)(y-y_0)+(z-z_0)=0.$$

令 $\begin{cases}-2x_0+2y_0+8=0,\\ 2x_0+2y_0-4=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_0=3,\\ y_0=-1\end{cases}$，从而所求点为 $(3,-1,-14)$.

习题 14.74　设$\mathbb{R}^3$中的曲面在柱面坐标$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$下的方程为$F(r,\theta,z)=0$，其中$F$是可微函数．试求$(x_0,y_0,z_0)$所对应曲面上的点处的切平面方程与法线方程．

分析　本题考察多元微积分的几何应用．

解答　该坐标变换可改写为$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta = \arctan\dfrac{y}{x}, \\ z = z \end{cases}$，故$\dfrac{\partial F}{\partial x} = F_r'\cos\theta - \dfrac{F_\theta'\sin\theta}{r}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y} = F_r'\sin\theta + \dfrac{F_\theta'\cos\theta}{r}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z} = F_z'$，知该曲面在$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为

$$\left(F_r'\cos\theta - \frac{F_\theta'\sin\theta}{r}\right)(x - r_0\cos\theta_0) + \left(F_r'\sin\theta + \frac{F_\theta'\cos\theta}{r}\right)(y - r_0\sin\theta_0) + F_z'(z - z_0) = 0,$$

法线方程为$\dfrac{x - r_0\cos\theta_0}{F_r'\cos\theta - \dfrac{F_\theta'\sin\theta}{r}} + \dfrac{y - r_0\sin\theta_0}{F_r'\sin\theta + \dfrac{F_\theta'\cos\theta}{r}} + \dfrac{z - z_0}{F_z'} = 0$．

习题 14.75　设曲面S由方程$F(x,y,z)=0$给出，其中$F(x,y,z)$是区域$D\subset\mathbb{R}^n$上的C_1函数，并且在$(x_0,y_0,z_0)\in D$处满足$F'(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}$．求证：该曲面在$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面上过点$(x_0,y_0,z_0)$的任何一条直线都是曲面上过该点的某光滑曲线的切线．

分析　本题考察多元微积分的几何应用．

证明　记$X = \dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$，$Y = \dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}$，$Z = \dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$，则该曲面在$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为$X(x-x_0)+Y(y-y_0)+Z(z-z_0)=0$．考虑过$(x_0,y_0,z_0)$且与该切平面垂直的任一平面$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，则在该切平面上过$(x_0,y_0,z_0)$的直线方程为$\begin{cases} X(x-x_0)+Y(y-y_0)+Z(z-z_0)=0, \\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases}$，它正是曲线$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases}$在该点处的切线．证毕．

习题 14.76　求证：圆柱螺旋线$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}$上任一点处的切线与$z$轴的夹角为常数．

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

证明　由 $x'(t)=-a\sin t$， $y'(t)=a\cos t$， $z'(t)=b$，知该曲线在 $(a\cos t_0,a\sin t_0,bt_0)$ 处的切线平行于向量 $(-a\sin t_0,a\cos t_0,b)$，其与 z 轴的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{(-a\sin t_0)^2+(a\cos t_0)^2+b^2}}=\arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为常数．证毕.

习题 14.77　(1) 求曲面 $z=x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 上每一点处的切平面方程.

(2) 求证：曲面 $z=x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 上任何两点处的切平面均相交.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

解答　(1) 令 $F(x,y,z)=z-x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$， $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$， $\dfrac{\partial F}{\partial z}=1$，故该曲面在 $\left(x_0,y_0,x_0\mathrm{e}^{\frac{x_0}{y_0}}\right)$ 处的切平面方程为 $-\left(1+\dfrac{x_0}{y_0}\right)\mathrm{e}^{\frac{x_0}{y_0}}(x-x_0)+\dfrac{x_0^2}{y_0^2}\mathrm{e}^{\frac{x_0}{y_0}}(y-y_0)+\left(z-x_0\mathrm{e}^{\frac{x_0}{y_0}}\right)=0$，即 $z=\mathrm{e}^{\frac{x_0}{y_0}}\left(\left(1+\dfrac{x_0}{y_0}\right)x-\dfrac{x_0^2}{y_0^2}y\right)$.

(2) 由(1)题，曲面 $z=x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 上每一点处的切平面均过原点，故任何两点处的切平面均相交．证毕.

习题 14.78　求圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与曲面 $z=xy$ 的夹角.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

解答　考察两个曲面的交点 (x_0,y_0,z_0)，圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在该点处的法线显然平行于向量 $(x_0,y_0,0)$．令 $F(x,y,z)=z-xy$，则 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-y$， $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-x$， $\dfrac{\partial F}{\partial z}=1$，故曲面 $z=xy$ 在该点处的法线平行于 $(-y_0,-x_0,1)$．从而两个曲面在该点处的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|-2x_0y_0|}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)(x_0^2+y_0^2+1)}}=\arccos\left|\sqrt{2}x_0y_0\right|=\arccos\left|\sqrt{2}z_0\right|$.

习题 14.79　求证：曲面 $F(x-az,y-bz)=0\,(a,b\in\mathbb{R})$ 上任一点处的法线与一条固定直线垂直.

分析　本题考察多元微积分的几何应用.

证明　由$\dfrac{\partial F}{\partial x}=F_1'$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=F_2'$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=-aF_1'-bF_2'$，知该曲线在$\left(x_0,y_0,z_0\right)$处的法线平行于向量$\left(F_1',F_2',-aF_1'-bF_2'\right)$，故其垂直于向量$\left(a,b,1\right)$．证毕．

习题 14.80　求证：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\left(a>0\right)$上任一点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点的距离之和为常数．

分析　本题考察多元微积分的几何应用．

证明　令$F\left(x,y,z\right)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$，故该曲面在$\left(x_0,y_0,z_0\right)$处的切平面方程为$\dfrac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\dfrac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\dfrac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0$，从而该平面与三个坐标轴的交点到原点的距离之和

$$\begin{aligned}&\left(x_0+2\sqrt{x_0}\left(\frac{y_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z_0}{2\sqrt{z_0}}\right)\right)+\left(y_0+2\sqrt{y_0}\left(\frac{z_0}{2\sqrt{z_0}}+\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}\right)\right)+\left(z_0+2\sqrt{z_0}\left(\frac{x_0}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y_0}{2\sqrt{y_0}}\right)\right)\\&=\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)^2=a\end{aligned}$$

为常数．证毕．

习题 14.81　求证：曲面$xyz=a\left(a>0\right)$上任一点处的切平面与三个坐标平面所围的体积为常数．

分析　本题考察多元微积分的几何应用．

证明　令$F\left(x,y,z\right)=xyz-a$，则$\dfrac{\partial F}{\partial x}=yz$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=xz$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=xy$，故该曲面在$\left(x_0,y_0,z_0\right)$处的切平面方程为$y_0z_0\left(x-x_0\right)+x_0z_0\left(y-y_0\right)+x_0y_0\left(z-z_0\right)=0$，即$\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=3$，从而该平面与三个坐标平面所围的体积$\dfrac{1}{6}\left(3x_0\right)\left(3y_0\right)\left(3z_0\right)=\dfrac{9a}{2}$为常数．证毕．

习题 14.82　求证：曲面$x^2+4y+z^2=0$与$x^2+y^2+z^2-6z+7=0$在$\left(0,-1,2\right)$处相切．

分析　本题考察多元微积分的几何应用．

证明　令$F\left(x,y,z\right)=x^2+4y+z^2$，则$\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=4$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=2z$，故曲面$x^2+4y+z^2=0$在$\left(0,-1,2\right)$处的切平面方程为$4\left(y+1\right)+4\left(z-2\right)=0$，即$y+z-1=0$．令$G\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$

$-6z+7$，则 $\frac{\partial G}{\partial x}=2x$， $\frac{\partial G}{\partial y}=2y$， $\frac{\partial G}{\partial z}=2z-6$，故曲面 $x^2+y^2+z^2-6z+7=0$ 在 $(0,-1,2)$ 处的切平面方程为 $-2(y+1)-2(z-2)=0$，即 $y+z-1=0$．从而曲面 $x^2+4y+z^2=0$ 与 $x^2+y^2+z^2-6z+7=0$ 在 $(0,-1,2)$ 处相切．证毕．

15. 重积分

习题 15.1　设$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是可求面积的有界闭区域，函数$z=h(x,y)$在$\Omega$上连续，且$h(x,y)\geq 0$，求证：$D=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in\Omega,0\leq z\leq h(x,y)\right\}\subset\mathbb{R}^3$可求体积．

分析　根据有界集合可求体积的等价命题验证即可．

证明　由Ω可求面积，知对$\forall\varepsilon>0$，存在长方形族$\mathfrak{A}_\Omega=\left\{A_k\right\}_{k=1}^{K_1+K_2}$，其中$\left\{A_k\right\}_{k=1}^{K_1}\subset\Omega$，$\left\{A_k\right\}_{k=K_1+1}^{K_2}\not\subset\Omega$，$\left\{A_k\right\}_{k=K_1+1}^{K_2}\bigcap\Omega\neq\varnothing$，使得$\sigma\left(\left\{A_k\right\}_{k=K_1+1}^{K_2}\right)<\varepsilon$．考察长方体族$\mathfrak{B}_\Omega=\left\{B_k\right\}_{k=1}^{K_1+K_2}\bigcup\left\{C_k\right\}_{k=1}^{K_1}$，并取任一$\delta>0$，其中

$$B_k=\begin{cases}\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in A_k,\min\limits_{(x,y)\in A_k}\left\{h(x,y)\right\}\leq z\leq\max\limits_{(x,y)\in A_k}\left\{h(x,y)\right\}\right\}, & k=1,2,...,K_1,\\ \left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in A_k,-\delta\leq z\leq\max\limits_{(x,y)\in A_k\bigcap\Omega}\left\{h(x,y)\right\}\right\}, & k=K_1+1,K_1+2,...,K_1+K_2\end{cases},$$

$$C_k=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in A_k,-\delta\leq z\leq 0\right\},k=1,2,...,K_1,$$

并记$\omega_k=\max\limits_{(x,y)\in A_k}\left\{h(x,y)\right\}-\min\limits_{(x,y)\in A_k}\left\{h(x,y)\right\}$，$k=1,2,...,K_1$，$M=\max\limits_{(x,y)\in\Omega}\left\{h(x,y)\right\}$，则

$$M(\mathfrak{B}_\Omega)=V(\mathfrak{B}_\Omega)\leq\sum_{k=1}^{K_1}(\omega_k+\delta)\sigma(A_k)+\sum_{k=K_1+1}^{K_1+K_2}(M+\delta)\sigma(A_k)<\left(\max_{1\leq k\leq K_1}\left\{\omega_k\right\}+\delta\right)V+(M+\delta)\varepsilon.$$

由$z=h(x,y)$在Ω上的一致连续性，知充分细分$\mathfrak{A}_\Omega$后$\max\limits_{1\leq k\leq K_1}\left\{\omega_k\right\}$正向趋于 0，而$\varepsilon,\delta>0$均是任意的，也令其正向趋于 0，就有$V(\partial D)<M(\mathfrak{B}_\Omega)\to 0$，故$D$可求体积．证毕．

习题 15.2　设$E=\left\{(x,y)\middle|x,y\in\mathbb{Q}\right\}$，$D=[0,1]\times[0,1]$，求证：$D\bigcap E$不可求面积．

分析　根据有界集合可求面积的等价命题验证即可．

证明　由$\sigma\left(\partial\left(D\bigcap E\right)\right)=\sigma(D)=1\neq 0$，知$D\bigcap E$不可求面积．证毕．

习题 15.3　设$D\subset\mathbb{R}^2$是可求面积的有界区域，函数$f(x,y)$在$\overline{D}$上有界并且在D上连续．求证：$f(x,y)$在$\overline{D}$上可积．

分析　利用多元函数的达布定理．

证明　由$f(x,y)$在$\overline{D}$上有界，知$\exists M>0$，使得$\left|f(x,y)\right|\leq M$在$\overline{D}$上恒成立．由$D$可求面积，知$\sigma(\partial D)=0$，故对$\forall\varepsilon>0$，存在简单集合$E=\left\{\Delta E_1,\Delta E_2,...,\Delta E_{K_1}\right\}\subset\mathbb{R}^2$，使得$\partial D\subset E^\circ$，且$\sigma(E^\circ)<\dfrac{\varepsilon}{4M}$，从而存在$\overline{D}\bigcap E^\circ$的分割$\left\{\Delta D_1,\Delta D_2,...,\Delta D_{K_1}\right\}$，使得$\sum\limits_{k=1}^{K_1}\omega_k\Delta\sigma_k\leq 2M\sum\limits_{k=1}^{K_1}\omega_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$．由

$\overline{D}\setminus E^{\circ}$的紧性，知$f(x,y)$在$\overline{D}\setminus E^{\circ}$上一致连续，故存在$\overline{D}\setminus E^{\circ}$的分割$\left\{\Delta D_{K_1+1},\Delta D_{K_1+2},\ldots,\Delta D_{K_1+K_2}\right\}$，使得$\sum_{k=K_1+1}^{K_1+K_2}\omega_k\Delta\sigma_k<\frac{\varepsilon}{2}$，从而$\overline{D}$的分割$\left\{\Delta D_1,\Delta D_2,\ldots,\Delta D_{K_1+K_2}\right\}$满足$\sum_{k=1}^{K_1+K_2}\omega_k\Delta\sigma_k<\varepsilon$，其中$\omega_k$为$\Delta D_k$在$f(x,y)$上的振幅，$\Delta\sigma_k$为$\Delta D_k$的面积，进而$f(x,y)$在$\overline{D}$上可积．证毕．

习题 15.4　设函数$f(\mathbf{x})$在可求体积的有界闭区域$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上可积，向量函数$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{u})$是可求体积的有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^n$到可求体积的有界闭区域$\mathbf{x}(D)\subset\Omega$的$C_1$同胚映射．求证：$f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$在$D$上可积．

分析　利用习题 13.29 的结论．

证明　由$f(\mathbf{x})$在Ω上可积，知$\sum_{k=1}^{K}\omega_k\Delta V_k$可以取到充分小的正数，其中$\omega_k$为$\Delta\Omega_k$在$f(\mathbf{x})$上的振幅，$\Delta V_k$为$\Delta\Omega_k$的体积，$\{\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\ldots,\Delta\Omega_K\}$是$\mathbf{x}(D)$的一个分割．由同胚映射的一致连续性，知$\sum_{k=1}^{K}\omega_k'\Delta V_k'$可以取到充分小的正数，其中$\omega_k'$为$\Delta D_k=\mathbf{x}^{-1}(\Delta\Omega_k)$在$f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$上的振幅，$\Delta V_k'$为$\Delta D_k$的体积，$\{\Delta D_1,\Delta D_2,\ldots,\Delta D_K\}$是$D$的一个分割，故$f(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$在$D$上可积．证毕．

习题 15.5　设函数$f(x,y),g(x,y)$在可求面积的有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$上连续，且对$\forall(x,y)\in D$，有$g(x,y)\geq 0$．求证：存在无穷多个$(\xi,\eta)\in D^{\circ}$，使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

分析　利用重积分第一中值定理．

证明　由最值定理，记$f(x,y)$在D上的最小值为m、最大值为M．若$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$0=m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leq M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故对$\forall(\xi,\eta)\in D$，有$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0=f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，结论成立．否则存在有界闭区域$D_1\subset\left\{(x,y)\in D^{\circ}\middle|g(x,y)>0\right\}$，$\exists(\xi,\eta)\in D_1$，使得$\iint_{D_1}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint_{D_1}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

若$m=M$，则结论显然成立，否则设$f(x_1,y_1)=m<M=f(x_2,y_2)$，则$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$是不同的两点．若$f(\xi,\eta)=m$或$f(\xi,\eta)=M$，则$\iint_{D_1}\left(f(x,y)-f(\xi,\eta)\right)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故$\exists(\xi_1,\eta_1)\in D_1$，使得$g(\xi_1,\eta_1)\iint_{D_1}\left(f(x,y)-f(\xi,\eta)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故$\iint_{D_1}\left(f(x,y)-f(\xi,\eta)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中

$f(x,y)-f(\xi,\eta)$在D_1上连续且不变号，从而对$\forall(\xi_2,\eta_2)\in D_1$，有$f(\xi_2,\eta_2)=f(\xi,\eta)$，结论成立．否则$f(\xi,\eta)\in(m,M)$，则$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$存在无穷多条道路，由介值定理，知存在无穷多个$(\xi_2,\eta_2)\in D^\circ$，使得$f(\xi_2,\eta_2)=f(\xi,\eta)$，结论成立．证毕．

习题 15.6　设$f(\mathbf{x})$在$U(\mathbf{x}_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n\ (\delta_0>0)$上连续，并记$V_\delta$为$U(\mathbf{x}_0,\delta)$的体积，求证：

$$\lim_{\delta\to0}\frac{1}{V_\delta}\iint\cdots\int_{U(\mathbf{x}_0,\delta)}f(\mathbf{x})\mathrm{d}V=f(\mathbf{x}_0).$$

分析　利用重积分第一中值定理与重积分的几何意义．

证明　$\exists\mathbf{x}_1\in U(\mathbf{x}_0,\delta_0)$，使得$\frac{1}{V_{\delta_0}}\iint\cdots\int_{U(\mathbf{x}_0,\delta_0)}f(\mathbf{x})\mathrm{d}V=\frac{f(\mathbf{x}_1)}{V_{\delta_0}}\iint\cdots\int_{U(\mathbf{x}_0,\delta_0)}\mathrm{d}V=\frac{f(\mathbf{x}_1)}{V_{\delta_0}}V_{\delta_0}$ $=f(\mathbf{x}_1)$．由$f(\mathbf{x})$的连续性，知令$\delta_0\to0$，即有$\lim\limits_{\delta\to0}\frac{1}{V_\delta}\iint\cdots\int_{U(\mathbf{x}_0,\delta)}f(\mathbf{x})\mathrm{d}V=f(\mathbf{x}_0)$．证毕．

习题 15.7　证明或否定：

(1) 若函数$f(x,y)$在可求面积的有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$上可积，则$F(x,y,z)=f(x,y)$在闭区域$\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,1\le z\le2\}\subset\mathbb{R}^3$上的三重积分存在．

(2) 若函数$g(x,y,z)$在可求体积的有界闭区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上可积，则$G(x,y)=g(x,y,0)$在可求面积的有界闭区域$D=\{(x,y)|(x,y,z)\in\Omega,z=0\}\subset\mathbb{R}^2$上的二重积分存在．

分析　(1) 利用多元函数的达布定理．

(2) 注意到$g(x,y,z)$在$z=0$上的函数值的改变不影响其在Ω上的可积性．

解答　(1) 结论是肯定的．由$f(x,y)$在D上可积，知对$\forall\varepsilon>0$，存在D的分割$\Delta=\{\Delta D_1,\Delta D_2,\ldots,\Delta D_K\}$，使得$\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_k\Delta S_k<\varepsilon$，其中$\omega_k$为$f(x,y)$在$\Delta D_k$上的振幅，$\Delta S_k$为$\Delta D_k$的面积，故对$\Omega$的分割$\Delta'=\{\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\ldots,\Delta\Omega_K\}$，$\Delta\Omega_k=\{(x,y,z)|(x,y)\in\Delta D_k,1\le z\le2\}$，有$\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_k'\Delta V_k<\varepsilon$，其中$\omega_k'=\omega_k$为$f(x,y)$在$\Delta\Omega_k$上的振幅，$\Delta V_k=\Delta S_k$为$\Delta\Omega_k$的体积，$k=1,2,\ldots,K$，从而$F(x,y,z)$在$\Omega$上可积．证毕．

(2) 结论是否定的．反例如：$g(x,y,z)=\begin{cases}G(x,y), & z=0,\\ 0, & z\ne0\end{cases}$，其中$G(x,y)$在$D$上不可积．

习题 15.8　设函数 $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上有定义，且在任意可求体积的有界闭区域上可积，求证：$F(\mathbf{y})=\iint\cdots\int_{U(\mathbf{y},1)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

分析　利用重积分对积分区域的可加性.

证明　对 $\forall \mathbf{y}_0\in\mathbb{R}^n, \mathbf{y}\in U(\mathbf{y}_0,\delta)(\delta>0)$，有

$$\begin{aligned}\left|F(\mathbf{y})-F(\mathbf{y}_0)\right|&=\left|\iint\cdots\int_{U(\mathbf{y},1)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V-\iint\cdots\int_{U(\mathbf{y}_0,1)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V\right|\\&\le\left|\iint\cdots\int_{\overline{U(\mathbf{y},1)\setminus U(\mathbf{y}_0,1)}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V-\iint\cdots\int_{\overline{U(\mathbf{y}_0,1)\setminus U(\mathbf{y},1)}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V\right|\\&\le\left|\iint\cdots\int_{\overline{U(\mathbf{y},1)\setminus U(\mathbf{y}_0,1)}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V\right|+\left|\iint\cdots\int_{\overline{U(\mathbf{y}_0,1)\setminus U(\mathbf{y},1)}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}V\right|.\end{aligned}$$

其中 $\overline{U(\mathbf{y},1)\setminus U(\mathbf{y}_0,1)},\overline{U(\mathbf{y}_0,1)\setminus U(\mathbf{y},1)}$ 均为有界闭区域，且当 δ 充分小时，其体积均可达到任意小，故其重积分的绝对值也可以达到任意小，即 $\left|F(\mathbf{y})-F(\mathbf{y}_0)\right|\to 0(\delta\to 0)$.

习题 15.9　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\ge\alpha>0$. 记 $D=[a,b]\times[a,b]$，求证：$\iint_D f(x)(f(y))^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge(b-a)^2$.

分析　利用化重积分为累次积分.

证明　注意到

$$\begin{aligned}\iint_D f(x)(f(y))^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b f(x)(f(y))^{-1}\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (f(y))^{-1}\mathrm{d}y\right)\\&=\left(\int_a^b (f(x))^{-1}\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\right)=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b (f(x))^{-1}f(y)\mathrm{d}y\\&=\iint_D (f(x))^{-1}f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故 $\iint_D f(x)(f(y))^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\dfrac{f(x)(f(y))^{-1}+(f(x))^{-1}f(y)}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2$. 证毕.

评注　另一种想法是利用习题 7.18 的结论，即柯西—施瓦茨不等式：

$$\begin{aligned}\iint_D f(x)(f(y))^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (f(y))^{-1}\mathrm{d}y\right)=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (f(x))^{-1}\mathrm{d}x\right)\\&=\left(\int_a^b\left(\sqrt{f(x)}\right)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x\right)\ge\left(\int_a^b\mathrm{d}x\right)^2=(b-a)^2.\end{aligned}$$

习题 15.10　计算下列重积分或累次积分：

(1) $\iint_D x^2|y|^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=[-2,2]\times[-1,1]$；

(2) $\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{8x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\mathrm{d}y$；

(3) $\iiint_D \mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $D=\left[0,\ln 2\right]\times\left[0,\ln 3\right]\times\left[0,\ln 4\right]$.

分析　本题考察重积分的计算.

解答　(1) $\iint_D x^2\left|y\right|^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{-1}^1 x^2\left|y\right|^3\mathrm{d}y=\int_{-2}^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

(2)

$$\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{8x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{3}}\frac{8x}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{4}{y^2+1}-\frac{4}{y^2+4}\right)\mathrm{d}y=\pi-2\arctan\frac{1}{2}.$$

(3) $\iiint_D \mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\ln 2}\mathrm{d}x\int_0^{\ln 3}\mathrm{d}y\int_0^{\ln 4}\mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}z=\int_0^{\ln 2}\mathrm{d}x\int_0^{\ln 3}3\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{\ln 2}6\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=6$.

习题 15.11　对下列累次积分改变积分顺序：

(1) $\int_3^5\mathrm{d}x\int_{-x}^{x^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^6\mathrm{d}x\int_0^{6-x}\mathrm{d}y\int_{x+y}^6 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$；

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^1 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$；

(6) $\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\int_0^{1-x_1-x_2-x_3}f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\mathrm{d}x_4$；

(7) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{y^2-z^2}}^{\sqrt{y^2-z^2}}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x$；

(8) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+\frac{y^2}{4}}f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$.

分析　本题考察累次积分换序.

解答　(1) $\int_3^5\mathrm{d}x\int_{-x}^{x^2}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=\int_{-5}^{-3}\mathrm{d}y\int_{-y}^5 f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_{-3}^9\mathrm{d}y\int_3^5 f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+\int_9^{25}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^5 f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$.

(2) $\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2-1}^0 f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$.

(3) $\int_0^6\mathrm{d}x\int_0^{6-x}\mathrm{d}y\int_{x+y}^6 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z=\int_0^6\mathrm{d}y\int_0^{6-y}\mathrm{d}x\int_{x+y}^6 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$.

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$.

(5) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^1 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x\int_0^1 f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$.

(6)

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\int_0^{1-x_1-x_2-x_3} f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\mathrm{d}x_4\\&=\int_0^1 \mathrm{d}x_4\int_0^{1-x_4}\mathrm{d}x_3\int_0^{1-x_3-x_4}\mathrm{d}x_2\int_0^{1-x_2-x_3-x_4} f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

(7) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{y^2-z^2}}^{\sqrt{y^2-z^2}} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{1} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y$.

(8) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+\frac{y^2}{4}} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z=\int_{-2}^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}\mathrm{d}x\int_0^{x^2+\frac{y^2}{4}} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z$.

习题 15.12　计算下列重积分：

(1) $\iint_D\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $y=x^2, y=\sqrt{x}$ 所围的有界闭区域；

(2) $\iint_D\sin y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $y=\sqrt{x}, y=2, x=0$ 所围的有界闭区域；

(3) $\iint_D\left(x^2+x^4y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭区域 $1\le x^2+y^2\le 4$；

(4) $\iint_D x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $y^2=2x, x=\frac{1}{2}$ 所围的有界闭区域；

(5) $\iint_D\left(x+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $y=\mathrm{e}^x, y=1, x=0, x=1$ 所围的有界闭区域；

(6) $\iiint_D xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为由 $x=0, x=1, y=0, y=1, z=2, z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的有界闭区域；

(7) $\iiint_D x^2y^4\sin z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$；

(8) $\iiint_D\cos x\cos y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为闭区域 $|x|+|y|+|z|\le 1$；

(9) $\iiint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为由 $z=16\left(x^2+y^2\right), z=4\left(x^2+y^2\right), z=64$ 所围的有界闭区域；

(10) $\iint\cdots\int_D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$，其中 $D=\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\times\ldots\times\left[0,1\right]$.

分析　本题考察重积分的计算.

解答　(1) $\iint_D\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(-2x^4+x^{\frac{5}{2}}+x\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{70}$.

(2) $\iint_D\sin y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{y^2}\sin y^3\mathrm{d}x=\int_0^2 y^2\sin y^3\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\left(1-\cos 8\right)$.

(3) 作变量替换$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$，知

$$\iint_D (x^2 + x^4 y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S (r^3\cos^2\theta + r^6\cos^4\theta\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 (r^3\cos^2\theta + r^6\cos^4\theta\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{127}{7}\cos^4\theta\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{15}{4}\pi.$$

(4) 注意到被积函数关于x为偶函数，关于y为奇函数，积分区域关于y轴对称，故

$$\iint_D x^2 y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(5) $\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_1^{\mathrm{e}^x}(x+y)\mathrm{d}y = \int_0^1\left(x(\mathrm{e}^x - 1) + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$.

(6) $\iiint_D xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{4xy - x^3y - xy^3}{2}\mathrm{d}y = \int_0^1\dfrac{7x - 2x^3}{8}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{8}$.

(7) 注意到被积函数关于x, y为偶函数，关于z为奇函数，积分区域关于z轴对称，故

$$\iiint_D x^2 y^4 \sin z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

(8) 注意到被积函数关于x, y, z均为偶函数，积分区域关于x, y, z均对称，故

$$\begin{aligned}&\iiint_D \cos x\cos y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= 8\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\cos x\cos y\cos z\mathrm{d}z = 8\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\cos x\cos y\sin(1-x-y)\mathrm{d}y\\ &= 8\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)\cos x\sin(1-x)\mathrm{d}x = 2\sin 1 - \cos 1.\end{aligned}$$

(9) 作变量替换$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$，知

$$\iiint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{64}\mathrm{d}z\int_{\sqrt{\frac{z}{16}}}^{\sqrt{\frac{z}{4}}} r^3\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^{64}\frac{15z^2}{2^{10}}\mathrm{d}z = 2560\pi.$$

(10) 记$J_n = \iint\cdots\int_D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$，则$J_1 = \dfrac{1}{2}$，

$$J_n = \int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\ldots\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}x_n = \int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\ldots\int_0^1\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x_{n-1} = J_{n-1} + \frac{1}{2},$$

故$J_n = \dfrac{n}{2}$. 记$I_n = \iint\cdots\int_D\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$，则$I_1 = \dfrac{1}{3}$，

$$I_n=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 dx_n=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\cdots\int_0^1\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)+\frac{1}{3}\right)dx_{n-1}=I_{n-1}+\frac{n}{2}-\frac{1}{6},$$

即 $I_n-\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{12}\right)=I_{n-1}-\left(\frac{(n-1)^2}{4}+\frac{n-1}{12}\right)$，故 $I_n-\left(\frac{n^2}{4}+\frac{n}{12}\right)=I_1-\left(\frac{1^2}{4}+\frac{1}{12}\right)=0$，即 $I_n=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{12}$.

习题 15.13　求由曲线 $y^2=4ax$ 与 $x^2=\frac{a}{2}y\,(a>0)$ 所围的有界闭区域的面积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　$S=\iint_D dxdy=\int_0^a dx\int_{\frac{2x^2}{a}}^{2\sqrt{ax}} dy=\int_0^a\left(2\sqrt{ax}-\frac{2x^2}{a}\right)dx=\frac{2}{3}a^2$.

习题 15.14　求由曲面 $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{z^2}{2}=1$ 与三个坐标平面所围立体在第一卦象的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　作变量替换 $\begin{cases} x=\sqrt{2}rs\sin\theta, \\ y=\sqrt{3}r(1-s)\sin\theta, \\ z=\sqrt{2}r\cos\theta \end{cases}$，由 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,\theta)}=2\sqrt{3}r^2\sin\theta$，知

$$V=\iiint_D dxdydz=\iiint_S 2\sqrt{3}r^2\sin\theta drdsd\theta=\int_0^1 dr\int_0^1 ds\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{3}r^2\sin\theta d\theta=\int_0^1 2\sqrt{3}r^2 dr=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

习题 15.15　设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶连续偏导数，求证：

(1) 对 $\forall \mathbf{x}_0=(x_0,y_0)\in D$，当 $\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}\subset D\,(\delta>0)$ 时，有

$$\iint_{\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}} f''_{xy}(x,y)dxdy=\iint_{\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}} f''_{yx}(x,y)dxdy;$$

(2) 对 $\forall (x,y)\in D$，有 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

分析　本题考察化重积分为累次积分.

证明　(1)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}} f''_{xy}(x,y)dxdy\\
&=\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}dy\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f''_{xy}(x,y)dx=\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left(f'_y(x_0+\delta,y)-f'_y(x_0-\delta,y)\right)dy\\
&=\left(f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0+\delta,y_0-\delta)\right)-\left(f(x_0-\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0-\delta)\right)\\
&=\left(f(x_0+\delta,y_0+\delta)-f(x_0-\delta,y_0+\delta)\right)-\left(f(x_0+\delta,y_0-\delta)-f(x_0-\delta,y_0-\delta)\right)\\
&=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(f'_x(x_0,y+\delta)-f'_x(x_0,y-\delta)\right)dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}dx\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}f''_{yx}(x,y)dy=\iint_{\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}} f''_{yx}(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

证毕.

(2) 反设函数 $f''_{xy}(x,y)-f''_{yx}(x,y)$ 不恒为 0，由其连续性，知其在某个 $\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}\subset D(\delta>0)$ 上恒大于某个正常数或恒小于某个负常数，这与 $\iint_{\overline{N(\mathbf{x}_0,\delta)}}\left(f''_{xy}(x,y)-f''_{yx}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ 矛盾，故 $f''_{xy}(x,y)\equiv f''_{yx}(x,y)$． 证毕.

习题 15.16　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，求证：$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$．

分析　考虑重积分 $\iint_{[a,b]\times[a,b]}\left(f(x)-f(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

证明　一方面，化重积分 $\iint_{[a,b]\times[a,b]}\left(f(x)-f(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为累次积分，得

$$\begin{aligned}0&\le\iint_{[a,b]\times[a,b]}\left(f(x)-f(y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\left(f(x)-f(y)\right)^2\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\left(f^2(x)(b-a)-2f(x)\int_a^b f(y)\mathrm{d}y+\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\\&=2\left((b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\right),\end{aligned}$$

即 $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$． 证毕.

评注　若不囿于重积分理论，利用习题 7.18 的结论及 $\int_a^b\mathrm{d}x=b-a$ 立得结论.

习题 15.17　利用适当的变量替换计算下列二重积分：

(1) $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由心脏线 $r=2(1+\cos\theta)$ 所围且落在 $r=2$ 外部的有界闭区域；

(2) $\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭单位圆盘 $x^2+y^2\le1$ 落在第一象限的部分；

(3) $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭区域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le1$ 落在第一象限的部分；

(4) $\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $x^2-y^2=1,x^2-y^2=9,xy=2,xy=4$ 所围的有界闭区域；

(5) $\iint_D\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围的有界闭区域；

(6) $\iint_D\cos\dfrac{x-y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 与(5)题中的 D 相同；

(7) $\iint_D\left(x^2+\dfrac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由 $xy=1,xy=2,y=4x,y=8x$ 所围的有界闭区域.

分析　本题考察重积分的变量替换公式与重积分的计算.

解答　(1) 作变量替换$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$，知

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\left(3+3\cos\theta+\cos^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

(2) 作变量替换$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$，知

$$\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi\ .$$

(3) 作变量替换$\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，知

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S a^2b^2r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2b^2r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2}{4}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^2b^2}{8}.$$

(4) 作变量替换$\begin{cases}u=x^2-y^2,\\ v=xy\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=2\left(x^2+y^2\right)$，知$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$，故

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^9\mathrm{d}u\int_2^4\frac{1}{2}\mathrm{d}v=\int_1^9\mathrm{d}u=8\ .$$

(5) 作变量替换$\begin{cases}z=x+y,\\ y=y\end{cases}$，即$\begin{cases}x=z-y,\\ y=y\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)}=1$，知

$$\iint_D\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\mathrm{d}y=\int_0^1(\mathrm{e}-1)z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}-1}{2}\ .$$

(6) 作变量替换$\begin{cases}u=x+y,\\ v=x-y\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2},\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2}$，知

$$\iint_D\cos\frac{x-y}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\frac{1}{2}\cos\frac{v}{u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_{-u}^u\frac{1}{2}\cos\frac{v}{u}\mathrm{d}v=\int_0^1 u\sin1\mathrm{d}u=\frac{\sin1}{2}\ .$$

(7) 作变量替换$\begin{cases}u=xy,\\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{u}{v}},\\ y=\sqrt{uv}\end{cases}$，由$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2v}$，知

$$\iint_D\left(x^2+\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S\frac{1}{2v}\left(\frac{u}{v}+\frac{uv}{4}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^2\mathrm{d}u\int_4^8\frac{1}{2v}\left(\frac{u}{v}+\frac{uv}{4}\right)\mathrm{d}v=\int_1^2\frac{9}{16}u\mathrm{d}u=\frac{27}{32}.$$

习题 15.18　求由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$所围有界闭区域的面积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　将曲线方程化为极坐标形式$r^2=a^2\cos 2\theta$后，知该曲线为双纽线.

$$S=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a\cos 2\theta}}r\mathrm{d}r=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2.$$

习题 15.19　求在极坐标下表示的圆环$1\le r\le 2$被极轴$\theta=0$与螺旋线$r\theta=1$所分成的两个有界闭区域的面积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　$S_1=\iint_{D_1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_1^2\mathrm{d}r\int_0^{\frac{1}{r}}r\mathrm{d}\theta=\int_1^2\mathrm{d}r=1$，

$$S_2=\iint_{D_2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_1^2\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{r}}^{2\pi}r\mathrm{d}\theta=\int_1^2\left(2\pi r-1\right)\mathrm{d}r=3\pi-1.$$

习题 15.20　求在第一卦限内由三个坐标平面与曲面$z=x^2+y^2+1$及平面$2x+y=2$所围立体的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答

$$\begin{aligned}V&=\iiint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2-2x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2+1}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2-2x}\left(x^2+y^2+1\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(-\frac{14}{3}x^3+10x^2-10x+\frac{14}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}.\end{aligned}$$

习题 15.21　设平面物体$D\subset\mathbb{R}^2$是可求面积的有界闭区域，其密度函数$\rho\left(x,y\right)$在D上连续，试用二重积分来表示D的关于x轴的转动惯量.

分析　本题考察转动惯量的定义.

解答　$I=\iint_D y^2\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

习题 15.22　设第一卦限内的某立体由$z=0,y=1,x=y,z=xy$所围，其密度函数$\rho\left(x,y,z\right)=1+2z$，求其质心坐标.

分析　本题考察质心的定义.

解答

$$m=\iiint_D \rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}\left(1+2z\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\left(xy+x^2y^2\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^5\right)\mathrm{d}x=\frac{13}{72},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint_D x\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}x\left(1+2z\right)\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\left(x^2y+x^3y^2\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{72}{13}\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6\right)\mathrm{d}x=\frac{372}{455},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\iiint_D y\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}y\left(1+2z\right)\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\left(xy^2+x^2y^3\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{72}{13}\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{4}x^6\right)\mathrm{d}x=\frac{258}{455},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_D z\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}z\left(1+2z\right)\mathrm{d}z=\frac{72}{13}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\left(\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{2}{3}x^3y^3\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{72}{13}\int_0^1\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{6}x^7\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{26},$$

$$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(\frac{372}{455},\frac{258}{455},\frac{7}{26}\right).$$

习题 15.23　求由曲面 $z=x^2+y^2,x^2+y^2=x,x^2+y^2=2x,z=0$ 所围立体的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(x,r,z\right)}=r$，知

$$V=\iiint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\mathrm{d}r\int_0^{r^2}r\mathrm{d}z=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{15}{4}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{45\pi}{32}.$$

习题 15.24　求下列三重积分或累次积分：

(1) $\iiint_D xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为立体 $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}\le 1$ 在第一卦限的部分；

(2) $\iiint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为由曲面 $z=12-2x^2-2y^2,z=x^2+y^2$ 所围的有界闭区域；

(3) $\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{\left(2z-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y\int_0^{\left(2z-z^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$；

(4) $\iiint_D\left(x+y-z\right)\left(y+z-x\right)\left(z+x-y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中

$$D=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x+y-z,y+z-x,z+x-y\le 1\right\};$$

(5) $\iiint_D\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为由曲面 $x^2+y^2=9,x^2+y^2=16,z=0,z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的有界闭区域；

(6) $\iiint_D z\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 2z$；

(7) $\int_{-3}^{3}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z$.

分析　本题考察重积分的计算.

解答　(1) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\sqrt{3}r\cos\varphi\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=\sqrt{6}r^2\sin\varphi$，知

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_\Omega 6r^5\cos\varphi\sin^3\varphi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 6r^5\cos\varphi\sin^3\varphi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin^3\varphi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos\varphi\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(2) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,r,z)}=r$，知

$$\iiint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_{r^2}^{12-2r^2}r^3\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2\left(12-3r^2\right)r^3\mathrm{d}r=32\pi.$$

(3) $\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{\left(2z-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y\int_0^{\left(2z-z^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\iiint_D\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 2z$ 在第一卦限的部分. 作变量替换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi+1\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，知

$$\begin{aligned}\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{\left(2z-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}y\int_0^{\left(2z-z^2-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x&=\iiint_\Omega\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2+2r\cos\varphi+1}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2+2r\cos\varphi+1}}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 2r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

(4) 作变量替换 $\begin{cases}u=x+y-z,\\ v=y+z-x,\\ w=z+x-y\end{cases}$，由 $\left|\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|=4$，知 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\dfrac{1}{4}$，故

$$\iiint_D (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega \frac{uvw}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\frac{uvw}{4}\mathrm{d}w$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\frac{uv}{8}\mathrm{d}v=\int_0^1\frac{u}{16}\mathrm{d}u=\frac{1}{32}.$$

(5) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$，知

$$\iiint_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_3^4\mathrm{d}r\int_0^r r^2\mathrm{d}z=2\pi\int_3^4 r^3\mathrm{d}r=\frac{175\pi}{2}.$$

(6) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi+1\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，知

$$\iiint_D z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega (r\cos\varphi+1)(r^2+2r\cos\varphi+1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^\pi (r\cos\varphi+1)(r^2+2r\cos\varphi+1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_0^1\left(\frac{10}{3}r^4+2r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{8\pi}{3}.$$

(7) $\displaystyle\int_{-3}^3\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z=\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 D 为球体 $x^2+y^2+z^2\le 9$. 作变量替换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，知

$$\int_{-3}^3\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}z=\iiint_\Omega (r^2+2r\cos\varphi+1)^{\frac{3}{2}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}r\int_0^\pi (r^2+2r\cos\varphi+1)^{\frac{3}{2}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_0^3\left(2r^5+4r^3+\frac{2}{5}r\right)\mathrm{d}r=\frac{3258\pi}{5}.$$

习题 15.25　求立体 $1\le x^2+y^2\le 4$ 夹在 $z=12-x^2-y^2$ 与 $z=0$ 之间部分的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$，知

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\mathrm{d}r\int_0^{12-r^2}r\mathrm{d}z=2\pi\int_1^2(12r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{57\pi}{2}.$$

习题 15.26　设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，试求一个由光滑曲线所围的无界闭区域 D，使得 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.

分析　对有界函数，结论是显然的. 对无界函数，在 $D\cap N(\mathbf{0},x)$ 上也是有界的，因此可以构造 D，使得 $D\setminus N(\mathbf{0},x)$ 的面积小到可以消除“无界”带来的影响.

解答　答案不唯一，如 $D=[1,+\infty)\times\left[0,\dfrac{M(0)}{M(x)}\mathrm{e}^{-x}\right]$，其中 $M(x)=\max\limits_{u\le x,v\le\min\{x,1\}}\{|f(u,v)|\}$，此时 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{M(0)}{M(x)}\mathrm{e}^{-x}} f(x,y)\mathrm{d}y\le\int_1^{+\infty}M(0)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{|f(0,0)|}{\mathrm{e}}$，故其收敛.

习题 15.27　计算下列广义重积分：

(1) $\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(2) $\iiint_{\mathbb{R}^3}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$；

(3) $\iiint_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2}}$，其中 D 为闭区域 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

分析　本题考察重积分的计算.

解答　(1) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$，知

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega r\mathrm{e}^{-(r^2+z^2)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-(r^2+z^2)}\mathrm{d}r=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{2}\mathrm{d}z=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

这里利用了例 15.5.5 的结论 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) 作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r$，知

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}=\iiint_\Omega\frac{r}{(1+r^2+z^2)^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_0^{+\infty}\frac{r}{(1+r^2+z^2)^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2(1+z^2)}\mathrm{d}z=\pi^2.$$

(3) 作变量替换 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，由 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$，知

$$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}} = \iiint_\Omega \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^\pi \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\int_0^1 2r\mathrm{d}r = 2\pi.$$

习题 15.28　求第一卦限上由曲面 $z=\dfrac{1}{(1+x+3y)^3}$ 所围立体的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　$V=\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{(1+x+3y)^3}}\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x+3y)^3} = \int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{6(1+x)^2} = \dfrac{1}{6}$.

习题 15.29　讨论下列广义重积分的敛散性，其中 α,β,γ 均为常数：

(1) $\iiint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+|x|)^\alpha(1+|y|)^\beta(1+|z|)^\gamma}$，其中 $D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\geq 1\right\}$；

(2) $\iiint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^\alpha+|y|^\alpha+|z|^\alpha}$，其中 D 与(1)题中的 D 相同；

(3) $\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$，其中 D 为单位圆盘 $x^2+y^2\leq 1$；

(4) $\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y-x|^\alpha}$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]\setminus\left\{(x,y)\,\middle|\,y=x\right\}$；

(5) $\iiint_D \dfrac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $D=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$；

(6) $\iint_{\mathbb{R}^2} \dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析　本题考察广义重积分的敛散性判别.

解答　(1) 注意到被积函数在 D^c 上有界，且 D^c 的体积有限，故无妨将积分区域改为 $\mathbb{R}^3$. 而 $\iiint_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+|x|)^\alpha(1+|y|)^\beta(1+|z|)^\gamma} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^\alpha}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+|y|)^\beta}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}z}{(1+|z|)^\gamma}\right)$ 收敛当且仅

当$\alpha,\beta,\gamma>1$，故$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+|x|)^{\alpha}(1+|y|)^{\beta}(1+|z|)^{\gamma}}$收敛当且仅当$\alpha,\beta,\gamma>1$.

(2) 注意到被积函数关于x,y,z均为偶函数，积分区域关于x,y,z均对称．作变量替换$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，由$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，知

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}+|z|^{\alpha}}&=8\iiint_{\Omega}\frac{r^2\sin\varphi}{r^{\alpha}\left(\sin^{\alpha}\varphi\left(\cos^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}\theta\right)+\cos^{\alpha}\varphi\right)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=8\left(\int_1^{+\infty}r^{2-\alpha}\mathrm{d}r\right)\left(\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\sin\varphi}{\sin^{\alpha}\varphi\left(\cos^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}\theta\right)+\cos^{\alpha}\varphi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\right).\end{aligned}$$

由比较判别法，知$\int_1^{+\infty}r^{2-\alpha}\mathrm{d}r$收敛当且仅当$\alpha>3$．当$\alpha>3$时，

$$\begin{aligned}\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\sin\varphi}{\sin^{\alpha}\varphi\left(\cos^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}\theta\right)+\cos^{\alpha}\varphi}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta&\le\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{\left(\cos^{\alpha}\varphi+\sin^{\alpha}\varphi\right)\left(\cos^{\alpha}\theta+\sin^{\alpha}\theta\right)}\\&\le\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}2^{\frac{\alpha}{2}-1}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=2^{\frac{\alpha}{2}-3}\pi^2.\end{aligned}$$

故$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^{\alpha}+|y|^{\alpha}+|z|^{\alpha}}$收敛当且仅当$\alpha>3$.

(3) 作变量替换$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，由$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$，知

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\alpha}}=\iint_S \frac{r}{\left(1-r^2\right)^{\alpha}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\left(1-r^2\right)^{\alpha}}\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\frac{1}{2\left(1-r^2\right)^{\alpha}}\mathrm{d}\left(r^2\right).$$

由比较判别法，知$\int_0^1\frac{1}{2\left(1-r^2\right)^{\alpha}}\mathrm{d}\left(r^2\right)$收敛当且仅当$\alpha<1$，故$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1-x^2-y^2\right)^{\alpha}}$收敛当且仅当$\alpha<1$.

(4) 注意到被积函数关于$y-x$为偶函数，积分区域关于直线$y=x$中心对称，故

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y-x|^{\alpha}}=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)^{-\alpha}\mathrm{d}y.$$

当$\alpha=1$时，$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)^{-\alpha}\mathrm{d}y=2\int_0^1\left(\ln x-\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\ln\varepsilon\right)\mathrm{d}x=-2-2\lim\limits_{\varepsilon\to0+0}\ln\varepsilon=+\infty$，故$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y-x|^{\alpha}}$发散．当$\alpha\ne1$时，$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)^{-\alpha}\mathrm{d}y=2\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\mathrm{d}x$，由比较判别法，知$\int_0^1\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\mathrm{d}x$收敛当且仅当

$\alpha<1$．综上所述，$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y-x|^\alpha}$ 收敛当且仅当 $\alpha<1$．

(5) 作变量替换 $\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$，由 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}=r^2\sin\varphi$，知

$$\iiint_D \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega \frac{2r^2\ln r\sin\varphi}{(1+r^2)^\alpha}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{d}r\int_0^\pi \frac{2r^2\ln r\sin\varphi}{(1+r^2)^\alpha}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{4r^2\ln r}{(1+r^2)^\alpha}\mathrm{d}r.$$

由比较判别法，知 $\int_0^{+\infty}\frac{4r^2\ln r}{(1+r^2)^\alpha}\mathrm{d}r$ 收敛当且仅当 $\alpha>\frac{3}{2}$，故 $\iiint_D \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 收敛当且仅当 $\alpha>\frac{3}{2}$．

(6) 作变量替换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$，知

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S \frac{r\cos r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{r\cos r}{1+r^2}\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{+\infty}\frac{r\cos r}{1+r^2}\mathrm{d}r.$$

由 $\int_0^{+\infty}\frac{r\cos r}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 发散，知 $\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散．

习题 15.30　设函数 $z=f(x,y)$ 在 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上连续，且对 $\forall(x,y)\in\Omega$，有 $f(x,y)>0$，记 $D=\{(x,y,z)|(x,y)\in\Omega,0\le z\le f(x,y)\}$．求证：当 $\alpha<1$ 时，$\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|z-f(x,y)|^\alpha}$ 收敛．

分析　利用连续函数的最值定理．

证明　当 $\alpha<1$ 时，$f^{1-\alpha}(x,y)$ 在 Ω 上连续且恒正，故 $\exists M>0$，使得 $f^{1-\alpha}(x,y)\in(0,M]$ 在 Ω 上恒成立，从而 $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|z-f(x,y)|^\alpha}=\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{f(x,y)}\frac{\mathrm{d}z}{(f(x,y)-z)^\alpha}=\iint_\Omega \frac{f^{1-\alpha}(x,y)}{1-\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{M}{1-\alpha}$，进而 $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|z-f(x,y)|^\alpha}$ 收敛．证毕．

16. 曲线积分与曲面积分

习题 16.1　设Γ是空间$\mathbb{R}^3$中一条光滑的物质曲线，其密度函数$\rho(x,y,z)$在Γ上连续，试求Γ的质心坐标.

分析　本题考察第一型曲线积分的物理意义.

解答　$\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(\dfrac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\dfrac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\dfrac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s}\right)$.

习题 16.2　设曲线Γ是单位圆周$x^2+y^2=1$，求下列第一型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma x\mathrm{d}s$；

(2) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$；

(3) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$；

(4) $\int_\Gamma |x|\mathrm{d}s$.

分析　本题考察第一型曲线积分的计算公式.

解答　利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，有$\mathrm{d}s=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$，故

(1) $\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t=0$.

(2) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\mathrm{d}t=0$.

(3) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi$.

(4) $\int_\Gamma |x|\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}|\cos t|\mathrm{d}t=4$.

习题 16.3　设曲线Γ为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，求下列第一型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma x\mathrm{d}s$；

(2) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$；

(3) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$.

分析　本题考察第一型曲线积分的计算公式.

解答　利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\left(0\le t\le 2\pi\right) \\ \quad z=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cos t \end{cases}$，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t\right)^2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t,$$

故

(1) $\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t=0$.

(2) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{\pi}{3}$.

(3) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)^2\mathrm{d}t=\dfrac{2\pi}{3}$.

习题 16.4　求下列第一型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma xy\left(z+1\right)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为以下曲线：

(a) $x=\cos t, y=\sin t, z=0\left(t\in\left[0,2\pi\right]\right)$；

(b) $x=\cos t, y=\sin t, z=t\left(t\in\left[0,2\pi\right]\right)$.

(2) $\int_\Gamma\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

(3) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=t, y=\dfrac{1}{2}t^2, z=1\left(0\le t\le 1\right)$.

(4) $\int_\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为 $\mathbb{R}^n$ 中连接原点与点 $\left(1,1,\ldots,1\right)$ 的线段.

分析　本题考察第一型曲线积分的计算公式.

解答　(1) (a) $\int_\Gamma xy\left(z+1\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\mathrm{d}t=0$.

(b) $\int_\Gamma xy\left(z+1\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cos t\sin t\left(t+1\right)\mathrm{d}t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

(2) 利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$，有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(3a\sin t\cos^2 t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\mathrm{d}t=\left|3a\sin t\cos t\right|\mathrm{d}t,$$

故 $\int_\Gamma\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^{\frac{4}{3}}\left(\sin^4 t+\cos^4 t\right)\left|3a\sin t\cos t\right|\mathrm{d}t=4a^{\frac{7}{3}}$.

(3) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{1}{2}t^3\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1+\sqrt{2}}{15}$.

(4) 利用 Γ 的参数方程 $x_1=x_2=\dots=x_n=t\left(0\le t\le 1\right)$，有 $\mathrm{d}s=\sqrt{n}\mathrm{d}t$，故

$$\int_\Gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\mathrm{d}s=\int_0^1 n^{\frac{3}{2}}t\mathrm{d}t=\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2}.$$

习题 16.5　设函数 $f\left(x,y\right)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 的光滑曲线 L 上连续，定义 $f\left(x,y\right)$ 在 L 上的平均值为 $\dfrac{\int_L f\left(x,y\right)\mathrm{d}s}{\int_L\mathrm{d}s}$，试求 $f\left(x,y\right)=x^2$ 在 $x^2+y^2=1$ 上的平均值.

分析　本题考察第一型曲线积分的计算公式.

解答　利用 $x^2+y^2=1$ 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}\left(0\le t\le 2\pi\right)$，有 $\mathrm{d}s=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$，

故 $f\left(x,y\right)=x^2$ 在 $x^2+y^2=1$ 上的平均值 $\dfrac{\int_L x^2\mathrm{d}s}{\int_L\mathrm{d}s}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}$.

习题 16.6　设函数 $f\left(x,y,z\right)$ 在可求长曲线 Γ 上连续，求证：$\exists\left(\xi,\eta,\zeta\right)\in\Gamma$，使得

$$\int_\Gamma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}s=f\left(\xi,\eta,\zeta\right)L,$$

其中 L 为 Γ 的弧长.

分析　本题考察第一型曲线积分的几何意义与计算公式.

证明　由

$$\frac{\int_\Gamma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}s}{L}=\frac{\int_\Gamma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\mathrm{d}s}=\frac{\int_\alpha^\beta f\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2+\left(z'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2+\left(z'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t}$$

及定积分第一中值定理，知 $\exists t_0\in\left(\alpha,\beta\right)$，使得

$$\frac{\int_\Gamma f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}s}{L}=\frac{f\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right),z\left(t_0\right)\right)\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2+\left(z'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t}{\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2+\left(z'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t},$$

即$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=f\left(x(t_0),y(t_0),z(t_0)\right)L$，再令$\xi=x(t_0),\eta=y(t_0),\zeta=z(t_0)$即可. 证毕.

习题 16.7 计算下列第二型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma\left(3x^2-6yz\right)\mathrm{d}x+(2y-3xz)\mathrm{d}y+\left(1-4xyz^2\right)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为以下曲线：

(a) 从点$(0,0,0)$到点$(1,1,1)$的线段；

(b) 从点$(0,0,0)$到点$(0,0,1)$，然后从点$(0,0,1)$到点$(0,1,1)$，最后从点$(0,1,1)$到点$(1,1,1)$的折线.

(2) $\int_\Gamma(y+z)\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为：

(a) 曲线$x^2+y^2=1,z=0$，从z轴正向看去取逆时针方向；

(b) 螺旋线$x=\cos t,y=\sin t,z=t\,(0\le t\le 2\pi)$.

(3) $\int_\Gamma \mathrm{e}^x(y+z)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases}y=x^2,\\ z=x\end{cases}$从点$(0,0,0)$到点$(1,1,1)$的部分.

(4) $\int_\Gamma(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$在第一象限的部分，取从点$(a,0)$到点$(0,b)$的方向.

(5) $\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2z,\\ x+z=1\end{cases}$，从$z$轴正向看去取逆时针方向.

分析 本题考察第二型曲线积分的计算公式.

解答 (1) (a) 利用Γ的参数方程$x=y=z=t\,(0\le t\le 1)$，有

$$\int_\Gamma\left(3x^2-6yz\right)\mathrm{d}x+(2y-3xz)\mathrm{d}y+\left(1-4xyz^2\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(-3t^2+\left(2t-3t^2\right)+\left(1-4t^4\right)\right)\mathrm{d}t=-\frac{4}{5}.$$

(b) 利用Γ的分段参数方程$\begin{cases}x=0,\\ y=0,(0\le t\le 1),\\ z=t\end{cases}$，$\begin{cases}x=0,\\ y=t,(0\le t\le 1),\\ z=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=t,\\ y=1,(0\le t\le 1),\\ z=1\end{cases}$，有

$$\int_\Gamma\left(3x^2-6yz\right)\mathrm{d}x+(2y-3xz)\mathrm{d}y+\left(1-4xyz^2\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\left(3t^2-6\right)+2t+1\right)\mathrm{d}t=-3.$$

(2) (a) 利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,(0\le t\le 2\pi),\\ z=0\end{cases}$，有

$$\int_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t+\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=0 .$$

(b) $\int_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-(\sin t+t)\sin t+(\cos t+t)\cos t+(\cos t+\sin t)\right)\mathrm{d}t=2\pi .$$

(3) 利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\\ z=t\end{cases}(0\le t\le 1)$，有

$$\int_{\Gamma}\mathrm{e}^x(y+z)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\mathrm{e}^t\left(t^2+t\right)+2t+1\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}+1 .$$

(4) 利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，有$\int_{\Gamma}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-(a\cos t+b\sin t)a\sin t+(a\cos t-b\sin t)b\cos t\right)\mathrm{d}t=-\frac{a^2+b^2}{2} .$$

(5) 利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，有

$$\int_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 t+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t=-\sqrt{2}\pi .$$

习题 16.8　计算下列第二型曲线积分：(1) $\oint_{\Gamma}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$；(2) $\oint_{\Gamma}\dfrac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$\Gamma$为以下曲线：(a) $x^2+y^2=1$；(b) $\partial N((0,0),1)$.

分析　本题考察第二型曲线积分的计算公式.

解答　(a) 利用Γ的参数方程$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}(0\le t\le 2\pi)$，有

(1) $\oint_{\Gamma}\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\mathrm{d}t=2\pi$.

(2) $\oint_{\Gamma}\dfrac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t=0$.

(b) 利用Γ的分段参数方程$\begin{cases}x=-t,\\ y=1\end{cases}(-1\le t\le 1)$，$\begin{cases}x=-1,\\ y=-t\end{cases}(-1\le t\le 1)$，$\begin{cases}x=t,\\ y=-1\end{cases}(-1\le t\le 1)$，

$\begin{cases} x=1, \\ y=t \end{cases}(-1\le t\le 1)$，有

(1) $\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+1+1+1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=2\pi$.

(2) $\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{-1+1-1+1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=0$.

评注　注意到(a)(b)所给曲线围成的单连通区域都包含原点．关于积分$\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$与积分路径的关系，参见习题 16.35．

习题 16.9　计算第二型曲线积分$\int_\Gamma \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$是顶点为$(0,0),(0,1),(1,0)$的三角形，取逆时针方向．

分析　本题考察第二型曲线积分的计算公式．

解答　利用Γ的分段参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=0 \end{cases}(0\le t\le 1),\quad \begin{cases} x=1-t, \\ y=t \end{cases}(0\le t\le 1),\quad \begin{cases} x=0, \\ y=1-t \end{cases}(0\le t\le 1),$$

有$\int_\Gamma \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1-2t}-\mathrm{e}^{t-1}\right)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}}{2}+\frac{1}{2\mathrm{e}}-2$.

习题 16.10　设函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在光滑曲线$\Gamma\subset\mathbb{R}^3$上连续，记$M=\max\limits_{(x,y,z)\in\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$，$L$为$\Gamma$的弧长，求证：$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le ML$.

分析　本题考察第一型曲线积分的几何意义与第二型曲线积分的计算公式．

证明　设Γ的参数方程为$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t),(\alpha\le t\le\beta), \\ z=z(t) \end{cases}$，则

$$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|=\left|\int_\alpha^\beta\left(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right)\mathrm{d}t\right|\le\int_\alpha^\beta\left|Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

由柯西不等式，知

$$\int_\alpha^\beta\left|Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right|\mathrm{d}t\le\int_\alpha^\beta M\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\mathrm{d}t=ML.$$

即$\left|\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le ML$．证毕．

习题 16.11　设曲线Γ_R是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$ax+by+cz+d=0$的交线，求极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

分析　利用习题 16.10 的结论.

解答　由 $\left|\int_{\Gamma_R}\frac{z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|\le 2\pi R\max\limits_{(x,y,z)\in\Gamma}\sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{2\pi}{R}\to 0\left(R\to+\infty\right)$，知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0$.

习题 16.12　求下列曲面的面积：

(1) 曲面 $z=2-\left(x^2+y^2\right)$ 在 Oxy 平面上方的部分；

(2) 单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被柱面 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 所截在柱面内的部分；

(3) 锥面 $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ 被平面 $x+y+z=2$ 所截下面的部分；

(4) 柱面 $x^2+y^2=1, x^2+z^2=1, y^2+z^2=1$ 所围的立体的表面；

(5) 平面 $ax+by+cz+d=0\left(c\ne 0\right)$ 落在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内的部分.

分析　本题考察曲面面积的计算公式.

解答　(1) $S=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r=\frac{13}{3}\pi$.

(2) 由对称性，所求面积是曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2},\frac{\sqrt{3}}{2}\le z\le 1$ 的面积的 2 倍，故

$$S=2\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=\left(4-2\sqrt{3}\right)\pi.$$

(3) $S=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2\sqrt{2}-2}^{2\sqrt{2}-2}\mathrm{d}x\int_{\frac{-\sqrt{-3x^2-12x+12}+x-2}{2}}^{\frac{\sqrt{-3x^2-12x+12}+x-2}{2}}2\mathrm{d}y=8\sqrt{3}$.

(4) 由对称性，所求面积是曲面 $z=\sqrt{1-x^2},0\le y\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的面积的 48 倍，故

$$S=48\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2}}=48\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2}}=48-24\sqrt{2}.$$

(5) $S=\iint_D\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}r\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\pi$.

习题 16.13　设圆锥的高为 1，底面半径为 1，求其表面积（不包括底面）.

分析　即求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}, z\le 1$ 的面积.

解答　$S=\iint_D \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\sqrt{2}\pi$.

习题 16.14　求下列第一型曲面积分：

(1) $\iint_S z^3\mathrm{d}S$，其中 S 是单位球面的上半部分 $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$；

(2) $\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S$，其中 S 是由柱面 $x^2+y^2=1$，平面 $z=0$ 与 $z=1$ 所围立体的表面；

(3) $\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$；

(4) $\iint_S xyz\mathrm{d}S$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 位于平面 $z=1$ 与 $z=1+h\left(h>0\right)$ 之间的部分；

(5) $\iint_S z^2\mathrm{d}S$，其中 S 为螺旋面 $\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \left(0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi\right). \\ z=v \end{cases}$

分析　本题考察第一型曲面积分的计算公式.

解答　(1) $\iint_S z^3\mathrm{d}S=\iint_S\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left(1-r^2\right)\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S=\iint_S\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S=\iint_S\cos^2\theta\sin^2\theta\left|\sin\varphi\right|^5\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\left|\sin\varphi\right|^5\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4\pi}{15}$.

(4) $\iint_S xyz\mathrm{d}S=\iint_S\sqrt{2}xyr\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{1+h}\sqrt{2}r^4\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=0$.

(5) $\iint_S z^2\mathrm{d}S=\iint_S v^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}v^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}v=\dfrac{4\pi^3\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)}{3}$.

习题 16.15　设物质曲面是 $S: z=x^2+y^2$ 位于平面 $z=y$ 下方的部分，其密度函数为 $\rho\left(x,y,z\right)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$，试求其质量.

分析　本题考察第一型曲面积分的物理意义与计算公式.

解答　$m=\iint_S\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}S=\iint_S\left(1+4x^2+4y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}r\left(1+4r^2\right)\mathrm{d}r=\dfrac{5\pi}{8}$.

习题 16.16　求曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于锥面 $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的部分的质心坐标.

分析　本题考察第一型曲面积分的物理意义与计算公式.

解答　$\iint_S \mathrm{d}S=\iint_S \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi(1-\cos\alpha)$，

$\iint_S x\mathrm{d}S=\iint_S \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=0$，

$\iint_S y\mathrm{d}S=\iint_S \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=0$，

$\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}r\mathrm{d}r=\pi\sin^2\alpha$，

$$\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)=\left(\frac{\iint_S x\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S},\frac{\iint_S y\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S},\frac{\iint_S z\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S}\right)=\left(0,0,\frac{1+\cos\alpha}{2}\right).$$

习题 16.17　求下列第二型曲面积分：

(1) $\iint_S -y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 在平面 $z=8x-4y-5$ 上，且它在 Oxy 平面上的投影是以 $(0,0),(0,1),(1,0)$ 为顶点的三角形，取 S 的上侧；

(2) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 $\partial N\left((0,0,0),1\right)$ 的外侧；

(3) $\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 S 为曲面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0,z=1$ 所围立体表面的外侧.

分析　本题考察第二型曲面积分的计算公式.

解答　(1) $\iint_S -y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_D(8y+4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(8y+4x)\mathrm{d}y=2$.

(2) 利用例 16.4.1 的评注的结论，关于原点对称的封闭曲面上的偶函数的第二型曲面积分为 0，即 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(3) 记 S 落在曲面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0,z=1$ 上的部分分别为 S_1,S_2,S_3，则在 S_2,S_3 上有 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，故 $\iint_{S_2} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{S_3} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，从而

$$\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{S_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

利用 S_1 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos u,\\ y=\sin u,\\ z=v\end{cases}(0\le u\le 2\pi,0\le v\le 1)$，得 $(A,B,C)=(\cos u,\sin u,0)$，故

$$\iint_{S_1} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D_1} \left(\cos^2 u \sin u + v \sin^2 u\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^1 \left(\cos^2 u \sin u + v \sin^2 u\right) \mathrm{d}v = \frac{\pi}{2}.$$

即 $\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.

习题 16.18　设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧，求下列第二型曲面积分：

(1) $\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\iint_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

分析　本题考察第二型曲面积分的计算公式.

解答　(1) 由对称性，有

$$\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_S z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\left(1 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}r = \frac{12\pi}{5}.$$

(2) $\iint_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\iint_D \sqrt{1-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r = \dfrac{4\pi}{3}$.

习题 16.19　计算第一型曲线积分 $\oint_\Gamma \cos\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{n}\right)\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 是一条光滑约当曲线，$\mathbf{v}_0$ 是某固定方向，$\mathbf{n}$ 是 Γ 的单位外法向量.

分析　由格林公式，知常矢量的第二型曲线积分必为 0.

解答　无妨设 $\mathbf{v}_0$ 是单位向量，再设 $\mathbf{v}_0$ 沿逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后的向量为 $\mathbf{v}_1$，Γ 沿正向的单位切向量为 $\mathbf{s}$. 则

$$\oint_\Gamma \cos\left(\mathbf{v}_0, \mathbf{n}\right)\mathrm{d}s = \oint_\Gamma \cos\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{s}\right)\mathrm{d}s = \oint_\Gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{s}\mathrm{d}s = \oint_\Gamma \mathbf{v}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0.$$

习题 16.20　利用格林公式计算下列第二型曲线积分：

(1) $\oint_\Gamma 4x^2y\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y$，其中 Γ 是以 $(0,0),(1,2),(0,2)$ 为顶点的三角形；

(2) $\oint_\Gamma 2xy\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$，其中 Γ 是由两条连接点 $(0,0),(4,2)$ 的曲线 $y = \dfrac{x}{2}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 组成的封闭曲线；

(3) $\oint_\Gamma \left(x^2 + 4xy\right)\mathrm{d}x + \left(2x^2 + 3y\right)\mathrm{d}y$，其中 Γ 是椭圆周 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$；

(4) $\oint_{\Gamma}\left(x^3-x^2y\right)\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$是$D=\left\{(x,y)\middle|4\le x^2+y^2\le 16\right\}$的边界；

(5) $\int_{\Gamma}\left(2x^2y-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$是抛物线$x=\dfrac{\pi}{2}y^2$从点$(0,0)$到点$\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$的部分；

(6) $\int_{\Gamma}\left(\mathrm{e}^x\sin y-x-y\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-x\right)\mathrm{d}y$，其中$\Gamma$是曲线$y=\sin x$从点$(0,0)$到点$(\pi,0)$的部分.

分析　本题考察格林公式.

解答　(1) $\oint_{\Gamma}4x^2y\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=\iint_D-4x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2-2x}-4x^2\mathrm{d}y=-\dfrac{2}{3}$.

(2) $\oint_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y=\iint_D-2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}-2x\mathrm{d}y=-\dfrac{64}{15}$.

(3) $\oint_{\Gamma}\left(x^2+4xy\right)\mathrm{d}x+\left(2x^2+3y\right)\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

(4) $\oint_{\Gamma}\left(x^3-x^2y\right)\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=\iint_D\left(y^2+x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=120\pi$.

(5) 由$\Gamma:\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}t^2,\\ y=t\end{cases}(0\le t\le 1)$，取$\Gamma_1:\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}t,\\ y=t\end{cases}(0\le t\le 1)$，则$\Gamma\cup\Gamma_1^-$为约当曲线，记其所围有界闭区域为$D$，则

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\left(2x^2y-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\Gamma_1}\left(2x^2y-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y\\&\quad+\oint_{\Gamma\cup\Gamma_1^-}\left(2x^2y-y^2\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^2y^2\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}t^3-t^2\cos\frac{\pi t}{2}\right)+\left(1-2t\sin\frac{\pi t}{2}+\frac{3\pi^2}{4}t^4\right)\right)\mathrm{d}t-\iint_D\left(6xy^2-2x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\pi^3}{16}+\frac{3\pi^2}{20}\right)-\int_0^1\mathrm{d}t\int_{\frac{\pi}{2}t^2}^{\frac{\pi}{2}t}\left(6xt^2-2x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{14}+\frac{3\pi^2}{28}.\end{aligned}$$

(6) 由$\Gamma:\begin{cases}x=t,\\ y=\sin t\end{cases}(0\le t\le\pi)$，取$\Gamma_1:\begin{cases}x=t,\\ y=0\end{cases}(0\le t\le 1)$，则$\Gamma\cup\Gamma_1^-$为约当曲线，记其所围有界闭区域为$D$，则

$$\int_{\Gamma}\left(e^x\sin y-x-y\right)dx+\left(e^x\cos y-x\right)dy$$
$$=\int_{\Gamma_1}\left(e^x\sin y-x-y\right)dx+\left(e^x\cos y-x\right)dy+\int_{\Gamma\cup\Gamma_1^-}\left(e^x\sin y-x-y\right)dx+\left(e^x\cos y-x\right)dy$$
$$=\int_0^{\pi}-t\,dt+\iint_D 0\,dxdy=-\frac{\pi^2}{2}.$$

习题 16.21　设平面区域 D 由约当曲线所围成，已知 D 的面积为 A，求第二型曲线积分 $\int_{\partial D}\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy$.

分析　本题考察格林公式.

解答　$\int_{\partial D}\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy=\iint_D\left(a_2-b_1\right)dxdy=\left(a_2-b_1\right)A$.

习题 16.22　求第二型曲线积分 $\oint_{\Gamma}\frac{\left(ax-by\right)dx+\left(bx+ay\right)dy}{x^2+y^2}$，其中 Γ 是平面内一条光滑的约当曲线，且点 $\left(0,0\right)$ 在 Γ 的内部.

分析　注意到原点在 Γ 的内部，故不能直接使用格林公式. 当 R 足够大时，Γ 与 Γ_R 围成不含原点的二连通区域 D_R. 故 $\int_{\partial D_R}\frac{\left(ax-by\right)dx+\left(bx+ay\right)dy}{x^2+y^2}=0$.

解答

$$\oint_{\Gamma}\frac{\left(ax-by\right)dx+\left(bx+ay\right)dy}{x^2+y^2}=\oint_{\Gamma_R}\frac{\left(ax-by\right)dx+\left(bx+ay\right)dy}{x^2+y^2}$$
$$=\frac{1}{R^2}\int_{\Gamma_R}\left(ax-by\right)dx+\left(bx+ay\right)dy=\frac{1}{R^2}\iint_{D_R}2b\,dxdy=2\pi b.$$

习题 16.23　利用格林公式证明约当曲线 Γ 所围有界闭区域在极坐标下的求面积公式 $A=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}r^2d\theta$，并求 $r=3\sin 2\theta$ 所围有界闭区域在第一象限部分的面积.

分析　本题考察格林公式.

解答　$A=\iint_D dxdy=\iint_D r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}r^2d\theta$. 证毕.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin 2\theta\right)^2d\theta=\frac{9\pi}{8}.$$

习题 16.24　求第二型曲线积分 $\oint_{\partial D}\left(\sin x^3+y^3\right)dx+\left(2e^{y^2}-x^3\right)dy$，其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2<1\right\}$ 为单位圆盘.

分析　本题考察格林公式.

解答

$$\oint_{\partial D}\left(\sin x^3+y^3\right)\mathrm{d}x+\left(2\mathrm{e}^{y^2}-x^3\right)\mathrm{d}y=\iint_D\left(-3x^2-3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(-3r^3\right)\mathrm{d}r=-\frac{3\pi}{2}.$$

习题 16.25　求第二型曲线积分 $\oint_{\partial D} y\ln x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le y\le 3,\mathrm{e}^y\le x\le \mathrm{e}^{y^2}\right\}$.

分析　本题考察格林公式.

解答　$\oint_{\partial D} y\ln x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^3\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}^{y^2}}\frac{y}{x}\mathrm{d}x=\frac{34}{3}$.

习题 16.26　设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 为单位闭圆盘，$a,b,\alpha\in\mathbb{R}$ 为任意常数，求证：$\oint_{\partial D} a\left(x^2+y^2\right)^\alpha\mathrm{d}x+b\left(x^2+y^2\right)^\alpha\mathrm{d}y=0$.

分析　本题考察格林公式.

证明

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} a\left(x^2+y^2\right)^\alpha\mathrm{d}x+b\left(x^2+y^2\right)^\alpha\mathrm{d}y&=\iint_D 2\alpha(bx-ay)\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\alpha(b\sin\theta-a\cos\theta)r^{2\alpha}\mathrm{d}r=0.\end{aligned}$$

证毕.

习题 16.27　求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(a>0)$ 所围有界闭区域的面积.

分析　本题考察格林公式.

解答

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{\partial D}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-a\sin^3 t\cdot\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)+a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin^2 t\right)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.\end{aligned}$$

评注　当然也可以利用化重积分为累次积分 $\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^a 3r\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}r$ 计算.

习题 16.28　利用高斯公式计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是单位正方体 $\left\{(x,y,z)\middle|0\le x,y,z\le 1\right\}$ 的外侧；

(2) $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是曲面 $z=4-\left(x^2+y^2\right)$ 与平面 $z=0$ 所围立体的外侧；

(3) $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是立体 $\left\{(x,y,z)\middle|1\le x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$ 的外侧；

(4) $\iint_S z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧；

(5) $\iint_S \left(z^3-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是曲面 $z=4-y^2$，平面 $x=0, x=3$ 与 Oxy 平面所围立体的外侧.

分析　本题考察高斯公式.

证明　(1)

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D \left(2x+2y+2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\left(2x+2y+2z\right)\mathrm{d}z = 3 .$$

(2) $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}r\int_0^{4-r^2}3r\mathrm{d}z = 24\pi$.

(3)

$$\begin{aligned}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(2y+\sin z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z+\mathrm{e}^x\cos y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 4r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{112\pi}{3}.\end{aligned}$$

(4) $\iint_S z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D 3z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 3r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{5}$.

(5)

$$\iint_S \left(z^3-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D \left(2-x\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3\mathrm{d}x\int_{-2}^2\mathrm{d}y\int_0^{4-y^2}\left(2-x\right)\mathrm{d}z = 16 .$$

习题 16.29　设 S 是一个光滑封闭曲面，$\mathbf{n}$ 为其单位外法向量，$\mathbf{r}_0$ 为一固定方向，求证：$\iint_S \cos\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}\right)\mathrm{d}S = 0$.

分析　由高斯公式，知常矢量的第二型曲面积分必为 0.

证明　无妨设 $\mathbf{r}_0$ 是单位向量，则 $\iint_S \cos\left(\mathbf{r}_0,\mathbf{n}\right)\mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{r}_0\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$. 证毕.

习题 16.30　设函数 $f\left(x,y,z\right)$ 在光滑封闭曲面 S 上具有二阶连续偏导数，求证：

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S = \iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V ,$$

其中 D 是 S 所围成的区域，$\mathbf{n}$ 是 S 的单位外法向量.

分析　本题考察高斯公式.

证明　$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{grad}f\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S = \iint_S \mathbf{grad}f\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V$. 证毕.

习题 16.31　利用斯托克斯定理求下列第二型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma 2y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + 3y\mathrm{d}z$，其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与平面 $z=x+2$ 的交线，从原

点看去取顺时针方向；

(2) $\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3+yz & -3xy^2 \end{vmatrix}$，其中 S 是曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 Oxy 平面的上半部分，取上侧；

(3) $\int_\Gamma -3y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$，其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=2$ 的交线，从原点看去取逆时针方向；

(4) $\int_\Gamma \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与柱面 $x^2+y^2=2rx$ 的交线 $\left(0<r<R,z>0\right)$，从点 $\left(r,0,0\right)$ 看去取逆时针方向；

(5) $\oint_\Gamma \left(z-2\right)\mathrm{d}x+\left(3x-4y\right)\mathrm{d}y+\left(z+3y\right)\mathrm{d}z$，其中 Γ 是以下曲线：

(a) $\Gamma=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x^2+y^2=1,z=2\right\}$；

(b) 连接点 $\left(1,0,0\right),\left(0,1,0\right)$ 和 $\left(0,0,1\right)$ 的三角形.

分析　本题考察斯托克斯定理.

解答　(1) $$\int_\Gamma 2y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+3y\mathrm{d}z=\iint_S \begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & z & 3y \end{vmatrix}\mathrm{d}S=-2\sqrt{2}\iint_S \mathrm{d}S=-12\sqrt{2}\pi .$$

(2) 利用 ∂S 的参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t,\left(0\le t\le 2\pi\right) \\ z=0 \end{cases}$，有 $\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3+yz & -3xy^2 \end{vmatrix}$

$$=\int_{\partial S}\left(x-z\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+yz\right)\mathrm{d}y-3xy^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(-4\cos t\sin t+16\cos^4 t\right)\mathrm{d}t=12\pi .$$

(3) $$\int_\Gamma -3y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\iint_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & 1 \end{vmatrix}\mathrm{d}S=-6\iint_S \mathrm{d}S=-6\pi .$$

(4) 设 S 是 Γ 在球面上所围有界闭区域，利用 S 的参数方程 $\begin{cases} x=r+u\cos v \\ y=u\sin v, \\ z=\sqrt{2\left(R-r\right)\left(r+u\cos v\right)} \end{cases}$

$(0\le u\le r, 0\le v\le 2\pi)$，得 $(A,B,C)=\left(-u\sqrt{\dfrac{R-r}{2(r+u\cos v)}},0,u\right)$，故

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\&=-2\iint_S(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\iint_D\left(-u\sqrt{\frac{R-r}{2(r+u\cos v)}}\left(u\sin v-\sqrt{2(R-r)(r+u\cos v)}\right)+u(r+u\cos v-u\sin v)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=-2R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^r u\mathrm{d}u-2\pi Rr^2.\end{aligned}$$

(5) (a)

$$\oint_{\Gamma}(z-2)\mathrm{d}x+(3x-4y)\mathrm{d}y+(z+3y)\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}0&0&-1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-2&3x-4y&z+3y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=3\iint_S\mathrm{d}S=3\pi\,.$$

(5) (b)

$$\oint_{\Gamma}(z-2)\mathrm{d}x+(3x-4y)\mathrm{d}y+(z+3y)\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{\sqrt3}{3}&\dfrac{\sqrt3}{3}&\dfrac{\sqrt3}{3}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-2&3x-4y&z+3y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{7\sqrt3}{3}\iint_S\mathrm{d}S=\frac{7}{2}\,.$$

习题 16.32　设 S 为光滑封闭曲面，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 S 上具有连续偏导数，利用斯托克斯定理求第二型曲面积分 $\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$.

分析　本题考察斯托克斯定理.

解答　$\iint_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\int_{\partial S}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$.

习题 16.33　证明下列第二型曲线积分与路径无关，并求值：

(1) $\int_{(1,-2)}^{(3,4)}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$，积分曲线不经过 y 轴；

(2) $\int_{(0,1,0)}^{(\pi,0,1)}\sin x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$；

(3) $\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(4x^3y^3+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(3x^4y^2-\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$；

(4) $\int_{(1,1,1)}^{(2,-1,3)} yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$；

(5) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x+\left(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y$；

(6) $\int_{\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(2,\pi,\frac{3\pi}{2}\right)}\cos y\sin z\mathrm{d}x-x\sin y\sin z\mathrm{d}y+x\cos y\cos z\mathrm{d}z$.

分析　本题考察第二型曲线积分与路径的无关性.

解答　(1) 由 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$，知该曲线积分与路径无关．取路径 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=3t-2\end{cases}$ $(0\le t\le 2)$，有 $\int_{(1,-2)}^{(3,4)}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\int_0^2\dfrac{(3t-2)-3(t+1)}{(t+1)^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{10}{3}$.

(2) 由 $\dfrac{\partial(\mathrm{e}^z)}{\partial y}=0=\dfrac{\partial(y^2)}{\partial z},\dfrac{\partial(\sin x)}{\partial z}=0=\dfrac{\partial(\mathrm{e}^z)}{\partial x},\dfrac{\partial(y^2)}{\partial x}=0=\dfrac{\partial(\sin x)}{\partial y}$，知该曲线积分与路径无关．取路径 $\begin{cases}x=\pi t,\\ y=1-t,(0\le t\le 1)\\ z=t\end{cases}$，有

$$\int_{(0,1,0)}^{(\pi,0,1)}\sin x\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}y+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\pi\sin\pi t-(1-t)^2+\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}+\frac{2}{3}.$$

(3) 由 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^4y^2-\dfrac{1}{y}\right)=12x^3y^2=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y^3+\dfrac{1}{x}\right)$，知该曲线积分与路径无关．取路径 $\begin{cases}x=t+1,\\ y=2t+1\end{cases}(0\le t\le 1)$，有

$$\begin{aligned}&\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(4x^3y^3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(3x^4y^2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left(\left(4(t+1)^3(2t+1)^3+\frac{1}{t+1}\right)+2\left(3(t+1)^4(2t+1)^2-\frac{1}{2t+1}\right)\right)\mathrm{d}t=431+\ln\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(4) 由 $\dfrac{\partial(xy)}{\partial y}=x=\dfrac{\partial(xz)}{\partial z},\dfrac{\partial(yz)}{\partial z}=y=\dfrac{\partial(xy)}{\partial x},\dfrac{\partial(xz)}{\partial x}=z=\dfrac{\partial(yz)}{\partial y}$，知该曲线积分与路径无关．取路径 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1-2t,(0\le t\le 1)\\ z=1+2t\end{cases}$，有

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,-1,3)} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = \int_0^1 \left((1-2t)(1+2t) - 2(1+t)(1+2t) + 2(1+t)(1-2t)\right)\mathrm{d}t = -7 .$$

(5) 由 $\dfrac{\partial\left(x^2\sin x - 2y\mathrm{e}^x\right)}{\partial x} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2y\mathrm{e}^x = \dfrac{\partial\left(x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2\mathrm{e}^x\right)}{\partial y}$，知该曲线积分与路径无关．取路径$\begin{cases} x = t, \\ y = t \end{cases}(0 \le t \le 1)$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x + \left(x^2\sin x - 2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left(t^3\cos t + 2t^2\sin t - t^2\mathrm{e}^t\right) + \left(t^2\sin t - 2t\mathrm{e}^t\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \sin 1 - \mathrm{e}.
\end{aligned}$$

(6) 由 $\dfrac{\partial(x\cos y\cos z)}{\partial y} = -x\sin y\cos z = \dfrac{\partial(-x\sin y\sin z)}{\partial z}, \dfrac{\partial(\cos y\sin z)}{\partial z} = \cos y\cos z = \dfrac{\partial(x\cos y\cos z)}{\partial x}, \dfrac{\partial(-x\sin y\sin z)}{\partial x} = -\sin y\sin z = \dfrac{\partial(\cos y\sin z)}{\partial y}$，知该曲线积分与路径无关．取路径$\begin{cases} x = t+1, \\ y = \pi t, \quad (0 \le t \le 1)\text{，有} \\ z = \pi t + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(2,\pi,\frac{3\pi}{2}\right)} \cos y\sin z\mathrm{d}x - x\sin y\sin z\mathrm{d}y + x\cos y\cos z\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(\cos\pi t\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \pi(t+1)\sin\pi t\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \pi(t+1)\cos\pi t\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= 1.
\end{aligned}$$

习题 16.34　求下列微分的原函数：

(1) $\mathrm{d}u = \left(y\mathrm{e}^{xy} + xy^2\mathrm{e}^{xy} + y\cos x\right)\mathrm{d}x + \left(x\mathrm{e}^{xy} + x^2y\mathrm{e}^{xy} + \sin x\right)\mathrm{d}y$；

(2)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u = &\left(\sin yz + yz\cos xz + yz\cos xy\right)\mathrm{d}x + \left(\sin xz + xz\cos yz + xz\cos xy\right)\mathrm{d}y \\
&+ \left(\sin xy + xy\cos yz + xy\cos xz\right)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

分析　利用不定积分法或曲线积分法.

解答　(1) $u(x,y) = xy\mathrm{e}^{xy} + y\sin x + C$，其中 C 为任意常数.

(2) $u(x,y,z) = x\sin yz + y\sin xz + z\sin xy + C$，其中 C 为任意常数.

习题 16.35　求证：

(1) 曲线积分 $\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在不含原点的单连通区域内与路径无关，但在 $\mathbb{R}^2$ 上与路径有关；

(2) 若 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\,(x_0,y_0>0)$，$\Gamma_0$ 是连接点 $(1,0)$ 与 (x_0,y_0) 的线段，则对任一连接点 $(1,0)$ 与 (x_0,y_0) 的不过原点的光滑曲线 Γ，$\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\int_{\Gamma_0}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 是 2π 的整数倍.

分析　利用类似于习题 16.22 的方法.

证明　(1) 由 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$，知该曲线积分在不含原点的单连通区域内与路径无关．考虑包含原点的单连通区域 D，∂D 由有限条分段光滑的约当曲线组成，则当 R 足够大时，∂D 与 Γ_R 围成不含原点的二连通区域 D_R，故 $\int_{\partial D_R}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$，从而 $\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{\Gamma_R}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{R^2}\int_{\Gamma_R}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{R^2}\iint_{D_R}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$．而对不含原点的单连通区域 D，有 $\int_{\partial D}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$，这就说明了该曲线积分在 $\mathbb{R}^2$ 上与路径有关．证毕.

(2) 注意到 $\Gamma\cup\Gamma_0^-$ 所围单连通区域 D 的边界上不含原点，由(1)题的证明立得．证毕.

习题 16.36　求下列微分形式的外积 $\omega\wedge\eta$，并将它们化成标准形式：

(1) $\omega=x\mathrm{d}y-yz\mathrm{d}z$，$\eta=y\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z$；

(2) $\omega=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z$，$\eta=A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

分析　本题考察微分形式的外积的定义.

解答　(1)

$$\begin{aligned}\omega\wedge\eta&=\left(x\mathrm{d}y-yz\mathrm{d}z\right)\wedge\left(y\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z\right)=xy\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-y^2z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-xy^2z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\\&=-xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+\left(xy^2z-xz\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-y^2z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\omega\wedge\eta&=\left(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z\right)\wedge\left(A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)\\&=aA\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+bB\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+cC\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(aA+bB+cC\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

习题 16.37　设向量函数 $\mathbf{x}=\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上区域 D 到 Ω 的 C_1 同胚映射，且 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_0\in D$ 处保定向，求证：$\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 在 D 上处处保定向.

分析　注意一个基本结论：$\mathbf{f}$ 在 D 上的雅可比行列式处处不为零.

证明　由 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 在 $\mathbf{u}_0\in D$ 处保定向，知 $\dfrac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)}{\partial\mathbf{u}}>0$. 对 $\forall\mathbf{u}\in D$，若 $\dfrac{\partial\mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}<0$，由介值性知 $\mathbf{u}_0,\mathbf{u}$ 的道路中必存在一点的雅可比行列式为零，这与 $\mathbf{f}$ 是 C_1 同胚映射矛盾. 故 $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ 在 D 上处处保定向. 证毕.

习题 16.38　求 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 在极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 下的表示.

分析　本题考察微分形式的外积的定义.

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y&=(\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta)\wedge(\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta)\\&=r\cos^2\theta\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta-r\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r=r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

评注　本题结论可推广为例 16.6.1 的结论：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$.

习题 16.39　求 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在球坐标变换 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$ 下的表示.

分析　本题考察微分形式的外积的定义.

解答

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=&(\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta)\\&\wedge(\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta)\wedge(\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi)\\&=-r^2\sin^3\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+r^2\cos^2\varphi\sin\varphi\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r\\&+r^2\sin^3\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi-r^2\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r\\&=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

评注　本题结论可推广为例 16.6.2 的结论：$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w$.

习题 16.40　求证：

(1) 若 $\omega\in\Lambda^k$，$\eta\in\Lambda^l$，则 $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$；

(2) 若 ω 是 C^2 微分形式，则 $\mathrm{d}^2\omega=0$.

分析　本题考察微分形式的外微分的定义.

证明　(1) 设$\omega=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\eta=\sum\limits_{1\le j_1<\ldots<j_l\le n}b_{j_1\ldots j_l}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)\\
&=\mathrm{d}\left(\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_l\le n}b_{j_1\ldots j_l}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\right)\right)\\
&=\mathrm{d}\left(\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n\\1\le j_1<\ldots<j_l\le n}}\left(a_{i_1\ldots i_k}b_{j_1\ldots j_l}\right)(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\right)\\
&=\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n\\1\le j_1<\ldots<j_l\le n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\left(a_{i_1\ldots i_k}b_{j_1\ldots j_l}\right)(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\\
&=\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_k\le n\\1\le j_1<\ldots<j_l\le n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(b_{j_1j_2\ldots j_l}(\mathbf{x})\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_i}+a_{i_1i_2\ldots i_k}(\mathbf{x})\frac{\partial b_{j_1\ldots j_l}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\right)\\
&\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\\
&=\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_l\le n}b_{j_1\ldots j_l}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\right)\\
&+(-1)^k\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)\wedge\left(\sum_{1\le j_1<\ldots<j_l\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_{j_1\ldots j_l}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\right)\\
&=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

证毕.

(2) 设$\omega=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\left(a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\in C^2(D)\right)$，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2\omega&=\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)\\
&=\mathrm{d}\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right)\\
&=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\
&=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left(\sum_{1\le j<i\le n}\left(\frac{\partial^2 a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 a_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=0.
\end{aligned}
$$

证毕.

习题 16.41　计算下列微分形式的外微分$\mathrm{d}\omega$，并将它们化成标准形式：

(1) $\omega = xz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + xy\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 2yz\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$；

(2) $\omega = \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x - x^2 y\mathrm{d}y$.

分析　本题考察微分形式的外微分的定义.

证明　(1) $\mathrm{d}\omega = x\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = 0$.

(2) $\mathrm{d}\omega = x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -x\left(\mathrm{e}^{xy} + 2y\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

习题 16.42　求下列数量场的梯度：

(1) $f\left(x, y\right) = x\mathrm{e}^{x}\cos y$；

(2) $f\left(x, y, z\right) = \sin xyz$.

分析　本题考察梯度的定义.

解答　(1) $\mathbf{grad}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\left(x+1\right)\mathrm{e}^{x}\cos y, -x\mathrm{e}^{x}\sin y\right)$.

(2) $\mathbf{grad}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(yz\cos xyz, xz\cos xyz, xy\cos xyz\right)$.

习题 16.43　求下列向量场的散度与旋度：

(1) $\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = \left(\mathrm{e}^{x}\cos y, \mathrm{e}^{x}\sin y, z\right)$；

(2) $\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = \left(yz, xz, xy\right)$.

分析　本题考察散度和旋度的定义.

解答　(1) $\mathrm{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = \dfrac{\partial\left(\mathrm{e}^{x}\cos y\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(\mathrm{e}^{x}\sin y\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 2\mathrm{e}^{x}\cos y + 1$,

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{e}^{x}\cos y & \mathrm{e}^{x}\sin y & z \end{vmatrix} = \left(0, 0, 2\mathrm{e}^{x}\sin y\right).$$

(2) $\mathrm{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = \dfrac{\partial\left(yz\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(xz\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(xy\right)}{\partial z} = 0$,

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

习题 16.44　设 $f(x,y,z)$为一数量场，$\mathbf{F}(x,y,z)$为一向量场，求：

(1) $\operatorname{div}(\nabla f)$；

(2) $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$；

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)$；

(4) $\operatorname{div}(f\mathbf{F})$.

分析　本题考察梯度、散度、旋度和哈密尔顿算子的定义.

解答　(1) $\operatorname{div}(\nabla f)=\operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(2)

$$\begin{aligned}\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})&=\nabla\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right).\end{aligned}$$

(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)=\mathbf{rot}\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$.

(4) $\operatorname{div}(f\mathbf{F})=\frac{\partial(fF_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fF_2)}{\partial y}+\frac{\partial(fF_3)}{\partial z}$.

评注　(3)题的结论可以表述为：保守场必为无旋场.

习题 16.45　设向量场$\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$，求证：$\operatorname{div}(\mathbf{rotF})=0$.

分析　本题考察散度和旋度的定义.

证明　$\operatorname{div}(\mathbf{rotF})=\operatorname{div}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\F_1&F_2&F_3\end{vmatrix}=\operatorname{div}\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=\operatorname{div}\mathbf{0}=0$.

习题 16.46　设函数 $f(x,y,z)=\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求证：$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)=\mathbf{0}$.

分析　本题考察梯度和旋度的定义.

证明　由习题 16.44.3 的结论立得．证毕.

习题 16.47　设向量函数 $\mathbf{F}(x,y,z)=f(r)(x,y,z)$， f 可微， $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，求证：

(1) 若 $r\neq 0$，则 $\mathbf{rotF}=\mathbf{0}$；

(2) 若 $\mathrm{div}\mathbf{F}=0$，则 $f(r)=cr^{-3}$，其中 c 为常数.

分析　本题考察散度和旋度的定义.

证明　(1) $\mathbf{rotF}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f(r)x & f(r)y & f(r)z\end{vmatrix}=\mathbf{0}$. 证毕.

(2) 由 $0=\mathrm{div}\mathbf{F}=\dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}+\dfrac{\partial F_3}{\partial z}=\dfrac{\partial\left(xf(r)\right)}{\partial x}+\dfrac{\partial\left(yf(r)\right)}{\partial y}+\dfrac{\partial\left(zf(r)\right)}{\partial z}=3f(r)+rf'(r)$，

知 $\left(r^3f(r)\right)'=r^2\left(3f(r)+rf'(r)\right)=0$，故 $r^3f(r)=c$，即 $f(r)=cr^{-3}$，其中 c 为常数. 证毕.

习题 16.48　设函数 f,g 具有二阶连续偏导数，求证：$\Delta(fg)=f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\cdot\nabla g$.

分析　本题考察哈密尔顿算子和拉普拉斯算子的定义.

证明

$$\begin{aligned}\Delta(fg)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2(fg)}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}+g\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}+2\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}g\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}+2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\frac{\partial g}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)\\&=f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\cdot\nabla g.\end{aligned}$$

证毕.

17. 含参变量积分

习题 17.1　举例说明在$D=[0,1]\times[0,1]$上存在函数$f(x,y)$，满足：

(1)　$f(x,y)$的不连续点在D稠密；

(2)　$I(x)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$在$[0,1]$上存在且连续.

分析　可以考虑由黎曼函数改造.

解答　答案不唯一，如$f(x,y)=x+R(y)$，其中R为黎曼函数．$f(x,y)$的不连续点为$[0,1]\times([0,1]\cap\mathbb{Q})$，在$D$稠密；$I(x)=\int_0^1(x+R(y))\mathrm{d}y=x$在$[0,1]$上存在且连续.

评注　本题的构造事实上给出了含参变量定积分的连续性判定定理的逆命题的反例.

习题 17.2　设函数$f(x,y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上连续，求证：$I(x,u)=\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y$在$D$上存在且连续.

分析　利用含参变量定积分的连续性判定定理.

证明　由$f(x,y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上连续，知对$\forall u\in[c,d]$，$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,u]$上连续，故$I_u(x)=\int_c^u f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上存在且连续，从而$I(x,u)=I_u(x)$在$D$上存在．对$\forall x_1,x_2\in[a,b],u_1,u_2\in[c,d]$，有

$$I_{u_2}(x_2)-I_{u_1}(x_1)=\int_c^{u_2} f(x_2,y)\mathrm{d}y-\int_c^{u_1} f(x_1,y)\mathrm{d}y=\int_{u_1}^{u_2} f(x_2,y)\mathrm{d}y+\left(I_{u_1}(x_2)-I_{u_1}(x_1)\right),$$

其中$g_{x_2}(y)=f(x_2,y)$在$[c,d]$上连续，$I_{u_1}(x)$在$[a,b]$上连续，故$I(x,u)$在D上连续. 证毕.

习题 17.3　设$N(\mathbf{0},1)\subset\mathbb{R}^n$，函数$f(\mathbf{x},\mathbf{y})$在$\overline{N(\mathbf{0},1)}\times\overline{N(\mathbf{0},1)}$上连续，求证：

$$I(\mathbf{x})=\iint\cdots\int_{\overline{N(\mathbf{0},1)}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n$$

在$\overline{N(\mathbf{0},1)}$上存在且连续.

分析　仿照含参变量定积分的连续性判定定理的证明.

证明　由$f(\mathbf{x},\mathbf{y})$在$\overline{N(\mathbf{0},1)}\times\overline{N(\mathbf{0},1)}$上连续，知对$\forall\mathbf{x}\in\overline{N(\mathbf{0},1)}$，$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=f(\mathbf{x},\mathbf{y})$在$\overline{N(\mathbf{0},1)}$上连续，故$I(\mathbf{x})=\iint\cdots\int_{\overline{N(\mathbf{0},1)}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n$在$\overline{N(\mathbf{0},1)}$上存在. 对$\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\overline{N(\mathbf{0},1)}$，有$|I(\mathbf{x}_2)-I(\mathbf{x}_1)|=\iint\cdots\int_{\overline{N(\mathbf{0},1)}}|g_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y})-g_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y})|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n\le|g_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{y})-g_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y})|\to 0(|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|\to 0)$，故$I(\mathbf{x})$在$\overline{N(\mathbf{0},1)}$上连续．证毕.

评注　本题的结论可以推广为积分区间为可求体积的有界闭区域$D\times E$的情形.

习题 17.4　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{e^x}\dfrac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}y$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}$.

分析　本题考察含参变量定积分的积分定理.

解答　(1) 由 $f(x,y)=\dfrac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，知 $I(x)=\int_0^{e^x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{e^x}\dfrac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}y=\lim\limits_{x\to 0}I(x)=I(0)=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

(2) 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+xy^2}$ 在 $[0,+\infty]\times[0,1]$ 上连续，知 $I(x)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续，

故 $\lim\limits_{x\to 1}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{1+xy^2}=\lim\limits_{x\to 1}I(x)=I(1)=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

习题 17.5　计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\,(a>b>0)$.

分析　本题考察含参变量定积分的积分定理.

解答

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y=\iint_{[0,+\infty)\times[a,b]}e^{-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

习题 17.6　计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x\,(b>a>0)$.

分析　本题考察含参变量定积分的积分定理.

解答

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-x^2y}\mathrm{d}y=\iint_{[0,+\infty)\times[a,b]}e^{-x^2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\sqrt{b\pi}-\sqrt{a\pi}.\end{aligned}$$

习题 17.7　求下列函数的导数：

(1) $F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\dfrac{\sin xy}{y}\mathrm{d}y$；

(2) $F(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{d}t\int_t^{\sin x}f(t,s)\mathrm{d}s$；

(3) $F(x)=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$；

(4) $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-xy}\cos xy\mathrm{d}y$.

分析　本题考察含参变量定积分的导数定理的推论：若函数 $f(x,y),f_x'(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，且 $\varphi(x),\psi(x)(x\in[a,b])$ 是满足 $c\le\varphi(x),\psi(x)\le d$ 的可微函数，则函数 $I(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上存在且可导，且

$$I'(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f_x'(x,y)\mathrm{d}y+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$

其证明是容易的，只需将积分改写为 $I(x)=\int_c^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{\varphi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 再利用含参变量定积分的导数定理.

解答　(1)

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin xy}{y}\right)\mathrm{d}y+\frac{\sin x(b+x)}{b+x}\cdot\frac{\mathrm{d}(b+x)}{\mathrm{d}x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}\cdot\frac{\mathrm{d}(a+x)}{\mathrm{d}x}\\&=\left(\frac{\sin x(b+x)}{x}-\frac{\sin x(a+x)}{x}\right)+\frac{\sin x(b+x)}{b+x}-\frac{\sin x(a+x)}{a+x}\\&=\frac{(b+2x)\sin x(b+x)}{x(b+x)}-\frac{(a+2x)\sin x(a+x)}{x(a+x)}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_t^{\sin x}f(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial\left(x^2\right)}{\partial x}\int_{x^2}^{\sin x}f\left(x^2,s\right)\mathrm{d}s-\frac{\partial x}{\partial x}\int_x^{\sin x}f(x,s)\mathrm{d}s\\&=\int_x^{x^2}f(t,\sin x)\cos x\mathrm{d}y+2x\int_{x^2}^{\sin x}f\left(x^2,s\right)\mathrm{d}s-\int_x^{\sin x}f(x,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

(3)

$$F'(x)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(4)

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_0^x\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{-xy}\cos xy\right)}{\partial x}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2\frac{\partial x}{\partial x}=-\int_0^x y\mathrm{e}^{-xy}(\cos xy+\sin xy)\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2\\&=\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2x^2+1}{2x^2}+2\mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2.\end{aligned}$$

习题 17.8　设函数 $f(x,y,z), f_x'(x,y,z)$ 在可求体积的有界闭区域 $[a,b]\times D$ 上连续，其中 D 是可求面积的有界闭区域，求证：函数 $F(x)=\iint_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在 $[a,b]$ 上存在且可导，且 $F'(x)=\iint_D f_x'(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

分析　利用含参变量定积分的积分定理的推广：设函数 $f(x,\mathbf{y})$ 在有界闭区域 $[a,b]\times D$ 上连续，其中 D 是可求面积的有界闭区域，则函数 $I_1(x)=\iint\cdots\int_D f(x,\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n$ 和 $I_2(\mathbf{y})=\int_a^b f(x,\mathbf{y})\mathrm{d}x$ 分别在 $[a,b]$ 和 D 上可积，且 $\int_a^b I_1(x)\mathrm{d}x=\iint\cdots\int_D I_2(\mathbf{y})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\ldots\mathrm{d}y_n$.

证明　由习题 17.3 的评注，知 $g(u)=\iint_D f_u'(u,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在 $[a,b]$ 上存在且连续. 对 $\forall x\in[a,b]$，对 $f_u'(u,y,z)$ 在 $[a,x]\times D$ 上用含参变量定积分的积分定理的推广，有

$$\begin{aligned}\int_a^x g(u)\mathrm{d}u&=\int_a^x\left(\iint_D f_u'(u,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}u=\iint_D\left(\int_a^x f_u'(u,y,z)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint_D\big(f(x,y,z)-f(a,y,z)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=F(x)-F(a),\end{aligned}$$

故 $F'(x)=g(x)=\iint_D f_x'(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 证毕.

习题 17.9　设函数 $f(x)\in C^2(\mathbb{R}), g(x)\in C^1(\mathbb{R})$，求证：函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)\mathrm{d}y$$

在 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上具有连续二阶偏导数，且满足：

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$；

(2) $u(x,0)=f(x)$；

(3) $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x)$.

分析　$u_1(x,t)=\dfrac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)$ 在 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上具有连续二阶偏导数是显然的，且 $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\dfrac{a^2}{2}\big(f''(x+at)+f''(x-at)\big)=a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$，故只需证 $u_2(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上具有连续二阶偏导数，(1)题只需证 $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$.

证明　由含参变量定积分的导数定理的推论，$u_2(x,t)$ 在 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上可导，且 $\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{1}{2}\big(g(x+at)+g(x-at)\big)$，$\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{1}{2a}\big(g(x+at)-g(x-at)\big)$，故其二阶偏导数连续.

(1) $\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=\frac{a}{2}\big(g(x+at)-g(x-at)\big)=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$. 证毕.

(2) $u(x,0)=\frac{1}{2}\big(f(x)+f(x)\big)+\frac{1}{2a}\int_x^x g(y)\mathrm{d}y=f(x)$. 证毕.

(3) 由 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{a}{2}\big(f'(x+at)-f'(x-at)\big)+\frac{1}{2}\big(g(x+at)+g(x-at)\big)$，知 $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\frac{a}{2}\big(f'(x)-f'(x)\big)+\frac{1}{2}\big(g(x)+g(x)\big)=g(x)$. 证毕.

习题 17.10　设函数 $f(t)\in C[0,2\pi]$，求函数

$$F(x_0,x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(t)-\frac{x_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(x_k\cos kt+y_k\sin kt)\right)^2\mathrm{d}t$$

的最小值.

分析　利用傅里叶级数最佳逼近定理.

解答　将 $f(t)$ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数，则所求最小值为 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(t)-T_n(x)\big)^2\mathrm{d}t$，其中 $T_n(x)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶级数前 $n+1$ 项部分和.

习题 17.11　设函数 $f(t)\in C(\mathbb{R})$，$\varphi(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\alpha(x-t)\mathrm{d}t$.

(1) 求证：$\varphi''(x)+\alpha^2\varphi(x)=f(x)(\alpha\neq 0)$；

(2) 求 $\varphi(0),\varphi'(0)$.

分析　利用含参变量定积分的导数定理.

解答　(1) 由 $\varphi'(x)=\int_0^x f(t)\cos\alpha(x-t)\mathrm{d}t$，知 $\varphi''(x)=-\alpha\int_0^x f(t)\sin\alpha(x-t)\mathrm{d}t+f(x)=f(x)-\alpha^2\varphi(x)$，即 $\varphi''(x)+\alpha^2\varphi(x)=f(x)$. 证毕.

(2) $\varphi(0)=-\frac{1}{\alpha}\int_0^0 f(t)\sin\alpha t\mathrm{d}t=0$，$\varphi'(0)=\int_0^0 f(t)\cos\alpha t\mathrm{d}t=0$.

习题 17.12　设函数 $J_0(x)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，求证：$x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)=0$.

分析　利用含参变量定积分的导数定理.

证明　由 $J_0'(x)=-\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\sin(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，知 $J_0''(x)=-\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$，

故 $x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)=\dfrac{x}{\pi}\left(x\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi}\sin\theta\sin(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right)=0$.

证毕.

习题 17.13　设函数 $f(x,y)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sin(x+yt)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，证明或否定：存在 $x=0$ 的某个邻域上的连续函数 $y=g(x)$，使得 $g(0)=1$，$f(x,g(x))=0$.

分析　利用含参变量定积分的导数定理.

解答　结论是肯定的. 可以验证 $f(0,1)=0$，$f(x,y),\ f_y'(x,y)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos(x+yt)\mathrm{d}t$ 在 $(0,1)$ 的某个邻域上连续，$f_y'(0,1)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\cos t\mathrm{d}t\neq 0$，由隐函数存在定理，知满足要求的函数存在.

习题 17.14　利用 $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}\theta=1(0<r<1)$，求

$$I(r)=\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)\mathrm{d}\theta(0<r<1).$$

分析　利用含参变量定积分的导数定理.

解答　由 $I'(r)=\int_0^{2\pi}\dfrac{-2\cos\theta+2r}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(1-\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)\mathrm{d}\theta=0(0<r<1)$，知 $I(r)$ 在 $(0,1)$ 上为常数. 由含参变量定积分的连续性判定定理，知 $I(r)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，故 $I(r)=I(0)=0(0<r<1)$.

习题 17.15　求证：下列含参变量积分在指定集合上一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\dfrac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y(x\geq 0)$；

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y(-M\leq x\leq M)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2 y\ln(1+y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\,(x\ge a>0)$；

(4) $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{xy}}{x+y^{\frac14}}\mathrm{d}y\,(0\le x\le 1)$．

分析　利用含参变量积分一致收敛的判别法．

证明　(1) 对 $\forall A>0$，有 $\left|\int_0^A\sin y\mathrm{d}y\right|=|1-\cos A|\le 2$，而 $\frac{1}{\sqrt{y}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调且 $\frac{1}{\sqrt{y}}\to 0$ $(y\to+\infty)$，由狄利克雷判别法，知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 收敛，也在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．而 e^{-xy} 关于 y 在 $(0,+\infty)$ 上单调且在 $(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上恒有 $\left|\mathrm{e}^{-xy}\right|\le 1$，由阿贝尔判别法，知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛．证毕．

(2) 在 $[-M,M]\times[1,+\infty)$ 上恒有 $0<\frac{x^2}{1+x^2y^2}<\frac{1}{y^2}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 收敛，由魏尔斯特拉斯定理，知 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛．证毕．

(3) 由 $\ln(1+y)=o\left(\sqrt{y}\right)(y\to+\infty)$，知 $\frac{\ln(1+y)}{a^2+y^2}=o\left(y^{-\frac32}\right)(y\to+\infty)$．由比较判别法，知 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+y)}{a^2+y^2}\mathrm{d}y$ 收敛．而在 $[a,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上恒有 $\left|\frac{\sin x^2y\ln(1+y)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{\ln(1+y)}{a^2+y^2}$，由魏尔斯特拉斯定理，知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2y\ln(1+y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛．证毕．

(4) 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上恒有 $0\le\frac{\sin\sqrt{xy}}{x+y^{\frac14}}<y^{-\frac14}$，而 $\int_0^1 y^{-\frac14}\mathrm{d}y$ 收敛，由魏尔斯特拉斯定理，知 $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{xy}}{x+y^{\frac14}}\mathrm{d}y$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛．证毕．

习题 17.16　讨论下列含参变量积分的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2}$，其中 (a) $x>a>0$；(b) $x>0$．

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 (a) $0<a\le x\le b$；(b) $x\ge 0$.

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$，其中 (a) $x\le a$；(b) $x\in\mathbb{R}$.

分析　利用含参变量积分一致收敛的判别法和柯西收敛准则.

解答　(1) (a) $0<\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}<\frac{1}{a^2}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right)=\frac{5}{4a^2}$，由单调收敛原理，知$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2}$在$(a,+\infty)$上一致收敛.

(b) 取 $\varepsilon=1$，对 $\forall A_0>0$，取 $A=n>A_0, A'=n+1, x=\frac{1}{n+2}>0$，则$\int_A^{A'}\frac{\mathrm{d}y}{\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2}\ge$ $(n+2)^2\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}y}{\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}\ge 1=\varepsilon$，由柯西收敛准则，知$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\left(xy+\frac{x}{y}\right)^2}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

(2) (a) 在$[a,b]\times[0,+\infty)$上恒有$0\le\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}<b^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}$，而$\int_1^{+\infty}b^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$收敛，由魏尔斯特拉斯定理，知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$在$[a,b]$上一致收敛.

(b) 取 $\varepsilon=\frac{1}{5}$，对 $\forall A_0\in(0,1)$，取 $A=\frac{1}{n}>0, A'=\frac{2}{n}<A_0, x=\frac{1}{n}>0$，则$\int_A^{A'}\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\ge$ $\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\ge\frac{1}{5}=\varepsilon$，由柯西收敛准则，知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$在$[0,+\infty)$上不一致收敛.

(3) (a) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$在$[0,a]$上没有瑕点，故其敛散性与$\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$的相同. 在$(-\infty,a]\times[a,+\infty)$上恒有$0<\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\le\mathrm{e}^{-(y-a)^2}$，而$\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-a)^2}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$收敛，由魏尔斯特拉斯定理，知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$在$(-\infty,a]$上一致收敛.

(b) 取$\varepsilon=\mathrm{e}^{-1}$，对$\forall A_0>0$，取$A=n>A_0, A'=n+1, x=n>0$，则$\int_A^{A'}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y\ge\mathrm{e}^{-1}=\varepsilon$，由柯西收敛准则，知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y$在$\mathbb{R}$上不一致收敛.

习题 17.17　设函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上连续，$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(1) 求证：$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；

(2) 讨论 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

分析　(1) 利用柯西收敛准则.

(2) 利用例 17.2.3 的结论.

解答　(1) 由 $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 (a,b) 上一致收敛，知对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>0$，当 $A'>A>A_0$ 时，对 $\forall x\in(a,b)$，有 $\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[A,A']$ 上连续，知 $\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $\exists x_0\in(a,b)$，使得 $\left|\int_A^{A'} f(a,y)\mathrm{d}y-\int_A^{A'} f(x_0,y)\mathrm{d}y\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，故 $\left|\int_A^{A'} f(a,y)\mathrm{d}y\right|$ $\le\left|\int_A^{A'} f(x_0,y)\mathrm{d}y\right|+\left|\int_A^{A'} f(a,y)\mathrm{d}y-\int_A^{A'} f(x_0,y)\mathrm{d}y\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 同理 $\left|\int_A^{A'} f(b,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，故对 $\forall x\in[a,b]$，有 $\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，从而 $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 证毕.

(2) 由 $\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散，知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

习题 17.18　设函数 $f(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{1+y^2}\mathrm{d}y$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

分析　利用含参变量无穷积分的连续性判定定理.

解答　在 $\mathbb{R}\times[1,+\infty)$ 上恒有 $\left|\dfrac{\cos xy}{1+y^2}\right|<\dfrac{1}{y^2}$，而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 收敛，由魏尔斯特拉斯定理，知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，从而 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\dfrac{\pi}{4}$. 由黎曼—勒贝格引理，知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

习题 17.19　利用 $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-x^{-2}}\mathrm{d}x$.

分析　利用含参变量无穷积分的导数定理.

解答　由 $F'(\alpha)=-2\alpha\int_0^{+\infty}x^{-2}\mathrm{e}^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2-\alpha^2\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{-2}}\mathrm{d}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)=-2F(\alpha)$ 及已知结论 $F(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，知 $F(\alpha)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}^{2\alpha}}$，故 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-x^{-2}}\mathrm{d}x=F(1)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}^2}$.

习题 17.20　求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 xy}{y^2}\mathrm{d}y$.

分析　注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 xy}{y^2}\mathrm{d}y=|x|\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ ，故本题归结于习题 17.23.

解答　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 xy}{y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi|x|}{2}$.

习题 17.21　求 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$.

分析　注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\mathrm{d}(2x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$，故本题也归结于习题 17.23.

解答　$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

习题 17.22　求 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\cos xy\mathrm{d}y$.

分析　利用分部积分法.

解答　设 $I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\cos xy\mathrm{d}y$ ，$J(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\sin xy\mathrm{d}y$，则 $I(x)=1-xJ(x)$，$J(x)=xI(x)$，联立得 $I(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

习题 17.23　求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

分析　利用狄利克雷积分.

解答　$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2}$.

习题 17.24　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$.

分析　注意到该极限与黎曼—勒贝格引理的形式相近，故猜想 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=0$.

解答　由 $\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}(xy)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{\ln z}\mathrm{d}(\ln z)=\frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z<\frac{\pi}{2x}$，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y=0$.

习题 17.25　求证：$F(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y^x}\mathrm{d}y\in C^1(0,+\infty)$.

分析　利用含参变量无穷积分的导数定理.

证明　设 $f(x,y)=\frac{\sin y}{y^x}$，$f_x'(x,y)=-\frac{\ln y\sin y}{y^x}$，由狄利克雷判别法，知 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln y}{y^x}\sin y\mathrm{d}y$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，而 $F(1)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$ 收敛，故 $F'(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln y\sin y}{y^x}\mathrm{d}y$. 由 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛，知 $F'(x)\in C(0,+\infty)$，即 $F(x)\in C^1(0,+\infty)$. 证毕.

习题 17.26　求 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x(\alpha>0,b>a>0)$.

分析　利用含参变量无穷积分的导数定理.

解答　设 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x(\beta>0)$，则 $I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$，而 $I(+\infty)=0$，故 $I(x)=\arctan\frac{\beta}{\alpha}$，从而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\arctan\frac{b}{\alpha}-\arctan\frac{a}{\alpha}$.

习题 17.27　(1) 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，求证：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\left(f(+\infty)-f(0)\right)\ln\frac{b}{a}(a,b>0).$$

(2) 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x(a,b>0)$.

分析　(1) 先对常义积分进行变形.

解答　(1) 设 $0<X_1<X_2$，则

$$\begin{aligned}\int_{X_1}^{X_2}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x&=\int_{X_1}^{X_2}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x-\int_{X_1}^{X_2}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_{bX_1}^{bX_2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aX_1}^{aX_2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{aX_2}^{bX_2}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aX_1}^{bX_1}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(X_2x)}{x}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{f(X_1x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_a^b\frac{f(X_2x)-f(X_1x)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $X_1\to0,X_2\to+\infty$，则 $\int_{X_1}^{X_2}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(+\infty)-f(0)}{x}\mathrm{d}x=\left(f(+\infty)-f(0)\right)\ln\frac{b}{a}$.

证毕.

(2) 由(1)题结论，$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

习题 17.28 设 $f(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，求证：

$$I(t)=\int_0^{+\infty}x^t f(x)\mathrm{d}x\in C^1(0,2).$$

分析 利用含参变量无穷积分的导数定理.

证明 设 $f(t,x)=x^t f(x)$， $f_t'(t,x)=tx^{t-1}f(x)$，由阿贝尔判别法，知 $\int_0^{+\infty}tx^{t-1}f(x)\mathrm{d}x$ $=\int_0^1 tx^t\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}tx^{t-2}\left(xf(x)\right)\mathrm{d}x$ 在 $(0,2)$ 上一致收敛．而 $I(1)=\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故 $I'(t)=\int_1^{+\infty}tx^{t-1}f(x)\mathrm{d}x$. 由 $I'(t)$ 在 $(0,2)$ 上一致收敛，知 $I'(t)\in C(0,2)$，即 $I(t)\in C^1(0,2)$. 证毕.

习题 17.29 求证：$\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y\neq\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x$.

分析 注意到 $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{y-x}{(y+x)^3}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x$，故只需证 $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y\neq 0$.

证明 由 $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\neq 0$，知 $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}y\neq$ $\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x$. 证毕.

评注 我们不加证明地给出如下定理：若函数 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续，$I(x)=$ $\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,+\infty)$ 上内闭一致收敛， $J(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,+\infty)$ 上内闭一致收敛，且 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 收敛或 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}I(x)\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}I(y)\mathrm{d}y$. 本题事实上给出了说明(c)的必要性的反例.

习题 17.30 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^p x\mathrm{d}x\left(|p|<1\right)$；

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$；

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$；

(8) $\int_0^{+\infty} 2^{-x}x\mathrm{d}x$.

分析　利用 Γ 函数和 B 函数的性质.

解答　(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\left(x^4\right)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}\left(x^4\right)}{1+x^4}=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{2}}x\sin^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

(3) $\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x=\int_0^1\ln^n\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=(-1)^n\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(-1)^n\Gamma(n+1)=(-1)^n n!$.

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^p x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-p}x\sin^p x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1-p}{2},\frac{1+p}{2}\right)=\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{1-p}{2}\pi\right)}=\frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$.

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}(2x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},3\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=\frac{2!}{2\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}}=\frac{8}{315}$.

(7) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}$.

(8) $\int_0^{+\infty} 2^{-x} x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x\ln 2}\mathrm{d}x = \frac{1}{(\ln 2)^2}\int_0^{+\infty}(x\ln 2)\mathrm{e}^{-(x\ln 2)}\mathrm{d}(x\ln 2) = \frac{\Gamma(2)}{(\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2}$.

习题 17.31　求证：

(1) $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$；

(2) $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{1}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$.

分析　(2) 由(1)题结论，知 $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{B}(\alpha,\beta)+\mathrm{B}(\beta,\alpha)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$.

证明　(1)

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^0\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{\beta-1}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x .$$

证毕.

(2) 由 $\int_0^1\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^1\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha+\beta}}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = \int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$，同理 $\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$，知 $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}x$. 证毕.

习题 17.32　求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 所围区域的面积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　作变量替换 $\begin{cases} x = r\cos^3\theta, \\ y = r\sin^3\theta \end{cases}$，由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = 3r\cos^2\theta\sin^2\theta$，知

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S 3r\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 3r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right) = 3\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2}{2!} = \frac{3}{8}\pi.$$

评注　利用格林公式的解法参见习题 16.27．事实上，本题最早出现于习题 7.42.1．

习题 17.33　求曲面 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\left(a>0\right)$ 与坐标平面在第一象限所围立体的体积.

分析　本题考察重积分的几何意义与重积分的计算.

解答　作变量替换 $\begin{cases} x=r\sin^4\varphi\cos^4\theta \\ y=r\sin^4\varphi\sin^4\theta \\ z=r\cos^4\varphi \end{cases}$，由 $\dfrac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\varphi,\theta\right)}=16r^2\cos^3\varphi\sin^7\varphi\cos^3\theta\sin^3\theta$，知

$$\begin{aligned}
V&=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Omega 16r^2\cos^3\varphi\sin^7\varphi\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&=\left(\int_0^a 16r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right) \\
&=\frac{4a^3}{3}\mathrm{B}\left(2,4\right)\mathrm{B}\left(2,2\right)=\frac{4\Gamma^3\left(2\right)\Gamma\left(4\right)a^3}{3\Gamma\left(6\right)\Gamma\left(4\right)}=\frac{4a^3}{3\times 5!}=\frac{a^3}{90}.
\end{aligned}$$

习题 17.34　求极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^\alpha}\mathrm{d}x$.

分析　利用 Γ 函数的性质.

解答　$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^\alpha}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\left(x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{e}^{-x^\alpha}\mathrm{d}\left(x^\alpha\right)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\Gamma\left(1\right)=1$.

习题 17.35　求极限 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$.

分析　利用 Γ 函数和 B 函数的性质.

解答

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}&=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\left(x^a\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}\left(x^a\right)}{1+x^\alpha}=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right) \\
&=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\Gamma\left(1\right)=1.
\end{aligned}$$