2014年6月13日　　数学分析　期末试题

李伟固　数学科学学院

2014 年 6 月 13 日

1. 讨论下列函数序列或函数项级数在指定区间的一致收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}, x \in (-\infty, +\infty);$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}}, x \in [0, +\infty);$

(3) $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n, \alpha \in \mathbf{R}, x \in [0,1].$

2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^{2n}} x^n;$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{n^2}.$

3. 求下列函数的Fourier级数:

(1) $f(x) = x\cos x, -\pi \leq x < pi;$

(2) $f(x) = \sin^4 x.$

4. 设函数$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上具有连续导函数, 并且$\{f_n'(x)\}$在$[0,1]$上一致有界. 证明: 如果$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上点点收敛到$f(x)$, 则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上必定一致收敛到$f(x)$.

5. 设函数$f(x)$和$g(x)$以2π为周期, 且在$[-\pi,\pi]$上可积. 证明: $f(x)$与$g(x)$的Fourier级数相等的充分必要条件是$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0$.

6. 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数, 满足:$\int_a^b f(x)x^{3n}\mathrm{d}x=0, n=0,1,2,\cdots$. 证明在$[a,b]$上有$f(x)\equiv 0$.

7. 给定实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$, 满足$\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k>0(k=1,2,\cdots)$, 令

$$f(x)=\frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)},$$

证明: $f^(k)(0)>0$, $k=1,2,\cdots$.

8. $p(x)$是周期为2π的连续函数, ω是实数但不是整数, 求证: $\int_0^x p(x)\sin\omega x\mathrm{d}x$有界.