

# 数学分析 (III) 2016 年期末考试 (伍胜健)

January 12, 2017

1. (10 分) 函数  $f(x, y)$  在可求面积的有界闭区域  $D$  上有定义,  $f(x, y)$  在  $D$  上的不连续点集不可求面积, 试问  $f(x, y)$  是否一定不可积? 说明理由.

2. (10 分) 化下列累次积分为  $dx dy dz$  的顺序.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_{-\sqrt{2z-z^2}}^{\sqrt{2z-z^2}} dy \int_{-\sqrt{2z-y^2-z^2}}^{\sqrt{2z-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx$$

3. (10 分) 设  $f(x, y, z)$  在  $\mathbb{R}^3$  上有二阶连续偏导数, 计算  $\text{rot}(\text{grad} f)$ .

4. (10 分) 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续且  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 设区域  $D = \{(x, y) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq 1\}$ , 试问  $\iint_D f(x, y) dx dy$  是否一定收敛? 说明理由.

5. (10 分) 计算第一型曲面积分

$$\iint_S \frac{dS}{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$$

其中曲面  $S$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, a > 0, a \neq R$ .

6. (10 分) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S (x^4 + y^2 \sin z) dy dz + (y^2 + x \cos z^2) dz dx + (z^3 + x^2 y) dx dy$$

其中曲面  $S$  为上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

7. (20 分) 设  $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ . (1) 证明  $u$  是  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上的调和函数. (2) 求  $u$  在第一象限内的共轭调和函数. (3) 找一个极大区域  $D$  使得  $u$  在  $D$  上有共轭调和函数, 但在任意真包含  $D$  的区域上不存在共轭调和函数.

8. (10 分) 讨论含参积分  $\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} e^{\sin xy} \cos xy dy$  在  $\mathbb{R}$  上的一致收敛性.

9. (10 分) 函数  $f(y)$  在  $[0, 1]$  上连续, 试讨论  $I(x) = \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy$  在  $\mathbb{R}$  上的连续性.