1. (1)

$$\lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{-\frac{1}{\tan 2x}\cdot\left(-\frac{\tan 2x}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\tan 2x}{x}\right)} = e^{-2}$$

(2)

$$\sqrt[n]{n^2+n} \geq \sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\cdot(\sqrt[n]{n})^2 \to 1$$

则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n} = 1$

(3)

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{x^2}-4^{x^3}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5^{x^2}-1}{x^2} - \frac{4^{x^3}-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln 5 - \frac{x^3\ln 4}{x^2}\right) = \ln 5$$

$p=2$

(4). 因为 $f(x)\in C[0,1]$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续。

从而对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in[0,1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，则 $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $\frac{1}{n}<\delta$

于是当 $n>N_1$ 时，若 n 为偶数，记为 $n=2m$

$$\left|\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{2m}\right)\right| = \left|\frac{f\left(\frac{1}{2m}\right)-f\left(\frac{2}{2m}\right)+f\left(\frac{3}{2m}\right)-f\left(\frac{4}{2m}\right)+\cdots+f\left(\frac{2m-1}{2m}\right)-f\left(\frac{2m}{2m}\right)}{2m}\right|$$

$$\leq \frac{m\varepsilon}{2m} < \varepsilon.$$

若 n 为奇数，$f\in C[0,1]$，则 $\exists M$，使得 $|f|\leq M$

$\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时，有 $\frac{1}{n}<\delta$ 且 $\frac{M}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $n=$ ~~2m+1~~ $2m+1$

于是

$$\left|\frac{1}{2m+1}\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{2m+1}\right)\right| \leq \frac{f(1)}{2m+1} + \frac{\left|\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{2m+1}\right)\right|}{2m+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m\varepsilon}{2m+1} < \varepsilon$$

从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$

2. (1)

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon \Leftarrow \sqrt[n]{n}<1+\varepsilon \Leftarrow n<(1+\varepsilon)^n = 1+\varepsilon n+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2+\cdots$$

$$\Leftarrow n<\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \Leftarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}-1$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 成立。

(2). 首先 $n>2$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

另一方面，对任意固定 $N\ge 2$，当 $n\ge N$ 时

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+1+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

令 $n\to\infty$，得

$$e\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{N!}$$

由 N 任意，即得。

3. (1) $x_n'=n+\frac{1}{n}$，$x_n''=n$

$|x_n'-x_n''|=\frac{1}{n}\to 0$

$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2\right|=2+\frac{1}{n^2}\to 2\ne 0.$

从而 $f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续。

(2). 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$ 当 $x>M$ 时，

$$|f(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

补充定义 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0,M+1]$ 上一致连续

则对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_1,x_2\in[0,M+1]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

不妨假定上述 $\delta<1$，则当 $x_1,x_2\in[M,+\infty)$

则 $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-1+1-f(x_2)|\le|f(x_1)-1|+|f(x_2)-1|<\varepsilon.$

而 $\delta<1$，则 x_1、x_2 要么同属于 $[0,M+1]$ 要么同属于 $[M,+\infty)$.

4. (1) $f(x)=-x$，$x_n=(-1)^n$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1$，$f(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n)=-1$，$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=1$

(2)

(法一) $\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\inf\{f(x_n),f(x_{n+1}),\cdots\}$

$f(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)=f(\lim_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\})=\lim_{n\to\infty}f(\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\})$

要证 $\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)=f(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)$，只要证 $\inf\{f(x_n),f(x_{n+1}),\cdots\}=f(\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\})$

证明如下：设 $m=\inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$，即证 $\inf\{f(x_n), f(x_{n+1}), \cdots\}=f(m)$.

则 $x_k \geq m \quad \forall k\geq n$

又 f 是单调上升的，故 $f(x_k)\geq f(m)$，$\forall k\geq n$

对 $\forall \delta>0$，$\exists x_N$ $(N\geq n)$，使得 $m<x_N<m+\delta$

$f(x)$ 在 $x=m$ 处连续，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $|x-m|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(m)|<\varepsilon.$$

从而对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_N$，使得 $|f(x_N)-f(m)|<\varepsilon$.

即 $f(x_N)<f(m)+\varepsilon$. 证毕.

(法二). 令 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=A$，则 $\exists\{x_{n_k}\}$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=A$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(A)$，$\{f(x_{n_k})\}$ 是 $\{f(x_n)\}$ 的收敛子列，则

$$f(A)\geq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

取 $\{f(x_n)\}$ 的子列 $\{f(x_{m_k})\}$. s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k})=\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

又 $\{x_{m_k}\}$ 有界，则有收敛子列 $\{x_{m_k'}\}$. s.t.

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{m_k'})=f(\lim_{k\to\infty} x_{m_k'})=\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

又 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k'}\geq A$.

则由 f 的单调性，$\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k'})\geq f(A)$

综上 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(A)=f(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n)$.

5. (1) $g(x)=f(x)-x$

则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

且 $g(a)=f(a)-a\geq 0$，$g(b)=f(b)-b\leq 0$. 由介值定理. $\exists c\in[a,b]$. s.t. $f(c)=c$.

(2). (法一) 不妨设 $f(a)>a$，$f(b)<b$ 否则显然结论成立

此时. 令 $A=\{x \mid x\in[a,b] 且 f(x)>x\}$

由 $a\in A$. $b\notin A$. 则 A 非空有界. 则 A 有上确界.

令 $M=\sup A$.

(i) 若 $M\in A$. 则对 $\forall\varepsilon>0$. $M+\varepsilon\notin A$. (这里取 ε 充分小. 使得 $M+\varepsilon\leq b$)

于是 $f(M)\leq f(M+\varepsilon)\leq M+\varepsilon$.

由 ε 的任意性. $f(M)\leq M$. 与 $M\in A$ 有 $f(M)>M$ 矛盾.

故 $M\notin A$

(iii) ~~由~~ 当 $M \notin A$ 时.

则 $f(M) \leq M$.

~~又由(i)知 f(M)~~

若 $f(M) = M$, 则结论成立.

否则 $f(M) < M$.

则由上确界定义知. $\exists\ x_0 \in A$. $f(M) < x_0 < M$ 且 $f(x_0) > x_0$

于是 $x_0 > f(M) \geq f(x_0) > x_0$ 矛盾.

从而 结论成立

(法二). 若不存在 $c \in [a,b]$. s.t $f(c) = c$. 则必有

$$f(a) > a, \quad f(b) < b$$

令 $a_1 = a$, $b_1 = b$.

构造 $\{a_n\}$. $\{b_n\}$. 为.

若 $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > \frac{a_n+b_n}{2}$. 则 $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$.

否则 令 $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

则 我们构造了闭区间套.

(i) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$. $\forall n$.

(ii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 \ (n \to \infty)$.

(iii). $f(a_n) > a_n$, $f(b_n) < b_n$.

由闭区间套定理. $\exists\ c \in [a,b]$.

s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

且 $a_n \leq c \leq b_n$

$$a_n < f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n) < b_n.$$

两边令 $n \to \infty$. 得 $c = f(c)$.

6. 证明：(法一)

$$0\le a_{m+n} \le a_m+a_n+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

则 $0\le a_{m+n}+\frac{2}{m+n} \le \left(a_m+\frac{2}{m}\right)+\left(a_n+\frac{2}{n}\right)$

令 $b_n=a_n+\frac{2}{n}$

则 $0\le b_{m+n}\le b_m+b_n$

而 $\frac{b_m}{m}$ 极限存在，则 $\frac{a_m}{m}$ 极限也存在。

(法二) $\forall N\ge 1$，$n=mN+k$，$0\le k\le N-1$

$$a_n=a_{mN+k}\le a_{mN}+a_k+\frac{1}{mN}+\frac{1}{k}$$

$$\le a_{(m-1)N}+a_N+\frac{1}{(m-1)N}+\frac{1}{N}+\frac{1}{mN}+a_k+\frac{1}{k}$$

$$\le a_{(m-2)N}+2a_N+\frac{1}{(m-2)N}+\frac{1}{(m-1)N}+\frac{1}{mN}+\frac{2}{N}+a_k+\frac{1}{k}$$

$$\le \cdots$$

$$\le ma_N+\frac{m-1}{N}+\frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\left(a_k+\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{a_n}{n}\le\frac{ma_N}{mN+k}+\frac{m-1}{N(mN+k)}+\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}}{N(mN+k)}+\frac{a_k+\frac{1}{k}}{mN+k}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\le\frac{a_N}{N}+\frac{1}{N^2}$$

故 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\le\inf_{N\ge1}\left\{\frac{a_N}{N}+\frac{1}{N^2}\right\}\le\lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_N}{N}+\frac{1}{N^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{a_N}{N}$

从而 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 极限存在。

7. 证明：考虑 $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$　这里 x_0 是 (a,b) 中任意一点。

若上述极限存在，则 $\lim_{x\to x_0^+}(f(x)-f(x_0))=0$　同理左极限为0，于是 $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

~~考虑单调性 取~~ $\cancel{x_1<x_0<x_2}$

则 ~~$\exists\lambda\in(0,1)$ s.t. $x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$~~

于是 $\cancel{\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\le\frac{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_1)}{(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2}=}$

对 $\forall\ x_0 < x_1 < x_2 \in (a,b)$.

$\exists \lambda \in (0,1)$. s.t $x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda) x_2$

则 $$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_2)-f(x_0)}{(\lambda-1)x_0+(1-\lambda)x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

即 $\frac{f(x)-f(x_0)}{\cancel{x}-x_0}$ 在 $x>x_0$ 时. 是单调递增的

在 x_0 左侧 找 $c \in (a,b)$

则 $$\frac{f(x_0)-f(c)}{x_0-c} \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

得 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 有下界. 从而极限存在.

$$x_0 = \lambda c + (1-\lambda) x$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \geqslant \frac{\lambda f(c)+(1-\lambda)f(x)-f(x)}{\lambda c-\lambda x} = \frac{f(x)-f(c)}{\cancel{x}-c}$$