

2024/11/13

1.

求第一卦限上由曲面 $z = \frac{1}{(1+x+3y)^3}$ 所围立体的体积.

Answer:

$$V = \iiint_D dx dy dz = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\frac{1}{(1+x+3y)^3}} dz = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{6(1+x)^2} = \frac{1}{6}$$

2.

讨论以下广义重积分的敛散性, 其中 α, β, γ 均为常数.

(1) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1+|x|)^\alpha (1+|y|)^\beta (1+|z|)^\gamma}$, 其中 $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

注意到被积函数在 D^c 上有界, 且 D^c 体积有限, 因此将积分区域改为 \mathbb{R}^3 后敛散性不变. 而

$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx dy dz}{(1+|x|)^\alpha (1+|y|)^\beta (1+|z|)^\gamma} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^\alpha} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+|y|)^\beta} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+|z|)^\gamma} \right)$ 收敛当且仅当 $\alpha, \beta, \gamma > 1$, 故 I 收敛当且仅当 $\alpha, \beta, \gamma > 1$.

(2) $\iiint_D \frac{dx dy dz}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + |z|^\alpha}$, 其中 $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$

作变量替换: $\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$, 由 $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = r^2 |\sin \varphi|$, 有

$$\begin{aligned} I &= 8 \iiint_{\Omega} \frac{r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta}{r^\alpha (\sin^\alpha \varphi (\cos^\alpha \theta + \sin^\alpha \theta) + \cos^\alpha \varphi)} \\ &= 8 \left(\int_1^{+\infty} r^{2-\alpha} dr \right) \left(\iint_{[0, \frac{\pi}{2}]^2} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{\sin^\alpha \varphi (\cos^\alpha \theta + \sin^\alpha \theta) + \cos^\alpha \varphi} \right) \end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty} r^{2-\alpha} dr$ 收敛等价于 $\alpha > 3$, 而当 $\alpha > 3$ 时,

$$\begin{aligned}
\iint_{[0, \frac{\pi}{2}]^2} \frac{\sin \varphi d\varphi d\theta}{\sin^\alpha \varphi (\cos^\alpha \theta + \sin^\alpha \theta) + \cos^\alpha \varphi} &\leq \iint_{[0, \frac{\pi}{2}]^2} \frac{d\varphi d\theta}{(\sin^\alpha \varphi + \cos^\alpha \varphi) (\cos^\alpha \theta + \sin^\alpha \theta)} \\
&\leq \iint_{[0, \frac{\pi}{2}]^2} 2^{\frac{\alpha}{2}-1} d\varphi d\theta \\
&= 2^{\frac{\alpha}{2}-3} \pi^2
\end{aligned}$$

故 I 收敛当且仅当 $\alpha > 3$.

(3) $\iint_D \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, 其中 D 为单位圆盘.

作变量替换 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, 则

$$I = \iint_D \frac{r dr}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{dr^2}{(1-r^2)^\alpha} = \pi \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

因此 I 收敛当且仅当 $\alpha < 1$.

(4) $\iint_D \frac{dx dy}{|y-x|^\alpha}$, 其中 $D = [0, 1]^2 \setminus \{(x, y) | x = y\}$.

注意到

$$I = 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x-y)^{-\alpha} dy$$

当 $\alpha = 1$ 时, $I = -2 - 2 \ln 0 = +\infty$, 因此发散

当 $\alpha \neq 1$ 时, $I = 2 \int_0^1 \frac{x^{1-\alpha} dx}{1-\alpha}$, 此时 I 收敛等价于 $\alpha < 1$.

综上, I 收敛等价于 $\alpha < 1$.

(5) $\iiint_D \frac{\ln(x^2+y^2+z^2) dx dy dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, 其中 $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

作变量替换: $\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta \end{cases}$, 由 $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} \right| = r^2 |\sin \varphi|$, 有

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D \frac{r^2 \sin \varphi \ln r^2}{(1+r^2)^\alpha} dr d\varphi d\theta \\
 &= 8\pi \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \ln r dr}{(1+r^2)^\alpha}
 \end{aligned}$$

由比较判别法知, I 收敛等价于 $\alpha > \frac{3}{2}$

$$(6) \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} dx dy$$

作变量替换 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, 则

$$I = \iint \frac{r \cos r dr d\theta}{r^2 + 1} = \int_0^\theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r \cos r dr}{r^2 + 1}$$

由 $\int_0^{+\infty} \frac{r |\cos r| dr}{r^2+1} \geq \int_0^{+\infty} \frac{r \cos^2 r dr}{r^2+1} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{r \cos 2r dr}{r^2+1} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{r^2+1}$ 发散知 I 发散.

3.

设函数 $f(x, y, z)$ 在 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上连续, 且 $\forall (x, y) \in \Omega$, 有 $f(x, y) > 0$. 定义集合: $D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. 要求证明: 当 $\alpha < 1$ 时, 积分 $I = \iiint_D \frac{dx dy dz}{|z - f(x, y)|^\alpha}$ 收敛.

Answer:

当 $\alpha < 1$ 时, $f^{1-\alpha}(x, y)$ 在 Ω 上连续且恒正, 因此 $\exists M > 0$, 使得 $f^{1-\alpha}(x, y) \in (0, M]$ 在 Ω 上恒成立. 从而

$$I = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^{f(x,y)} \frac{dz}{(f(x, y) - z)^\alpha} = \iint_{\Omega} \frac{f^{1-\alpha}(x, y) dx dy}{1 - \alpha} \leq \frac{M}{1 - \alpha}$$

进而 $\iiint_D \frac{dx dy dz}{|z - f(x, y)|^\alpha}$ 收敛, 证毕.