

# 速记

## 记号

wgx体系

写向量一定要打箭头  
 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$  表示行列式  $\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|$  表示其绝对值

场论

- 梯度场:  $\nabla f = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
- 散度场:  $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- 旋度场:  $\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- 拉普拉斯算子:  $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

## 曲线曲面积分的联系

维度	散度 (Gauss公式)	旋度 ( Stokes公式) (二维情形下又称 Green公式)
二维	平面闭区域 $\sim$ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{div } \boldsymbol{F}) d\sigma_{xy} = \oint_{\delta\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds$	平面闭区域 $\sim$ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{rot } \boldsymbol{F}) d\sigma_{xy} = \oint_{\delta\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$
三维	空间闭区域 $\sim$ 边界 $\iiint_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{F}) dv = \iint_{\delta\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$	空间双侧曲面 $\sim$ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{rot } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_{\delta\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$

- $\boldsymbol{n} ds = (dy, -dx)$
- $\boldsymbol{\tau} ds = (dx, dy)$  or  $(dx, dy, dz)$
- $\boldsymbol{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy)$
- $\text{rot } \boldsymbol{F} \cdot d\sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{bmatrix}$
- $\text{rot } \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \begin{bmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$

两个公式在二维实质上等价

## 反例

二重积分与累次积分的存在性问题

(1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = \frac{1}{k}, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

固定  $x$  后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.

(2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [-1, 1]^2, f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ y, & \text{o.w.} \end{cases}$$

(3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D=[0,1]^2, f=\begin{cases} 1, & x,y\text{都是既约分数且分母相等,}\\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

广义重积分的敛散性

两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:

$$D=(0,1)^2, f(x,y)=\begin{cases} 2^n, & x=\frac{2m-1}{2^n}<1, 0<y\leq\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N},\\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$g(x,y)=f(x,y)+f(y,x)$$

在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:

$$D=(0,1)^2, f(x,y)=\begin{cases} -\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1,\\ \frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1\\ 0 & x=y \end{cases}$$

单连通区域积分与路径无关的充要条件

全微分 $du=Pdx+Qdy, \forall (x,y)\in D$ 存在 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y)$ , 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ , 这是因为 $\arctan\frac{y}{x}$ 不能在整个环形区域上可微.

数值相关

常用导数

- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arctanh} x)'=\frac{1}{1-x^2}$
- $(\operatorname{arcsinh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\operatorname{arccosh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Γ 函数与 B 函数

函数	$\Gamma(x)$	$B(x,y)$
定义	$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, x>0$	$B(x,y)=\int_0^1t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t, x>0, y>0$
性质 1	$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$	$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta\ (t=\sin^2\theta)$
性质 2	$\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}s^{2x-1}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\ (t=s^2)$	$B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s\ (t=\frac{s}{1+s})$
性质 3	$\Gamma(x)\in C^\infty(0,+\infty)$	$B(x,y)\in C^\infty((0,+\infty)\times(0,+\infty))$
性质 4	$\Gamma(x)$ 和 $\ln\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格凸	
关系	$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (累次积分转化为重积分后极坐标变换)	$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

第十五章 重积分

二重积分

§ 15.1

曲顶柱体体积

§ 15.1.1

- def: 曲顶为  $z = f(x, y)$ , 定义在  $D \subset \mathbb{R}^2$  上, 对  $D$  作划分  $D = \cup_{i \in [n]} \{\Delta\sigma_i\}$ . 任取  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i, \Delta v_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ , 记  $d_i = \text{diam}(\Delta\sigma_i), d = \max d_i$ , 则定义:

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i \in [n]} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

## 平面集合面积

§ 15.1.2

- def: 对集合  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A^\circ$  为内部,  $\overline{A}$  为闭包, 做间隔为  $\frac{1}{2^n}$  的网格线划分, 内部小块之和为  $Q_n^-$ , 包含边界和内部的小块之和为  $Q_n^+$ , 记面积为  $mQ_n^-, mQ_n^+$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} mQ_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} mQ_n^+$ , 则称  $A$  **可求面积**, 此极限值记为  $mA$
- theorem: 平面点集  $A$  可求面积  $\Leftrightarrow \delta A$  面积为 0.

## 二重积分的定义

§ 15.1.3

- def: 若平面有界有面积集合  $D$  的  $\forall \Delta = \{\Delta\sigma_i\}_n, \forall (\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ , 对应的 Riemann 和极限存在且唯一, 则称  $f$  在  $D$  上可积,  $I$  为  $D$  上**二重积分**.

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i \in [n]} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

- theorem: 有界闭区域上可积函数必有界

$\|\Delta\| \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$ , 反之不然.

## 二元函数可积

§ 15.1.4

- def, 记  $M_i = \sup_{\Delta_i} f(x, y), m_i = \inf_{\Delta_i} f(x, y), \omega_i = M_i - m_i, \overline{S}(f, \Delta) = \sum M_i \Delta\sigma_i$  为**达布大和**,  $\underline{S}(f, \Delta) = \sum m_i \Delta\sigma_i$  为**达布小和**

此处  $\sum$  与  $\sup, \inf$  可交换  
对  $\Delta$  细化, 大和不增, 小和不减  
划分1的小和<划分2的大和

- def: **上,下积分**
- theorem: (**Darboux 定理**)

$$f(x, y) \in R(D) \Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \omega_i \Delta\sigma_i = 0$$

- 只计算内部区域块也对.

## 二元可积函数类

§ 15.1.5

- theorem:  $E \subset D$  (有界有面积),  $mE = 0, f(x, y) \in C(D \setminus E)$ , 则  $f \in R(D)$ .
  - 有界闭区域上连续函数和分片连续函数可积.
  - 两可积函数的乘积可积
- theorem:  $m \leq f(x, y) \leq M, \varphi(z) \in C([m, M])$ , 则  $f \in R(D) \Rightarrow \varphi \circ f \in R(D)$

涉及到有理数稠密等的函数可积性问题, 直接构造划分用振幅解决

## 化二重积分为累次积分

§ 15.1.7

- 设  $f \in R(D), D = [a, b] \times [c, d]$ 
  - 若  $\forall x \in [a, b], I = \int_c^d f(x, y) dy \exists$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ 
    - 将  $c, d$  替换成在  $C([a, b])$  的元素也成立
  - 若  $f \in C(D)$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \dots$
  - 若  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$
- theorem: (重积分第一中值定理) 若  $f \in C(D), g \in R(D), g \geq 0$ , 则  $\exists \xi \in D$  s.t.

$$\int_D f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{v} = f(\boldsymbol{\xi}) \int_D g(\mathbf{x})d\mathbf{v}$$

#### #### 二重积分与累次积分的存在性问题

(1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = \frac{1}{k}, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

固定  $x$  后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.

(2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [-1, 1]^2, f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ y, & \text{o.w.} \end{cases}$$

(3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} 1, & x, y \text{ 都是既约分数且分母相等}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

## 三重积分

§ 15.2

## n重积分

§ 15.3

- $n$  重积分的定义性质等不必赘述, 关注如何计算即可.

连续函数具备大多数好的性质

\_\_\_ ## 变量替换

§ 15.4

## 二重积分的变量替换

- def: 设变量替换  $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, D_{xy} \rightarrow D_{uv} = T(D_{xy})$  是微分同胚, 即  $T \in C^1(D_{uv}), \det J_T \neq 0$ . (这导致  $T^{-1} \in C^1(D_{xy})$ ). 其中  $D_{xy}, D_{uv}$  边界可求长, 区域可求面积. 则  $T$  满足:
- $T$  把  $\delta D_{xy}$  映满边界  $\delta D_{uv}$

$\delta\Omega$  的正向: 逆时针, 沿着边界走动时, 区域在左边.

- theorem: 设同胚变换  $T$  满足上述条件,  $T$  的 Jacobi 行列式  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \det J_T \neq 0, f(x, y) \in R(D_{xy})$ , 则:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) d\sigma_{xy} = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\| d\sigma_{uv}$$

注意极坐标要挖一条缝,  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 极坐标变化隐含了一个极限过程 (穷竭列  $D_{r\theta}^\epsilon, D_{xy}^\epsilon$ )

## 多重积分的变量替换

定理概念略

普遍来说定义域好看了积分会变复杂, 积分好看了定义域会变复杂. 但是出题往往会根据定义域来凑积分, 因为定义域更直观, 因此做题还是定义域变换优先, 比如变成某种长方体. #### 常用坐标系的微元

柱面坐标系:  $(r, \theta, z)$ , 平面极坐标系:  $(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

球面坐标系:  $(r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta, |J| = r^2 \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

三角锥变平行多面体:  $0 \leq x_i, \sum x_i \leq 1 \Rightarrow u_i \in [0, 1]$

$$\begin{cases} x_1 = u_1(1 - u_2) \\ x_2 = u_1 u_2(1 - u_3) \\ \dots \\ x_{n-1} = u_1 u_2 \dots u_{n-1}(1 - u_n) \\ x_n = u_1 u_2 \dots u_n \end{cases}, |J| = \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{n-i}$$

积分限是什么? 先定最外层, 因为最外层是常数, 对于确定的最外层变元, 逐层确定内层变元的范围

## 广义重积分

§ 15.5

- def: 设  $D \subset \mathbb{R}^2, \forall R > 0, D \cap \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$  可求面积,  $\{D_n\}_{n=1}^\infty$  是一列有界可求面积闭集, 满足
  - $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$
  - $\forall$  有界闭集  $F \subset D, \exists m \in \mathbb{N}$  s.t.  $F \subset D_m$
 则称  $\{D_n\}$  是  $D$  的一个**穷竭列**.
- theorem: 区域的两个穷竭列将互相嵌套式包含
- def: 如果  $f$  在  $D$  上任何可求面积的有界闭子区域上可积, 则称  $f$  在  $D$  上**内闭可积**
- def: 设  $f$  在  $D$  上内闭可积, 若  $\forall \{D_n\}$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$  存在唯一, 则称  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  收敛, 并称此极限为  $f$  在  $D$  上的**广义重积分**:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$$

- theorem:  $f$  在区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上内闭可积, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ 收敛} \Leftrightarrow \iint_D |f(x, y)| d\sigma \text{ 收敛}$$

广义积分只有绝对收敛, 没有条件收敛. 这是因为使用了穷竭列, 不需要列中闭集是联通的, 而不是像一元函数那样使用连续递增的子区间列.

比如  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  用穷竭列定义发散, 取  $D_n = [0, 2k_{n-1}\pi] \cup \left(\bigcup_{k=k_{n-1}}^{k_n} [2k\pi, 2k\pi + \pi]\right)$ . 这里是因为原积分条件收敛, 正部分发散,  $\{k_n\}$  可被取出.

- theorem: 设  $f(x, y) \geq 0$  在  $D$  上内闭可积, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  收敛的充要条件是存在  $D$  的一个穷竭列  $\{D_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$  存在. 且这两者有一存在时, 二者相等
  - 若  $\iint_D g(x, y) d\sigma$  发散, 则任意的穷竭列  $\iint_{D_n} |g(x, y)| d\sigma = +\infty$

因为穷竭列是相互控制的

注意这个针对非负函数, 一般函数可能存在一个穷竭列收敛, 另一个发散的情况### 二元广义积分与累次广义积分的关系

§ 15.5.3

- theorem:  $f$  在矩形区域  $D = [a, b] \times [c, d]$  (可无限, 可暇) 内闭可积.
  - 若  $\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx$  收敛, 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  收敛且  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) d\sigma$
  - 若  $\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx, \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$  中有一个  $+\infty$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  发散

在广义矩形区域上, 若两累次积分有一绝对收敛, 则二重积分收敛. 反之则不真. 而不广义的累次积分和二元积分没有相互决定的关系.

两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} 2^n, & x = \frac{2m-1}{2^n} < 1, 0 < y \leq \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$g(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & x = y \end{cases}$$

## 广义积分的变量替换

§ 15.5.4

- theorem : 对于微分同胚,  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) d\sigma_{xy}$  和  $\iint_{D_{uv}} f(x, y) |J(u, v)| d\sigma_{uv}$  同敛散, 且收敛时二者相等

本质上是穷竭链的映射

这里极坐标变换也适用

二重反常积分的敛散性不仅依赖于被积函数, 还依赖于积分区域的形状

判断广义积分敛散性的方法: 变量替换, 比较判别法, 构造穷竭列 (都是累次积分绝对收敛)\_\_\_\_

# 第十六章 曲线积分与曲面积分

## 基本概念

§ 16.0 这一节其实是对第七章的复习

- def: 平面曲线  $L$  的参数方程为  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leq t \leq b$ , 若  $x(t), y(t)$  在  $[a, b]$  上连续, 则称  $L$  为**连续曲线**
- def: 若  $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ , 则称  $L$  为**简单曲线**
- def: 若  $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$  但  $(x(a), y(a)) \neq (x(b), y(b))$ , 则称  $L$  为**简单闭曲线**

## 曲线弧长

- def: 记  $\sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$ , 其中  $M_i$  是  $\Gamma$  上的分点,  $\Delta_\Gamma$  是分点集, 若  $\sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) < +\infty$ , 则称  $\Gamma$  **可求长**, 记为  $|\Gamma|$
- def:  $\Gamma$  的每一个分割  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$  对应了参数区间  $[a, b]$  的一个分割  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , 称  $(\Delta_\Gamma, \Delta_t)$  为  $\Gamma$  的**分割对**
  - 连续非闭合曲线上分割对"尺度小"是一致的, 即  $\lambda(\Delta_\Gamma) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda(\Delta_t) \rightarrow 0$
- theorem:  $\Gamma$  可求长的充要条件是  $x(t), y(t) \in BV[a, b]$ 
  - $\sup_{\forall \Delta} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty$ , 记为  $f \in BV[a, b]$ ,  $f$  为**有界变差函数**
  - 有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差
  - 有界变差函数有界
- 对于非闭合可求长的连续曲线(段)  $\Gamma$ , 弧长为:

$$|\Gamma| = \sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \lim_{\lambda_\Delta \rightarrow 0} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- 对于可分割成至多可列个非闭合的连续曲线弧段的平面连续曲线, 定义其弧长为各段弧长之和, 也即:

$$|\Gamma| = \sum_{i=1}^n |\Gamma_i| = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- 设  $x(t), y(t) \in C^1[a, b], x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ , 则  $\Gamma$  最多时有有限个闭合点.

## I型曲线积分

§ 16.1

- def: 设  $\Gamma$  是平面可求长曲线,  $f(x, y)$  在  $\Gamma$  上有定义, 若对任意分割的任意取点,  $\lim_{\lambda(\Delta_\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i)) \Delta s_i$  存在且唯一, 则称此极限为  $f(x, y)$  在  $\Gamma$  上的**第一型曲线积分**, 记为  $\int_\Gamma f(x, y) ds$ . 对简单闭曲线, 记为  $\oint_\Gamma f(x, y) ds$ .
  - $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq 0$
- theorem:  $\Gamma$  是可求长简单曲线且  $f(x, y) \in C(\Gamma)$ , 则  $\int_\Gamma f(x, y) ds \geq 0$

$$\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- property:
  - $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y) ds$
  - $\int_\Gamma (k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)) ds = k_1 \int_\Gamma f(x, y) ds + k_2 \int_\Gamma g(x, y) ds$
  - $\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y) ds \Leftrightarrow \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  ## Ⅱ型曲线积分 § 16.2
- def: 设  $\Gamma$  是有向非闭合连续线段,  $A, B$  分别表示起点和终点. 定义在  $\widehat{AB}$  上的矢量函数  $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  连续, 若对任意分割的任意取点和  $S_n(\Delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i$ , 极限  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n(\Delta)$  存在, 则称此极限为  $\mathbf{F}$  沿  $\Gamma$  的**第二型曲线积分**, 记作  $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  或  $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ .

第二型曲线积分是有积分方向的,  $d\mathbf{s}$  与第一型曲线积分的  $ds$  不同  
被积函数是矢量函数, 被积元是矢量, 积分结果是标量

- property:
  - $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\widehat{BA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
  - $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\widehat{AC}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\widehat{CB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
  - 闭路积分:  $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
  - $|\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}| \leq \int_\Gamma \|\mathbf{F}\| ds$
- 若使用余弦计法:  $(dx, dy, dz) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds$ ,  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ , 其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  都是  $x, y, z$  的连续函数, 则

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

- theorem: 设  $\Gamma$  是有向光滑曲线 (即  $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$ ,  $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$ ),  $\mathbf{F}(x, y, z) \in C(\Gamma)$ , 则第二型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

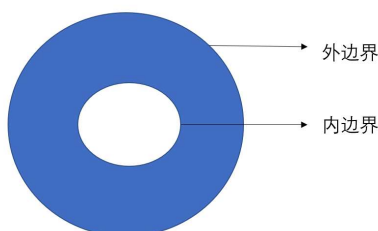
- theorem:  $\Gamma$  是  $D$  内简单闭曲线, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists$  节点在  $\Gamma$  上的闭折线  $\Lambda, D_\Gamma, D_\Lambda$  分别为曲线围成的有界闭区域. 使得.

$$\left| \oint_\Lambda \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| < \epsilon, |D_\Lambda| - |D_\Gamma| < \epsilon$$

规定  $\delta D$  的微元的正向是区域在左侧## 两类线积分之间的联系  
§ 16.3

## Green 公式

§ 16.3.1



- theorem: (Green 公式) 平面闭区域由有限条可求长简单闭曲线围成,  $\delta D$  表示正向边界,  $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \in C(D)$ . 则有:

$$\oint_{\delta D} Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

边界正向选取: 内顺外逆

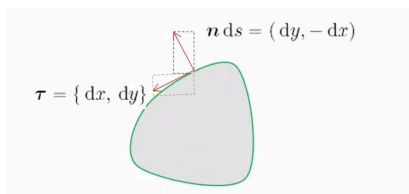
Green 公式是联系平面积分与边界线积分的桥梁

非闭曲线上的线积分可以变成闭曲线上线积分再用 Green 公式

- Green 公式的向量形式:

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot ds = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dx, dy) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \tau ds = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

其中  $\tau$  表示正向单位切向量,  $\tau = (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{(dx, dy)}{ds}$



- theorem : (二维 Stokes 公式)  $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x} \in C(D)$ . 则有:

$$\oint_{\partial D} (P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)) ds = \oint_{\partial D} \{P, Q\} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) d\sigma$$

其中  $\mathbf{n}$  表示外法向量, 两个余弦内角是其分别与  $x, y$  轴正向的夹角.

$\mathbf{n} \cdot ds = (dy, -dx)$ , 所以两个公式其实就是互换  $P, Q$

Green 公式描述  $P, Q$  在切向量上的投影, 二维 Stokes 公式描述  $P, Q$  在法向量上的投影

## wgx物理小课堂

- 流场  $v = (P(x, y), Q(x, y))$
- 点的**旋度**:  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- 边界  $\partial D$  的**环流量**:  $\oint_{\partial D} P dx + Q dy$

边界线上环流量等于区域上各点旋度的叠加.  $\Leftrightarrow$  Green公式

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \tau ds = \iint_D \text{rot } \mathbf{v} d\sigma$$

- 点的**散度**:  $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  (这个没有方向), 单位体积单位时间生出的流量
  - 散(san, 四声)
  - **汇, 源**: 有水漏出, 有水生成的地方
- 边界的**总通量**:  $\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$

边界线上总通量等于区域上各点散度的叠加.  $\Leftrightarrow$  Gauss公式二维情形

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div } \mathbf{v} d\sigma$$

wgx认为这个积分用好了后面都很自然

## 调和函数

- def:  $\Delta u = 0$ , 则称  $u$  为**调和函数**.
  - $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$
- theorem : (Green 第二公式)  $D$  由有限条逐段光滑曲线围成,  $u, v \in C^2(D)$ , 则有

$$\begin{aligned} \iint_D \Delta u d\sigma &= \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\ \iint_D v \Delta u d\sigma &= - \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma + \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\ \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) d\sigma &= \oint_{\partial D} \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$$

## 平面曲线积分与路径无关的条件

§ 16.3.2

- theorem :  $\forall A, B \in D, \int_{AB} P dx + Q dy$  与路径无关的充要条件是任意闭曲线  $C \subset D$  均有  $\oint_C P dx + Q dy = 0$

这是区域  $D$  性质, 不是指定两点的性质.



- theorem:  $\forall A, B \in D, P, Q \in C(D), \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$  与路径无关的充要条件是  $\exists$  定义在  $D$  上的可微函数  $u$ , 使得  $du = Pdx + Qdy, \forall (x, y) \in D$

积分与路径无关的充要条件是, 在整个区域上, 被积表达式是一个全微分.

- theorem: 设  $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ , 在单连通区域上连续, 则 "...与路径无关"  $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)$$

这个条件的充分性由 Green 公式和单连通区域的定义保证.

全微分  $du = Pdx + Qdy, \forall (x, y) \in D$  存在  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)$ , 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的  $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , 这是因为  $\arctan \frac{y}{x}$  不能在整个环形区域上可微.

关于被积表达式是否是全微分, 有三种方法确定, 直接积, 积单变量, 直接观察.

## 曲面积分

§ 16.4

### 曲面面积

§ 16.4.1

- theorem: 若曲面由  $z = f(x, y)$  给定, 投影区域为  $D_{xy}$ , 则

$$dS = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} d\sigma_{xy}$$

- def: (参数式曲面)  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , 均  $\in C^1$ , 且  $A = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, B = \dots$  不同时为 0.

- theorem:  $\tau_1 = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \tau_2 = \dots, E = |\tau_1|^2, G = |\tau_2|^2, F = |\tau_1 \cdot \tau_2|$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\sigma_{uv} = \sqrt{EG - F^2} d\sigma_{uv}$$

### I型曲面积分

§ 16.4.2

- def: 设  $\Sigma$  是分片光滑曲面,  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ , 为 **I型曲面积分**.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} d\sigma_{xy} \\ &= \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} d\sigma_{uv} \end{aligned}$$

### II型曲面积分

§ 16.4.3

- def: 光滑曲面  $\Sigma$  (连续可微函数表达的曲面) 上任取一点  $M_0$ . 选定在  $M_0$  点的  $\Sigma$  的一个法向量朝向, 当  $M_0$  点连同法向量沿  $\Sigma$  上任意闭曲线连续滑行一周后回到初始位置时法向量的方向没变, 则称  $\Sigma$  为 **双侧曲面**. 否则, 称为 **单侧曲面**, (即存在某点, 某闭曲线, 使得滑行一周回来后, 法向量和原来此点的法向量方向相反.)



- def: 设  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  是分片光滑可求面积的双侧曲面, 若它有边界, 则它的边界是由有限条光滑曲面组成. 给定  $\Sigma$  一侧,  $\Sigma$  上每点  $(x, y, z)$  处的该侧的单位法向量记为  $\mathbf{n}(x, y, z)$ , 向量函数  $\mathbf{F}(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为  $\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$ , 为 **II型曲面积分**.

$\mathbf{F}$  和  $\mathbf{n}$  夹角是锐角, 则  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  是正的, 反之是负的. 这里  $dS$  是恒正的.

闭曲面上积分记为  $\oiint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$

如果把  $\mathbf{n} dS$  看作向量, 记为  $d\mathbf{S}$ , 则  $d\mathbf{S} = (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS)$

已知  $|\cos \alpha| dS = d\sigma_{yz}, |\cos \beta| dS = d\sigma_{xz}, |\cos \gamma| dS = d\sigma_{xy}$ . 而这与  $d\mathbf{S}$  中的  $\cos \alpha dS$  有别, 因此记  $dydz = \cos \alpha dS, dzdx = \cos \beta dS, dxdy = \cos \gamma dS$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} F(x, y, z) \mathbf{n} dS &= \iint_{\Sigma} F(x, y, z) dS \\ &\stackrel{\text{与I型积分的联系}}{=} \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\ &\stackrel{\text{新形式}}{=} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy\end{aligned}$$

wgx: 如果只是记忆公式, 而不理解这些都是二型曲面积分的形式, 则对思考问题没有多少帮助. 事实也的确如此, 微元是否取绝对值与计算中分类的数目有关.

这里的  $dxdy$  与二重积分中的有本质不同, 考试中混用可能导致老王下狠手, 后者建议用  $\sigma_{xy}$

## 两类面积分之间的联系

- theorem: (Gauss 公式), 有界闭  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , 其边界曲面  $(\partial\Omega)$  分片光滑,  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C^1(Q)$ , 则有

$$\oiint_{\partial\Omega} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

- theorem: (Stokes 公式), 设光滑双侧曲面  $\Sigma$  有界有边含于空间区域  $\Omega$ , 其边界  $\partial\Sigma$  由有限条分段光滑曲线组成, 并且  $\Sigma$  的正侧与边界  $\partial\Sigma$  (空间闭曲线) 正向按右手法则取定, 函数  $P, Q, R \in C^1(\Omega)$ , 则有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\end{aligned}$$

其中

$$\oint_{\partial\Sigma} P dx = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right)$$

换一个好记的写法:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial\Sigma} P dx + Q dy + R dz \\ = \iint_{\Sigma} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix} dS \\ = \iint_{\Sigma} \begin{bmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix}\end{aligned}$$

## 散度与旋度

§ 16.5

- def: 矢量算子  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- def: 设流速为  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , 则定义  $\vec{F}$  的**旋度**为

$$\begin{aligned}\text{rot} \vec{F} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Stokes 公式的向量形式

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- def: 定义  $\vec{F}$  的**散度**为

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$$

注意  $\nabla f$  和  $\nabla \cdot \vec{F}$  的区别, 前者是梯度

Gauss 公式的向量形式

$$\iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dv$$

- def: 如果区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  内的任何简单闭曲面所围的体都完全属于  $\Omega$ , 则称其为**单连通区域** (没有空腔)
- theorem: (散度定理, 空间面积分与面位无关) 对单连通区域  $\Omega$ , 任意点的散度为 0  $\Leftrightarrow$  任意闭曲面上通量为 0  $\Leftrightarrow$  II 型曲面上通量只与边界有关与面位无关

为什么 stokes 公式是对的? 因为旋通量与面位无关, 换句话说旋度的散度为 0:  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$

- def: 如果区域  $\Omega$  内的任何闭曲线都可以张成(至少)一张完全属于  $\Omega$  的曲面, 则称  $\Omega$  为 **线单连通区域** (区域内任何简单闭曲线都可以连续收缩成一点)

球壳线单连通, 但不单连通. 轮胎单连通, 但不线单连通

- theorem: (空间线积分与路径无关)  $\Omega$  是线单连通区域, 两点间积分与路径无关  $\Leftrightarrow$  存在可微函数  $u$  的全微分是  $Pdx + Qdy + Rdz \Leftrightarrow$  旋度处处为 0.

路径流量与路径无关  $\Leftrightarrow$  有势场  $\Leftrightarrow$  无旋场

## 第十七章 含参变量积分

### 含参变量的定积分

§ 17.1

- def: 所谓**含参变量定积分**,  $x$  是参变量

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

- lemma: 设  $f \in C(D)$ ,  $F(x, y) = \int_c^y f(x, t) dt$ ,  $y \in [c, d]$ , 则  $F(x, y) \in C(D)$  (二元连续函数对其中一个变量做变上限积分, 则结果是二元连续函数)
- theorem:  $f \in C(D) \Rightarrow I(x) \in C([a, b])$ , 且此时**对参数取极限与积分运算可交换**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy$$

- theorem:

$$f \in C(D) \Rightarrow J(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \in C([a, b])$$

- theorem:  $f \in C(D)$ ,  $f'_x \in C(D) \Rightarrow I(x) \in C^1([a, b])$ , 且**此时对参数求导与积分运算可交换**

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, t) dt = \int_c^d \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

- theorem:  $f \in C(D)$ ,  $f'_x \in C(D)$ ,  $\psi, \varphi$  在  $[a, b]$  可微,  $c \leq \psi, \varphi \leq d \Rightarrow J(x) \in C^1([a, b])$ , 且此时

$$J'(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f'_x(x, t) dt - f(x, \psi(x))\psi'(x) + f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

条件	含参变量积分	含参变量变限积分
$f(x, y) \in C(D)$	$I(x) \in C([a, b])$ , 积分与 $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 可交换, 两累次积分顺序可交换	$J(x) \in C([a, b])$
$f \in C(D)$ , $f'_x \in C(D)$	$I(x) \in C^1([a, b])$ , 积分与 $\frac{d}{dx}$ 可交换	$J(x) \in C^1([a, b])$ , 求导结果另行计算

### 含参变量的广义积分

§ 17.2

## 一致收敛

### § 17.2.1

- def: 若  $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 > c$  s.t.  $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \epsilon, \forall x \in [a, b], \forall A > A_0$ , 则称  $\int_A^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x$  在  $[a, b]$  上**一致收敛**.

我认为所谓的“一致”就是对于某个参数  $x$  的取值范围共用一个  $\epsilon - N$

将  $[a, b]$  换成  $\mathbb{R}$  的一般区间同样定义

Cauchy 一致收敛: 一致收敛等价于在  $[A', A'']$  上的积分  $< \epsilon$

Weiersrass 判别法: 找一个控制函数夹住  $f$ , 如果该函数一致收敛则  $f$  一致收敛

Dirichlet 判别法:  $f$  一致有界,  $g$  关于  $y$  单调且  $g(x, y) \rightarrow 0$ , 则  $\int f g dy$  一致收敛

Abel 判别法:  $f$  一致收敛,  $g$  单调有界, 则  $\int f g dy$  一致收敛

- theorem: (Dirichlet 判别法) 若
  - $\exists M > 0$  s.t.  $\left| \int_c^A f(x, y) dy \right| \leq M, \forall A > c, \forall x \in E$ , 即关于  $x$  及  $A$  **一致有界**
  - $\forall x \in E, g(x, y)$  关于  $y$  单调, 且  $g(x, y) \rightarrow 0 (y \rightarrow +\infty, x \in E)$则  $\int_c^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dy$  对  $x \in E$  一致收敛
- theorem: (Abel 判别法) 若
  - $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in E$  一致收敛
  - $\forall x \in E, g(x, y)$  关于  $y$  单调, 且  $\exists M > 0$  s.t.  $|g(x, y)| \leq M, \forall x \in E, \forall y \in [c, +\infty)$则  $\int_c^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dy$  对  $x \in E$  一致收敛.

## 含参变量无穷积分的性质

### § 17.2.2

- def: 若  $\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$  关于  $x \in E$  一致收敛, 则称  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in E$  **绝对一致收敛**.

一致收敛  $\Rightarrow$  绝对一致收敛

- theorem: (将无穷积分理解为函数列的极限)  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in E$  一致收敛的充分必要条件是, 对任意的满足条件  $c < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$  的序列  $\{t_n\}$ , 函数列  $F_n(x) = \int_c^{t_n} f(x, y) dy$  关于  $x \in E$  一致收敛
- theorem: (含参变量无穷积分的连续性) 设  $f$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续, 且  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in E$  一致收敛, 则  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  在  $E$  上连续
- theorem: (积分可交换) 设  $f$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续, 且  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in [a, b]$  一致收敛, 则

$$\int_a^b \left( \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^{+\infty} \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

- theorem: (可导) 设  $f(x, y), f'_x(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续, 且  $\int_c^{+\infty} f'_x(x, y) dy$  关于  $x \in [a, b]$  一致收敛, 且存在  $x_0 \in [a, b]$  使得  $\int_c^{+\infty} f(x_0, y) dy$  收敛, 则
  - $J(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  在  $[a, b]$  上一致收敛
  - $J'(x) = \int_c^{+\infty} f'_x(x, y) dy$

可导和可交换是照搬含参变量定积分的性质

- theorem: (类似 Dini 定理) 设  $f(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续非负,  $\forall x \in [a, b], \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于收敛, 且  $I(x) \in C[a, b]$ , 则  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in [a, b]$  一致收敛

非负函数逐点收敛则一致收敛

- theorem: (关于两个参数的一致收敛) 设  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, \infty)$  上连续, 且  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  关于  $x \in [a, +\infty)$  内闭一致收敛, 且  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  关于  $y \in [c, +\infty)$  内闭一致收敛, 且  $\int_c^{+\infty} \left( \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy$  与  $\int_a^{+\infty} \left( \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx$  有一存在, 则

$$\int_a^{+\infty} \left( \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^{+\infty} \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$$

- theorem: 设  $f(x, y)$  在  $[a, +\infty) \times [c, \infty)$  上连续非负, 且  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  连续, 且  $\int_c^{+\infty} \left( \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy$  与  $\int_a^{+\infty} \left( \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx$  有一存在, 则两者存在且相等

## $\Gamma$ 函数与 B 函数

### § 17.3

Γ 函数

- def :  $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, x>0$
- property :
  - $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
  - $\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}s^{2x-1}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$  (变换 $t=s^2$ )
  - $\Gamma(x)\in C^\infty(0,+\infty)$
  - $\Gamma(x)$  与  $\ln\Gamma(x)$  在  $(0,+\infty)$  上严格凸

B 函数

- def :  $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t, x>0, y>0$
- property:
  - $\mathrm{B}(x,y)=\mathrm{B}(y,x)$
  - $\mathrm{B}(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}\mathrm{B}(x-1,y)$
  - $\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta$  (变换 $t=\sin^2\theta$ )
  - $\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}}\mathrm{d}s$  (变换 $t=\frac{s}{1+s}$ )

Γ 函数与 B 函数的关系

- $\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- (余元公式)  $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\mathrm{B}(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$