

北京大学数学学院期末考试试题

2018 - 2019 学年 第二学期

考试科目: 数学分析 (2) 考试时间: 19 年 06 月 19 日

姓 名: _____ 学 号: _____

本试题共 九 道大题满分 100 分

1. (10') 证明函数列 $\{x^{n+2} - x^n\}$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.
2. (10') 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$. 证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有连续的导函数.
3. (10') 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} x^n$ 的收敛域.
4. (10') 将 $f(x) = \arctan \frac{2x}{2-x^2}$ 展成麦克劳林级数.
5. (10') 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且对任意的非负整数 n 有 $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$, 证明 $f(x) \equiv 0, (x \in [a, b])$.
6. (14') 设 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在原函数. (1) 设该函数列在 $[a, b]$ 上收敛到 $f(x)$. 试问 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否必定存在原函数? (2) 设该函数列在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 试问 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否必定存在原函数? (说明理由)
7. (8') 设 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内能展成麦克劳林级数且该函数列在 $(-1, 1)$ 内闭一致收敛到 $f(x)$. (1) 试问 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 是否一定可导? (2) 如果 (1) 的答案是肯定的, 是否 $\{f'_n(x)\}$ 在 $(-1, 1)$ 内闭一致趋于 $f'(x)$? (说明理由)
8. (16') 设 $f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi]$. (1) 将 $f(x)$ 展成傅里叶级数; (2) 求该级数在 $[0, 2\pi]$ 上的和函数; (3) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$; (4) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
9. (12') 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, (0 < p < \frac{1}{2})$. (1) 证明该三角级数在 $[0, 2\pi]$ 上不一致收敛; (2) 试问该三角级数是否为 $f(x)$ 的傅里叶级数?