

速记

记号与数值

wgx体系

写向量一定要打箭头
 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 表示行列式 $\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|$ 表示其绝对值

场论

- 梯度场: $\nabla f = \text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
- 散度场: $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$
- 旋度场: $\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$
- 拉普拉斯算子: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

常用导数

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arctanh } x)' = \frac{1}{1-x^2}$
- $(\text{arcsinh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $(\text{arccosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

题型1：求积分

- 求累次积分
- 求线积分
 - 一类 (ds)
 - $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$
 - 二类 (dx, dy)
 - 平面：二维Stokes公式(Green公式)
 - 空间：三维Stokes公式
- 求面积分
 - 一类 (dσ)
 - $d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv$
 - 二类 (dxdy)
 - 平面：二维Gauss公式
 - 空间：三维Gauss公式

维度	散度 (Gauss公式)	旋度 (Stokes公式) (二维情形下又称 Green公式)
二维	平面闭区域 ~ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{div } \boldsymbol{F}) d\sigma_{xy} = \oint_{\delta \Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds$	平面闭区域 ~ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{rot } \boldsymbol{F}) d\sigma_{xy} = \oint_{\delta \Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$
三维	空间闭区域 ~ 边界 $\iiint_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{F}) dv = \oiint_{\delta \Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS$	空间双侧曲面 ~ 边界 $\iint_{\Sigma} (\text{rot } \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_{\delta \Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$

- $\boldsymbol{n} ds = (dy, -dx)$
- $\boldsymbol{\tau} ds = (dx, dy)$ or (dx, dy, dz)
- $\boldsymbol{n} dS = (dydz, dzdx, dxdy)$
- $\text{rot } \boldsymbol{F} \cdot d\sigma_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{bmatrix}$
- $\text{rot } \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \begin{bmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$

题型2：反例

二重积分与累次积分的存在性问题

(1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = \frac{1}{k}, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

固定 x 后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.

(2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [-1, 1]^2, f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ y, & \text{o.w.} \end{cases}$$

(3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} 1, & x, y \text{ 都是既约分数且分母相等}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

广义重积分的敛散性

两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} 2^n, & x = \frac{2m-1}{2^n} < 1, 0 < y \leq \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$g(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & x = y \end{cases}$$

单连通区域积分与路径无关的充要条件

全微分 $du = Pdx + Qdy, \forall (x, y) \in D$ 存在 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)$. 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的 $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 这是因为 $\arctan \frac{y}{x}$ 不能在整个环形区域上可微.

题型3 穷竭列

- def: 设 $D \subset \mathbb{R}^2, \forall R > 0, D \cap \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 可求面积, $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列有界可求面积闭集, 满足
 - $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D$
 - \forall 有界闭集 $F \subset D, \exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $F \subset D_m$
 则称 $\{D_n\}$ 是 D 的一个**穷竭列**.
- theorem: 区域的两个穷竭列将互相套娃式包含
- def: 如果 f 在 D 上任何可求面积的有界闭子区域上可积, 则称 f 在 D 上**内闭可积**
- def: 设 f 在 D 上内闭可积, 若 $\forall \{D_n\}$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$ 存在唯一, 则称 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 收敛, 并称此极限为 f 在 D 上的**广义重积分**:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$$

题型4 敛散性判断

- 优先使用穷竭列
- 重积分
 - 一次积分存在 + 重积分存在 \Rightarrow 二次积分存在且等于重积分

- 广义重积分
 - 重积分收敛与绝对收敛等价
 - 广义矩形上, 若两累次积分有一绝对收敛, 则二重积分收敛
 - 广义矩形上, 若两累次积分有一"绝对"发散, 则二重积分发散
- 含参变量广义积分
 - 证明
 - Cauchy 一致收敛 \Rightarrow 一致收敛
 - Weiersrass 判别法: 找一个控制函数夹住 f , 如果该函数一致收敛则 f 一致收敛
 - Dirichlet 判别法: f 一致有界, g 关于 y 单调且 $g(x, y) \rightrightarrows 0$, 则 $\int f g d y$ 一致收敛
 - Abel 判别法: f 一致收敛, g 单调有界, 则 $\int f g d y$ 一致收敛
 - 性质
 - 一致收敛 \Rightarrow 绝对一致收敛
 - 广义积分一致收敛 \Leftrightarrow 函数列一致收敛
 - 一致收敛 \Rightarrow 连续, 可导, 可交换
 - 非负函数逐点收敛则一致收敛 (Dini定理)

题型5 算子题

- $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$
- $\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$

题型6 Γ 函数与 B 函数

函数	$\Gamma(x)$	$B(x, y)$
定义	$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$	$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0$
性质 1	$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$	$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta (t = \sin^2 \theta)$
性质 2	$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds (t = s^2)$	$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds (t = \frac{s}{1+s})$
性质 3	$\Gamma(x) \in C^\infty(0, +\infty)$	$B(x, y) \in C^\infty((0, +\infty) \times (0, +\infty))$
性质 4	$\Gamma(x)$ 和 $\ln \Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格凸	
关系	$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (累次积分转化为重积分后极坐标变换)	$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

第十五章 重积分

二重积分

§ 15.1

曲顶柱体体积

§ 15.1.1

- def: 曲顶为 $z = f(x, y)$, 定义在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上, 对 D 作划分 $D = \cup_{i \in [n]} \{\Delta \sigma_i\}$. 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta \sigma_i, \Delta v_i \approx f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$, 记 $d_i = \text{diam}(\Delta \sigma_i), d = \max d_i$, 则定义:

$$V = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i \in [n]} f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

平面集合面积

§ 15.1.2

- def: 对集合 $A \subset \mathbb{R}^2, A^\circ$ 为内部, \overline{A} 为闭包, 做间隔为 $\frac{1}{2^n}$ 的网格线划分, 内部小块之和为 $Q_n^-,$ 包含边界和内部的小块之和为 $Q_n^+,$ 记面积为 $mQ_n^-, mQ_n^+,$ 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} mQ_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} mQ_n^+,$ 则称 A 可求面积, 此极限值记为 mA

- theorem : 平面点集 A 可求面积 $\Leftrightarrow \delta A$ 面积为 0.

二重积分的定义

§ 15.1.3

- def : 若平面有界有面积集合 D 的 $\forall \Delta = \{\Delta\sigma_i\}_n, \forall (\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$, 对应的 Riemann 和极限存在且唯一, 则称 f 在 D 上可积, I 为 D 上**二重积分**.

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i \in [n]} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

- theorem : 有界闭区域上可积函数必有界

$\|\Delta\| \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$, 反之不然.

二元函数可积

§ 15.1.4

- def, 记 $M_i = \sup_{\Delta_i} f(x, y)$, $m_i = \inf_{\Delta_i} f(x, y)$, $\omega_i = M_i - m_i$. $\bar{S}(f, \Delta) = \sum M_i \Delta\sigma_i$ 为**达布大和**, $\underline{S}(f, \Delta) = \sum m_i \Delta\sigma_i$ 为**达布小和**

此处 \sum 与 \sup, \inf 可交换
对 Δ 细化, 大和不增, 小和不减
划分1的小和 < 划分2的大和

- def : **上,下积分**
- theorem : (**Darboux 定理**)

$$f(x, y) \in R(D) \Leftrightarrow \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum \omega_i \Delta\sigma_i = 0$$

- 只计算内部区域块也对.

二元可积函数类

§ 15.1.5

- theorem : $E \subset D$ (有界有面积), $mE = 0$, $f(x, y) \in C(D \setminus E)$, 则 $f \in R(D)$.
 - 有界闭区域上连续函数和分片连续函数可积.
 - 两可积函数的乘积可积
- theorem : $m \leq f(x, y) \leq M$, $\varphi(z) \in C([m, M])$, 则 $f \in R(D) \Rightarrow \varphi \circ f \in R(D)$

涉及到有理数稠密等的函数可积性问题, 直接构造划分用振幅解决

化二重积分为累次积分

§ 15.1.7

- 设 $f \in R(D)$, $D = [a, b] \times [c, d]$
 - 若 $\forall x \in [a, b]$, $I = \int_c^d f(x, y) dy \exists$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$
 - 将 c, d 替换成在 $C([a, b])$ 的元素也成立
 - 若 $f \in C(D)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \dots$
 - 若 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$
- theorem : (重积分第一中值定理) 若 $f \in C(D)$, $g \in R(D)$, $g \geq 0$, 则 $\exists \xi \in D$ s.t.

$$\int_D f(x)g(x)dv = f(\xi) \int_D g(x)dv$$

二重积分与累次积分的存在性问题

(1) 二重积分存在并不保证累次积分存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} \frac{1}{k}, & x = \frac{1}{k}, y \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

固定 x 后是狄利克雷函数, 不可积, 但是二重积分存在.

(2) 有累次积分存在, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [-1, 1]^2, f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ y, & \text{o.w.} \end{cases}$$

(3) 累次积分存在且相等, 可能二元积分不存在, 例如:

$$D = [0, 1]^2, f = \begin{cases} 1, & x, y \text{ 都是既约分数且分母相等,} \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

三重积分

§ 15.2

n重积分

§ 15.3

- n 重积分的定义性质等不必赘述, 关注如何计算即可.

连续函数具备大多数好的性质

__ ## 变量替换

§ 15.4

二重积分的变量替换

- def: 设变量替换 $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, D_{xy} \rightarrow D_{uv} = T(D_{xy})$ 是微分同胚, 即 $T \in C^1(D_{uv}), \det J_T \neq 0$. (这导致 $T^{-1} \in C^1(D_{xy})$). 其中 D_{xy}, D_{uv} 边界可求长, 区域可求面积. 则 T 满足:
 - T 把 δD_{xy} 映满边界 δD_{uv}

$\delta\Omega$ 的正向: 逆时针, 沿着边界走动时, 区域在左边.

- theorem: 设同胚变换 T 满足上述条件, T 的 Jacobi 行列式 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \det J_T \neq 0, f(x, y) \in R(D_{xy})$, 则:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) d\sigma_{xy} = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left\| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\| d\sigma_{uv}$$

注意极坐标要挖一条缝, $D_{r\theta} = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, 极坐标变化隐含了一个极限过程 (穷竭列 $D_{r\theta}^\epsilon, D_{xy}^\epsilon$)

多重积分的变量替换

定理概念略

普遍来说定义域好看了积分会变复杂, 积分好看了定义域会变复杂. 但是出题往往会根据定义域来凑积分, 因为定义域更直观, 因此做题还是定义域变换优先, 比如变成某种长方体. ### 常用坐标系的微元

柱面坐标系: (r, θ, z) , 平面极坐标系: (r, θ)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, |J| = r \\ z = z \end{cases}$$

球面坐标系: (r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta, |J| = r^2 \sin \phi \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

三角锥变平行多面体: $0 \leq x_i, \sum x_i \leq 1 \Rightarrow u_i \in [0, 1]$

$$\begin{cases} x_1 = u_1(1 - u_2) \\ x_2 = u_1 u_2(1 - u_3) \\ \dots \\ x_{n-1} = u_1 u_2 \dots u_{n-1}(1 - u_n) \\ x_n = u_1 u_2 \dots u_n \end{cases}, |J| = \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{n-i}$$

积分限是什么? 先定最外层, 因为最外层是常数, 对于确定的最外层变元, 逐层确定内层变元的范围

广义重积分

§ 15.5

- def: 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, $\forall R > 0, D \cap \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 可求面积, $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列有界可求面积闭集, 满足
 - $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$
 - \forall 有界闭集 $F \subset D, \exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $F \subset D_m$
 则称 $\{D_n\}$ 是 D 的一个**穷竭列**.
- theorem: 区域的两个穷竭列将互相嵌套包含
- def: 如果 f 在 D 上任何可求面积的有界闭子区域上可积, 则称 f 在 D 上**内闭可积**
- def: 设 f 在 D 上内闭可积, 若 $\forall \{D_n\}$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$ 存在唯一, 则称 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 收敛, 并称此极限为 f 在 D 上的**广义重积分**:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$$

- theorem: f 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上内闭可积, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ 收敛} \Leftrightarrow \iint_D |f(x, y)| d\sigma \text{ 收敛}$$

广义积分只有绝对收敛, 没有条件收敛. 这是因为使用了穷竭列, 不需要列中闭集是联通的, 而不是像一元函数那样使用连续递增的子区间列.

比如 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 用穷竭列定义发散, 取 $D_n = [0, 2k_{n-1}\pi] \cup \left(\bigcup_{k=k_{n-1}}^{k_n} [2k\pi, 2k\pi + \pi]\right)$. 这里是因为原积分条件收敛, 正部分发散, $\{k_n\}$ 可被取出.

- theorem: 设 $f(x, y) \geq 0$ 在 D 上内闭可积, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 收敛的充要条件是存在 D 的一个穷竭列 $\{D_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) d\sigma$ 存在. 且这两者有一存在时, 二者相等
 - 若 $\iint_D g(x, y) d\sigma$ 发散, 则任意的穷竭列 $\iint_{D_n} |g(x, y)| d\sigma = +\infty$

因为穷竭列是相互控制的

注意这个针对非负函数, 一般函数可能存在一个穷竭列收敛, 另一个发散的情况### 二元广义积分与累次广义积分的关系

§ 15.5.3

- theorem: f 在矩形区域 $D = [a, b] \times [c, d]$ (可无限, 可暇) 内闭可积.
 - 若 $\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx$ 收敛, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 收敛且 $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) d\sigma$
 - 若 $\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)| dx, \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$ 中有一个 $+\infty$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 发散

在广义矩形区域上, 若两累次积分有一绝对收敛, 则二重积分收敛. 反之则不真. 而不广义的累次积分和二元积分没有相互决定的关系.

两累次积分均发散但二重积分收敛的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} 2^n, & x = \frac{2m-1}{2^n} < 1, 0 < y \leq \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$g(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

在不加绝对值时, 存在累次积分收敛而二元广义积分发散的例子:

$$D = (0, 1)^2, f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & x = y \end{cases}$$

广义积分的变量替换

§ 15.5.4

- theorem : 对于微分同胚, $\iint_{D_{xy}} f(x, y) d\sigma_{xy}$ 和 $\iint_{D_{uv}} f(x, y) |J(u, v)| d\sigma_{uv}$ 同敛散, 且收敛时二者相等

本质上是穷竭链的映射

这里极坐标变换也适用

二重反常积分的敛散性不仅依赖于被积函数, 还依赖于积分区域的形状

判断广义积分敛散性的方法: 变量替换, 比较判别法, 构造穷竭列 (都是累次积分绝对收敛)_____

第十六章 曲线积分与曲面积分

基本概念

§ 16.0 这一节其实是对第七章的复习

- def: 平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leq t \leq b$, 若 $x(t), y(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则称 L 为**连续曲线**
- def: 若 $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$, 则称 L 为**简单曲线**
- def: 若 $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ 但 $(x(a), y(a)) \neq (x(b), y(b))$, 则称 L 为**简单闭曲线**

曲线弧长

- def: 记 $\sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$, 其中 M_i 是 Γ 上的分点, Δ_Γ 是分点集, 若 $\sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) < +\infty$, 则称 Γ **可求长**, 记为 $|\Gamma|$
- def: Γ 的每一个分割 $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ 对应了参数区间 $[a, b]$ 的一个分割 $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, 称 $(\Delta_\Gamma, \Delta_t)$ 为 Γ 的**分割对**
 - 连续非闭合曲线上分割对"尺度小"是一致的, 即 $\lambda(\Delta_\Gamma) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda(\Delta_t) \rightarrow 0$
- theorem: Γ 可求长的充要条件是 $x(t), y(t) \in BV[a, b]$
 - $\sup_{\forall \Delta} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < +\infty$, 记为 $f \in BV[a, b]$, f 为**有界变差函数**
 - 有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差
 - 有界变差函数有界
- 对于非闭合可求长的连续曲线(段) Γ , 弧长为:

$$|\Gamma| = \sup_{\forall \Delta_\Gamma} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \lim_{\lambda_\Delta \rightarrow 0} \sigma(\Gamma, \Delta_\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- 对于可分割成至多可列个非闭合的连续曲线弧段的平面连续曲线, 定义其弧长为各段弧长之和, 也即:

$$|\Gamma| = \sum_{i=1}^n |\Gamma_i| = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- 设 $x(t), y(t) \in C^1[a, b], x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$, 则 Γ 最多时有有限个闭合点.

I型曲线积分

§ 16.1

- def: 设 Γ 是平面可求长曲线, $f(x, y)$ 在 Γ 上有定义, 若对任意分割的任意取点, $\lim_{\lambda(\Delta_\Gamma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(t_i), y(t_i)) \Delta s_i$ 存在且唯一, 则称此极限为 $f(x, y)$ 在 Γ 上的**第一型曲线积分**, 记为 $\int_\Gamma f(x, y) ds$. 对简单闭曲线, 记为 $\oint_\Gamma f(x, y) ds$.
 - $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \geq 0$
- theorem: Γ 是可求长简单曲线且 $f(x, y) \in C(\Gamma)$, 则 $\int_\Gamma f(x, y) ds \exists$

$$\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- property:
 - $\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y) ds$
 - $\int_\Gamma (k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)) ds = k_1 \int_\Gamma f(x, y) ds + k_2 \int_\Gamma g(x, y) ds$
 - $\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y) ds \Leftrightarrow \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ## I型曲线积分

§ 16.2

- def: 设 Γ 是有向非闭合连续线段, A, B 分别表示起点和终点. 定义在 \widehat{AB} 上的矢量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 连续, 若对任意分割的任意取点和 $S_n(\Delta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i$, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n(\Delta)$ 存在, 则称此极限为 \mathbf{F} 沿 Γ 的**第二型曲线积分**, 记作 $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ 或 $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$.

第二型曲线积分是有积分方向的, ds 与第一型曲线积分的 ds 不同
被积函数是矢量函数, 被积元是矢量, 积分结果是标量

• property :

- $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\widehat{BA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\widehat{AC}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\widehat{CB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- 闭路积分: $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- $|\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}| \leq \int_{\Gamma} \|\mathbf{F}\| ds$

• 若使用余弦计法: $(dx, dy, dz) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds$, $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 都是 x, y, z 的连续函数, 则

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

• theorem : 设 Γ 是有向光滑曲线 (即 $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$, $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$), $\mathbf{F}(x, y, z) \in C(\Gamma)$, 则第二型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt$$

• theorem : Γ 是 D 内简单闭曲线, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists$ 节点在 Γ 上的闭折线 Λ , D_{Γ}, D_{Λ} 分别为曲线围成的有界闭区域. 使得.

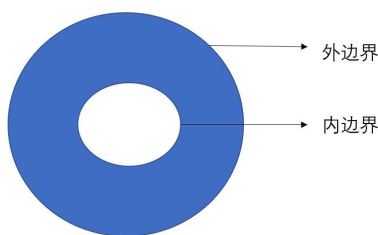
$$\left| \oint_{\Lambda} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| < \epsilon, |D_{\Lambda}| - |D_{\Gamma}| < \epsilon$$

规定 δD 的微元的正向是区域在左侧## 两类线积分之间的联系

§ 16.3

Green 公式

§ 16.3.1



• theorem : (Green 公式) 平面闭区域由有限条可求长简单闭曲线围成, ∂D 表示正向边界, $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \in C(D)$. 则有:

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

边界正向选取: 内顺外逆

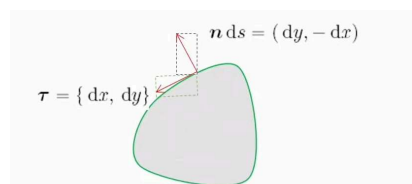
Green 公式是联系平面积分与边界线积分的桥梁

非闭曲线上的线积分可以变成闭曲线上线积分再用 Green 公式

• Green 公式的向量形式:

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot (dx, dy) = \oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 表示正向单位切向量, $\boldsymbol{\tau} = (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{(dx, dy)}{ds}$



• theorem : (二维 Stokes 公式) $P, Q, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x} \in C(D)$. 则有:

$$\oint_{\partial D} (P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)) ds = \oint_{\partial D} \{P, Q\} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) d\sigma$$

其中 \mathbf{n} 表示外法向量, 两个余弦内角是其分别与 x, y 轴正向的夹角.

$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} = (dy, -dx)$, 所以两个公式其实就是互换 P, Q

Green 公式描述 P, Q 在切向量上的投影, 二维 Stokes 公式描述 P, Q 在法向量上的投影

wgx物理小课堂

- 流场 $v = (P(x, y), Q(x, y))$
- 点的**旋度**: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
- 边界 ∂D 的**环流量**: $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy$

边界线上环流量等于区域上各点旋度的叠加. \Leftrightarrow Green公式

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \iint_D \text{rot } \mathbf{v} d\sigma$$

- 点的**散度**: $\text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ (这个没有方向), 单位体积单位时间生出的流量
 - 散(san, 四声)
 - **汇, 源**: 有水漏出, 有水生成的地方
- 边界的**总通量**: $\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$

边界线上总通量等于区域上各点散度的叠加. \Leftrightarrow Gauss公式二维情形

$$\oint_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div } \mathbf{v} d\sigma$$

wgx认为这个积分用好了后面都很自然

调和函数

- def: $\Delta u = 0$, 则称 u 为**调和函数**.
 - $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$
- theorem: (Green 第二公式) D 由有限条逐段光滑曲线围成, $u, v \in C^2(D)$, 则有

$$\begin{aligned} \iint_D \Delta u d\sigma &= \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\ \iint_D v \Delta u d\sigma &= - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma + \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds \\ \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) d\sigma &= \oint_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) ds \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$$

平面曲线积分与路径无关的条件

§ 16.3.2

- theorem: $\forall A, B \in D, \int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关的充要条件是任意闭曲线 $C \subset D$ 均有 $\oint_C Pdx + Qdy = 0$

这是区域 D 性质, 不是指定两点的性质.

- theorem: $\forall A, B \in D, P, Q \in C(D), \int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关的充要条件是 \exists 定义在 D 上的可微函数 u , 使得 $du = Pdx + Qdy, \forall (x, y) \in D$

积分与路径无关的充要条件是, 在整个区域上, 被积表达式是一个全微分.

- theorem: 设 $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, 在单连通区域上连续, 则 "...与路径无关" \Leftrightarrow

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)$$

这个条件的充分性由 Green 公式和单连通区域的定义保证.

全微分 $du = Pdx + Qdy, \forall (x, y) \in D$ 存在 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)$, 反之不然, 例如不含原点的环形区域上的 $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 这是因为 $\arctan \frac{y}{x}$ 不能在整个环形区域上可微.

关于被积表达式是否是全微分, 有三种方法确定, 直接积, 积单变量, 直接观察.

曲面积分

§ 16.4

曲面面积

§ 16.4.1

- theorem : 若曲面由 $z = f(x, y)$ 给定, 投影区域为 D_{xy} , 则

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} d\sigma_{xy}$$

- def : (参数式曲面) $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 均 $\in C^1$, 且 $A = \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|$, $B = \dots$ 不同时为 0.
 - theorem : $\tau_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$, $\tau_2 = \dots$, $E = |\tau_1|^2$, $G = |\tau_2|^2$, $F = |\tau_1 \cdot \tau_2|$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\sigma_{uv} = \sqrt{EG - F^2} d\sigma_{uv}$$

I型曲面积分

§ 16.4.2

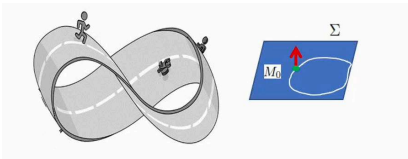
- def : 设 Σ 是分片光滑曲面, $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 为**I型曲面积分**.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} d\sigma_{xy} \\ &= \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} d\sigma_{uv} \end{aligned}$$

II型曲面积分

§ 16.4.3

- def : 光滑曲面 Σ (连续可微函数表达的曲面) 上任取一点 M_0 . 选定在 M_0 点的 Σ 的一个法向量朝向, 当 M_0 点连同法向量沿 Σ 上任意闭曲线连续滑行一周后回到初始位置时法向量的方向没变, 则称 Σ 为**双侧曲面**. 否则, 称为**单侧曲面**, (即存在某点, 某闭曲线, 使得滑行一周回来后, 法向量和原来此点的法向量方向相反.)



- def : 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 是分片光滑可求面积的双侧曲面, 若它有边界, 则它的边界是由有限条光滑曲线组成. 给定 Σ 一侧, Σ 上每点 (x, y, z) 处的该侧的单位法向量记为 $\mathbf{n}(x, y, z)$, 向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在 Σ 上有定义. 任意分割任意取点法求和的极限存在唯一, 则记为 $\iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$, 为**II型曲面积分**.

\mathbf{F} 和 \mathbf{n} 夹角是锐角, 则 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ 是正的, 反之是负的. 这里 dS 是恒正的.

闭曲面上积分记为 $\oiint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS$

如果把 $\mathbf{n} dS$ 看作向量, 记为 $d\mathbf{S}$, 则 $d\mathbf{S} = (\cos \alpha dS, \cos \beta dS, \cos \gamma dS)$

已知 $|\cos \alpha| dS = d\sigma_{yz}$, $|\cos \beta| dS = d\sigma_{xz}$, $|\cos \gamma| dS = d\sigma_{xy}$. 而这与 $d\mathbf{S}$ 中的 $\cos \alpha dS$ 有别, 因此记 $dydz = \cos \alpha dS$, $dzdx = \cos \beta dS$, $dx dy = \cos \gamma dS$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) \mathbf{n} dS &= \iint_{\Sigma} \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{S} \\ &\stackrel{\text{与I型积分的联系}}{=} \iint_{\Sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS \\ &\stackrel{\text{新形式}}{=} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

wgx : 如果只是记忆公式, 而不理解这些都是二型曲面积分的形式, 则对思考问题没有多少帮助. 事实也的确如此, 微元是否取绝对值与计算中分类的数目有关.

这里的 $dx dy$ 与二重积分中的有本质不同, 考试中混用可能导致老王下狠手, 后者建议用 σ_{xy}

两类面积分之间的联系

- theorem : (Gauss 公式), 有界闭 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, 其边界曲面 $(\partial \Omega)$ 分片光滑, $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(Q)$, 则有

$$\oiint_{\partial \Omega} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

- theorem : (Stokes 公式), 设光滑双侧曲面 Σ 有界有边含于空间区域 Ω , 其边界 $\partial \Sigma$ 由有限条分段光滑曲线组成, 并且 Σ 的正侧与边界 $\partial \Sigma$ (空间闭曲线) 正向按右手法则取定, 函数 $P, Q, R \in C^1(\Omega)$, 则有

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz \\ = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

其中

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right)$$

换一个好记的写法:

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz \\ = \iint_{\Sigma} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix} dS \\ \iint_{\Sigma} \begin{bmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{bmatrix}$$

散度与旋度

§ 16.5

- def: 矢量算子 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$
- def: 设流速为 $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 则定义 \vec{F} 的**旋度**为

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \\ = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Stokes 公式的向量形式

$$\iint_{\Sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- def: 定义 \vec{F} 的**散度**为

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{F}$$

注意 ∇f 和 $\nabla \cdot \vec{F}$ 的区别, 前者是梯度

Gauss 公式的向量形式

$$\oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \text{div}\vec{F} dv$$

- def: 如果区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内的任何简单闭曲面所围的体都完全属于 Ω , 则称其为**单连通区域** (没有空腔)
- theorem: (散度定理, 空间面积分与面位无关) 对单连通区域 Ω , 任意点的散度为 0 \Leftrightarrow 任意闭曲面上通量为 0 \Leftrightarrow II型曲面上通量只与边界有关与面位无关

为什么 stokes 公式是对的? 因为旋通量与面位无关, 换句话说旋度的散度为 0: $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = 0$

- def: 如果区域 Ω 内的任何闭曲线都可以张成(至少)一张完全属于 Ω 的曲面, 则称 Ω 为**线单连通区域** (区域内任何简单闭曲线都可以连续收缩成一点)

球壳线单连通, 但不单连通. 轮胎单连通, 但不线单连通

- theorem: (空间线积分与路径无关) Ω 是线单连通区域, 两点间积分与路径无关 \Leftrightarrow 存在可微函数 u 的全微分是 $Pdx + Qdy + Rdz \Leftrightarrow$ 旋度处处为 0.

路径流量与路径无关 \Leftrightarrow 有势场 \Leftrightarrow 无旋场

第十七章 含参变量积分

含参变量的定积分

§ 17.1

- def : 所谓**含参变量定积分**, x 是参变量

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

- lemma : 设 $f \in C(D)$, $F(x, y) = \int_c^y f(x, t)dt$, $y \in [c, d]$, 则 $F(x, y) \in C(D)$ (二元连续函数对其中一个变量做变上限积分, 则结果是二元连续函数)
- theorem : $f \in C(D) \Rightarrow I(x) \in C([a, b])$, 且此时**对参数取极限与积分运算可交换**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)dy$$

- theorem :

$$f \in C(D) \Rightarrow J(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)dy \in C([a, b])$$

- theorem : $f \in C(D)$, $f'_x \in C(D) \Rightarrow I(x) \in C^1([a, b])$, 且**此时对参数求导与积分运算可交换**

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, t)dt = \int_c^d \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$$

- theorem : $f \in C(D)$, $f'_x \in C(D)$, ψ, φ 在 $[a, b]$ 可微, $c \leq \psi, \varphi \leq d \Rightarrow J(x) \in C^1([a, b])$, 且此时

$$J'(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f'_x(x, t)dt - f(x, \psi(x))\psi'(x) + f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

条件	含参变量积分	含参变量变限积分
$f(x, y) \in C(D)$	$I(x) \in C([a, b])$, 积分与 $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 可交换, 两累次积分顺序可交换	$J(x) \in C([a, b])$
$f \in C(D)$, $f'_x \in C(D)$	$I(x) \in C^1([a, b])$, 积分与 $\frac{d}{dx}$ 可交换	$J(x) \in C^1([a, b])$, 求导结果另行计算

含参变量的广义积分

§ 17.2

一致收敛

§ 17.2.1

- def : 若 $\forall \epsilon > 0, \exists A_0 > c$ s.t. $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dy \right| < \epsilon, \forall x \in [a, b], \forall A > A_0$, 则称 $\int_A^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上**一致收敛**.

我认为所谓的"一致"就是对于某个参数 x 的取值范围共用一个 $\epsilon - N$
将 $[a, b]$ 换成 \mathbb{R} 的一般区间同样定义
Cauchy 一致收敛 : 一致收敛等价于在 $[A', A'']$ 上的积分 $< \epsilon$
Weiersrass 判别法 : 找一个控制函数夹住 f , 如果该函数一致收敛则 f 一致收敛
Dirichlet 判别法 : f 一致有界, g 关于 y 单调且 $g(x, y) \rightarrow 0$, 则 $\int fgdy$ 一致收敛
Abel 判别法 : f 一致收敛, g 单调有界, 则 $\int fgdy$ 一致收敛

- theorem : (Dirichlet 判别法) 若
 - $\exists M > 0$ s.t. $\left| \int_c^A f(x, y)dy \right| \leq M, \forall A > c, \forall x \in E$, 即关于 x 及 A **一致有界**
 - $\forall x \in E$, $g(x, y)$ 关于 y 单调, 且 $g(x, y) \rightarrow 0 (y \rightarrow +\infty, x \in E)$
则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dy$ 对 $x \in E$ 一致收敛
- theorem : (Abel 判别法) 若
 - $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in E$ 一致收敛

(2) $\forall x \in E, g(x, y)$ 关于 y 单调, 且 $\exists M > 0$ s.t. $|g(x, y)| \leq M, \forall x \in E, \forall y \in [c, +\infty)$
 则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)dy$ 对 $x \in E$ 一致收敛.

含参变量无穷积分的性质

§ 17.2.2

- def: 若 $\int_c^{+\infty} |f(x, y)|dy$ 关于 $x \in E$ 一致收敛, 则称 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in E$ **绝对一致收敛**.

一致收敛 \Rightarrow 绝对一致收敛

- theorem: (将无穷积分理解为函数列的极限) $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in E$ 一致收敛的充分必要条件是, 对任意的满足条件 $c < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ 的序列 $\{t_n\}$, 函数列 $F_n(x) = \int_c^{t_n} f(x, y)dy$ 关于 $x \in E$ 一致收敛
- theorem: (含参变量无穷积分的连续性) 设 f 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in E$ 一致收敛, 则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 E 上连续
- theorem: (积分可交换) 设 f 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛, 则

$$\int_a^b \left(\int_c^{+\infty} f(x, y)dy \right) dx = \int_c^{+\infty} \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

- theorem: (可导) 设 $f(x, y), f'_x(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f'_x(x, y)dy$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛, 且存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $\int_c^{+\infty} f(x_0, y)dy$ 收敛, 则
 (1) $J(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛
 (2) $J'(x) = \int_c^{+\infty} f'_x(x, y)dy$

可导和可交换是照搬含参变量定积分的性质

- theorem: (类似 Dini 定理) 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, +\infty)$ 上连续非负, $\forall x \in [a, b], \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 x 收敛, 且 $I(x) \in C[a, b]$, 则 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛

非负函数逐点收敛则一致收敛

- theorem: (关于两个参数的一致收敛) 设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, \infty)$ 上连续, 且 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$ 关于 $x \in [a, +\infty)$ 内闭一致收敛, 且 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 关于 $y \in [c, +\infty)$ 内闭一致收敛, 且 $\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx \right) dy$ 与 $\int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)|dy \right) dx$ 有一存在, 则

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x, y)dy \right) dx = \int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y)dx \right) dy$$

- theorem: 设 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, \infty)$ 上连续非负, 且 $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy, \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 连续, 且 $\int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx \right) dy$ 与 $\int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} |f(x, y)|dy \right) dx$ 有一存在, 则两者存在且相等

Γ 函数与 B 函数

§ 17.3

Γ 函数

- def: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$
- property:
 - $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
 - $\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds$ (变换 $t = s^2$)
 - $\Gamma(x) \in C^\infty(0, +\infty)$
 - $\Gamma(x)$ 与 $\ln \Gamma(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格凸

B 函数

- def: $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0$
- property:
 - $B(x, y) = B(y, x)$
 - $B(x, y) = \frac{x-1}{x+y-1} B(x-1, y)$
 - $B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$ (变换 $t = \sin^2 \theta$)
 - $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} ds$ (变换 $t = \frac{s}{1+s}$)

Γ 函数与 B 函数的关系

- $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
- (余元公式) $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$