2024/11/13

1.

求第一卦限上由曲面 $z=\frac{1}{(1+x+3y)^3}$ 所围立体的体积.

Answer:

$$V=\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{1}{(1+x+3y)^3}}\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{6(1+x)^2}=\frac{1}{6}$$

2.

讨论以下广义重积分的敛散性, 其中 α,β,γ 均为常数.
(1) $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+|x|)^\alpha(1+|y|)^\beta(1+|z|)^\gamma}$, 其中 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\geq 1\}$

注意到被积函数在 D^c 上有界, 且 D^c 体积有限, 因此将积分区域改为 $\mathbb{R}^3$ 后敛散性不变. 而 $\iiint_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+|x|)^\alpha(1+|y|)^\beta(1+|z|)^\gamma}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+|x|)^\alpha}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+|y|)^\beta}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(1+|z|)^\gamma}\right)$ 收敛当且仅当 $\alpha,\beta,\gamma>1$, 故 I 收敛当且仅当 $\alpha,\beta,\gamma>1$.

(2) $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^\alpha+|y|^\alpha+|z|^\alpha}$, 其中 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\geq 1\}$

作变量替换: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\theta\end{cases}$, 由 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=r^2|\sin\varphi|$, 有

$$\begin{aligned}I&=8\iiint_\Omega\frac{r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{r^\alpha\left(\sin^\alpha\varphi(\cos^\alpha\theta+\sin^\alpha\theta)+\cos^\alpha\varphi\right)}\\&=8\left(\int_1^{+\infty}r^{2-\alpha}\mathrm{d}r\right)\left(\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{\sin^\alpha\varphi(\cos^\alpha\theta+\sin^\alpha\theta)+\cos^\alpha\varphi}\right)\end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty}r^{2-\alpha}\mathrm{d}r$ 收敛等价于 $\alpha>3$, 而当 $\alpha>3$ 时,

$$
\begin{aligned}
\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \frac{\sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta}{\sin^\alpha \varphi(\cos^\alpha\theta+\sin^\alpha\theta)+\cos^\alpha\varphi} &\le \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \frac{\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta}{(\sin^\alpha\varphi+\cos^\alpha\varphi)(\cos^\alpha\theta+\sin^\alpha\theta)} \\
&\le \iint_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} 2^{\frac{\alpha}{2}-1}\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \\
&= 2^{\frac{\alpha}{2}-3}\pi^2
\end{aligned}
$$

故 I 收敛当且仅当 $\alpha > 3$.

(3) $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, 其中 D 为单位圆盘.

作变量替换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, 则

$$
I = \iint_D \frac{r\mathrm{d}r}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r^2}{(1-r^2)^\alpha} = \pi\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}
$$

因此 I 收敛当且仅当 $\alpha < 1$.

(4) $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|y-x|^\alpha}$, 其中 $D = [0,1]^2 \setminus \{(x,y)|x=y\}$.

注意到

$$
I = 2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x (x-y)^{-\alpha}\mathrm{d}y
$$

当 $\alpha = 1$ 时, $I = -2-2\ln 0 = +\infty$, 因此发散
当 $\alpha \ne 1$ 时, $I = 2\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}\mathrm{d}x}{1-\alpha}$, 此时 I 收敛等价于 $\alpha < 1$.
综上, I 收敛等价于 $\alpha < 1$.

(5) $\iiint_D \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, 其中 $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

作变量替换: $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, 由 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right| = r^2|\sin\varphi|$, 有

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_D \frac{r^2 \sin\varphi \ln r^2}{(1+r^2)^\alpha} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= 8\pi \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \ln r \mathrm{d}r}{(1+r^2)^\alpha}
\end{aligned}
$$

由比较判别法知, I 收敛等价于 $\alpha > \frac{3}{2}$

(6) $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

作变量替换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 由 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$, 则

$$
I = \iint \frac{r\cos r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r^2+1} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r\cos r \mathrm{d}r}{r^2+1}
$$

由 $\int_0^{+\infty} \frac{r\cos r\mathrm{d}r}{r^2+1}$ 发散知 I 发散.

3.

设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ 上连续, 且 $\forall (x,y) \in \Omega$, 有 $f(x,y) > 0$. 定义集合: $D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \Omega, 0 \le z \le f(x,y)\}$. 要求证明: 当 $\alpha < 1$ 时, 积分 $I = \iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|z-f(x,y)|^\alpha}$收敛.

Answer:
当 $\alpha < 1$ 时, $f^{1-\alpha}(x,y)$ 在 Ω 上连续且恒正, 因此 $\exists M > 0$, 使得 $f^{1-\alpha}(x,y) \in (0,M]$ 在 Ω 上恒成立.从而

$$
I = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{f(x,y)} \frac{\mathrm{d}z}{(f(x,y)-z)^\alpha} = \iint_\Omega \frac{f^{1-\alpha}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-\alpha} \le \frac{M}{1-\alpha}
$$

进而 $\iiint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|z-f(x,y)|^\alpha}$ 收敛, 证毕.