# 北京大学数学科学学院期中试题

2011 - 2012 学年　第一学期

考试科目：数学分析　　考试时间：11 年 11 月 11 日

姓　　名：　　学　　号：

本试题共 ~~七~~八 道大题满分 100 分

1. (10) 用肯定语气叙述

   (1) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq \infty$;

   (2) $f(x)$ 在区间 $I$ 上不一致连续。

2. (20) 用定义证明

   (1)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0;$$

   (2)
   $$\lim_{x\to 1+0} \frac{sinx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} = +\infty.$$

3. (10) 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n})$;

4. (10) 设 $b_1=1, b_{n+1}=\frac{1}{b_n+1}(n=1,2,...)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 存在并求出其极限值。

5. (10) 设 $f(x)$ 是区间 $I$(不一定是有限闭区间) 上的连续函数，用有限覆盖定理证明 $f(I)$ 也是一个区间。

6. (15) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续. 试问 (1) $f(x)g(x)$ 在 $(0,1)$ 是否一致连续；(2) 设 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $(0,1)$ 有定义并且有界，试问它是否一致连续。(说明理由)

7. (15) 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 连续且非负。证明：(1) 对于 $I$ 内任意两点 $x_1, x_2$，总存在 $\xi_1, \xi_2 \in I$ 使得有 $f(\xi_1)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ 和 $f(\xi_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$; (2) 如果 (1) 中的 $\xi_1, \xi_2$ 总成立 $\xi_1 < \xi_2$, 证明 $f(x)$ 在 $I$ 上严格递增。

8. (10) 设 $Q$ 是有理数集，试构造 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 的间断点集为 $Q\cap[0,1]$ 并且 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.