20241009作业

1. 设$f(t)$是$\mathbb{R}$上的二次可导函数. 如果, 对任何的调和函数$u(x,y)$ （即满足Laplace 方程$\Delta u=0$的函数）都有$F(x,y)=f(u(x,y))$仍是调和函数, 则$f(t)=at+b,\ a,b\in\mathbb{R}$是常数.

2. 设$z=z(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求在变换$\begin{cases} u=3x+y, \\ v=x+y \end{cases}$后 $z=z(u,v)$所满足的方程, 并由此给出方程的解$z=z(x,y)$ 的表达式.

3. 求函数$f(x,y)=\dfrac{1+x+y+2xy}{1+x^2+y^2}$ 在原点处的直到四次项的Peano 余项型Taylor 公式.

4. 设$f(x,y)=e^{xy}$, 对任意$k\in\mathbb{N}$, 求$f(x,y)$在$(0,0)$ 处的所有k 阶偏导数.