

北京大学数学科学学院期末试题

2011 - 2012 学年 第一学期

考试科目: 数学分析 考试时间: 11 年 12 月 30 日

姓 名: 学 号:

本试题共 八 道大题满分 100 分

1. (15) 求导数

(1) $y = (1 + x^2)^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $x = \ln(1 + t^2)$; $y = t - \arctan t$, 求 $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$;

(3) $y = y(x)$ 由方程 $\tan y - xy = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

2. (15) 求极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x})$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[7]{x^7 + x^6} - \sqrt[7]{x^7 - x^6})$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x$.

3. (15) 求不定积分

(1) $\int x^{\frac{1}{3}} \ln^2 x dx$;

(2) $\int x^3 \sqrt[3]{1 + x^2} dx$;

(3) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$.

4. (10) (1) 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 可导且无界, 证明 $f'(x)$ 的值域是一个无界区间;
(2) 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 是否 $f'(x)$ 的值域一定是一个有界区间? (说明理由)

5. (12) 证明 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续.

6. (15) (1) 求 $f(x) = x^2 \sin x$ 在 $x = 1$ 处的带 Peano 余项的 Taylor 公式; (2) 求 $f^{(n)}(1)$, $n = 0, 1, \dots$

7. (10) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ ($a > 0$) 可导且 $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) \xi^3 (b^2 - a^2) = 2a^2 b^2.$$

8. (8) 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 可微, $f'(0) = 1$ 并且对于 $\forall x, y, x + y \in (-1, 1)$ 满足 $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$, 求 $f(x)$.