北京大学数学科学学院数学分析(一)期末考试

2021 年 1 月 20 日 08:30-10:30

姓名________________　　学号________________

全卷共 2 页, 计 7 道大题, 满分 100 分.

---

1. **(每道小题5分，共35分)** 计算下列各题

   (1) 求函数 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{\sqrt{3}\,x}{x^2-1}$ 的导数;

   (2) 设 $f(x)=\sin(x^2)$, 求 $f^{(n)}(0)$;

   (3) 设 $f(x)=x^{2020}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 求 $f^{(2021)}(x)$;

   (4) 求不定积分 $\int\arcsin x\mathrm{d}x$;

   (5) 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\cos t}{\cos^4 t+3\sin^2 t}\mathrm{d}t$;

   (6) 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}+\frac{1}{2\ln\cos x}\right)$;

   (7) 设$F(x)$ 在$[0,1]$ 连续，$F(0)=0$, 在$(0,1)$ 可导，且$F'(x)=\sin^2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}.$$

2. **(本题10分)** 试分别构造非常值的C^∞ 函数$f(x)$和$g(x)$, 满足对$\forall n>0$, $f^{(n)}(0)=0$, $g^{(n)}(0)=0$, 使得$x=0$ 是$f(x)$ 的极值点，但不是$g(x)$ 的极值点。

3. **(本题10分)** 设$f(x)$为定义在$[0,1]$上的可微函数，证明存在$\xi\in(0,1)$ 满足下式:

$$f(1)-f(0)=(\ln\sqrt{3})\ (1+2\xi)f'(\xi).$$

4. **(本题10分)** 设$f(x)$ 是定义在$[a,b]$ 上的函数，满足如下条件：$\forall x_0\in[a,b],\exists\delta=\delta(x_0)>0$ 和 $L=L(x_0)>0$, 使得对$\forall x\in U_\delta(x_0)\cap[a,b]$, 有 $|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|$. 试举例说明并不一定存在常数$M>0$, 使得对$\forall x,y\in[a,b]$, 有 $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$.

5. **(本题15分)** 考虑定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数

$$f(x)=x\ln(2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}),\qquad x>0.$$

(1) 证明 $f(x)$ 严格单调上升；

(2) 求 $f(x)$ 的渐近线；

(3) 证明 $f(x)$ 严格凸。

6. **(本题10分)** 设 $f(x)$在 $[0,1]$上二阶连续可微, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=-1$, 且对任意的 $x\in(0,1]$, $f(x)\neq x$. 任取 $x_0\in(0,1]$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$. 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

7. **(本题10分)** 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在 $\mathbf{R}$上二阶可导，并且 $\forall x\in\mathbf{R}$, 有

$$f''(x)<0,\qquad g''(x)>0,\qquad f(x)\neq g(x).$$

证明：存在常数 k 和 b , 使得对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$f(x)<kx+b<g(x).$$

[全卷完]