作业补充题*

2023-2024 学年秋季学期 数学分析 (III)

1 2023 年 10 月 23 日作业补充题

本次作业除了教材中的习题, 还包含以下必做的习题.

习题 1.1. 在 $y^2 = 4x + 1$, $xy \le 6$ 且 $x \le 12$ 的条件下, 求 $f(x, y) = x + 2y$ 的所有极值点, 并指明是极大还是极小值点.

2 2023 年 10 月 25 日作业题

以下是本次作业的全部习题.

习题 2.1. 定义

$$V := \{v = v(x) \in C^2([0, 1]) : v(0) = a_0,\, v(1) = a_1,\, v'(0) = b_0,\, v'(1) = b_2\}.$$

并考虑最值问题

$$\min_{v \in V} \int_0^1 (v''(x))^2\, dx. \tag{1}$$

推导该问题的 Euler-Lagrange 方程并求解出最小值点. 在推导过程中, 可以假设条件最小值点存在、唯一、且 C^∞ 光滑.

注记. 我们知道二阶导数描述了函数图像的弯曲状态, 因而以上问题大致对应于如下的物理情境: 考虑一根可弯曲的均质弹性棒, 它的两端固定在平面中给定的点, 而且端点处的切向也被给定. 我们用函数 $v = v(x)$ 的图像表示弹性棒的形状. 在上述边值条件下, 弹性棒总希望达到弹性能极小的状态 ((1) 中的积分可以被近似理解为棒子因为弯曲而具有的总弹性能), 故本题所求的最小值即是弹性棒平衡稳定时的形状.

习题 2.2 (等周问题的一个简化的变体)**.** "周长相等的图形中圆的面积最大" 是一个为人熟知结果, 它也可以反过来陈述为 "面积相等的图形中圆的周长最小". 虽然这里的 "图形" 等名词的含义比较模糊, 但数学中是可以关于此建立严格的理论的. 这一问题被称为等周问题. 本题中我们来考虑一个相当简化的变体.

给定 $1 < l < \pi/2$. 我们想要在 $V := \{v = v(x) \in C^1([0, 1]) : v(0) = v(1) = 0\}$ 中找到函数 $u \ge 0$ 使其图像的总弧长为 l, 且图像和 x 轴包围的面积最大, 也就是

$$\max_{v \in V} \int_0^1 v(x)\, dx, \quad \text{s.t.} \int_0^1 \sqrt{1 + v'(x)^2}\, dx = l.$$

*最后更新日期：2023 年 10 月 25 日

请利用 Lagrange 乘子法推导该问题的最大值点 u 满足的方程, 并求解出 u. 在推导过程中, 可以假设条件最大值点存在、唯一、在 $(0,1)$ 上处处为正、且 C^2 光滑.

习题 2.3. 令

$$V := \{v = v(x) \in C^1([0,1]) : v(0) = v(1) = 0\}.$$

证明在 V 中泛函

$$E(v) = \int_0^1 \left(v'(x)^2 - 1\right)^2 + v(x)^2 \, dx$$

不存在最小值点.

提示. 可以先猜测 $\inf_{v \in V} E(v)$ 的值并且加以论证, 然后证明不存在 $v \in V$ 恰好取到下确界.

注记. 尽管目前我们跳过了泛函最值点/极值点存在性的讨论, 但这个例子表明这方面的理论是不可或缺的.

习题 2.4. 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 定义函数

$$\|\cdot\|_p : \mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. 证明当 $p \in [1, +\infty)$ 时, $\|\cdot\|_p$ 是一个范数;
2. 证明当 $p \in (0,1)$ 时, $\|\cdot\|_p$ 不是一个范数.