

满分 100 分，时间 110 分钟。

1. (12 分) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续，是否有  $f(x)$  在  $x_0$  的任意小邻域内连续？
2. (12 分) 函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  可导，且在点  $a$  右连续，则其导函数  $f'(x)$  在点  $a$  右连续与右导数  $f'_+(a)$  存在是否等价？
3. (12 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$ .
4. (12 分) 定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数  $f(x) = x \cos x$ ，则  $f(x)$  是否有界？是否一致连续？在  $x \rightarrow \infty$  时是否为无穷大？
5. (12 分) 函数  $f(x) \in C[0, 1]$ ，其值域为  $R$ ，且  $[0, 1] \subset R$ ，问：是否存在  $\xi \in [0, 1]$ ，使得  $f(\xi) = \xi$ ？
6. (15 分) 函数  $f(x) \in C[0, 1]$ ，且  $f(0) \neq f(1)$ ，证明：存在  $\xi \in (0, 1)$ ，使得  $\xi$  不是  $f(x)$  的极值点.
7. (15 分) 函数  $f(x) \in C[0, 1]$ ，且  $f(0) = f(1)$ ，证明：对任意正整数  $n$ ，存在  $x_n \in (0, 1)$ ，使得  $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$ .
8. (10 分) 记区间  $I$  为  $C[0, +\infty)$ ，函数  $f(x) \in C^1(I)$ ， $f(0) = 0$ ，正值函数  $p(x) \in C(I)$ ，且满足  $|f'(x)| \leq p(x) \cdot |f(x)|$  恒成立，则是否有  $f(x) \equiv 0$ ？