2024/10/21

1.

求函数 $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ 的极值.
Anwser:

解方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=y\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=x\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

得到驻点:

$$(0,\pm1),(\pm1,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$$

考虑海森矩阵 H:

$$H_f=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

注意到 $H_f(0,\pm1)=H_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 为不定型, 因此他们不是极值.
考察函数: $g(z)=\frac{1}{2}\ln(z)+z$, 其有唯一极小值点 $z=1$, 故 $f(x,y)$ 有极小值点:
$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 和极大值点: $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$

2.

设 $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$, 证明: 当 $f(x,y)$ 的定义域限制在过 $(0,0)$ 的任一条直线上时, 它在 $(0,0)$ 取极小值.
Anwser:
对直线 $x=0$, $f=y^2$ 显然在 $(0,0)$ 取极小值
对形如 $y=kx$的其他直线, $f=x^2(k-x)(k-3x)$, 有 $f'=12x^3-12kx^2+2k^2x$, $f''=36x^2-24kx+2k^2$. $f'(0)=0$, $f''(0)>0$, 得证.

3.

设函数 $u=u(x,y)$ 在单位圆盘 $B=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 的闭包上具有二阶连续偏导数, 在 B 内满足 $u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 并且在 ∂B 上 $u(x,y)=0$. 证明在 $\overline{B}$ 上, $u(x,y)=0$.

Anwser:

反证法. 假设$\exists(x_0,y_0)\in\Delta\ s.t.\ u(x_0,y_0)\neq 0$, 则有

$$\min_{(x,y)\in\overline{\Delta}} u(x,y)<0\ or\ \max_{(x,y)\in\overline{\Delta}} u(x,y)>0$$

不妨设(x_0,y_0)为最小值点, 则

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0$$

不妨设 $\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0$, 由于是最小值点, 又有 $\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=0$, 这与极小值矛盾, 故 $u=0$

4.

求 $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ 在平面 $2x+3y+4z=12$ 内的最小值点.

Answer:

利用拉格朗日乘数法, 令

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(2x+3y+4z-12)$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=8x+2\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+3\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x}=10z+4\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x+3y+4z-12\lambda=0\end{cases}$$

得到驻点 $\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$, 其Hesse矩阵 $H_f\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&10\end{pmatrix}$正定, 故$\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$为极小值点,即为最小值点.

5.

求函数 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在约束条件 $x+y=c$ (其中 $c>0$) 下的极值, 并证明对于 $a\geq 0, b\geq 0, K\in\mathbb{N}$, 有 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^K\leq\frac{a^K+b^K}{2}$.

Answer:

(1)

利用拉格朗日乘数法, 令

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^K+y^K)+\lambda(x+y-c)$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=Kx^{K-1}+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=Ky^{K-1}+\lambda=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x}=x+y-c=0\end{cases}$$

得到驻点 $(\frac{c}{2},\frac{c}{2})$, $H_f(\frac{c}{2},\frac{c}{2})=\frac{K(K-1)}{2}\begin{pmatrix}x^{K-2} & 0\\ 0 & y^{K-2}\end{pmatrix}\Bigg|_{(\frac{c}{2},\frac{c}{2})}$ 正定, 故为极小值点, 极小值 $f(\frac{c}{2},\frac{c}{2})=\frac{c^K}{2^K}$
以上令 $K=2$, 极值为 $\frac{c^2}{4}$

(2)

由(1)得 $\frac{1}{2}(x^K+y^K)=f(x,y)\geq f(\frac{c}{2},\frac{c}{2})=\frac{c}{2}^K$, 其中 x,y 满足 $x+y=c$, 从而

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^K\leq\frac{a^K+b^K}{2}$$

2024/10/23

1.

证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a>0$) 上每点的切平面与各个坐标轴交点到原点的距离之和为常数

Answer:

设曲面 $z=a$ 上的一点为 (x_0,y_0,z_0). 该点的切平面方程为:

$$\frac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{\sqrt{z_0}}=0$$

三个距离之和为 $\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=a$

2.

证明曲面 $xyz=a$ ($a>0$) 上任一点的切平面与三个坐标平面所围的体积为常数

Answer:

设曲面 $xyz=a$ 上的一点为 (x_0,y_0,z_0), 切平面方程为:

$$x_0y_0(z-z_0)+y_0z_0(x-x_0)+z_0x_0(y-y_0)=0$$

通过计算偏导数并将切平面与坐标平面交点代入, 可以得到切平面所围的体积为:

$$V=\frac{1}{6}\cdot 3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0=\frac{9a}{2}$$

3.

求曲线 $\begin{cases}3x^2y+y^2z+2=0\\2xz-x^2y-3=0\end{cases}$ 在 $(1,-1,1)$ 的切线方程与法平面方程

Answer:

$\frac{\partial F_1}{\partial x}=6xy, \frac{\partial F_1}{\partial y}=3x^2+2yz, \frac{\partial F_1}{\partial z}=y^2$
$\frac{\partial F_2}{\partial x}=2z-2xy, \frac{\partial F_2}{\partial y}=-x^2, \frac{\partial F_2}{\partial z}=2x$
以上在 $(1,-1,1)$ 的值为 $(-6,1,1),(4,-1,2)$
$(-6,1,1)\times(4,-1,2)=(3,16,2)$
切线:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{16}=\frac{z-1}{2}$$

平面:

$$3(x-1)+16(y-1)+2(z-1)=0$$