2024/11/20

习题 16.3

设曲线 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 求下列第一型曲线积分:

1. $\int_\Gamma x\mathrm{d}s$
2. $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$
3. $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$

Answer:

利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ y=\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z=-\frac{\sqrt{6}}{3}\cos t \end{cases}$, ($0\le t\le 2\pi$), 有

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t\right)^2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$$

从而

(1) $\int_\Gamma x\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t=0$,

(2) $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3}$,

(3) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\cos t-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\right)^2\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}$.

习题 16.4

求下列第一型曲线积分:

$$\int_\Gamma\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s$$

其中 Γ 为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Answer:

利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$, 有:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(3a\sin t\cos^2 t)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\mathrm{d}t = |3a\sin t\cos t|\mathrm{d}t$$

从而有

$$\int_\Gamma \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^{\frac{4}{3}}(\sin^4 t + \cos^4 t)|3a\sin t\cos t|\mathrm{d}t = 4a^{\frac{7}{3}}$$

习题 16.7

计算下列第二型曲线积分:

1. $$\int_\Gamma \left((3x^2 - 6yz)\mathrm{d}x + (2y - 3xz)\mathrm{d}y + (1 - 4xyz^2)\mathrm{d}z\right)$$

   其中 Γ 为以下曲线:
   - (a) 从点 $(0,0,0)$ 到点 $(1,1,1)$ 的线段;
   - (b) 从点 $(0,0,0)$ 到点 $(0,0,1)$, 然后从点 $(0,0,1)$ 到点 $(0,1,1)$, 最后从点 $(0,1,1)$ 到点 $(1,1,1)$ 的折线.

Answer:

(a) 利用 Γ 的参数方程 $x = y = z = t$ $(0 \le t \le 1)$, 有

$$I = \int_0^1 (3t^2 - 6t^2 + 2t - 3t^2 + 1 - 4t^4)\mathrm{d}t = -\frac{4}{5}$$

(b) 分别利用分段参数方程 $(x,y,z) = (0,0,t), (0,t,1), (t,1,1)$, 有

$$I = \int_0^1 (1 + 2t + 3t^2 - 6)\mathrm{d}t = -3$$

2.

$$\int_\Gamma \big((y+z)\mathrm{d}x + (x+z)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z\big)$$

- (a) 曲线 $x^2+y^2=1, z=0$, 从 z 轴正向看去取逆时针方向;
- (b) 螺旋线 $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t), 0 \le t \le 2\pi$.

Answer:

(a) 利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 0 \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$, 有:

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin t)(-\sin t)\mathrm{d}t + (\cos t)(\cos t)\mathrm{d}t = 0$$

(b) 利用该参数方程, 有:

$$I = \int_0^{2\pi} \left((\sin t + t)(-\sin t) + (\cos t + t)(\cos t) + (\cos t + \sin t)\right)\mathrm{d}t = 2\pi$$

3. $$\int_\Gamma (y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z)$$

其中 Γ 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2z, \\ x+z = 1, \end{cases}$$

从 z 轴正向看去取逆时针方向.

Answer:

利用 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$, 有:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 t + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right)\cos t + \frac{1}{2}\sin t \cos t\right)\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\pi$$

习题 16.11

设曲线 Γ_R 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $ax+by+cz+d=0$ 的交线, 求极限:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Answer:

引理: 对函数 P,Q,R 在光滑曲线 $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ 上连续, 记 L是弧长, 则

$$\left|\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|\le L\max_{(x,y,z)\in\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$$

先证明引理, 实际上,

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|&=\left|\int_\alpha^\beta(Px'+Qy'+Rz')\mathrm{d}t\right|\\&\le\int_\alpha^\beta\left|Px'+Qy'+Rz'\right|\mathrm{d}t\\&\le\int_\alpha^\beta\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'2}\mathrm{d}t\\&=L\max_{(x,y,z)\in\Gamma}\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\end{aligned}$$

回到原题, 我们有:

$$I\le 2\pi R\max_{(x,y,z)\in\Gamma_R}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}=\frac{2\pi}{R}\to 0\ (R\to+\infty)$$