北京大学数学分析期末试题

李伟固

1.（20分）求下列幂级数的收敛半径和收敛域

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!x^n}{n^{2n}} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}2^n x^{n^2}$$

解: (1)$\rho=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{2n}}}=0 \implies r=\frac{1}{\rho}=+\infty$, 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)$\rho=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^n}=1 \implies r=\frac{1}{\rho}=1$, 收敛域为$(-1,1)$.

2.（20分）求下列2π周期函数的$Fourier$级数

(1) $f(x)=x\cos x,\ \ -\pi\le x<\pi.$ (2) $f(x)=\sin^4 x,\ \ -\pi\le x<\pi.$

解: (1)$f(x)=x\cos x$为奇函数，故 $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}. & n=1\\ (-1)^n\dfrac{2n}{n^2-1}. & n>1\end{cases}$

$f(x)\sim-\frac{1}{2}\sin x+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2n}{n^2-1}\sin nx$ (不能用等号).

(2)$f(x)=\sin^4 x=(\frac{1-\cos 2x}{2})^2=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$.

3.（20分）设$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，且满足$\int_a^b f(x)x^{3n}dx=0,\ \forall n=0,1,2,3,\cdots$. 证明：在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$.

证: 方法I: $Stone$定理：记$\mathscr{A}=\{[a,b]$上的$3n$次多项式$\}$,只需验证以下三条

1)$\mathscr{A}$是代数. 2)单位1在$\mathscr{A}$中. 3)$\mathscr{A}$可分离$[a,b]$中的点.

方法II: 变量替换$t=x^3$, 则有$\int_{a^3}^{b^3}\sqrt[3]{t}f(\sqrt[3]{t})t^n dx=0,\ n=0,1,2,\cdots,\Longrightarrow \sqrt[3]{t}f(\sqrt[3]{t})\equiv 0$.

4.（20分）设$f(x)$和$g(x)$均为区间$[-\pi,\pi]$上黎曼可积或有瑕点时绝对可积的函数，证明：$f(x)$和$g(x)$的$Fourier$级数相等当且仅当$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=0$.

Remark:若$f(x)$和$g(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上平方可积，则由$Parseval$等式立知结论显然成立.

证: 方法I: $Fourier$级数的逐项积分定理：设$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的黎曼可积或绝对可积的函数, 则 $\forall a,b\in[-\pi,\pi]$有下列逐项积分公式成立：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx$$

若$f(x)$的$Fourier$级数为0, 则$\forall a,b\in[-\pi,\pi],\int_a^b f(x)dx=0$. 设$x=\pi$为$f(x)$的唯一瑕点, 则

$\forall\delta>0,f(x)\overset{a.e}{=}0,x\in[-\pi,\pi-\delta]$,故有$0=\int_{-\pi}^{\pi-\delta}|f(x)|dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{-\pi}^{\pi-\delta}|f(x)|dx=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$.

方法II: $f(x)$的$Fourier$级数为0$\Longleftrightarrow f(x)$在$[-\pi,\pi]$上与所有三角多项式正交.

$f(x)$的$Fourier$级数为0$\Longleftrightarrow f(x)$在$[-\pi,\pi]$上与所有连续函数正交.

设$x=\pi$为$f(x)$的瑕点, 则$\forall 0<\delta<\pi, f(x)\in R[-\pi,\pi-\delta]$, 其积分可用连续函数逼近.

由$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上与所有连续函数正交$\Longrightarrow f(x)$在$[-\pi,\pi-\delta]$上与所有连续函数正交.

则有$\int_{-\pi}^{\pi-\delta}|f(x)|^2dx=0$, 由Cauchy-Schwartz不等式可知$\int_{-\pi}^{\pi-\delta}|f(x)|dx=0$.

5.（10分）设$f(x)$是2π周期的连续函数，设$S_n(x)$是$f(x)$的 $Fourier$ 级数的部分和序列. 令$M_n=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|S_n(x)|$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_n}{\ln n}=0$.

证: 不妨设$M=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$, 则$|S_n(x)|\le|S_n(x)-f(x)|+|f(x)|\le|S_n(x)-f(x)|+M$

$$\begin{aligned}|S_n(x)-f(x)|&=\frac{1}{\pi}|\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{\pi}|\int_0^\delta[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|\\I_2&=\frac{1}{\pi}|\int_\delta^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|\end{aligned}$$

由Riemann-Lebesgue引理: 当$n\to+\infty$时, 有

$$I_2=\tfrac{1}{\pi}|\int_\delta^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\tfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt|\to 0$$

由于$f(x)$是2π周期的连续函数，故$f(x)$一致连续.由$f(x)$的一致连续性可知：
$\forall\epsilon>0,\exists 0<\delta<1$,使得当 $|t|<\delta$ 时,$\forall x\in\mathbb{R}$ 都有$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|<\varepsilon$成立.

$$\begin{aligned}I_1&=\frac{\epsilon}{\pi}\int_0^\delta|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}|dt\sim\epsilon L\int_0^\delta\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt\\&\le\epsilon L\int_0^n\frac{|\sin u|}{u}du\le\epsilon L\{1+\int_1^n\frac{|\sin u|}{u}du\}\\&\le\epsilon L\{1+\int_1^n\frac{1}{u}du\}\sim\epsilon L\ln n\end{aligned}$$

因此$M_n=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|S_n(x)|\le I_1+I_2+M=O(\epsilon)\ln n+M$, 由$\epsilon$的任意性知$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{M_n}{\ln n}=0$.

6.（10分）设$f(x)$是2π周期的黎曼可积函数，证明函数列$f_n(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x+k-1)$在$\mathbb{R}$上一致收敛.

Step1: 由于$f(x)\in R[0,2\pi]$, 故$\forall\epsilon>0,\exists\ g(x),h(x)\in C[0,2\pi]$, 使得$g(x),h(x)$满足:

1)$g(x)<f(x)<h(x)$, 2)$g(0)=g(2\pi),h(0)=h(2\pi)$, 3) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(x)-g(x)|dx<\frac{\epsilon}{2}$.

Step2: 由Weierstass第二逼近定理，$g(x),h(x)$可用三角多项式一致逼近. 特别地, 可取:

$g_N(x)=\frac{S_0(f,x)+S_1(f,x)+\cdots+S_N(f,x)}{N+1}\rightrightarrows g(x)$ $\quad h_N(x)=\frac{S_0(h,x)+S_1(h,x)+\cdots+S_N(h,x)}{N+1}\rightrightarrows h(x)$

固定一个充分大的N, 使得 $G(x)\doteq g_N(x)\le f(x)\le h_N(x)\doteq H(x)$.

Step3: 设$G(x) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{N}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$, 则可知 $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx$

设$H(x) = C_0 + \sum\limits_{k=1}^{N}(C_k \cos kx + D_k \sin kx)$, 则可知 $C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)dx$

则$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} G(x+k-1) \le f_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x+k-1) \le H_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} H(x+k-1)$.

由于$\sum\limits_{l=1}^{n}\cos k(x+l) = Re(\sum\limits_{l=1}^{n} e^{ik(x+l)}) \le C$ 且有 $\sum\limits_{l=1}^{n}\sin k(x+l) = Im(\sum\limits_{l=1}^{n} e^{ik(x+l)}) \le C$

从而易知 $G_n(x) \rightrightarrows \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx$ 和 $H_n(x) \rightrightarrows \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)dx$. 故$\forall \epsilon > 0$, 当$n$充分大时,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx - \frac{\epsilon}{4} \le G_n(x) \le f_n(x) \le H_n(x) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)dx + \frac{\epsilon}{4}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx - \frac{\epsilon}{4} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)dx + \frac{\epsilon}{4}.$$

又由于$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(x) - g(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}$，故可知$f_n(x) \rightrightarrows \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$.