20240909作业

1. 求集合 $E=\left\{\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,\sin\frac{k\pi}{2}\right)\ \middle|\ k=1,2,\cdots\right\}$ 的聚点.

2. 设$\{(x_k,y_k)\}\subset\mathbb{R}^2$是一个点列, 判断如下命题是否正确: 点列$\{(x_k,y_k)\}$ 在$\mathbb{R}^2$ 中有聚点的充要条件是$\{x_ky_k\}$在$\mathbb{R}$中有聚点.

3. 构造$\mathbb{R}^2$中单位圆盘$\Delta=\{(x,y)\ \mid\ x^2+y^2<1\}$ 内的一个点列$\{(x_k,y_k)\}$, 使得它的点构成的集合的聚点集恰好为单位圆周$\partial\Delta$.

4. 设$A,B\subset\mathbb{R}^n$是互不相交的闭集, 证明:
存在开集O_1,O_2 s.t. $A\subset O_1,\quad B\subset O_2,\quad O_1\cap O_2=\varnothing$.

今天课堂最后一个例题讲解仓促, 显示如下，以便复习.
【例】设$F\subset\mathbb{R}^n$是紧集, $E\subset\mathbb{R}^n$是开集, 且$F\subset E$. 证明：
存在开集O使得$F\subset O\subset\overline{O}\subset E$.

证明. $F\subset\mathbb{R}^n$紧 $\Rightarrow\quad F$有界闭.
E开, $F\subset E\quad\Rightarrow\quad\forall\boldsymbol{x}\in F,\ \ \exists\delta_x>0$ s.t. $B(\boldsymbol{x},\delta_x)\subset E\quad\Rightarrow\quad F\subset\bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in F}B(\boldsymbol{x},\delta_x)\subset E$.
其中, $B(\boldsymbol{x},\delta_x)=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\ \middle|\ \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<\delta_x\right\}$.
进一步, $F\subset\bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in F}B(\boldsymbol{x},\frac{\delta_x}{2})\subset\bigcup\limits_{\boldsymbol{x}\in F}B(\boldsymbol{x},\delta_x)\subset E$.
由于F是紧集, 所以$\exists\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in F$ s.t. $F\subset\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})\subset\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\delta_{x_j})\subset E$.
$\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})$是开集, 并且, $\overline{\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})}\subset\bigcup\limits_{j=1}^m\overline{B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})}\subset\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\delta_{x_j})\subset E$.
注意上式中关系 $\bigcup\limits_{j=1}^m\overline{B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})}\subset\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\delta_{x_j})$ 成立的条件是“有限并”;
对无限并, 有可能包含关系相反. 这样, 令$O=\bigcup\limits_{j=1}^m B(\boldsymbol{x}_j,\frac{\delta_{x_j}}{2})$, 则定理得证. $\square$