

## 关启安数学分析大一上半期考试

### 1. 求极限

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^n}{n!}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[\pi n]} + \frac{1}{[\pi n] + 1} + \cdots + \frac{1}{4n}$$

### 2. 是否存在正实数 $\alpha$ , 使得极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n^\alpha}$$

存在? 若存在, 求出所有的  $\alpha$  并写出对应的极限值

3. 若数列  $\{a_n\}$  的每一个子列都有收敛子列, 则  $\{a_n\}$  是否收敛? 请证明或举出反例.

4. 若数列  $\{a_n\}$  满足对于每个素数  $p$ , 都有  $\{a_{pn}\}$  是一个收敛数列, 则  $\{a_n\}$  是否收敛? 请证明或举出反例.

5. 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n > 0$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  则数列  $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$  是否一定收敛? 请证明或举出反例

6. 非负数数列  $\{p_n\}$  满足  $p_1 > 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = +\infty$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 是否有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = a?$$

证明或否定此结论.

### 7. 定义数列

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^{(-1)^k - (1 + \frac{1}{k})^k}$$

试判断  $\{a_n\}$  是否存在极限? 若存在请证明, 若不存在, 请说明理由.

### 8. 设 $\lambda, x \in \mathbb{R}$ , 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{x}{n} + \lambda \sin \frac{x}{n})^n$$

9. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} (n \geq 1)$ , 则数列  $\{(3 - a_n)\sqrt{n}\}$  是否收敛?

10. 给定正数  $A > 0$  数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 > \sqrt{A}, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ . 问是否存在实数  $\alpha$  使得

$$|a_n - \sqrt{A}| < \alpha \left( \frac{a_1 - \sqrt{A}}{\alpha} \right)^{2^n} ?$$

11. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, a_n + \frac{4}{a_{n+1}^2} < 3$ 则 $\{a_n\}$ 是否存在极限? 若存在, 请求出极限, 否则请举出反例.

12. 实数 $a > 0$ , 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a^{a_n}$ , 则当 $a$ 分别取 $\sqrt[3]{3}$ 和 $\sqrt[4]{\pi} + \frac{3}{5}\gamma$ 时, 是否有 $\{a_n\}$ 收敛?

13. 设 $f(x), g(x)$ 是两个实系数多项式, 满足 $\deg f = 2$

(1) 若 $g(x) = x^3 + x + 1$ , 求所有的 $f$ 满足 $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

(2) 一般地,  $g(x) = x^3 + a_1x + b_1$ , 求所有的 $f$ 满足 $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

14. 已知 $\pi$ 是超越数. 其中超越数满足不是某个有理系数多项式的根. 是否存在一个周期函数 $f(x)$ , 满足 $f(x)$ 以某个超越数为周期, 并且没有最小正周期, 而且每两个周期的乘积仍然为周期?

15. 两个周期函数的和是否也一定为周期函数?

16. 给定一个每两项互不相同的实数数列 $\{x_n\}$ , 是否一定存在一个函数 $f(x)$ , 满足 $f(x)$ 的所有间断点恰好为 $\{x_n\}$ 的所有项?

17. 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

试判断函数 $f(x)$ 的所有连续点, 间断点及其类型.

18. 设 $p(x)$ 是某个非常数定义在 $\mathbb{R}$ 上的有理系数多项式, 定义

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(m!p(x)\pi))$$

则判断 $\chi(x)$  是否为 $\mathbb{R}$ 上的一致连续函数?

19. 解四次方程

20(选做). 试估算 $e$ 的值(精确到小数点后8位)