数分一 2020年杨家忠老师期中考试

by RJL

NO.

DATE

期中考试

1.(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^{x^2}=\sqrt{e}$

(3). $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$

$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad 2^x-1=\ln 2\cdot x+o(1)$

$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{2^x+3^x}{2}}$ $\qquad =e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-1+3^x-1}{2}}$

$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{2^x-1+3^x-1}{2}\right)}$ $\qquad =e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{(\ln 2+\ln 3)x}{2}}$

$=\sqrt{6}$.

(4). $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot(\sqrt[n]{n}-1)=0$

① $\sqrt[n]{n}-1=h_n$

$(1+h_n)^n=n \quad C_n^3\cdot h_n^3\le n$

$h_n\le\sqrt[3]{\frac{6}{(n-1)(n-2)}} \quad \sqrt{n}\,h_n\le\frac{\sqrt[3]{6}}{(n-1)^{\frac{1}{3}}(n-2)^{\frac{1}{3}}}n^{\frac{1}{2}}\le\frac{\sqrt[3]{6}\cdot n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{n^{\frac{1}{6}}}\to 0$

② $\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$

$\frac{\ln n}{n}\cdot\sqrt{n}\to 0$

③ $\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{n^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot 1\cdots 1}\le\frac{3\cdot n^{\frac{1}{3}}+(n-3)}{n}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$

2. $\lim_{x\to+\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$ 证一致连续 (习题三.40)

3. $f\in C[0,1]$. 则 $M(x)=\max_{0\le t\le x}f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续

4. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sin x)=0$. f 周期连续. 证 $f(x)\equiv\sin x$

5. 局部李氏条件 ⇒ 闭区间上整体李氏条件

$$|f(x)-f(y)| \le L\cdot|x-y| \quad (L>0)$$

7. 不存在 $f\in C(\mathbb{R})$. s.t. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x)) = +\infty$ (18年真题)

得证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 广义存在 不能直接说

$\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)$ 和 $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)$. 若不相等 (由习题三、29) 与下矛盾

对 $\forall A\in\mathbb{R}$ 不存在 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

否则 $f(A)=\lim\limits_{n\to\infty} f(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(A) = -\infty$. 矛盾

1. (5) 无穷多个无穷小之和可能不是无穷小.
而且也不能把所有分母都放成2之后求
↳ 相当于先求了n次极限

6. $\{x_n\}$ 收敛. $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上. ∃常数 L. $0<L<1$. 使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}$
$|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$. 取 $y_0\in\mathbb{R}$. 定义 $y_{n+1}=x_{n+1}+f(y_n)$. 证 $\{y_n\}$ 收敛
(习题二36 / 例2.5.3)

① 先证 $\{y_n\}$ 有界. 先取 $\{|x_n|\}$ 的上界 M.

$$M=\frac{M_0+|f(0)|+|y_0|}{1-L}$$

归纳 $|y_{n+1}| = |x_{n+1}+f(y_n)| \le |x_{n+1}|+|f(y_n)-f(0)|+|f(0)|$
$\le M_0+L|y_n|+|f(0)|$

$|y_n| \le M$.

② 证 存在 $c\in\mathbb{R}$. s.t. $c=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+f(c)$

取 $x-f(x) = (1-L)x + (Lx-f(x))$ 严格单调递增

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-f(x))=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-f(x))=-\infty$

$x-f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 有解且唯一

③ 对任一$\varepsilon>0$. 存在N s.t. $n\geq N_0$. $|x-x|<\frac{(1-L)}{2}\cdot\varepsilon$

取N'. s.t. $\forall n\geq N'$. 有$L^{n-N}\cdot(M+|c|)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n>N'$. 有$|y_{n+1}-c|=|x_{n+1}+f(y_n)-x-f(c)|$

$$\leq|x_{n+1}-x|+|f(y_n)-f(c)|$$

$$\leq|x_{n+1}-x|+L\cdot|y_n-c|$$

$$\leq|x_{n+1}-x|+L\cdot(|x_n-x|+L\cdot|y_{n-1}-c|)$$

不是到y_1.
因为是$n>N'$才有解x
到$n-N$

$$\leq|x_{n+1}-x|+L\cdot|x_n-x|+\cdots+L^{n-N}|x_{N+1}-x|+L^{n-N+1}|y_N-c|$$

$$=\frac{(1+L)\cdot\varepsilon}{2}\cdot\frac{(1-L^{?})}{1-L}+L^{n-N+1}\cdot(M+|c|)$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\therefore$ y_n收敛到c

出题人是研究动力系统的

一个伪证

先证y_n有界

然后y_n. $\varlimsup_{n\to\infty}y_n\in\mathbb{R}$

对递推式同时取上下极限

$\varlimsup_{n\to\infty}y_n=\lim x_n+\varlimsup f(y_n)\neq\lim x_n+f(\varlimsup y_n)$ 上下极限不能互换

取子列$\{y_{n_k}\}$使$\lim f(y_{n_k})=\varlimsup f(y_{n_k})$

不妨就设为y_{n_k}

不妨设$y_{n_k}\to y$

$$f(\lim_{k\to\infty}y_{n_k})=f(y)$$

$\varlimsup_{n\to\infty}y_n=\lim_{k\to\infty}y_{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}+\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})$

n_k+1和n_k不一定在一个子列里
1是加在n后面的

$=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}f(y_n)$

另证 证 $x_n \to 0$.

给 f 进行变化

给 f 加上 x_n 的极限

$z_n = |y_n - c|$

$|y_{n+1} - c| \le |x_n| + L \cdot |y_n - c|$

$|x_n| < \varepsilon$

$z_{n+1} \le \varepsilon + z_n \cdot L$

$z_{n+1} \le \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1-L} \cdot L$

$y_{n+1} = f(y_n)$

$\frac{\varepsilon(1-L) + 2\varepsilon L}{1-L}$

若 $z_n > \frac{2\varepsilon}{1-L}$ 则 $z_{n+1} \le z_n - \varepsilon$

$\to$ 弄出了一个上界

另证 $\{y_n\}$ 有界

$|y_{n+1} - y_n|$ 有界

$|f(y_{n+1}) - f(y_n)| \le L \cdot |y_{n+1} - y_n|$

$|y_{n+2} - x_{n+2} - y_{n+1} + x_{n+1}| \le L \cdot |y_{n+1} - y_n|$

$|y_{n+2} - y_{n+1}| \le L \cdot |y_{n+1} - y_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}|$ 对 $y_{n+2} - y_{n+1}$

$h_0 \le L \cdot h_0 + 0$. 两边取上极限 $h_0 \le 0$

$l_0 \ge 0$

$|y_{n+2} - y_{n+1}| \to h_0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$

不行 就取收敛子列

$|y_{n_k+1} - y_{n_k}| \to h' = h_0$ $\lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$ 用这证 y_{n_k+1} 和 y_{n_k} 在同一个序列里

有 $y_{n_k} \to h$. $x_n \to c$

$y_{n_k+1} = x_{n_k+1} + f(y_{n_k}) \to c + f(h)$

$\parallel$

$y_{n_k} + y_{n_k+1} - y_{n_k}$

$\downarrow$

$h + 0 = h$

$\therefore h = c + f(h)$ $l = c + f(l)$

$|f(h) - f(l)| \le L \cdot (h - l)$

$\le L |f(h) - f(l)|$

$\therefore f(h) = f(l)$

$h = l$

$\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \lim x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} f(y_n)$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \lim x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} f(y_n)$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n - \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} f(y_n) - \underline{\lim}_{n\to\infty} f(y_n)$

$\forall \varepsilon>0$. 取 y_m. y_k. s.t. $f(y_m) > \overline{\lim} f(y_n) - \varepsilon$

$f(y_k) < \underline{\lim} f(y_n) + \varepsilon$

又 $y_m < h+\varepsilon$

$y_k > l-\varepsilon$

$y_m - y_k < h_1 - l_1 + 2\varepsilon$

$f(y_m) - f(y_k) > h_2 - l_2 - 2\varepsilon$

$\dfrac{|f(y_m) - f(y_k)|}{y_m - y_k} > 1-\varepsilon'$. 对随便的L 都可以保证成立

与条件里的 $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$

上下极限相等以须去证 比如 $x \cdot \sin x$

7. 如果要回避上下极限相等

$\forall M>0\ \exists X.\ \forall |x|>X\ \ |f(x)|>M$

若不成 $\exists M>0. \forall X.\ \exists |x|>X\ |f(x)| \le M$.

可以找到子列(有界)

从某一项之后有 $\to$ 找到子子列 $\to$ 收敛于有限数 $\to$ 矛

$|f(x)|>M$ 的话可以用介值定理来说它只能在一边

因为如果在两边的话介值矛盾

或者你说它有趋近 $+\infty$ or $-\infty$ 子列与条件矛盾

3. 加强版有限覆盖 $\forall |x'-x''|<\delta\ \ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 把绝对值直接打开

$|f(x) - f(y)| \le L_i |x-y|$ 不妨设 $y>x$ 右边是正的之后就可以让它

$[x,y]$ 可以被有限覆盖. 直接加了

导致右边能放的方法竟然是没有

$|f(x) - f(y)|$

$\le |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y)|$

$\le M_{max}(y - x_n + x_n - x_{n-1} + \cdots + x_1 - x)$

$\le M_{max}(y-x)$

LOOSE LEAF L1201 6mm×30lines maruman

扫描全能王 创建