数学分析一　期中考试（1）

Exam Date: October 9.　Time: 8:05 am to 9:05 am.

注意：

- 计算题需要有完整的解题步骤，证明题需要严密的论证过程。
- 没有出现在答题纸上的要点，视为答题人不知道或者没有能力阐述清楚。
- 答题纸上不需要抄题目。但是请标好答题序号。
- 请大家严格遵守考试纪律。祝大家考试顺利!

1. 判断并说明。（每道题10分，其中判断5分，说明5分。说明简单扼要即可。共30分。）

（a） 两个非负发散序列的积也是发散的。

（b） 设 $f: X \to Y$ 是一个函数，如果存在 $g: Y \to X$，使得 $\forall x \in X, g(f(x)) = x$，则 $g = f^{-1}$。

（c） 设 $\{x_n\}$ 是一个序列。它满足如下不等式

$$0 \le x_k \le 2019 x_n, \quad n \le k \le 2n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

又已知 $\lim_{n\to\infty} x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 存在，那么 $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$

2. 计算题和极限的证明。（每道题10分。共40分。）

（a） 设 $x_1 \in [0,1]$，且当 $n \ge 2$ 时

$$x_n = \frac{1}{2} x_{n-1}, \quad n\text{是偶数}; \qquad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2}, \quad n\text{是奇数。}$$

求序列$\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n+1}\}$ 的极限。序列 $\{x_n\}$ 收敛吗？请简述原因。

（b） 证明下面极限：（需要使用 $\varepsilon - N$ 语言）：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

（c） 求下面集合的上下确界：

$$E = \left\{ \left(1 + 2^{n(-1)^n}\right)^{1/n} : \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

（d） 设 $a_0 = 0,$ 而当 $n \ge 1$ 时，$a_n = 1 + \sin(a_{n-1} - 1)$。求 $\lim_{n\to\infty} a_n$。

3. 证明题。（每道题15分。共30分。）

（a） 叙述并证明极限四则运算中的除法定理。（证明过程中不要使用乘法定理。）

（b） 设 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的序列，$\{b_n\}$ 是严格递减趋于 0 的序列，则当 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 存在时，证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$