

2015-2016 学年第一学期数学分析 I 期中考试

一、(15 分) 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-1} \right)^{2n+1}$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

二、(15 分) 求下列函数的导数:

- (1) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$;
- (2) $y = x^{x^x}$;
- (3) $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{a} (a > 0)$.

三、(15 分) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且有 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取到最小值。

四、(15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对任意 $x \geq 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}^*} f(x+n) = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。举例说明如果 $f(x)$ 的条件由一致连续减弱为连续, 则结论不一定成立。

五、(15 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{a_{n+1}^2}{n} + a_{n+1}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = 1$ 。

六、(15 分) 设有界实数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ 。

七、(10 分) 设 $f \in C[a, b]$, 且对于任意 $\xi \in (a, b)$, 任意 $\delta > 0$, 均存在 $x \in (\xi - \delta, \xi)$, 使得 $f(x) < f(\xi)$ 。证明 $f(x)$ 在 (a, b) 严格单调递增。