2024/10/30

1.

设 $E = \{(x, y) \mid x, y\text{均为有理数}\}$, $D = [0,1] \times [0,1]$. 证明 $D \cap E$ 不可求体积.

Answer:

注意到

$$V(\sigma(D \cap E)) = V(D) = 1$$

这与有界区域可求区域的充分必要条件不符. $(V(\sigma(D \cap E)) = 0)$

2.

设 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个可求面积的有界区域, $f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 内有界并且在 D 内连续. 证明 $f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 可积.

Answer:

由 (x, y), $f(x, y)$ 在 D 上有界, 知 $\exists M > 0$, 使得 $f(x, y) \leq M$ 在 D 上恒成立. 由 D 可求面积, 知 $\sigma(\partial D) = 0$, 故对 $\forall \epsilon > 0$, 存在简单集合 $\{E_1, E_2, \ldots, E_K\} \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $\partial D \subset E_i^\circ$, 且 $\sigma(E_i^\circ) < \frac{\epsilon}{4M}$, 从而存在 $\overline{D} \cap E^\circ$ 的分割 $\{D_1, D_2, \ldots, D_K\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{K} w_k \sigma(D_k) \leq 2M \sum_{k=1}^{K} w_k < \frac{\epsilon}{2}.$$

由 $\overline{D} \setminus E^\circ$ 的紧性, 知 $f(x, y)$ 在 $\overline{D} \setminus E^\circ$ 上一致连续, 故存在 $\overline{D} \setminus E^\circ$ 的分割 $\{D_{K+1}, D_{K+2}, \ldots, D_{K+I}\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{K+I} w_k \sigma(D_k) < \epsilon.$$

其中 ω_k 为 D_k 在 $f(x, y)$ 上的振幅, 从而 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

3.

计算积分 $\iint_D x^2 |y|^3 \, \mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = [-2, 2] \times [-1, 1]$.

Anwser:

$$
\begin{aligned}
\iint_D x^2|y|^3 &= \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} x^2|y|^3 \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

4.

计算积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{8x}{(x^2+y^2+1)^2} \mathrm{d}y$.

Answer:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{8x}{(x^2+y^2+1)^2} \mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{3}} \frac{8x}{(x^2+y^2+1)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{y^2+1} - \frac{4}{y^2+4} \right) \mathrm{d}y \\
&= \pi - 2\arctan\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

5.

设 $D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \in R(D)$, 证明:

$$
\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n} \right) \right) = \exp\left(\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}\sigma \right).
$$

Answer:

由 $f \in R(D)$, 设 M 是 $|f(x)|$ 上界, 我们有:

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}\sigma \right) &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{n^2} f(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n^2} f(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \prod_{\ell=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} f(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}) + o\left(\frac{M}{n^2} \right) \right)
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}f(\frac{k}{n},\frac{\ell}{n})+o\left(\frac{M}{n^2}\right)\right)-\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}f\left(\frac{k}{n},\frac{\ell}{n}\right)\right)\right| \\
\le&\sum_{i=1}^{n^2}\left(o\left(\frac{M}{n^2}\right)\right)^i\left(1+\frac{M}{n^2}\right)^{n^2-i}\binom{n^2}{i} \\
=&\left(1+\frac{M}{n^2}+o\left(\frac{M}{n^2}\right)\right)^{n^2}-\left(1+\frac{M}{n^2}\right)^{n^2} \\
=&\mathrm{e}^{M+o(1)}-e^M\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

从而,

$$
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n^2}f\left(\frac{k}{n},\frac{\ell}{n}\right)\right)=\exp\left(\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right).
$$