20240918作业订正

首先, 课堂ppt上的压缩不动点定理更正为:

【压缩映射原理】设Ω是$\mathbb{R}^n$中的紧集, $\boldsymbol{f}$是Ω上的一个压缩映射,
则在Ω中存在$\boldsymbol{f}$ 的唯一不动点$\boldsymbol{x}^*$, 即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$.

1. 设$D \subset \mathbb{R}^n$是紧集, 映射$T: D \longrightarrow D$, 且存在常数$\theta \in [0,1), k \in \mathbb{N}$ s.t. $\|T^k\boldsymbol{x} - T^k\boldsymbol{y}\| \leqslant \theta\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$, 证明: T有唯一的不动点.

2. 设函数$u = f(\boldsymbol{x})$在$U(\boldsymbol{x}_0, \delta_0) \subset \mathbb{R}^n$ $(\delta_0 > 0)$ 内存在各个偏导数, 并且所有的偏导数在该邻域有界, 证明$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$ 处连续; 举例说明存在这样的函数$u = g(\boldsymbol{x})$, 它的各个偏导数在$\boldsymbol{x}_0$的任何邻域内无界, 但它在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

   该题意思是, 所有偏导函数在$\boldsymbol{x}_0$点的某个邻域内有界在函数在此点连续.
   但反之不真, 即确实存在不满足条件的函数也在$\boldsymbol{x}_0$点连续.
   所以, 原题干的陈述不严密. 谢谢郭焕琨同学指出该处问题. 也为我抄书不细心看而抱歉!

3. 举例说明在$\mathbb{R}^2$内存在函数$z = f(x,y)$, 使得$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$内处处不连续, 但它在原点处存在两个偏导数.

4. 求函数$u = \ln(1 + \|\boldsymbol{x}\|)$的各个偏导数, 其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

5. 求函数$f(\boldsymbol{x}) = \ln \|\boldsymbol{x}\|, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$的全微分.