2024/12/9

习题 16

求曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于锥面 $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 内的部分的质心坐标.

$$\iint_S \mathrm{d}S=\iint_S \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi(1-\cos\alpha)$$

$$\iint_S x\mathrm{d}S=\iint_S \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=0$$

$$\iint_S y\mathrm{d}S=\iint_S \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=0$$

$$\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_S \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\alpha}r\mathrm{d}r=\pi\sin^2\alpha$$

从而,

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{\iint_S x\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S},\frac{\iint_S y\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S},\frac{\iint_S z\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S})=(0,0,\frac{1+\cos\alpha}{2})$$

习题 33 (6)

证明下列第二型曲线积分与路径无关, 并求值

$$\int_{(1,0.\frac{\pi}{2})}^{(2,\pi,\frac{3}{2}\pi)}\cos y\sin z\mathrm{d}x-x\sin y\sin z\mathrm{d}y+x\cos y\cos z\mathrm{d}z$$

Answer:

注意到 $\mathrm{d}(x\cos y\sin z)=\cos y\sin z\mathrm{d}x-x\sin y\sin z\mathrm{d}y+x\cos y\cos z\mathrm{d}z$, 因此该积分与路径无关, 且对于参数方程 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=\pi t,\\ z=\frac{\pi}{2}+\pi t\end{cases}$, 其中 $t\in[0,1]$, 有

$$I=\int_{(1,0.\frac{\pi}{2})}^{(2,\pi,\frac{3}{2}\pi)}\mathrm{d}u=u(t)\big|_0^1=1$$

习题 34 (2)

求下列微分的原函数:

$\mathrm{d}u=(\sin yz+yz\cos xz+yz\cos xy)\,\mathrm{d}x+(\sin xz+xz\cos yz+xz\cos xy)\,\mathrm{d}y$
$+(\sin xy+xy\cos yz+xy\cos xz)\,\mathrm{d}z.$

Answer:

$$u\left(x,y,z\right)=x\sin yz+y\sin xz+z\sin xy+C$$

习题 44

设 $f\left(x,y,z\right)$为一数量场, $\mathbf{F}\left(x,y,z\right)$ 为一向量场,求:

$(1)\ \mathrm{div}\left(\nabla f\right);$
$(2)\ \nabla\left(\mathrm{div}\mathbf{F}\right);$
$(3)\ \mathbf{rot}\left(\mathbf{grad}f\right);$
$(4)\ \mathrm{div}\left(f\mathbf{F}\right).$

Answer:

(1) $I=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\Delta f$
(2) $I=\nabla(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z})=$
$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z\partial y}\right)$

(3) $I=\nabla\cdot(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=0$

(4) $I=\frac{\partial(fF_1)}{\partial x}+\frac{\partial(fF_2)}{\partial y}+\frac{\partial(fF_3)}{\partial z}$

习题 47

设向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=f(r)(x,y,z)$, f 可微, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求证:

(1) 若 $r\neq 0$, 则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=0$

Answer:

实际上,

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f(r)x & f(r)y & f(r)z\end{vmatrix}=\frac{\partial f(r)}{\partial r}(yz-yz-xz+xz+xy-yx)=0$$

(2) 若 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$, 则 $f(r)=cr^{-3}$, 其中 c 为常数

Answer:

由

$$0=\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial(xf(r))}{\partial x}+\frac{\partial(yf(r))}{\partial y}+\frac{\partial(zf(r))}{\partial z}=3f(r)+rf'(r)$$

可知

$$(r^3f(r))'=r^2(3f(r)+rf'(r))=0$$

因此 $r^3f(r)=c$, 也即 $f(r)=cr^{-3}$

2024/12/11

习题 4(1)

求下列极限 : $\lim_{x\to 0}\int_0^{e^x}\frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}y$

Answer:

$$I=\int_0^1\lim_{x\to 0}\frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

习题 7(2)

求下列函数的导数:$F(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{d}t\int_t^{\sin x}f(t,s)\mathrm{d}s$

$$\begin{aligned}F'(x)&=\int_x^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_t^{\sin x}f(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t+2x\int_{x^2}^{\sin x}f\left(x^2,s\right)\mathrm{d}s-\int_x^{\sin x}f(x,s)\,\mathrm{d}s\\&=\int_x^{x^2}f(t,\sin x)\cos x\mathrm{d}y+2x\int_{x^2}^{\sin x}f\left(x^2,s\right)\mathrm{d}s-\int_x^{\sin x}f(x,s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

习题 13

设函数 $f(x,y)=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin(x+yt)}{t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 证明或否定 : 存在 $x=0$ 的某个邻域上的连续函数 $y=g(x)$, 使得 $g(0)=1$, $f(x,g(x))=0$.

Answer:

$f(0,1)=0$, f, $f'_y=\int_{\frac{1}{2}}^1\cos(x+yt)\mathrm{d}t$ 在 $(0,1)$ 的某个邻域上连续, $f'_y(0,1)=\int_{\frac{1}{2}}^1\cos t\mathrm{d}t\neq 0$, 由隐函数存在定理, 知满足要求的函数存在.

习题 14

利用 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,\mathrm{d}\,\theta=1\,(0<r<1)$,
求$I\left(r\right)=\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)\mathrm{d}\theta\,(0<r<1)\,.$

Answer:
由于

$$I'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{-2\cos\theta + 2r}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\right) \mathrm{d}\,\theta = 0$$

知 $I(r)$ 在 $(0,1)$ 上为常数, 因此 $I(r) = I(0) = 0$

习题 15(3)(4)

求证下列含参变量积分在指定集合上一致收敛:
(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 y \ln(1+y)}{x^2+y^2} \mathrm{d}y (x \geq a > 0)$
Answer:
注意到 $\left|\frac{\sin x^2 y \ln(1+y)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\ln(1+y)}{a^2+y^2}$, 又由比较判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+y)}{a^2+y^2} \mathrm{d}y$ 收敛, 于是由 weiersrass 判别法知原式在 $[a, \infty)$ 上一致收敛

(4) $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{xy}}{x+y^{\frac{1}{4}}} \mathrm{d}y \, (0 \leq x \leq 1)$
Answer:
在 $[0,1]^2$ 上恒有 $0 \leq \frac{\sin\sqrt{xy}}{x+y^{\frac{1}{4}}} \leq y^{\frac{1}{4}}$, 而 $\int_0^1 y^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}y$ 收敛, 于是由 weiersrass 判别法知原式在 $[0,1]$ 上一致收敛

习题 16(3)

讨论下列含参变量积分的一致收敛性:
$\int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \mathrm{d}y$, 其中 (a) $x \leq a$;(b) $x \in \mathbb{R}$.
Answer:
(a) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \, \mathrm{d}y$ 在 $[0,a]$ 上没有瑕点, 故其攻散性与 $\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \, \mathrm{d}y$ 的相同. 在 $(-\infty, a] \times [a, +\infty)$ 上恒有 $0 < \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \leq \mathrm{e}^{-(y-a)^2}$, 而 $\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y-a)^2} \, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}y$ 收玫, 由魏尔斯特拉斯定理,知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y$ 在 $(-\infty, a]$ 上一致收敛.

(b) 取 $\varepsilon = \mathrm{e}^{-1}$, 对 $\forall A_0 > 0$, 取 $A = n > A_0, A' = n+1, x = n > 0$, 则 $\int_A^{A'} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \, \mathrm{d}y \geq \mathrm{e}^{-1} = \varepsilon$,由柯西收敛准则，知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \, \mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致收玫.