19 春 杨家忠 数分 2 数学分析 2 期中

北京大学数学科学学院数学分析II期中考试试题

共 六 道大题，满分 100 分，2019.4.15　10 : 10 − 12 : 00

一、(每小题 15 分，共 45 分)

(1) 设 $g(x) \geq 0$, 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b g(x)dx = 0$，证明：对 $[a,b]$ 上的任意连续函数 $f(x)$，有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$。如果去掉 $g(x) \geq 0$ 这个假设，结论还成立吗？

(2) 证明定义在实数轴上的非平凡（不恒为0）的连续周期函数，其无穷限广义积分不可能收敛。

(3) 这是我们第三次考下面这个函数了，这次我们考查的是这个函数的可积性：给定 $[0,1]$ 上的实数 a，记其十进制表示为：$a = 0.a_1a_2a_3\cdots$。设 $[0,1]$ 上的函数 $f_a(x)$ 定义如下：给定 $x \in [0,1]$，$x = 0.x_1x_2\cdots$，定义 $f_a(x) = 0.a_1x_1a_2x_2a_3x_3\cdots$ 证明 $f_a(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积。

二、(本题 10 分) 试通过计算 $y = \arctan\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}$ 的导数来计算下面定积分的值：

$$I = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}dx.$$

三、(本题 10 分) 给定两个条件收敛的级数 (A)：$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 和 (B)：$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$，分别收敛于 A 和 B。定义Cauchy乘积级数 (C): $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$，其中 $c_n = a_1b_n + \cdots + a_nb_1$。假设 (C) 级数收敛于 C，证明：$C = AB$。

四、(本题 10 分) 如果对任意级数 $\sum b_n$，只要 $\sum b_n^2$ 收敛，都有 $\sum a_nb_n$ 收敛，那么 $\sum a_n^2$ 也收敛。证明或否定这个命题。

五、(每小题 10 分，共 20 分) 判断级数和广义积分的条件收敛和绝对收敛性。

(1) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+\beta^n}$，$(\alpha > 0, \beta > 0)$ (建议在 (α,β) 参数平面标出c.c, a.c和发散的区域)。

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}dx$，$(\alpha > 0)$。

上升

六、(本题共 5 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的单调函数，$0 \leq f(x) \leq 1$，$\int_0^1 (f(x)-x)dx = 0$。证明：$\int_0^1 |f(x)-x|dx \leq \frac{1}{2}$。
