2024/12/16

习题 18

设函数 $f\left(x\right)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}\mathrm{d}y$, 求 $\lim_{x\to 0}f\left(x\right),\lim_{x\to +\infty}f\left(x\right)$ ..

Answer:
注意到 $\frac{\cos xy}{1+y^2}$ 在 $\mathbb{R}\times[1,+\infty)$ 上连续, 且 $\left|\frac{\cos xy}{1+y^2}\right|<\frac{1}{y^2}$,后者的广义积分收敛, 故 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos xy}{1+y^2}\right|\mathrm{d}y$ 收敛, 因此 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 从而

$$\lim_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}$$

由黎曼引理, 且$\frac{1}{1+y^2}$ 在 $[1,+\infty)$ 上黎曼可积, 从而 $\lim_{x\to +\infty}f\left(x\right)=0$.

习题 19

利用 $F\left(\alpha\right)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\mathrm{d}x$, 求$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-x^{-2}}\mathrm{d}x$.

Answer:
注意到

$$F'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{-2\alpha}{x^2}\mathrm{e}^{-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}}\mathrm{d}x=-2F(\alpha)$$

解得 $F(\alpha)=C\mathrm{e}^{-2\alpha}$, 带入 $F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 得 $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 从而 $F(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\alpha^2}$, 令 $\alpha=1$, 得 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-x^{-2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2}$.

习题 20

求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 xy}{y^2}\mathrm{d}y$

Answer:
不妨 $x>0$, 注意到 $F''(x)=2\int_0^{+\infty}\cos xy\mathrm{d}y=0$, 因此 $F(x)=Cx+D$, 令 $x=0,1$ 可知,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 y}{y^2}\mathrm{d}y = -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}\,(2x) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

习题 21

求 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$

Answer:

$$
I = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}
$$

2024/12/18

习题 30

计算下列广义积分

(3)$\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x$

Answer:

$$
I = -\int_0^{+\infty}(-t)^n\mathrm{d}e^{-t} = (-1)^n\Gamma(n+1) = (-1)^n\cdot n!
$$

(4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^p x\mathrm{d}x\;(|p|<1)$

Answer:

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\times\frac{p+1}{2}-1}x\cos^{2\times\frac{1-p}{2}-1}x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2},\frac{1-p}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}
$$

(5)$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Answer:

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}(2x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}2x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta\mathrm{d}\theta$

Answer:

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},3\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(3\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=\frac{8}{315}$$

习题 33

求曲面$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\ (a>0)$与坐标平面在第一象限所围立体的体积

Answer:

做变量替换$\begin{cases}x=r\sin^4\varphi\cos^4\theta\\y=r\sin^4\varphi\sin^4\theta\\z=r\cos^4\varphi\end{cases}$，由

$$\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\varphi,\theta\right)}=16r^2\cos^3\varphi\sin^7\varphi\cos^3\theta\sin^3\theta$$

可知,

$$\begin{aligned}V&=\iiint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega 16r^2\cos^3\varphi\sin^7\varphi\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\left(\int_0^\alpha 16r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{4a^3}{3}\mathrm{B}\left(2,4\right)\mathrm{B}\left(2,2\right)=\frac{4\Gamma^3\left(2\right)\Gamma\left(4\right)a^3}{3\Gamma\left(6\right)\Gamma\left(4\right)}=\frac{4a^3}{3\times 5!}=\frac{a^3}{90}\end{aligned}$$