北京大学数学科学学院期中考试试题

2015-2016　　学年第一学期

考试科目： **数学分析（III）**　　**考试时间：** **2015 年11 月11日**

姓　　名： ________　　**学　　号：** ________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

1. （20 分）

   (1) 极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ 是否存在？若存在则求其值；若不存在说明理由。

   (2) 设 $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ 当 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ 时，$f(0,0,0) = 0$. 试讨论 f 在（0,0,0）点的连续性。

2. （20 分）

   (1) 设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 是由方程组 $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ 确定，其中 φ 和 ψ 均为连续可微函数且 $\varphi'_x\psi'_y \neq \varphi'_y\psi'_x$, 考虑复合函数 $w = f(x(u,v),u,v)$, 其中 f 是连续可微函数。求偏导数 $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ 和 $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

   (2) 设 $x, y > 0, a, b$ 为非负实数，求 $z = x^a y^b$ 在条件 $ax + by = 1$ 下的极大值 $M_{a,b}$. 进一步再求函数 $M_{a,b}$ 关于变量 a, b 的极值。

3. （20 分）证明或计算下列各题。

   (1) 证明球面 $S_1 : x^2+y^2+z^2 = R^2$ 与锥面 $S_2 : x^2+y^2 = a^2z^2$ 正交，即在交点处的法向量相互垂直。

   (2) 试求曲线 $\Gamma : x = a\sin t, y = a\cos t, z = bt$ 上各点的切线 l 的方程。当切点沿 Γ 运动时，记所有切线 l 形成的曲面为 Σ，试求曲面 Σ 上各点的切平面方程。

4. （15 分）证明凸函数的极小值点具有全局性。即：设 $f(x_1, \cdots, _n)$ 是开区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的连续可微的凸函数。证明如果 $P_0 \in D$ 是 f 的极小值点，那么它也是 f 在 D 上的最小值点。

5. （15 分）设函数 $z(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的连续函数，在 D 内部偏导数存在，在 D 的边界上其值为 0，在 D 的内部满足 $z'_x + z'_y = f(z)$, 其中 f 是一个严格单调函数，$f(0) = 0$. 证明 $z(x,y) \equiv 0, ((x,y) \in D)$.

6. （5 分）设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 的二元函数，关于 y 连续，并且偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在。如果 $f(x,y)$ 在 P 点和 Q 点有 $\frac{\partial f}{\partial x}|_P > 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}|_Q < 0$，证明：一定存在一点 M 使得在 M 点处，有 $\frac{\partial f}{\partial x}|_M = 0$. 进一步，试问：是否一定有 $M \in \overline{PQ}$?

7. （5 分）给定边长为 1 的等边三角形 $\triangle ABC$，试在所有二等分其面积的直线段中，求出最短的线段长度 l 和最长的线段长度 L. 进一步，如果允许用折线段来二等分三角形的面积，问是否存在一条折了一次的折线，其线段长度比 l 还小？可能的直线段或平面二次曲线中，找出一条将此三角形面积二等分的最短曲线。

(编辑：伏贵荣 2017 年 2 月)