2024/12/2

习题 14

求下列第一型曲面积分
(1) $\iint_S z^3\mathrm{d}S$, 其中 S 是单位球面的上半部分 $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$
Answer:

$$I=\iint_S(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

(3) $\iint_S x^2y^2\mathrm{d}S$, 其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$
Answer:
设上半部分为 S_1, 下半部分为 S_2, 由对称性知

$$\iint_{S_1}x^2y^2\mathrm{d}S=\iint_{S_2}x^2y^2\mathrm{d}S$$

因此

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{S_1}x^2y^2\mathrm{d}S=2\iint_{S_1}\frac{x^2y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}S\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\frac{2-2\cos 4\theta}{15}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4\pi}{15}\end{aligned}$$

(5) $\iint_S z^2\mathrm{d}S$, S 为螺旋面 $\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v,\ (0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq 2\pi)\\ z=v\end{cases}$
Answer:

$$I=\iint_S v^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}v^2\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}v=\frac{4\pi^3(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))}{3}$$

习题 17

求下列第二型曲面积分
(2) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为 $\partial N((0,0,0),1)$ 的外侧.

Answer:
关于原点对称的封闭曲面上的偶函数的第二型曲面积分为 0, 因此 $I = 0$

习题 18

设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧, 求下列第二型曲面积分:
(1) $\iint_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Answer:

$$\begin{aligned} I &= 3\iint_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z = 6\iint_S (1-y^2-z^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}r = \frac{12}{5}\pi \end{aligned}$$

2024/11/27

习题 28

利用高斯公式计算下列第二型曲面积分:
(2)$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是曲面 $z = 4 - (x^2 + y^2)$ 与平面 $z = 0$ 所围立体的外侧;
Answer:

$$I = \iiint_D 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 12\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^{4-(x^2+y^2)} \mathrm{d}z = 24\pi$$

(3) $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2y + \sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z + e^x \cos y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是立体 $\{(x, y, z) | 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ 的外侧;
Answer:

$$I = \iiint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 4r^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = \frac{112}{3}\pi$$

(4) $\iint_S z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧;
Answer:

$$I = \iiint_D 3z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 3r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi$$

习题 31

利用斯托克斯定理求下列第二型曲线积分:

(1) $\int_\Gamma 2y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + 3y\mathrm{d}z$ 其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与平面 $z=x+2$ 的交线, 从原点看去取顺时针方向:

Answer:

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & z & 3y \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -2\sqrt{2}\iint_S \mathrm{d}S = -12\sqrt{2}\pi$$

(2) $\int_\Gamma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3+yz & -3xy^2 \end{vmatrix}$其中 S 是曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 Oxy 平面的上半部分, 取上侧:

Answer:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial S} (x-z)\mathrm{d}x + (x^3+yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\cos t\sin t + 16\cos^4 t)\mathrm{d}t = 12\pi \end{aligned}$$

(3) $\int_\Gamma (-3y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=2$ 的交线, 从原点看去取逆时针方向:

Answer:

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & 1 \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -6\iint_S \mathrm{d}S = -6\pi$$

(4) $\int_\Gamma (y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z$ 其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与柱面 $x^2+y^2=2rx$ 的交线 $(0<r<R, z>0)$, 从点 $(r,0,0)$ 看去取逆时针方向.

Answer:

利用 S 的参数方程

$$\begin{cases} x = r + u\cos v \\ y = u\sin v, \\ z = \sqrt{2(R-r)(r+u\cos v)} \end{cases}$$

$(0\le u\le r, 0\le v\le 2\pi)$, 得 $(A,B,C) = \left(-u\sqrt{\frac{R-r}{2(r+u\cos v)}}, 0, u\right)$, 故

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma}\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z\\
&=-2\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=-2\iint_D\left(-u\sqrt{\frac{R-r}{2(r+u\cos v)}}\left(u\sin v-\sqrt{2(R-r)(r+u\cos v)}\right)+u(r+u\cos v-u\sin v)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&=-2R\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}v\int_0^r u\,\mathrm{d}u-2\pi Rr^2.
\end{aligned}
$$