北京大学数学科学学院数学分析(二)期中考试

2021 年 5 月 10 日 10:10-12:10

姓名 [redacted] 学号 [redacted]

全卷共 2 页，计 7 道大题，满分 100 分.

---

1. **(每道小题2分，共14分)** 判断下列命题的对错（不需给出理由）。

   (1) 若 $f(x) \in R[a,b]$，则 $|f(x)| \in R[a,b]$. ✓

   (2) 若 $f(x) \in R[0,1]$，则存在 $\xi \in [0,1]$，使得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$. ✗

   (3) 若 $f(x), g(x)$ 在任何有界闭区间上都Riemann可积，则 $g(f(x))$ 在任何有界闭区间上都Riemann可积。✗

   (4) 若无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $|f(x)|$ 在$[0,+\infty)$ 有界。✗

   (5) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛。✗

   (6) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \sin n}{n}$ 收敛。✗ $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ $\frac{\sin n}{n\ln n}$

   (7) 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛。✓

2. **(本题16分)** 求下列极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{\sin x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x^3} = -\frac{1}{6}, \qquad (2)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right). = 2\ln 2 - 1$$

3. **(本题10分)** 求平面曲线 $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ 的弧长。

$=8$

4. **(本题15分)** 令 $f(x)=\sin\left(x\left[\frac{x}{2\pi}\right]\right)$，这里 $[\cdot]$ 为取整函数。

(1) 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛；

(2) 求序列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

运用积化和差 见鬼！见鬼！见鬼！

-3~-4

5. **(本题20分)** 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，$\forall X>0$, $f(x)\in R[0,X]$，并且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(1) 证明：$\forall X>0$, $f(x^2)$在 $[0,X]$ 上Riemann可积；

(2) 证明：无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{d}x$ 收敛。

很多人只得了3分

大约 -7

6. **(本题10分)** 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n x^n}{n!},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

的敛散性与绝对敛散性。

大约 -4

$|x|<\frac{1}{e}$, a.c.

$x=\frac{1}{e}$, 发散

$x=-\frac{1}{e}$, c.c.

$|x|>\frac{1}{e}$, d.

Raabe判别法搞反了.

7. **(本题15分)** 设 $f(x)=\sin x$，任取 $a_0\in(0,\pi/2)$，令 $a_{n+1}=f(a_n)$, $b_n=f'(a_n)$, $n\geq 0$.

(1) 证明：数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 与无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$同时敛散；

(2) 证明：无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散到0；

$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}} = 3$

(3) 证明：数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ 收敛，其中 $B_n=\prod\limits_{k=1}^{n} b_k$.

(3). $n\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{1}{b_{n+1}}-1\right)=n\,\frac{1-\cos a_{n+1}}{b_{n+1}}$

$= n a_{n+1}^2\,\frac{1-\cos a_{n+1}}{b_{n+1}\cdot a_{n+1}^2}\to\frac{3}{2}$.

[全卷完]

第二页（共二页）