20241016作业

1. 设函数$z = F(x,y)$在区域D内具有连续偏导数且处处成立$F'_x(x,y) \neq 0$, $F'_y(x,y) \neq 0$. 证明: 对于$\forall(x_0,y_0) \in D$, 方程$F(x,y) = F(x_0,y_0)$在(x_0,y_0)的邻域内确定的隐函数$y = f(x)$ 及$x = g(y)$ 互为反函数.

2. 证明三元方程$x^2 - 2xy + z + xe^z = 0$在$(1,1,0)$点的邻域内唯一确定一个隐函数$z = f(x,y)$, 并求$f(x,y)$ 在$(1,1)$ 处的Taylor公式(直到二阶).

3. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $F \in C^2(\Omega), u = F(xy, y+z, xz)$满足$\dfrac{\partial u}{\partial z} \neq 0$, $(x,y,z) \in \Omega$. 对$F(xy, y+z, xz) = 0$所确定的隐函数$z = z(x,y)$计算全部的一阶、二阶偏导数.

4. 设$f(u)$可导, $u = u(x,y)$可微, $z = z(x,y)$由$\begin{cases} (z - f(u))^2 = x^2(y^2 - u^2), \\ (z - f(u))f'(u) = ux^2 \end{cases}$ 给定.
   验证: $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

5. 设$n > m \geqslant 1$,证明: 不存在$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^m$ 的C^1 同胚.