2019-2020 学年数学分析 III

期末考试试题 (回忆版)[1]

整理人：丁睿

[1] 考试范围：幂级数　Fourier 级数　含参变量积分

授课老师：史宇光　王嵬

考试时间：2020 年 1 月 7 日　8:30-10:30

试题共 9 道，除 4,5 两题各 15 分外其余每题 10 分。

1. 试将 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 3$ 处按幂级数展开，并指出其收敛域.

2. 求级数和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. 已知级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 中对任意下标 n 成立 $a_n \geq 0$. 若存在正数 C 使得

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq C < +\infty.$$

证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 收敛.

4. 求 $f(x) = x^2$ 在 $[0, \pi]$ 上的余弦级数，并利用此结果求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

5. 证明：对 $\forall x \in [0, \pi]$，成立

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx.$$

并利用此结果证明，若 $f(x)$ 是任意某区间 $[a,b]$ 上的绝对可积函数，就有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos px|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可微，而且导函数 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上平方可积. 已知 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. 求证 $\displaystyle\int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^\pi f'^2(x)\,\mathrm{d}x$.

7. 设参变量 $\alpha \ge 0, \beta \ge 0$. 试讨论广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta}$$

的收敛性以及关于 α 和 β 的一致收敛性.

8. 求积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\mathrm{d}x.$$

9. 已知 $f(x) \in C[a,b]$. 且 $\exists m \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \ge m$，均成立 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,x^n\,\mathrm{d}x = 0$. 求证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒零.

Probable Ways of Answering[1]

解答人：丁睿

Caution: 请认真思考后参考!

1. 知 $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{x-3}{3}\right)$ 在 $x=3$ 处的幂级数展开收敛域为 $\dfrac{x-3}{3}\in(-1,1]$，即 $x\in(0,6]$。幂级数展开式即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n}{n\cdot 3^n}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal{Abel\text{第二定理}} \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\\
&\xlongequal{[0,x]\text{上一致收敛}} \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

3. 若否，则级数发散到 $+\infty$。从而存在 $N\in\mathbb{N}$，使得级数的前 N 项部分和大于 $C+1$。由连续性知当 x 在 1 附近的某个左半领域内 $\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n>C+1$。从而根据级数各和项在该领域内关于 x 的单调性和非负性知

$$C+1<\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\le C.$$

此即矛盾，于是原结论成立。

4. 以下关于求和 $\zeta(4)$ 的做法应该不是最简洁的。

---

[1]此部分完成的过程中未与其他人交流，故所提供的解法可能不是最优的或者最富有启发性的。另外，一些机械的步骤以及部分众所周知的结论将不予说明。

机械地进行 Fourier 展开的手续，并根据原函数在 $[0,\pi]$ 上的分段可微性知以下等式右端即为要求的余弦级数：

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ \ x \in [-\pi,\pi].$$

根据 Fourier 级数的可积性定理，可以对等式两端连续两次积分后 (总保持等号) 代入 $x=\pi$ 求得 $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$。

5. 等式的证明只需机械地进行 Fourier 手续后交代 $g(x) = |\cos x|$ 在被考察区间上的分段可微性即可。证明极限式只需交代清楚各种交换极限顺序的理由。

先证明 $f(x)$ Reimann 可积的情况。

这时可设 M 为 $|f(x)|$ 的一个上界。容易发现已证明等式在 $\mathbb{R}$ 上都是成立的。级数 $f(x)|\cos px| = f(x)\left(\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2npx\right)$ 在 $[a,b]$ 上就以收敛的级数 $\dfrac{2M}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{M}{4n^2-1}$ 为优级数。由 Weierstrass 定理知其在 $[a,b]$ 上一致收敛，从而给定 p 后积分和求和总可换序。

换序后的级数即

$$\int_a^b \frac{2}{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}f(x)\cos 2npx\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

它以级数 $(b-a)\left(\dfrac{2M}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{M}{4n^2-1}\right)$ 为优级数。由 Weierstrass 定理，它在 $[0,+\infty]$ 上关于 p 一致收敛。再由 Riemann 引理知各和项在 $p\to+\infty$ 时有极限 0。从而极限可与求和换序得到原题极限式成立。

再假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅有瑕点 $x=a$。否则有限次归纳后就可对任意绝对收敛的 $f(x)$ 证明结论。

证明是简单的。只需注意对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得 $\displaystyle\int_a^{a+\delta}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\epsilon$。在 $[a+\delta,b]$ 上，$f(x)$ 沿用上述讨论；在 $[a,a+\delta]$ 上，积分永不超过预先指定的任意 ϵ。

综上所述，极限式在所有的情况得到证明。

6. 由可微性知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的余弦级数收敛到自身，则

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f'^2(x)\,\mathrm{d}x &\xlongequal{Parseval} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^\pi f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\xlongequal{\text{分部积分}} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\geq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &\xlongequal{Parseval} \int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

得证。

7. 在考场上看到这题时心态有点崩，一个简单的题面下包含三个循序渐进的问题。果然，这题成了考场上最后卡时间的角色。所幸它只有 10 分。

首先考察敛散性。

结论是在题设条件下积分收敛，当且仅当 $\alpha > 1$ 且 $0 \leq \beta < \alpha$。为方便，记原积分为 α 和 β 的函数 $F(\alpha,\beta)$。

Claim: 若 $F(\alpha_0,\beta_0)$ 发散，则对 $\forall\beta > \beta_0$，$F(\alpha_0,\beta)$ 发散。

Proof 容易证明，此处略去。

Lemma: 已知 $\beta > 1$，则当 $A \to +\infty$ 时成立

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^\beta} = O\left(\frac{1}{A^{1/\beta}}\right).$$

Proof 为简便，记 $\delta = 1/\beta - 1$。则

$$\begin{aligned}\beta\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+Ax^\beta} &\xlongequal{t=x^\beta} \int_0^1 \frac{t^\delta\,\mathrm{d}t}{1+At}\\ &= \int_0^{1/A} \frac{t^\delta\,\mathrm{d}t}{1+At} + \frac{1}{A}\int_{1/A}^1 \frac{t^\delta\,\mathrm{d}At}{1+At}\end{aligned}$$

其中第一个积分总不超过 $\int_0^{1/A} t^\delta \,\mathrm{d}t = O(\frac{1}{A^{1/\beta}})$。而第二个部分可以估计如下：

$$\begin{aligned}\frac{1}{A}\int_{1/A}^{1}\frac{t^\delta \,\mathrm{d}At}{1+At} &= \frac{1}{A}\Big(t^\delta\ln(1+At)\Big|_{1/A}^{1} - \delta\int_{1/A}^{1} t^{\delta-1}\ln(1+At)\,\mathrm{d}t\Big)\\ &= \frac{\ln(1+A)}{A} - \frac{\ln 2}{A^{\delta+1}} - \frac{\delta}{A}\int_{1/A}^{1} t^{\delta-1}\ln(1+At)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

式中前两项都是 $O(\frac{1}{A^{1/\beta}})$ 的。而第三项不超过 $\frac{\ln(1+A)}{A}\cdot\delta\int_{1/A}^{1} t^{\delta-1}\,\mathrm{d}t$，它亦是 $O(\frac{1}{A^{1/\beta}})$ 的。于是引理得证。

先设 $0 \le \alpha \le 1$，那么因 $F(\alpha,\beta)$ 的积分项总不小于发散的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$，知其发散。

下设 $\alpha > 1$。明显地，原积分将与以下级数同敛散：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha|\sin x|^\beta} = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+k\pi)^\alpha\sin^\beta x}$$

进一步地，容易观察出原积分将与以下级数同敛散：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+k\pi)^\alpha\sin^\beta x} \tag{1}$$

兹证明 $0 \le \beta < \alpha$ 时 $F(\alpha,\beta)$ 收敛。我们只需证明比 (1) 更强的级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k\pi)^\alpha(\frac{2x}{\pi})^\beta} \tag{2}$$

收敛。由引理，知其与级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}k^{-\frac{\alpha}{\beta}}$ 同阶。由正项级数的比较判别法知 $F(\alpha,\beta)$ 收敛。

最后一种待证明的情况是 $\beta \ge \alpha > 1$ 时发散。由上述的断言，只需在 $\beta = \alpha$ 时证明即可。回到级数 (1)，我们只需说明更弱的级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(k\pi)^\alpha x^\alpha} \tag{3}$$

发散。对每个求和指标 k，作换元 $t = k\pi x$，则这事就变得容易观察。综上所述，一切情形下我们的结论得到证明。

接下来再交代关于 β 的一致收敛性。

明显地 (类似于断言成立的观察)，对 $\forall \alpha > 1$，它至少在区间内部是一致收敛的。奇异的情形正是在 $\beta = \alpha$ 处，在此点函数未定义 (积分发散)。那么对 $\epsilon = 1$ 和任意的 N，存在 $b > a > N$ 使得 $F(\alpha,\beta)$ 限制在 $[a,b]$ 的结果大于 1。又由被积函数在 $\bar{U}(\alpha,\delta) \times [a,b]$ 上的连续性，知可以找到充分接近 α 的 β 使得 $F(\alpha,\beta)$ 限制在 $[a,b]$ 上的结果大于 1。这违反了柯西收敛准则，故 $F(\alpha,\beta)$ 关于 β 仅在有意义的区域内内闭一致收敛。

对于 α 一致收敛性的分析也是类似的。

只需指出，奇异的情形发生在 $\alpha = 1$ 处 (若 $\beta < 1$) 以及 $\alpha = \beta$ 处 (若 $\beta \geq 1$)。

8. 利用 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。道理和这题的过程类似。利用广义的 Newton 分部积分公式，有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \sin^4 x\,\mathrm{d}x^{-3} \\ &= -\frac{1}{3}\Big(x^{-3}\sin^4 x\Big|_0^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} x^{-3}\sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x^{-2} \\ &= \frac{2}{3}\Big(\int_0^{+\infty} x^{-2}\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x^{-2}\sin^4 x\,\mathrm{d}x\Big)\end{aligned}$$

其中括号内第一项由二倍角公式即知结果为 $\dfrac{\pi}{4}$,而第二项为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-2}\sin^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} x^{-2}\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$，从而原积分为 $\dfrac{\pi}{3}$。

9. 注意到题目与 $m = 0$ 的特殊情形并无本质的差别，因为总可以通过令 $g(x) = f(x)\cdot x^m$ 来化归到这种情况。余下的事情就是引用闭区间连续函数的 Weierstrass 多项式逼近定理了。