20240914作业

1. 设$D \subset \mathbb{R}^2$是一个有界区域, $z = f(x,y)$是$\overline{D}$上的连续函数, 且对$\forall (x,y) \in D$, 有$f(x,y) > 0$. 再设$z = g(x,y)$在$\overline{D}$上有定义, 且存在$(x_0,y_0) \in D$ s.t. $g(x_0,y_0) > 0$, 以及$f(x,y) = g(x,y)$, $\forall (x,y) \in \overline{D} \backslash \{(x_0,y_0)\}$. 问:
(1)当$g(x_0,y_0)$满足什么条件时, $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D, 0 < z < g(x,y)\}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的开集?
(2)当$g(x_0,y_0)$满足什么条件时, $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in \overline{D},\ 0 \leqslant z \leqslant g(x,y)\}$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的闭集?

2. 证明函数$f(x,y) = \sqrt{xy}$ 在闭区域$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 上不一致连续.

3. 设函数$f(x,y)$在$D = [0,1] \times [0,1]$上连续, 它的最大值为M, 最小值为m.
证明: $\forall c \in (m,M)$, $\exists$ 无限多个 $(\xi,\eta) \in D$, $s.t.$ $f(\xi,\eta) = c$.

4. 设函数$f(x,y)$在$D = [0,1] \times [0,1]$上有定义, 且对固定的x, $f(x,y)$是y 的连续函数, 对固定的y, $f(x,y)$ 是x 的连续函数. 证明: $f(x,y)$在满足下列条件之一时, 则$f(x,y)$在D内连续:
(1)对固定的x, $f(x,y)$是y的单调上升函数;
(2)$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$,
$\forall x \in [0,1]$, $\forall y_1,y_2 \in [0,1]$ 只要 $|y_1 - y_2| < \delta$. 即$f(x,y)$关于y 一致连续.

5. 设$U \subset \mathbb{R}^n$是一个非空开集, 证明: 向量函数$\boldsymbol{f}:\ U \to \mathbb{R}^m$ 在U 内连续的充分必要条件是开集的原像是开集.

说明:
(1) 因为, "当一个集合的所有聚点属于这个集合时, 集合是闭集." 这无关集合是否含有孤立点. 所以, 我的ppt上定理13.3.2 "连续映射把紧集映成紧集" 的证明中,
"即证: (1) $\boldsymbol{f}(E)$有界, (2) $\boldsymbol{f}(E)$的所有边界点都属于$\boldsymbol{f}(E)$." 一行, 应改为
"即证: (1) $\boldsymbol{f}(E)$有界, (2) $\boldsymbol{f}(E)$的所有聚点都属于$\boldsymbol{f}(E)$."
(2) 我一时糊涂, 画蛇添足地加了如下这句没有正确性的话: "首先, 据前一定理, $\boldsymbol{f}(E)$是道路连通的, 从而$\boldsymbol{f}(E)$没有孤立点, 即$\boldsymbol{f}(E)$ 的边界点都是聚点." 请无视这句话.
(3) 根据我"个人要求"所定义的函数连续性, 凡是说$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C(E)$ 或者$f(\boldsymbol{x}) \in C(E)$的, 都已经自然地排除了"$E$有孤立点"的情况, 所以"紧集上的连续函数是一致连续的"（定理13.3.4）无论陈述方式还是意义上都与函数连续性的定义相恰.