20240925作业

1. 设$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$, 求下列向量函数的导数:
   (1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{x}\|$; (2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, (\|\boldsymbol{x}\|\neq 0)$.

2. 设$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$, 求函数$f(\boldsymbol{x})=(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{x})$ 的导数, 其中设A 为$n\times n$矩阵.

3. 设$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$是可微向量函数, 且$\|\boldsymbol{f}(x)\|=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 证明 $\boldsymbol{f}'(x)\cdot\boldsymbol{f}(x)=0$, 并给出该结论的集合解释.

关于20240923作业题6的说明:
齐次函数的定义一般有如下两种.
定义1: 设$f(\boldsymbol{x})$是定义在区域$D\subset\mathbb{R}^n$上的函数, 如果$f(t\boldsymbol{x})=t^kf(\boldsymbol{x})$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, $\forall t\neq 0$, $\forall\boldsymbol{x}\in D$, 则称$f(\boldsymbol{x})$是$D$上的$k$次齐次函数.
定义2: 设$f(\boldsymbol{x})$是定义在区域$D\subset\mathbb{R}^n$上的函数, 如果$f(t\boldsymbol{x})=t^kf(\boldsymbol{x})$ $(k\in\mathbb{N}^*)$, $\forall t>0$, $\forall\boldsymbol{x}\in D$, 则称$f(\boldsymbol{x})$是$D$上的$k$次齐次函数.

我们教材上使用的是第二种定义（习题十四第25题）.
满足上述定义1的函数的定义域必定是径向对称的无穷区域（t可正可负）.
定义2的中函数的定义域既可以是径向对称的无穷区域, 也可以是去心扇形区域.
该习题也是采用的定义2.