2015-2016 学年第一学期数学分析 I 期末考试（李伟固）

2016/1/11

一、（15 分）求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x})$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

二、（15 分）求不定积分：

（1）$\int \arcsin x\mathrm{d}x$；

（2）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$；

（3）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

三、（15 分）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且有 $f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$，$f(-1)=0$。证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

四、（15 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)>0$ 对于任意 $x\in[a,b]$ 恒成立。证明：$f(x)$ 的两个不同零点之间一定存在 $g(x)=0$ 的根.

五、（10 分）已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的可导函数，且对于任意 $a\in\mathbb{R}$，都存在 $b\in\mathbb{R}$ 使得 $f'(f'(x)+a)=f'(x)+b,\forall x\in\mathbb{R}$，求 $f(x)$.

六、（15 分）设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负函数，且 $f''(x)\geq 0$，$f(0)=0$。已知对任意 $x\geq 0$，都有 $f'(x)\cdot f(f(x))=x$ 成立，求证：$f(x)=x(x\geq 0)$.

七、（15 分）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的正可导函数，且 $f'(x)=f(x-1)$。实数 c 满足 $ce^c=1$，给定函数 $h(x)=c(1-e^x)$ 及数列首项 $\lambda_1=c$，定义 $\lambda_{n+1}=h(\lambda_n)$。证明：

（1）$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$；

（2）设 $g(x)=e^{-cx}f(x)$，则不等式 $(g'(x)+\lambda_{n+1}g(x))(g'(x)+\lambda_n g(x))<0$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 以及 $n\in\mathbb{N}_+$ 恒成立；

（3）存在实数 $A>0$，使得 $f(x)=Ae^{cx}$.