北京大学数学科学学院
2019-2020 学年第一学期数学分析期中试题

请在答卷上填写院系、姓名与学号

1. (18 分, 每题 6 分) 运用已知极限、求极限法则等求下列极限， 写出简要求解过程。

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2+n+1}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\tan 2x)^{\frac{1}{x}}$ (3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2})^n$ ($a,b>0$)

2. (12分，每题 6 分) (1) 设 $x_n=\frac{\cos 1}{1^2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos n}{n^2}$. 问 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 当 $n\to+\infty$ 时是否收敛？ 说明理由.

(2) 设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 为 (a,b) 内的柯西 (Cauchy) 序列, $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续， 问 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 是否一定存在？ 说明理由.

3. (10分) 设 $A>0$, $x_1>0$, 定义 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right)$, $n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在， 并求出它的值.

4. (15=12+3 分) （1） 设函数 $f(x)$ 定义于有界闭区间 $[a,b]$. 对任 $x_0\in[a,b]$ 皆有 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)\leq f(x_0)$（端点处只考虑单侧极限）(此时称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 上半连续，此类函数有很大应用价值). 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有 最大值 （即有上界， 且可达到上确界).

（2）上半连续函数是否一定具有介值性质 ？ 给出证明或反例.

5. (20分，每题 10 分) （1）设 $f(x)\in C[0,1]$, $f(0)=f(1)$. 证明存在 $c\in[0,\frac{1}{2}]$ 使 $f(c+\frac{1}{2})=f(c)$.

(2) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数， 且不为常值函数. 证明 $f(x)$ 必有最小周期 $T_0>0$.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 定义于 $[1,+\infty)$ 并连续， 满足 $f(x)\geq 0$ 及

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y),\quad \forall x,\ y\in[1,+\infty).$$

问 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 是否一定存在 ？ 证明你的结论或给出反例。

7. (15=10+5 分) (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续， 且对每个 $x\geq 0$ 皆有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(2) 若将上题中的“一致连续”改为“连续”， 是否仍恒有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ？ 给出证明或反例.