2024/9/23

1.

举出一个函数 $u = f(x), x \in \mathbb{R}^n$, 使得它同时满足下述条件:

- (1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 的各个方向导数都存在;
- (2) $f(x)$ 在 $x = 0$ 的各个偏导数存在;
- (3) $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续但不可微.

Answer:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

- 连续性:

$$\left|\frac{2xy^3}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right| |y| \leq |y| \to 0$$

- 方向导数存在: 令 $v = (\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\boldsymbol{x}=0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^2\theta + t^2\sin^4\theta} = 0$$

- 偏导数存在: 方向导数存在, 偏导数自然存在
- 不可微:

$$\lim_{\Delta x = \Delta y^2, \Delta y \to 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta y^2 + 1}} = 1$$

2.

求函数的梯度:

$$f(x) = |x|e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, n \geq 2.$$

Answer:

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}-1\right)\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

3.

证明: 若 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿 3 个不同方向的方向导数均为 1, 则 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

Proof:

设这三个方向为 $v_i=(\cos\theta_i,\sin\theta_i),i\in[3]$, 假设 z 在 $(0,0)$ 处可微, 因此有:

$$z'_x(0,0)\cos\theta_i+z'_y(0,0)\sin\theta_i=1,\forall i\in[3]$$

这表明单位圆上有不同的三个点与向量 $(z'_x(0,0),z'_y(0,0))$ 内积为 1. 矛盾, 因为最多只有两个符合条件的点.

因此 z 在 $(0,0)$ 不可微.

4.

求复合函数的偏导数, 其中 f 是可微函数:

$$u=f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2,\prod_{i=1}^n x_i^2,x_3,\ldots,x_n\right).$$

Answer:

利用链锁法则,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i}&=f_1'\frac{\partial\sum_{i=1}^n x_i^2}{\partial x_i}+f_2'\frac{\partial\prod_{i=1}^n x_i^2}{\partial x_i}+\sum_{j=3}^n f_j'\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\\&=\begin{cases}2x_i\left(f_1'+f_2'\prod_{j\in[n],j\neq i}x_j^2\right) & i=1,2\\2x_i\left(f_1'+f_2'\prod_{j\in[n],j\neq i}x_j^2\right)+f_i' & i\geq 3\end{cases}\end{aligned}$$

5.

设 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数, 求函数 $\varphi(x)=f(x^2,f(x,x))$ 的导数.

Answer:
利用链锁法则,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}&=f_1'(x^2,f(x,x))\frac{\partial x^2}{\partial x}+f_2'(x^2,f(x,x))\frac{\partial f(x,x)}{\partial x}\\&=2xf_1'(x^2,f(x,x))+f_2'(x^2,f(x,x))\left(f_1'(x,x)+f_2'(x,x)\right)\end{aligned}$$

6.

证明: 可微函数 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次函数的充要条件是:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z).$$

必要性:
$t^nf(x,y,z)=f(tx,ty,tz)$ 两端对 t 求导得,

$$nt^{n-1}f(x,y,z)=xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)$$

令 $t=1$ 得,

$$nf(x,y,z)=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

充分性:
注意到

$$t\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial t}=txf_1'(tx,ty,tz)+tyf_2'(tx,ty,tz)+tzf_3'(tx,ty,tz)=nf(tx,ty,tz)$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}f(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)}=\frac{n\mathrm{d}t}{t}$$

两边对 t 积分得

$$\ln f(tx,ty,tz)-\ln f(x,y,z)=n\ln t$$

也即

$$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$$

2024/9/25

1.

设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$), 求下列向量函数的导数:
(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{x}\|$
Answer:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial x_i\|\boldsymbol{x}\|}{\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{x}\|+\frac{x_1^2}{\|\boldsymbol{x}\|} & \frac{x_1x_2}{\|\boldsymbol{x}\|} & \cdots & \frac{x_1x_n}{\|\boldsymbol{x}\|}\\ \frac{x_2x_1}{\|\boldsymbol{x}\|} & \|\boldsymbol{x}\|+\frac{x_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|} & \cdots & \frac{x_2x_n}{\|\boldsymbol{x}\|}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{x_nx_1}{\|\boldsymbol{x}\|} & \frac{x_nx_2}{\|\boldsymbol{x}\|} & \cdots & \|\boldsymbol{x}\|+\frac{x_n^2}{\|\boldsymbol{x}\|}\end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ (当 $\|\boldsymbol{x}\|\neq 0$ 时)
Answer:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial\frac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|}}{\partial x_j}\right)_{n\times n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}-\frac{x_1^2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & -\frac{x_1x_2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & \cdots & -\frac{x_1x_n}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\\ -\frac{x_2x_1}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}-\frac{x_2^2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & \cdots & -\frac{x_2x_n}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{x_nx_1}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & -\frac{x_nx_2}{\|\boldsymbol{x}\|^3} & \cdots & \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}-\frac{x_n^2}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\end{pmatrix}$$

2.

设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), 求函数 $f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x})$ 的导数, 其中 A 为 $n \times n$ 矩阵.

Answer:

$$f'(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 = 2A^T A\boldsymbol{x}$$

3.

设 $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 是可微向量函数, 且 $\|\boldsymbol{f}(x)\| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. 证明 $\boldsymbol{f}'(x) \cdot \boldsymbol{f}(x) = 0$, 并给出该结论的几何解释.

Answer:

注意到

$$(\|\boldsymbol{f}(x)\|^2)' = (\boldsymbol{f}(x) \cdot \boldsymbol{f}(x))' = 2\boldsymbol{f}'(x) \cdot \boldsymbol{f}(x)$$

由 $\|\boldsymbol{f}(x)\|$ 为常值可知 $\boldsymbol{f}'(x) \cdot \boldsymbol{f}(x) = 0$
几何意义即, 若向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 长度不变, 则 $\boldsymbol{f}(x)$ 与 $\boldsymbol{f}'(x)$ 垂直.