北京大学数学科学学院试题

考试科目：数学分析 I (实验班)　任课教师：李伟固

考试时间：2021 年 1 月 20 日 8:30—10:30

食用须知：本试卷由元培学院 2020 级同学王骏澎**靠记忆**整理，因此不能保证与原卷完全一致，但可以保证与原卷没有大的出入且所有题目可做。

第一题 (15 分) 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\tan x)^{\tan 2x}$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x - x\cos x}$　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{x^2}}$

第二题 (15 分) 求下列积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$　(3) $\displaystyle\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x, n\in\mathrm{N}^*$

第三题 (20 分)：

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶可导，且有 $f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$，$f(-1)=0$，求证：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$。

第四题 (20 分)：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且在 (a,b) 上满足 $f''(x)+b(x)f'(x)+c(x)f(x)=0$，其中 $b(x)$ 是 (a,b) 上的实函数，$c(x)<0$，求证：当 $f(a)=f(b)=0$ 时，$\forall x\in[a,b], f(x)=0$。

第五题 (10 分)：

证明极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k}))$ 存在。

第六题 (10 分)：

设 $f(x)\in R[0,1]$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$DF(x)=\displaystyle\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$，求证：$DF(x)\in R[0,1]$ 且 $\displaystyle\int_0^1 DF(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

第七题 (10 分)：

对于任意满足 $f(1)=1$ 的 $[0,1]$ 上的上凸函数 $f(x)$，实数 c 满足 $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant c\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，求 $c_{\max}$。