2024/11/25

习题 20

利用 Green 公式计算下列第二型曲线积分:
(2) $\oint_\Gamma 2xy\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是由两条连接点 $(0,0),(4,2)$ 的曲线组成的封闭曲线 : $y=\frac{x}{2}, y=\sqrt{x}$

Answer:

$$I=\iint_D -2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{sqrtx}-2x\mathrm{d}y=-\frac{64}{15}$$

(4) $\oint_\Gamma (x^3-x^2y)\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是 $D=\{(x,y)|4\le x^2+y^2\le 16\}$ 的边界.

Answer:

$$I=\iint_D (y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=120\pi$$

(5) $\int_\Gamma (2x^2y-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是抛物线 $x=\frac{\pi}{2}y^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的部分.

Answer:

取 $\Gamma' : (x,y)=(\frac{\pi}{2}t,t), t\in[0,1]$, 则 $\Gamma\cup\Gamma'$ 为约当曲线. 记其所围成有界闭区域为 D, 则有:

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\Gamma'}(2x^2y-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y+\iint_D(6xy^2-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{2}t^3-t^2\cos\frac{\pi}{2}t\right)+\left(1-2t\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{3\pi^2}{4}t^4\right)\right)\mathrm{d}t\\
&-\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}x^2}^{\frac{\pi}{2}x}(6xy^2-2x^2)\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi^3}{14}+\frac{3\pi^2}{28}
\end{aligned}$$

习题 23

利用格林公式证明约当曲线 Γ 所围有界闭区域在极坐标下的求面积公式 $A=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}r^2\mathrm{d}\theta$. 并求 $r=3\sin 2\theta$ 所围有界闭区域在第一象限部分的面积.

Answer:

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}r^2\mathrm{d}\theta, S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin 2\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{9\pi}{8}$$

习题 26

设 D 为单位闭圆盘, $a,b,\alpha\in\mathbb{R}$, 求证: $\oint_{\partial D}a(x^2+y^2)^{\alpha}\mathrm{d}x+b(x^2+y^2)^{\alpha}\mathrm{d}y=0$

Answer:

$$I=\iint_D 2\alpha(bx-ay)(x^2+y^2)^{\alpha-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 2\alpha(b\sin\theta-a\cos\theta)r^{2\alpha}\mathrm{d}r=0$$

2024/11/27

1.

证明下列积分在区域 $\{x>0,y>0\}$ 中与路径无关, 并计算从点 $A=(1,1)$ 到 $B=(2,3)$ 的积分值:

$$\int\left(4x^3y^3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(3x^4y^2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$$

Answer:
注意到

$$\mathrm{d}\left(x^4y^3+\ln x-\ln y\right)=\left(4x^3y^3-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(3x^4y^2-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$$

$$I=\left(x^4y^3+\ln x-\ln y\right)\Big|_A^B=431-\ln\frac{2}{3}$$

2.

已知:

$$\mathrm{d}u = \left(ye^{xy} + xy^2e^{xy} + y\cos x\right)\mathrm{d}x + \left(xe^{xy} + x^2ye^{xy} + \sin x\right)\mathrm{d}y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

求 $u(x, y)$.

注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(xye^{xy} + y\sin x) = &\left(ye^{xy} + xy^2e^{xy} + y\cos x\right)\mathrm{d}x \\ &+ \left(xe^{xy} + x^2ye^{xy} + \sin x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此

$$u = xye^{xy} + y\sin x + C$$

3.

已知曲面:

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

求该曲面在 xOy 平面上方部分的面积.

Answer:

$$S = \iint \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1 + 4r^2}\mathrm{d}r = \frac{13}{3}\pi$$

4.

已知曲面:

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

被平面 $x+y+z=2$ 截下部分的面积.

Answer:

$$S=\iint 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2\sqrt{2}-2}^{2\sqrt{2}-2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y-2-\sqrt{-3y^2-12y+12}}{2}}^{\frac{y-2+\sqrt{-3y^2-12y+12}}{2}}2\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-2\sqrt{2}-2}^{2\sqrt{2}-2}2\sqrt{-3y^2-12y+12}\mathrm{d}y=8\sqrt{3}\pi$$

5.

已知三柱面方程:

$$x^2+y^2=1,\quad x^2+z^2=1,\quad y^2+z^2=1$$

求它们围成的立体的表面积.

Answer:
注意到空间中这三个方程同时成立的点都是孤立点, 至少有两个成立则是线段, 因此由对称性所求面积即为, $z=\sqrt{1-x^2}, 0\leq y\leq x\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的 48 倍.

$$S=48\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2}}=48-24\sqrt{2}$$