

## 20241030作业

1. 设  $E = \{(x, y); x, y \text{ 均为有理数}\}$ ,  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . 证明  $D \cap E$  不可求体积.
2. 设  $D \subset \mathbb{R}^2$  是一个可求面积的有界区域,  $f(x, y)$  在  $\overline{D}$  内有界并且在  $D$  内连续. 证明  $f(x, y)$  在  $\overline{D}$  可积.

3. 计算积分  $\iint_D x^2 |y|^3 d\sigma$ , 其中  $D$  为闭矩形  $[-2, 2] \times [-1, 1]$ .

4. 计算积分  $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^1 \frac{8x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} dy$ .

5. 设  $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) \in R(D)$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \prod_{\ell=1}^n \left( 1 + \frac{1}{n^2} f\left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}\right) \right) = \exp \left( \iint_D f(x, y) d\sigma \right).$$