博弈论HW2

4.6室友

1. 对于每个人来说，其最优反应对应应该是在给定另外一人行为的情况下，对支付函数最大化。即
    - 对于$t_j < 10, t_i = \dfrac{10-t_j}{2}$；对于$t_j \geq 10$, $t_i = 0$, 则$t_i = \max\{\dfrac{10-t_j}{2}, 0\}$
2. 由于$t_j \geq 0$，则$t_i \in [0，5]$
    - 首先说明$[0,5]$区间不会被严格占优。事实上，对于$\forall t_i \in [0,5]$，在$t_j = 10 - 2t_i$时，$\arg\max(10-t_j)x - x^2 = t_i$，从而不被严格占优，因为在这种情况下，$t_i$严格占优于其他选择
    - 其次，说明$(5,+\infty)$被严格占优。事实上，$\dfrac{\partial(10-t_j)t_i - t_i^2}{\partial t_i} = 10 - t_j - 2t_i \leq 0, \forall t_j, \forall t_i \in (5,+\infty)$，也就是说收益函数在该区间上，对于$t_i$单调递减，于是均被$t_i = 5$严格占优
    - 由于对称性，第一轮IESDS后得到的是$S_1^1 = S_2^2 = [0,5]$
3. 重复如2中的IESDS，则区间不断缩小，此过程将持续进行下去趋近于确定的极限。$x = \dfrac{10-x}{2}$ 得到$t_1 = t_2 = \dfrac{10}{3}$为最终剩余结果。

4.7竞选

1.
    - 策略空间：$S_1 = S_2 = \{P, B, N\}$
    - 玩家集合：$\{1,2\}$
    - 支付函数：
        - $v_1(P,P) = 0.5, \quad v_1(P,B) = 0, \quad v_1(P,N) = 0.3$
        - $v_1(B,P) = 1, \quad v_1(B,B) = 0.5, \quad v_1(B,N) = 0.4$
        - $v_1(N,P) = 0.7, \quad v_1(N,B) = 0.6, \quad v_1(N,N) = 0.5$
        - $v_2(A,B) = 1 - v_1(A,B), \forall A, B \in S_2$
2. 支付矩阵：

	P	B	N
P	0.5,0.5	0,1	0.3,0.7
B	1,0	0.5,0.5	0.4,0.6
N	0.7,0.3	0.6,0.4	0.5,0.5

3. 对于1来说，B严格占优于P，从而P行会被排除。

	P	B	N
B	1,0	0.5,0.5	0.4,0.6
N	0.7,0.3	0.6,0.4	0.5,0.5

然后，对于2，N也严格占优于P、B，P、B列会被排除

	N
B	0.4,0.6
N	0.5,0.5

此时对于1来说，N严格占优于B，从而最后只剩下(N,N)

4.8 选美比赛的最优反应

1. 假设x是此时i的选择，则最接近的结果是$a=\frac{20(n-1)+x}{n}\frac{3}{4}=15+\frac{3}{4}\frac{x-20}{n}$.此时取$x=18$，则$a=15-\frac{3}{2n}$<18，显然i胜出，故19不是唯一的策略。
2. i是唯一的赢家有两种情况
    1. 第一种为$20-a>a-x\geq 0$，解得$\frac{20n-60}{2n-3}<x\leq\frac{60(n-1)}{4n+3}$
    2. 第二种为$20-a>x-a\geq 0$，解得$\frac{60(n-1)}{4n+3}<x<20$
    - 从而最终的结果为$\{x\in Z:\frac{20n-60}{2n-3}<x<20,x\geq 0\}$

4. Two-player game

1. 对于$\forall x_i>0$，$v_i(x_i,x_j)=\arctan x_i<\arctan 2x_i=v_i(2x_i,x_j)$，取$2x_i$则严格占优于$x_i$
2. 在$x_j=1$的条件下，$v_i(0,1)=2>\frac{\pi}{2}\geq v_i(x_i,1),\forall x_i\neq 0$，从而0不被严格占优
3. 否。在对方选0的条件下，自己选0的支付函数是0，任意正数都将好于这个。这不是最佳反应。

5. N-firm Cournot Competition

1. 标准形式博弈：
    1. 策略集合：$S_i=R_+,\forall i\in N$
    2. 玩家集合：$N=\{1,2,3,\ldots,n\}$
    3. 支付函数：$v_i(q_1,q_2,\ldots,q_n)=\max\{(100-\sum q_k)q_i-10q_i,-10q_i\}$
2. 对于任意一个厂商，最大化其支付函数，得到的均为$q_i=\max\{\frac{90-\sum_{k\neq i}q_k}{2},0\}$
    - 说明$[0,45]$不被严格占优。对于$\forall q_i^*\in[0,45]$，在$\sum_{k\neq i}q_k=90-2q_i^*$时，$\arg\max[(100-\sum q_j)q_i-10q_i]=q_i^*$，从而不被严格占优
    - 说明$(45,+\infty)$被严格占优。此时对于支付函数求关于q_i的偏导后得到$90-sum_{k\neq i}q_k-2q_i<0$，则在此区间中的选择都被$q_i=45$严格占优。
    - 在n=2的情况下，同4.6讨论可以得到最终产量为30。在n>2情况下，此时无法继续进行。因为在n>2的情况下，q_i的取值范围没有发生变化，将进行重复1、2的操作。故此时最佳反应为:$S_i=[0,45]$

5.5公共品捐赠

1. 最优反应对应为：$BR_i((1,1))=0,BR_i((1,0))=1,BR_i((0,1))=1,BR_i((0,0))=0$
    - 这是由于，在其他人已经捐赠了等于2的情况下，无论自己是否捐赠都会有路灯，不捐赠可以降低损失
    - 在只有一个人捐赠了1的情况下，自己捐赠会带来路灯3的收益，自己的总收益为2大于不捐带来的0
    - 在没有人捐赠的情况下，自己捐赠会带来-1的损失，不捐赠没有损失

2. （0，0，0）可以是Nash均衡，此时任何一个人单方面改变自己的行为也不会给自己带来改善

（1，1，0），（1，0，1），（0，1，1）也是Nash均衡，此时不捐赠方在其他人已经捐赠了等于2的情况下，无论自己是否捐赠都会有路灯，不捐赠可以降低损失，故无动机改变自己的选择。捐赠方如果自己单方面偏离，将会给自己从+2的收益变为0的收益，故也没有偏离的动机。