2024/11/22

2200012917 徐靖

1

(1)

XY 表示在自己国家军队强时选择 $X \in \{A, N\}$, 弱时选择 $Y \in \{A, N\}$
不同路径下最终收益为:

		国家 2			
		攻击-强	**攻击-弱**	**不攻击-强**	**不攻击-弱**
国家 1	**攻击-强**	- c_h, -c_h	v - c_h, -c_l	v, 0	v, 0
	攻击-弱	- c_l,v -c_h	- c_l, -c_l	v, 0	v, 0
	不攻击-强	0, v	0, v	0, 0	0, 0
	不攻击-弱	0, v	0, v	0, 0	0, 0

双变量矩阵形式的博弈表述:

国家1\国家2	AA	AF	FA	FF
AA	$\frac{v-2c_l-2c_h}{4}, \frac{v-2c_l-2c_h}{4}$	$\frac{2v-c_l-c_h}{4}, \frac{v-2c_h}{4}$	$\frac{3v-c_h-c_l}{4}, -\frac{c_l}{2}$	$v, 0$
AF	$\frac{v-2c_h}{4}, \frac{2v-c_l-c_h}{4}$	$\frac{v-c_h}{4}, \frac{v-c_h}{4}$	$\frac{2v-c_h}{4}, \frac{v-c_l}{4}$	$\frac{v}{2}, 0$
FA	$-\frac{c_l}{2}, \frac{3v-c_h-c_l}{4}$	$\frac{v-c_l}{4}, \frac{2v-c_h}{4}$	$\frac{v-c_l}{4}, \frac{v-c_l}{4}$	$\frac{v}{2}, 0$
FF	$0, v$	$0, \frac{v}{2}$	$0, \frac{v}{2}$	$0, 0$

(2)

对于 $v = 12, c_l = 4, c_h = 8$, 我们有

国家1\国家2	AA	AF	FA	FF
AA	-3,-3	3,-1	6,-2	12,0
AF	-1,3	1,1	4,2	6,0
FA	-2,6	2,4	2,2	6,0
FF	0,12	0,6	0,6	0,0

纯策略贝叶斯纳什均衡只有 (FF, AA) 和 (AA, FF)

(3)

对于 $v = 12, c_l = 8, c_h = 16$, 我们有

国家1\国家2	AA	AF	FA	FF
AA	-9,-9	0,-5	3,-8	12,0
AF	-5,0	1,1	4,1	6,0
FA	-8,3	1,4	-1,-1	6,0
FF	0,12	0,6	0,6	0,0

纯策略贝叶斯纳什均衡只有 (FF, AA) , (AA, FF), (AF, AF)

2

(1)

$T_1 = \{\{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \{\delta\}\}$
$T_2 = \{\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}\}$

(2)

$K_1 A = \{\beta, \gamma, \delta\}$
$K_2 K_1 A = \{\gamma, \delta\}$
$K_1 K_2 K_1 A = \{\delta\}$
$K_2 K_1 K_2 K_1 A = \emptyset$

3

设进入为E, 不进入为 N, 对于给定的 c_1, c_2, 收益矩阵为:

		企业2	
		E	**N**
企业1	**E**	3-c_1,3-c_2	10-c_1, 0
	N	0, 10-c_2	0, 0

规定 $s_i(\theta_i) = 1$ 表示在私人信息为 θ_1 的情形下选 E, 反之 $s_i(\theta_i) = 0$ 表示选 N
假如参与者 2 的最优反应是 E, 当且仅当

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(v_2(1, s_j(\theta_j))|c_2) \geq E(v_2(0, s_j(\theta_j))|c_2) \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{5}\int_0^5 10 - c_2 - 7s_1(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &c_2 \leq 10 - \frac{7}{5}\int_0^5 s_1(\theta_1)\mathrm{d}\theta_1 \end{aligned}$$

由于两方是对称的, 因此双方都执行阈值策略, 不妨设阈值分别为 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, 则有

$$\hat{\theta}_i = 10 - \frac{7}{5}\int_0^5 s_j(\theta_j)\mathrm{d}\theta_j = 10 - \frac{7}{5}\int_0^{\min\{\hat{\theta}_j, 5\}} \mathrm{d}\theta_j = 10 - \frac{7}{5}\min\{\hat{\theta}_j, 5\}$$

解得 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \frac{25}{6} < 5$

综上, 唯一的nash均衡为 $s_i = \begin{cases} E, & c_i \leq \frac{25}{6}, \\ N, & c_i > \frac{25}{6} \end{cases}, i \in \{1, 2\}$

4

不妨设该对称策略为 $s(v)$. 对玩家1 我们记除他之外的最高私人价值为 b

首先 s 是单调增的, 假如存在 $s(v_1) < s(v_2), v_1 > v_2$. 对 $s(b)$ 情形, 若 $s(b) \leq s(v_1)$ or $b \geq s(v_2)$, 玩家1 在私人价值为 v_1, v_2 时 $s(v_1)$, $s(v_2)$ 均无差异. 若 $s(v_1) < s(b) < s(v_2)$, 由 s 无可获利一次偏离知玩家1 在私人价值为 v_2 时有 $v_2 \geq s(b)$. 从而 $v_1 > v_2 \geq s(b) \geq s(v_1)$, 此时 s 略微提价即为可获利偏离, 矛盾.

考虑玩家1 私人价格为 v , 出价为 s', 其他人出价遵循 s 时的期望收益:

$$\mathbb{E}(u(v)) = \frac{\int_0^{s^{-1}(s')} \frac{1}{2}(2v - s(b) - s')b^{n-2}\mathrm{d}b}{\int_0^1 b^{n-2}\mathrm{d}b}$$

解一阶条件 $\left.\frac{\partial\mathbb{E}(u(v))}{\partial s'}\right|_{s(v)} = 0$ 得,

$$(2v - 2s'^{*})\frac{\partial s^{-1}(s'^{*})}{\partial s'} = \frac{s^{-1}(s'^{*})}{n-1}$$

假如所有人出价遵循 s 是nash均衡, 则 $s'^{*} = s(v)$, 从而得到 s 满足的常微分方程

$$s(v) + \frac{v}{2n-2}s'(v) - v = 0$$

解得 $s(v) = \frac{2n-2}{2n-1}v$