博弈论复习

Handout 2

1. P7的三个人的博弈怎么写
2. 矩阵只能表示低维情况：正则博弈：normal form game
   - 定义2.1 P9 triple
   - 策略
   - 注意payoff func：$S_1 \times ... \times S_n \to R$, 一定是个多元函数，可以简记
   - strategy profile: 策略组合
   - 有限博弈⇔策略组合是有限的⇔每个人的策略有限
3. 正则表示也能表示连续情况：Cournot
4. 一价拍卖的定义
5. 二价拍卖的定义
   - 10，10，5的分配为10元在第一人和第二人之间等概率分配
   - HW1的第四题，拓展式的
6. 严格占优：定义2.2 P20
   - 策略1严格占优于策略2⇔对于任意对手的策略，选1的收益都严格大于2.
   - 理性人不会选择被严格占优的策略
7. strictly dominant strategy 定义2.3: P23
   - 其他策略都被它占优
   - 如果有，理性人只会选择这个（需证明吗）
8. strictly dominant strategy equilibrium：严格占优策略均衡 定义2.4 P24
   - 注意：均衡只指策略的组合，不同于均衡结果（均衡下每个人的v值的组合）
9. Lemma 2.1 P25： 若有严格占优策略，一定唯一。（证明）
0. Proposition 2.1 P25: 严格占优策略均衡存在则唯一。（证明）

1. Pareto dominates，Pareto optimal/Pareto efficient：定义2.5， P26
2. 囚徒困境中的严格占优均衡存在帕累托改进，是否与福利经济学第一定理矛盾？（均衡下得到的是帕累托有效的）
    - 有前提：
    - *（1）完全竞争市场；*
      （2）不存在外部性（externality）：消费者只关心自己的消费，生产者只关心自己的生产，而不会受到他人或者外部环境的影响。
    - *市场竞争能够通过价格机制有效调节经济活动，达到帕累托最优的资源配置。*
3. IESDS：iterated elimination of strictly dominated strategies
    - 没有严格占优策略时也会有唯一的结果：
        - 定义2.6 common knowledge P32
        - 参与者的理性是common knowledge时，IESDS成立
        - P33 不是共同知识的例子
4. Iterated-elimination equilibrium: 定义P35
    - 这一定是NE嘛?
5. 有限博弈中，只要保证每次能删除的时候都删除了至少一个，删除次序和最终结果无关系（证明？）
    - 本课程中：每轮删除中必须删除掉*所有的*被严格占优策略。
    - 连续情况下不成立的反例
6. 推论2.2 : P38 若是strictly dominant strategy equilibrium, 那么一定唯一的在IESDS中存活下来了（证明）
7. 用IESDS来算Cournot Duopoly P39
    - 证明一下P45
    - IESDS无法解决n个Cournot的问题：HW02 T5. IESDS删了一轮就删不下去了。但这并不代表是NE：因为不止有一个活了下来。用所有的人BR的交点能解出来唯一的NE。
8. best response : 定义2.7 P49.（博弈论最核心的概念）
    - 注意这是针对对方的一个特定策略实现的。
9. 推论2.3： 如果一个策略被严格占优了，那就不可能成为任何策略的BR（证明）
    - 如果是最佳反应，就一定不会被严格占优

0. 推论2.4:如果si是一个严格占优策略，那么对于任何策略来说，它都是唯一BR
1. 推论2.5: 有限正则博弈中，如果策略组合s唯一在IESDS中存活，那么对于任何i，s_i就是s_{-i}唯一的BR（证明，唯一性）
2. 最优反应对应：Best response correspondence. P56
   - P59中Bertrand的最优反应对应。
3. Nash Equilibrium：P61
   - 策略组合里面的每个策略都是对手策略的最优反应
   - profitable deviation：给定一个策略组合，如果有i的策略1使得i使用1比现在的收益严格好
   - NE等价于没有可获利的偏离（证明）
   - P65一个聪明的用BR来找NE：必须是mutual BR
   - P66理性&一致性（没懂）
4. 推论2.6: P67 严格占优策略均衡一定是唯一的NE
5. 推论2.7: P68 有限博弈中，策略组合s唯一的在IESDS中存活下来，那么它就是唯一的NE（推论2.5的推论，唯一性来自于推论2.8）
   - 注意，2.5中提到的唯一的BR不代表是这样的组合是唯一的NE，2.5中指的是在这个策略组合内部，给定剩下的选择，i的选择是唯一的BR。但是这样的策略组合可能有很多
   - 当不有限的时候，举一个反例：HW2 T4
6. 推论2.8: P69 如果s是NE，那么会在IESDS中存活下来。
   - 是推论2.3的直接推论：因为NE中的mutual BR，不会被严格占优，从而不会被IESDS删去
7. 用BR来解决Cournot问题P73，注意0
   - 可以通过画出BR来，得到所有的交点即为所有的NE
8. Bertrand竞价中的BR很值得考察P80
   - 作业HW3 中的5.12和续
9. 定义2.10，P92：ΔS_i是S_i的simplex（Si上面的所有概率分布），混合策略是其中的元素
0. 定义2.11，P94：支撑集 $supp \sigma_i = \{s_i | \sigma_i(s_i) > 0\}$
   - P97、98，证明了期望收益就是自己的纯策略下的收益关于混合策略的概率分布的加权平均。

1. 定义2.12，P99：一个混合策略σ_i是σ_{-i}的BR，如果：在σ_{-i}条件下，σ_i的payoff大于等于任何一个纯策略的payoff
    - 大于纯策略等价于大于等于混合策略（证明）
2. 非常重要的lemma2.2: P100： 混合策略是σ_{-i}的BR当且仅当其支撑集中每一个纯策略都是σ_{-i}的BR。
    - 推论：支撑集应该无差异。
    - 证明
    - 注意BR要求的是大于等于，严格占优要求的是大于。且BR要求的是对特定策略，严格占优要求的是对所有策略。
3. 从而可以定义混合策略的NE：mutual BR
4. 注意：1的无差异选择决定了2的混合概率：2选择该混合概率来让1愿意混合。
5. 定理2.1 有限正则博弈一定有NE（可能混合）（了解即可）
6. 定义2.14 P117: 混合策略占优的定义。
    - 对于任何一个对手的纯策略，混合策略σ带来的收益严格好于s_i。
    - 等价于给定任何一个对手的混合策略（证明）
7. 有了严格占优自然也有了IESDS。
    - 推论2.9 P121: 一个（混合）策略组合是original game的NE当且仅当它是IESDS后的reduced game的NE

Handout 3

1. extensive form game：序贯博弈
    - 定义3.1 P7: 博弈树🌲的定义。precedes...player assignment...available action
2. 定义3.2 信息集 P10. 信息集是对全集的一种划分，其无交并为全集。
3. 定义3.3 完美记忆：perfect recall。P15
4. 定义3.4 完美信息博弈（不是完全信息博弈，不一样）：如果每个信息集合都是单点集。P18
5. 拓展式博弈的策略：是一个完整计划。不管对方选择路径如何，该计划都能在每个信息集上匹配行动。
6. 定义3.5:P22 纯策略：从信息集到行动集的映射。

- 注意各个符号的定义。
- 尽管有些信息集上下矛盾，选了前者后者就不会发生，但也要定义上，是为了后续SPE的定义。
- 每个策略组合都会到达唯一的终点，这个终点称为这个策略组合的结果

7. 定义3.6:P26， 混合策略

8. 定义3.7：P27，行为策略：注意看这个定义里面的符号！

9. 定理3.1 P32 完美回忆的有限博弈中，混合策略总有和行为策略等价的实现（也就是在我们研究的范围里面无差异）

0. 定义3.8: extensive的NE就是写成正则表达的NE

   - 注意：NE指的是策略组合，而非是实现。
   - 作业：蜈蚣博弈中找NE

11. 定义3.9: P42. 信息集在均衡路径上（on the equilibrium path）如果sigma 可以正概率到达这个信息集。

   - NE只要求了在均衡路径上每个人都最优化了，BI则要求任何路径上都要做最优选择（不考虑是否会到达这里）

2. sequentially rational：在任何一个信息集上，当前策略都是对手策略的BR

   - BI不考虑未来能不能改，就是给定后续，当前是BR，而且也不关注当前会不会到达

3. backward induction solution是BI过后的策略组合

4. 定理3.2: 纯策略情况下，BI solution一定是NE（证明由3.5导出）P47

5. 定理3.3: 任何一个有限的完美信息博弈一定有一个逆向归纳法的解

6. 定理3.4:如果没有人认为两个终点无差异，那么有限完美信息博弈有唯一的BI解。

7. 定义3.10: 拓展形式博弈的子博弈 P51（这个定义不是很好理解！）

   - 根x是单点集，x的继承者的信息集中的点也要是x的继承者。称为x诱导的子博弈

8. 定义3.11: P55 SPE

   - SPE一定是NE：why？game自己也是自己的subgame
   - SPE要求所有路径上都是mutual BR

9. 定理3.5: 有限完美信息下，纯策略的SPE和BI的解一一对应。

   - SPE一定是BI的解：why?
   - BI 得到的一定是SPE
     - 一次偏离：只有一个信息集上的策略不一样

- 可获利的一次偏离：在偏离的信息集上还是一个可获利的偏离

20. 定理3.6: 有限完美信息博弈中，策略组合是SPE等价于没有可获利的一次偏离
    - 3.6 推出 3.5 推出3.2
    - 注意看P62的自愿性别大战的例子
21. P66的stakelberg的博弈树画法
    - 为什么Cournot里面不能选Stackelberg的产量？不可置信的威胁。

Topic1: 重复博弈

1. stage game
2. total payoff: discounted sum of stage game payoffs
3. P84 stage game的全部策略组合 $A = A_1 \times \ldots \times A_n$
4. P85: 第t期的所有可能历史：$H_t = A^t$，是一个t维向量，每个元素都是n个人的策略组合的某个实现
    - 出发点：$H_0 = \emptyset$
5. 重复博弈的策略如何定义？P86
6. 定理3.7: 有限期重复博弈。在任意历史下，都重复的玩同一个stage game的NE，那么对于任何贴现值，这都会是一个SPE。如果stage game的NE唯一，那么SPE唯一。（证明）
7. 推论3.1 最后一期，不管什么历史，一定完的是stage的NE
8. 定理3.8，无穷博弈下，一直玩同一个stage NE，得到的是SPE
9. 定理3.9: stage NE有帕累托严格改进a，那么一定存在足够大的贴现值，使得存在一个SPE，均衡结果上在路径上一直在玩a 。（证明）