

- 碎碎念
- ▼ Handout 2
 - Topic : 双人零和博弈
- ▼ Handout 3
 - Topic : 重复博弈
 - Topic : 谈判
- ▼ Handout 4
 - Topic : 拍卖
- ▼ Handout 5
 - Topic : 空谈博弈
- ▼ 往年题型整理
 - 1. 双变量矩阵题型
 - 2. 出价类题型
 - 3. 博弈树题型
 - 4. 重复博弈
 - 5. 谈判
 - 6. 贝叶斯均衡
 - 7. 信号博弈
 - 8. 空谈博弈
 - 0. 其他易错点
- 往年考情分析

碎碎念

- 在蒯神基础上优化的笔记
 - 感觉证明不会考, 罗列结论时没有写证明, 拍卖等价定理除外
- 额外整理了固定题型和应对方法
 - 🔥 表示难度, 3个 🔥 最难, 4 🔥 专属于 II 的 hw3.3
- 一些与串联形式语言与真实博弈的 insight :
 - 博弈论应用题的求解方法往往就蕴含在概念之中, tricks 是摆在明面上的
 - **理性自然人** : 代入为博弈玩家, 查询无可获利偏离, 可提高做题注意力
 - **妥协, 牵制与被牵制** : br 的交点是 ne
 - **威慑与欺诈** : 不可置信的威胁
 - **用发展的眼光看问题** : 有限博弈下的一些结论往往在连续/无限博弈失效, 存在反例
 - **效用的博弈? 信息的博弈!** : 动态博弈与静态博弈的区别在于信息集
- 如果不亲自做题, 整理的再有水平都没法让你 AK
- 欢迎补充
 - 很遗憾 "往年题型整理" 这一部分我没有给对应题目的指针, 待来者补充
 - 因为只交6次作业平时分就满了, 我后半学期没有写作业, 只拟合往年题也许忽略了一些有价值的东西
 - hj 的课我没怎么听, insight 大多是自己做题思考所得, 因此这套体系的梳理应当还可以优化
 - 可以联系我 : [iculizhi.github.io](https://github.com/iculizhi), 常年招笔记/资料库继任者

Handout 2

1. 正则博弈 (normal form game)
 - **definition** : 一个三元组(triple) : $(N = [n], \{S_i\}_n, \{v_i\}_n)$
 - **策略组合 (strategy profile)** : $s \in S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$
 - 有限博弈 \Leftrightarrow 策略组合是有限的 \Leftrightarrow 每个人的策略有限
 - **正则表示也能表示连续情况** : 例如 Cournot 模型
2. 严格占优 (strictly dominated)
 - 策略 1 严格占优于策略 2 \Leftrightarrow 对于任意对手的策略, 选 1 的收益都**严格大于** 2
 - 理性人不会选择被严格占优的策略

- **严格占优策略 (Strictly dominant strategy)** : 其他策略都被它占优
- **严格占优策略均衡 (Strictly dominant strategy equilibrium)**
 - 严格占优策略均衡存在则唯一

- 均衡只指均衡情况下的策略组合, 而非均衡情况下的回报
- **弱劣策略** : 对于任意对手的策略, 选其他某个策略的收益**大于等于**该策略

3. **帕累托占优 (Pareto dominates)** : 策略组合 s 回报不低于 s' , 且存在至少一个玩家回报严格更高

- **帕累托有效 (Pareto optimal/Pareto efficient)** : 策略组合不被其他策略帕累托更优

囚徒困境中的严格占优均衡存在帕累托改进, 是否与**福利经济学第一定理**矛盾?

- 有前提:
 - 完全竞争市场
 - 不存在外部性 (externality): 消费者只关心自己的消费, 生产者只关心自己的生产, 而不会受到他人或者外部环境的影响
- 市场竞争能够通过价格机制有效调节经济活动, 达到帕累托最优的资源配置

4. **IESDS (iterated elimination of strictly dominated strategies)** : 不断删除被严格占优的策略

- 没有严格占优策略时也会有唯一的结果.
 - 参与者的理性是 common knowledge 时, IESDS 成立
- **Iterated-elimination equilibrium** : 删完后策略集的策略组合
- 有限博弈中删除次序和最终结果无关系
- strictly dominant strategy equilibrium 唯一地在 IESDS 中存活

- 用 IESDS 来算连续的 Cournot Duopoly : 类似闭区间套定理会收敛到纳什均衡
- IESDS 无法解决 n 个 Cournot 的问题 : 删了一轮就删不下去了.

1. **最优反应 (Best response)** : 最核心的概念, 下简称BR

- 最优反应 \Leftrightarrow 不被严格占优
- 严格占优策略是任何策略来说的唯一最优反应
- **最优反应对应 (Best response correspondence)** : 最优反应的集合

2. **纳什均衡 (Nash Equilibrium)** : 下简称NE

- 策略组合里面的每个策略都是对手策略的最优反应
- **可获利的偏离 (Profitable deviation)**: 给定策略组合, i 的另一个策略使其回报更大
 - $NE \Leftrightarrow$ 无可获利的偏离 \Leftrightarrow **互为最优反应 (mutual BR)**
- **一致性** : 玩家对对手的看法是正确的 (即均衡状态下知道对方的策略)
- 严格占优策略均衡一定是唯一的 NE
- NE 会在 IESDS 中存活

3. **混合策略** : ΔS_i (S_i 上面的所有概率分布) 的元素

- **支撑集** : $\text{supp } \sigma_i = \{s_i | \sigma_i(s_i) > 0\}$
- 混合策略 σ_i 是 σ_{-i} 的BR \Leftrightarrow 不存在可获利的纯策略偏离 \Leftrightarrow 支撑集中**每一个**纯策略都是 σ_{-i} 的 BR
 - 支撑集无差异
 - 从而可以定义混合策略的 NE : mutual BR
- 有限正则博弈一定有 NE
- **混合策略占优** : 混合策略对纯策略占优
 - 相应地有 IESDS
 - original game 的 NE \Leftrightarrow IESDS 后的 reduced game 的 NE

Topic : 双人零和博弈


hj似乎没讲这个, 但冯诺依曼这个经典结论蛮重要

两个玩家的目标完全对立, 一个人的收益就是另一个人的损失

- **maxmin值** : 玩家 i 的最大最小策略中 i 的收益
- **minmax值** : 另一玩家的最小最大策略中 i 的收益
- 总有 $\max_{s_i} \min_{s_{-i}} v_1(s_1, s_2) \leq \min_{s_{-i}} \max_{s_i} v_1(s_1, s_2)$
- 双人零和博弈下考虑所有策略(混合, 纯)时, maxmin值和minmax值相等

Handout 3

1. **扩展形式博弈 (extensive form game)** : 序贯博弈 (sequential game)

- 博弈 , 节点(nodes), 玩家分配(player assignment), 可用行动(available action).
- **信息集** : 节点集的一种划分, 可以是单点

- 玩家不清楚处于信息集中的哪个节点
- 可用行动相同
- **完美记忆 (perfect recall)** : 每个玩家在决策时都能知道自己所有的历史行动和观察到的所有信息. (对任意参与者 i 的任意信息集中的节点 x, y , 以及 x 的前继 $u(u \rightarrow \dots \rightarrow x)$, 都存在 v 满足: v 是 y 的前继, v 与 u 在同一个信息集.)
- **完美信息博弈 (game of perfect information)** : 每个信息集都是**单点**(singleton)
 - 完美信息博弈参与者拥有完美回忆

注意区分完美回忆(perfect recall), 完美信息(perfect information), 完全信息(complete information), 完美贝叶斯均衡(PBE), 四"完"各不相同

1. 扩展形式博弈的策略: 不论选择路径如何, 为每个信息集匹配行动.

- 纯策略: 从信息集到行动集的映射
 - 每个策略组合都会到达唯一的终点, 称为结果
- 混合策略: 纯策略的分布
- **行为策略**: 为每个信息集提供一个行动集元素的分布
- 在完美回忆条件下, 对于每一个mixed strategy, 存在一个behavioral strategy和前者等价, 反之亦然.

- 混合策略维度不低于行为策略: 前者蕴含了路径经过同一信息集上不同节点的概率分布. 自然完美信息博弈时这个概率分布的维度为0.
- 完美回忆条件下, 行为策略 \rightarrow 混合策略 \rightarrow 行为策略是恒同映射, 但混合策略 \rightarrow 行为策略 \rightarrow 混合策略不是

3. 扩展形式博弈的NE: 即写成正则表达的NE.

- 如果 σ 可以正概率到达一个信息集, 则该信息集在均衡路径上.

不可置信的威胁会出现在均衡路径外

4. 逆向归纳法 (backward induction): 下简称BI, 其解为BI solution.

- NE只要求在均衡路径上每个人都最优化, 而BI则要求任何路径上都要做最优选择
- **序贯理性 (sequentially rational)**: 在任何一个信息集上, 当前策略都是对手策略的BR. 无论在路径上还是在路径外
- BI不考虑未来能否改(也即给定后续结果), 且不关注当前会不会到达.
- 一些定理
 - 存在性条件: 任意有限完美信息博弈存在BI solution.
 - 唯一性条件: 若没有人认为两个终点**无差异**, 则有限完美信息博弈BI solution唯一.
 - 纯策略情况下, BI solution一定是NE.

5. 拓展形式博弈的子博弈 (subgame)

- 根所属信息集是单点集, 根继承者的所属信息集中的点也是根继承者, 则该根诱导子博弈.
- **子博弈完美均衡 (SPE)**: 行为策略组在所有的子博弈中都是NE.
 - SPE要求所有路径上的策略组合都是mutual BR, 无论是否在均衡路径上.
- 有限完美信息博弈中, **SPE \Leftrightarrow 没有可获利的一次偏离 \Leftrightarrow BI solution**

"SPE \Leftrightarrow 没有可获利的一次偏离" \Rightarrow "SPE \Leftrightarrow BI solution" \Rightarrow "纯策略BI solution = NE"

Topic : 重复博弈

1. 重复博弈 (repeated game)

- **阶段博弈 (stage game)** : 指重复的 n 个period中的一个
 - 阶段博弈的全部策略组合 $A^n = A_1 \times \dots \times A_n$.
 - 第 t 期的所有可能历史 $H_t = A^t$ (set of all possible histories up to period t), 是 t 维向量的集合, 每个元素都是所有人的策略组合的某个实现(动作组合).
 - 阶段博弈纳什均衡 (stage NE): 依于当前轮收益的 NE
- **总回报 (total payoff)**: 总和阶段博弈收益贴现之和. 其中 $\delta \in (0, 1]$ 是贴现率

$$v_i \equiv \sum_{t=1}^n \delta^{t-1} v_i^t$$

2. 重复博弈的策略

$$s_i : \bigcup_{t=0}^{T-1} H_t \rightarrow A_i, \quad s_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^T), \quad s_i^t : H_{t-1} \rightarrow A_i.$$

3. 有限期重复博弈

- 对于在每个历史下玩出动作组合 $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ 的策略 s , 如果 a^* 是stage NE则 s 是SPE, 如果 a^* 唯一则 SPE 唯一
- 最后一期一定玩的是 stage NE.

4. 无限期重复博弈

- 无穷博弈下, 一直玩同一个stage NE, 得到的是SPE.
- 若 stage NE 有帕累托严格改进 a , 那么一定存在足够大的贴现值, 使得存在一个SPE, 均衡结果上一直在玩 a .

Topic : 谈判

1. Strategic Bargaining : 重复博弈的一种

- 两个玩家轮流提出分配方案 $(x, 1 - x)$, 另一方选择接受或拒绝. 折扣率为 δ , 可以有限可以无限. 显然这个博弈是完美信息的
- 有限期下使用 backward induction, 对 $T = 2$, 发现一个唯一的 SPE:
 - 玩家 1 第一轮提出 $(1 - \delta, \delta)$, 接受第二轮的所有提议
 - 玩家 2 接受 $x, 1 - x$ 当且仅当 $x \geq 1 - \delta$, 否则拒绝, 第二轮提议 $(0, 1)$
 - 当 $\delta \rightarrow 1$ 时, 玩家 2 获得大部分收益
 - $T = 3$ 时, 均衡收益为 $(1 - \delta(1 - \delta), \delta(1 - \delta))$, $T = 4$ 时, 均衡收益为 $(1 - \delta(1 - \delta(1 - \delta)), \delta(1 - \delta(1 - \delta))) \dots$
 - 这种模式叫 **Rubinstein bargaining model**
- 无限期下不能用 backward induction, 我们注意到奇数轮与第一轮等效, 偶数轮与第二轮等效, 考虑双方的阈值策略:
 - 玩家 1 提议 $(1 - x^*, x^*)$ 只接受 $x \leq y^*$
 - 玩家 2 提议 $(1 - y^*, y^*)$ 只接受 $x \geq x^*$
 - 解得 $x^* = \frac{1}{1+\delta}, y^* = \frac{\delta}{1+\delta}$, 这确实是一个 SPE, 且恰好是有限博弈的极限.
 - 这个 SPE 确实是唯一的 SPE : 我们取 M_i, m_i 分别是所有 SPE 中玩家的收益上下界, 不难解得 $M_i = m_i = \frac{1}{1+\delta}$, 有了这个性质后会过头来考虑二者前两轮决策, 就证出来了
- 经典的海盗分金

Handout 4

1. 贝叶斯博弈/静态非完全信息博弈 (Bayesian game)

- definition** : 一个五元组 : $(N = [n], \{A_i\}_n, \{\Theta_i\}_n, \{v_i\}_n, \mathbb{P})$
 - A_i : 玩家 i 的动作空间
 - Θ_i : 玩家 i 的类型空间
 - $v_i : A \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$: 玩家 i 的支付函数, 例如 $v_i(a; \theta)$
 - $\mathbb{P} : \Theta$ 上的分布, 玩家们具备的一个**共同先验(common prior)**.
- 关于类型的后验概率(posterior belief about his opponents' types)** : $\phi(\cdot | \theta_i)$. 其中 $\phi(\theta_{-i} | \theta_i) = \mathbb{P}(\theta_i, \theta_{-i}) / \mathbb{P}(\theta_i)$
- 纯策略 $s_i : \Theta_i \rightarrow A_i$, 混合策略 $\sigma_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(A_i)$
- 纯策略贝叶斯纳什均衡(BNE)** : $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ s.t. $\forall i, \forall \theta_{ij} \in \Theta_i, \forall a_i \in A_i$

$$\begin{aligned} & \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i} | \theta_{ij}) v_i(s_i^*(\theta_{ij}), s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}) \\ & \leq \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i} | \theta_{ij}) v_i(a_i, s_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i}) \end{aligned}$$

$P(B|A) = P(AB)/P(A)$, 概率论的基础知识

Topic : 拍卖

1. auctions

- 英式拍卖** : 公开价格, 出价从低到高, 最高出价者获胜
- 荷兰式拍卖** : 公开价格, 价格从高到低, 第一个接受价格的获胜
- 一价密封拍卖 (First-price sealed-bid auction)** : 出一次价, 最高者获胜, 付出自己的出价
- 二价密封拍卖 (Second-price sealed-bid auction)** : 出一次价, 最高者获胜, 付出次高价

2. 独立私有价值 (IPV)

- 玩家对物品的价值是独立且私有的, 我们主要关注IPV设置下的拍卖
- 容易验证, 二价密封拍卖中, 出价等于自己的估值是一个**弱优势策略** : $(\forall b_{-i}, \geq) \wedge (\exists b_{-i}, >)$
 - 竞标者不关心对手类型的概率分布
 - 即使竞标者之间的类型存在相关性, IPV设置下的结果仍然适用
 - 均衡结果有效 : 获胜者是最需要物品的人

3. 收益等价定理 (revenue equivalence theorem)

- 在 IPV 设置下, 满足以下四个条件的拍卖为卖者提供了相同回报:
 - 投标者的类型来自表现良好的分布 (请注意这个定理的证明)
 - 投标者风险中性
 - 最高私有价值的投标者获胜
 - 最低私有价值的投标者收益为 0

博弈论考察应用, 收益等价定理的证明也蕴含在应用中, 请看后文: 往年题型整理-5-5

Handout 5

1. 信念系统 (system of beliefs)

- **definition** : 信念系统 μ 是指在一个扩展形式博弈中, 对于每个信息集 $h \in H$ 和其中的每个决策节点 $x \in h$, 为玩家 i 在信息集 h 中选择决策时分配一个概率 $\mu(x) \in [0, 1]$, 表示玩家 i 认为自己位于决策节点 x 的概率. 对于每个信息集 $h \in H$, 有 $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$
 - 完美信息只有一个信念系统
- (BNE σ^*, μ) 成为PBE (perfect Bayesian equilibrium) 的四个要求: (这里的完美和完美信息的完美不同)
 - 博弈有信念系统.
 - 路径上信息集的信念与贝叶斯法则一致, $\mu(x) = \mathbb{P}^{\sigma^*}(x) / \mathbb{P}^{\sigma^*}(h)$.
 - 对于不在均衡路径上的信息集, 贝叶斯法则不适用, 任何信念都可以分配.
 - 给定信念, 玩家的策略必须是序贯理性的. 也就是说, 在每个信息集中, 玩家都会做最佳反应. $\mathbb{E}[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta) | h, \mu] \geq \mathbb{E}[v_i(s_i, \sigma_{-i}, \theta) | h, \mu], \forall s_i$. 无论在不在均衡路径上 (无论贝叶斯法则适不适用)
- 假如BNE的任何信息集都在均衡路径上, 则它就是PBE
 - PBE一定是BNE
 - 换句话说, 对于完美信息, PBE等价于SPE

2. 信号博弈 (Signaling Games)

- **分离均衡 (Separating Equilibrium)** 指均衡下不同类型的发送者选择不同的信号, 这些信号能够清楚地反映发送者的类型, 并且接收者能够根据接收到的信号准确推断发送者的类型. 比如高能力者选择接受教育, 低能力者选择不接受.
- **混同均衡 (Pooling Equilibrium)** 指均衡下不同类型的玩家选择相同的信号, 因此接收者无法从信号中区分出玩家的类型.

3. PBE的提炼 (refinement)

- 再定义一次br :

$$BR_i(\hat{\Theta}, a_{-i}) \equiv \bigcup_{\mu \in \Delta(\hat{\Theta})} \arg \max_{a_i \in A_i} \sum_{\theta \in \hat{\Theta}} \mu(\theta) v_i(a_i, a_{-i}, \theta)$$

- $\hat{\Theta} \subset \Theta$ 是其他玩家的类型空间, $a_i \in A_i$, μ 是玩家 i 对 $\hat{\Theta}$ 的信念, 要求玩家仅在 $\hat{\Theta}$ 的元素上信念为正
- 另一个定义: 对一个 PBE σ^* , 令 $U(\theta)$ 表示玩家 i 的均衡收益, 则对 $\forall a_i \in A_i$, 定义:

$$D(a_i) \equiv \left\{ \theta \in \Theta | U(\theta) > \max_{a_{-i} \in BR_{-i}(\Theta, a_i)} v_i(a_i, a_{-i}, \theta) \right\}$$

- 玩家 i 当且仅当类型在 $D(a_i)$ 上时, 完全没有偏离到 a_i 动机. 换句话说, 其他玩家在看到 a_i 后应当排除 $D(a_i)$ 中的类型
- 对信号博弈中的一个 PBE σ^* , 若 $\exists \theta, a_i$ s.t.

$$U(\theta) < \min_{a_{-i} \in BR_{-i}(\Theta \setminus D(a_i), a_i)} v_i(a_i, a_{-i}, \theta)$$

则称 σ^* 不符合**直观标准 (intuitive criterion)**

- 如何直观理解直观标准? 相当于更新了一次信念系统, 将所谓"不直观"的节点的信念更新为 0, 然后当前玩家再次对被影响的信息集做决策 (不在原本的均衡路径上), 其他玩家重新审视玩家的新决策后看是否有偏离动机, 如果有, 则不符合直观标准.

Topic : 空谈博弈

1. Cheap Talk : 信号博弈的一种, 发送者可以发送信息, 但不付出任何代价.

- 简单的建模: 卖方策略 $\sigma_1 : \Theta \rightarrow \Delta(A_1)$, 买方策略 $\sigma_2 : A_1 \rightarrow \Delta(A_2)$, 买方信念 $\mu : A_1 \rightarrow \Delta(\Theta)$
- 不存在信息被完全传递的 PBE ($a_1 \in \text{supp} \sigma_1^*(\theta) \Rightarrow \mu(\theta | a_1) = 1$)
 - 例如, $s_1(\theta) = \theta$ 不可能出现在任何均衡中
- 总存在一个完全不传递信息的 PBE (babbling equilibrium)
- 第三个结论似乎局限于 $\Theta = A_1 = [0, 1]$, $A_2 = \mathbb{R}$, v_1, v_2 都上凸, 且分别在 θ 和 $\theta + b$ 取极值的情形 (这里 b 是一个给定常数) (实际上hj证明这三个结论都是在效用为**二次函数**且类型**均匀分布**的具体售货例子中): 在 PBE 中卖方如果执行一个两信息阈值策略, 假设阈值为 θ^* , 则 s_2 对应动作分别为 $\frac{\theta^*}{2}$ 和 $\frac{1+\theta^*}{2}$

$$s_1(\theta) = \begin{cases} a'_1, & \theta < \theta^*, \\ a''_1, & \theta > \theta^*, \end{cases}, s_2(a_1) = \begin{cases} \frac{\theta^*}{2}, & a_1 = a'_1, \\ \frac{\theta^*+1}{2}, & a_1 = a''_1; \end{cases}$$

- 这是所谓 **two-message PBE**, 我认为买方选了阈值与边界的折衷, 自然是因为均匀分布, 这些结论都没什么好证明的, 现推就是了.
- two-message PBE 当且仅当 $b < \frac{1}{4}$ 时存在
 - 实质上的充要条件是阈值在卖者的无差异约束下有解, 也就是 $-(\frac{\theta^*}{2} - b - \theta^*)^2 = -(\frac{1+\theta^*}{2} - b - \theta^*)^2$

既然您耐心看到了这里, 我就再说一些insight, 虽然这些可能对您是废话.

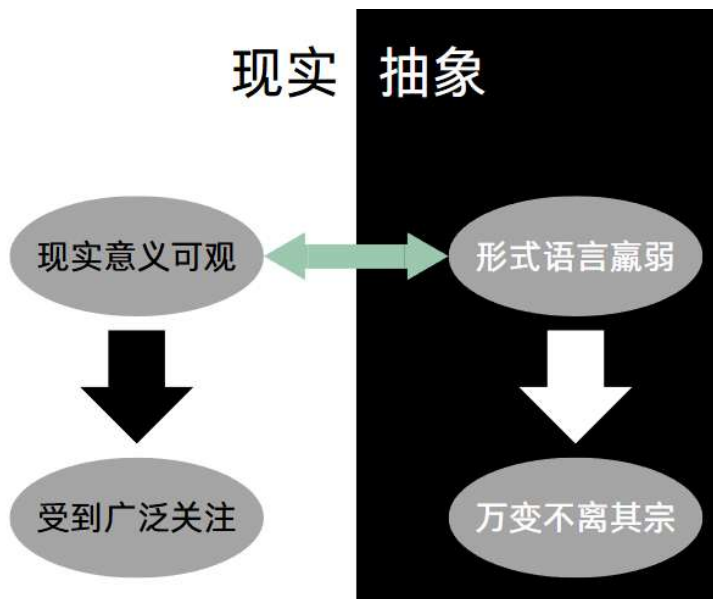
老师的 ppt 显然没有像我这样把拍卖和空谈博弈拎出来单独作 topic, 只在期中前拎出了 repeated game 和 strategic bargaining. 即便前者两块内容可能盘虬了期末考试的 $\frac{2}{3}$. 我不清楚老师这么做的原因.

我单独拎的原因是因为这些 topic 并不本质. 即便特定假设下确实存在很多重要的结论和观点, 甚至从现实意义看比原本的 NE, SPE, BNE, PBE 这些重要的多, 我也要把形式语言和这些 topic 区分开. 这是做知识梳理区别与老师give a lecture的地方.

形式语言的叙述和证明应当严谨连贯, topic的结论证明则无需赘述 (把握br这一核心思想直观地计算都易得), 只用罗列结论提示一下方向即可, 亦或只是为了便于记忆. 因此两者的分野我认为有必要. 知识应当从厚读薄, 对应到做题上, 似乎也没必要记忆这么多东西, 某些时候回归本源, 抛开这些二

级结论, 也许注意力集中战斗力更高呢?

正如笔记开头所说, 博弈论的解题方法蕴含在 BR, NE 等概念中, tricks 是摆在明面上的. 究其原因无非是博弈论的形式语言太羸弱, 又因为现实意义可观而受到广泛关注, 因此大家做的很详尽完备, 这在其他数学中是很少见的, 谁会赋予每一个过程一个实际意义? 这一般不是只有经济学家才做的事吗? 而他们却是倒过来从实际意义出发. 这是我觉得博弈论很特别的地方. 想的再深一点, "实际意义可观" "形式语言羸弱" 这两点其实是一点, 在现实世界前者意味着受到广泛关注, 映射到抽象世界后者就是insight万变不离其宗.



因此, 用纯数学的方式来解决博弈论期末考试, 我们只抱着帮玩家最大化收益的目的, 一定比死读 PPT 从大脑中调用各种 Topic 的内容更有效, 前者花的时间更少. 具体操作就是题刷百遍, 其义自见.

当然, 有以上想法也可能只是因为我自己是信科人, 学理论知识向sms看齐, 从而不太适应经济学的pace, 读者您当看个乐子. (反正也没人看×)

往年题型整理

- 不同形式语言的复杂度不同, 而人的演算能力是定值. 因此形式语言或者模型越复杂, 问题本身越简单.
- 不同问题的规模不同, 而人的演算能力是定值. 因此考试中的问题规模越大, 越容易存在巧妙的trick.

1. 双变量矩阵题型

即策略有限, 从多个选择中混合or纯策略, 往往能看到双变量矩阵

(1) 🔥 Does player 1 have a strictly dominated strategy? If yes, show which strategy strictly dominates which strategy. If no, explain why.

- 首先需要注意 dominance 是否考虑混合策略
- 直接看矩阵数值, 如果某策略在对手的某个纯策略下是最优反应, 则必不可能被占优, 利用这个做排除法
 - 如果存在某个策略被占优, 直接写谁被谁占
 - 如果不存在, 理由如下: Player 1 has no strictly dominated strategy. This is because each (pure) strategy is a best response to some of player 1's strategy.

(2) 🔥 What strategies survive the process of iterated elimination of strictly dominated strategies? In each step of your deletion, show which strategy is strictly dominated by which strategy.

- 按部就班IESDS即可, 注意能不能混合以及不要把严格占优和帕累托更优混淆, 一般没有陷阱
- IESDS可以删被混合策略占优的纯策略, 这一点与题设无关, 因为如果纯策略是存在的, 那么必然不会被某个混合策略占优
- 弱劣策略可能也可以删, 取决于题意

(3) 🔥 Find all pure strategy NE.

- 著名的划线法, 找到每一个对手纯策略下的最优反应, 上下线同时出现的方格即为NE

(4) 🔥🔥🔥 Find all Nash equilibria (pure and mixed) of this game.

- 首先参考1(2)得到 reduced form
- 一般两种思路, 前者可能稍繁琐, 后者需要注意力, 实战大多是后者
 - 一种是**从下至上**, 枚举并给出支撑集上nash均衡的全部必要条件
 - 纯策略有限, 直接找

- 混合策略用好NE的充要条件：混合的一方支撑集无差异且均最优
- 另一种是**从上到下**，对一些条件给出相应的约束来缩小答案范围
 - 常见的条件包括：
 - $\sigma_1(X) > 0$ 用于排除被帕累托更优的 X
 - $\sigma_1(X) = 1$ 用于讨论一方纯策略另一方混合策略的情形
- **不必囿于公式做题或者NE充要条件**，把自己代入玩家去考虑可获利偏离可以提高注意力
- 补充1: 双人博弈不存在一个使得nash均衡分布在对角线上的一般条件，因此不能假设纳什均衡下两人或者多人的策略分布相同
 - 一些规模较大的问题，可能出现参与者地位对称的情形以降低计算量。补充1告诉我们，**对称性只能同理对参与者的讨论，而不为NE提供额外的性质**
- 补充2: 有限博弈下nash均衡当然往往是有界闭的，但这不代表可以用混合策略讨论纯策略，因为单点和线段也有界闭
 - 任何情况下**都将纯策略和混合策略分类讨论**

(5) 🔥🔥 Find all Pareto efficient strategy profiles.

- 容易被忽略的一种题型，并且需要注意力
- 当你枚举了被帕累托占优的所有其他均衡后，就可以写显然了

(6) 🔥 画出三变量矩阵

- 就是多个双变量矩阵

2. 出价类题型

这意味着策略集是连续区间，包括拍卖，古诺模型等

(1) 🔥 Show that XXX is a Nash equilibrium.

- 能问出这个问题大概率比较难写，别求交点了。
- 写出效用函数，验证每个玩家无可获利偏离即可

(2) 🔥🔥 Find a Nash equilibrium

- 揣摩NE的条件给出构造，再类似上题，需要注意力
- 一般往对称策略或者单方面碾压获胜的策略想

(3) 🔥🔥 Find all Nash equilibrium

- 这个问题我们微观经济中一般都做过
- 先根据题意写效用函数
- 再对效用函数求一阶条件，写出br
- 求br交点即为NE
 - 不要忘了点 (0,0) 和边界
- 注意 (0,0) 处可能不可导，需要挖点单独讨论

3. 博弈树题型

这里特指完全信息的序贯博弈

(1) 🔥 Find a mixed strategy Nash equilibrium.

- 参考 2(2)，一般只用考虑对称的策略，设出所有其他人的分布为 p ，再解最后一个人的混合充要条件（支撑集无差异且均最优），解出 p 后大家都用这个 p ，就省去了验证

(2) 🔥 Draw the game tree for this game, including the payoffs.

- 直接画即可，注意审题，信息集容易漏

(3) 🔥🔥🔥 Find all pure strategy Nash equilibria in which the road is built.

- 复杂的题，先列策略集，即每个人对属于其的每个信息集给出策略。

(4) 🔥 Find a backward induction solution.

- 逆向归纳，给出的solution应当形如 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

(5) 🔥🔥 Find a Nash equilibrium that is not a backward induction solution.

- 需要专门构造，使得在非均衡路径上不是nash均衡。

期中期末分割线

2024的具体分界在有限重复博弈之后

- 以下题型整理不包含用于引导的小题, 因为这等效于拆分我这些过程

4. 重复博弈

(1) 🔥 找 stage NE (2019秋1.1)

- 策略集离散: 1(3), 策略集连续: 2(3)
- 有限博弈 stage NE 一般至少有两个, 不然后面设计不了触发策略, 无限博弈则没有这个要求, 因为只要有帕累托优化就可以在 δ 足够大的情形下强行威胁.

(2) 🔥🔥 找满足某轮/某些轮在玩什么的 SPE (2022秋1)(2019秋1.2)

- 直接利用 4(1) 找到的 stage NE 设计触发策略即可
- 再验证无可获利偏离
 - 如果是两阶段博弈, 第一阶段没有历史, 自然无需考虑不在均衡路径上的情况
 - 如果是多阶段博弈, 注意不要漏了不在均衡路径的情况
 - 如果是无限博弈, 分两类讨论, 第一类是其他历史, 直接说明一下 w 往后一直在玩 stage NE, 没有偏离动机. 第二类是均衡路径上的历史, 我们需要计算偏离收益, 也即验证不等式:

$$v_i(a_i, a_{-i}) > (1 - \delta)v_i(x, a_{-i}) + \delta v_i(\text{stageNE}), \forall x$$

- 最终形成答案, 有多种可能
 - 固定策略, 通过以上不等式约束 δ 的取值
 - 验证 δ 足够大时, 一批策略都是 SPE
 - 这个时候你需要找 δ_i , 并给出区间 $\cap(\delta_i, 1)$

(3) 🔥🔥🔥 找出所有的SPE

- 见过有一次非常难, 是Ilhw3.3(两阶段博弈): 我总共解出了992个SPE, 如果遇到请严格依照以下步骤:
 - 计算二阶段背信损失(唯一)
 - 枚举一阶段结束的局面(双方的动作组合)
 - 计算每一方的每个一阶段一次偏移收益
 - 若存在大于背信损失的偏移, 则该一阶段局面下没有SPE
 - 若为一方的可获利偏移, 则该局面需要被对手在二阶段中威胁
 - 若为一方的不可获利偏移或者不是该局面的一次偏离, 则不需要被威胁, 二阶段对该历史的策略随意(这里可能需要计数)
 - 列出 SPE, 一阶段策略直接指定, 二阶段在每个历史下的策略由以上三个层面的讨论给定

(4) 🔥🔥 证明某情形下没有 SPE (2019秋1.3)

- 这种题有点骚, 有一些小trick, 比如**(2019秋1.3)**发现总社会福利是负的(这说明有人亏损, 自然不是SPE)

(5) 🔥🔥 证明任意小的 δ 都有正收益 SPE (2020秋3.2)

- 这题更是骚的没边, 题目前提是策略连续, 构造自然还是触发策略, 但是相应构造对 δ 的要求可以随着策略趋于 0 而趋于 0, 对任意小的策略自然有任意小的 δ 使得正收益 SPE 存在.

5. 谈判

(1) 🔥🔥 Find a subgame perfect equilibria. (2021秋1)(2019秋2)

- 两个人的谈判策略一般形如:
 - 玩家1: 提出 $(x_1^*, 1 - x_1^*)$, 若对方提出 $x \geq x_2^*$ 就接受
 - 玩家2: 提出 $(x_2^*, 1 - x_2^*)$, 若对方提出 $x \leq x_1^*$ 就接受
 - 阈值处接受拒绝无差异, 计算可得 x_1^* 和 x_2^*
 - 本质上是: 对每轮的拒绝方, 接受收益 = 拒绝后下一轮被接受的收益

(2) 🔥🔥🔥 谈判出过一次整活题: (2020秋4)

- 整活题有引导

6. 贝叶斯均衡

- 注意我们的策略：(纯策略 $s_i : \Theta_i \rightarrow A_i$, 混合策略 $\sigma_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(A_i)$)
- 按类型, 策略的连续/离散分了 4 个类, 理论上界是再分纯与混合, 就是 8 类
 - 策略连续不存在混合策略, 因为混合策略的支撑集是连续的, 无法用一个连续函数表示, 先减少两类
 - 请注意, 类型连续不可能退化成类型离散, 因为你每个类型都得指定策略
 - 而策略连续可以退化成策略离散, 比如说空谈博弈与阈值策略的关系, 因为策略可以只选区间中的一个值嘛, 本笔记将其列入退化后的情形, 而不是退化前的情形
- 本节各种题型的问题方式是通用的, 但是解题方式受博弈影响区别很大, 这里列举问题, 后面按题型分类
 - Show that there is no Bayesian Nash equilibrium in which the TA plays a pure strategy.
 - Show that there is an essentially unique Bayesian Nash equilibrium and characterize it.
 - Show that the TA monitors $i = 1$ more than $i = 2$ if and only if $\alpha > 1$. Briefly explain the intuition.

(1) 🔥🔥 用双变量形式表示贝叶斯博弈

- 这意味着类型和动作都是离散的(纯的而非混合的)
- 先列双变量收益矩阵, 行列是动作组合
- 再列贝叶斯博弈的双变量矩阵, 每个策略都指定了每个类型下的行动, 行列都是对纯策略的枚举, 方格内是双方的期望收益(分布来自于类型的先验)

(2) 🔥 类型离散, 策略离散, 纯策略

- 基于 5(1) 的双变量矩阵用划线法, 简单

(3) 🔥 类型离散, 策略连续

- 没见过, 也许是 5(3) 的子集

(4) 🔥🔥 类型离散, 策略离散, 混合策略

- 5(1) + 1(4), 这个阶段还考这个就简单了, 因为你 5(1) 必然要算半天, 不可能 1(4) 还算半天

(5) 🔥🔥 类型连续, 策略离散, 纯策略 (2022秋2)

- 也就是所谓阈值策略, 即某个类型的某个动作是阈值, 低于阈值的类型选择一种动作, 高于阈值的类型选择另一种动作.
 - 先待定对手策略函数 $s_{-i}(\theta_{-i})$
 - 对于自己的动作 a , 解不等式 $\mathbb{E}(v_i(a, s_{-i}(\theta_{-i})) | \theta_i) \geq \mathbb{E}(v_i(b, s_{-i}(\theta_{-i})) | \theta_i)$, 得到对 θ_i 的限制条件
 - 这意味着该条件范围内的 θ_i 的最优反应是 a , 这一条件往往是对 $s_{-i}(\theta_{-i})$ 的积分
 - 利用上一步结果构造出所有参与者的策略, 阈值待定
 - 将策略带入阈值中的积分, 解出阈值
 - 重复以上步骤, 直到所有阈值都为定值, 所有策略都为定策略
- 一般这里有两种问题, 以上过程都包含了
 - 证明 BNE 是阈值策略
 - 求 BNE

(6) 🔥🔥🔥 类型连续, 策略连续 (2023秋3)(2021秋3)(2020秋1)

- 所谓拍卖问题, hj 出题往往不会直接抛出来求 BNE, 而是逐步引导
 - 待定所有人的策略, 证明策略的单调性
 - 这一步一般不考, 因为策略只能证到弱占优, 而我们可能需要严格单调
 - 求期望收益
 - 给定 $\theta_i, b_i, \theta_{-i}$ 的分布, 以及 s_{-i} , 求期望收益
 - 直接套公式:

$$\mathbb{E}(u_i(\theta_{-i} | \theta_i, b_i, s_{-i})) = \frac{\int_{\Theta_{-i}} u_i(\theta_{-i}, \theta_i, b_i, s_{-i}) f(\theta_{-i}) d\theta_{-i}}{\int_{\Theta_{-i}} f(\theta_{-i}) d\theta_{-i}}$$

- 注意这里 θ_{-i} 不一定是其他所有玩家的类型的联合分布, 也可以是影响拍卖结果的一个聚合量, 比如 $\max \theta_{-i}$
- 如果只有两个玩家, 或者给的是 cdf 而不是 pdf, 当然简单很多
- Θ_{-i} 的分段也就是 u_i 的分段, 一般是 $[0, s_{-i}^{-1}(b_i)]$
- 求一阶条件
 - 直接对上公式求导, 注意使用:

$$(s^{-1}(x))' = \frac{1}{s'(s^{-1}(x))}$$

- 注意含参变限积分求导

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right)' = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f'_x(x, t) dt - f(x, \psi(x))\psi'(x) + f(x, \varphi(x))\varphi'(x)$$

- 得到关于策略的常微分方程,解出策略
 - 未必需要解 ode, 因为如果只是找一个 BNE, 我们可以待定系数猜一个出来, 比如一次函数

(6) 🔥🔥🔥 类型连续, 策略离散, 混合策略

- 没见过

7. 信号博弈

这里指不完全信息动态博弈, 主要题型只有信号博弈(广义)

- 信号博弈也是贝叶斯博弈, 双变量矩阵题型参考 5(1), BNE求解参考 5(2)...

(1) 🔥 Draw a game tree for this game. (2022秋3.1)

- 建议平躺着画, 也就是类型在中间, 动作向两边, 且同一信息集画在一起, 不要真画成从上到下的树了, 很难看

(2) 🔥🔥 求 PBE

- 先求 BNE, 因为 PBE 是 BNE 的加强版
- 对每个BNE, 检查或补充PBE的条件 (四个条件中指检查两个就可以, 另外两个是废话)
 - 沿着均衡路径计算信念, (为 BNE 补充信念系统)
 - 对于不在均衡路径上的信息集, 信念不受约束, 但策略也要满足序贯理性

(3) 🔥🔥🔥 求满足"某个条件"的分离/混同均衡

- 先确定/待定信息发送者的策略
 - 这里的"某个条件"的作用在于约束这里待定的策略, 否则计算量过大, 还是注意我写在"往年题型整理"开头的那个
- 根据策略确定/待定信念系统
- 根据信念系统探寻信息接受者的最优选择/无差异条件
- 回到信息发送者, 判断是否偏离
 - 偏离则该均衡不存在, 不偏离就已求出均衡

"待定"指待定系数

当某个信息集的信念不在均衡路径上时, 信念不受约束, 则需要对信息接受者的不同反应对应的信念区间分类讨论

(4) 🔥🔥🔥 Show that in all perfect Bayesian equilibria, the firm's belief after observing P is the same. What is this belief? (2022秋3.2)

- 实质是探究 PBE 的信念系统的性质, 利用的是序贯理性
- 着眼于某个信息集, 分类讨论
 - 比如22秋这题, 信息集上四个节点, 根据在均衡路径上的节点数目分: 0, 1, ≥ 2 , 最终发现信念唯一.
- 根据收到的信息判断信念

(5) 🔥🔥🔥 Does it pass or fail the intuitive criterion? (2023秋1.1)(2021秋4.2)

- 信号博弈必考题, 而且容易漏
- 直观标准的定义请看之前的叙述
- 在已有一个 PBE 的基础上,
 - 找玩家 1 的偏离, 重新审视偏离到的信息集
 - 玩家 2 排除 "不直观" 节点后, 重新做选择
 - "不直观" 指对于该类型玩家 1, 无论 2 怎么选, 没有从均衡偏离到这个节点的动机 (注意作比较的是类型的均衡收益, 不是最终的均衡收益)
 - 玩家 1 注意到玩家 2 的选择, 看是否有偏离动机, 有就是不直观, 反之则符合直观标准

8. 空谈博弈

(1) 🔥 Describe a babbling equilibrium.

(2) 🔥 PBE when full information is transmitted.

(3) 🔥🔥🔥 Two-message equilibrium.

- 只有 (2023秋2) 考过, 内容与 Topic : Cheap Talk 完全雷同

9. 其他易错点

- 三人博弈中不要误用对称性, 对一个人概率是 p 对另一个人可能是 $1 - p$, 我在今年II的考试中犯了这个错误
- 对于连续类型, 注意区分 cdf 和 pdf, 一般直接给的是 cdf, 表示类型处在 $(0, x)$ 的概率, 注意

- 对于类型分布, 如果没有给具体分布, 但是给了一个类似 $\mu \in \Delta(\Theta)$ 的东西, 那么答案中可以包含这个 μ , 甚至积分也未必要拆
- 如果方程的解算不出来, 也是有可能的, 确定这个解存在就好

往年考情分析

年份	大题1	大题2	大题3	大题4
2024	重复博弈	谈判(整活)	拍卖	信号博弈
2023	信号博弈	空谈博弈(整活)	BNE(拍卖)	
2022	重复博弈	BNE(类型连续, 策略离散)	信号博弈	
2021	谈判	BNE(类型连续, 策略离散)	BNE(拍卖)	信号博弈
2020	拍卖	BNE(类型连续, 策略离散)	重复博弈	谈判(三人)
2019	重复博弈	谈判	BNE(类型连续, 策略离散)	BNE(类型连续,策略连续,但是只建模)

- 空谈博弈本质上还是所谓BNE(类型连续, 策略离散), 只是多了个信念系统, 策略还是阈值策略, 因此这题几乎必考, 可能还是第二题
 - 就上课时对空谈博弈的关注度来看, 2024 年大概率不会回归阈值策略 BNE, 还是继续考空谈博弈, 当然也可能是题干 BNE 然后小题赋予信念系统升级成 PBE
- 信号博弈大概率也必考, 拍卖何尝不考呢
- 谈判和无限期重复博弈考的少了, 确实感觉课程和考题的重心由这两个转向不完全信息动态博弈
- 近三年出题比较规律, 我认为可能有一道整活, 类似20.4的三人谈判或者19.4的私有价值+古诺(但是这题就建了模没算), 这种整活题引导比较好
 - 此外很有意思的一点, 2023 的 ppt 上没有空谈博弈, 但是考试考了, 然后 2024 就加上了 cheap talk. (甚至今年讲义中的 babbling equilibrium, two-message equilibrium 这两项内容也与试卷上雷同) 这是否说明今年考试也有可能有道整活题成为新的课程内容呢? 说到底博弈论的考试还是考察理解, 万变不离其宗. 考题会做一些引导, 而 ppt 上例子不是必须的, 在这里也可见一斑.

考完试来评价一下, 宏观上押题押错了, 对不起
这次重复博弈和谈判回归, 好在我笔记都有涵盖. 并且谈判题出的特别骚, 谈判和重复博弈考题可以整活, BNEPBE不好整这个观点我只私下和同学说过.
微观上小题题型自然逃不出我的整理