Problem set 2

2024/10/28
徐靖 2200012917

1

首先注意到 R 被 C 严格占优

- 纯策略均衡

$(U,L),(M,C)$

- 甲纯策略,乙混合策略的均衡

注意到 $E_L=E_C$ 恒成立,因此$\{(U,p\circ L+(1-p)\circ C):p\in[\frac{4}{7},1)\}$ 和 $\{(M,p\circ L+(1-p)\circ C):p\in(0,\frac{4}{7}]\}$ 是Nash均衡

- 乙纯策略,甲混合策略的均衡不存在
- 混合策略均衡

对乙来说 L 和 C 无差别, 由于 D 被 $\frac{1}{2}\circ U+\frac{1}{2}\circ M$ 严格占优, 因此 $\sigma_1(D)=0$,且

$$3\sigma_2(L)=4(1-\sigma_2(L))\Rightarrow\sigma_2(L)=\frac{4}{7}$$

从而 $\{(\frac{4}{7}\circ L+\frac{3}{7}\circ C,p\circ U+(1-p)\circ M):p\in(0,1)\}$ 是Nash均衡.

2

(1)

甲的最大最小策略是 M, 最大最小值是 5

(2)

设 $a=\sigma_2(L)$, 则有

$$\max v_1=\max\{6-4a,5,4+3a\}\geq 5$$

当 $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ 时, $\max v_1 = 5$
乙的最小最大策略是 $\{(a \circ L, (1-a) \circ R) | a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]\}$, 甲的最小最大值是 5

3

(1)

对于企业 i , 考虑一阶条件

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{A - \sum x_i}$$

联立 i 遍历 $[n]$ 后的方程组, 得到

$$x_i = \frac{A}{n+1}$$

这是这个博弈的唯一纯策略纳什均衡, 此时 $u_i = 2\ln A - 2\ln(n+1)$

(2)

企业协调行动时, $\sum x_i$ 作为整体被 $i \in [n]$ 平分. 因此,

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{n}{A - nx}$$

解得 $x_i = x = \frac{A}{2n}, u_i = 2\ln(A/2) - \ln n, \forall i$

(3)

实际上, $\lim_{n\to+\infty} 2\ln(A/2) - \ln n = -\infty = \lim_{n\to+\infty} 2\ln(A) - 2\ln n$
同时, $\lim_{n\to+\infty} x_i = 0$
(1)和(2)两个结果是相同的

4

(1)

每个国家都做优化问题:

$$\max(90-q-10)q$$

解得 $q^*=40$

(2)

设 a,b 在 A 产量分别为 q_{11},q_{21}, 在 B 产量分别为 q_{12},q_{22}. 两家公司面临最优化问题:

$$\max_{q_{i1},q_{i2}}(90-q_{1i}-q_{2i}-10)q_{ii}+(90-q_{1j}-q_{2j}-20)q_{ij}, j=3-i$$

考虑一阶条件后解得

$$q_{11}=q_{22}=30, q_{12}=q_{21}=20$$

(3)

最优化问题变为

$$\max_{q_{i1},q_{i2}}(90-q_{1i}-q_{2i}-10)q_{ii}+(90-q_{1j}-q_{2j}-50)q_{ij}, j=3-i$$

直接解一阶条件发现 $q_{ij}=0$ 这表明没有出口
因此结果同 (1), $q_{11}=q_{22}=40, q_{12}=q_{21}=0$

5

(1)

		Player 2		
		0	**9**	**20**
	0	10, 10	0, 11	0, 0
Player 1	**9**	11, 0	1, 1	-9, 0
	20	0, 0	0, -9	-10, -10

依次剔除严格劣策略, 最后只有 B 存活

(2)

		Player 2			
		A(0)	B(9)	C(15)	D(20)
Player 1	A(0)	10, 10	0, 11	0, 5	0, 0
	B(9)	11, 0	1, 1	-9, 5	-9, 0
	C(15)	5, 0	5, -9	-5, -5	-15, 0
	D(20)	0, 0	0, -9	0, -15	-10, -10

由于是对称博弈, 因此Nash均衡下两位行贿者策略相同

- 没有纯策略Nash均衡
- 设四种纯策略的概率为 a, b, c, d. $a + b + c + d = 1$
  - 若 $d > 0$, 则 A 严格比 D 更优, 因此 $d = 0$
- 对 $a, b, c,\ a + b + c = 1$, 解方程组 $v(A) = v(B) = v(C)$ 发现 $(0.4 \circ A + 0.5 \circ B + 0.1 \circ C, 0.4 \circ A + 0.5 \circ B + 0.1 \circ C)$ 是唯一Nash均衡

6

(1)

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

对玩家 1,2, 无论偏移到何值玩家 3 都必胜, 也就是1和2必败, $1/3$ 与其他立场无差异
对玩家 3, 立场为 $2/3$ 时已经获胜, 不可能更优
因此该策略组合是Nash均衡

(2)

没有人会选择输掉选举的政治立场, 因为此时不参选是可获利的偏离, 因此所有参选者得票数并列.
考虑nash均衡的情形:

- 假如有2人未参选, 未参选的一个候选人和参选者选择同一个政治立场是可获利的偏移, 因此不存在nash均衡
- 假如只有1人未参选, 设参选者的政治立场是 x, y,
  - 由得票相同可知 $x + y = 1$ 或 $x = y$

  - 假如 $x \neq y$, 则 $y \neq 0.5$, 选 x 的侯选者改为 $\frac{y+0.5}{2}$ 可以彻底赢得选举, 矛盾. 因此 $x = y = 0.5$
  - 此时未参选者选择 0.5 是可获利的偏离, 因此这一情形下不存在nash均衡
- 假如三个人都参选了, 不妨设三个人的政治立场是 $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$
  - 考虑 $x = y = z = k$, 任意一位候选人只需选 $\frac{k+0.5}{2}$ 即可彻底获胜
  - 考虑 $x < y < z$,, 由票数相等解得, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$, 第一位候选人选 $\frac{1}{3}$ 即可彻底赢得选举
  - 考虑 $x = y < z$, ($x < y = z$ 同理), 发现 $\frac{x+z}{2} = \frac{2}{3}$, 最后一位候选人选 $\frac{2}{3}$ 即可彻底赢得选举

综上, Nash均衡不存在