2024/10/8

2200012917 徐靖

1

第一次作业给出了博弈树,和双方策略,不再赘述 (X表示哥哥给了弟弟20,Y表示给了10)

(1)

注意到哥哥的策略 XMN 被 YMN 严格占优, 其中 $M,N\in\{A,B\}$,因此我们得到简化博弈

		哥哥	
		YA	**YB**
弟弟	**A**	26, 22	10, 10
	B	10, 10	22, 26

简化博弈的纯策略nash均衡有 $(A,YA),(B,YB)$
因此原形式的纯策略nash均衡有
$(AA,YAA),(AA,YAB),(AB,YAA),(AB,YAB),(BB,YBB),(BB,YBA),(BA,YBB),(BA,YBA)$

(2)

考虑利用两个子博弈的nash均衡去构造原博弈的SPE. 实际上, SPE在每个子博弈上都是nash均衡. 且SPE中哥哥一定在第一轮选Y
由上题讨论, 在均衡路径上的子博弈的nash均衡为 $(A,YA),(B,YB),(\frac{4}{7}\circ A+\frac{3}{7}\circ B,\frac{3}{7}\circ YA+\frac{4}{7}\circ YB)$
另一个子博弈是

		哥哥	
		YA	**YB**
弟弟	**A**	36, 12	20, 0
	B	20, 0	32, 16

nash均衡也为 $(A,YA),(B,YB),(\frac{4}{7}\circ A+\frac{3}{7}\circ B,\frac{3}{7}\circ YA+\frac{4}{7}\circ YB)$

那么所有的SPE都在两个子博弈的3*3个组合中, 共9个.

2

(1)

子博弈只有给定q_1 后 q_2, q_3 同时作选择
考虑这个子博弈, 对 $i \in 2,3$, 企业 i 作优化问题:

$$\max_{q_i \geq 0} q_i(a - q_1 - q_2 - q_3 - c)$$

其一阶条件

$$a - q_1 - q_2 - q_3 - c = q_i$$

解得

$$q_2 = q_3 = \max\{\frac{a - c - q_1}{3}, 0\}$$

返回企业1的选择, 它注意到 q_2, q_3 的最优反应, 因此

$$\max_{q_1 \geq 0} q_1(a - q_1 - 2\max\{\frac{a - c - q_1}{3}, 0\} - c)$$

解优化问题得到 $q_1 = \frac{a-c}{2}$

从而得到唯一的SPE:

$$q_1 = \frac{a - c}{2}, q_2 = q_3 = \max\{\frac{a - c - q_1}{3}, 0\}$$

(2)

令

$$q_1 = \frac{a - c}{2}, q_2 = q_3 = \begin{cases} \frac{a-c}{6}, & q_1 = \frac{a-c}{2}, \\ a, & o.w. \end{cases}$$

这显然是该扩展博弈的纳什均衡, 双方都没有可获利的偏离. 而它不是SPE, 因为当 $q_1 \neq \frac{a-c}{2}$ 时, 企业2和3都亏损.

3

纯策略单阶段博弈nash均衡是 $(B, B), (C, C)$ 收益分别为 $(5, 5), (1, 1)$
二阶段是最后一轮, 一定玩单阶段博弈nash均衡.

考虑触发策略:

$$a_i^1 = A, a_i^2 = \begin{cases} B, & h_1 = AA \\ C, & o.w. \end{cases}$$

当两个玩家都采用这个策略时, 双方都没有可获利的一次偏离, 因此是SPE
玩家可以通过二阶段的选择威胁另一方遵从某种历史, 但这个威胁小于等于 $5 - 1 = 4$, 而一阶段中 A 相对 B, C 的获利不小于 7, 而当有一方选 A 时, 另一方也会选 A. 因此SPE中两位玩家一阶段都选 A , 从而触发策略是唯一的纯策略 SPE

4

首先考虑步骤 (5), 我们发现只要方案在 $(0, 5)$ 内, 全体会议中 ABC 相对于保持现状都更倾向于该方案
注意到 $X_d \in [3, 5]$, 否则 D 更倾向于保持现状而非 X_d, 这导致 D 存在可获利偏离 : 第一轮直接不提出 X_d , 博弈结束. 此外, 步骤(2)时 CD 都会支持 X_d.
当 $X_d \geq 3$ 时, 只需 $X_c < X_d$, 则 ABC 都会选择 X_c 而非 X_d, 进而 X_c 胜出, 这符合 C 的利益, 因此当博弈能够进行到步骤(3)时, $X_C = 2.5$
当 D 提出 X_d 的结果是 $X_c = 2.5$ 通过最终投票表决并取代现状, 这对于D来说比现状更劣. 因此 D 的最优决策是不提出改革方案, 直接让博弈结束.

综上, D默认的最优策略是不提出改革方案, 保持现状. ABC若希望更优, 应当与 D 私下达成妥协通过一个 $(3, 4]$ 的方案, 否则在规则内无法改变现状. E无论如何无法更优.

5

(1)

企业策略 : H (生产高品质药物), L (生产低品质药物)
消费者策略 : B (购买药物), N (不购买药物)

		消费者	
		B	**N**
企业	**H**	2, 1	-4, 0
	L	6, -2	0, 0

在这个单阶段博弈中, H 被 L 严格占优, 因此企业只会选 L , 此时对于消费者 B和N有差异不能混合, 因此纳什均衡只有 (L, N)

(2)

由于只有一个单阶段nash均衡, 因此SPE唯一且在每一轮玩出这个均衡:

$$s_1^1 = s_1^2 = L, s_2^1 = s_2^2 = N$$

(3)

为两边都设计触发策略:

$$s_1^t = \begin{cases} H, & h_t = (H,B)^{t-1}, \\ L, & o.w. \end{cases}, s_2^t = \begin{cases} B, & h_t = (H,B)^{t-1}, \\ N, & o.w. \end{cases}$$

该SPE下二者的收益分别为:

$$v_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} 2\delta^{i-1} = \frac{2}{1-\delta}, v_2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta^{i-1} = \frac{1}{1-\delta}$$

考虑企业的一次偏离, 由于在偏离的时间前收益和SPE的情形相等, 因此不妨设在第一阶段就偏离,此时

$$v_1' = 6 + \sum_{i=1}^{+\infty} 0 \cdot \delta^{i-1} = 6$$

消费者没有一次偏离的意愿, 因为 1 是各种情形下的最大收益.
因此"企业生产高品质药物, 消费者每个阶段都购买"能作为均衡结果出现的条件为

$$v_1' \leq v_1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \delta$$

(4)

降价后单阶段博弈变为:

		消费者	
		B	**N**
企业	**H**	1, 2	-4, 0
	L	5, -1	0, 0

类似 (3) 的讨论, 降价后企业相对触发策略无一次偏离的条件为:

$$v_1' = 5 \leq \frac{1}{1-\delta} = v_1 \Rightarrow \delta \geq \frac{4}{5}$$

这个贴现因子比(3)中的大, 因此有更大可能会致使企业选择生产一次低品质药物, 从而导致企业与消费者两败俱伤.