博弈论HW06

8.4 行业领导者

1. 有无数个子博弈。因为企业1的产量选择有无穷种，意味着2和3的信息集有无穷种，从而会有无穷个子博弈。
2. 是不完美信息博弈，将博弈表示为序贯博弈的时候信息集非单点集：2和3决策时互相不知道对方选了什么。
3. 讨论子博弈。在企业1选择了q_1的情况下，2和3的博弈为：

   $\max q_2(a-q_1-q_2-q_3)-cq_2 \Rightarrow q_2=\max\{0.5(a-q_1-q_3-c),0\}$

   $\max q_3(a-q_1-q_2-q_3)-cq_3 \Rightarrow q_3=\max\{0.5(a-q_1-q_2-c),0\}$

   将q_1作为外生给定的情况，则二者子博弈的均衡为$(q_2^*(q_1),q_3^*(q_1))$，其中两者的具体形式为：

   $q_2^*(q_1)=q_3^*(q_1)=\max\{\frac{a-q_1-c}{3},0\}$

   在1决策时，1没有可获利的一次偏离，则此时1的决策为：

   $q_1=\arg\max_{q_1} q_1(a-q_1-q_2^*(q_1)-q_3^*(q_1))-cq_1$

   比较$q_1\geq a-c$和$q_1<a-c$情况，前者的最大值在在$q_1=a-c$取，而后者在$0.5(a-c)$取，后者最大值大于前者。

   从而上述求解过程解出了唯一的SPE，为：$q_1^*=\max\{0.5(a-c),0\}$，
   $q_2^*(q_1)=q_3^*(q_1)=\max\{\frac{a-q_1-c}{3},0\}$
4. 任给一个1的产量q_1，使得：$q_1(a-q_1-q_2^*(q_1)-q_3^*(q_1))-cq_1\geq 0$，2(或3)的策略$s_2$（或$s_3$）为：若1选择产量$q_1$，则产出$q_2^*(q_1)$ (若为3则$q_3^*(q_1)$)；否则产出$0.5(a-c)$。

- 现说明(q_1,s_2,s_3)一个Nash均衡。给定2和3的策略，1没有偏离q_1的动力，这是由于若1偏离，此时其收益小于等于0，而不偏离可以获得大于等于0。给定1选择q_1，2和3将采取其最佳反应，若偏离则与最佳反应矛盾。
- 显然可以找到不是SPE的NE，由于3证明了SPE唯一，此处有无穷多种NE与SPE有区别。

8.6 投资于未来

1. 我们可以找到1选择投资后的子博弈：

- 此时1已经投资，则两者的最佳反应分别为：

  $q_1 = \arg\max_{q_1} q_1 \max\{(100 - q_1 - q_2 - 5), 0\} - F \Rightarrow q_1 = \max\{0.5(95 - q_2), 0\}$

  $q_2 = \arg\max_{q_2} q_2 \max\{(100 - q_1 - q_2 - 10), 0\} \Rightarrow q_2 = \max\{0.5(90 - q_1), 0\}$
- 子博弈的NE为$(\frac{100}{3}, \frac{85}{3})$，此时两者的payoff为$(\frac{10000}{9} - F, \frac{7225}{3})$
- 此时回到1一开始的决策，1在此节点没有可获利的一次偏离。1若不投资则为经典的古诺竞争，两者的博弈为
- $q_2 = \arg\max_{q_2} q_2 \max\{(100 - q_1 - q_2 - 10), 0\} \Rightarrow q_2 = \max\{0.5(90 - q_1), 0\}$
- $q_1 = \arg\max_{q_1} q_1 \max\{(100 - q_1 - q_2 - 10), 0\} \Rightarrow q_1 = \max\{0.5(90 - q_2), 0\}$
- $q_1 = q_2 = 30$, 两者的payoff为$(900, 900)$
- 对于1在开始的选择，只要选择投资与不投资带来的收益不一致，就在此节点有唯一的选择。即为$\frac{10000}{9} - F \neq 900$， 本题中要求SPE中1要投资，则为 $\frac{10000}{9} - F > 900 \Rightarrow F < \frac{1900}{3}$, 则有$\forall F^* \in (0, \frac{1900}{3})$都是满足条件的值

2. 取$F = 700$, 构造如下的NE：1的策略为：不投资，选择产量30; 2在1不投资的时候选择30，投资选择95。则这个策略下两者得到的结果是NE。给定2的选择，1可以进行的偏离有：

   1. 不投资，选择其他的产量。但不投资时30已经是最佳产量
   2. 投资，选择其他产量。此时将会导致产生非正利润，也没有动力偏离。

   给定1的选择，2可以进行的偏离是：

   1. 在1不投资的时候选择其他的产量，但30已经是最佳产量
   2. 在1投资的时候选择其他产量，由于1已经选择了不投资，此时2选择什么都不会影响自己最终的收益，也没有动力偏离。

   所以是NE。但不是SPE，这是由于2在1投资的子博弈下，最佳产量不是95，有可获利的一次偏离。

8.9 进入遏制2

1. 正则博弈：

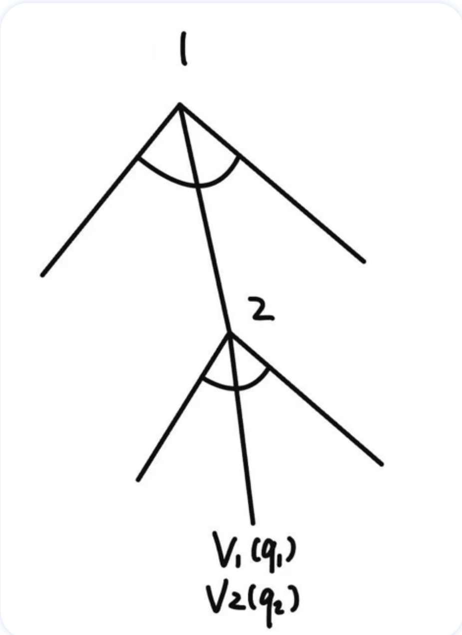
   1. 参与人：$N = \{1, 2\}$
   2. 行动空间：$S = [0, +\infty)$
   3. 支付函数：$V_i(q_i, q_{-i}) = q_i \max\{(100 - q_i - q_{-i}), 0\} - k\mathit{1}_{\{q_i > 0\}}, \forall i \in \{1, 2\}$

2. 最佳反应函数：

$$q_i^*(q_{-i}) = \begin{cases} \dfrac{100-q_{-i}}{2}, & \text{if } q_{-i} < 100-20\sqrt{10} \\ \{10\sqrt{10}, 0\}, & \text{if } q_{-i} = 100-20\sqrt{10} \\ 0, & \text{if } q_{-i} > 100-20\sqrt{10} \end{cases}$$

纯策略Nash：$(50,0),(0,50),(\dfrac{100}{3},\dfrac{100}{3})$, 不唯一

3. 博弈树如图所示：



k=25时，先讨论2在1做出选择后的决策。

$$\max\{V_2(q_2,q_1),0\} \Rightarrow q_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{100-q_1}{2} & q_1 < 90 \\ 0 & q_1 \geq 90 \end{cases}$$

1此时的决策为:

$q_1 = \arg\max_{q_1} V_1(q_1,q_2) = q_1 \max\{(100-q_1-q_2(q_1)),0\} - 25\mathit{1}_{\{q_1>0\}}$

在1的产量不小于90时，1的最大收益为$q_1 = 90$时取。产量小于90时1的产量为50最优，收益大于产量不小于90时的收益。则根据上述推导过程我们找到了唯一的SPE：

$$q_1 = 50, q_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{100-q_1}{2} & q_1 < 90 \\ 0 & q_1 \geq 90 \end{cases}$$

4. k=725时的博弈树同前。继续考虑2在1做出选择后的决策：

$$\max\{V_2(q_2),0\} \Rightarrow q_2(q_1)=\begin{cases}\dfrac{100-q_1}{2} & q_1<100-10\sqrt{29}\\ 0 & q_1\geq 100-10\sqrt{29}\end{cases}$$

1此时的决策为:

$q_1=\arg\max_{q_1}\{V_1(q_1),0\}=\max\{q_1\max\{(100-q_1-q_2(q_1)),0\}-725\mathbb{1}_{\{q_1>0\}},0\}$

在1的产量小于$100-10\sqrt{29}$时，1的最大收益在边界$100-10\sqrt{29}$取，此时收益与产量小于这个值的时候在边界的收益无差异，故不是最大值。在1的产量大于$100-10\sqrt{29}$时，1的最大收益在50时取到，最大收益为1775，此时二者的收益非负。则此时的SPE为:

$$q_1=50, q_2(q_1)=\begin{cases}\dfrac{100-q_1}{2} & q_1<100-10\sqrt{29}\\ 0 & q_1\geq 100-10\sqrt{29}\end{cases}$$

推导过程推出了所有可能的SPE，故SPE唯一。

8.12 议题设定

1. 正则表达:
   1. 参与人$N=\{1,2\}$
   2. 状态空间$S_1=[0,5], S_2=\{A,D\}$
   3. 支付函数:

   $v_1(s_1,s_2)=\begin{cases}10-|s_1-1| & s_2=A\\ 7 & s_2=D\end{cases}, \quad v_2(s_1,s_2)=\begin{cases}10-|s_1-3| & s_2=A\\ 9 & s_2=D\end{cases}$

   这是一个完美信息博弈，每个人在决策的时候都清楚已经发生了什么。
2. 给定立法者1选择s_1，立法者2的最佳反应函数是:

$$BR_2(s_1)=\begin{cases}A & s_1\in(2,4)\\ \{A,D\} & s_1\in\{2,4\}\\ D & else\end{cases}$$

达成SPE等价于2要形成最佳反应且1在最初节点没有偏离动力。此时考察1的选择,

$s_1=2, s_2=\begin{cases}A & s_1\in[2,4]\\ D & else\end{cases}$是SPE。此时2的策略符合其最佳反应。

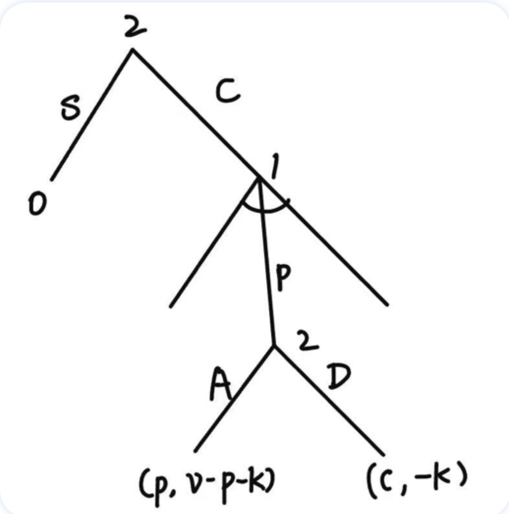
$s_1=2, s_2=\begin{cases}A & s_1\in[2,4)\\ D & else\end{cases}$也是SPE, 2的策略符合其最佳反应。

此外没有SPE，因为由于2在1选择2或4时的选择无差异，且在1选择小于2的策略时会拒绝，同时1的最优在1时达到，1会尽可能倾向于选靠近1的策略。若1选择2时被接受的可能性只有上述，若1选择2被拒绝，则1的策略只能无限的趋于2而达不到2，在本题中1没有最佳反应，即任何一个1的策略都会使得1有偏离的动力，从而不是SPE。

3. SPE即为上述给出的，SPE均为NE
    - 此外有无穷多种NE。对$\forall$ fixed $x \in [2,4)$, 2执行策略s_2：若1选择x，则2接受，否则拒绝。则$s_1 = x$， s_2如上所述都是一个nash均衡。1没有偏离动力：选择其他的都会被拒绝而得到7，选择x可以得到不差于7。2没有偏离动力：给定1选择了x，2选择接受，这是2的最优反应。1若不选择x，2若接受得到的不高于9，从而还会维持拒绝。

8.13 邮寄宣传品广告

1. 拓展式博弈为：



记卖者为1，买者为2，则2的最优反应为：

$$BR_2(s_1) = \begin{cases} A & s_1 < v \\ \{A, D\} & s_1 = v \\ D & else \end{cases}$$

2. SPE意味着：2在决策时达到了最优反应。在子博弈中，2已经到达，1将会选择2能接受的最大价格，也就是v。如果在1出价v时2的策略会拒绝，则1此时不管选什么都有改进的空间，从而不是NE。则1在出价v时2的策略只有接受才可能是NE。给定1出价v，2选择A或D都是同样的收益，故没有偏离的动力。给定2选择A，1已经达到了自己的最大出价，更高的价格会让1得到0，更低的价格得到的收益小于v，则1页不会偏离。
在这个子博弈中最终两者的payoff是：$(v, -k)$

则在最终的博弈中，2在最开始决定去与不去时不存在可获利的一次偏离，从而2应该选择自己的最大收益，即0。从而最终的均衡为：2选择不去，且在要价时执行：
$s_2 = \begin{cases} A & s_1 \leq v \\ D & else \end{cases}$; 1选择要价v。最终的两者收益为$(0, c)$

由上述推导过程可知唯一性。它不是帕累托最优，这可以根据第三小问得到。

3. 存在。2执行策略：去商店，在报价小于等于$t, \forall$ fixed $t \in [c, v-k]$时选择购买，否则不购买。

   1执行策略：出价t。这是一个Nash均衡：

   1. 给定1出价t，2去商店且购买会获得:$v-k-t \geq 0$, 2若去商店且选择拒绝，则会获得$-k$，情况没有改善。2若不去商店（无论接受或拒绝），都会获得0，也没有改善。
   2. 给定2执行上述策略，1能获得的最高收益是$t \geq c$,若1报价高于t则会获得c，没有改善。低于t则会收获更小的收益，也没有改善。

   从而这确实是一个Nash均衡，且两者的最终收益是$(v-k-t, t)$, 而只要$t \in (c, v-k)$, 二者的收益都得到了严格改善。

4. 若1选择不发传单，则最终的博弈结果是2得到的。若1选择发传单，则1可以继续选择标价$p \in (c, +\infty)$（若p不在这个范围，1选择不发得到的结果会更好，不会出现在SPE中，直接删去）。

   给定1承诺p，2的反应如下：若去，则获得$v-k-p$； 若不去，则获得0。从而在$p \leq v-k$的时候，2会去（在$p = v-k$时若2不去，1可以无限接近$v-k$，则此时不会有Nash均衡，因为1总有改善空间；则SPE中2一定会选择去）。

   此时在1选择发传单、选择价格的博弈中，1能选择的最好定价为$p = v-k$，选择其他的定价都会有可获利的一次偏离。此时由于发传单成本足够小，则1发传单可获利$v-k-\epsilon > c$，从而1会选择发传单

   最终达成的均衡为:

   1选择发传单，传单上定价$p = v-k$, 并在最后以p成交。

   2的策略为：若传单上价格$p \leq v-k$，2会选择前往商店并接受报价；否则2会选择不去商店（接受或不接受报价）。

   用信息集描述2的策略:

   - 第一个信息集（收到传单选择去或不去商店）：若$p \leq v-k$，2前往商店，否则不前往。
   - 第二个信息集（去了商店，选择接受或不接受报价）：若$p \leq v$,2选择接受，否则拒绝。

   最终的均衡结果为$(0, v-k-\epsilon)$

   从而卖家会发传单，这样可以给他带来严格变大的收益。