

记出价 i 为行为 B_i , 则有

		Bidder 2		
		B_0	B_1	B_2
Bidder 1	B_0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0, 4	0, 3
	B_1	2, 0	1, 2	0, 3
	B_2	1, 0	1, 0	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

首先剔除 Bidder 2 的 B_0 , 其被 B_2 严格占优

进一步剔除 Bidder 1 的 B_0 , 其被 B_2 严格占优

进一步剔除 Bidder 2 的 B_1 , 其被 B_2 严格占优

最后剔除 Bidder 1 的 B_1 , 其被 B_2 严格占优

Nash 均衡为 (B_2, B_2)

$$V_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0.5v & s_i = s_{-i} = 0 \\ \frac{s_i v}{s_i + s_{-i}} - s_i & \text{o.w.} \end{cases}$$

一阶条件 $-1 + \frac{s_{-i} v}{(s_i + s_{-i})^2} > 0 \Leftrightarrow s_i < \sqrt{s_{-i} v} - s_{-i}$ 时 $V_i(s_{-i})$ 随 s_i 增大而增大

$$\text{因此, } b_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0 & s_{-i} \geq v \\ \sqrt{s_{-i} v} - s_{-i} & s_{-i} < v \end{cases}$$

仅当 $s_i = s_{-i} = \frac{v}{4}$ 时, 均无可获利偏离

因此纳什均衡为 $(\frac{v}{4}, \frac{v}{4})$.

单独讨论都不投入的情况, 一方投入 $\frac{1}{4}v$ 为一次偏离, 不是 NE



三. 1. 没进入为 E , 不进入为 N

		公司 2	
		$S_3 = E$	N
公司 1	$S_3 = E$	$-12, -12, -12$	$13, 0, 13$
	N	$0, 13, 13$	$0, 0, 88$

		公司 2		
		$S_3 = N$	E	N
公司 1	E	13, 13, 0	0, 88, 0	
	N	88, 0, 0	0, 0, 0	

实际上有 4 种情况, 即进入市场的公司数为 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$i=0$ 时, 进入市场的额外收益为 $(\frac{150}{1} - 62) - 0 = 88$, 不是 NE

$i=1$ 时, 进入市场的额外收益为 $(\frac{150}{2} - 62) - 0 = 13$, 不是 NE

$i=2$ 时, 退出市场额外收益为 $-13 < 0$, 进入市场额外收益为 $(\frac{150}{3} - 62) - 0 = -12$

是 NE (无可获利偏移)

$i=3$ 时, 退出市场额外收益为 12 , 不是收益

因此 NE 为: $(E, E, N), (E, N, E), (N, E, E)$

2. 设概率 p , 没进入 E , 另外两家有 j 个公司进入市场

则 $P(j=2) = p^2, P(j=1) = 2p(1-p), P(j=0) = (1-p)^2$

$$V_i(E|j) = \frac{150}{j+1} - 62$$

$$V_i(N|j) = 0$$

$$\text{因此 } E(V_i(E)) = -12p^2 + 13 \cdot 2p(1-p) + 88(1-p)^2 = E(V_i(N)) = 0$$

$$\text{解得 } p = 0.8$$

因此对称混合策略为 $(0.80E + 0.20N, 0.80E + 0.20N, 0.80E + 0.20N)$



3. 双方执行选择的策略：第一阶段合作，~~若~~ 第二阶段若对方背叛则选A，否则选B。

对于第一阶段：

$$U_i = \cancel{q_i} (q_i (100 - q_i - q_{-i} - 10)) = q_i (90 - q_i - q_{-i}) \quad (\#)$$

$$\text{一阶条件为 } \frac{\partial U_i}{\partial q_i} = 90 - 2q_i - q_{-i} = 0 \Leftrightarrow q_i = 45 - \frac{q_{-i}}{2} \quad (1)$$

$$\text{合作时, } \frac{\partial (9(90 - q))}{\partial q} = 90 - 2q = 0 \Rightarrow q = 45 \Rightarrow q_i = q_{-i} = \frac{45}{2} \quad (2)$$

~~合作~~ 将②代入①，合作时一方的总收益为 $300\delta + \frac{45^2}{2} = 300\delta + 1012.5$

一方背叛时，它的总收益为 $100\delta + (\cancel{45} - \frac{135}{4} \times \frac{1}{2}) \times (\frac{135}{4})^2$
 $q_i = \frac{135}{4}$

$$\text{偏离收益 } -200\delta + \frac{45^2}{16} < 0 \Rightarrow \delta > \frac{81}{128}$$

