

# Problem set 2

2024/10/28

徐靖 2200012917

## 1

首先注意到  $R$  被  $C$  严格占优

- 纯策略均衡

$(U, L), (M, C)$

- 甲纯策略,乙混合策略的均衡

注意到  $E_L = E_C$  恒成立,因此  $\{(U, p \circ L + (1 - p) \circ C) : p \in [\frac{4}{7}, 1)\}$  和  $\{(M, p \circ L + (1 - p) \circ C) : p \in (0, \frac{4}{7}]\}$  是Nash均衡

- 乙纯策略,甲混合策略的均衡不存在
- 混合策略均衡

对乙来说  $L$  和  $C$  无差别, 由于  $D$  被  $\frac{1}{2} \circ U + \frac{1}{2} \circ M$  严格占优, 因此  $\sigma_1(D) = 0$ , 且

$$3\sigma_2(L) = 4(1 - \sigma_2(L)) \Rightarrow \sigma_2(L) = \frac{4}{7}$$

从而  $\{(\frac{4}{7} \circ L + \frac{3}{7} \circ C, p \circ U + (1 - p) \circ M) : p \in (0, 1)\}$  是Nash均衡.

## 2

### (1)

甲的最大最小策略是  $M$ , 最大最小值是 5

### (2)

设  $a = \sigma_2(L)$ , 则有

$$\max v_1 = \max\{6 - 4a, 5, 4 + 3a\} \geq 5$$

当  $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$  时,  $\max v_1 = 5$

乙的最小最大策略是  $\{(a \circ L, (1 - a) \circ R) | a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]\}$ , 甲的最小最大值是 5

### 3

#### (1)

对于企业  $i$ , 考虑一阶条件

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{A - \sum x_i}$$

联立  $i$  遍历  $[n]$  后的方程组, 得到

$$x_i = \frac{A}{n+1}$$

这是这个博弈的唯一纯策略纳什均衡, 此时  $u_i = 2 \ln A - 2 \ln(n+1)$

#### (2)

企业协调行动时,  $\sum x_i$  作为整体被  $i \in [n]$  平分. 因此,

$$0 = \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{n}{A - nx}$$

解得  $x_i = x = \frac{A}{2n}$ ,  $u_i = 2 \ln(A/2) - \ln n, \forall i$

#### (3)

实际上,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(A/2) - \ln n = -\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(A) - 2 \ln n$

同时,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_i = 0$

(1)和(2)两个结果是相同的

### 4

#### (1)

每个国家都做优化问题:

$$\max(90 - q - 10)q$$

解得  $q^* = 40$

(2)

设  $a, b$  在  $A$  产量分别为  $q_{11}, q_{21}$ , 在  $B$  产量分别为  $q_{12}, q_{22}$ . 两家公司面临最优化问题:

$$\max_{q_{i1}, q_{i2}} (90 - q_{1i} - q_{2i} - 10)q_{ii} + (90 - q_{1j} - q_{2j} - 20)q_{ij}, j = 3 - i$$

考虑一阶条件后解得

$$q_{11} = q_{22} = 30, q_{12} = q_{21} = 20$$

(3)

最优化问题变为

$$\max_{q_{i1}, q_{i2}} (90 - q_{1i} - q_{2i} - 10)q_{ii} + (90 - q_{1j} - q_{2j} - 50)q_{ij}, j = 3 - i$$

直接解一阶条件发现  $q_{ij} < 0$  这表明出口一定亏损, 因为出口为正比虚拟的出口为负情形更劣 因此结果同 (1),  $q_{11} = q_{22} = 40, q_{12} = q_{21} = 0$

5

(1)

		Player 2		
		0	9	20
Player 1	0	10, 10	0, 11	0, 0
	9	11, 0	1, 1	-9, 0
	20	0, 0	0, -9	-10, -10

依次剔除严格劣策略, 最后只有 \$B\$ 存活

(2)

		Player 2			
		A(0)	B(9)	C(15)	D(20)
Player 1	A(0)	10, 10	0, 11	0, 5	0, 0
	B(9)	11, 0	1, 1	-9, 5	-9, 0
	C(15)	5, 0	5, -9	-5, -5	-15, 0
	D(20)	0, 0	0, -9	0, -15	-10, -10

由于是对称博弈, 因此Nash均衡下两位行贿者策略相同

- 没有纯策略Nash均衡
- 设四种纯策略的概率为  $a, b, c, d$ .  $a + b + c + d = 1$ 
  - 若  $d > 0$ , 则 A 严格比 D 更优, 因此  $d = 0$
- 对  $a, b, c$ ,  $a + b + c = 1$ , 解方程组  $v(A) = v(B) = v(C)$  发现  $(0.4 \circ A + 0.5 \circ B + 0.1 \circ C, 0.4 \circ A + 0.5 \circ B + 0.1 \circ C)$  是唯一Nash均衡

6

(1)

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

对玩家 1,2, 无论偏移到何值玩家 3 都必胜, 也就是1和2必败,  $1/3$  与其他立场无差异

对玩家 3, 立场为  $2/3$  时已经获胜, 不可能更优

因此该策略组合是Nash均衡

(2)

没有人会选择输掉选举的政治立场, 因为此时不参选是可获利的偏离, 因此所有参选者得票数并列.

考虑nash均衡的情形:

- 假如有2人未参选, 未参选的一个候选人和参选者选择同一个政治立场是可获利的偏移, 因此不存在nash均衡
- 假如只有1人未参选, 设参选者的政治立场是  $x, y$ ,
  - 由得票相同可知  $x + y = 1$  或  $x = y$

- 假如  $x \neq y$ , 则  $y \neq 0.5$ , 选  $x$  的侯选者改为  $\frac{y+0.5}{2}$  可以彻底赢得选举, 矛盾. 因此  $x = y = 0.5$
- 此时未参选者选择 0.5 是可获利的偏离, 因此这一情形下不存在nash均衡
- 假如三个人都参选了, 不妨设三个人的政治立场是  $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ 
  - 考虑  $x = y = z = k$ , 任意一位候选人只需选  $\frac{k+0.5}{2}$  即可彻底获胜
  - 考虑  $x < y < z$ , 由票数相等解得,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ , 第一位候选人选  $\frac{1}{3}$  即可彻底赢得选举
  - 考虑  $x = y < z$ , ( $x < y = z$  同理), 发现  $\frac{x+z}{2} = \frac{2}{3}$ , 最后一位候选人选  $\frac{2}{3}$  即可彻底赢得选举

综上, Nash均衡不存在