- 在前人基础上优化的笔记
    - 感觉证明不会考, 罗列结论时没有写证明
    - 整理了固定题型和应对方法
        - 🔥 表示难度, 3个 🔥 最难
- 博弈论问题的求解往往蕴含在概念之中, tricks 是摆在明面上的.
- 认为比较核心的思想 :
    - br 的交点是 ne
    - 代入为博弈玩家, 查询无可获利偏离
    - 不可置信的威胁
    - 有限博弈下的一些结论往往在连续/无限博弈失效, 存在反例

欢迎补充

Handout 2

1. **正则博弈 (normal form game)**
    - **definition** : 一个三元组(triple) : $(N=[n],\{S_i\}_n,\{v_i\}_n)$
    - **策略组合 (strategy profile)** : $s\in S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$
        - 有限博弈 ⇔ 策略组合是有限的 ⇔ 每个人的策略有限
    - **正则表示也能表示连续情况** : 例如 Cournot 模型

> - **拍卖**
>   - 一价拍卖
>   - **二价拍卖 (Second-price auction)** : 获胜者支付第二高的出价

2. **严格占优 (strictly dominated)**
    - 策略 1 严格占优于策略 2 ⇔ 对于任意对手的策略, 选 1 的收益都**严格大于** 2
        - 理性人不会选择被严格占优的策略
    - **严格占优策略 (Strictly dominant strategy)** : 其他策略都被它占优
    - **严格占优策略均衡 (Strictly dominant strategy equilibrium)**
        - 严格占优策略均衡存在则唯一

> 均衡只指均衡情况下的策略组合, 而非均衡情况下的回报

3. **帕累托占优 (Pareto dominates)** : 策略组合 s 回报不低于 s', 且存在至少一个玩家回报严格更高
    - **帕累托有效 (Pareto optimal/Pareto efficient)** : 策略组合不被其他策略帕累托更优

> 囚徒困境中的严格占优均衡存在帕累托改进, 是否与**福利经济学第一定理**矛盾?
>
> - 有前提:

> - 完全竞争市场
>   - 不存在外部性 (externality): 消费者只关心自己的消费, 生产者只关心自己的生产, 而不会受到他人或者外部环境的影响
> - 市场竞争能够通过价格机制有效调节经济活动, 达到帕累托最优的资源配置

4. **IESDS (iterated elimination of strictly dominated strategies)**
   - 没有严格占优策略时也会有唯一的结果.
     - 参与者的理性是 common knowledge 时, IESDS 成立
   - **Iterated-elimination equilibrium** : 删完后策略集的策略组合
   - 有限博弈中删除次序和最终结果无关系
   - strictly dominant strategy equilibrium 唯一地在 IESDS 中存活

> - 用 IESDS 来算连续的 Cournot Duopoly : 类似闭区间套定理会收敛到纳什均衡
> - IESDS 无法解决 n 个 Cournot 的问题 : 删了一轮就删不下去了.

5. **最优反应 (Best response)** : 最核心的概念, 下简称BR
   - 最优反应 $\Leftrightarrow$ 不被严格占优
   - 严格占优策略是任何策略来说的唯一最优反应
   - **最优反应对应 (Best response correspondence)** : 最优反应的集合
6. **纳什均衡 (Nash Equilibrium)** : 下简称NE
   - 策略组合里面的每个策略都是对手策略的最优反应
   - **可获利的偏离 (Profitable deviation)**: 给定策略组合, i 的另一个策略使其回报更大
     - NE $\Leftrightarrow$ 无可获利的偏离 $\Leftrightarrow$ **互为最优反应 (mutual BR)**
   - **一致性** : 玩家对对手的看法是正确的 (即均衡状态下知道对方的策略)
   - 严格占优策略均衡一定是唯一的 NE
   - NE 会在 IESDS 中存活
7. **混合策略** : ΔS_i (S_i 上面的所有概率分布) 的元素
   - **支撑集** : $\text{supp } \sigma_i = \{s_i | \sigma_i(s_i) > 0\}$
   - 混合策略 σ_i 是 σ_{-i} 的BR $\Leftrightarrow$ 不存在可获利的纯策略偏离 $\Leftrightarrow$ 支撑集中**每一个**纯策略都是 σ_{-i} 的 BR
     - 支撑集无差异
     - 从而可以定义混合策略的 NE : mutual BR
   - 有限正则博弈一定有 NE
   - **混合策略占优** ： 混合策略对纯策略占优
     - 相应有 IESDS
     - original game 的 NE $\Leftrightarrow$ IESDS 后的 reduced game 的 NE

Handout 3

1. **扩展形式博弈 (extensive form game)** : 序贯博弈 (sequential game)
    - 博弈 🌲 ,节点(nodes), 玩家分配(player assignment), 可用行动(available action).
    - **信息集** : 节点集的一种划分
        - 玩家不清楚处于信息集中的哪个节点
        - 可用行动相同
    - **完美记忆 (perfect recall)** : 玩家记住他们以前所选择的行动.
    - **完美信息博弈 (game of perfect information)** : 每个信息集都是**单点(singleton)**
        - 完美信息博弈参与者拥有完美回忆
2. **扩展形式博弈的策略**: 不论选择路径如何, 为每个信息集匹配行动.
    - 纯策略 : 从信息集到行动集的映射
        - 每个策略组合都会到达唯一的终点, 称为结果
    - 混合策略 : 纯策略的分布
    - **行为策略**: 为每个信息集提供一个行动集元素的分布

> 混合策略维度不低于行为策略 : 前者蕴含了路径经过同一信息集上不同节点的概率分布. 自然完美信息博弈时这个概率分布的维度为0.

- 在Perfect Recall条件下, 对于每一个mixed strategy, 存在一个behavioral strategy和前者等价, 反之亦然.

3. **扩展形式博弈的NE** : 即写成正则表达的NE.
    - 如果 σ 可以正概率到达一个信息集, 则该信息集在均衡路径上.

> **不可置信的威胁**会出现在均衡路径外

4. **逆向归纳法 (backward inducion)** : 下简称BI, 其解为BI solution.
    - NE只要求在均衡路径上每个人都最优化, 而BI则要求任何路径上都要做最优选择
    - **序贯理性 (sequentially rational)**: 在任何一个信息集上, 当前策略都是对手策略的BR.
    - BI不考虑未来能否改(也即给定后续结果), 且不关注当前会不会到达.
    - 一些定理
        - 存在性条件 : 任意有限完美信息博弈存在BI solution.
        - 唯一性条件 : 若没有人认为两个终点**无差异**, 则有限完美信息博弈BI solution唯一.
        - 纯策略情况下, BI solution一定是NE.
5. **拓展形式博弈的子博弈 (subgame)**
    - 根所属信息集是单点集, 根继承者的所属信息集中的点也是根继承者, 则该根诱导子博弈.
    - **子博弈完美均衡 (SPE)** : 行为策略组在所有的子博弈中都是NE.
        - SPE要求所有路径上的策略组合都是mutual BR, 无论是否在均衡路径上.

- 有限完美信息博弈中, **SPE ⇔ 没有可获利的一次偏离 ⇔ BI solution**

> "SPE ⇔ 没有可获利的一次偏离" ⇒ "SPE ⇔ BI solution" ⇒ "纯策略BI solution = NE"

Topic 1: 重复博弈

1. **重复博弈 (repeated game)**
   - **阶段博弈 (stage game)** : 指重复的 n 个period中的一个
     - 阶段博弈的全部策略组合 $A^n = A_1 \times ... \times A_n$.
     - 第 t 期的所有可能历史 $H_t = A^t$ (set of all possible histories up to period t), 是t维向量的集合, 每个元素都是所有人的策略组合的某个实现(动作组合).
     - 阶段博弈纳什均衡 (stage NE): 依于当前轮收益的 NE
   - **总回报 (total payoff)**: 总和阶段博弈收益贴现之和. 其中 $\delta \in (0, 1]$ 是贴现率

$$v_i \equiv \sum_{t=1}^{n} \delta^{t-1} v_i^t$$

2. **重复博弈的策略**

$$s_i : \bigcup_{t=0}^{T-1} H_t \to A_i, \quad s_i = (s_i^1, s_i^2, \cdots, s_i^T), \quad s_i^t : H_{t-1} \to A_i.$$

3. **有限期重复博弈**
   - 对于在每个历史下玩出动作组合 $a^* = (a_1^*, \cdots, a_n^*)$ 的策略 s, 如果 a^* 是stage NE则 s 是 SPE, 如果 a^* 唯一则 SPE 唯一
   - 最后一期一定玩的是 stage NE.
4. **无限期重复博弈**
   - 无穷博弈下, 一直玩同一个stage NE, 得到的是SPE.
   - 若 stage NE 有帕累托严格改进 a, 那么一定存在足够大的贴现值, 使得存在一个SPE, 均衡结果上在路径上一直在玩a.

往年题型整理

> 不同形式语言的复杂度不同, 而人的演算能力是定值. 因此形式语言或者模型越复杂, 问题本身越简单.
> 不同问题的规模不同, 而人的演算能力是定值. 因此问题规模越大, 越容易存在巧妙的trick.

1. 双变量矩阵题型

即策略有限, 从多个选择中混合or纯策略, 往往能看到双变量矩阵

> (1) 🔥 Does player 1 have a strictly dominated strategy? If yes, show which strategy strictly dominates which strategy. If no, explain why.

- 首先需要注意 dominance 是否考虑混合策略
- 直接看矩阵数值, 如果某策略在对手的某个纯策略下是最优反应, 则必不可能被占优, 利用这个做排除法
  - 如果存在某个策略被占优, 直接写谁被谁占
  - 如果不存在, 理由如下: Player 1 has no strictly dominated strategy. This is because each (pure) strategy is a best response to some of player 1's strategy.

> (2) 🔥 What strategies survive the process of iterated elimination of strictly dominated strategies? In each step of your deletion, show which strategy is strictly dominated by which strategy.

- 按部就班IESDS即可, 注意能不能混合以及不要把严格占优和帕累托更优混淆, 没有陷阱

> (3) 🔥 🔥 🔥 Find all Nash equilibria (pure and mixed) of this game.

- 首先参考1(2)得到 reduced form
- 一般两种思路, 前者可能稍繁琐, 后者需要注意力, 实战大多是后者
  - 一种是**从下至上**, 枚举并给出支撑集上nash均衡的全部必要条件
    - 纯策略有限, 直接找
    - 混合策略用好NE的充要条件 : 混合的一方支撑集无差异且均最优
  - 另一种是**从上到下**, 对一些条件给出相应的约束来缩小答案范围
    - 常见的条件包括:
      - $\sigma_1(X) > 0$ 用于排除被帕累托更优的 X
      - $\sigma_1(X) = 1$ 用于讨论一方纯策略另一方混合策略的情形
- 不必囿于公式做题或者NE充要条件, 把自己代入玩家去考虑可获利偏离可以提高注意力
- 补充1: 双人博弈不存在一个使得nash均衡分布在对角线上的一般条件, 因此不能假设纳什均衡下两人或者多人的策略分布相同
  - 一些规模较大的问题, 可能出现参与者地位对称的情形以降低计算量. 补充1告诉我们, 对称性只能同理对参与者的讨论, 而不为讨论提供额外的性质
- 补充2: 有限博弈下nash均衡当然往往是有界闭的, 但这不代表可以用混合策略讨论纯策略, 因为单点和线段也有界闭
  - 任何情况下都将纯策略和混合策略分类讨论

> (4) 🔥 🔥 Find all Pareto efficient strategy profiles.

- 容易被忽略的一种题型, 并且需要注意力
- 当你枚举了被帕累托占优的所有其他均衡后, 就可以写显然了

2. 出价类题型

即策略集是区间, 包括拍卖, 古诺模型等

> (1) 🔥 Show that XXX is a Nash equilibrium.

- 能问出这个问题br大概率比较难写, 别求交点了.
- 写出效用函数, 验证每个玩家无可获利偏离即可

> (2) 🔥 🔥 Find a Nash equilibrium

- 揣摩NE的条件给出构造, 再类似上题, 需要注意力
- 一般往对称策略或者单方面碾压获胜的策略想

3. 博弈树题型

也就是序贯博弈

> (1) 🔥 Find a mixed strategy Nash equilibrium.

- 参考 2(2), 一般只用考虑对称的策略, 设出所有其他人的分布为 p, 再解最后一个人的混合充要条件(支撑集无差异且均最优), 解出 p 后大家都用这个 p, 就省去了验证

> (2) 🔥 Draw the game tree for this game, including the payoffs.

- 直接画即可, 注意审题, 信息集容易漏

> (3) 🔥 🔥 🔥 Find all pure strategy Nash equilibria in which the road is built.

- 非常复杂的题, 先列策略集, 即每个人对每个信息集给出策略.

> (4) 🔥 Find a backward induction solution.

- 直接逆向归纳即可, 给出的solution应当形如 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$, 其中 n

> (5) Find a Nash equilibrium that is not a backward induction solution.