CURS #5

CONȚINUTUL CURSULUI #5:

II.4.1. Metode iterative de aproximare.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Considerăm sistemul compatibil determinat

$$Ax = a \tag{1}$$

și un sistem echivalent

$$x = Bx + b \tag{2}$$

Definiția (II.12.)

O metodă iterativă de aproximare a soluției sistemului de ecuații liniare (1) presupune construcția unui șir recurent $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ conform formulei:

$$x^{(k+1)} = Bx^k + b, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{arbitrar} \tag{3}$$

Metoda iterativă (3) este convergentă dacă și numai dacă $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, unde x este soluția sistemului (1).

Definiția (II.13.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se definește raza spectrală $\rho(A)$ a matricei A astfel:

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| \tag{4}$$

unde $\lambda_i \in \sigma(A), i = \overline{1,n}$. Dacă $\lambda = a + bi \in C$ atunci $|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Definiția (II.14.)

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește convergentă dacă șirul de matrice format din puterile A^k ale matricei A este convergent la matricea nulă (sau componentele puterii matricei A tind la zero). Vom scrie:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O_n \tag{5}$$

sau

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0, \quad i,j = \overline{1,n} \tag{6}$$

Propoziția (II.5.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) *A este o matrice convergentă;*
b) $\lim_{k\to\infty} \| A^k \| = 0$;
c) $\lim_{k\to\infty} A^k x = 0_n, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
d) $\rho(A) < 1$.

Propoziția (II.6.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci

$$\rho(A) \le \| A \| \tag{7}$$

pentru orice normă matriceală $\| \cdot \|$ subordonată unei norme vectoriale.

Demonstrație: Fie $\lambda \in \sigma(A)$ și fie x vectorul propriu asociat valorii proprii λ cu proprietatea $\| x \| = 1$. Atunci $Ax = \lambda x$ de unde rezultă

$$\| Ax \| = |\lambda| \, \| x \| = |\lambda|$$

Pe de altă parte
$$\| Ax \| \leq \| A \| \| x \| = \| A \|$$
Din aceste relații rezultă $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \leq \| A \|$.

Propoziția (II.7.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $\| A \| < 1$, atunci
$$\exists\ (I_n - A)^{-1} \quad \text{și} \quad \| (I_n - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| A \|} \tag{8}$$

Demonstrație: Dacă $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei A atunci $1 - \lambda_i, i = \overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei $I_n - A$. Deoarece $\rho(A) < 1$ rezultă $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1,n}$, iar $1 - \lambda_i \neq 0, i = \overline{1,n}$, deci $I_n - A$ este inversabilă. În continuare să observăm următoarea egalitate:
$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^k) = I_n - A^{k+1} \tag{9}$$

sau
$$I_n + A + A^2 + ... + A^k = (I_n - A)^{-1}(I_n - A^{k+1}) \tag{10}$$
Trecând la limită în relația de mai sus și ținând cont că $\lim_{k\to\infty} A^{k+1} = O_n$ se obține următoarea estimare:
$$\| (I_n - A)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k = \frac{1}{1 - \| A \|} \tag{11}$$

Teorema (II.10.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $a \in \mathbb{R}^n$ și o metodă iterativă (3) de aproximare a soluției sistemului de ecuații liniare $Ax = a$ definită de sistemul echivalent $x = Bx + b$. Atunci metoda iterativă este convergentă dacă și numai dacă
$$\rho(B) < 1 \tag{12}$$

Demonstrație: Fie $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= Bx^{(k-1)} + b - x = Bx^{(k-1)} - Bx \\ &= B(x^{(k-1)} - x) = ... = B^k(x^{(0)} - x) \Rightarrow \end{aligned} \tag{13}$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \to x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k(x^{(0)} - x) = 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0_n \Leftrightarrow \rho(B) < 1 \quad \text{(conform Prop. II.5.)}$$

Teorema (II.11.)

Dacă $\| B \| = q$, $q \in (0,1)$, atunci metoda iterativă (3) este convergentă și are loc următoarea estimare a erorii:
$$\| x^{(k)} - x \| \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{14}$$

Demonstrație: Deoarece $\| B \| < 1$, atunci conform Prop. II.7. rezultă că $\exists\ (I - B)^{-1}$ și $\| (I - B)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| B \|} = \frac{1}{1-q}$

Evaluăm diferența $x^{(k+1)} - x^{(k)}$:
$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^{(k)} &= Bx^{(k)} + b - x^{(k)} = Bx^{(k)} - Bx^{(k-1)} \\ &= B(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \| B \| \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| = q \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$
Evaluăm $(I - B)(x^{(k)} - x)$:
$$\begin{aligned} (I - B)(x^{(k)} - x) &= x^{(k)} - Bx^{(k)} - x + Bx \\ &= x^{(k)} - Bx^{(k)} - b = x^{(k)} - x^{(k+1)} \Rightarrow \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= (I - B)^{-1}(x^{(k)} - x^{(k+1)}) \\ &= (I - B)^{-1}B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) \Rightarrow \end{aligned}$$
$$\| x^{(k)} - x \| \leq \| (I - B)^{-1}B \| \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$
$$\leq \frac{q}{1-q} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq ... \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

Deoarece $q \in (0,1) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{q^k}{1-q} = 0 \Rightarrow (x^{(k)})_{k\geq 0}$ converge la x, deci metoda iterativă este convergentă.

II.4.2. Metoda Jacobi

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, $a \in \mathbb{R}^n$, atunci sistemul $Ax = a$ este echivalent cu $x - Ax = x - a$ sau $x = (I - A)x + a$. Considerând $B = I - A$, $b = a$, obținem sistemul $x = Bx + b$ în baza căruia se construiește metoda iterativă Jacobi.
Conform Th. II.10. metoda Jacobi este convergentă dacă și numai dacă $\rho(B) < 1$. Mai mult, dacă $\| B \| = q \in (0, 1)$, atunci conform Th. II.11. rezultă că metoda Jacobi este convergentă și are loc estimarea:

$$\| x^{(k)} - x \| \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{15}$$

ALGORITM (Metoda Jacobi)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$- inv.; $a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieșire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n$; N.

STEP 1: Se determină $q = \| I - A \|$;
    if $q \geq 1$ then
      OUTPUT('Metoda Jacobi nu asigură conv.')
      STOP
    endif
STEP 2: Se iniţializează $x^{(0)} = 0$; $k = 0$;
STEP 3: Determină: $B = I - A$; $b = a$;
STEP 4: do
      $k = k + 1$;
      $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$;
    while $\frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \geq \varepsilon$;
STEP 5: $x_{aprox} = x^{(k)}$, $N = k$.

II.4.3. Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii

Metoda Jacobi poate fi aplicată doar pentru o clasă restrânsă de matrice. În cele ce urmează vom prezenta metoda Jacobi pentru o clasă de matrice, pentru care această metodă este convergentă.

Definiția (II.15.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) *Spunem că A este diagonal dominantă pe linii dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=\overline{1,n}, j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}$$

b) *Spunem că A este diagonal dominantă pe coloane dacă*

$$|a_{jj}| > \sum_{i=\overline{1,n}, i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = \overline{1,n}$$

Fie $D = diag(A) = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$. Se observă că $|a_{ii}| > 0, i = \overline{1,n}$, deci D este inversabilă. Atunci sistemul $Ax = a$ este echivalent cu $D^{-1}Ax = D^{-1}a$ sau $x = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}a$. Considerând $B = I - D^{-1}A, b = D^{-1}a$ se obține sistemul $x = Bx + b$.

Teorema (II.12.)

Fie sistemul $Ax = a$ cu A matrice nesingulară și diagonal dominantă pe linii, și sistemul echivalent $x = Bx + b$, unde $B = I - D^{-1}A, b = D^{-1}a$. Fie $q = \| B \|_\infty$ și $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ definit prin formula

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b \tag{16}$$

Atunci $q < 1$ și $\| x^{(k)} - x \|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație: Componentele matricei $B = I - D^{-1}A$ se pot reprezenta după cum urmează:

$$b_{ij} = \delta_{ij} - d_{ik}^{-1} a_{kj} = \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$$

Pe de altă parte, evaluând norma infinit a matricei B, se obține:

$$q = \| B \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,n}} |b_{ij}| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,n}, j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \Rightarrow$$

$$q = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{\sum_{j=\overline{1,n}, j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Conform Th. II.11. rezultă că metoda iterativă este convergentă și are loc estimarea din enunț.

ALGORITM (Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$- `inv.`; $a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieșire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n$; N.

STEP 1: for i=1:n do

if $|a_{ii}| \leq \sum_{j=\overline{1,n}, j\neq i} |a_{ij}|$ then

OUTPUT('Matr. nu este diag. dom. pe linii')

STOP.

endif

endfor

STEP 2: Se inițializează: $x^{(0)} = 0$; $k = 0$;

STEP 3: Determină: $b_{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i,j = \overline{1,n}$; $b_i = \frac{a_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$;

$q = \| B \|_\infty$;

STEP 4: do

$k = k + 1$;

$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$; (B, b au fost calculați la STEP 3)

while $\frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty \geq \varepsilon$

STEP 5: $x_{aprox} = x^{(k)}$; $N = k$;

II.4.4. Metoda Jacobi relaxată

Metoda Jacobi relaxată este o variantă îmbunătățită a metodei Jacobi și constă în introducerea unui parametru $\sigma > 0$, numit parametru de relaxare. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită, $a \in \mathbb{R}^n$. Sistemul $Ax = b$ este echivalent cu $\sigma Ax = \sigma a$ sau $(I - \sigma A)x = x - \sigma a$, deci

$$x = B_\sigma x + b_\sigma, \quad \sigma > 0 \tag{17}$$

cu $B_\sigma = I - \sigma A, b_\sigma = \sigma a$. Pentru $\sigma = 1$ avem metoda Jacobi.

Teorema (II.13.)

Fie $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1 > 0$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrice și pozitiv definite. Atunci metoda Jacobi relaxată este convergentă dacă și numai dacă

$$\sigma \in \left(0, \frac{2}{\rho(A)}\right) \tag{18}$$

Mai mult, dacă $q = \rho(B_\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |1 - \sigma\lambda_i|$, atunci $q < 1$ și avem următoarea estimare a erorii

$$\| x^{(k)} - x \|_A \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_A \tag{19}$$

unde $\| x \|_A = < Ax, x > = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i$.

Demonstrație: Deoarece A este simetrică și pozitiv definită rezultă că A este inversabilă, deci sistemul $Ax = a$ admite soluția unică x.

Metoda iterativă construită în baza formulei (17) este convergentă dacă și numai dacă $\rho(B_\sigma) < 1$. În cele ce urmează vom deduce condiția pe care trebuie să o satisfacă σ astfel încât $\rho(B_\sigma) < 1$.

Valorile proprii ale matricei $I - \sigma A$ sunt $1 - \sigma\lambda_1, ..., 1 - \sigma\lambda_n$. Într-adevar, fie λ este o valoare proprie a matricei A. Atunci

$$det((I_n - \sigma A) - (1 - \sigma\lambda)I_n) = 0 \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$$

Avem următoarele echivalențe

$$\rho(I_n - \sigma A) < 1 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} |1 - \sigma\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \sigma\lambda_i < 1, i = \overline{1,n}$$

Deoarece $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1 > 0 \Rightarrow$

$$1 > 1 - \sigma\lambda_1 \geq ... \geq 1 - \sigma\lambda_n > -1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 > 1 - \sigma\lambda_1 \\ 1 - \sigma\lambda_n > -1 \end{cases} \Rightarrow \sigma \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$$

Astfel se demonstrează prima parte a teoremei.

Se observă că $q = \rho(B_\sigma) = \rho(I_n - \sigma A) < 1$. Pentru a demonstra formula (19) este necesar să demonstrăm, conform Th. II.11. că $\| B_\sigma \|_A = q$.

Deoarece matricea A este simetrică și pozitiv definită, atunci $\exists \mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ o bază ortonormată formată din vectori proprii asociați valorilor proprii $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$.

În baza vectorilor proprii ortonormați, putem construi o bază $A-$ortonormată dacă alegem $v_i = \dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = \overline{1,n}$. Într-adevăr,

$$< Av_i, v_j > = \left\langle A\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\rangle = \left\langle \lambda_i\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\rangle$$
$$= \frac{\lambda_i\delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Atunci $\exists \alpha_i, i = \overline{1,n}$ astfel încât $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Evaluăm în continuare $\| v \|_A, \| B_\sigma v \|_A$:

$$\| v \|_A^2 =< Av, v >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Av_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j >$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j < Av_i, v_j >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

În mod analog se poate demonstra că

$$\| B_\sigma v \|_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2(1 - \sigma\lambda_i)^2 \leq q^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = q^2 \| v \|_A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\| B_\sigma v \|_A}{\| v \|_A} \leq q \Rightarrow \sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| B_\sigma v \|_A}{\| v \|_A} \leq q \Rightarrow$$

$$\| B_\sigma \|_A \leq q \tag{20}$$

Fie k astfel încât $|1 - \sigma\lambda_k| = q$.

Atunci

$$\| B_\sigma v_k \|_A^2 =< AB_\sigma v_k, B_\sigma v_k >=< AB_\sigma \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}, B_\sigma \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}} >$$
$$= \frac{1}{\lambda_k} < A(1 - \sigma\lambda_k)u_k, (1 - \sigma\lambda_k)u_k >= (1 - \sigma\lambda_k)^2 \Rightarrow$$
$$\frac{\| B_\sigma v_k \|_A}{\| v_k \|_A} = q \geq q \Rightarrow \| B_\sigma \|_A \geq q \tag{21}$$

Din inegalitățile (20) și (21) rezultă $\| B_\sigma \|_A = q$.

Definiția (II.16.)

Numim parametru optim de relaxare pentru metoda Jacobi relaxată (îl notăm σ_O) acea valoare a lui σ pentru care $q = \| B_\sigma \|_A$ (îl notăm q_O) are valoare minimă.

Propoziția (II.8.)

Parametrul optim de relaxare σ_O, respectiv q_O se calculează conform relațiilor:

$$\sigma_O = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}, \quad q_O = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

Obs.: Deoarece $\rho(A) \leq \| A \|$ rezultă $\frac{2}{\| A \|} \leq \frac{2}{\rho(A)}$. În practică vom considera $\sigma \in \left(0, \frac{2}{\| A \|}\right)$.

ALGORITM (Metoda Jacobi relaxată)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - sim. şi poz. def.;
$a \in \mathbb{R}^n$; $\varepsilon; \sigma$.
Date de ieşire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n; N$.

STEP 1: Determină: $b_{ij} = \delta_{ij} - \sigma a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$; $b_i = \sigma a_i, i = \overline{1, n}$;

STEP 2: Se iniţializează: $x^{(0)} = 0; k = 0$;

STEP 3: do

$k = k + 1$

$x^{(k)} = B_\sigma x^{(k-1)} + b_\sigma$;

(B_σ, b_σ au fost calculaţi la STEP 1)

while $\frac{\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|_A}{\| x^{(k-1)} \|_A} \geq \varepsilon$

STEP 4: $x_{aprox} = x^{(k)}$; $N = k$.

Fie procedura **MetJacobiR** cu sintaxa
$[x_{aprox}, N] =$**MetJacobiR**$(A, a, \varepsilon, \sigma)$.
Parametrii de ieșire sunt: x_{aprox} (soluția aproximativă a sistemului $Ax = a$, calculată prin metoda Jacobi relaxată cu eroarea ε) și N (numărul de iterații necesar pentru obținerea aproximării cu eroarea ε).
În continuare vom prezenta o schemă numerică de calcul al parametrului optim σ_O fără a fi necesar să se calculeze valorile proprii ale matricei A. Parametrul optim va fi ales astfel încât numărul de iterații să fie minim pentru obținerea soluției aproximative cu eroarea relativă ε. Pentru simplificare vom alege norma infinit și vom discretiza intervalul $\sigma_O \in \left(0, \frac{2}{\| A \|_\infty}\right)$. Fie $(\sigma_s)_{s=\overline{0,p}}$ o discretizare echidistantă a intervalului $\left[0, \frac{2}{\| A \|_\infty}\right]$. Pasul discretizării este $h = \frac{2}{\| A \|_\infty p}$, iar nodurile discretizării sunt $\sigma_s = \frac{2s}{\| A \|_\infty p}, s = \overline{0, p}$. În algoritm nu vom include capetele intervalului $\left(0, \frac{2}{\| A \|_\infty}\right)$, deci $s = \overline{1, p-1}$.

ALGORITM (Determinarea numerică a parametrului optim și a soluției aproximative corespunzătoare)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ - sim. poz. def.; $a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieşire: $x^O_{aprox} \in \mathbb{R}^n; N_O; \sigma_O$.

STEP 1: for s=1:p-1 do

$\sigma_s = \frac{2s}{\| A \|_\infty p}$;

$[x_{aprox}, N] =$**MetJacobiR**$(A, a, \varepsilon, \sigma_s)$;

$V_s = N$;

endfor

STEP 2: Determină s a.î. $V_s = min\{V_1, ..., V_{p-1}\}$

$\sigma_O = \frac{2s}{\| A \|_\infty p}$;

STEP 3: $[x^O_{aprox}, N_O] =$ **MetJacobiR**$(A, a, \varepsilon, \sigma_O)$.

4.5. Metoda Gauss - Seidel relaxată

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită, $a \in \mathbb{R}^n$ și $\sigma > 0$ parametru de relaxare. Descompunem matricea $A = L + D + R$. Matricea L este partea inferioară a matricei A, i.e. $l_{ij} = a_{ij}, i > j, l_{ij} = 0$ în rest. Matricea R este partea superioară matricei A, i.e. $r_{ij} = a_{ij}, i < j$, $r_{ij} = 0$ în rest. Matricea $D = diag(A)$, i.e. $d_{ii} = a_{ii}, d_{ij} = 0, i \neq j$.
Avem următoarele sisteme echivalente

$$Ax = a \Leftrightarrow \sigma Ax = \sigma a \Leftrightarrow \sigma(L + D + R)x = \sigma a \Leftrightarrow$$
$$(\sigma L + D + (\sigma - 1)D + \sigma R)x = \sigma a \Leftrightarrow$$
$$(\sigma L + D)x = ((1 - \sigma)D - \sigma R)x + \sigma a \Rightarrow$$

$$x = (\sigma L + D)^{-1}((1 - \sigma)D - \sigma R)x + (\sigma L + D)^{-1}\sigma a \Leftrightarrow x = B_\sigma x + b_\sigma$$

unde $B_\sigma = (\sigma L + D)^{-1}((1 - \sigma)D - \sigma R), b_\sigma = (\sigma L + D)^{-1}\sigma a$

Teorema (II.14.)

Metoda Gauss - Seidel relaxată este convergentă dacă și numai dacă

$$\sigma \in (0,2) \tag{22}$$

Dacă $q = \| B_\sigma \|_A$, *atunci* $q < 1$ *și are loc următoare estimare*

$$\| x^{(k)} - x \|_A \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_A, \forall k \in \mathbb{N} \tag{23}$$

Componentele $x_i^{(k)}$ se pot calcula evitând calculul inversei matricei $\sigma L + D$. Avem

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= B_\sigma x^{(k-1)} + b_\sigma \\ &\Leftrightarrow (\sigma L + D)x^{(k)} = ((1-\sigma)D - \sigma R)x^{(k-1)} + \sigma a \Rightarrow \\ Dx^{(k)} &= -\sigma L x^{(k)} + ((1-\sigma)D - \sigma R)x^{(k-1)} + \sigma a \\ &= (1-\sigma)Dx^{(k-1)} - \sigma R x^{(k-1)} - \sigma L x^{(k)} + \sigma a \Rightarrow \\ x^{(k)} &= (1-\sigma)x^{(k-1)} + \sigma D^{-1}(a - Rx^{(k-1)} - Lx^{(k)}) \end{aligned}$$

Relația de mai sus scrisă pe componente este:

$$x_i^{(k)} = (1-\sigma)x_i^{(k-1)} + \frac{\sigma}{a_{ii}} \left(a_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \tag{24}$$

ALGORITM (Metoda Gauss-Seidel relaxată) (Temă)
ALGORITM (Determinarea numerică a parametrului optim prin metoda Gauss-Seidel relaxată) (Temă)