

Curs 6

Din cursul trecut

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Mulțimea S -sortată a termenilor cu variabile din X , $T_{\Sigma}(X)$, este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s \in S} X_s \cup \bigcup_{w, s} \Sigma_{w, s} \cup \{ (,) \} \cup \{ , \}$$

care verifică:

- 1 $X \subseteq T_{\Sigma}(X)$,
 - 2 Dacă $\sigma : \rightarrow s$ în Σ , atunci $\sigma \in T_{\Sigma}(X)_s$,
 - 3 Dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ în Σ și $t_i \in T_{\Sigma}(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \dots, t_n) \in T_{\Sigma}(X)_s$.
-
- $t \in T_{\Sigma}(X)$ se numește termen (expresie).
 - Notăm cu $\text{Var}(t)$ mulțimea variabilelor care apar în termenul t .
 - $T_{\Sigma} = T_{\Sigma}(\emptyset)$

Din cursul trecut

Mulțimea S -sortată a termenilor $T_{\Sigma}(X)$ este o (S, Σ) -algebră, numită **algebra termenilor cu variabile din X** și notată tot $T_{\Sigma}(X)$, cu operațiile definite astfel:

- pt. or. $\sigma : \rightarrow s$ din Σ , operația corespunzătoare este

$$T_{\sigma} := \sigma \in T_{\Sigma}(X)_s$$

- pt. or. $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ din Σ , operația corespunzătoare este

$$\begin{aligned} T_{\sigma} : T_{\Sigma}(X)_{s_1 \dots s_n} &\rightarrow T_{\Sigma}(X)_s \\ T_{\sigma}(t_1, \dots, t_n) &:= \sigma(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

or. $t_1 \in T_{\Sigma}(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_{\Sigma}(X)_{s_n}$.

- T_{Σ} algebra termenilor fără variabile ($X = \emptyset$)

Cuprins

1 Algebre inițiale

2 Algebre libere

Algebre inițiale

Algebră inițială

Fie

- (S, Σ) o semnătură multisortată,
- \mathcal{R} o clasă de (S, Σ) -algebre.

Definiție

O (S, Σ) -algebră $\mathcal{I} \in \mathcal{R}$ este **inițială** în \mathcal{R} dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathcal{R}$ există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă \mathcal{I} este inițială în \mathcal{K} și $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci \mathcal{A} este inițială în \mathcal{K} .

Proprietăți

Propoziție

Dacă \mathcal{I} este inițială în \mathcal{K} și $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci \mathcal{A} este inițială în \mathcal{K} .

Demonstrație

Cum $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, fie $\iota_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{I}$ un izomorfism.

Fie $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$. Cum \mathcal{I} este inițială, există un unic morfism $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$.

Demonstrăm că există un unic morfism $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$:

- **Existența.** Considerăm $h := \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Deoarece compunerea morfismelor este morfism, obținem că h este morfism.
- **Unicitatea.** Presupunem că există un alt morfism $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Atunci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$ este morfism, deci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g = f_{\mathcal{B}}$. Rezultă că $g = \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} = h$. □

Proprietăți

Propoziție

Dacă \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 sunt inițiale în \mathfrak{K} , atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 sunt inițiale în \mathfrak{K} , atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Demonstrație

Cum \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 sunt inițiale în \mathfrak{K} , există

- un unic morfism $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ și
- un unic morfism $g : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1$.

Avem $f; g : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$, $1_{\mathcal{A}_1} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$ și \mathcal{A}_1 inițială, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}_1}$.

Similar obținem $g; f = 1_{\mathcal{A}_2}$.

În concluzie $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$. □

(S, Σ) -algebra inițială

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată.

- Considerăm \mathfrak{K} clasa tuturor (S, Σ) -algebrelor.
- \mathcal{I} este (S, Σ) -algebră inițială dacă pentru orice (S, Σ) -algebră \mathcal{B} există un unic morfism $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B}$.

Teoremă

Pentru orice (S, Σ) -algebră \mathcal{B} , există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

- $f(t)$ este interpretarea termenului $t \in T_\Sigma$ în \mathcal{B} .

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}")$$

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t)$ = " $f(t)$ este definit")

□ *pasul inițial:* dacă $\sigma \mapsto s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}"$)

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}"$)

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}"$)

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrăm că f este morfism.

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}"$)

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrăm că f este morfism.

- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;

Demonstrație

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră.

Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

($\mathbf{P}(t) = "f(t) \text{ este definit}"$)

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiul inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrăm că f este morfism.

- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;
- dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$, atunci $f_s(T_\sigma(t_1, \dots, t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_{\Sigma} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(P(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(P(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

□ *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(P(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î.
 $g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

□ *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și

$t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î.

$g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$$g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) = \\ B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)).$$

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.

Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

□ *pasul inițial:* dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și

$t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î.

$g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$$\begin{aligned} g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) &= g_s(T_\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) = \\ &= B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)). \end{aligned}$$

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = f_s(t)$, oricare $t \in (T_\Sigma)_s$, deci $g = f$.



Consecință

Corolar

T_Σ este (S, Σ) -algebra inițială.

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
 - dacă $\sigma \rightarrow s$, atunci $D_\sigma := 0$

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
 - dacă $\sigma : \rightarrow s$, atunci $D_\sigma := 0$
 - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + \max(k_1, \dots, k_n)$.

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
 - dacă $\sigma : \rightarrow s$, atunci $D_\sigma := 0$
 - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci
 $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + \max(k_1, \dots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ unicul morfism

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
 - dacă $\sigma : \rightarrow s$, atunci $D_\sigma := 0$
 - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci
 $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + \max(k_1, \dots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ unicul morfism
- Ce reprezintă valoarea $f(t)$ pentru un termen t ?

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) semnătură multisortată
- (S, Σ) -algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
 - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
 - dacă $\sigma : \rightarrow s$, atunci $D_\sigma := 0$
 - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci
 $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + \max(k_1, \dots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \rightarrow \mathcal{D}$ unicul morfism
- Ce reprezintă valoarea $f(t)$ pentru un termen t ?
 - $f(t)$ este adâncimea arborelui $arb(t)$.

Observații

- Un **tip abstract de date** este o **clasă** \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ) -algebre din \mathcal{C} sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)

Observații

- Un **tip abstract de date** este o **clasă** \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ) -algebre din \mathcal{C} sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S, Σ) -algebre

$$\mathcal{I}_{(S, \Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ } (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$

Observații

- Un **tip abstract de date** este o **clasă** \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ) -algebre din \mathcal{C} sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S, Σ) -algebre
$$\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ } (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$
- $\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)}$ este un **tip abstract de date**.

Observații

- Un **tip abstract de date** este o **clasă** \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ) -algebre din \mathcal{C} sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S, Σ) -algebre
$$\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ } (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$
- $\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)}$ este un **tip abstract de date**.
- $T_{\Sigma} \in \mathfrak{I}_{(S, \Sigma)}$.

Observații

- Un **tip abstract de date** este o **clasă** \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ) -algebre din \mathcal{C} sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S, Σ) -algebre
$$\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ } (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$
- $\mathfrak{I}_{(S, \Sigma)}$ este un **tip abstract de date**.
- $T_{\Sigma} \in \mathfrak{I}_{(S, \Sigma)}$.
- Un modul în **Maude** (care conține doar declarații de sorturi și operații) definește un astfel de tip abstract de date și construiește efectiv algebra T_{Σ} .

Algebre libere

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ) -algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este **liber generată** de X dacă

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ) -algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este **liber generată** de X dacă

- $X \subseteq A_S$, i.e. există funcția S -sortată incluziune a lui X în A_S
 $i_A : X \hookrightarrow A_S$,

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ) -algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este **liber generată** de X dacă

- $X \subseteq A_S$, i.e. există funcția S -sortată incluziune a lui X în A_S
 $i_A : X \hookrightarrow A_S$,
- pentru orice (S, Σ) -algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ și orice funcție S -sortată $f : X \rightarrow B_S$, există un unic (S, Σ) -morfism $\tilde{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât

$$i_A; \tilde{f} = f.$$

Proprietăți

Teoremă

Dacă \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt liber generate de X , atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Proprietăți

Teoremă

Dacă \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt liber generate de X , atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Demonstrație

- Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ două (S, Σ) -algebre liber generate de X .

Teoremă

Dacă \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt liber generate de X , atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Demonstrație

- Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ două (S, Σ) -algebre liber generate de X .
- Notăm cu $i_A : X \hookrightarrow A_S$ și $i_B : X \hookrightarrow B_S$ funcțiile S -sortate incluziune ale lui X în A_S și, respectiv, B_S .

Teoremă

Dacă \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt liber generate de X , atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Demonstrație

- Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ două (S, Σ) -algebre liber generate de X .
- Notăm cu $i_A : X \hookrightarrow A_S$ și $i_B : X \hookrightarrow B_S$ funcțiile S -sortate incluziune ale lui X în A_S și, respectiv, B_S .
- Demonstrația are patru pași:

Demonstrație (cont.)

- 1 Deoarece \mathcal{A} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.

Demonstrație (cont.)

- 1 Deoarece \mathcal{A} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
- 2 Similar, deoarece \mathcal{B} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.

Demonstrație (cont.)

- 1 Deoarece \mathcal{A} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
- 2 Similar, deoarece \mathcal{B} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.
- 3 Avem $i_A; (f; g) = (i_A; f); g = i_B; g = i_A$ și $i_A; 1_{\mathcal{A}} = i_A$. Cum \mathcal{A} este liber generată de X , morfismele $f; g$ și $1_{\mathcal{A}}$ sunt unice cu proprietatea de mai sus, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}}$.

Demonstrație (cont.)

- 1 Deoarece \mathcal{A} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
- 2 Similar, deoarece \mathcal{B} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.
- 3 Avem $i_A; (f; g) = (i_A; f); g = i_B; g = i_A$ și $i_A; 1_{\mathcal{A}} = i_A$. Cum \mathcal{A} este liber generată de X , morfismele $f; g$ și $1_{\mathcal{A}}$ sunt unice cu proprietatea de mai sus, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}}$.
- 4 Avem $i_B; (g; f) = (i_B; g); f = i_A; f = i_B$ și $i_B; 1_{\mathcal{B}} = i_B$. Cum \mathcal{B} este liber generată de X , obținem că $g; f = 1_{\mathcal{B}}$.

Demonstrație (cont.)

- 1 Deoarece \mathcal{A} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
- 2 Similar, deoarece \mathcal{B} este liber generată de X , există un unic (S, Σ) -morfism $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.
- 3 Avem $i_A; (f; g) = (i_A; f); g = i_B; g = i_A$ și $i_A; 1_{\mathcal{A}} = i_A$. Cum \mathcal{A} este liber generată de X , morfismele $f; g$ și $1_{\mathcal{A}}$ sunt unice cu proprietatea de mai sus, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}}$.
- 4 Avem $i_B; (g; f) = (i_B; g); f = i_A; f = i_B$ și $i_B; 1_{\mathcal{B}} = i_B$. Cum \mathcal{B} este liber generată de X , obținem că $g; f = 1_{\mathcal{B}}$.

Din egalitățile obținute la 3 și 4, deducem că f și g sunt izomorfisme.



Evaluarea termenilor în algebre

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X o mulțime de variabile.

Teoremă

Fie $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ o (S, Σ) -algebră. Orice funcție S -sortată

$$e : X \rightarrow B_S$$

se extinde unic la un (S, Σ) -morfism

$$\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}.$$

- e dă interpretarea, evaluarea variabilelor în mulțimi S -sortate.
- \tilde{e} dă interpretarea, evaluarea termenilor în algebre.

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t)\text{ este definit"}).$

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t)\text{ este definit"})$.

□ *pasul inițial:*

- dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,
- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t)\text{ este definit"})$.

□ *pasul inițial:*

□ dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,

□ dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și

$t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t)\text{ este definit"}).$

□ *pasul inițial:*

□ dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,

□ dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și

$t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $\tilde{e}(t)$ este definit pentru orice $t \in T_\Sigma(X)$. Evident, $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Demonstrație.

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și $e : X \rightarrow B_S$ o funcție S -sortată.

Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t)\text{ este definit"})$.

□ *pasul inițial:*

□ dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,

□ dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și

$t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $\tilde{e}(t)$ este definit pentru orice $t \in T_\Sigma(X)$. Evident, $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Trebuie arătat că \tilde{e} este morfism - **exercițiu!**

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(P(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

□ *pasul inițial:*

- dacă $x \in X_s$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,
- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = B_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

□ *pasul inițial:*

- dacă $x \in X_s$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,
- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = B_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_{\Sigma}(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_{\Sigma}(X)_{s_n}$ astfel încât $g_{s_1}(t_1) = \tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = \tilde{e}_{s_n}(t_n)$, atunci $g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n))$.

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

□ *pasul inițial:*

- dacă $x \in X_s$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,
- dacă $\sigma : \rightarrow s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = B_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.

□ *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_{\Sigma}(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_{\Sigma}(X)_{s_n}$ astfel încât $g_{s_1}(t_1) = \tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = \tilde{e}_{s_n}(t_n)$, atunci $g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = \tilde{e}_s(t)$, oricare $t \in T_{\Sigma}(X)_s$, deci $g = \tilde{e}$.



Consecința

Corolar

$T_{\Sigma}(X)$ este (S, Σ) -algebra liber generată de X .

Corolar

$T_{\Sigma}(X)$ este (S, Σ) -algebra liber generată de X .

- Pentru a evalua un termen t cu variabile din X într-o (S, Σ) -algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_{\Sigma})$, este suficient să evaluăm variabilele din X în B_S , i.e. să definim o funcție $e : X \rightarrow B_S$.

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

$NATEXP$ -algebra \mathcal{A} : mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

$NATEXP$ -algebra \mathcal{A} : mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în \mathcal{A}

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

$NATEXP$ -algebra \mathcal{A} : mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în \mathcal{A}

□ definim $e : X \rightarrow A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

$NATEXP$ -algebra \mathcal{A} : mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în \mathcal{A}

□ definim $e : X \rightarrow A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple de interpretări ale termenilor:

□ $\tilde{e}(+(x, y)) = A_+(e(x), e(y)) = 1 + 3 = 0(mod\ 4)$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

□ $\Sigma = \{0 : \rightarrow nat, s : nat \rightarrow nat, + : nat\ nat \rightarrow nat, \star : nat\ nat \rightarrow nat\}$

$X: X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X): T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \dots, \\ +(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \dots\}$

$NATEXP$ -algebra \mathcal{A} : mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în \mathcal{A}

□ definim $e : X \rightarrow A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple de interpretări ale termenilor:

□ $\tilde{e}(+(x, y)) = A_+(e(x), e(y)) = 1 + 3 = 0(mod\ 4)$

□ $\tilde{e}(\star(s(x), s(s(0)))) = A_\star(A_s(e(x)), A_s(A_s(A_0))) = \\ (1 + 1) \star (0 + 1 + 1) = 2 \star 2 = 0(mod\ 4)$

Exemple

Exemplu

STIVA = $(S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 : \rightarrow elem, empty : \rightarrow stiva, push : elem\ stiva \rightarrow stiva, pop : stiva \rightarrow stiva, top : stiva \rightarrow elem\}$

STIVA-algebra \mathcal{A} :

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}, A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0, A_{empty} := \lambda, A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k, A_{pop}(\lambda) := \lambda, A_{pop}(n) := \lambda, A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k, \text{ pt } k \geq 2, A_{top}(\lambda) := 0, A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1, \text{ pt. } k \geq 1$

STIVA-algebra \mathcal{B} :

- Mulțimea suport: $B_{elem} := \{0\}, B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0, B_{empty} := 0, B_{push}(0, n) := n + 1, B_{pop}(0) := 0, B_{pop}(n) := n - 1, \text{ pt. } n \geq 1, B_{top}(n) := 0$

Exemple

Exemplu (Cont.)

$X: X_{elem} = \{x, y\}, X_{stiva} = \{s\}$

Fie $t := push(x, push(y, s)) \in T_{STIVA}(X)_{stiva}$.

Exemple

Exemplu (Cont.)

$X: X_{elem} = \{x, y\}, X_{stiva} = \{s\}$

Fie $t := push(x, push(y, s)) \in T_{STIVA}(X)_{stiva}$.

O interpretare a lui t în \mathcal{A} :

□ $e : X \rightarrow A, e(x) := 5, e(y) := 3, e(s) := 6 \ 7$

□ $\tilde{e}(t) = A_{push}(e(x), A_{push}(e(y), e(s))) = 5 \ 3 \ 6 \ 7$

Exemple

Exemplu (Cont.)

$X: X_{elem} = \{x, y\}, X_{stiva} = \{s\}$

Fie $t := push(x, push(y, s)) \in T_{STIVA}(X)_{stiva}$.

O interpretare a lui t în \mathcal{A} :

□ $e : X \rightarrow A, e(x) := 5, e(y) := 3, e(s) := 6$

□ $\tilde{e}(t) = A_{push}(e(x), A_{push}(e(y), e(s))) = 5 \ 3 \ 6 \ 7$

O interpretare a lui t în \mathcal{B} :

□ $e : X \rightarrow B, e(x) := 0, e(y) := 0, e(s) := 10$

□ $\tilde{e}(t) = B_{push}(e(x), B_{push}(e(y), e(s))) = (10 + 1) + 1 = 12$

Proprietăți

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un (S, Σ) -morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S, Σ) -morfism $f : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$, există un (S, Σ) -morfism $g : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{h} & \mathcal{B} \\ & \nwarrow g & \uparrow f \\ & & T_\Sigma(X) \end{array}$$

Demonstrație.

- Fie $f : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism.
- Cum h este surjectiv, pt. or. $x \in X_s$, există $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$.
- Pentru orice $s \in S$ și $x \in X_s$, alegem $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$ și definim $e_s(x) := a$.
- Deci $e : X \rightarrow A$.
- Considerăm $\tilde{e} : T_{\Sigma}(X) \rightarrow \mathcal{A}$ extensia unică a lui $e : X \rightarrow A$.
- Cum $T_{\Sigma}(X)$ este algebră liberă și $(\tilde{e}; h)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$, obținem că $\tilde{e}; h = f$.
- Luăm $g := \tilde{e}$.



Proprietăți

Notăție. Dacă $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ este un (S, Σ) -morfism și $X \subseteq A_S$, atunci $f \restriction_X$ este **restricția** lui f la X , i.e. $(f \restriction_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Proprietăți

Notăție. Dacă $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ este un (S, Σ) -morfism și $X \subseteq A_S$, atunci $f \upharpoonright_X$ este **restricția** lui f la X , i.e. $(f \upharpoonright_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Propoziție

Fie \mathcal{B} o (S, Σ) -algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ și $g : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci

$$g = f \Leftrightarrow g \upharpoonright_X = f \upharpoonright_X.$$

Demonstrație.

Exercițiu! Se demonstrează că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)").$$



Proprietăți

Propoziție

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_{\Sigma}(X) \simeq T_{\Sigma}(Y)$.

Demonstrație.

Exercițiu! A se vedea demonstrația pentru:

două algebre liber generate de X sunt izomorfe.



Concluzii

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X mulțime de variabile.

- T_Σ este (S, Σ) -algebră inițială.
- $T_\Sigma(X)$ este (S, Σ) -algebră liber generată de X .
- T_Σ este liber generată de \emptyset .



Pe săptămâna viitoare!