Curs 7

2016-2017

Programare Logică

Cuprins

Congruențe

Congruențe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră.

Definiție

O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s \in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:

Congruențe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră.

Definiție

O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s \in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:

- $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalență, or. $s \in S$:
  - reflexivă
  - simetrică
  - tranzitivă

Congruențe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră.

Definiție

O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s \in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:

- $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalență, or. $s \in S$:
  - reflexivă
  - simetrică
  - tranzitivă
- $\equiv$ este compatibilă cu operațiile:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \text{ și or. } a_i, b_i \in A_{s_i},\ i = 1, \ldots, n$$
$$a_i \equiv_{s_i} b_i, \text{ or. } i = 1, \ldots, n \Rightarrow A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$$

Exemplu

Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat, \ succ : nat \to nat\}$

NAT-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

$n_1 \equiv_{nat} n_2 \Leftrightarrow 2|(n_1 - n_2)$ este congruență (congruență modulo 2):

- $\equiv_{nat}$ este echivalență
- dacă $n_1 \equiv_{nat} n_2$, atunci $A_{succ}(n_1) \equiv_{nat} A_{succ}(n_2)$

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S,Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S,Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
- $\mathcal{A}/_{\equiv}$ se numește algebră cât a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$.

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
- $\mathcal{A}/_{\equiv}$ se numește algebră cât a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$.
- $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$, or. $a \in A_s$, este morfism surjectiv.

$$[a]_{\equiv_s} = [b]_{\equiv_s} \Leftrightarrow a \equiv_s b \Leftrightarrow (a, b) \in \equiv_s$$

Exemple

Exemplu

STIVA: $S = \{elem, stiva\}$, $\Sigma = \{0 :\to elem,\ empty :\to stiva,$
$push : elem\ stiva \to stiva, pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\equiv = \{\equiv_{elem}, \equiv_{stiva}\}$ congruență pe $\mathcal{A}$:

- $\equiv_{elem} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\equiv_{stiva} := \{(w, w') \mid w, w' \in \mathbb{N}^*, |w| = |w'|\}$

Exemple

Exemplu

STIVA: $S = \{elem, stiva\}$, $\Sigma = \{0 :\to elem,\ empty :\to stiva,$
$push : elem\ stiva \to stiva, pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\equiv = \{\equiv_{elem}, \equiv_{stiva}\}$ congruență pe $\mathcal{A}$:

- $\equiv_{elem} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\equiv_{stiva} := \{(w, w') \mid w, w' \in \mathbb{N}^*, |w| = |w'|\}$

$\mathcal{A}/_{\equiv}$

Exemple

Exemplu

STIVA: $S = \{elem, stiva\}$, $\Sigma = \{0 :\to elem,\ empty :\to stiva,$
$push : elem\ stiva \to stiva, pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\equiv = \{\equiv_{elem}, \equiv_{stiva}\}$ congruență pe $\mathcal{A}$:

- $\equiv_{elem} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\equiv_{stiva} := \{(w, w') \mid w, w' \in \mathbb{N}^*, |w| = |w'|\}$

$\mathcal{A}/_{\equiv} \simeq \mathcal{B}$, unde *STIVA*-algebra $\mathcal{B}$:

- $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$

Nucleul unui morfism

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S, Σ)-algebre.

Nucleul lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$, unde

$$Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}, \text{ or. } s \in S.$$

Nucleul unui morfism

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S, Σ)-algebre.

Nucleul lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$, unde

$$Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}, \text{ or. } s \in S.$$

Propoziție

1. $Ker(f)$ este o congruență pe $\mathcal{A}$.
2. Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$, atunci $Ker([\cdot]_{\equiv}) = \equiv$.

Nucleul unui morfism

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S, Σ)-algebre.

Nucleul lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$, unde

$$Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}, \text{ or. } s \in S.$$

Propoziție

1. $Ker(f)$ este o congruență pe $\mathcal{A}$.
2. Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$, atunci $Ker([\cdot]_{\equiv}) = \equiv$.

Demonstrație.

Exercițiu!

Proprietatea de universalitate

Teoremă (Proprietatea de universalitate a algebrei cât)

Fie $\mathcal{A}$ o (S,Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$ și pentru orice morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î.
$\equiv \subseteq Ker(h)$, există un unic morfism $\overline{h} : \mathcal{A}/_{\equiv} \to \mathcal{B}$ a.î. $[\cdot]_{\equiv};\overline{h} = h$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}/_{\equiv} \arrow[dl, dotted, "\overline{h}"] \\
\mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.
  - $\overline{h}$ este morfism:

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.
  - $\overline{h}$ este morfism:
    - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $\overline{h}_s((A/_{\equiv})_\sigma) = \overline{h}_s([A_\sigma]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.
  - $\overline{h}$ este morfism:
    - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $\overline{h}_s((A/_{\equiv})_\sigma) = \overline{h}_s([A_\sigma]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
    - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ si $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$, atunci

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_s((A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}})) &= \overline{h}_s([A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}) \\
&= h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n)) \\
&= B_\sigma(\overline{h}_{s_1}([a_1]_{\equiv_{s_1}}), \ldots, \overline{h}_{s_n}([a_n]_{\equiv_{s_n}})).
\end{aligned}
$$

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.
  - $\overline{h}$ este morfism:
    - dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $\overline{h}_s((A/_\equiv)_\sigma) = \overline{h}_s([A_\sigma]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
    - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ si $a_1 \in A_{s_1}, \dots, a_n \in A_{s_n}$, atunci

$$\begin{aligned}
\overline{h}_s((A/_\equiv)_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \dots, [a_n]_{\equiv_{s_n}})) &= \overline{h}_s([A_\sigma(a_1, \dots, a_n)]_{\equiv_s}) \\
&= h_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n)) \\
&= B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n)) \\
&= B_\sigma(\overline{h}_{s_1}([a_1]_{\equiv_{s_1}}), \dots, \overline{h}_{s_n}([a_n]_{\equiv_{s_n}})).
\end{aligned}$$

- **Unicitatea:** Fie $g : \mathcal{A}/_\equiv \to \mathcal{B}$ a.î. $[\cdot]_\equiv ; g = h$. Atunci $g_s([a]_{\equiv_s}) = h_s(a) = \overline{h}_s([a]_{\equiv_s})$, or. $a \in A_s$.

$\square$

Consecințe

Propoziție ($\star$)

Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre. Dacă

$$\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap \{ Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K} \text{ morfism} \},$$

atunci următoarele proprietăți sunt adevărate:

Consecințe

Propoziție ($\star$)

Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre. Dacă

$$\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap \{Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K} \text{ morfism}\},$$

atunci următoarele proprietăți sunt adevărate:

1. $\equiv_{\mathfrak{K}}$ este congruența pe T_Σ,

Consecințe

Propoziție ($\star$)

Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S,Σ)-algebre. Dacă

$$\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K} \text{ morfism}\},$$

atunci următoarele proprietăți sunt adevărate:

1. $\equiv_{\mathfrak{K}}$ este congruența pe T_Σ,
2. pt. or. $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$.

Ecuații. Relația de satisfacere

Din cursurile trecute

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X mulțime de variabile.

- T_Σ este (S, Σ)-algebră inițială, i.e.

  pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$ există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

- $T_\Sigma(X)$ este (S, Σ)-algebră liber generată de X, i.e.

  pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$, orice funcție S-sortată $e : X \to B_S$ se extinde unic la un (S, Σ)-morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$.

Motivație

Un modul în Maude (care conține doar declații de sorturi și operații) construiește efectiv algebra T_{Σ}.

Ce se întâmplă cu ecuațiile?

Ce se întâmplă cu atributele operațiilor?

Ecuație

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.

Notăm o ecuație prin

$$(\forall X) t \doteq_s t'$$

$\doteq$ egalitate formală $\qquad$ $=$ egalitate efectivă

Satisfacerea unei ecuații

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$,

$$\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t').$$

Notăm faptul că $\mathcal{A}$ satisface ecuația $(\forall X)t \doteq_s t'$ prin

$$\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$$

- Dacă $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$, mai spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al ecuației $(\forall X)t \doteq_s t'$.

Satisfacerea unei ecuații

Am văzut că orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$ se extinde unic la un morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$.

Satisfacerea unei ecuații

Am văzut că orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$ se extinde unic la un morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$.

Definiție (echivalentă)

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$,

$$f_s(t) = f_s(t').$$

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Exemplu

- Signatura: $S = \{s, b\}$, $\Sigma = \{T : \to b, F : \to b, g : s \to b\}$

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Exemplu

- Signatura: $S = \{s, b\}$, $\Sigma = \{T : \to b, F : \to b, g : s \to b\}$
- T_Σ: $T_{\Sigma,s} = \emptyset$, $T_{\Sigma,b} = \{T, F\}$

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Exemplu

- Signatura: $S = \{s, b\}$, $\Sigma = \{T : \to b, F : \to b, g : s \to b\}$
- T_Σ: $T_{\Sigma,s} = \emptyset$, $T_{\Sigma,b} = \{T, F\}$
- $T_\Sigma \not\models (\forall\emptyset) T \doteq_b F$
  - $T_T = T \neq F = T_F$

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Exemplu

- Signatura: $S = \{s, b\}$, $\Sigma = \{T : \to b, F : \to b, g : s \to b\}$
- T_Σ: $T_{\Sigma,s} = \emptyset$, $T_{\Sigma,b} = \{T, F\}$
- $T_\Sigma \not\models (\forall\emptyset) T \stackrel{\cdot}{=}_b F$
  - $T_T = T \neq F = T_F$
- $T_\Sigma \models (\forall X) T \stackrel{\cdot}{=}_b F$, unde $X_s := \{x\}$ și $X_b := \emptyset$
  - nu există niciun morfism $f : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,
- o mulțime H de ecuații $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,
- o mulțime H de ecuații $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.

Notăm o ecuație condiționată prin

$$(\forall X)t \doteq_s t' \ \mathit{if} \ H$$

- În practică H este finită, i.e. $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$.
- Ecuațiile din H sunt cuantificate cu X.
- Ecuațiile din H se numesc condiții.
- O ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ este o ecuație condiționată în care H este $\emptyset$.

Satisfacerea unei ecuații condiționate

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$,

$$\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t').$$

Notăm faptul că $\mathcal{A}$ satisface ecuația condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H prin

$$\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } H$$

- $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } \emptyset$

Satisfacerea unei ecuații condiționate

Definiție (echivalentă)

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \stackrel{\cdot}{=}_s t'$ *if* H dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$,

$$f_{s'}(u) = f_{s'}(v), \text{ or. } u \stackrel{\cdot}{=}_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t').$$

Exemple

Exemplu

$STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

X: $X_{elem} = \{E\}$, $X_{stiva} = \{S, Q\}$

Ecuația condiționată:

$$(\forall X) top(S) \doteq_{elem} E\ if\ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$$

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k$, $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k$, pt $k \geq 2$ $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \text{ if } \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \text{ if } \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$

Exemple

Exemplu (cont.)

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \ if \ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- obținem $\tilde{e}_{stiva}(S) = A_{push}(\tilde{e}_{elem}(E), \tilde{e}_{stiva}(Q))$

Exemplu (cont.)

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k$, $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k$, pt $k \geq 2$ $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \text{ if } \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- obținem $\tilde{e}_{stiva}(S) = A_{push}(\tilde{e}_{elem}(E), \tilde{e}_{stiva}(Q))$
- notăm $n := \tilde{e}_{elem}(E)$, $w := \tilde{e}_{stiva}(S)$, $w' := \tilde{e}_{stiva}$

Exemple

Exemplu (cont.)

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \text{ if } \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- obținem $\tilde{e}_{stiva}(S) = A_{push}(\tilde{e}_{elem}(E), \tilde{e}_{stiva}(Q))$
- notăm $n := \tilde{e}_{elem}(E)$, $w := \tilde{e}_{stiva}(S)$, $w' := \tilde{e}_{stiva}$
- rezultă $w = nw'$ și

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \dots n_k) := nn_1 \dots n_k$, $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \dots n_k) := n_2 \dots n_k$, pt $k \geq 2$ $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \dots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \stackrel{\cdot}{=}_{elem} E \text{ if } \{S \stackrel{\cdot}{=}_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- obținem $\tilde{e}_{stiva}(S) = A_{push}(\tilde{e}_{elem}(E), \tilde{e}_{stiva}(Q))$
- notăm $n := \tilde{e}_{elem}(E)$, $w := \tilde{e}_{stiva}(S)$, $w' := \tilde{e}_{stiva}$
- rezultă $w = nw'$ și

$$\tilde{e}_{elem}(top(S)) = A_{top}(\tilde{e}_{stiva}(S)) = A_{top}(w) = A_{top}(nw') = n = \tilde{e}_{elem}(E)$$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$, $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$,
  $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{C} \not\models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \ if \ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

Exemple

Exemplu (cont.)

$STIVA$-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$, $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{C} \not\models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \; if \; \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to C$ o evaluare definită prin $e_{elem}(E) = 2$, $e_{stiva}(Q) = 3\ 4$, $e_{stiva}(S) = 3\ 4\ 2$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$, $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{C} \not\models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \ if \ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to C$ o evaluare definită prin $e_{elem}(E) = 2$, $e_{stiva}(Q) = 3\ 4$, $e_{stiva}(S) = 3\ 4\ 2$
- atunci $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \dots x_k) := x_1 \dots x_k x$, $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \dots x_{k-1} x_k) := x_2 \dots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \dots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{C} \not\models (\forall X) top(S) \stackrel{\cdot}{=}_{elem} E \ if \ \{S \stackrel{\cdot}{=}_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to C$ o evaluare definită prin $e_{elem}(E) = 2$, $e_{stiva}(Q) = 3\ 4$, $e_{stiva}(S) = 3\ 4\ 2$
- atunci $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- dar $\tilde{e}_{elem}(E) = 2 \neq 3 = \tilde{e}_{elem}(top(S))$

Γ-algebre

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-algebră ($\mathcal{A}$ este model pentru Γ) dacă

$$\mathcal{A} \models \gamma, \text{ or. } \gamma \in \Gamma.$$

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-algebră ($\mathcal{A}$ este model pentru Γ) dacă

$$\mathcal{A} \models \gamma, \text{ or. } \gamma \in \Gamma.$$

- În acest caz, notăm $\mathcal{A} \models \Gamma$
- Notăm cu $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$ clasa tuturor Γ-algebrelor.

Proprietăți

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *două* (S, Σ)*-algebre a.î.* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ *și* $\gamma := (\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H.

$$\mathcal{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \gamma.$$

Demonstrație

Exercitiu!

Consecința semantică

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Definiție

O ecuație condiționată θ este consecință semantică a lui Γ dacă

$$\mathcal{A} \models \Gamma \text{ implică } \mathcal{A} \models \theta,$$

pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$.

- În acest caz, notăm $\Gamma \models \theta$.
- Dacă Θ mulțime de ecuații condiționate, atunci

$$\Gamma \models \Theta \Leftrightarrow \Gamma \models \theta, \text{ or. } \theta \in \Theta$$

Exemplu

Exemplu (Teoria grupurilor)

- (S, Σ, Γ) unde
  - $S = \{elem\}$
  - $\Sigma = \{e :\to elem,\ - : elem \to elem,\ + : elem\ elem \to elem\}$
  - $\Gamma = \{(\forall\{x, y, z\})(x + y) + z \doteq x + (y + z),$
    $(\forall\{x\})e + x \doteq x,$
    $(\forall\{x\})x + e \doteq x,$
    $(\forall\{x\})(-x) + x \doteq e,$
    $(\forall\{x\})x + (-x) \doteq e\}$
- $\theta_1 := (\forall\{x, y, z\})x \doteq y$ if $\{x + z \doteq y + z\}$
- $\theta_2 := (\forall\{x, y\})x + y \doteq y + x$
- $\Gamma \models \theta_1$
- $\Gamma \not\models \theta_2$

Congruențe închise la substituții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.

Congruențe închise la substituții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.

Spunem că $\equiv$ este închisă la substituție dacă

$$\mathrm{CS}(\Gamma, \mathcal{A}) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } e : X \to A_S \\ \tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t'). \end{array}}$$

Congruențe închise la substituții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.

Spunem că $\equiv$ este închisă la substituție dacă

CS($\Gamma, \mathcal{A}$)
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } e : X \to A_S \\ \tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t').\end{array}}$$

Propoziție ($\star$)

Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție, atunci

$$\mathcal{A}/_{\equiv} \models \Gamma.$$

Echivalența semantică

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră

Echivalența semantică pe $\mathcal{A}$ determinată de Γ este

$$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap \{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}.$$

Echivalența semantică

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră

Echivalența semantică pe $\mathcal{A}$ determinată de Γ este

$$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}.$$

Dacă $\mathcal{A} = T_\Sigma(X)$, notăm $\equiv_{\Gamma, T_\Sigma(X)}$ cu $\equiv_\Gamma$.

Echivalența semantică (pe $T_\Sigma(X)$):

$$t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t'.$$

Congruența semantică

Propoziție ($\star$)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Propoziție ($\star$)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este cea mai mică congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Γ-algebra inițială

Definim pe T_Σ congruența semantică determinată de Γ:

$$\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} := \bigcap \{Ker(f) \mid f : T_\Sigma \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$$

Teoremă (⋆)

$T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$ *este Γ-algebra inițială.*

Demonstrație

- $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}$ este închisă la substituții
- $T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}} \models \Gamma$
- $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} = \equiv_{\mathfrak{K}}$, unde $\mathfrak{K} = Alg(S,\Sigma,\Gamma)$
- Pt. or. $\mathcal{B} \models \Gamma$, ex. un unic morfism $\bar{f} : T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}} \to \mathcal{B}$ □

Consecințe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Teoremă $(^\star)$

Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $h : T_\Sigma \to \mathcal{A}$ unicul morfism. Sunt echivalente:

1. *$\mathcal{A}$ este Γ-algebră inițială.*
2. *$\mathcal{A}$ verifică următoarele proprietăți:*
   - *No Junk:* *h este surjectiv*
   - *No Confusion:*

$$h_s(t_1) = h_s(t_2) \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall \emptyset) t_1 \doteq_s t_2, \text{ or. } t_1, t_2 \in (T_\Sigma)_s.$$

Specificații algebrice

Specificații

O specificație este un triplet (S, Σ, Γ), unde

- (S, Σ) este o signatură multisortată
- Γ este o mulțime de ecuații condiționate

Specificații

O specificație este un triplet (S, Σ, Γ), unde

- (S, Σ) este o signatură multisortată
- Γ este o mulțime de ecuații condiționate

Specificația (S, Σ, Γ) definește clasa modelelor $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$, care reprezintă semantica ei.

Specificații echivalente

Definiție

Două specificații (S, Σ, Γ_1) și (S, Σ, Γ_2) sunt echivalente dacă definesc aceeași clasă de modele, i.e.

$$\mathcal{A} \models \Gamma_1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \Gamma_2$$

- Dacă Γ și Θ sunt mulțimi de ecuații condiționate a.î. $\Gamma \models \Theta$, atunci (S, Σ, Γ) și $(S, \Sigma, \Gamma \cup \Theta)$ sunt specificații echivalente.

Semantica unui modul în **Maude**

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I} \text{ } \Gamma\text{-algebra inițială}\}$$

- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}$ este un tip abstract de date

Semantica unui modul în **Maude**

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\ \Gamma\text{-algebra inițială}\}$$

- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}$ este un tip abstract de date

În **Maude**, un modul `fmod ... endfm` definește tipul abstract de date $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}$ și construiește efectiv algebra $T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$

- S mulțimea sorturilor
- Σ mulțimea simbolurilor de operații
- Γ mulțimea ecuațiilor definite în modul, iar fiecare ecuație

  `eq t = t'` și `ceq t = t' if H`

  este cuantificată de variabilele care apar în `t` și `t'`.

Specificație corectă

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră.

Definiție

O specificație (S, Σ, Γ) este adecvată pentru $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{A}$ este Γ-algebră inițială, i.e.

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}.$$

Exemplu

Exemplu

- $S = \{s\}$
- $\Sigma = \{0 :\to s,\ succ : s \to s\}$
- $\Gamma = \{(\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x\}$

Exemplu

Exemplu

- $S = \{s\}$
- $\Sigma = \{0 :\to s,\ succ : s \to s\}$
- $\Gamma = \{(\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x\}$

(S, Σ, Γ) este o specificație adecvată pentru $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x+1) \bmod 4$.

Exemplu

Exemplu

- $S = \{s\}$
- $\Sigma = \{0 :\to s,\ succ : s \to s\}$
- $\Gamma = \{(\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x\}$

(S, Σ, Γ) este o specificație adecvată pentru $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x + 1) \bmod 4$.

Se reduce la a arăta că $\mathcal{A}$ este Γ-algebra inițială, i.e.

1. $\mathcal{A} \models \gamma$, or. $\gamma \in \Gamma$,
2. pt. or. Γ-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Exemplu

Exemplu

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x+1) \text{mod } 4$.

1. $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$

Exemplu

Exemplu

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x+1) \bmod 4$.

1. $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$
    - Fie $e : X \to \mathbb{Z}_4$, unde $X = \{x\}$.

Exemplu

Exemplu

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x+1) \bmod 4$.

1. $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$
   - Fie $e : X \to \mathbb{Z}_4$, unde $X = \{x\}$.
   - Avem

$$\begin{aligned} \tilde{e}(succ(succ(succ(succ(x))))) &= A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(e(x))))) \\ &= (e(x) + 4) \bmod 4 \\ &= e(x) = \tilde{e}(x) \end{aligned}$$

Exemplu

Exemplu

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x + 1) \text{mod } 4$.

1. $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \dot{=} x$
   - Fie $e : X \to \mathbb{Z}_4$, unde $X = \{x\}$.
   - Avem

$$\begin{aligned} \tilde{e}(succ(succ(succ(succ(x))))) &= A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(e(x))))) \\ &= (e(x) + 4) \text{mod } 4 \\ &= e(x) = \tilde{e}(x) \end{aligned}$$

2. Fie $\mathcal{B}$ o Γ-algebră.

   Existența: Definim $f : \mathbb{Z}_4 \to B$ prin

Exemplu

Exemplu

$\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $A_{succ}(x) := (x+1) \mathrm{mod}\ 4$.

1. $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \dot{=} x$
   - Fie $e : X \to \mathbb{Z}_4$, unde $X = \{x\}$.
   - Avem

$$
\begin{aligned}
\tilde{e}(succ(succ(succ(succ(x))))) &= A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(e(x))))) \\
&= (e(x) + 4) \mathrm{mod}\ 4 \\
&= e(x) = \tilde{e}(x)
\end{aligned}
$$

2. Fie $\mathcal{B}$ o Γ-algebră.

   Existența: Definim $f : \mathbb{Z}_4 \to B$ prin
   - $f(0) := B_0$
   - $f(x+1) := B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
   - Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
   - Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:
     - $f(A_{succ}(3)) = f(0) = B_0$

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
   - Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:
     - $f(A_{succ}(3)) = f(0) = B_0$
     - $B_{succ}(f(3)) = B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0))))$

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
   - Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:
     - $f(A_{succ}(3)) = f(0) = B_0$
     - $B_{succ}(f(3)) = B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0))))$
     - Cum $\mathcal{B} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$, pt. $e' : X \to B$, $e'(x) := B_0$, obținem

       $$B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0)))) = \tilde{e}'(succ(succ(succ(succ(x))))) = \tilde{e}'(x) = B_0$$
     - Deci $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$.

Exemplu

Exemplu

2. Arătăm că f este morfism:
   - $f(A_0) = f(0) = B_0$
   - $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
   - Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:
     - $f(A_{succ}(3)) = f(0) = B_0$
     - $B_{succ}(f(3)) = B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0))))$
     - Cum $\mathcal{B} \models (\forall x)succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$, pt. $e' : X \to B$, $e'(x) := B_0$, obținem
       $$B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0)))) = \tilde{e'}(succ(succ(succ(succ(x))))) = \tilde{e'}(x) = B_0$$
     - Deci $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$.

Unicitatea: Fie $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism.
Arătăm că $g(x) = f(x)$, or. $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, prin inducție:

- $g(0) = g(A_0) = B_0 = f(0)$
- $g(x+1) = g(A_{succ}(x)) = B_{succ}(g(x)) = B_{succ}(f(x)) = f(A_{succ}(x)) = f(x+1)$

Pe săptămâna viitoare!