TO:

FROM: Ecuații diferențiale – curs – 3.10.2017

Bibliografie: - minimală = curs & seminar
- uzuală: A.C., Elemente de teoria ec. dif., Ed. „U" 2010 (2012)
St. Mirică, Vol. I, vol. II, Ed. „U", 1999 – Ec. dif.
I. Vrabie, Ec. dif., Ed. Matrix Rom 1999
A. Halanay, Ec. dif., Ed. didactică, 1972
• culegeri: St. Mirică, Vol. III

Obiectul teoriei ecuațiilor diferențiale

Def 1: Fiind dată funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spunem că definește obiectul matematic numit ecuație diferențiabilă,
$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ $x' = f(t,x)$, $\dot{x} = f(t,x)$

Def 2: Funcția $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s.n. soluție a ec. dif. dacă:
- Graf $\varphi(\cdot) = \{(t, \varphi(t)), t \in I\} \subseteq D$
- $\varphi(\cdot)$ este derivabilă și $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$

Def 3: Mulțimea tuturor sol. unei ec. dif. s.n. sol. generală

În coordonate: Dacă $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ bază $x \in \mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n)$,
$f(\cdot,\cdot) = (f_1(\cdot,\cdot), \dots, f_n(\cdot,\cdot))$

$\frac{dx}{dt} = f_i(t,x)$, $i = \overline{1,n}$

$\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_n(\cdot))$, $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall t \in I$

Motivație: - d.p.d.v. strict matematic tema ec. dif. este o continuare a cursului de analiză
- a dat răspuns la probleme complete din diverse ramuri ale științei

Cel mai bun exemplu: Legea a II-a a lui Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$x(t)$ = starea unui sistem fizic la momentul t
$x'(t) = v(t)$ – viteza de schimbare a stării
$x''(t) = a(t)$ – accelerația
$\vec{F}: (x, x') \longrightarrow F(x, x')$
$x''(t) = F(x(t), x'(t))$
$x''(t) = \frac{1}{m} F(x(t), x'(t))$

~~(t)~~ $x'' = \frac{1}{m} F(x, x')$

sch. v. : $y = x'$ $(y(t) = x'(t)) \Rightarrow y' = x''$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(x, y) \end{cases} \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad f(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{m} F(x, y) \end{pmatrix}$$

<u>Obiectiv</u> (Probleme fundamentale)

1. Existența soluțiilor $f = ?$ a. î. ec. $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ are soluții
2. Unicitatea soluțiilor $f = ?$ a. î. ec. $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ are sol. unică
3. Studiul calitativ : $f = ?$ a. î. sol. au anumite proprietăți

   [E: Stabilitate $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$, $\forall \varphi(\cdot)$ sol]
4. Determinarea soluțiilor – găsirea de formule explicite $\Rightarrow$ ec. d. n. „integrabilă prin cuadratur

   – găsirea de soluții aproximative numerice $\Rightarrow$ Analiza numerică

<u>Teoria elementară a ecuațiilor diferențiale</u>

<u>I Ecuații diferențiale scalare</u>

$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ ~~$f(t, \cdot) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$~~ $f(\cdot, \cdot) : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{n = 1}$

1. Ecuații cu variabile separabile

$\frac{dx}{dt} = a(t) b(x)$ $\qquad$ $a(\cdot) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b(\cdot) : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | continue

<u>Prop1</u> : (Structura soluției)

1. Dacă $x_0 \in J$ a. î. $b(x_0) = 0$ at. $\varphi(t) = x_0$ e soluție
2. Fie $A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$, $B(\cdot)$ primitivă a lui ~~$b(\cdot)$~~ $\frac{1}{b(\cdot)}\Big|_{J_0}$

   $J_0 = \{x \in J ; b(x) \neq 0\}$ at.

   $\varphi(\cdot) : I \subseteq I \to \mathbb{R}$ e sol. $\Leftrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ a. î. $B(\varphi(t)) = A(t) + c$

<u>Dem</u>: 1. $b(x_0) = 0$

$\varphi(\cdot)$ derivabilă și $\quad \varphi'(t) \equiv a(t) b(\varphi(t))$

$0 \equiv a(t) \underset{0}{b(x_0)} = 0$ OK

TO:

FROM:

2. „$\Rightarrow$" Fie funcția ~~cu~~ $g(t) := B(\varphi(t)) - A(t)$, $g(\cdot)$ derivabilă

$$g'(t) = B'(\varphi(t))\varphi'(t) - A'(t) = \frac{1}{b(\varphi(t))}\cdot\varphi'(t) - a(t) \underset{\varphi(\cdot)\text{ sol.}}{=} \frac{1}{b(\varphi(t))}\cdot a(t)\cdot b(\varphi(t)) - a(t) \equiv 0$$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $g(t) \equiv c$

„$\Leftarrow$" Fie $\varphi(\cdot) : I_0 \subseteq I \to J_0$. Arătăm că $\begin{cases} \varphi(\cdot) \text{ derivabilă} \\ \varphi(\cdot) \text{ verifică ec.} \end{cases}$

Pp. că $\varphi(\cdot)$ este derivabilă $B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c \;\Big|\; \frac{d}{dt}$

$$B'(\varphi(t)) \equiv a(t)$$

$$\frac{1}{b(\varphi(t))}\cdot\varphi'(t) = a(t) \qquad \varphi'(t) \equiv a(t)\,b(\varphi(t)) \text{ OK}$$

$\varphi(\cdot)$ derivabilă

Fie $t_0 \in I_0$ $x_0 := \varphi(t_0)$, $b(x_0) \neq 0$

Pp. $b(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, J_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $b(x_0) > 0$ $\forall x \in J_1$

$B'(x) = \frac{1}{b(x)} > 0$ ~~ii~~ $\forall x \in J_1 \Rightarrow B(\cdot)$ str. cresc. $\Rightarrow B(\cdot)$ bij., deriv. $\Rightarrow B^{-1}$ deriv.

~~B(t)~~ $B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c$

$\varphi(t) \equiv B^{-1}(A(t) + c)$, $t \in I$

$\varphi(\cdot)$ deriv. (comp. de fct. deriv.) $\Rightarrow \varphi(\cdot)$ deriv. în x_0

<u>Prop 2</u> („Lipirea soluțiilor")

~~Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$~~

Fie $f(\cdot,\cdot) : D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuă $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

Fie $\varphi_1 : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ sol. $\lim\limits_{\substack{t\to b\\ t<b}} \varphi_1(t) = \lim\limits_{\substack{t\to b\\ t>b}} \varphi_2(t) = x_0$

$\varphi_2 : (b,c) \to \mathbb{R}^n$ sol.

Fie $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in (a,b) \\ x_0, & t = b \\ \varphi_2(t), & t \in (b,c) \end{cases}$

At. $\varphi(\cdot)$ este sol. a ec.

<u>Dem</u>: $t \in (a,b) \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_1(t)$, $\varphi_1(\cdot)$ sol.

$\varphi(\cdot)|_{(a,b)} = \varphi_1(\cdot)$ sol.

$t \in (b,c)$ analog

$$\varphi_s'(b) = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(b)}{t-b} = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \frac{\varphi_1(t) - x_0}{t-b} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \varphi_1'(t) \underset{\text{sol}}{\overset{\varphi_1(\cdot)}{=}} \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} f(t,\varphi_1(t)) \overset{f(\cdot,\cdot)\text{ cont.}}{=}$$

$= f(b, x_0) = f(b, \varphi(b))$

Analog $\varphi_d'(b) = \dots = f(b, \varphi(b))$

$\varphi'_s(b) = \varphi'_d(b) = \varphi'(b) = f(b, \varphi(b))$ (Verifică ec. și în b)

Prop 3 : (Existența și unicitatea locală a sol.)

1. $\forall (t_0, x_0) \in I \times J \ \exists I_0 \in \mathcal{V}(t_0) \ \exists \varphi(\cdot) : I_0 \to J$ sol. cu $\varphi(t_0) = x_0$
2. $\forall (t_0, x_0) \in I \times J_0 \ \exists I \in \mathcal{V}(t_0) \ \exists! \varphi(\cdot) : I_0 \to J$ sol. cu $\varphi(t_0) = x_0$

Algoritm $\frac{dx}{dt} = a(t) b(x)$

1. Se rezolvă ec. algebrică $b(x) = 0 \to$ rădăcinile $x_1, \dots, x_n$
   Scriem $\varphi_1(t) \equiv x_1, \varphi_2(t) \equiv x_2, \dots, \varphi_n(t) \equiv x_n$ sol. staționare
2. Pe J_0 — „separă" variabile" $\frac{dx}{b(x)} = a(t)\, dt$
   - se integrează $\int \frac{dx}{b(x)} dx = \int a(t) dt \quad B(x) = A(t) + c, c \in \mathbb{R}$
     sol. gen. sub forma implicită
   - inversează $(t, c) = B^{-1}(A(t) + c), c \in \mathbb{R}$ sol. gen. sub forma explicită

2. Ecuații liniare scalare

$\frac{dx}{dt} = a(t) x \qquad a(\cdot) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont.

Caz particular: $b(x) \equiv x$

Prop 1 (Structura sol.)

$A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$

Atunci $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ e sol. a ec. $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi(t) \equiv c \cdot e^{A(t)}$

Dem:

„$\Rightarrow$" $\varphi(\cdot)$ sol. $\Rightarrow \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) \ \Big| \ e^{-A(t)}$

$\varphi'(t) \cdot e^{-A(t)} - a(t) e^{-A(t)} \varphi(t) = 0$

$(\varphi(t) e^{-A(t)})' = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi(t) e^{-A(t)} = c \Rightarrow \varphi(t) \equiv c e^{A(t)}$

„$\Leftarrow$" $\varphi'(t) = c e^{A(t)} a(t) = a(t, \varphi(t))$ OK

Prop 2 (E.U.G.)

$\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R} \ \exists! \varphi_{t_0, x_0}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ soluție cu $\varphi_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$

Mai precis, $= \varphi_{t_0, x_0}(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(t) dt}$

TO:

FROM:

Ecuații afine scalare

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \quad a(\cdot), b(\cdot) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

PROP (Principiul variației constantelor)

Fie $A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$

Atunci $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ e sol. a ec. $\Leftrightarrow \exists\, c(\cdot)$ primitivă a lui $t \to e^{-A(t)} b(t)$ a.î. $\varphi(t) \equiv c(t) e^{A(t)}$

Dem : vezi algoritm

Prop 2 : (E.U.G.)

$\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}\ \exists!\ \varphi_{t_0,x_0}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ sol. cu $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$

Mai precis $\varphi_{t_0,x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(s)ds} \cdot b(s)\, ds, \quad t \in I$

Dem: $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$ OK

$$\varphi'_{t_0,x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \cdot a(t) +$$

$$\left[\int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(t)dt} \cdot b(s)\, ds = \int_{t_0}^t \left(e^{\int_{t_0}^t a(t)dt - \int_{t_0}^s a(t)dt}\right) b(s)\, ds = \right.$$

$$= e^{\int_{t_0}^t a(t)dt} \cdot \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(t)dt} \cdot b(s)\, ds$$

$$\varphi'_{t_0x_0}(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} \cdot a(t) + e^{\int_{t_0}^t a(t)dt} \cdot a(x) \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(t)dt} +$$

$$+ e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} \cdot e^{-\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} \cdot b(t)$$

$$= a(t)\underbrace{\left(x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma} \cdot \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)d\sigma}\right)}_{\varphi_{t_0,x_0}(t)} + b(t) \text{ o.k.}$$

Algoritm : $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$

1. Considerăm ec. liniară asociată $\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x}$

Scrie sol. $\bar{x}(t) = c \cdot e^{A(t)}$