# CURS #7

**CONȚINUTUL CURSULUI #7:**





# IV. Interpolarea Lagrange

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, i.e. $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$.
Fie $\mathcal{P}_n$ mulțimea polinoamelor cel mult de grad $n \geq 0$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n+1} \right\}$$

Interpolarea Lagrange a funcției $f$ relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ constă în determinarea unui polinom $P_n \in \mathcal{P}_n$, numit polinom de interpolare Lagrange, care satisface relațiile:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

Valorile $x_i, i = \overline{1, n+1}$ se numesc puncte sau noduri de interpolare.



# IV.1. Metoda directă de determinare a polinomului Lagrange $P_n$.

Fie $P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n$ un polinom de interpolare al funcției $f$ relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,N+1}}$. Din condițiile $P_n(x_i) = f(x_i)$, $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$ rezultă următorul sistem de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \ldots + a_{n+1} x_1^n = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \ldots + a_{n+1} x_2^n = y_2 \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_{n+1} x_3^n = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 + a_2 x_{n+1} + a_3 x_{n+1}^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

sau scris la formă matriceală

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3}$$



Cum $x_i \neq x_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$, rezultă

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) \neq 0,$$

deci sistemul de ecuații liniare (3) este un sistem compatibil determinat cu soluția

$$\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Din unicitatea soluției rezultă că polinomul Lagrange se determină în mod unic.
Soluția sistemului de ecuații liniare (3) se poate obține, de exemplu, aplicând metoda Gauss cu pivotare totală.
**Exemplu 1:** Să se afle, prin metoda directă, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
**Rezolvare:** Fie $P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = e^0, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_1 + a_2\cdot(-1) + a_3(-1)^2 = e^{-2} \\ a_1 + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 0 = 1 \\ a_1 + a_2\cdot 1 + a_3\cdot 1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} \\ a_3 = \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Astfel, $P_2(x) = 1 + \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2$.



## IV.2. Metoda Lagrange de determinare a polinomului Lagrange $P_n$.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, y_k, \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

unde $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul $n$ ce urmează să fie determinate. Deoarece $P_n$ interpolează funcția $f$ în nodurile $\{x_i\}_{i=\overline{1,n+1}}$ atunci au loc relațiile, $P_n(x_i) = y_i$, de unde rezultă $L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik}$. Deoarece $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul $n$ și $L_{n,k}(x_i) = 0, i \neq k$ rezultă că $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+1}$ sunt $n$ rădăcini, deci $L_{n,k}$ se reprezintă:

$$L_{n,k}(x) = C_k(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_{n+1}), \tag{6}$$

iar din condiția $L_{n,k}(x_k) = 1$, rezultă relația pentru $C_k$ :

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1})\dots(x - x_{n+1})} \tag{7}$$



Se înlocuiesc $C_k$ în (6) și se obțin expresiile

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_{n+1})}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n+1} \tag{8}$$

Funcțiile $L_{n,k}$ se numesc funcții de bază pentru interpolarea Lagrange și se vor rescrie sub o formă compactă

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{9}$$

Vom nota în continuare $E(f;x) = f(x) - P_n(x)$ eroarea în fiecare punct.



**Teorema (IV.1. Estimarea erorii de interpolare)**

*Fie $n \geq 1$, funcția $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a.i. $f \in C^{n+1}[a,b]$ și diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ a intervalului $[a,b]$. Atunci: $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, \xi_x \in (a,b)$ astfel încât*

$$E(f;x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$$

*unde*

$$\pi_{n+1}(x) := (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n+1}), \quad x \in [a,b]$$

*Mai mult, are loc următoarea estimare a erorii de interpolare:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_{n+1}(x)|, \quad \forall\, x \in [a,b]$$

*unde* $M_{n+1} := \max_{\zeta\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)$.

**Demonstrație:** Considerăm funcția auxiliară

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{E(f;x)}{\pi_{n+1}(x)}\pi_{n+1}(t) \tag{10}$$

Se observă că $g$ se anulează în $n+2$ puncte $x_1, \ldots, x_{n+1}, x$. Ca o consecință a teoremei lui Rolle rezultă că $\exists \xi_x \in (a, b)$ astfel încât $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Derivând funcția $g$ de $n+1$ ori rezultă:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{E(f;x)}{\pi_{n+1}(x)}(n+1)! \tag{11}$$

Dacă $t = \xi_x$ din relația de mai sus rezultă

$$E(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x). \tag{12}$$



**Exemplu 2:** Să se afle, prin metoda Lagrange, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
**Rezolvare:** Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Lagrange este $P_2(x) = L_{2,1}(x)y_1 + L_{2,2}(x)y_2 + L_{2,3}(x)y_3$, unde

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1-x^2$$
$$L_{2,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{x^2-x}{2}\cdot e^{-2} + (1-x^2) + \frac{x^2+x}{2}\cdot e^2 \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2 \end{aligned}$$



## IV.3. Metoda Newton de determinare a polinomului Lagrange $P_n$.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange

$P_n(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

sau

$$P_n(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{n+1} c_i \prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j) \tag{13}$$

Condițiile $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{1, n+1}$ ne furnizează sistemul de ecuații liniare necesar pentru determinarea coeficienților $c_i, i = \overline{1, n+1}$

$$\begin{cases} c_1 & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_2-x_1) & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_3-x_1) + c_3(x_3-x_1)(x_3-x_2) & = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1 + c_2(x_{n+1}-x_1) + c_3(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) + \ldots + & \\ + \ldots + c_{n+1}(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n) & = y_{n+1} \end{cases} \tag{14}$$

Sistemul (14) este un sistem inferior triunghiular și se rezolva conform metodei substituții ascendente. Componentele matricei $A$ asociată



sistemului sunt determinate conform relațiilor:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1, \quad i = \overline{1, n+1} \\ a_{ij} &= \prod_{k=1}^{j-1}(x_i - x_k), \quad i = \overline{2, n+1},\ j = \overline{2, i} \end{aligned} \tag{15}$$

**Exemplu 3:** Să se afle, prin metoda Newton, polinomul de interpolare Newton $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
**Rezolvare:** Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Newton se reprezintă sub forma: $P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2)$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = 1, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 & = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_2 & = 1 - e^{-2} \\ c_3 & = \dfrac{e^{-2}+e^2-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= e^{-2} + (1-e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2}+e^2-2}{2}x(x+1) \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2. \end{aligned}$$

## IV.4. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange $P_n$.

### Definiția (IV.1.)

*Fie funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ și o diviziune $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$.*

(i) *S.n. diferența divizată (DD) de ordin 0 a lui $f$ în raport cu nodul $x_1$:*

$$f[x_1] := f(x_1)$$

(ii) *S.n. DD de ordin 1 a lui $f$ în raport cu nodurile $x_1$, $x_2$:*

$$f[x_1, x_2] := \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

(iii) *S.n. DD de ordin 2 a lui $f$ în raport cu nodurile $x_1$, $x_2$, $x_3$:*

$$f[x_1, x_2, x_3] := \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$



### Definiția (IV.1. continuare)

(iv) *S.n. DD de ordin $n$ a lui $f$ în raport cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:*

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] := \frac{f[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_1}$$

### Propoziția (IV.1.)

*Pentru orice $n \geq 1$, are loc relația:*

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} (x_i - x_j)} \tag{16}$$



**Demonstrație:** Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$.
$n = 1$: Conform definiției DD de ordin 1 a lui $f$ în raport cu nodurile $x_1$ și $x_2$, are loc relația:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

$n \longmapsto n + 1$: Conform definiției diferenței divizate de ordin $n + 1$ a lui $f$ în raport cu nodurile $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_{n+1}$, $x_{n+2}$, are loc relația:

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}] = \frac{f[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]}{x_{n+2} - x_1}$$

$$= \frac{1}{x_{n+2} - x_1} \left( \sum_{i=2}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} (x_i - x_j)} \right)$$



$$= \frac{1}{x_{n+2} - x_1} \left( \sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} + \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=2 \\ j\neq n+2}}^{n+2} (x_{n+2} - x_j)} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} (x_i - x_j)} - \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n+1} (x_1 - x_j)} \right)$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \left( \frac{x_i - x_1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} - \frac{x_i - x_{n+2}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} \right) \frac{f(x_i)}{x_{n+2} - x_1}$$

$$+ \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n+2}}^{n+2} (x_{n+2} - x_j)} + \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n+2} (x_1 - x_j)}$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} + \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq n+2}}^{n+2} (x_{n+2} - x_j)} + \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n+2} (x_1 - x_j)}$$

**Teorema (IV.2. formula de interpolare a lui Newton cu DD)**

*Polinomul de interpolare Lagrange de gradul n asociat funcției $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ și nodurilor de interpolare $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ este dat de formula*

$$P_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + \dots \tag{17}$$
$$+ f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}](x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \tag{18}$$
$$= f[x_1] + \sum_{i=2}^{n+1} f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j), \qquad x \in [a, b] \tag{19}$$

**Demonstrație:** Se demonstrază prin inducție după $n \geq 1$.

$n = 1$: Are loc relația:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \\ &= L_{1,1}(x) f(x_1) + L_{1,2}(x) f(x_2) = P_1(x) \end{aligned}$$



$n \longmapsto n + 1$: Au loc următoarele identități:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= f(x_1) + \sum_{i=2}^{n+2} f[x_1, \dots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \\ &= P_n(x) + f[x_1, \dots, x_{n+2}] \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k} f(x_k) + \sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+2} (x_i - x_j)} \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} (x_k - x_j)} f(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot \frac{x_k - x_{n+2}}{x - x_{n+2}} + \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot \frac{x - x_k}{x - x_{n+2}} \right) f(x_k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &+ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n+2}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_{n+2} - x_j} f(x_{n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) + \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n+2}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_{n+2} - x_j} f(x_{n+2}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+2} L_{n+1,k}(x) f(x_k) = P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Construim în continuare următorul tabel cu diferențe divizate:

| $x_i$ | DD ordin 0 | DD ordin 1 | DD ordin 2 | DD ordin 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\boxed{f[x_1] = f(x_1)}$ $\searrow$ | | | | |
| $x_2$ | $f[x_2] = f(x_2)$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{f[x_1, x_2]}$ $\searrow$ | | | |
| $x_3$ | $f[x_3] = f(x_3)$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $f[x_2, x_3]$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{f[x_1, x_2, x_3]}$ $\searrow$ | | |
| $x_4$ | $f[x_4] = f(x_3)$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $f[x_3, x_4]$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $f[x_2, x_3, x_4]$ $\rightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4]}$ $\searrow$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Fie matricea $Q$, matricea inferior triunghiulară definită astfel:

$$Q_{ij} = f[x_{i-j+1}, ..., x_i] \tag{20}$$

Se observă că elementele matricei coincid diferențelor divizate din tabel.



| $x_i$ | DD ordin 0 | DD ordin 1 | DD ordin 2 | DD ordin 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\boxed{f[x_1] = Q_{11}}$ | | | | |
| $x_2$ | $f[x_2] = Q_{21}$ | $\boxed{f[x_1, x_2] = Q_{22}}$ | | | |
| $x_3$ | $f[x_3] = Q_{31}$ | $f[x_2, x_3] = Q_{32}$ | $\boxed{f[x_1, x_2, x_3] = Q_{33}}$ | | |
| $x_4$ | $f[x_4] = Q_{41}$ | $f[x_3, x_4] = Q_{42}$ | $f[x_2, x_3, x_4] = Q_{43}$ | $\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4] = Q_{44}}$ | |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Au loc următoarele relații:

$$\begin{aligned} f[x_{i-j+1}, ..., x_i] &= \frac{f[x_{i-j+2}, ..., x_i] - f[x_{i-j+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}} \\ &= \frac{f[x_{i-(j-1)+1}, ..., x_i] - f[x_{(i-1)-(j-1)+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}} \end{aligned}$$

Obținem astfel o relație de recurență pentru componentele matricei $Q$:

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, \quad j = \overline{2, n+1}, i = \overline{j, n+1} \tag{21}$$

Prima coloană a matricei $Q$ se calculează conform formulei:

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}.$$

**Exemplu 4:** Să se afle, prin metoda Newton cu DD, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.

**Rezolvare:** Construim tabelul diferențelor divizate:

| $x_i$ | DD ordin 0 | DD ordin 1 | DD ordin 2 |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $e^{-2}$ | | |
| 0 | 1 | $1-e^{-2}$ | |
| 1 | $e^2$ | $e^2-1$ | $\frac{e^{-2}+e^2-2}{2}$ |

Pentru reprezentarea polinomului $P_2(x)$ păstrăm din tabel doar elementele de pe diagonala principală, i.e., $e^{-2}, 1-e^{-2}$ și $\frac{e^{-2}+e^2-2}{2}$. Se obține

$$P_2(x) = e^{-2} + (1-e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2}+e^2-2}{2}(x+1)x$$



**ALGORITM** (Metoda Newton cu diferențe divizate)

**Date de intrare:** $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}; (y_i)_{\overline{1,n+1}}; x;$

**Date de ieșire:** $y$;

STEP 1: `Se determină matricea` $Q$

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

STEP 2: `Determină` $P_n = Q_{11} + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{kk}(x-x_1)...(x-x_{k-1})$

STEP 3: $y = P_n$.



**Exercițiu: (IV.1.)**

*1) Să se construiască în Matlab procedura* **MetNDD** *conform sintaxei* $y =$**MetNDD**$(X, Y, x)$. *Vectorii* $X, Y$ *reprezintă nodurile de interpolare, respectiv valorile funcției* $f$ *în nodurile de interpolare;*
*2) Să se construiască în Matlab în aceeași figură, graficele funcției* $f$ *pe intervalul* $[a, b]$, *punctele* $(X_i, Y_i), i = \overline{1, n+1}$ *și polinomul* $P_n$, *fiind date* $f(x) = e^{2x}, n = 3, a = -1, b = 1$. *Nodurile de interpolare vor fi alese distribuite echidistant. Pentru construcția graficelor funcției* $f$ *și* $P_n$, *se va considera o discretizare cu* 100 *noduri.*
*3) Să se reprezinte grafic într-o altă figură eroarea* $E = f - P_n$.

**Soluție:** Vezi Program IV.1.