CURS #1

CONȚINUTUL CURSULUI #1:

I. Metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare

I.1. Metoda bisecției

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Atunci $\exists x^* \in (a, b)$, astfel încât $f(x^*) = 0$.

Metoda bisecției generează un șir de aproximări $(x_k)_{k\geq 0}$ convergent către soluția exactă x^* a ecuației $f(x) = 0$ (i.e. $lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, unde x^* verifică ecuația $f(x) = 0$).

Metoda bisecției constă în înjumătățirea la fiecare pas k a intervalului $[a, b]$ și selectarea acelui interval notat prin $[a_k, b_k]$ în care se află x^*.

Șirurile $(a_k)_{k\geq 0}$, $(b_k)_{k\geq 0}$ și $(x_k)_{k\geq 0}$ se construiesc conform schemei:

$$(a_k, b_k, x_k) = \begin{cases} a_k = a_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = x_{k-1}, & \text{dacă} \quad f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1}, b_k = x_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1}, b_k = b_{k-1}, x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}, & \text{dacă} \quad f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0, \end{cases} \quad (1)$$

unde $a_0 = a, b_0 = b, x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

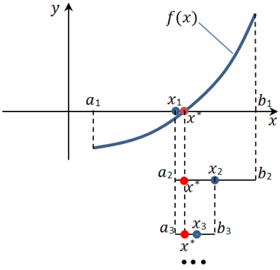

Figure: Metoda bisecției

Teorema (I.1.)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, $f(a)f(b) < 0$. Dacă f admite soluție unică $x^* \in (a, b)$ atunci șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ este convergent la x^* și

$$|x^* - x_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}, \forall k \geq 0 \quad (2)$$

Demonstrație:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2}|a_k - b_k| = \begin{cases} \frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0 \\ \frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}|, f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Constatăm că

$$\frac{1}{2}|a_{k-1} - x_{k-1}| = \frac{1}{2}|a_{k-1} - \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \quad (4)$$

Analog

$$\frac{1}{2}|x_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| \quad (5)$$

Astfel că, din (3) rezultă

$$0 \leq |x^* - x_k| \leq \frac{1}{4}|a_{k-1} - b_{k-1}| = \frac{1}{8}|a_{k-2} - b_{k-2}| = \ldots = \frac{1}{2^{k+1}}|a_0 - b_0| \quad (6)$$

sau $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}|a-b|$ de unde rezultă $lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. $\square$

Criteriul de oprire: Fiind dat $\varepsilon > 0$, se caută $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon \Leftrightarrow N > log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1 \Leftrightarrow N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1\right] + 1$;

Definiția (I.1.)

*Fie șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ convergent la x^*. Spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **cel puțin liniar** la x^*, dacă există șirul de numere reale pozitive $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ convergent la zero și $\alpha \in (0,1)$ astfel încât*

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \alpha \tag{7}$$

- Dacă relația (7) are loc pentru $\alpha = 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **superliniar**;
- Dacă relația (7) are loc pentru $\alpha \in (0,1)$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **liniar**;
- Dacă (7) are loc pentru $\alpha = 1$ și $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, atunci viteza de convergență este mai lentă decât cea liniară și spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **subliniar**.

Definiția (I.2.)

Fie șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ convergent la x^*. Spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge la x^* cu ordinul de convergență cel puțin egal cu $r > 1$, dacă există un șir $(\varepsilon_k)_{k\geq}$ de numere reale pozitive convergent la 0 și $\alpha > 0$ astfel încât

$$|x_k - x^*| \leq \varepsilon_k, \quad k \geq 0 \quad \text{și} \quad lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^r} = \alpha \tag{8}$$

Dacă (8) are loc pentru $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$, $k \geq 0$, atunci spunem că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ converge la x^* cu **ordinul r de convergență**. În particular, dacă $r = 2$ atunci spunem că $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **pătratic.**

Obs.: Datorită faptului că în cazul metodei bisecției avem estimarea $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$ putem considera $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$. Atunci

$$lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \frac{1}{2} \in (0,1), \tag{9}$$

deci convergența este **cel puțin liniară**.

ALGORITM (Metoda bisecției)

Date de intrare: f, a, b, ε;

Date de ieșire: x_{aprox};

STEP 1: $a_0 = a$; $b_0 = b$; $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;

$N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1\right] + 1$;

STEP 2: for $k = 1 : N$ do

  if $f(x_{k-1}) = 0$ then

   break

  elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then

   $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;

  elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then

   $a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;

  endif

endfor

$x_{aprox} = x_k$.

I.2.Metoda Newton-Raphson

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda N-R presupune construcția șirului $(x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice: la pasul k, aproximarea x_k a soluției exacte x^* a ecuației $f(x) = 0$ se obține prin intersecția cu axa Ox a tangentei T la graficul funcției f în punctul $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.

$$T : y = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) \tag{10}$$

$$\{x_k\} = T \cap Ox \Rightarrow f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + f(x_{k-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \tag{11}$$

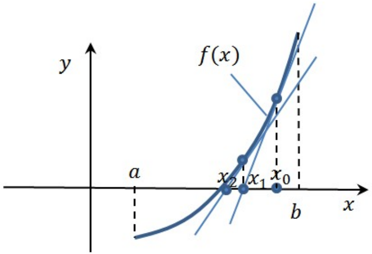

Figure: Metoda Newton

Teorema (I.2)

Presupunem că $f \in C^2([a,b]), f', f''$ nu se anulează pe $[a,b]$ și $f(a)f(b) < 0$. Fie $x_0 \in [a,b]$ astfel încât să aibă loc condiția

$$f(x_0)f''(x_0) > 0 \tag{12}$$

Atunci ecuația $f(x) = 0$ are o soluție unică $x^* \in (a,b)$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ construit prin metoda Newton-Raphson, rămâne în $[a,b]$ și converge pătratic la x^*.

Demonstrație:
EXISTENȚA: Existența soluției ecuației $f(x) = 0$ este asigurată de condiția $f(a)f(b) < 0$.
UNICITATEA: Presupunem că $\exists y^* \in (a,b)$ cu $x^* \neq y^*$ și $f(y^*) = 0$. Cum $f(x^*) = f(y^*) = 0$, atunci conform Teoremei lui Rolle rezultă că $\exists c \in (x^*, y^*)$ astfel încât $f'(c) = 0$, contradicție, deoarece am presupus cu a f' este nenulă pe intervalul $[a,b]$.

CONVERGENȚA: Fără a restrânge generalitatea vom considera f', f'' strict pozitive, i.e. $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a,b]$. Celelalte cazuri se tratează în mod analog.
Fie $x_0 \in [a,b]$ cu proprietatea (12), atunci $f(x_0) > 0 = f(x^*)$. Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$ rezultă că f este strict crescătoare, astfel că $x^* < x_0 \leq b$ sau $x_0 \in (x^*, b]$.
Presupunem în continuare $x_k \in (x^*, b]$, i.e. $x^* < x_k \leq b$. Dezvoltăm în serie Taylor funcția f în jurul punctului x_k și evaluăm funcția în punctul x^* :

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 f''(\xi_k), \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \tag{13}$$

Împărțim această relație la $f'(x_k)$, ținem cont că $f(x^*) = 0$ și $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Obținem:

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}, \quad \xi_k \in [x^*, x_k] \tag{14}$$

Din monotonia funcției f rezultă $f(x_k) > 0 = f(x^*)$. Din (11) rezultă $x_{k+1} < x_k$, iar conform formulei (14) rezultă $x_{k+1} > x*$,

deci $x^* < x_{k+1} < x_k \leq b$. Am obținut că șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ este descrescător și mărginit, deci convergent.
Fie $y^* = lim_{k\to\infty} x_k$, atunci trecând la limită în formula (11) rezultă:

$$y^* = y^* - \frac{f(y^*)}{f'(y^*)} \Rightarrow f(y^*) = 0, \tag{15}$$

deci y^* este soluție a ecuației $f(x) = 0$, iar din unicitatea soluției avem $x^* = y^*$.
Din relația (14) rezultă

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \tag{16}$$

Dacă $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$ atunci

$$lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{|f''(\xi_k)|}{|f'(x_k)|} \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} \in (0, \infty) \tag{18}$$

Rezultă că $(x_k)_{k\geq 0}$ converge **pătratic** la x^*. $\square$

Deoarece f', f'' nu se anulează pe intervalul $[a, b]$, atunci funcția trebuie să fie monotonă (crescătoare sau descrescătoare) și să nu-și schimbe concavitatea pe intervalul dat.

Strategie de lucru: Din punct de vedere computațional se alege conform graficului funcției un interval în care funcția să fie monotonă și să nu-și schimbe concavitatea. Valoarea x_0 se alege în modul următor:

1. Dacă f este convexă ($f''(x_0) > 0$), atunci $f(x_0) > 0$;
2. Dacă f este concavă ($f''(x_0) < 0$), atunci $f(x_0) < 0$.

Pentru metoda N-R ca și criteriu de oprire vom alege una din următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$;
- $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

ALGORITM (Metoda Newton-Raphson)

Date de intrare: f, f', x_0, ε;
Date de ieșire: x_{aprox};

STEP 1: $k = 0$;

STEP 2: do

$k = k + 1$;

$x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$;

while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$;

$x_{aprox} = x_k$.

Exercițiu: (I.1.)

Fie ecuația $\sqrt{x} - cosx = 0$

a. *Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa* $[x_{aprox}] =$ **MetBisectie**(f, a, b, eps).
b. *Într-un fișier script să se construiască în Matlab graficul funcției* $f(x) = \sqrt{x} - cosx$ *pe intervalul* $[0, 1]$. *Să se calculeze soluția aproximativă* x_{aprox} *cu ajutorul procedurii* **MetBisectie** *având ca date de intrare funcția* f, *intervalul* $[a, b] = [0, 1]$ *și eroarea de aproximare* $\varepsilon = 10^{-5}$.

Soluție: Vezi Program I.1.