CONȚINUTUL CURSULUI #4:

II.2. Norme vectoriale și matriciale. Numere de condiționare.
II.3. Condiționarea sistemelor.

Definiția (II.7.)

Fie $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$. Definim următoarele norme vectoriale:

1. $\| v \|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$ - *norma unu;*
2. $\| v \|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |v_i|$ - *norma infinit;*
3. $\| v \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2}$ - *norma doi.*

Definiția (II.8.)

Fiind dată o normă vectorială $\| \cdot \|$ pe spațiul $\mathbb{R}^n$, se definește norma matricială pe spațiul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonată normei vectoriale pe $\mathbb{R}^n$ astfel:

$$\| A \| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|}{\| v \|} \tag{1}$$

Teorema (II.4.)

Norma matricială subordonată normei vectoriale $\| \cdot \|_\infty$ poate fi exprimată astfel:

$$\| A \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \tag{2}$$

Demonstrație: Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și fie $\beta = \| v \|_\infty$, astfel că $|v_j| \leq \beta, j = \overline{1,n}$. Atunci

$$|(Av)_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||v_j| \leq \beta \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3}$$

Rezultă

$$\frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} = \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} |(Av)_i|}{\beta} \leq \frac{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \beta \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{\beta} = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{4}$$

Cum inegalitatea (4) are loc pentru $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci putem scrie

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \leq C, \tag{5}$$

unde $C := \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Să demonstrăm că $\sup\limits_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \geq C$

Fie m astfel încât $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{mj}|$. Considerăm vectorul $w \in \mathbb{R}^n$ construit astfel:

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{|a_{mj}|}{a_{mj}}, & a_{mj} \neq 0 \\ 0, & a_{mj} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Atunci $\| w \|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |w_i| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \frac{|a_{mi}|}{|a_{mi}|} = 1$ și

$$\begin{aligned}\| Aw \|_\infty &= \max_{i=\overline{1,n}} |(Aw)_i| = \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{mj} w_j \right| \\ &= \left| \sum_{a_{mj}\neq 0} a_{mj} w_j \right| = \left| \sum_{a_{mj}\neq 0} a_{mj} \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{mj}| = C\end{aligned}$$

sau

$$\frac{\| Aw \|_\infty}{\| w \|_\infty} \geq C \tag{7}$$

Am găsit astfel un vector $w \in \mathbb{R}^n$ care satisface inegalitatea (7), deci

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \geq C \tag{8}$$

Din relațiile (5), (8) rezultă egalitatea

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} = C. \tag{9}$$

Teorema (II.5.)

Norma matricială subordonată normei vectoriale $\| \cdot \|_1$ poate fi exprimată prin relația $\| A \|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

Definiția (II.9.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un număr complex λ se numește valoare proprie a matricei A dacă $\exists\ v \in C^n \setminus \{0\}$ astfel încât $Av = \lambda v$. Vectorul v se numește vector propriu asociat valorii λ.

O formă echivalentă a relației $Av = \lambda v$ este:

$$(A - \lambda I_n)v = 0 \tag{10}$$

Se obține astfel un sistem omogen care depinde de parametrul λ și are drept necunoscute componentele $v_1, v_2, ..., v_n$ ale vectorului v. Acest sistem admite soluție nenulă dacă și numai dacă

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \tag{11}$$

Definiția (II.10.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Polinomul de grad n, $P_n(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ se numește polinomul caracteristic al matricei A.

Rădăcinile polinomului $P_n(\lambda)$ sunt valorile proprii ale matricei A. Mulțimea valorilor proprii ale matricei A se numește spectrul matricei A și se notează cu $\sigma(A)$.

Propoziție (II.3.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\lambda_i, i = \overline{1,n}$, valorile proprii asociate matricei A.

a) *Dacă A este simetrică, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$;*
b) *Dacă A este simetrică și semipozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = \overline{1,n}$;*
c) *Dacă A este simetrică și pozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}, i = \overline{1,n}$.*

Propoziție (II.4.)

Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică. Atunci $\exists \mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_n\} \subset \mathbb{R}^n$ o bază ortonormată formată din vectori proprii ai matricei B, atașați valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Teorema (II.6.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\lambda_i^B, i = \overline{1,n}$ valorile proprii asociate matricei simetrice $B = A^T A$. Atunci

$$\| A \|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} \sqrt{\lambda_i^B} \tag{12}$$

Demonstrație: Cum $B = B^T \Rightarrow B$ este simetrică. Mai mult,

$$< Bv, v > = < A^T Av, v > = < Av, Av > = \| Av \|_2^2 \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

B este semipozitiv definită, iar conform Prop. (II.3.) b) rezultă că $\lambda_i^B \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$, unde λ_i^B reprezintă valorile proprii asociate matricei B. Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci conform Prop. (II.4.) există o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ formată din vectori proprii ai matricei B, în raport cu care v se scrie ca o combinație liniară de aceștia, i.e.

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$$

Dar $Bw_i = \lambda_i^B w_i, i = \overline{1,n}$, astfel că

$$Bv = B(\sum_{i=1}^{n} c_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i (Bw_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^B w_i.$$

Presupunem în continuare că $\lambda_n^B \geq \lambda_{n-1}^B \geq ... \geq \lambda_1^B \geq 0$, atunci

$$\begin{aligned} \| Av \|_2^2 &= < Av, Av > = < v, A^T Av > = < v, Bv > \\ &= < \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^B w_j > = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \lambda_j^B < w_i, w_j > \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \lambda_j^B \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i^B \leq \lambda_n^B \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_n^B \| v \|_2^2 \Rightarrow \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} \leq \sqrt{\lambda_n^B} \Rightarrow \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} \leq \sqrt{\lambda_n^B} \Rightarrow \| A \|_2 \leq \sqrt{\lambda_n^B}$$

Pentru a demonstra egalitatea alegem $v = w_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} &= \frac{\| Aw_n \|_2}{\| w_n \|_2} = \| Aw_n \|_2 = < Aw_n, Aw_n > = < w_n, Bw_n > \\ &= < w_n, \lambda_n^B w_n > = \lambda_n^B \geq \lambda_n^B \Rightarrow \| A \|_2 \geq \sqrt{\lambda_n^B} \end{aligned}$$

Din cele două inegalități rezultă

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_n^B} \tag{14}$$

Teorema (II.7.)

Fiind dată norma $\| \cdot \|$ subordonată normei vectoriale, atunci

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{15}$$

Demonstrație: Deoarece

$$\| A \| = \sup_{w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Aw \|}{\| w \|} \Rightarrow \frac{\| Aw \|}{\| w \|} \leq \| A \| \Rightarrow \| Aw \| \leq \| A \| \| w \|$$

Astfel că

$$\| A(Bv) \| \leq \| A \| \| Bv \| \leq \| A \| \| B \| \| v \| \Rightarrow$$

$$\frac{\| ABv \|}{\| v \|} \leq \| A \| \| B \|, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \tag{16}$$

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| ABv \|}{\| v \|} \leq \| A \| \| B \| \Rightarrow \| AB \| \leq \| A \| \| B \| \tag{17}$$

Definiția (II.11.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară. Definim numărul de condiționare al matricei A relativ la norma $\| \cdot \|_p, p \in \{1, 2, \infty\}$ numărul notat prin $\kappa_p(A)$ definit astfel:

$$\kappa_p(A) = \| A \|_p \| A^{-1} \|_p \tag{18}$$

sau la general

$$\kappa(A) = \| A \| \| A^{-1} \| \tag{19}$$

unde $\| \cdot \|$ este o normă subordonată unei norme vectoriale.

Obs.: Este evident că $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)$. Mai mult, deoarece

$$1 = \| AA^{-1} \| \leq \| A \| \| A^{-1} \| = \kappa(A) \Rightarrow \kappa(A) \geq 1. \tag{20}$$

Teorema (II.8.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nesingulară, atunci

$$\kappa_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_n^B}}{\sqrt{\lambda_1^B}} \tag{21}$$

unde $\lambda_n^B \geq \lambda_{n-1}^B \geq ... \geq \lambda_1^B > 0, \lambda_i^B, i = \overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei $B = A^T A$.

Demonstrație: Dacă $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și A nesingulară, atunci

$$0 < \| Av \|_2^2 = < Av, Av > = < B^T Bv, v >,$$

deci B este pozitiv definită, astfel că valorile proprii $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$.
Vom demonstra următorul rezultat:
Dacă $\lambda \in \sigma(A^T A)$, atunci $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-T} A^{-1})$.
Într-adevăr, fie $\lambda \in \sigma(A^T A)$, atunci λ este soluția ecuației $det(A^T A - \lambda I_n) = 0$ sau $det(A^T(I_n - \lambda A^{-T} A^{-1})A) = 0$.

Deoarece A este nesingulară (i.e. $det(A) \neq 0$) din ultima relația rezultă

$$det(I_n - \lambda A^{-T} A^{-1}) = 0$$

Mai mult, deoarece $\lambda > 0$ din relația de mai sus rezultă:

$$det(A^{-T} A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_n) = 0, \tag{22}$$

deci $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-T} A^{-1})$. Astfel că dacă $\sigma(A^T A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, atunci $\sigma((A^{-1})^T A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\} \Rightarrow$

$$\kappa_2(A) = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}} \tag{23}$$

II.3. Condiționarea sistemelor

Să considerăm o abatere a datelor de intrare atât în matricea A cât și în vectorul termenilor liberi

$$A \to A + \delta A; \quad b \to b + \delta b \tag{24}$$

Această perturbație va afecta soluția $x \to x + \delta x$, deci soluția perturbată $x + \delta x$ verifică sistemul

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b \tag{25}$$

Teorema (II.9.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nesingulară, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și fie sistemul $Ax = b$ și sistemul perturbat $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$, cu $\delta x, \delta b \in \mathbb{R}^n, \delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci soluția $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și avem următoarea estimare

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} \right) \tag{26}$$

Relația (26) ne indică faptul că eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ a soluției sistemului perturbat poate atinge valoarea însumată a erorilor relative $\frac{\| \delta A \|}{\| A \|}, \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$ amplificată cu valoarea numărului de condiționare $\kappa(A)$.
Un număr de condiționare mare presupune că la mici perturbări în datele de intrare se pot obține perturbări considerabile în soluția sistemului.

- Dacă $\kappa(A) >> 1$ atunci eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ poate fi mare. Vom spune în cazul acesta că sistemul este slab - condiționat;
- Dacă $\kappa(A) \approx 1$ atunci eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ este mică și vom spune că sistemul este bine - condiționat;

Demonstrație Th. II.8.: Din (25) rezultă:

$$Ax + A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b + \delta b$$

Cum x verifică sistemul $Ax = b$ și neglijând produsul $\delta A \delta x$ în relația de mai sus se obține

$$A\delta x + \delta A x \approx \delta b \tag{27}$$

de unde

$$\delta x \approx -A^{-1} \delta A x + A^{-1} \delta b \tag{28}$$

Utilizând norma $\| \cdot \|$ în relația de mai sus rezultă

$$\| \delta x \| \leq \| A^{-1} \| \| \delta A \| \| x \| + \| A^{-1} \| \| \delta b \| \tag{29}$$

Prin urmare, cum $x \neq 0$ se obține estimarea

$$\begin{aligned} \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} & \leq \| A^{-1} \| \| A \| \frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \| A^{-1} \| \| A \| \frac{\| \delta b \|}{\| A \| \| x \|} \\ & \leq \| A^{-1} \| \| A \| \left(\frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

În relația de mai sus s-a ținut seama că $\| b \| \leq \| A \| \| x \|$.