CURS #3

CONȚINUTUL CURSULUI #3:

II.1.5. Sisteme liniare inferior triunghiulare

Definiția (II.2.)

a) *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numește inferior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e.* $a_{ij} = 0, \forall i > j$;

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este inferior triunghiulară se numește sistem inferior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inferior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul inferior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k & (E_k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases} \tag{1}$$

Din (E_1) rezultă

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2}$$

Fie ecuația (E_k): $a_{kk}x_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din primele $k-1$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{1, k-1}$, atunci din (E_k) rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) \tag{3}$$

ALGORITM (Metoda substituției ascendente)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} b_1$;

STEP 2: `for 2 : n do`

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right);$$

`endfor`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției ascendente) procedura **SubsAsc** având sintaxa $x =$**SubsAsc**(A, b), procedură care returnează soluția x a sistemului $Ax = b$.

II.1.6. Decompunerea LU.

Definiția (II.3.)

Se numește descompunere (sau factorizarea) LU a unei matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, scrierea matricei A ca produs de două matrice, una inferior triunghiulară, notată cu L și alta superior triunghiulară, notată cu U, i.e.

$$A = LU \tag{4}$$

Teorema (II.1.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu determinanții de colț nenuli, i.e. $detA_k \neq 0, k = \overline{1,n}$, unde $A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Atunci A admite descompunere (sau factorizare) LU.

Propoziție (II.1.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice care admite descompunerea LU cu $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, $\ell_{kk} = 1$, $k = \overline{1,n}$ și $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară. Atunci descompunerea este unică.

CALCULUL MATRICILOR L, U: Fie $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice inferior triunghiulară cu $\ell_{kk} = 1, k = \overline{1,n}$ și $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice superior triunghiulară. Rezultă $\ell_{ij} = 0$ pentru $j > i$ și $u_{ij} = 0$ pentru $j < i$. Relația $A = LU$ poate fi scrisă astfel:

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & a_{kk} \cdots a_{kj} & & \\ & \vdots & & \\ & a_{ik} & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \ell_{kk} & 0 & \\ & \vdots \ddots & & \\ & \ell_{ik} \cdots \ell_{ii} & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & u_{kk} \cdots u_{kj} & & \\ & \ddots \vdots & & \\ & 0 & u_{jj} & \\ & & & \end{pmatrix} \tag{5}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane din matricea L și primele $k-1$ linii din matricea U și dorim să calculăm coloana k din L, respectiv linia k din U. Astfel, la pasul k sunt cunoscute mărimile: $\ell_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k-1}$ și $u_{ij}, i = \overline{1,k-1}, j = \overline{1,n}$.

Etapa I: Aflăm linia k a matricei U, scriind expresia componentei a_{kj}, pentru $j \geq k$,

$$a_{kj} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{ks} u_{sj} = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks} u_{sj} = \ell_{kk} u_{kj} + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks} u_{sj}$$

Ținând cont că $\ell_{kk} = 1 \Rightarrow$

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks} u_{sj}$$

Etapa II: Aflăm coloana k a matricei L, scriind expresia componentei a_{ik}, pentru $i \geq k$,

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{is} u_{sk} = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is} u_{sk} = \ell_{ik} u_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} u_{sk}$$

Deoarece componenta u_{kk} a fost calculată la Etapa I., rezultă expresia componentei ℓ_{ik},

$$\ell_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} u_{sk} \right)$$

ALGORITM (Metoda de factorizarea LU)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{1,n}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: for $j = 1 : n$ do
  $u_{1j} = a_{1j}$;
 endfor
 if $u_{11} = 0$ then
  OUTPUT('A nu admite fact. LU');
  break
 endif
 for $i = 1 : n$ do
  $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$;
 endfor
STEP 2: for $k = 2 : n$ do

```
for j = k : n do
    u_kj = a_kj - sum_{s=1}^{k-1} ℓ_ks u_sj;
enfor
if u_kk = 0 then
    OUTPUT('A nu admite fact.  LU');
    break
endif
for i = k : n do
    ℓ_ik = 1/u_kk ( a_ik - sum_{s=1}^{k-1} ℓ_is u_sk );
endfor
endfor
```

STEP 3: $y = SubsAsc(L, b)$;

STEP 4: $x = SubsDesc(U, y)$.

Exemplu 1: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$. Să se verifice dacă matricea A admite descompunerea LU. În caz afrimativ să se afle matricele L, U și să se afle soluția sistemului $Ax = b$, dacă $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ 22 \end{pmatrix}$

Rezolvare:

$\Delta_1 = 1 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ matricea A admite factorizarea LU.

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12} + u_{22} & \ell_{21}u_{13} + u_{23} \\ \ell_{31}u_{11} & \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} & \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Obținem $u_{11} = 1, u_{12} = 2, u_{13} = 4$. Mai mult:

$$\begin{aligned}
&\ell_{21}u_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 3 \\
&\ell_{21}u_{12} + u_{22} = 8 \Rightarrow u_{22} = 2 \\
&\ell_{21}u_{13} + u_{23} = 14 \Rightarrow u_{23} = 2 \\
&\ell_{31}u_{11} = 2 \Rightarrow \ell_{31} = 2 \\
&\ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} = 6 \Rightarrow \ell_{32} = 1 \\
&\ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} = 13 \Rightarrow u_{33} = 3 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Din sistemul $Ly = b$ rezultă $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, iar din sistemul $Ux = y$ rezultă soluția $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

II.1.6. Metoda Cholesky.

Definiția (II.4.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunerea Cholesky a matricei A, descompunerea de forma

$$A = LL^T \tag{6}$$

unde $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară.

Definiția (II.5.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) *A se numește simetrică dacă și numai dacă $A^T = A$;*

b) *A se numește semipozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v > \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$;*

c) *A se numește pozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v >> 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

$< \cdot, \cdot >$ reprezintă produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$ definit astfel: $< u, v > = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.

Teorema (II.2.)

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică și pozitiv definită, atunci descompunerea Cholesky există.

Propoziție (II.2.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită. Dacă componentele $\ell_{kk}, k = \overline{1,n}$ de pe diagonala principală a matricei L din descompunerea Cholesky sunt strict pozitive, atunci descompunerea este unică.

CALCULUL MATRICEI L : Relația $A = LL^T$ se va scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{kk} \cdots a_{kj} \\ \vdots \\ a_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{kk} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \ell_{ik} & \cdots & \ell_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{kk} & \cdots & \ell_{ik} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ell_{ii} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane din L, deci și primele linii $k-1$ din L^T.

ETAPA 1: Calculăm elementul ℓ_{kk} de pe diagonala principală, scriind expresia pentru a_{kk} :

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}^2 = \ell_{kk}^2 + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2$$

Cum $\ell_{kk} > 0$ va rezulta

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2} \tag{8}$$

ETAPA 2: Calculăm restul elementelor de pe coloana k, i.e. $\ell_{ik}, i > k$, scriind expresia pentru a_{ik} :

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{is}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{ks} = \ell_{ik}\ell_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks} \Rightarrow$$

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right) \tag{9}$$

ALGORITM (Metoda Cholesky)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{1,n}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $\alpha = a_{11}$;

if $\alpha \le 0$ then
  OUTPUT('A nu este pozitiv definită');
  break;
endif
$\ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$;
for $i = 2 : n$ do
  $\ell_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{\ell_{11}}$;
endfor

STEP 2: for $k = 2 : n$ do

$$\alpha = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2;$$

if $\alpha \le 0$ then
  OUTPUT('A nu este pozitiv definită');
  break;
endif
$\ell_{kk} = \sqrt{\alpha}$;
for $i = k+1 : n$ do

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right);$$

endfor
endfor

STEP 3: $y =$SubsAsc(L, b);

STEP 4: $x =$SubsDesc(L^T, y);

II.1.7. Metoda de descompunere QR.

Definiția (II.6.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunere QR a matricei A, descompunerea de forma

$$A = QR \tag{10}$$

unde $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, i.e. $Q^TQ = QQ^T = I$, iar $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară.

Teorema (II.3.)

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă. Atunci există și este unică descompunerea QR a matricei A cu $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală și $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală $r_{kk} > 0, k = \overline{1,n}$.

CALCULUL MATRICILOR Q, R : Rescriem relația $A = QR$ sub formă matricială

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & a_{kk} \cdots a_{kj} & & \\ & \vdots & & \\ & a_{ik} & & \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & q_{kk} \cdots q_{kj} & & \\ & \vdots & & \\ & q_{ik} & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & r_{kk} \cdots r_{kj} & & \\ & \ddots \vdots & & \\ & 0 \quad r_{jj} & & \\ & & & \end{pmatrix} \tag{11}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane ale matricei Q și primele $k-1$ linii ale matricei R. Astfel elementele $q_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k-1}$ și $r_{ij}, i = \overline{1,k-1}, j = \overline{i,n}$ vor fi cunoscute:

ETAPA 1: Calculăm coloana k din Q evaluând componenta $a_{ik}, i = \overline{1,n}$:

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} q_{is} r_{sk} = \sum_{s=1}^{k} q_{is} r_{sk} = q_{ik} r_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \Rightarrow$$

$$q_{ik} = \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right) \tag{12}$$

La această etapă nu avem încă calculată componenta r_{kk}.

ETAPA 2: Aflăm linia k din matricea R, (i.e. $r_{kj}, j = \overline{k+1,n}$) folosindu-ne de faptul că R este ortogonală.

$$A = QR \Rightarrow R = Q^T A \Rightarrow$$

$$r_{kj} = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}^T a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sj} \tag{13}$$

Formula de mai sus este validă datorită faptului că elementele coloanei k din matricea Q au fost calculate la ETAPA 1.

ETAPA 3: A rămas să calculăm r_{kk}. Din relația (13) avem:

$$r_{kk} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sk} = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} a_{ik},$$

iar conform (12) avem:

$$\begin{aligned} r_{kk} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right) a_{ik} \\ &= \frac{1}{r_{kk}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk} \left(\sum_{i=1}^{n} q_{si}^T a_{ik} \right) \right) \\ &= \frac{1}{r_{kk}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2 \right) \Rightarrow \end{aligned} \tag{14}$$

$$r_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2} \tag{15}$$

Obs.: Datorită faptului că A este inversabilă ($detA \neq 0$), rezultă că R este inversabilă, i.e. $r_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$, deci formulele (12) au sens.
Sistemul $Ax = b$ este echivalent cu $Rx = Q^T b$, de unde rezultă $x = $SubsDesc$(R, Q^T b)$.

ALGORITM (Metoda de descompunere QR)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{1,n}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $r_{11} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2}$;

for $i = 1 : n$ do

$q_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{r_{11}}$;

endfor

for $j = 2 : n$ do

$r_{1j} = \sum_{s=1}^{n} q_{s1} a_{sj}$;

endfor

STEP 2: for $k = 2 : n$ do

$r_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2}$;

for $i = 1 : n$ do

$q_{ik} = \dfrac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right)$;

endfor

for $j = k+1 : n$ do

$r_{kj} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sj}$;

endfor

endfor

STEP 3: $x =$SubsDesc$(R, Q^T b)$;

Exemplu 2: Să se rezolve prin metoda QR sistemul $Ax = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Conform metodei de descompunere QR avem:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{2};\\
q_{i1} &= \frac{a_{i1}}{r_{11}}, i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ q_{21} = 0,\ q_{31} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
r_{1j} &= q_{11}a_{1j} + q_{21}a_{2j} + q_{31}a_{3j},\ j = \overline{2,3} \Rightarrow r_{12} = \sqrt{2},\ r_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
r_{22} &= \sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - r_{12}^2} = \sqrt{3}\\
q_{i2} &= \frac{1}{r_{22}}(a_{i2} - q_{i1}r_{12}),\ i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q_{32} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\
r_{2j} &= q_{12}a_{1j} + q_{22}a_{2j} + q_{32}a_{3j}, j = \overline{3,3} \Rightarrow r_{23} = 0\\
r_{33} &= \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\\
q_{i3} &= \frac{1}{r_{33}}(a_{i3} - q_{i1}r_{13} - q_{i2}r_{23}),\ i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{13} = -\frac{\sqrt{6}}{6},\ q_{23} = \frac{\sqrt{6}}{3},\\
&\quad q_{33} = \frac{\sqrt{6}}{6}.
\end{aligned}$$

Astfel

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Rezultă $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$