TO:

FROM: Ecuații diferențiale – seminar – 3.10.2017

$$\boxed{f(t) = g(t),\ \forall t \in I \Leftrightarrow f(t) \equiv g(t)}$$

Ecuații afine

$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$ $\qquad a(\cdot), b(\cdot) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont.

PROP1 (Principiul var.

$A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$

At. $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ sol. $\Leftrightarrow \exists\ c(\cdot)$ primitivă $t \to e^{-A(t)} b(t)$ cu $\varphi(t) \equiv c(t) e^{A(t)}$)

Dem.: „$\Rightarrow$" $\varphi(\cdot)$ sol. $\Rightarrow \varphi(\cdot)$ derivabilă $\varphi'(t) \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)$

Fie $c(t) := \varphi(t) e^{-A(t)} \Rightarrow \varphi(t) \equiv c(t) e^{A(t)}$ $\Big| \Rightarrow (c(t) e^{A(t)})' \equiv a(t) \cdot c(t) e^{A(t)} + b(t)$

$c'(t) e^{A(t)} + c(t) e^{A(t)} a(t) \equiv a(t) c(t) e^{A(t)} + b(t)$, $\quad c'(t) \equiv b(t) e^{-A(t)}$ OK

„$\Leftarrow$" $\varphi(\cdot)$ derivabilă, evident

$\varphi'(t) \equiv (c(t) e^{A(t)})' \equiv c'(t) e^{A(t)} + c(t) e^{A(t)} \equiv e^{-A(t)} b(t) e^{A(t)} + \varphi(t) a(t)$

$\equiv a(t)\varphi(t) + b(t)$

① Să se determine funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $f'(x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

I

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3$

$(\ln f(x))' - (3x)' = 0$

$(\ln f(x) - 3x)' = 0$

$\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}$ a.î. $\ln f(x) - 3x \equiv c$

$\ln f(x) \equiv c + 3x$

$f(x) = e^{c+3x} \equiv k e^{3x}$

II

$f'(x) - 3f(x) = 0 \ \big|\ e^{-3x}$

$f'(x) e^{-3x} - 3f(x) e^{-3x} = 0$

$(f(x) e^{-3x})' = 0$

$\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) e^{-3x} \equiv k$, $f(x) \equiv k e^{3x}$

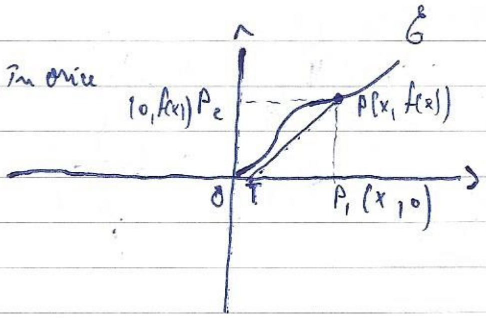
$f' = 3f$ $\qquad$ (din categ. $x' = a(t)x$, ec. liniare)

$\frac{df}{dx} = 3f$

$f(x) = c e^{3x}$

② Să se determine curbele din plan $\mathcal{C}$ care trec prin origine(1), în orice punct de pe curbă $\exists$ PT tangentă(2) în P la curbă și

(3) $Aria_\Delta(OPP_1) = Aria_\Delta(OPP_2)$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1) $f(0) = 0$

(2) $\exists\ f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$

(3) Adică $A_\Delta(OPP_1) = \int_0^x f(z)\,dz$

$A_\Delta(OPP_2) = x f(x) - \int_0^x f(z)\,dz$

$2\int_0^x f(z)\,dz = x f(x)$

Fie $g(x) = \int_0^x f(z)\,dz$

$2\int_0^x f(z)\,dz = x f(x)$ $\Rightarrow 2g(x) = x g'(x)$

$g'(x) = \frac{2}{x} g(x)$

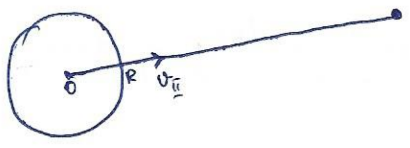
$g' = \frac{2}{x} g.$

$\frac{dg}{dx} = \frac{2}{x} g$ (ec. liniară scalară)

$g(x) = c \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} = c \cdot e^{2\ln|x|} = c \cdot x^2, \ c \in \mathbb{R}$

$f(x) = g'(x) = 2cx = k \cdot x, \ k \in \mathbb{R}$ (dreptele care trec prin origine)

③ Să se determine a doua viteză cosmică v_{II} (i.e. viteza inițială cu care trebuie plasat un corp de pe suprafața terestră a.î. să părăsească sfera de atracție a Pământului)



$F = m a$

$F = K \frac{mM}{d^2}$

$x(t)$ – distanța la momentul t f. de centrul Pământului

$x(0) = R$

$x'(0) = v_{II}$

$m \cdot x''(t) = K \frac{mM}{x^2(t)}$

$x''(t) = \frac{c}{x^2(t)}$

$x'' = \frac{c}{x^2}$

Sch. v. $y = x' \Rightarrow y' = \frac{c}{x^2}$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{c}{x^2} \end{cases}$ $\quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad f(t,(x,y)) = \begin{pmatrix} y \\ \frac{c}{x^2} \end{pmatrix}$

$z' = f(t, z)$

$x'' = \frac{c}{x^2}$

Sch. var. $y(\cdot) = ?$ a.î. $x' = y(x)$

$(x'(t) \equiv y(x(t)))$

TO:

FROM:

$x'(t) = y(x(t)) \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$x''(t) = y'((x(t)) x'(t) = y'(x(t))\, y(x(t))$

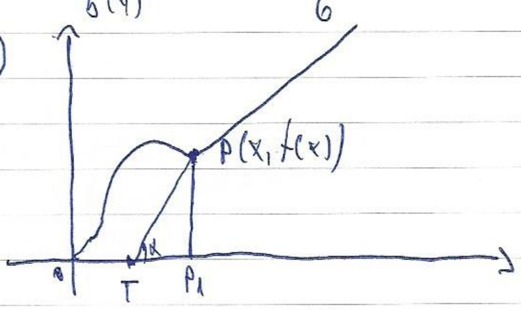
$x'' = y'(x)\, y(x)$

$y'(x)\, y(x) = \frac{c}{x^2}$

$y'(x) = \frac{c}{y(x)\, x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{\underbrace{y}_{b(y)}\underbrace{x^2}_{=a(x)}}$ (ec. cu variabile separabile)

(4)



Să se det. curbele din plan $\mathcal{C}$ cu prop. că $\forall P \in \mathcal{C}$ $\exists$ PT tangenta în P la curba $\mathcal{C}$ și $A_{\Delta}(PTP_1) = \frac{1}{2}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$

$A_{\Delta}(PTP_1) = \frac{1}{2} PP_1 \cdot TP_1 = \frac{1}{2} f(x) \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f^2(x)}{f'(x)} = 1 \Rightarrow f'(x) = f^2(x) \Leftrightarrow f' = f^2$

$tg\,\alpha = \frac{PP_1}{TP_1} = f'(x) \Rightarrow TP_1 = \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\Updownarrow$

$\frac{df}{dx} = f^2$

(ec. cu variabile separabile)

(5) $a(\cdot): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont., $x' = a(t)x$

$S_{a(\cdot)} = \{\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R};\ \varphi(\cdot) \text{ sol. a ec. } x' = a(t)x\}$

a) Să se arate că $S_{a(\cdot)} \subset C^1(I, \mathbb{R})$ subsp. vect.

b) $\dim(S_{a(\cdot)}) = ?$

c) Fie $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot) \in S_{a(\cdot)}$. Atunci $\varphi(\cdot) \in S_{a(\cdot)} \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi(t) = c(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$