Inele

Def. S.n. <u>inel</u> o mulț. nevidă R împreună cu două oper. alg. "+" și "·" care satisfac urm. proprietăți:

1) $(R,+)$ grup comutativ
2) $a(bc)=(ab)c$, $(\forall)\, a,b,c\in R$
3) înmulțirea este distributivă față de adunare (la stg. și la dr.)

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (\forall)\, a,b,c\in R$$
$$(b+c)a = ba + ca$$

Dacă, în plus
4) $ab=ba$, $(\forall)\, a,b\in R$, at. R s.n. <u>inel comutativ</u>.

Dc. R are elem. neutru în raport cu oper. de înmulțire, at. R s.n. <u>inel unitar</u>.

<u>Notații</u> Elem. neutru la adunare (resp. înmulțire) se not. cu 0 (resp. 1) și s.n. element<u>ul</u> <u>nul</u> (resp. <u>unitate</u>) al inelului.

Prop. R inel. Atunci
1) $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$, $(\forall)\, a\in R$
2) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ $\qquad (\forall)\, a,b\in R$
$(-a)(-b) = ab$
3) $(na)b = a(nb) = n(ab)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{Z}$, $(\forall)\, a,b\in R$
4) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j$, $(\forall)\, a_i, b_j\in R$

5) Dc. R este unitar și $a, b \in R$ a.î. $ab = ba$, at.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$$ (formula binomului lui Newton)

<u>Def.</u> R inel, $a \in R$. At. a s.n. <u>divizor al lui zero la stg.</u> (la dr.) dc. există $b \in R$, $b \neq 0$, a.î. $ab = 0$ (resp. $ba = 0$). Dc. a este divizor al lui zero la stg. și la dr., at. a s.n. <u>divizor al lui zero.</u>

<u>Obs.</u> Dc. $R \neq 0$, at. 0 este divizor al lui zero.

<u>Def.</u> R inel unitar, $R \neq 0$. Dc. R nu are divizori ai lui zero nenuli, at. R s.n. inel <u>integru</u>. Un inel integru și comutativ s.n. <u>domeniu de integritate</u>.

<u>Prop.</u> R inel unitar, $R \neq 0$.

R integru $\Leftrightarrow$ $(\forall) a, b \in R$, $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $b = 0$

<u>Def.</u> R inel unitar, $a \in R$. At. a s.n. <u>inversabil la stg.</u> (la dr.) dc. există $a' \in R$ a.î. $a'a = 1$ (resp. $aa' = 1$). Dc. a este inversabil la stg. și la dr., at. a s.n. <u>inversabil</u>.

<u>Notație</u> $U(R) = \{a \in R \mid a \text{ inversabil}\}$

<u>Obs.</u> 1) $a \in U(R) \Leftrightarrow (\exists) a' \in R$ a.î. $aa' = a'a = 1$.

2) $U(R)$ este grup în raport cu înmulțirea numit <u>grupul unităților</u> lui R.

3) Elementele inversabile nu sunt divizori ai lui zero.

<u>Exemple de inele</u>

1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ inele comut. integre.

$U(\mathbb{Z})=\{\pm 1\}$, $U(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

$U(\mathbb{R})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ inel comutativ <u>neunitar</u>.

3) $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ inel comut. unitar

$U(\mathbb{Z}_n)=\{\hat{a}\in\mathbb{Z}_n \mid (a,n)=1\}$.

$\mathbb{Z}_n$ inel integru $\Leftrightarrow$ n nr. prim.

4) G grup comut. $\Rightarrow$ $(End(G),+,\circ)$ inel unitar numit <u>inelul endomorfismelor</u> lui G.

$U(End(G))=Aut(G)$.

5) <u>Inele de matrice</u>

R inel (unitar), $n\in\mathbb{N}^*$. At. $(M_n(R),+,\cdot)$ este inel (unitar) şi s.n. <u>inelul matricelor pătratice de ordin n peste R</u>.

În general, $M_n(R)$ <u>nu</u> este inel comutativ şi conţine divizori ai lui zero (dc. R este unitar şi $n\geq 2$).

$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$ este divizor al lui zero la stg. şi la dr.

6) Produs direct de inele

R_1, R_2 inele, $R = R_1 \times R_2$. At. $(R, +, \cdot)$ este inel, unde

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

(i) R inel comut. $\iff R_1, R_2$ inele comut.

(ii) R inel unitar $\iff R_1, R_2$ inele unitare

(iii) $\boxed{U(R) = U(R_1) \times U(R_2)}$

(iv) Dc. R_1, R_2 sunt inele nenule, at. R nu este inel integru.

Subinele. Ideale

Def. $(R, +, \cdot)$ inel, $S \subset R$, $S \neq \emptyset$. S s.n. subinel al lui R dc. $(S, +, \cdot)$ inel. Dc. R este inel unitar și $1 \in S$, at. S s.n. subinel unitar.

Prop. R inel, $S \subset R$, $S \neq \emptyset$. At. S este subinel dc. și numai dc.

1) $(\forall)\, x, y \in S \Rightarrow x - y \in S$;

2) $(\forall)\, x, y \in S \Rightarrow xy \in S$.

Ex. 1) R inel $\Rightarrow \{0\}, R$ subinele

2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ subinel unitar

3) $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ subinel, dar nu este unitar

4) $C(R) = \{a \in R \mid ax = xa, (\forall) x \in R\} \subset R$ subinel numit centrul lui R.

Def. R inel, $I \subset R$, $I \neq \emptyset$. I s.n. <u>ideal</u> <u>stâng</u> (resp. <u>drept</u>) al lui R dc.: (3)

1) $(\forall)\, x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$;

2) $(\forall)\, a \in R$, $(\forall)\, x \in I \Rightarrow ax \in I$ (resp. $xa \in I$).

Un ideal stâng și drept al lui R s.n. <u>ideal bilateral</u>.

Not. $I \leq_s R$, $I \leq_d R$, $I \trianglelefteq R$.

Obs. 1) R inel comutativ, $I \subset R$, $I \neq \emptyset$.
I ideal stâng $\Leftrightarrow$ I ideal drept $\Leftrightarrow$ I id. bilat.
În acest caz I s.n. <u>ideal</u> al lui R.

2) I ideal $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ I subinel

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ subinel, dar nu și ideal.

Exemple 1) R inel $\Rightarrow \{0\}$, R ideale bilat.

2) Idealele lui $\mathbb{Z}$ sunt $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt $\hat{d}\mathbb{Z}_n$, $d \mid n$.

4) $R = M_2(\mathbb{Z})$, $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Rightarrow$ I ideal stâng, dar nu și ideal drept

J ideal drept, —"— stâng.

Lemă R inel, $I_\alpha \leq_s R$, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha \leq_s R$.
(Analog pt. ideale drepte, resp. bilaterale).

Def. R inel <u>unitar</u>, $X \subset R$. Notăm cu $(X)_s$ intersecția tuturor idealelor stângi care conțin pe X. Acesta este un ideal stâng și s.n. <u>idealul stâng al lui R generat de X</u>.

Analog def. $(X)_d$, resp. (X).

Obs. (1) $(X)_s \leq_s R$; (2) $X \subseteq (X)_s$; (3) $(X)_s$ este cel mai mic ideal stâng care conține pe X.

Def. X s.n. <u>sistem de generatori</u> pt. $(X)_s$.

Dc. $I \leq_s R$ cu propr. că există $X \subset I$ finită a.î. $I = (X)_s$, at. I s.n. <u>ideal finit generat</u>.

Dc. $X = \{x\}$, at. I s.n. <u>ideal principal</u>.

Prop. R inel unitar, $X \subset R$. At.

$$(X)_s = \{y \in R \mid y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in R,\ x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

În particular, $(x)_s = \{y \in R \mid y = ax, a \in R\}$ și se not. Rx.

Obs. $(x)_d = xR$, $(x) = RxR = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i \mid a_i, b_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$.

Morfisme de inele. Teorema fundam. de izomorfism

Def. R, R' inele, $f : R \to R'$ funcție. f s.n. <u>morfism de inele</u> dc.

$$\left.\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x) f(y) \end{aligned}\right\} \quad (\forall)\ x, y \in R.$$

Obs. f morfism de inele $\Rightarrow$ f morf. de grupuri

$\Rightarrow f(0)=0,\ f(-x)=-f(x), (\forall) x\in R$.

Ex. $f: R\to R'$, $f(x)=0, (\forall) x\in R$ este morfism de inele numit morfismul nul.

Def. $f: R\to R'$ morfism de inele unitare cu propr. că $f(1)=1'$ s.n. morfism unitar.

Prop. $f: R\to R'$
$g: R'\to R''$ morfisme de inele (unitare)

$\Rightarrow g\circ f: R\to R''$ morfism de inele (unitare)

Def. $f: R\to R'$ morf. de inele

f s.n. izomorfism dc. $(\exists)\ g: R'\to R$ morf. de inele a.î. $f\circ g = 1_{R'}$, $g\circ f = 1_R$.

Prop. $f: R\to R'$ morfism de inele

f izomorfism $\Leftrightarrow$ f bijectiv.

Not. $R \simeq R'$

Exemple 1) $i: \mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, $i(x)=x$ morfism unitar injectiv

2) $p: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$, $p(x)=\hat{x}$ morfism unitar surjectiv

3) $f: R\to M_n(R)$, $f(a)=aI_n$ morfism inj.

Prop. $f: R\to R'$ morf. de inele

(i) $S\subset R$ subinel $\Rightarrow$ $f(S)\subset R'$ subinel

$S' \subset R'$ subinel $\Rightarrow f^{-1}(S') \subset R$ subinel

ii) $I \leq_s R$, f surj. $\Rightarrow f(I) \leq_s R'$.

$I' \leq_s R' \Rightarrow f^{-1}(I') \leq_s R$. (Analog pt. ideale drepte, resp. bilat.)

Def. $f: R \to R'$ morf. de inele

$f(R) \overset{not.}{=} \operatorname{Im} f \subset R'$ este un subinel numit imaginea lui f.

$f^{-1}(\{0\}) \overset{not}{=} \operatorname{Ker} f \subset R$ ideal bilateral numit nucleul lui f.

Obs. f inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Teorema de corespondență pt. ideale

$f: R \to R'$ morf. surjectiv de inele.
Există o corespondență bijectivă

$$I \longmapsto f(I)$$

între mulțimea idealelor stângi (drepte, bilaterale) ale lui R care conțin pe $\operatorname{Ker} f$ și mulțimea idealelor stângi (drepte, bilaterale) ale lui R'.

Def. R inel, $I \trianglelefteq R$. Atunci $(R/I, +)$ grup comutativ. Definim pe R/I o operație algebrică numită înmulțire astfel:

$$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{ab}.$$

Astfel $(R/I, +, \cdot)$ este un inel numit inelul factor al lui R în raport cu idealul bilateral I.

Obs. 1) $p : R \to R/I$, $p(x) = \hat{x}$ este morfism surjectiv de inele şi s.n. <u>proiecţia canonică</u> a lui R pe R/I.

2) R inel unitar (resp. comutativ) $\Rightarrow R/_I$ inel unitar (resp. comut.)

3) Idealele lui $R/_I$ sunt de forma $J/_I$, J ideal al lui R, $J \supset I$.

<u>Proprietatea de universalitate a inelelor factor</u>

Fie $f : R \to R'$ morf. de inele, $I \trianglelefteq R$, $I \subseteq \operatorname{Ker} f$. At. există $\bar{f} : R/_I \to R'$ morf. de inele unic cu propriet. că $\bar{f} \circ p = f$. Mai mult,

i) $\bar{f}$ injectiv $\Longleftrightarrow I = \operatorname{Ker} f$

ii) $\bar{f}$ surjectiv $\Longleftrightarrow f$ surjectiv.

<u>Teorema fundam. de izom. pt. inele</u>

Fie $f : R \to R'$ morf. de inele. At.

$$\boxed{R/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f.}$$

<u>Corolar</u> R inel, $I, J \trianglelefteq R$, $J \subset I$. At. $I/J \trianglelefteq R/_J$ şi $\boxed{R/_I \simeq \dfrac{R/J}{I/J}}$