

Curs 10

2016-2017

Programare Logica

Cuprins

1 Sisteme de rescriere abstracte

Din cursurile trecute

- (S, Σ) semnătură și R sistem de rescriere
- pentru $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$ definim relația $t \rightarrow_R t'$ astfel:

$$\begin{aligned} t \rightarrow_R t' \quad \Leftrightarrow \quad & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\ & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & c \in T_{\Sigma}(X \cup \{z\}) \text{ context,} \\ & l \rightarrow_s r \in R \text{ cu } \text{Var}(l) = Y, \\ & \theta : Y \rightarrow T_{\Sigma}(X) \text{ substituție} \end{aligned}$$

- \rightarrow_R este relația de rescriere generată de sistemul de rescriere R .

Din cursurile trecute

- (S, Σ) semnătură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- \rightarrow_E relația de rescriere generată de R_E
- \leftrightarrow_E^* echivalența generată de \rightarrow_E

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \dot{=}_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t'$$

Sisteme de rescriere abstracte

Sisteme de rescriere abstracte

Definitie

Un **sistem de rescriere abstract** este o pereche (T, \rightarrow) unde:

- T este o mulțime,
- $\rightarrow \subseteq T \times T$ (\rightarrow este o relație binară pe T).

Sisteme de rescriere abstracte

Definitie

Un **sistem de rescriere abstract** este o pereche (T, \rightarrow) unde:

- T este o mulțime,
- $\rightarrow \subseteq T \times T$ (\rightarrow este o relație binară pe T).

Definiii:

- $\leftarrow := \rightarrow^{-1}$ (relația inversă)
- $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$ (închiderea simetrică)
- $\xrightarrow{*} := (\rightarrow)^*$ (închiderea reflexivă și tranzitivă)
- $\leftrightarrow^{*} := (\leftrightarrow)^*$ (echivalența generată)

Rescrierea termenilor

(S, Σ) semnătură și Y mulțime de variabile.

regulă de rescriere	$l \rightarrow_s r$	l, r termeni din $T_\Sigma(Y)$
sistem de rescriere (TRS)	R	mai multe $l \rightarrow_s r$
relația de rescriere	\rightarrow_R	generată de R
echivalența	$\stackrel{*}{\leftrightarrow}_R$	generată de \rightarrow_R

$(T_\Sigma(Y), R)$ este un sistem de rescriere abstract.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m, k) \mid \text{ex. } n \geq 0, \text{ ex. } k_1, \dots, k_n \in T \text{ a.i. } m \rightarrow k_1 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k\} \Rightarrow$

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m, k) \mid \text{ex. } n \geq 0, \text{ ex. } k_1, \dots, k_n \in T \text{ a.i. } m \rightarrow k_1 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k\} \Rightarrow$
- $\xrightarrow{*} = \xrightarrow{+} \cup \{(k, k) \mid k \in T\}$

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

□ $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

- $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.
- O **reducere** este un șir $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

- $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.
- O **reducere** este un șir $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$ este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

- $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.
- O **reducere** este un șir $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$ este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este **o formă normală a lui t** dacă
 - $t \xrightarrow{*} t_0$ și
 - t_0 este în formă normală.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definiție

- $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.
- O **reducere** este un șir $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$ este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este o **formă normală a lui** t dacă
 - $t \xrightarrow{*} t_0$ și
 - t_0 este în formă normală.
- t_1 și t_2 **se întâlnesc** dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$.
 - notație: $t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele.
- k este o formă normală a lui m dacă

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele.
- k este o formă normală a lui m dacă k este un factor prim al lui m .

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă $w = a^n b^k$, cu $n, k \geq 0$.

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă $w = a^n b^k$, cu $n, k \geq 0$.
- $w_1 \downarrow w_2$ dacă

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă $w = a^n b^k$, cu $n, k \geq 0$.
- $w_1 \downarrow w_2$ dacă
 - $nr_a(w_1) = nr_a(w_2)$ și
 - $nr_b(w_1) = nr_b(w_2)$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- orice rescriere se termină.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.

- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.
- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **local confluent**: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.
- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **local confluent**: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Church-Rosser**: $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definitie

(T, \rightarrow) se numește

- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.
- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **local confluent**: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Church-Rosser**: $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Normalizat**: orice element are o formă normală.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

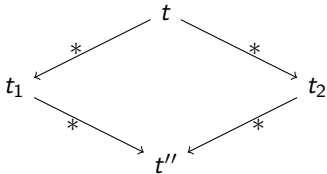
Definitie

(T, \rightarrow) se numește

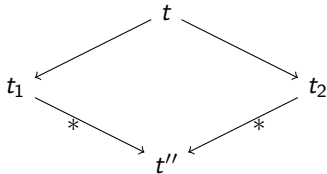
- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.
- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **local confluent**: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Church-Rosser**: $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Normalizat**: orice element are o formă normală.
- **Complet** (convergent, canonic): confluent și noetherian.

Sisteme de rescriere abstracte

Confluent:



Local confluent:



Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$

Sisteme de rescriere abstracte

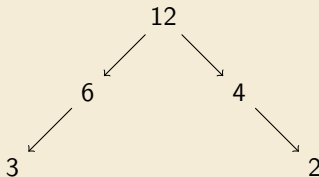
Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- (T, \rightarrow) este noetherian:
 - orice m se rescrie într-un factor prim al său.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- (T, \rightarrow) este noetherian:
 - orice m se rescrie într-un factor prim al său.
- (T, \rightarrow) nu este confluent:



Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (1)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \xrightarrow{*} t'$.

Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (1)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \xleftrightarrow{*} t'$.

Demonstrație

Dacă $t \downarrow t'$, atunci există t_0 a.î. $t \xrightarrow{*} t_0 \xleftarrow{*} t'$, i.e. $t \xleftrightarrow{*} t'$.



Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \Leftarrow

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \nLeftarrow

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow Nat, s : Nat \rightarrow Nat, + : NatNat \rightarrow Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x, x + s y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \rightarrow x, x + s y \rightarrow s(x + y), 0 + y \rightarrow y + 0\}$

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \nLeftarrow

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow Nat, s : Nat \rightarrow Nat, + : NatNat \rightarrow Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x, x + s y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \rightarrow x, x + s y \rightarrow s(x + y), 0 + y \rightarrow y + 0\}$
- orice termen are o formă normală, de forma $s(s(\dots(0)\dots))$

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \nLeftarrow

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow Nat, s : Nat \rightarrow Nat, + : NatNat \rightarrow Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x, x + s y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \rightarrow x, x + s y \rightarrow s(x + y), 0 + y \rightarrow y + 0\}$
- orice termen are o formă normală, de forma $s(s(\dots(0)\dots))$
- R_E nu este noetherian: $0 + 0 \rightarrow_E 0 + 0 \rightarrow_E \dots$

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \nLeftarrow

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow Nat, s : Nat \rightarrow Nat, + : NatNat \rightarrow Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x, x + s y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \rightarrow x, x + s y \rightarrow s(x + y), 0 + y \rightarrow y + 0\}$
- orice termen are o formă normală, de forma $s(s(\dots(0)\dots))$
- R_E nu este noetherian: $0 + 0 \rightarrow_E 0 + 0 \rightarrow_E \dots$
- eliminând ultima regulă de rescriere, obținem un sistem de rescriere noetherian

Proprietăți

Propoziție (3)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

complet \Rightarrow orice element t are o unică formă normală $fn(t)$

Proprietăți

Propoziție (3)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

complet \Rightarrow orice element t are o unică formă normală $fn(t)$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, t are o formă normală, i.e.

$t \xrightarrow{*} t'$ și t' este în formă normală.

- Presupunem că t mai are o altă formă normală t'' .

- Cum $t \xrightarrow{*} t''$ și $t \xrightarrow{*} t'$, din confluență avem

$t' \downarrow t''$.

- Cum t' și t'' sunt în formă normală, putem obține doar $t' = t''$.

□

Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (4)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Leftrightarrow Church-Rosser

Proprietăți (goto 25)

Propoziție (4)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Leftrightarrow Church-Rosser

Demonstrație

(\Leftarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$.
- Atunci avem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$.
- Cum (T, \rightarrow) este Church-Rosser, obținem că $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci (T, \rightarrow) este confluent.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

□ Presupunem $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

- $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

- $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.

- $n \rightarrow n + 1$: Pres. $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$.

Din ip. de inducție știm $t'_1 \downarrow t'_n$. Atunci ex. w a.î. $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$.

Avem două cazuri:

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

- $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.

- $n \rightarrow n + 1$: Pres. $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$.

Din ip. de inducție știm $t'_1 \downarrow t'_n$. Atunci ex. w a.î. $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$.

Avem două cazuri:

- $t'_{n+1} \rightarrow t'_n$: evident $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$, deci $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

- $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.

- $n \rightarrow n + 1$: Pres. $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$.

Din ip. de inducție știm $t'_1 \downarrow t'_n$. Atunci ex. w a.î. $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$.

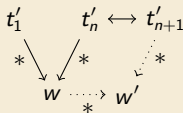
Avem două cazuri:

- $t'_{n+1} \rightarrow t'_n$: evident $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$, deci $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- $t'_n \rightarrow t'_{n+1}$: Cum $w \xleftarrow{*} t'_n \rightarrow t'_{n+1}$ și (T, \rightarrow) este confluent, obținem $w \downarrow t'_{n+1}$. Deci există w' a.î. $w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$.

Deci $t'_1 \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$, adică $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- În concluzie, $t_1 \downarrow t_2$.



□

Proprietăți

Propoziție (5)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent

Proprietăți

Propoziție (5)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent
 \nLeftarrow

Proprietăți

Propoziție (5)

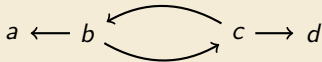
Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent
 \nLeftarrow

Exemplu

□ $T = \{a, b, c, d\}$

□ \rightarrow :



Proprietăți

Propoziție (5)

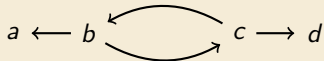
Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent
 \nLeftarrow

Exemplu

□ $T = \{a, b, c, d\}$

□ \rightarrow :



□ T este local confluent:

□ $a \leftarrow b \rightarrow c$ și $a \downarrow c$ (în a)

□ $b \leftarrow c \rightarrow d$ și $b \downarrow d$ (în d)

Proprietăți

Propoziție (5)

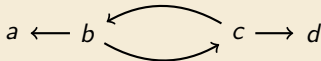
Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent
 \nLeftarrow

Exemplu

□ $T = \{a, b, c, d\}$

□ \rightarrow :



□ T este local confluent:

□ $a \leftarrow b \rightarrow c$ și $a \downarrow c$ (în a)

□ $b \leftarrow c \rightarrow d$ și $b \downarrow d$ (în d)

□ T nu este confluent:

□ $a \xleftarrow{*} b \xrightarrow{*} d$, dar $a \not\downarrow d$

□ $a \xleftarrow{*} c \xrightarrow{*} d$, dar $a \not\downarrow d$

Proprietăți

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

Proprietăți

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, știm că orice element are o formă normală.

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.

Proprietăți

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.
- Fie M mulțimea elementelor care au cel puțin două forme normale diferite:

$$M = \{t \mid n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2, n_1, n_2 \text{ în formă normală} \}.$$

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(*) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(*) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

□ Fie $t \in M$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(*) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

□ Fie $t \in M$.

□ Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

- Demonstrăm următoarea proprietate:

(*) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

- Fie $t \in M$.
- Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$.
- Pres. $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$:
 - Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow n_2$.
 - Cum n_1 și n_2 în formă normală, obținem $n_1 = n_2$ (contradicție).

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(*) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

□ Fie $t \in M$.

□ Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$.

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$:

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow n_2$.

■ Cum n_1 și n_2 în formă normală, obținem $n_1 = n_2$ (contradicție).

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \xrightarrow{*} n_2$:

■ Atunci există t_2 a.î. $n_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$.

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow t_2$.

■ Cum n_1 în formă normală, obținem $t_2 \xrightarrow{*} n_1$.

■ Deci $t_2 \in M$ și $t \rightarrow t_2$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(\star) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

□ Fie $t \in M$.

□ Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$.

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$:

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow n_2$.

■ Cum n_1 și n_2 în formă normală, obținem $n_1 = n_2$ (contradicție).

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \xrightarrow{*} n_2$:

■ Atunci există t_2 a.î. $n_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$.

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow t_2$.

■ Cum n_1 în formă normală, obținem $t_2 \xrightarrow{*} n_1$.

■ Deci $t_2 \in M$ și $t \rightarrow t_2$.

□ Pres. $n_1 \xleftarrow{*} t \rightarrow n_2$:

■ Atunci există t_1 a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$.

■ Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow n_2$ și, mai departe, $t_1 \xrightarrow{*} n_2$.

■ Deci $t_1 \in M$ și $t \rightarrow t_1$.

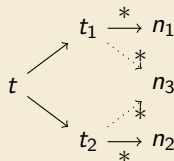
Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ (★) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

Pres. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2$:

- Atunci există t_1, t_2 a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$.
- Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci ex. n_3 în formă normală a.î. $t_1 \xrightarrow{*} n_3$ și $t_2 \xrightarrow{*} n_3$.
- Deoarece $n_1 \neq n_2$, deducem că $n_3 \neq n_1$ sau $n_3 \neq n_2$.
- Dacă $n_3 \neq n_1$, atunci $t_1 \in M$ și $t \rightarrow t_1$.
- Dacă $n_3 \neq n_2$, atunci $t_2 \in M$ și $t \rightarrow t_2$.



Demonstrație (cont.)

- Arătăm unicitatea formei normale, i.e. $M = \emptyset$.
 - Pres. prin absurd că $M \neq \emptyset$. Atunci există $t_1 \in M$.
 - Din (\star) , ex. $t_2 \in M$ a.î. $t_1 \rightarrow t_2$.
 - Prin inducție, obținem un șir $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de elemente din M a.î.

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow \dots$$

ceea ce contrazice faptul că (T, \rightarrow) este noetherian.

- Pres. $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$. Cum t are o unică formă normală n , obținem $t_1 \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t_2$. Deci $t_1 \downarrow t_2$.
- În concluzie, (T, \rightarrow) este confluent.



Proprietăți

Propoziție (7)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere complet.

$$t \xrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

Proprietăți

Propoziție (7)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere complet.

$$t \xrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

Demonstrație

(\Leftarrow)

- Dacă $fn(t) = fn(t')$, atunci evident $t \downarrow t'$.
- Aplicăm Propoziția (1) și obținem $t \xrightarrow{*} t'$.

Proprietăți

Propoziție (7)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere complet.

$$t \xleftrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

Demonstrație

(\Leftarrow)

- Dacă $fn(t) = fn(t')$, atunci evident $t \downarrow t'$.
- Aplicăm Propoziția (1) și obținem $t \xleftrightarrow{*} t'$.

(\Rightarrow)

- Cum (T, \rightarrow) este complet, este confluent și or. element are o unică formă normală. Din Propoziția (4), este Church-Rosser.
- Deoarece $t \xleftrightarrow{*} t'$, obținem că $t \downarrow t'$, i.e. există w a.î. $t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'$.
- Fie n unica formă normală a lui w .
- În concluzie, $t \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t'$, deci $fn(t) = fn(t')$.



Deducția ecuațională și rescriere

- (S, Σ) semnătură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- \rightarrow_E relația de rescriere generată de R_E
- \leftrightarrow_E^* echivalența generată de \rightarrow_E

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t'$$

Corolar (8)

Dacă sistemul de rescriere $(T_{\Sigma}(X), R_E)$ este *complet*, atunci:

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t' \quad \Leftrightarrow \quad fn(t) = fn(t')$$

Concluzii

Dacă E este o mulțime de ecuații a.î.
 R_E este un **sistem de rescriere complet**,
atunci **deducția ecuațională** $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ este decidabilă:

Concluzii

Dacă E este o mulțime de ecuații a.î.
 R_E este un **sistem de rescriere complet**,
atunci **deducția ecuațională** $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t'$ este decidabilă:

Algoritm:

1. $t \xrightarrow{*}_E fn(t)$
2. $t' \xrightarrow{*}_E fn(t')$
3. $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
 - echivalentă cu oprirea mașinilor Turing
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
 - diverse metode
- Pentru sisteme de rescriere care se termină, **confluența este decidabilă**.
 - algoritmul Knuth-Bendix



Pe săptămâna viitoare!