

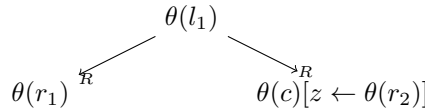
PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 5
- RESCRIERI -

Teorie:

- O regulă de rescriere $l \rightarrow_s r$ este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ astfel încât l nu este variabilă și $Var(r) \subseteq Var(l)$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.
- Dacă R este un sistem de rescriere, pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relația $t \rightarrow_R t'$ astfel:

$$t \rightarrow_R t' \Leftrightarrow \begin{array}{l} t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\ t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context,} \\ l \rightarrow_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\ \theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X) \text{ substituție} \end{array}$$

- Un termen t este *reductibil* dacă există un termen t' a.î. $t \rightarrow t'$.
- Un termen t este *în formă normală* (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este o *formă normală* a lui t dacă $t \xrightarrow{*} t_0$ și t_0 este în formă normală.
- t_1 și t_2 *se întâlnesc* ($t_1 \downarrow t_2$) dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$.
- Un sistem de rescriere se numește
 - *noetherian*: dacă nu există reduceri infinite $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - *confluent*: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
 - *complet* (convergent, canonic): confluent și noetherian.
- Fie $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R$ astfel încât:
 - (1) $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
 - (2) există t un subtermen al lui l_1 care nu este variabilă ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
 - (3) există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).
 Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numește *pereche critică*.



Teoremă 1 (Teorema Perechilor Critice *). *Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:*

- (1) R este confluent,
- (2) $t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2) .

Algoritmul Knuth-Bendix.

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: $T := R$ și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
 - (1) $CP := CP(T) = \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2) \text{ pereche critică în } T\}$
 - (2) Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP (T completarea lui R).
 - (3) Dacă $(t_1, t_2) \in CP, t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
 - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci $T := T \cup \{fn(t_1) \rightarrow fn(t_2)\}$,
 - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci $T := T \cup \{fn(t_2) \rightarrow fn(t_1)\}$,
 - altfel, STOP (*completare eșuată*).
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Exercițiul 1: Fie (S, Σ) o semnătură, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow s, g : s \rightarrow s, f : s \rightarrow s\}$. Folosind sistemul de rescriere

$$R = \{f(g(x)) \rightarrow g(x), g(f(x)) \rightarrow g(x)\},$$

rescrieți termenii $t_1 = f(f(g(f(g(0)))))$ și $t_2 = f(f(0))$ până la o formă normală. Caracterizați formele normale ale sistemului R .

Rezolvare: Forma normală a lui t_1 este $g(g(0))$, deoarece

$$t_1 = f(f(g(f(g(0)))) \rightarrow_R f(f(g(g(0)))) \rightarrow_R f(g(g(0))) \rightarrow_R g(g(0)),$$

iar t_2 este în formă normală. Formele normale pentru sistemul R sunt $f(\dots(f(0))\dots)$, $g(\dots(g(0))\dots)$ și 0 .

Exercițiul 2: Fie (S, Σ) o semnătură, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{g : s \rightarrow s, f : s \rightarrow s\}$. Cercetați dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluent:

$$R = \{f(f(x)) \rightarrow g(x)\}.$$

Rezolvare: Determinăm perechile critice ale sistemului R . Redenumind variabilele, considerăm $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R$ ca fiind $f(f(x)) \rightarrow g(x)$ și $f(f(y)) \rightarrow g(y)$, respectiv. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(x)$ și $f(f(x))$. Investigăm fiecare caz:

- $t := f(x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(z)$. Mai mult, $\theta(x) = f(y)$ este c.g.u. pentru t și l_2 . Obținem perechea critică $P_1 = (g(f(y)), f(g(y)))$.
- $t := f(f(x))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t și l_2 . Obținem perechea critică $P_1 = (g(y), g(y))$.

Evident $g(y) \downarrow g(y)$, dar $g(f(y)) \not\downarrow f(g(y))$ deoarece $g(f(y))$ și $f(g(y))$ sunt deja în formă normală. Deoarece R este noetherian, din Teorema Perechilor Critice obținem că R nu este confluent.

Exercițiul 3: Fie (S, Σ) o semnătură, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{a : \rightarrow s, b : \rightarrow s, c : \rightarrow s, g : s \rightarrow s, f : s s \rightarrow s\}$. Găsiți perechile critice pentru sistemul de rescriere:

$$R = \{f(x, x) \rightarrow a, f(x, g(x)) \rightarrow b, c \rightarrow g(c)\}.$$

Rezolvare: Printre cazurile posibile, se numără:

- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = f(x, x) \rightarrow a$ și $l_2 \rightarrow r_2 = f(y, y) \rightarrow a$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = f(x, x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t și l_2 . Obținem perechea critică (a, a) .
- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = f(x, x) \rightarrow a$ și $l_2 \rightarrow r_2 = f(y, g(y)) \rightarrow b$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = f(x, x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t și l_2 .
- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = f(x, x) \rightarrow a$ și $l_2 \rightarrow r_2 = c \rightarrow g(c)$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = f(x, x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t și l_2 .
- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = f(x, g(x)) \rightarrow b$ și $l_2 \rightarrow r_2 = f(y, g(y)) \rightarrow b$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = g(x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t și l_2 .
 - $t = f(x, g(x))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t și l_2 . Obținem perechea critică (b, b) .
- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = f(x, g(x)) \rightarrow b$ și $l_2 \rightarrow r_2 = c \rightarrow g(c)$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = g(x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t și l_2 .
 - $t = f(x, g(x))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t și l_2 .
- **Cazul $l_1 \rightarrow r_1 = c \rightarrow g(c)$ și $l_2 \rightarrow r_2 = c \rightarrow g(c)$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
 - $t = c$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, orice substituție este c.g.u. pentru t și l_2 . Obținem perechea critică $(g(c), g(c))$.

În concluzie, perechile critice pentru R sunt (a, a) , (b, b) și $(g(c), g(c))$.

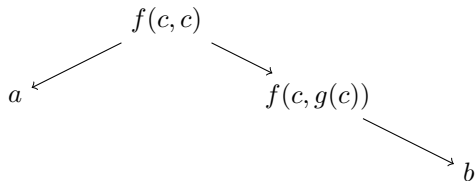
Exercițiul 4: Fie (S, Σ) o semnătură, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{a : \rightarrow s, b : \rightarrow s, c : \rightarrow s, g : s \rightarrow s, f : s \ s \rightarrow s\}$. Cercetați dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluente:

$$R = \{f(x, x) \rightarrow a, \quad f(x, g(x)) \rightarrow b, \quad c \rightarrow g(c)\}.$$

Rezolvare: Se observă că R nu se termină:

$$c \rightarrow_R g(c) \rightarrow_R g(g(c)) \rightarrow_R \dots$$

În concluzie nu putem aplica Teorema perechilor critice pentru a stabili confluentea. Se observă că:



Cum $a \not\rightarrow b$, sistemul R nu este confluente.