1.1.1.1 Ecuația unui hiperplan

Reamintim că ecuația unui hiperplan $\mathcal{H}$ ce trece printr-un punct $\mathbf{x}_0$ şi este normal pe un vector unitar **u** se poate scrie sub forma

$$(\mathbf{u}, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$$

cu produsul scalar uzual.

Ecuația dreptei Δ ce trece printr-un punct $\mathbf{z}_0$ şi este ortogonală pe hiperplanul $\mathcal{H}$ de ecuație se scrie

$$\mathbf{x} - \mathbf{z}_0 = t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

adică

$$\mathbf{x} = \mathbf{z}_0 + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru a găsi intersecția lui $\mathcal{H}$ cu Δ înlocuim ecuația dreptei în ecuația hiperplanului. Obținem

$$\mathbf{u}^T(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{u} - \mathbf{x}_0) = 0,$$

şi deci

$$t\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0),$$

de unde, ținând cont că $\|\mathbf{u}\| = 1$, găsim

$$t = \frac{\mathbf{u}^T(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0)}{\|\mathbf{u}\|^2} = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0).$$

Punctul de intersecție al dreptei cu hiperplanul $\mathcal{H}$ va fi aşadar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{z}_0 + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0)\mathbf{u}.$$

Distanța de la punctul $\mathbf{z}_0$ la hiperplan este deci

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}, \mathbf{z}_0) &= \|\mathbf{x}' - \mathbf{z}_0\| \\ &= |\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0)| \cdot \|\mathbf{u}\|. \\ &= |\mathbf{u}'(\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0)| \end{aligned}$$

Distanța de la originea spațiului la hiperplan se obține punând în relația de mai sus $\mathbf{z}_0 = 0$ şi deci

$$D = d(\mathcal{H}, 0) = |\mathbf{u}'\mathbf{x}_0|.$$