PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 2
- DEDUCŢII ECUAŢIONALE -

Teorie:

- Deducţia ecuaţională - cazul necondiţionat:

R $\dfrac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$ S $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$ T $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$

CΣ $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')}$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

Sub$_E$ $\dfrac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$, $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ şi $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$

- Ecuaţia $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce din E dacă ex. o secvenţă $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ şi pt. or. $1 \leq i \leq n$:
  - $\epsilon_i \in E$ sau
  - ϵ_i se obţine din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

Exerciţiul 1:
Fie signatura (S, Σ), $S = \{elt\}$ şi $\Sigma = \{* : elt\ elt \to elt\}$, şi $E = \{e_1, e_2\}$, unde

- e_1: $(\forall\{x\})x * x \doteq x$,
- e_2: $(\forall\{x, y\})x * y \doteq y * x$.

Arătaţi că $E \vdash (\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \doteq y * x$, indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită.

Rezolvare:

1.	$(\forall\{x, y\})(x * y) * (x * y) \doteq x * y$	(Sub$_E$ pt. e_1 şi $\theta(x) = x * y$)
2.	$(\forall\{x, y\})x * y \doteq y * x$	(e_2)
3.	$(\forall\{x, y\})x * y \doteq x * y$	(R)
4.	$(\forall\{x, y\})(x * y) * (x * y) \doteq (x * y) * (y * x)$	(CΣ pt. 3, 2 şi $*$)
5.	$(\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \doteq (x * y) * (x * y)$	(S 4)
6.	$(\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \doteq x * y$	(T pt. 5 şi 1)
7.	$(\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \doteq y * x$	(T pt. 6 şi 2)

Exerciţiul 2: Fie signatura (S, Σ), $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{1 :\to s, * : s\ s \to s, ^{-1} : s \to s\}$, şi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde

- e_1: $(\forall\{x\})1 * x \doteq x$,
- e_2: $(\forall\{x\})x * (x^{-1}) \doteq 1$,
- e_3: $(\forall\{x, y, z\})x * (y * z) \doteq (x * y) * z$.

Arătaţi că $E \vdash (\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \doteq b$, indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită.

Rezolvare:

1.	$(\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \doteq (a * (a^{-1})) * b$	(Sub$_E$ pt. e_3 şi $\theta(x) = a, \theta(y) = a^{-1}, \theta(z) = b$)
2.	$(\forall\{a, b\})a * (a^{-1}) \doteq 1$	(Sub$_E$ pt. e_2 şi $\theta(x) = a$)
3.	$(\forall\{a, b\})b \doteq b$	(R)
4.	$(\forall\{a, b\})(a * (a^{-1})) * b \doteq 1 * b$	(CΣ pt. 2, 3 şi $*$)
5.	$(\forall\{a, b\})1 * b \doteq b$	(Sub$_E$ pt. e_1 şi $\theta(x) = b$
6.	$(\forall\{a, b\})(a * (a^{-1})) * b \doteq b$	(T pt. 4 şi 5)
7.	$(\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \doteq b$	(T pt. 1şi 6)

Exerciţiul 3: Fie signatura (S, Σ), $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{\circ : s\ s \to s\}$, şi $E = \{e_1, e_2\}$, unde

- e_1: $(\forall\{x, y, z\})x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z$,
- e_2: $(\forall\{x, y\})y \circ (x \circ y) \doteq y$.

Arătaţi că $E \vdash (\forall\{x\})x \circ x \doteq x$, indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită.

Rezolvare:

1.	$(\forall\{x\})x \circ ((x \circ x) \circ x) \doteq x$	(Sub$_E$ pt. e_2 şi $\theta(x) = x \circ x, \theta(y) = x$)
2.	$(\forall\{x\})x \circ ((x \circ x) \circ x) \doteq (x \circ (x \circ x)) \circ x$	(Sub$_E$ pt. e_1 şi $\theta(x) = x, \theta(y) = x \circ x, \theta(z) = x$)
3.	$(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x \circ ((x \circ x) \circ x)$	(S 2)
4.	$(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x$	(T pt. 3 şi 1)
5.	$(\forall\{x\})x \circ (x \circ x) \doteq x$	(Sub$_E$ pt. e_2 şi $\theta(x) = x, \theta(y) = x$)
6.	$(\forall\{x\})x \doteq x$	(R)
7.	$(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x \circ x$	(CΣ pt. 5,6 şi $\circ$)
8.	$(\forall\{x\})x \circ x \doteq (x \circ (x \circ x)) \circ x$	(S 7)
9.	$(\forall\{x\})x \circ x \doteq x$	(T pt. 8 şi 4)

R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

Exerciţiul 4: Fie signatura (S, Σ), $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{0 :\to s, + : s\ s \to s, - : s \to s\}$, şi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde

- e_1: $(\forall\{x, y, z\})x + (y + z) \doteq (x + y) + z$,
- e_2: $(\forall\{x\})0 + x \doteq x$,
- e_3: $(\forall\{x\})(-x) + x \doteq 0$.

Arătaţi că

(1) $E \vdash (\forall\{x\})x + (-x) \doteq 0$,

(2) $E \vdash (\forall\{x\})x + 0 \doteq x$,

indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită.