Determinanți

Fie R inel comutativ unitar, $n \geq 1$ și $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$.

Def. $\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$.

Exemple $n=1$ $\det A = a_{11}$

$n=2$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Dc. B este o matrice superior triunghiulară, adică $b_{ij} = 0$ pt. $j < i$, at. $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} \neq 0$ $\Leftrightarrow \sigma(i) \geq i$, $(\forall)\ i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \sigma =$ permut. identică.

În concluzie, $\det B = b_{11} \cdots b_{nn}$.

(Analog pt. matrice inf. triunghiulare, resp. diagonale.)

Proprietăți ale determinanților

a) $\det A = \det {}^tA$.

b) Dc. matricea A are o linie nulă, at.
$$\det A = 0.$$

c) Dc. înmulțim o linie a matricei A cu $a \in R$, at. det. matricei obț. va fi $a \cdot \det A$.

d) Determinantul unei matrice care are două linii proporționale este nul.

e) Dc. permutăm două linii ale matricei A determinantul își schimbă semnul.

f) Dc. o linie a lui A este de forma $(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n)$, at. $\det A = \det B + \det C$, unde B și C se obțin din matricea

A înlocuind linia resp. cu $(b_1, \dots, b_n)$, resp. $(c_1, \dots, c_n)$. ②

g) $\det A$ nu se schimbă dacă la o linie a matricei A adunăm altă linie înmulțită cu un elem. $a \in R$.

<u>Obs.</u> Proprietățile h) – g) au loc și pt. coloane.

<u>Corolar</u>

Dc. una dintre liniile (resp. coloanele) unei matrice A este comb. liniară de celelalte linii (resp. coloane), at. $\underline{\det A = 0}$.

În particular, dacă $R = K$ corp, at. $\det A \neq 0 \Rightarrow$ liniile lui A (resp. coloanele lui A) sunt liniar indep./K, deci formează o bază în K^n.

<u>Obs.</u> $\varphi: R \longrightarrow S$ morf. de inele

$A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$ și $\varphi(A) \in M_n(S)$, $\varphi(A) = (\varphi(a_{ij}))$. At. $\det \varphi(A) = \varphi(\det A)$.

<u>Aplicație</u> (determinantul Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j),$$

unde $a_i \in R$, $i = \overline{1, n}$.

Dezvoltări ale determinanților

R inel comut. unitar, $n \geq 1$, $A \in M_n(R)$ și $1 \leq m \leq n$. Un <u>minor</u> de ordin m (<u>m-minor</u>) al matricii A este determinantul unei submatrice a lui A de forma

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{pmatrix}.$$

Mai precis, m-minorul definit de liniile $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ și coloanele $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$ este

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{vmatrix}.$$

Definim <u>minorul complementar</u> al lui M ca fiind $(n-m)$-minorul $\overline{M}$ obținut prin tăierea liniilor $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ și coloanelor $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$ din matricea A.

<u>Obs.</u> M este la rândul său minorul complementar al lui $\overline{M}$.

Definim <u>complementul algebric</u> al lui M, notat M', ca fiind $(-1)^r \overline{M}$, unde $r = i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m$.

Obs. Complementul algebric al lui $\overline{M}$ este

$(-1)^R M$.

Complementul algebric al unui 1-minor a_{ij} se mai numește și <u>complementul algebric al elem. a_{ij}</u> și este $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$, unde D_{ij} este determinantul matricei obț. din A prin tăierea liniei i și coloanei j.

<u>Teoremă (Laplace)</u>

$A \in M_n(\mathbb{R})$ și fixăm liniile $1 \le k_1 < \dots \le k_m \le n$. Fie Γ mulțimea m-minorilor lui A cu elemente din liniile fixate. At.

$$\boxed{\det A = \sum_{M \in \Gamma} M \cdot M'}.$$

<u>Exemplu</u> Dezvoltăm determinantul de mai jos după primele două linii

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

<u>Obs.</u> Pt. $m=1$ obținem

$$\boxed{\det A = a_{k1} A_{k1} + \dots + a_{kn} A_{kn}},$$

relație numită <u>dezv. determinantului după linia k.</u>

Avem chiar mai mult:

$$\boxed{a_{k1}A_{l1} + \dots + a_{kn}A_{ln} = \delta_{kl}\det A},$$

unde $1 \le k, l \le n$ iar δ_{kl} este simbolul lui Kronecker, $\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \ne l. \end{cases}$

În particular, rezultă că

$$\circledast \quad \boxed{A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) I_n},$$

unde A^* este adjuncta clasică a lui A, $A^* = (A_{ij})$.

<u>Dem. teoremei lui Laplace</u>

Fie M un m-minor și M' complementul său algebric. Scriem $M = M_1 + \dots + M_{m!}$ și $M' = M_1' + \dots + M'_{(n-m)!}$ folosind definiția determinantului. Atunci $MM' = \sum_{i=1}^{m!}\sum_{j=1}^{(n-m)!} M_i M_j'$.

<u>Lema</u> Produsele $M_i M_j'$ sunt termeni în dezvoltarea lui $\det A$.

<u>Dem.</u> Să presup. că M este m-minorul format din primele m linii și m coloane ale matricei A. Atunci $M' = (-1)^{m(m+1)}\overline{M} = \overline{M}$.

Fie $(-1)^{\alpha} a_{1t_1} \dots a_{mt_m}$ un termen din dezv. lui M, resp. $(-1)^{\beta} a_{m+1\,t_{m+1}} \dots a_{nt_n}$ un termen din dezv. lui M', unde α este nr. de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$, iar β este nr. de inversiuni ale permutării $\begin{pmatrix} m+1 & \dots & n \\ t_{m+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$.

Produsul celor doi termeni apare cu semnul $(-1)^{\alpha+\beta}$, iar pe de altă parte se obs.

că permutarea

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} & \dots & t_n \end{array}\right)$$

are $\alpha+\beta$ inversiuni, deoarece $t_1, \dots, t_m \in \{1, \dots, m\}$ și $t_{m+1}, \dots, t_n \in \{m+1, \dots, n\}$.

În cazul general, în care m-minorul M este definit de liniile $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$ și coloanele $1 \leq l_1 < \dots < l_m \leq n$ procedăm astfel: prin $k_1 - 1$ permutări de linii vecine aducem linia k_1 pe prima linie, apoi prin $k_2 - 2$ permutări de linii vecine aducem linia k_2 pe a doua linie, etc. La fel și pe coloane și am adus astfel minorul M în colțul stânga-sus al matricei prin $\underline{k_1 + \dots + k_m - (1 + \dots + m)}$ permutări de linii vecine, respectiv $\underline{l_1 + \dots + l_m - (1 + \dots + m)}$ permutări de coloane vecine.

Ordinea liniilor și coloanelor ~~din~~ M și M' se păstrează, iar $\det A$ se înmulțește cu $(-1)^s$, $s = k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_m$.

Cum $M' = (-1)^s \overline{M}$, suntem în cazul analizat anterior. //

Din această lemă rezultă imediat dem. teoremei lui Laplace: obs. că dc. M și N sunt doi m-minori distincți cu elemente din liniile fixate $k_1, \dots, k_m$, at. dezvoltările lui MM' și NN' nu au termeni comuni, deoarece M și N au cel puțin o coloană diferită. Deci, conform lemei, în suma

$$\sum_{M \in T'} M \cdot M'$$

se găsesc $C_n^m \, m!(n-m)! = n!$ termeni din dezvoltarea lui $\det A$, deci toți. //

<u>Teoremă</u> $A, B \in M_n(R)$. Atunci

$$\boxed{\det AB = \det A \cdot \det B}$$

<u>Dem.</u> Fie $C = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline -I_n & B \end{array}\right) \in M_{2n}(R)$. Dezvoltăm $\det C$ cu regula lui Laplace după primele n linii și obț. $\det C = \det A \cdot \det B$.
Mai putem calcula $\det C$ în felul următor: facem O_n în locul lui B prin înmulțiri adecvate ale coloanelor $1, 2, \dots, n$. Asta înseamnă că pt. a anula coloana k a lui B adunăm la coloana $n+k$ a lui C coloanele $1, 2, \dots, n$ înmulțite cu $b_{1k}, \dots, b_{nk}$. Astfel obținem $\det C = \det \begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & O_n \end{pmatrix}$. Dezvoltăm din nou cu regula lui Laplace după ultimele n linii și obținem $\det C = (-1)^r \det(-I_n) \det(AB)$, unde $r = 1 + \dots + n + (n+1) + \dots + 2n = n(2n+1)$. Deci $\det C = (-1)^{2n^2+2n} \det(AB) = \det(AB)$. //

<u>Def.</u> $A \in M_n(R)$ s.n. <u>inversabilă</u> dc. există $B \in M_n(R)$ a.î. $AB = BA = I_n$. B s.n. <u>inversa</u> lui A și se not. A^{-1}.

<u>Prop.</u> $A \in M_n(R)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \in U(R)$.

În acest caz $A^{-1} = (\det A)^{-1} A^*$.

Cor. $A \in M_n(K)$, K corp comutativ
A este inversabilă $\iff \det A \neq 0$.

Teoremă (regula lui Cramer)
Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Dc. A este inversabilă, at. sistemul de ecuații

$$\boxed{Ax = b}, \quad x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

are soluție unică în $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Mai mult, $\boxed{x_i = (\det A)^{-1} \cdot d_i}$, unde $d_i = \det(c_1(A) \dots c_{i-1}(A)\ b\ c_{i+1}(A) \dots c_n(A))$, $1 \le i \le n$.

Dem. $Ax = b$, A invers. $\Rightarrow x = A^{-1}b$ sol. unică.
Pe de altă parte, $\det(c_1(A) \dots \underset{i}{b} \dots c_n(A)) =$
$\det(c_1(A) \dots \sum_{j=1}^{n} x_j c_j(A) \dots c_n(A)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det(c_1(A) \dots \underset{(i)}{c_j(A)} \dots c_n(A)) = x_i \det A$. //

Cor. $A \in M_n(K)$, K corp comutativ. Vectorii $c_1(A), \dots, c_n(A)$ sunt liniar indep. în $M_{n\times 1}(K)$ $\iff \det A \neq 0$.

Dem. „$\Rightarrow$" $c_1(A), \dots, c_n(A)$ liniar indep. $\Rightarrow$ $c_1(A), \dots, c_n(A)$ bază, deci $e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_j(A)$, $1 \le i \le n$, $b_{ij} \in K$; $B = (b_{ij})$
$1 = \det(e_1 \dots e_n) = \det(BA) = \det B \cdot \det A \Rightarrow \det A \neq 0$.
„$\Leftarrow$" Fie $x_1, \dots, x_n \in K$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i(A) = 0$
$\Rightarrow x_i = (\det A)^{-1} \det(c_1(A) \dots 0 \dots c_n(A)) = 0$, $1 \le i \le n$. //

Rangul unei matrice

Fie K corp comutativ și $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$. Fie $p,q\in\mathbb{N}$, $1\le p\le m$, $1\le q\le n$. Considerăm șirurile de numere $1\le i_1<\ldots<i_p\le m$ și $1\le j_1<\ldots<j_q\le n$. Acestor șiruri le asociem o submatrice a matricei A care este de tip $p\times q$ și anume $(a_{i_r j_s})_{\substack{1\le r\le p\\ 1\le s\le q}}$. Reamintim că determinantul unei submatrice $p\times p$ a lui A s.n. minor de ordinul p al lui A sau, pe scurt, p-minor.

Def. Fie $A\in M_{m\times n}(K)$. Spunem că A are rangul $r\ge 1$ și scriem $\operatorname{rang} A = r$, dacă există un minor de ordin r al lui A nenul și toți minorii de ordin $>r$ sunt nuli.

$\operatorname{rang} A = 0 \iff A = 0$.

Proprietăți ale rangului unei matrice:

1) $0\le \operatorname{rang} A \le \min(m,n)$.
2) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$
3) Rangul nu se schimbă la transf. elem. asupra liniilor (coloanelor) matricei.
4) $\operatorname{rang} A = r \iff (\exists)$ un r-minor nenul și toți $(r+1)$-minorii sunt nuli.

Teoremă (Kronecker)

Fie $A\in M_{m\times n}(K)$. At. $\operatorname{rang} A = \dim_K \langle c_1(A),\ldots,c_n(A)\rangle = \dim_K \langle l_1(A),\ldots,l_m(A)\rangle$, adică $\operatorname{rang} A$ este numărul maxim de coloane (linii) ale lui A care sunt liniar indep./K.

Dem. Fie $r = \operatorname{rang} A$. Asta înseamnă că există un r-minor nenul și cum rangul nu se schimbă dacă permutăm linii (coloane) ale matricei, putem presup. că minorul nenul este $d = \det(a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$. Notăm $M = (a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$.

Vom dem. că $c_1(A), \ldots, c_r(A)$ sunt liniar indep. și sistem de generatori pt. subsp. $\langle c_1(A), \ldots, c_n(A) \rangle$ al lui $M_{n \times 1}(K)$.

Dc. $\alpha_1 c_1(A) + \ldots + \alpha_r c_r(A) = 0$, at. $\alpha_1 c_1(M) + \ldots + \alpha_r c_r(M) = 0$ și cum $\det M \neq 0$ rezultă $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$.

Arătăm acum că $c_j(A)$, $j \ge r+1$, este o comb. liniară de $c_1(A), \ldots, c_r(A)$. Bordăm matricea M cu elem. coresp. de pe coloana j, resp. linia i. Obținem că

$$\Delta_{ij} = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{array} \right| = 0,$$

deoarece pt. $1 \le i \le r$ matricea are două linii egale, iar pt. $r < i \le m$ avem că Δ_{ij} este $(r+1)$-minor al lui A, deci nul. Dezvoltăm Δ_{ij} după linia $r+1$ și obținem $0 = a_{i1}\delta_1 + \ldots + a_{ir}\delta_r + a_{ij} d$. Deoarece $d \neq 0$, rezultă $a_{ij} = (-d^{-1}\delta_1) a_{i1} + \ldots + (-d^{-1}\delta_r) a_{ir}$. Cum i a fost ales arbitrar, rezultă

$c_j(A) \in \langle c_1(A), \dots, c_r(A) \rangle$, $(\forall) j \geq r+1$.

Egalitatea cealaltă (pe linii) se obț. folosind faptul că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$. //

Cor. $A \in M_{m \times n}(K)$

$\operatorname{rang} A = r \iff (\exists)$ un r-minor nenul și toți $(r+1)$-minorii care îl bordează sunt nuli.

Obs. importantă

Rangul unei matrice coincide cu rangul transf. liniare asociate.

$A \in M_{m \times n}(K)$; $f_A : K^m \to K^n$, $f_A(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_j$, $1 \leq i \leq m$

unde $e_1, \dots, e_m$ este baza can. în K^m, iar $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ este baza can. în K^n.

$\boxed{\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} f_A}$ $(= \dim \operatorname{Im} f_A)$.

Prop. $A \in M_{m \times n}(K)$, $B \in M_{n \times p}(K)$, at.

$\operatorname{rang}(AB) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

Dem. Fie $f_A : K^m \to K^n$, $f_B : K^n \to K^p$ aplic. liniare asociate matricelor A, B. Atunci $f_{AB} = f_B \circ f_A$. Trebuie arătat că $\dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \leq \min(\dim_K \operatorname{Im} f_A, \dim_K \operatorname{Im} f_B)$.

$\operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \subseteq \operatorname{Im} f_B \Rightarrow \dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \leq$

$\leq \dim_K \operatorname{Im} f_B$.

Fie acum $\{v_1, \dots, v_r\}$ bază în $\operatorname{Im}(f_B \circ f_A)$

$\Rightarrow v_i = f_B \circ f_A(x_i)$, $1 \le i \le r$.

Dar vectorii $f_A(x_1), \dots, f_A(x_r)$ sunt din $\operatorname{Im} f_A$ și liniar indep.

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_A(x_i) = 0 \Rightarrow f_B\Big(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_A(x_i)\Big) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

În concluzie $\dim_K \operatorname{Im}(f_B \circ f_A) \le \dim_K \operatorname{Im} f_A$ //

Cor. $A \in M_{m\times n}(K)$, $U \in M_m(K)$ inversabilă, $V \in M_n(K)$ inversabilă. At.

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} UA = \operatorname{rang} AV = \operatorname{rang}(UAV)$$

Def. $A, B \in M_{m\times n}(K)$ s.n. echivalente dc. $(\exists)\, U \in M_m(K)$ inversabilă $(\exists)\, V \in M_n(K)$ inversabilă a.î. $\boxed{B = UAV}$. Notație: $A \sim B$

Cor. $A \sim B \Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Este adevărat și reciproc!

Prop. $A \in M_{m\times n}(K)$, $\operatorname{rang} A = r$. Atunci $\boxed{A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

Mai mult, matricele U și V se pot alege ca fiind produse de matrice elementare.

Sisteme de ec. liniare

K corp comutativ. Sistemul de m ecuații cu n necunoscute

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ \text{------------------}\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

unde $a_{ij}\in K$, $b_i\in K$, s.n. sistem de ec. liniare peste corpul K. Dc. notăm $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$, $x={}^t(x_1,\dots,x_n)$, $b={}^t(b_1\dots b_m)$, at. sistemul (S) se scrie sub forma matriceală $\boxed{Ax=b}$. Să mai obs. că putem scrie sistemul (S) și sub forma $\sum_{i=1}^{n} c_i(A)x_i=b$.

Def. A s.n. matricea sistemului (S), $b_1,\dots,b_m$ s.n. termenii liberi iar matricea $A^e=(A|b)\in M_{m\times(n+1)}(K)$ s.n. matricea extinsă a sistemului (S).

(S) s.n. sistem omogen dc. $b_1=\dots=b_m=0$.

(S) s.n. sistem compatibil dc. are cel puțin o soluție, adică există $\alpha\in M_{n\times 1}(K)$ a.î. $A\alpha=b$, iar în caz contrar s.n. incompatibil.

Teoremă (Kronecker – Capelli)

(S) este sistem compatibil $\Leftrightarrow$ rang A = rang A^e.

Dem. "$\Rightarrow$" Fie $\alpha\in M_{n\times 1}(K)$ soluție a sistemului $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_i(A)=b \Rightarrow b\in\langle c_1(A),\dots,$

$c_n(A)\rangle \Rightarrow \langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle = \langle c_1(A),\dots,$ $c_n(A), b\rangle \Rightarrow$ rang A = rang A^e.

"$\Leftarrow$" Evident $\langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle \subseteq \langle c_1(A),\dots,$ $c_n(A), b\rangle$ și deoarece rang A = rang A^e ac. două subsp. au aceeași dimens., deci sunt egale $\Rightarrow b \in \langle c_1(A),\dots, c_n(A)\rangle$ $\Rightarrow (\exists)\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ a.î. $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i(A)$ $\Rightarrow$ (S) este compatibil. //

Sisteme liniare omogene

Fie $K^n = M_{n\times 1}(K)$, $K^m = M_{m\times 1}(K)$ și $f_A: K^n \to K^m$, $f_A(x) = Ax$, unde $A \in M_{m\times n}(K)$. Evident, f_A este o aplicație liniară.

Scriem sistemul (S) sub forma $f_A(x) = b$ și obs. că $\operatorname{Im} f_A = \langle c_1(A),\dots,c_n(A)\rangle$, deoarece $f_A(x) = Ax = c_1(A)x_1 + \dots + c_n(A)x_n$.

Prop. Dc. (S) este omogen, at. mulțimea sol. lui (S) este un subsp. vect. al lui K^n de dim. n - rang A.

Cor. Dc. (S) este omogen, at. (S) are doar sol. nulă $\Leftrightarrow$ rang $A = n$.

Prop. (S) sistem compatibil și $x^0 \in K^n$ o sol. a sa. At. $x^0 + \ker f_A = \{x^0 + \alpha \mid \alpha \in \ker f_A\}$ este mulț. sol. lui (S).

Cor. (S) sistem compatibil.

(S) are sol. unică $\Leftrightarrow$ rang $A = n$.

Rezolvarea sistemelor de ec. compatibile prin metoda eliminării a lui Gauss

Începem prin a obs. că următoarele transf. nu afectează mulțimea soluțiilor unui sistem:

a) Adunarea la o ecuație a altei ecuații înmulțită cu un elem. din corpul K.

b) Permutarea a două ecuații.

c) Înmulțirea unei ecuații cu un elem. din $K - \{0\}$.

Dc. $A^e = (A|b)$, at. transf. a), b), c) produc asupra matricei extinse următoarele transf. numite transformări elementare pe linii:

I. Adunarea la o linie a unei alte linii înmulțită cu un elem. din K.

II. Permutarea a două linii.

III. Înmulțirea unei linii cu un elem. din $K - \{0\}$.

Să obs. că fiecare dintre cele 3 transf. are și o transf. inversă.

Def. $A, B \in M_{m \times n}(K)$ s.n. echivalente pe linii dc. A se obține din B printr-o succesiune (finită) de transf. elementare pe linii.

Obs. Relația de echivalență pe linii este o relație de echivalență pe $M_{m \times n}(K)$.

Clasele de echivalență?

La fiecare dintre cele 3 transf. elementare pe linii corespunde o matrice care în-

înmulțită cu matricea A are ca efect transf. elementară respectivă. Mai precis, avem 3 tipuri de <u>matrice elementare</u>:

I. $T_{ij}(a)$ = matricea obț. din matricea unitate prin adunarea la linia i a liniei j înmulțită cu $a \in K$; $i \neq j$.

$T_{ij}(a) = I_n + aE_{ij} \in M_n(K)$, $i \neq j$.

$$\left.\begin{array}{l} T_{ij}(a)\cdot T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b) \\ T_{ij}(0) = I_n \end{array}\right| \Rightarrow T_{ij}(a)^{-1} = T_{ij}(-a).$$

$\det T_{ij}(a) = 1$.

II. P_{ij} = matricea obț. din matricea unitate prin permutarea liniilor i și j, $i \neq j$.

$\det P_{ij} = -1$, $P_{ij}^2 = I_n$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

III. $D_i(u)$ = matricea obț. din matricea unitate prin înmulțirea liniei i cu elem. $u \in K - \{0\}$.

$\det D_i(u) = u$, $D_i(u)D_i(v) = D_i(uv)$, $D_i(1) = I_n$,

$$D_i(u)^{-1} = D_i(u^{-1}).$$

<u>Obs.</u> Aceste matrice se def. și peste un inel comutativ oarecare, cu precizarea că la III se alege u elem. inversabil, având aceleași proprietăți.

<u>Def.</u> S.n. <u>matrice eșalon</u> (pe linii) o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

Deci o matrice eşalon (pe linii) este o matrice care se prezintă astfel:
- primul element nenul de pe fiecare linie, numit <u>pivot</u>, este egal cu 1;
- pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i;
- pivotul este singurul elem. nenul de pe coloana sa;
- eventualele linii nule apar la sfârşit.

<u>Teoremă</u> Orice matrice $A \in M_{m\times n}(K)$ este echivalentă pe linii cu o matrice eşalon numită <u>forma eşalon</u> a lui A.

<u>Corolar</u> $A \in M_{m\times n}(K)$
rang A = rangul formei eşalon a lui A
= nr. de pivoţi din forma eşalon.

<u>Corolar</u> $A \in M_{m\times n}(K)$
$(\exists)\ E_1, \dots, E_r \in M_m(K)$ matrice elementare
a.î. $E_1 \dots E_r A$ să fie matrice eşalon.

<u>Teoremă</u> Orice sistem de ec. liniare este echivalent cu un sistem având matricea extinsă matrice eşalon.

<u>Obs.</u> Dc. A^e are forma eşalon, at. notăm cu $j_1, \dots, j_k$ coloanele ce au pivoţi. (Dc. apare un pivot pe ultima col., avem o ec. $0=1$, deci sistemul este incompat.). Nec. $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ s.n. <u>nec. principale</u>, iar celelalte $x_{e_1}, \dots, x_{e_r}$ <u>nec. secundare</u>,

Trecem nec. secundare în partea dreaptă și sistemul devine

$$\boxed{x_{j_i} = b_i - \sum_{t=1}^{r} a_{i\ell_t} x_{\ell_t}, \quad i=1,\dots,k.}$$

Teoremă

Un sistem de ec. $Ax=b$ care are matricea extinsă A^e în forma eșalon este compatibil dc. și numai dc. A^e nu are pivoți pe ultima coloană.
Dc. este compatibil, at. este compatibil determinat dc. și numai dc. nu avem nec. secundare, adică matricea sistemului are câte un pivot pe fiecare coloană.

Exemple

1) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

2) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases}$$