# CURS #9

**CONȚINUTUL CURSULUI #9:**





# VI. Derivarea numerică.

## VI.1. Diferențe finite progresive, regresive și centrale pentru $f'(x)$.

Fie $f \in C^2([a,b])$. Din Teorema lui Taylor rezultă, pentru $h > 0$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2}, \ \xi \in (x, x+h) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f''(\xi)\frac{h}{2} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \Rightarrow$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Relația (1) se numește **formula de apoximare prin diferențe finite progresive** pentru $f'(x)$.

Are loc estimarea erorii de trunchiere:

$$|e_t| = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{h}{2}|f''(\xi)| = O(h)$$



Din Teorema lui Taylor rezultă, pentru $h > 0$:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2}, \xi \in (x-h, x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + f''(\xi)\frac{h}{2} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$

Obținem astfel **formula de aproximare prin diferențe finite regresive** pentru $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2}$$

cu eroarea de trunchiere, $e_t$:

$$|e_t| = \left| f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right| = \frac{h}{2}|f''(\xi)| = O(h)$$



Fie $f \in C^3[a,b]$. Din Teorema lui Taylor rezultă, pentru $h > 0$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(\xi_1)\frac{h^3}{6},$$
$$\xi_1 \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(\xi_2)\frac{h^3}{6},$$
$$\xi_2 \in (x-h, x)$$

Scăzând a doua relație din prima și rearanjând termenii, obținem:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \left[f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)\right]\frac{h^2}{12},$$
$$\xi_1 \in (x, x+h), \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

Obținem astfel **formula de aproximare prin diferențe finite centrale** pentru $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

cu erorea de trunchiere, $e_t$:

$$|e_t| = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| = \frac{h^2}{12} |f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)| = O(h^2)$$

Fie $x_1 < a = x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b < x_{m+1}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Atunci conform formulelor de aproximare prin diferențe finite progresive, regresive și centrale avem

$$f'(x_i) = \begin{cases} \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} & \text{(diferențe finite progresive)} \\ \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} & \text{(diferențe finite regresive)} \\ \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} & \text{(diferențe finite centrale)} \end{cases} \tag{3}$$

cu $i = \overline{2, m}$.



**ALGORITM** (Derivare numerică. Diferențe finite progresive, regresive și centrale.)

**Date de intrare:** $x = (x_i)_{i=\overline{1,m+1}}$; $y = (y_i)_{i=\overline{1,m+1}}$; *metoda*.
**Date de ieșire:** $dy = (dy_i)_{i=\overline{2,m}}$.

STEP 1: `Determină` $m$;

STEP 2: `switch metoda`

`case 'diferenţe finite progresive'`
`for` $i = 2 : m$ `do`
$dy_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$;
`endfor`

`case 'diferenţe finite regresive'`
`for` $i = 2 : m$ `do`
$dy_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$;
`endfor`



`case 'diferenţe finite centrale'`
`for` $i = 2 : m$ `do`
$dy_i = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$;
`endfor`
`endswitch`



## VI.2. Diferențe finite centrale pentru $f''(x)$.

Fie $f \in C^4[a, b]$. Din Teorema lui Taylor rezultă, pentru $h > 0$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(\xi_1)\frac{h^4}{24}, \quad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(\xi_2)\frac{h^4}{24}, \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

Adunând relațiile de mai sus și rearanjând termenii, obținem:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right]\frac{h^2}{24},$$
$$\xi_1 \in (x, x+h), \quad \xi_2 \in (x-h, x)$$

**Formula de aproximare prin diferențe finite centrale** pentru $f''(x)$ este:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

cu **eroarea de trunchiere**, $e_t$:

$$|e_t| = \left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| = \frac{h^2}{12}|f^{(4)}(\xi)| = O(h^2)$$



## VI.3. Metoda de extrapolare Richardson.

Dacă avem dată o formulă de aproximare a derivatei $f'(x)$ de forma $f'(x) = \phi_1(x,h) + O(h)$, atunci în baza funcției $\phi_1$ se poate construi recurent un șir de funcții $(\phi_n)_{n>1}$ care aproximează derivata $f'(x)$ cu ordinul de aproximare $O(h^n)$.
Pentru simplificare vom evita scrierea variabilei $x$ ca argument al funcției $\phi_n$. Avem astfel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \phi_1(h) + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \dots \\ &= \phi_1(h) + O(h) \end{aligned} \tag{4}$$

Cum (4) are loc pentru orice valoare $h > 0$, scriem formula de aproximare (4) pentru $h/2$:

$$f'(x) = \phi_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \dots \tag{5}$$

Efectuăm următoarea combinație: $2^1\cdot$ (5) $-1\cdot$ (4). Rezultă:



$$(2^1-1)f'(x) = \left[2^1\phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_1(h)\right] + a_2\left(\frac{1}{2}-1\right)h^2 + a_3\left(\frac{1}{2^2}-1\right)h^3 + \dots$$

$$f'(x) = \phi_2(h) + b_2h^2 + b_3h^3 + b_4h^4 + \dots = \phi_2(h) + O(h^2) \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} \phi_2(h) &:= \frac{1}{2^1-1}\left[2^1\phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_1(h)\right] \\ &= \phi_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^1-1}\left[\phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_1(h)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Cum relația (6) are loc pentru orice $h > 0$, scriem formula de aproximare (6) pentru $h/2$:

$$f'(x) = \phi_2\left(\frac{h}{2}\right) + b_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + b_3\left(\frac{h}{2}\right)^3 + b_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots \tag{8}$$

Efectuăm următoarea combinație: $2^2\cdot$ (8) $-1\cdot$ (6). Rezultă:



$$f'(x) = \phi_3(h) + c_3h^3 + c_4h^4 + c_5h^5 + \dots = \phi_3(h) + O(h^3) \tag{9}$$

unde

$$\begin{aligned} \phi_3(h) &:= \frac{1}{2^2-1}\left[2^2\phi_2\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_2(h)\right] \\ &= \phi_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^2-1}\left[\phi_2\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_2(h)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Prin inducție după $n \geq 2$ se poate demonstra formula de aproximare pentru $f'(x)$:

$$f'(x) = \phi_n(h) + d_nh^n + d_{n+1}h^{n+1} + d_{n+2}h^{n+2} + \dots = \phi_n(h) + O(h^n) \tag{11}$$

unde

$$\begin{aligned} \phi_n(h) &:= \frac{1}{2^{n-1}-1}\left[2^{n-1}\phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_{n-1}(h)\right] \\ &= \phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^{n-1}-1}\left[\phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \phi_{n-1}(h)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Vom adopta următoarea notație

$$Q_{ij} = \phi_j\left(\frac{h}{2^{i-j}}\right) \tag{13}$$

Cu această convenție, conform metodei inductive

$$\begin{aligned}
Q_{ij} = \phi_j\left(\frac{h}{2^{i-j}}\right) &= \phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-j+1}}\right) \\
&+ \frac{1}{2^{j-1}-1}\left(\phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-j+1}}\right) - \phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-j}}\right)\right) \\
&= \phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-(j-1)}}\right) \\
&+ \frac{1}{2^{j-1}-1}\left(\phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-(j-1)}}\right) - \phi_{j-1}\left(\frac{h}{2^{i-1-(j-1)}}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$Q_{ij} = Q_{i,j-1} + \frac{1}{2^{j-1}-1}(Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}) \tag{14}$$



Vom da în continuare următorul tabel:

| $h/2^n$ | $O(h)$ | $O(h^2)$ | $O(h^3)$ | $O(h^4)$ | $O(h^5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $\boxed{\phi_1(h)}$ $\searrow$ | | | | |
| $h/2$ | $\phi_1(h/2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{\phi_2(h)}$ $\searrow$ | | | |
| $h/2^2$ | $\phi_1(h/2^2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_2(h/2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{\phi_3(h)}$ $\searrow$ | | |
| $h/2^3$ | $\phi_1(h/2^3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_2(h/2^2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_3(h/2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{\phi_4(h)}$ $\searrow$ | |
| $h/2^4$ | $\phi_1(h/2^4)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_2(h/2^3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_3(h/2^2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\phi_4(h)$ $\longrightarrow$ $\searrow$ | $\boxed{\phi_5(h)}$ $\searrow$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Conform acestui tabel elementele de pe diagonala principală aproximează derivata $f'(x)$ cu ordinul de aproximare egal cu numărul coloanei.

| $h/2^n$ | $O(h)$ | $O(h^2)$ | $O(h^3)$ | $O(h^4)$ | $O(h^5)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $\boxed{\phi_1(h) = Q_{11}}$ | | | | |
| $h/2$ | $\phi_1(h/2) = Q_{21}$ | $\boxed{\phi_2(h) = Q_{22}}$ | | | |
| $h/2^2$ | $\phi_1(h/2^2) = Q_{31}$ | $\phi_2(h/2) = Q_{32}$ | $\boxed{\phi_3(h) = Q_{33}}$ | | |
| $h/2^3$ | $\phi_1(h/2^3) = Q_{41}$ | $\phi_2(h/2^2) = Q_{42}$ | $\phi_3(h/2) = Q_{43}$ | $\boxed{\phi_4(h) = Q_{44}}$ | |
| $h/2^4$ | $\phi_1(h/2^4) = Q_{51}$ | $\phi_2(h/2^3) = Q_{52}$ | $\phi_3(h/2^2) = Q_{53}$ | $\phi_4(h/2) = Q_{54}$ | $\boxed{\phi_5(h) = Q_{55}}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |



**ALGORITM** (Formula de extrapolare Richardson)

**Date de intrare:** $f; x; h; n$.
**Date de ieșire:** $df$.

STEP 1: Se defineşte funcţia $\phi = \phi(x,h)$;
  for $i = 1 : n$ do
    $Q_{i1} = \phi(x, h/2^{i-1})$;
  endfor
STEP 2: for $i = 2 : n$ do
    for $j = 2 : i$ do
      Determină $Q_{ij}$ conform (14);
    endfor
  endfor
STEP 3: $df = Q_{nn}$

**Obs:** Algoritmul Richardson poate fi aplicat și pentru aproximarea derivatei de ordinul doi. Dacă de exemplu avem o formulă de aproximare de ordinul doi pentru $f''(x)$, atunci în tabelul de mai sus vom merge cu calculul până la $Q(n-1, n-1)$



# VII. Integrarea numerică
## VII.1. Formule de cuadratură.

Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și fie

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \tag{15}$$

**Definiția (VII.1.)**

*Se numește formulă de cuadratură a lui $f$ o formulă de aproximare a integralei (15) de forma*

$$\boxed{I_n(f) := \sum_{k=1}^{n+1} w_k f(x_k)} \tag{16}$$

*unde $x_k$, $k = \overline{1, n+1}$ sunt astfel încât $a \le x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} \le b$. $w_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n+1}$, se numesc coeficienții/ponderile cuadraturii (16), iar $x_k$, $k = \overline{1, n+1}$ se numesc nodurile cuadraturii (16).*

**Definiția (VII.2.)**

*Mărimea $E_n(f)$ definită conform formulei*

$$E_n(f) := I(f) - I_n(f) \tag{17}$$

*se numește eroarea cuadraturii* (16) *a lui* $f$.

Considerăm funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f \in C^{n+1}[a, b]$. Fie $P_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ polinomul de interpolare Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\,, \quad x \in [a, b]$$

cu $L_{n,k}$ funcțiile de bază:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\,, \quad x \in [a, b]\,, \quad k = \overline{1, n+1}$$



Conform Teoremei de estimare a erorii de interpolare Lagrange avem:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x)\,, \quad \forall\, x \in [a, b]\,; \quad \xi(x) \in (a, b)$$

$$\pi_{n+1}(x) := \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)\,, \quad x \in [a, b]$$

Formula de cuadratură a lui $f$ devine în acest caz:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left(\int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x\right)}_{=:w_k} f(x_k) \end{aligned}$$

sau

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n+1} w_k f(x_k) \tag{18}$$



unde ponderile cuadraturii (18) sunt date de:

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad k = \overline{1, n+1} \tag{19}$$

Estimarea erorii cuadraturii (18) este:

$$\begin{aligned} |E_n(f)| = |I(f) - I_n(f)| &\le \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!}\,|\pi_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

unde $M_{n+1} := \max\limits_{\zeta\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|$.



## VII.2. Formulele de cuadratură Newton-Cotes

Dacă nodurile cuadraturii (16) sunt echidistante și $x_1 = a, x_{n+1} = b$ atunci formula (16) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes închisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz avem:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_i = a + (i-1)h, i = \overline{1, n+1} \end{cases} \tag{20}$$

Dacă nodurile cuadraturii (16) sunt echidistante și $x_1 > a, x_{n+1} < b$ atunci formula (16) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz vom considera discretizarea de forma:

$$\begin{cases} x_0 = a, x_{n+2} = b \\ h = \dfrac{b-a}{n+2} \\ x_i = a + ih, i = \overline{0, n+2} \end{cases} \tag{21}$$

Menționăm că pentru ambele metode formula de cuadratură rămâne de forma (18) cu ponderile date de (19).
Fie următoarele schimbări de variabile corespunzătoare celor două formule (închisă și deschisă):

(a) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă:

$$x = a + h(t-1)\,, \quad t \in [1, n+1]\,; \quad \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

(b) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă:

$$x = a + h\,t\,, \quad t \in [0, n+2]\,; \quad \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

În cazul schimbării de variabilă pentru formula de cuadratura Newton - Cotes închisă avem:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{(a + h\,(t-1)) - (a + h\,(i-1))}{(a + h\,(k-1)) - (a + h\,(i-1))}$$

$$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,, \quad x \in [a, b]\,, \quad k = \overline{1, n+1}$$



Coeficienții/ponderile $w_k$, $k = \overline{1, n+1}$ cuadraturii Newton-Cotes se calculează după cum urmează:

(a) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = h \int_1^{n+1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,\mathrm{d}t\,,$$

(b) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = h \int_0^{n+2} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,\mathrm{d}t$$



## VII.2.1. Formula de cuadratură a trapezului.

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă (n=1).
Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad h = b - a$$

Formula de cuadratură este:

$$I_1(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 f(a) + w_2 f(b)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$w_1 = h \int_1^2 \frac{t-2}{-1}\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}$$

$$w_2 = h \int_1^2 (t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}$$

Astfel, obținem formula de cuadratură a trapezului:

$$I_1(f) = h\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right] = \frac{b-a}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big] \tag{24}$$



**Estimarea erorii de cuadratură a trapezului**:
Dacă $f \in C^2[a, b]$, din Teorema de estimare a erorii polinomului de interpolare Lagrange $P_1$ rezultă:

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\,\pi_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi \in (a, b)$$

Obținem:

$$E_1(f) = I(f) - I_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\,(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \int_1^2 h^2\,(t-1)(t-2)\,h\,\mathrm{d}t = -\frac{f''(\xi)}{12}\,h^3\,, \quad \text{cu} \quad \xi \in (a, b)$$

$$E_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,h^3 = O(h^3)\,, \quad \text{cu} \quad \xi \in (a, b)$$

### VII.2.2 Formula de cuadratură Simpson ($n=2$)

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă ($n=2$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a\,, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} = a+h\,, \quad x_3 = b = a+2\,h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_2(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$\begin{aligned} w_1 &= h\int_1^3 \frac{1}{2}(t-2)(t-3)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{3} \\ w_2 &= h\int_1^3 -(t-1)(t-3)\,\mathrm{d}t = \frac{4h}{3} \\ w_3 &= h\int_1^3 \frac{1}{2}(t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{3} \end{aligned}$$



Astfel, obținem formula de cuadratură Simpson:

$$\begin{aligned} I_2(f) &= h\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned} \tag{25}$$

**Estimarea erorii de cuadratură Simpson:** Se poate arăta că dacă $f \in C^4[a,b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a,b)$ a.i.

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\,h^5 = O(h^5) \tag{26}$$



### VII.2.3. Formula de cuadratură a dreptunghiului

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes deschisă ($n=0$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_0 := a\,, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = a+h\,, \quad x_2 := b = a+2\,h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_0(f) = w_1 f(x_1) = w_1 f(\frac{a+b}{2}) \tag{27}$$

Ponderea de cuadratură $w_1$ este:

$$w_1 = \int_a^b L_{0,1}(x)dx = b-a = 2h$$

**Obs.:** Convenție: Funcția de bază pentru $n=0$ o vom considera $L_{0,1}(x) = 1$.

Obținem astfel formula de cuadratură a dreptunghiului

$$I_0(f) = 2\,h\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{28}$$

Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a,b)$ a.i. $E_0(f) = \dfrac{f''(\xi)}{3}\,h^3$



## VII.3. Formule de cuadratură sumate

### VII.3.1. Formula de cuadratură sumată a dreptunghiului ($n=0$).

Fie partiție/diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a,b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m}\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a+(k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}; \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

Aplicăm formula de cuadratură a dreptunghiului pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1,m}$

$$I_{0,m} = \sum_{k=1}^{m} I_0^k(f) = \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k-2}) = 2h \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) \qquad (30)$$

unde $I_0^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a dreptunghiului scrisă pe intervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$.

**Obs.:** Adunând erorile formulei de cuadratură de la fiecare subinterval , eroarea formulei de cuadratură sumată își micșorează ordinul cu o unitate. Fie $\varepsilon_k = O(h^3)$, eroarea formulei de cuadratură a dreptunghiului pe subintervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, atunci eroarea formulei de cuadatură sumată a a dreptunghiului este:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k = O(h^3) \sum_{k=1}^{m} 1 = m \cdot O(h^3) = \frac{b-a}{2h} \cdot O(h^3) = O(h^2) \qquad (31)$$



### VII.3.2. Formula de cuadratură sumată a trapezului ($n = 1$)

Fie diviziunea echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_k, x_{k+1}\right]; \quad x_k = a + (k-1)h, \quad k = \overline{1, m+1}; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (32)$$

În fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m+1}$, considerăm nodurile de interpolare $x_k$ și $x_{k+1}$.

Aplicăm formula de cuadratură a trapezului pe fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m+1}$



$$\begin{aligned}
I_{1,m}(f) &= \sum_{k=1}^{m} I_1^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k) \\
&= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{m} (f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2) \\
&+ f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_m) + f(x_{m+1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(x_1) + 2\sum_{k=2}^{m} f(x_k) + f(x_{m+1}))
\end{aligned} \qquad (33)$$

unde $I_1^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a trapezului pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$.

Eroarea formulei de cuadratură sumată a trapezului este de ordinul $O(h^2)$.



### VII.3.3. Formula de cuadratură sumată Simpson ($n = 2$)

Fie diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a + (k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}$$

$$h := \frac{b-a}{2m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (34)$$

În fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m}$, considerăm nodurile de interpolare $x_{2k-1}$, $x_{2k}$ și $x_{2k+1}$

Aplicăm formula de cuadratură Simpson pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a, b]$, $k = \overline{1, m}$:

$$
\begin{aligned}
I_{2,m}(f) = \sum_{k=1}^{m} I_2^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{1}{3} f(x_{2k-1}) + \frac{4}{3} f(x_{2k}) + \frac{1}{3} f(x_{2k+1}) \right) \times \\
\times \frac{x_{2k+1} - x_{2k-1}}{2} = \frac{h}{3} (\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1}) + f(x_{2m+1}))
\end{aligned} \tag{35}
$$

unde $I_2^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură Simpson pe intervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$.
Eroarea formulei de cuadratură sumată Simpson este de ordinul $O(h^4)$.