Limbajul logicii de ordinul I
(first order logic FOL)

3 lucruri definesc un limbaj declarativ:

- sintaxa – ce grupuri de simboluri sunt valide și în ce ord
  "mașina pe care eu o conduc"
  "mașina conduc pe care eu"
- semantica – ce înseamnă expresiile alcătuite corect d.p.v. sinta
  – unele expresii bine alcătuite sintactic pot să nu însemne nimic
  "Vacanța albastră aleargă"
- componenta pragmatică (pragmatics) – specificarea modului în care sunt folosite expresiile valide sintactic și semant
  "e cineva în spatele tău"

Sintaxa în FOL

Există două tipuri de simboluri: logice și nonlogice.

1. Simbolurile logice (precum cuvintele rezervate dintr-un limbaj de programare)
   a) punctuație: "(", ")" și "."
   b) conectori: $\neg, \wedge, \vee$ (în ordinea descrescătoare a priorității)
      cuantificatori $\exists, \forall$
      $=$ egalitate logică (nu este predicat ci un simbol logic special)
   c) variabile: mulțime infinită de simboluri
      prin convenție, le vom nota cu x, y, z (eventual cu indici)
2. Simbolurile nonlogice (ca identificatorii dintr-un limbaj de programare)
   - au utilitate și înțeles ce depind de aplicație
   - au aritate

a) simboluri (de) funcții - încep cu literă mică
- exemple: bestFriend sau
a, b, c, f, g, h (eventual cu indici)
- prin convenție a, b, c sunt folosite dacă aritatea este 0 și se numesc constante

b) simboluri (de) predicate - încep cu majusculă
- exemple: OlderThan
sau în general P, Q, R (eventual cu indici)
- simbolurile de predicate de aritate 0 se numesc simboluri propoziționale

În FOL există două tipuri de expresii sintactice valide:

1) Termenii:
a) orice variabilă este termen;
b) dacă $t_1, \ldots t_n$ sunt termeni și f este un simbol funcție de aritate n, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

2) Formulele:
se numesc atomi sau formule atomice
a) dacă $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni și P este un simbol de predicat de aritate n, atunci $P(t_1, \ldots t_n)$ este formulă;
b) dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este formulă;
c) dacă α și β sunt formule și x este o variabilă, atunci $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $\forall x.\alpha$ și $\exists x.\alpha$ sunt formule

Submulțimea propozițională a FOL este limbajul ce nu conține termeni sau cuantificatori, ci doar simbolurile propoziționale sunt utilizate.
De exemplu, $P \wedge \neg(Q \vee R)$

Vom folosi următoarele abrevieri:

"implică"
$\alpha \supset \beta$ pentru $(\neg\alpha \vee \beta)$ (se mai notează $\rightarrow$ sau $\Rightarrow$)

$\alpha \equiv \beta$ pentru $((\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha))$ (se mai notează $\Leftarrow$
"dacă și numai dacă"

O variabilă este legată într-o formulă dacă aparține scopului unui cuantificator. Altfel este liberă.

$$\forall y .\ P(x) \wedge \exists x [P(y) \vee Q(x)]$$

liberă

legate

legate

(Obs. În unele lucrări, apariția variabilei imediat după cuantificator nu se consideră nici liberă nici legată)

Dacă $\vec{x}$ este o secvență de variabile $x_1, \dots x_n$

$\vec{c}$ este o secvență de constante $c_1, \dots, c_n$

α o formulă ale cărei variabile libere se află în $\vec{x}$

Notăm $\alpha[\vec{x}]$ α

$\alpha[\vec{c}]$ este α în care se înlocuiește fiecare x_i liber cu c_i, $i=\overline{1,n}$

Def. O propoziție în FOL este o formulă fără variabile libere

Semantica în FOL

Înțelesul unei propoziții derivă din interpretarea simbolurilor non-logice implicate.
Simbolurile non-logice sunt dependente de aplicație, deci nu putem da răspunsuri definitive.
Căutăm o specificare clară a sensului propozițiilor ca funcție de interpretare a simbolurilor de predicate și funcții.
De exemplu, sensul pentru "DemocraticCountry" poate fi specificat prin acele obiecte ce reprezintă țări pe care noi le considerăm democrate. Putem să nu fim de acord care sunt, dar aici e vorba de alte interpretări.

Interpretări

În FOL, o interpretare $\mathfrak{I}$ este o pereche $<D, I>$ unde
- D este o mulțime nevidă de obiecte, numită domeniul interpretării (poate fi orice)
- I este o mapare a interpretării, ce asignează un înțeles simbolurilor de predicate și de funcții

Dacă P este un simbol de predicat de aritate n, atunci

$I[P] \subseteq \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n \text{ ori}}$ $\quad$ $I[P]$ este o relație n-ară pe D

Exemple: Dog - unar $\quad$ $I[Dog]$ poate fi mulțimea câinilor în această interpretare

OlderThan - binar $\quad$ $I[OlderThan]$ - submulțime din $D \times D$

Dacă f este un simbol de funcție de aritate n, atunci

$I[f] \in [\underbrace{D \times \ldots \times D}_{n \text{ ori}} \to D]$ $\quad$ $I[f]$ este o funcție n-ară pe D

Exemple: bestFriend - unară $\quad$ $I[bestFriend]$ este o funcție $[D \to D]$

johnSmith - constantă $\quad$ $I[johnSmith]$ este un element din D

O variantă utilă de interpretare a predicatelor este în termenii funcției caracteristice.
Astfel, pentru un predicat de aritate n, considerăm $I[P]$ ca o funcție de aritate n ~~pe D~~, cu valori în $\{0, 1\}$.

$$I[P] \in [\underbrace{D \times \ldots \times D}_{n \text{ ori}} \to \{0, 1\}]$$

Relația dintre cele două tipuri de specificație este aceea că tuplul de obiecte este în relație pe D dacă și numai dacă funcție caracteristică pe aceste obiecte este 1.
Funcție caracteristică ne permite să vedem cum sunt interpretate predicatele de aritate 0. Astfel, $I[P]$ este 0 sau 1, după cum sensul este "fals" sau "adevărat".
Pentru submulțimea propozițională a FOL, putem ignora D și putem vedea interpretarea $\mathfrak{I}$ fiind doar maparea I de la simbolurile propoziționale către 0 sau 1.

Denotarea

Având interpretarea $\mathcal{J} = \langle D, I \rangle$, putem specifica ce elemente din D sunt denotate de un termen ce nu conține variabile.
De exemplu, pentru a găsi obiectul din D indicat de teamenul "bestFriend(johnSmith)" în $\mathcal{J}$, folosim I pentru a găsi funcție denotată de "bestFriend". Funcția găsită este aplicată elementului din D indicat de "johnSmith" obținând astfel un element din D.

Pentru termenii ce conțin variabile definim mai întâi o mapare a variabilelor din FOL peste elementele din D. Maparea se numește asignare de variabile.

$$\left.\begin{array}{l}\mu \text{ este o asignare de variabile} \\ x \text{ este o variabilă}\end{array}\right\} \mu[x] \text{ este un element din } D$$

Denotarea termenului t, notată $\|t\|_{\mathcal{J},\mu}$, se definește astfel:

a) dacă x este variabilă, atunci $\|x\|_{\mathcal{J},\mu} = \mu[x]$

b) dacă $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni și f este un simbol de funcție de aritate n, atunci

$$\|f(t_1, \ldots, t_n)\|_{\mathcal{J},\mu} = \mathcal{F}(d_1, \ldots d_n)$$

unde $\mathcal{F} = I[f]$ și $d_i = \|t_i\|_{\mathcal{J},\mu}$, $i = \overline{1,n}$

Observație: $\|t\|_{\mathcal{J},\mu}$ este întotdeauna un element din D.

Relația de satisfacere

Dată interpretarea $\mathcal{J} = \langle D, I \rangle$ și $\|\cdot\|_{\mathcal{J},\mu}$ o relație de denotare putem spune ce propoziții din FOL sunt adevărate conform acestei interpretări.
De exemplu "Dog(bestFriend(johnSmith))" este adevărată în $\mathcal{J}$ dacă și numai dacă
- folosim I pentru a obține submulțimea din D denotată de "Dog"
- găsim obiectul denotat de "bestFriend(johnSmith)"
- obiectul găsit la pasul 2 este în submulțimea găsită la pasul

Date $\mathcal{I}$ și μ, spunem că formula α este satisfăcută în $\mathcal{I}$, și scriem $\mathcal{I},\mu \models \alpha$, conform următoarelor reguli:

Fie $t_1 \dots t_n$ termeni, P predicat de aritate n, α și β sunt formule, x variabilă.

1. $\mathcal{I},\mu \models P(t_1,\dots,t_n)$ dnd $\langle d_1,\dots,d_n\rangle \in I[P]$ și $d_i = \|t_i\|_{\mathcal{I},\mu}$ $i=\overline{1,n}$
2. $\mathcal{I},\mu \models t_1 = t_2$ dnd $\|t_1\|_{\mathcal{I},\mu}$ și $\|t_2\|_{\mathcal{I},\mu}$ sunt același element din $\mathcal{D}$;
3. $\mathcal{I},\mu \models \neg\alpha$ dnd nu are loc $\mathcal{I},\mu \models \alpha$;
4. $\mathcal{I},\mu \models (\alpha \wedge \beta)$ dnd $\mathcal{I},\mu \models \alpha$ și $\mathcal{I},\mu \models \beta$;
5. $\mathcal{I},\mu \models (\alpha \vee \beta)$ dnd $\mathcal{I},\mu \models \alpha$ sau $\mathcal{I},\mu \models \beta$; (sau ambele)
6. $\mathcal{I},\mu \models \exists x.\alpha$ dnd $\mathcal{I},\mu' \models \alpha$ <u>pentru un</u> μ' ce diferă de μ cel mult în variabila x;
7. $\mathcal{I},\mu \models \forall x.\alpha$ dnd $\mathcal{I},\mu' \models \alpha$ <u>pentru orice</u> μ' ce diferă de μ cel mult în variabila x.

Dacă α este o propoziție în FOL atunci relația de satisfacere nu depinde de niciun μ.

Vom scrie $\mathcal{I} \models \alpha$ α este adevărată în interpretarea $\mathcal{I}$

Pentru submulțimea propozițională din FOL, scriem $I[\alpha] = 1$ sau $I[\alpha] = 0$ după cum $\mathcal{I} \models \alpha$ sau nu.

Dacă S este o mulțime de propoziții, notăm

$$\mathcal{I} \models S$$

cu semnificația că toate propozițiile din S sunt adevărate în $\mathcal{I}$. În acest caz spunem că $\mathcal{I}$ este un model logic pentru S.