$$3h^2 f'' \qquad \frac{15}{12} h^4 f^4$$

$$f(x+2h) = \cancel{f(x)} + \cancel{2hf'} + 2h^2 f'' + \cancel{\frac{4h^3}{3} f'''} + \frac{16h^4}{4!} f^4$$

$$f(x-2h) = \cancel{f(x)} - \cancel{2hf'} + 2h^2 f'' - \cancel{\frac{4h^3}{3} f'''} + \frac{16h^4}{4!} f^4$$

$$\frac{32}{4!}$$

$$-\ f(x+h) = -\cancel{f(x)} + \cancel{hf'} - \frac{h^2}{2} f'' + \cancel{\frac{h^3}{3!} f'''} - \frac{h^4}{4!} f^4$$

$$-\ f(x-h) = -\cancel{f(x)} - \cancel{hf'} - \frac{h^2}{2} f'' - \cancel{\frac{h^3}{3!} f'''} - \frac{h^4}{4!} f^4$$

$$\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$$

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) = 3h^2 f'' + \frac{15}{12} h^4 f^4$$

$$\frac{30}{4!} = \frac{\cancel{30}^{\,15}}{\cancel{24}_{\,12}}$$

Para estimar la derivada central se compara las expresiones de ambos desarrollos de Taylor.

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= 2f(x) + \cancel{hf'(x)} + \frac{h^2}{\cancel{2}} f''(x) + \cancel{\frac{h^3}{3!} f'''(x)} + \ldots + \frac{h^4}{4!} f^4 + \frac{h^5}{5!} f^5 \\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots + \frac{h^4}{4!} f^4 - \frac{h^5}{5!} f^5
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Restamos las dos expresiones tenemos:

$$2h\, f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underbrace{\frac{h^2 \cdot 2h}{3} f'''(x)}_{\mathcal{O}(h^2)} \tag{1.21}$$

para algún punto de la partición:

$$f'(x_j) \cong \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2h}. \tag{1.22}$$

Notar que la estimación central tiene un orden $\mathcal{O}(h^2)$ en la estimación.

$$2f(x) + h^2 f'' + \frac{2h^4}{4!} f^4 = f(x+h) + f(x-h)$$

$$f^4 = 12\, \frac{\left(f(x+h) + f(x-h) - h^2 f'' - 2f(x)\right)}{h^4}$$

$$= 12\left(f(x+h) + f(x-h) - \left(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right) - 2f(x)\right)$$

Para estimar la segunda derivada numérica, se suma los dos desarrollos de Taylor en la Ecuación (1.20).

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.24}$$

para algún punto de la partición:

$$f''(x_j) \cong \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})}{h^2} \tag{1.25}$$

Notar que la estimación tiene un orden $\mathcal{O}(h^2)$ en la estimación.

5.

Se hace el desarrollo de Taylor para la derivada progresiva y y regresiva, con un salto $=h$ y $=2h$

$$f(x+h) = f(x) + hf' + \frac{h^2}{2}f'' + \frac{h^3}{3!}f''' + \frac{h^4}{4!}f^4$$

$$f(x-h) = f(x) - hf' + \frac{h^2}{2}f'' - \frac{h^3}{3!}f''' + \frac{h^4}{4!}f^4$$

$\frac{2}{4!} = \frac{1}{12}$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf' + 2h^2f'' + \frac{16h^3 f'''}{3!} + \frac{16h^4}{4!}f^4$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf' + 2h^2f'' - \frac{16h^3 f'''}{3!} + \frac{16h^4}{4!}f^4$$

$\frac{32}{4!}$

$\frac{15}{12}h^4f4$

Se encuentra la derivada central comparando las expresiones de esta forma y despejando DF^4

$$\rightarrow f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) = 3h^2f'' + \frac{15}{12}h^4f4$$

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) = 3h^2f'' + \frac{15}{12}h^4f4$$

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) - 3h^2f'' = \frac{15h^4f^4}{12}$$

Tomamos $f'' = \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

Reemplazamos:

$$f(x+2h) - f(x+h) - f(x-h) + f(x-2h) - 3f(x+h) + 6f(x) - 3f(x-h) = \frac{15}{12} f^4 h^4$$

$$\frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} = \frac{15}{12} f^4$$

Para algún punto en la partición:

$$D^4 f(x_j) \simeq \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

Se tiene un error de truncamiento $O(h^2)$ ya que:

$$\left.\frac{h^2}{6!} f^6(x) \right\} O(h^2)$$