Se sabe que:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

por lo que el error sería:

$$E(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right) \to$$

Integrando:

$$u = f(x) \qquad dv = dx$$
$$du = f'(x) \qquad v = x + C$$

$$\therefore \; E(x) = \underbrace{(x+C)\,f(x)}_{w}\Big]_a^b - \left[\int_a^b (x+C)\,f'(x)\,dx - \underbrace{\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)}_{z}\right]$$

Para que el error permita que $\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) = \int_a^b f(x)dx$ w y z deben ser iguales para poder cancelarlo.

$$(x+C)f(x)\Big]_a^b = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(f(a)+f(b)\right)$$

$\to$

$$(b+c)f(b) - (a+c)f(a) = \frac{1}{2}b\,f(a) + \frac{1}{2}b\,f(b) - \frac{1}{2}a\,f(a) - \frac{1}{2}a\,f(b)$$

$$c\left(f(b)-f(a)\right) = -\frac{1}{2}b\,f(b) + \frac{1}{2}a\,f(a) + \frac{1}{2}b\,f(a) - \frac{1}{2}a\,f(b)$$

$$C = -\frac{1}{2}\left(f(b)\right)(a+b) + \frac{1}{2}\left(f(a)\right)(a+b) \,.\, \left(f(b)-f(a)\right)^{-1}$$

$$C = \frac{1}{2}(a+b)\left(f(a)-f(b)\right) .\, \left(f(b)-f(a)\right)^{-1}$$

Luego:

$$C = -\frac{1}{2}(a+b) \rightarrow E(x) = -\int_a^b (x - C) f'(x)\,dx$$

$$\therefore \quad E(x) = -\int_a^b \left(x + \frac{1}{2}(a+b)\right) f'(x)\,dx$$

integrando:

$$u = f'(x) \qquad dv = \left(x + \frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$du = f''(x) \qquad v = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a+b}{2}\right)^2 + C$$

Así:

$$E(x) = -\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + C\right] f'(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + C\right] f''(x)\,dx$$

Repitiendo el mismo procedimiento anterior en donde se despeja "C" cuando $E(x) = 0$

$$\rightarrow C\left(f'(a) - f'(b)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(f'(b) - f'(a)\right)$$

$$\rightarrow C = -\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Por tanto:

$$E(x) = \int_a^b \left[\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right] f''(x)\,dx$$

ahora, debe existir un $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$E(x) = f''(\xi) \int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right] dx$$

pero:

$$\int_a^b \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right] = I$$

Entonces:

$$I = \frac{1}{6}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 x \Bigg]_a^b$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right) - \frac{1}{2} b + \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2} a \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[\frac{b-a}{3} - \frac{b-a}{2} \right] \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}(b-a)\right)$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} \rightarrow E(x) = f''(\xi) \cdot I$$

$$\therefore |E(x)| = f''(\xi)\left(\frac{(b-a)^3}{12}\right)$$

Como $\xi \in [a,b] \rightarrow$ se necesita el valor de ξ que maximice el error. Por lo que:

$$|E(x)| = \max\left(f''(\xi)\left[\frac{(b-a)^3}{12}\right]\right)$$

Al tener en cuenta que $h = b-a \rightarrow$

$$|E(x)| = \max(f''(\xi)) \left[\frac{h^3}{12}\right]$$