4. (**Theoretical**) Muestre con detalle que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j \tag{3.48}$$

Suponemos un sistema donde $A = M(n \times m)$, x un vector de n filas y b un vector de m filas

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_{11} x_1 = b_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 \cdots A_{nm} x_n = b_n$$

Tenemos que si $m = n$ $A_{ij} = 1$, por lo tanto tenemos:

$$x_1 = b_1$$

$$A_{21} x_1 + x_2 = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 \cdots x_n = b_n} \quad (1)$$

Generalizamos esto al despejar x_n de la ecuación (1)

$$A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 \cdots + x_n = b_n$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} A_{mn} x_n + x_n = b_n$$

$$\boxed{x_n = \sum_{n=0}^{m-1} A_{mn} x_n - b_n}$$

//

5. (**Theoretical**) Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}x_j}{A_{ii}} \tag{3.49}$$

donde $i = n, n-1, ..., 0$. Note que la diagonal de la matriz triangular superior puede tener cualquier valor.

Suponemos un sistema donde $A = M(n \times m)$, x un vector de n filas y b un vector de m filas

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \cdots A_{1n}x_n = b_1 \quad (1)$$

$$A_{22}x_2 \cdots A_{2n}x_n = b_2$$

$$A_{nm}x_n = b_n \quad (m = n)$$

Generalizamos esto al despejar x_n de la ecuación (1)

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \cdots + A_{1n}x_n = b_1$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} A_{mn}x_n + A_{nn}x_n = b_n$$

$$x_n = \frac{\sum_{m=n+1}^{k} A_{mn}x_n - b_n}{A_{nn}}$$ donde $n = k, k-1 \ldots, 0$