Esperimento Aleatorio

Estraete 1 Asso

$\Omega = \{$Picche, Fiori, Cuori, Quadri$\}$

Insieme dei possibili **esiti** NOTO il risultato dell'esperimento è uno dei possibili esiti ma non è NOTO a priori

Lanciamo una moneta $\Omega = \{T, C\}$

Lanciamo 2 monete Ω? $\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$

Lanciamo 1 moneta finchè esce T

$\Omega = ? = \{\underset{1°}{T}, \underset{2°}{CT}, \underset{3°}{CCT}, \underset{4°}{CCCT}, \dots\dots\} \Rightarrow$ Modello Numerabile

Tempo trascorso fino al prossimo squillo di 1 telefono

$\Omega = [0, +\infty) \rightarrow$ Modello, ognuno fa un modello che può o funzionare o No.

Modello Non Numerabile

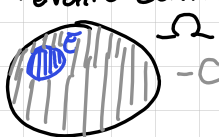
Possiamo fare delle scommesse sui risultati di un esperimento.

- Esce Asso di Cuori $\{♡\}$
- Esce un Asso Rosso $\{♡, ◇\}$
- Non esce l'Asso di picche $\{♡, ◇, \text{Fiori}\}$

Fatti di interessi, sono degli insiemi di Esiti $\Rightarrow$ EVENTO

Formalmente un EVENTO è un sottoinsieme dell'insieme dei possibili ESITI

$E \subset \Omega$ Vinciamo la scommessa se si verifica l'evento su cui abbiamo puntato. Non vinciamo se si verifica l'evento COMPLEMENTARE



- Complementare di $E = E'$

PROBABILITÀ DI UN EVENTO

Possibili sottoinsiemi di $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ $|\Omega| = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$ $\quad P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|}$

1 0 1 0

Vedo ogni sottoinsieme come 1 se appartiene e 0 se non appartiene $\Rightarrow |\Omega| = 2^n$

$P(\{\text{vinco la lotteria}\})$ $\Omega: \{\text{Vinco, non Vinco}\} = \frac{|\{\text{vinco}\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}}$ ← funzionali se gli elementi sono equiprobabili

Approccio Assiomatica

Sia Ω: insieme dei possibili esiti, sia $E \subset \Omega$, $P(E) \in [0, 1]$ $P(\Omega) = 1$

Presi E, F disgiunti $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

Insieme delle Parti

La Def $P(E) = \frac{|\text{casi fav}|}{|\text{casi pos}|}$ è coerente con gli assiomi della probabilità

funziona bene in casi con delle simmetrie

É un pò troppo se $|\Omega|$ è finito

1	II	2/10
2	II	2/10
3	I	1/10
4		0/10
5	III	3/10
6	II	2/10

5 persone

quanti i possibili posti di arrivo?

5! Permutazioni

3 Podi, quanti possibili podi? $\frac{5!}{(5-3)!}$ Disposizioni

Quali sono i possibili gruppi di persone premiate

$5 \cdot 4 \cdot 3 =$ modi Ordinati

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \binom{5}{3}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = ? \quad \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} =$$

Combinazione

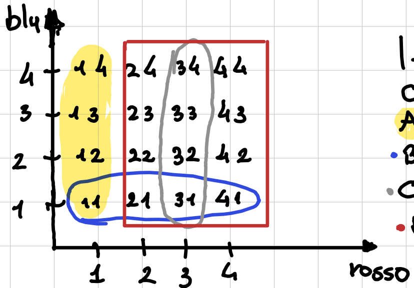
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ → Numero di k sottoinsiemi

Principio fondamentale del calcolo combinatorio

se gli elementi di un insieme E possono essere identificati con una sequenza di k scelte

Lancio 2 dadi equilibrati a 4 facce (uno rosso, uno blu)

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$



$|\Omega| = 16$

CALCOLIAMO LA PROBABILITÀ:

- A) ottengo 1 con il dado rosso
- B) ottengo 1 con il dado blu
- C) ottengo 3 con il dado rosso
- D) Non ottengo 1 col dado rosso

$P(A) = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{1}{4}$

$P(C) = \frac{1}{4}$

$P(D) = \frac{3}{4}$

$D = A^c \Rightarrow P(D) = P(A^c)$

e $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$

Posso farlo perchè sono disgiunti $A \cap A^c = \emptyset$

$\boxed{A \cap B = AB}$

H: { non si ottiene nessun Esito } = probabilità di 0%

E = somma dei risultati ≤ 3

F = somma dei ris da ≤ 3 e dado rosso da 1

$\Rightarrow P(F) = EA = \{(1,2)(1,1)\} = \frac{1}{8}$

G: Almeno 1 dado dà 1

$A \cup B$ $\quad P(G) = P(A) + P(B)$? No perchè A e B non sono disgiunti

$A \cup (B \setminus A) \Rightarrow P(G) = P(A) + P(B)$

$B = (B \setminus A) \cup (AB) \Rightarrow P(B) = P(B \setminus A) + P(AB)$

Domanda: Qual'è la probabilità che il dato rosso dia 1 sapendo che la somma dei ris da ≤ 3

$P(A|E) = P(AE)/P(E) = \frac{2/16}{3/16} = 2/3$ ← affinche si verifichi E qual'è la probalità di stare in A

probabilità di A condizionata a verificarsi dell'evento E

Ossi: $P(A|E)$ è ancora una probabilità sui sottoinsiemi di Ω

$$P(\Omega|E) = \frac{P(E\Omega)}{P(E)} = \frac{P(E)}{P(E)} = 1$$

$$P(A \cup B | E) = \frac{P((A\cup B)\cap E)}{P(E)} = \frac{P((A\cap E) \cup (B \cap E))}{P(E)} = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} + \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = P(A|E) + P(B|E)$$

$A \cap B = \emptyset$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/16}{1/4} = \frac{1}{4} = P(A)$ Se succede questo $\Rightarrow$ A e B si dicono INDIPENDENTI

Def: $A \perp B$ se $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ [Possiamo includere in questo modo: casi $P(A)=0$ e $P(B)=0$]

A e B sono Indipendenti

se $A \perp B$ $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$ ossi: se $A \perp B \Rightarrow B \perp A$

Ossi: se $A \perp B \Rightarrow A^c \perp B$

$P(A^c B) = P(B-A) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \cdot P(A^c)$

ossi: Leggi di de Morgan: $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$

Esempi: [quello di prima]

A) Dado rosso da 1

E) La somma dei punteggi è 3

F) La somma dei punteggi è 5

DETERMINARE se $A \perp E$; $A \perp F$

$P(A|E) \neq P(E|A)$

$P(A) = 1/4$

$P(E) = 2/16 = 1/8$

$P(F) = 4/16 = 1/4$

$P(A \cap E) = 1/16 \overset{?}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \,!= \frac{1}{32}$

$P(A \cap F) = 1/16 \overset{?}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ ✓

$A \cap E = \{(1,2)\}$ $E = \{(1,2),(2,1)\}$

$A \cap F = \{(1,4)\}$ $F = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)\}$

$A = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)\}$

$A \perp F$

A ed E sono Dipendenti

Esercizio: Si pescano 2 carte da un mazzo di 52 calcolare la prob che le 2 carte siano rosse:

Ω: tutte le coppie di carte da un mazzo di 52: $= \{\{1P, 2P\}, \ldots, \{3C, 4Q\}, \ldots, \{QF, KF\}\}$

A: tutte coppie Rosse $= \{\{1C, 1Q\}, \ldots, \{QQ, KQ\}\}$

Possiamo assumere che ∀ le coppie hanno stessa prob

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $|\Omega| = \binom{52}{2} = \frac{52!}{2!\,50!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{2 \quad \cancel{50!}} = 1326$

$|A| = \binom{26}{2} = \frac{26!}{2\;24!} = \frac{26 \cdot 25}{2} = 325$

$P(A) = \frac{325}{1326} = 0{,}245 \cong 24{,}5\%$

Altro modo di risolvere

Ω ordinate coppie $= 52 \cdot 51$

A ordinate rosse $= 26 \cdot 25$

Si lanciano 3 dadi equilibrati a 6 facce

calcolare $P(\text{tutti } 6)$

$P(\text{nessun } 6)$

$P(\text{almeno un } 6)$

Urna contiene 6 palline rosse e 12 bianche

Pesco 2 palline (senza/con rinserimento)

$P(2 \text{ bianche})$

$P(1 \text{ bianca})$

pesco 4 $P(4\,b)$ $P(2\,b)$

$P(1\,b)$ $P(\text{almeno } 1b)$

Altro Approccio

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$

B: prima carta pescata rossa A: seconda carta pescata rossa

$A \cap B$: Entrambe le carte sono rosse

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51}$

Lancio 3 dadi equilibrati a 6 facce

$P(\text{tutti } 6)$ $\Omega \{(x,y,z) \text{ con } x \in \{1,\dots,6\}\ y \in \{1,\dots,6\},\ z \in \{1,\dots 6\}\}$

$A: \{(6,6,6)\}$ Assumiamo "esiti equiparabili"

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3}$$

$P(\text{nessun } 6)$ $B: \{(x,y,z) \text{ con } x \in \{1,\dots,6\}\ y \in \{1,\dots 6\},\ z \in \{1,\dots,6\}\}$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^3}$ $P(\text{Almeno un } 6)$ $C_1: \{\text{il primo dado da } 6\}$

$C: \{\text{Almeno un } 6\}$ $C_2: \{\text{il secondo da } 6\}$

$C_3: \{\text{il terzo da } 6\}$

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \frac{3}{6}$ No

$P(C_1) = \frac{|C_1|}{|\Omega|} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$ $P(C_2) = \frac{1}{6}$ $P(C_3) = \frac{1}{6}$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - P(C_1C_2) - P(C_1C_3) + P(C_1C_2C_3)$

$P(C_1 \cup (C_2 \cup C_3)) = P(C_1) + P(C_2 \cup C_3) - P(C_1(C_2 \cup C_3)) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - P(C_2C_3) - P(C_1C_2 \cup C_1C_3) =$

$= P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - [P(C_1C_2) + P(C_1C_3) - P(C_1C_2C_3)]$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \dots = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\dots<i_r} P(A_{i_1} \cdots A_{i_r})$$

$P(\text{Almeno un } 6) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) - P(C_1C_2) - P(C_2C_3) - P(C_1C_3) + P(C_1C_2C_3) = 3 \cdot \frac{1}{6} - 3\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3}$

$P(C_1C_2) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{6^2}$ $P(C_1C_2C_3) = \frac{1}{6^3}$

Ossi: $\underbrace{C}_{\{\text{almeno un } 6\}} = \underbrace{B^C}_{\{\text{nessun } 6\}^C}$ $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5^3}{6^3}$

6 rosse 12 bianche pesco due palline a caso (senza rimescolamento)

P(2 bianche) Ω: tutte le coppie di palline $|\Omega| = \binom{18}{2}$ $|(2\text{ bianche})| = \binom{12}{2} \Rightarrow P(2\text{ bianche}) = \dfrac{\binom{12}{2}}{\binom{18}{2}}$

$= \dfrac{12 \cdot 11}{18 \cdot 17}$ ALTERNATIVA A_1: 1° pallina è bianca

A_2: 2° pallina è bianca $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \dfrac{12}{18} \cdot \dfrac{11}{17}$

$P(A_2) = \dfrac{12 \cdot 17}{18 \cdot 17} = \dfrac{12}{18}$

P(1 bianca e una no) = A_1: la 1° bianca $P(A_1 A_2^c \cup A_1^c A_2) = P(A_1 A_2^c) + P(A_1^c A_2)$ $P(A_1 A_2^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c | A_1) =$

A_2: la 2° bianca $= \dfrac{12}{18} \cdot \dfrac{6}{17}$ $P(A_1^c A_2) = P(A_1^c) \cdot P(A_2 | A_1^c) = \dfrac{6}{18} \cdot \dfrac{12}{17}$

$\Rightarrow P(1\text{ bianca}) = 2 \cdot \dfrac{12}{18} \cdot \dfrac{6}{17}$

$\dfrac{|1\text{ bianca}|}{|\Omega|} = \dfrac{\binom{12}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{18}{2}} = \dfrac{12 \cdot 6 \cdot}{18 \cdot 17} \cdot \dfrac{2}{1}$

pesco 4 palline

P(tutte bianche)

A_1: 1° bianca

A_2: 2° bianca $P(\{A_1 A_2 A_3 A_4\}) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot P(A_4 | A_1 A_2 A_3) =$

A_3: 3° bianca $= \dfrac{12}{18} \cdot \dfrac{11}{17} \cdot \dfrac{10}{16} \cdot \dfrac{9}{15}$

A_4: 4° bianca

$P(\text{esattamente una bianca}) = \dfrac{\binom{12}{1}\binom{6}{3}}{\binom{18}{4}}$

$P(\text{due bianche}) = \dfrac{\binom{12}{2} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{18}{4}}$ P(Almeno una bianca) = 1 - P(tutte rosse)

$1 - \dfrac{\binom{6}{4}}{\binom{18}{4}}$

Ripetiamo l'esperimento con Reinserimento.

$P(\text{tutte bianche}) = \dfrac{12^4}{18^4}$ $P(\text{esattamente 2 bianche}) = \binom{4}{2}\left(\frac{12}{18}\right)^2\left(\frac{6}{18}\right)^2$ $P(\text{le prime due bianche}) = \dfrac{12^2}{18^2} \cdot \dfrac{6^2}{18^2}$

pesco 5 palline con Reinserimento

$P(\text{esattamente 3 bianche}) = \binom{5}{3}\left(\frac{12}{18}\right)^3\left(\frac{6}{18}\right)^2$

3 Eventi A, B, C sono ... indipendenti

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(AC) = P(A)\, P(C)$

$P(BC) = P(B) \cdot P(C)$

Lancio dado a 4 Facce

$A: \{1, 4\}$, $B: \{2, 4\}$ $C: \{3, 4\}$

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$

$P(ABC) = 1/4 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Esercizio: Si consideri una mano di poker, calcolare la probabilità delle seguenti:

p("poker") $\to$ 4 carte con stesso valore e 1 carta casuale.

Ω: tutti i sottoinsiemi di 5 carte $|\Omega| = \binom{52}{5}$

$A = \{$4 carte con stesso valore, 1 carta qualsiasi$\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$\binom{13}{1} = 13$ rank del poker

$\binom{48}{1}\begin{cases}\binom{12}{1} = 12 \text{ rank altra carta} \\ \binom{4}{1} = 4 \text{ seme altra carta}\end{cases}$

$$P(A) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$$

$B: \{$La mano è un full$\}$ 3 carte stesso rank
2 carte stesso rank

$\binom{13}{1}$ rank del tris
$\binom{4}{3}$ semi tris
$\binom{12}{1}$ rank coppia
$\binom{4}{2}$ semi coppia

$$P(B) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

$C: \{$La mano è doppia coppia$\}$
2 coppie + 1 carta

$\binom{13}{1}$ rank prima coppia $\binom{4}{2}$ semi prima coppia
$\binom{12}{1}$ rank seconda coppia $\binom{4}{2}$ semi sec coppia
$\binom{11}{1}$ carta casuale $\binom{4}{1}$ seme carta casuale

Errato perchè 2p2f 3Q3C 5F = 3Q3C2P2F5F ma viene contato 2 volte

$|C|$
rank due coppie $-\binom{13}{2}$
semi coppia alta $-\binom{4}{2}$
semi coppia bassa $-\binom{4}{2}$
rank altra carta $\binom{11}{1}$
seme altra carta $\binom{4}{1}$

$D: \{$ottengo un tris$\}$ rank tris

$\binom{13}{1}\binom{4}{3}\ \binom{12}{2}\binom{4}{2}$

Esempio: su un tavolo ci sono 2 mazzi di carte, 1 regolare e 1 con solo carte rosse.
Scegliamo 1 mazzo a caso e da questo peschiamo 1 carta, probabilità che esca 1 carta rossa

$A: \{$pesco carta rossa$\}$
$E: \{$pesco dal mazzo regolare$\}$

$A = AE \cup AE^c$ $\quad P(A) = P(A|E) \cdot P(E) + P(A|E^c) \cdot P(E^c)$

sono disgiunti

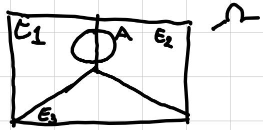
Probabilità di scegliere 1 dei due mazzi

$$P(A) = P(A|E) \cdot P(E) + P(A|E^c) \cdot P(E^c)$$

Probabilità di pescare rosse nel mazzo regolare: $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ Probabilità di pescare carta rossa nel mazzo solo rosso: 1 $\quad$ $\frac{1}{2}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$$

2 mazzi: → regolare se $\{1,2,3\}$
→ rosse se $\{4,5\}$
→ nere se $\{6\}$



A: pesco una carta rossa

$E_1, E_2 \dots E_m$ sono una partizione di: Ω se $E_1 \subset \Omega, \dots, E_m \subset \Omega$ ed $E_1, \dots E_m$ sono disgiunti

$E_1: \{1,2,3\}$

$E_2: \{4,5\}$

$E_3: \{6\}$

$A = AE_1 \cup AE_2 \cup AE_3$

$$P(A) = \underset{1/2}{P(A|E_1)} \cdot \underset{\cancel{3/6}\ 1/2}{P(E_1)} + \underset{1}{P(A|E_2)} \cdot \underset{\cancel{2/6}\ 1/3}{P(E_2)} + \underset{0}{P(A|E_3)} \cdot \underset{1/6}{P(E_3)}$$

$P(A)$

mazzi: → regolare ← croce
→ rosse ← testa

Qual'è la probabilità che sia uscita testa se la carta pescata è rossa.

E: {la moneta dà testa}
A: {carta rossa}

$$P(E|A) = \frac{P(EA)}{P(A)} = \frac{P(A|E) \cdot P(E)}{P(AE) + P(AE^c)} = \frac{P(A|E) \cdot P(E)}{P(A|E) \cdot P(E) + P(A|E^c) \cdot P(E^c)}$$

→ TEOREMA di Bayes

$P(E|A)$

Avendo partizioni: $E_1, \dots, E_m$

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k) \cdot P(E_k)}{P(AE_1) + \dots P(AE_k) + \dots + P(AE_m)}$$

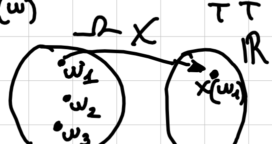
$k \geq 1$ e $\leq m$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\omega)$

Variabile Aleatoria

Esempio ⚁ ⚃ → 7
T T → 2



Ex: lancio 1 moneta

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
T	1	-1
C	0	+1

Ex: lancio 2 monete

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$ ← conta il num di teste
TT	1	2
TC	2	1
CT	3	1
CC	4	0

$\mathbb{1}\{A\}$ vale 1 se vale A sennò 0}

Ex: lancio 2 monete

A: {la prima dà testa} B: {la seconda mon. dà testa}

ω	$\mathbb{1}\{A\}$	$\mathbb{1}\{B\}$	$\mathbb{1}\{A\} + \mathbb{1}\{B\}$
TT	1	1	2
TC	1	0	1
CT	0	1	1
CC	0	0	0

Sommando delle variabili/funzioni indicatrici degli eventi: $A_1, A_2 \dots A_m$ Contiamo quanti degli eventi si sono verificati

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto X(\Omega)$

esperimento: lancio 2 monete

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$Z(\omega)$
TT	1	2	
TC	1	1	
CT	0	1	
CC	0	0	
$\underset{\sim}{\Omega}$			

$X(\omega)$: funzione indicatrice dell'evento 1° lancio dà testa

$Y(\omega)$: N° di volte che esce testa

Possiamo definire gli eventi di interesse in termine dei valori assunti da una V.A.

es. $\{X = 1\} = \{\text{Testa al primo lancio}\} = \{TT, TC\}$

$\{X \in A\}$ Non c'è una associazione diretta

Come calcoliamo la probabilità di un evento descritto in termini dei valori assunti da una V.A

$P(X \in A) = P(\{\omega \text{ s.t. } X(\omega) \in A\})$

Consideriamo l'esperimento: "lancio due monete"

CASO MONETE EQUILIBRATE   V.A X che "conta" il # di teste

$X \in \underbrace{\{0, 1, 2\}}_{\text{Supporto di } X \quad S_X}$

Nome non standard.

$$P(\{X=0\}) = \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)}_{P(A^c)}\underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}\right)}_{P(B^c)} \qquad P(\{X=1\}) = \binom{2}{1}\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) \qquad P(\{X=2\}) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(A)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(B)}$$

Supponiamo che gli esiti dei lanci siano indipendenti

A: {Testa al primo lancio} $\perp$ B: {Testa al secondo lancio} $\Rightarrow P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

CASO MONETE DANNO TESTA CON PROBABILITÀ p

$X \in \{0, 1, 2\}$

$$P(\{X=2\}) = p^2 \quad P(\{X=0\}) = (1-p)^2 \quad P(\{X=1\}) = \binom{2}{1}\underbrace{p}_{\text{Testa}}\underbrace{(1-p)}_{\text{Croce}}$$

con $A \perp B$

Probabilità p di testa con m lanci con V.A X che conta il # di teste

Tutti i lanci siano indipendenti

$X = \{0, 1, \dots, m\}$

$$P(\{X=m\}) = p^m \quad P(\{X=0\}) = (1-p)^m \quad P(\{X=1\}) = \binom{m}{1}p(1-p)^{m-1} \quad P(\{X=K\}) = \binom{m}{K}p^K(1-p)^{m-K}$$

↳ Funzione di Densità Discreta

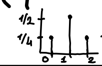
X definita come sopra è un modello per il # di successi in m prove indipendenti ciascuna con probabilità di successo p

X è una V.A con distribuzione binomiale di parametri m e p $X \sim bin(m, p)$

$P_X(x_i) = P(\{X = x_i\})\ \forall x_i \in supp(X)$

Oss: $P(\{X=0\}^c) = 1 - (1-p)^m = P(\{X>0\}) \quad P(\{X=m\}^c) = 1 - p^m = P(\{X<m\})$

$0 \le P_X(x_i) \le 1 \quad \sum_{x_i \in S_X} P_X(x_i) = 1$ Esempio monete $P_X(0) = \frac{1}{4} \quad P_X(1) = \frac{1}{2} \quad P_X(2) = \frac{1}{4}$



← Densità Discreta (analogo della Frequenza Relativa)

2 monete equilibrate X conta teste

$P(\{X=0\})=\frac{1}{4}$ $P(\{X=1\})=\frac{1}{2}$ $P(\{X=2\})=\frac{1}{4}$

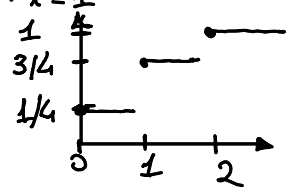
$F_X(0)=P(X\le 0)=\sum_{\substack{x_i\in\{0,1,2\}\\ \text{st } x_i\le 0}} P_X(x_i)=P_0(0)=\frac{1}{4}$

$F_X(1)=P(\{X\le 1\})=\sum_{\substack{x_i\in\{0,1,2\}\\ x_i\le 1}} P_X(x_i)=P_X(1)+P_X(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$F_X(2)=\sum_{\substack{x_i\in\{0,1,2\}\\ x_i\le 2}} P_X(x_i)=P_X(2)+P_X(1)+P_X(0)=$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

F_X Analogo della funzione di ripartizione Empirica



$F_X(1,5)?=\frac{3}{4}$

oss: $F_X(x)$ è definita $\forall x\in\mathbb{R}$

F_X è non decrescente continua a salto

$\lim_{x\to\infty} F_X(x)=1$

$\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$

Come calcolo $p(X=x_i)$ a partire dalla funzione di distr.

$\{X=x_i\}=\{X\le x_i\}\setminus\{X<x_i\}=\{X\le x_i\}\setminus\{X\le x_{i-1}\}$

$\Rightarrow P(X=x_i)=F_X(x_i)-F_X(x_{i-1})$

Lanciando una moneta che dà testa con prob. p, quante teste mi aspetto di ottenere?

X: V.A conto # di teste in n lanci

$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)=\sum_{x_i\in S_X}\sum_{\substack{\omega \text{ t.c}\\ X(\omega)=x_i}} P(\{\omega\})X(\omega)=\sum_{x_i\in S_X}\sum_{\substack{\omega \text{ t.c}\\ X(\omega)=x_i}} P(\{\omega\})x_i=\sum_{x_i\in S_X} x_i\sum_{\substack{\omega \text{ t.c}\\ X(\omega)=x_i}} P(\{\omega\})=\sum_{x_i\in S_X} x_i\cdot P(X=x_i)$

Valore Atteso della V.A X

Esempio 1: Una moneta equilibrata X: # teste $X\sim bin(2, 1/2)\Rightarrow E(X)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

Esempio: Una moneta con prob p X: # teste $X\sim bin(2,p)\Rightarrow E(X)=0\cdot(1-p)^2+1\cdot 2\cdot(1-p)+2\cdot p^2=$

$=2p$

Lancio 1 dado equilibrato a 4 facce X: punteggio ottenuto

$E(X)=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4=5/2$

$X\in\{1,2,3,4\}$

Lancio 2 dadi 4 facce: X: somma dei punteggi

$X\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$

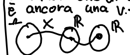
$E(X)$?

$X\sim$ Bernoulli (p)

Esempio

Lancio 1 dado a 6 facce $X=\begin{cases}1 & \text{se esce } 6\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ $E(X)=1\cdot P(X=1)+0\cdot P(X=0)=p$

Una funzione di una variabile Aleatoria è ancora una V.A



$Z=2X+1$

ω	$X(\omega)$	$Y(\omega)=[X(\omega)]^2$
TT	2	4
TC	1	1
CT	1	1
CC	0	0

Es: Sia $Y=f(X)$ calcolare $E(Y)$

X: V.A con distr. Nota

$E(X)$

$E(Z)$

Sia $Y = f(X)$, X è una V.A con distribuzione nota calcolare $E(Y)$

Calcolate $E(X), E(Y), E(Z)$

x_i	$P_X(x_i)$
0	3/10
1	2/10
2	4/10

y_i	$P_Y(y_i)$
0	3/10
1	3/10
4	4/10

z_i	$P_Z(z_i)$
1	3/10
2	3/10
5	4/1

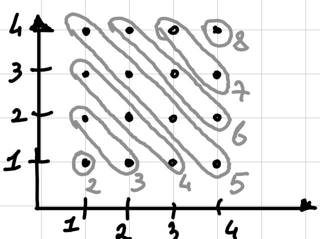
$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{11}{10}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{19}{10}$$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{4}{10} = \frac{29}{10}$$

lancio 2 dadi Equilibrati a 4 facce

X: somma dei panteggi, quanto vale $E(X)$? $\quad X \in \{2, 3, \cdots, 8\}$



$$E(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i \cdot P_X(x_i)$$

$$P_X(2) = \frac{1}{16}$$

$$P_X(3) = \frac{2}{16}$$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{4}{16} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 7 \cdot \frac{2}{16} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 5$$

Quanto vale il valore atteso del doppio delle somme dei punteggi aumentato di 3 ?

$$Y = 2X + 3 \qquad E(Y) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i \cdot P_Y(y_i) \qquad E(Y) = \sum_{y_i \in S_Y} y_i P_Y(y_i) = \sum_{y_i \in S_Y} \sum_{x_i \in S_X} Y(x_i) P_X(x_i) = \sum_{x_i \in S_X} Y(x_i) P_X(x_i)$$

Per calcolare il valore atteso della y dobbiamo determinare esplicitamente la densità discreta della y

$$E(Y) = \sum_{x_i \in S_X} (2x_i + 3) \cdot P_X(x_i) = \sum_{x_i} 2x_i \cdot P_X(x_i) + \sum_{x_i} 3 \cdot P_X(x_i) = \underbrace{2 \sum_{x_i} x_i \cdot P_X(x_i)}_{E(X)} + \underbrace{3 \sum_{x_i} P_X(x_i)}_{1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{2} + 3 = 8 \qquad Y = aX + b \Rightarrow E(Y) = aE(X) + b$$

$$X \begin{cases} -1 & \text{prob } 1/3 \\ 0 & \text{"} \quad 1/3 \\ 1 & \text{"} \quad 1/3 \end{cases} \qquad Y = X^2 \begin{cases} 1 & \text{prob } 2/3 \\ 0 & \text{prob } 1/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \sum_{x_i} Y(x_i) P_X(x_i)$$

$$E(Y) = 1 \cdot 2/3 + 0 \cdot 1/3 = 2/3 = \sum_{y_i} y_i P_Y(y_i)$$

$Y = aX + b \Rightarrow E(Y) = aE(X) + b$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ possiamo definire su Ω più di una V.A

es: Lancio 2 monete

Ω: TT, TC, CT, CC

$X: \begin{cases} 1 & \text{prima moneta} = T \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$ $\quad Y: \begin{cases} 1 & \text{se 2° moneta} = T \\ 0 & \text{altr.} \end{cases}$ $\quad Z: \begin{cases} 1 & \text{se TT} \\ 2 & \text{se CC} \\ 3 & \text{altr.} \end{cases}$

Y \ X	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$P_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ Densità Discreta Congiunta

$0 \leq P_{XY}(x,y) \leq 1$

$P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x,y) \qquad \sum_{xy} P_{XY}(x,y) = 1$

$P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x,y)$

Z \ X	0	1
1	0	1/4
2	1/4	0
3	1/2	1/2

$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

esempio: $F_{XZ}(2, 2) = \frac{1}{2}$

$F_{XZ}(1, 1) = \frac{1}{4}$

$F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$

$F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y)$

Esercizio Ricavate le Densità Discr. e quelle marginali a partire dalla F

Def: Due variabili Aleatorie sono Indipendenti se:

$\forall x, y \quad P_{XY}(x,y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$ altrimenti si dicono Dipendenti

$E(X+Y) = \sum_{x,y} (x+y) \cdot P_{XY}(x,y) = \text{---} = E(X) + E(Y)$

oss: Non abbiamo utilizzato il Fatto che X e Y sono indipendenti

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ Non richiede Indipendenza

Es: Si lancino 2 dadi a 4 Facce $\quad X$: # di 4 ottenuti nei due lanci $\to bin(2, 1/4)$ $\quad E(X)$?

$P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad P(X=1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{2}{1} = \frac{6}{16} \quad P(X=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{9}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$X_1 \begin{cases} 1 \text{ se primo lancio da } 4 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ $X_2 \begin{cases} 1 \text{ se secondo lancio da } 4 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$X = X_1 + X_2$ V.A che contano qualche evento può essere Riscritta come somma di V.A indicatrici di un qualche Evento

$\Rightarrow E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Lancio 10 dadi a 4 Facce

X: # 4 in 10 lanci $X \sim bin(10, 1/4)$

$X_i = \begin{cases} 1 \text{ se i-esimo lancio} = 4 \\ 0 \text{ se i-esimo lancio} \neq 4 \end{cases}$ $i = 1, \dots, 10$

$P(X=7) = \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \binom{10}{7}$

$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{10}$

$E(X) = E(X_1) + E(X_3) + \dots + E(X_{10}) =$

$P(X>0) = 1 - P_X(0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

$= 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$

se $X \sim bin(m, p)$, $E(X) = m \cdot p$ perché $X = X_1 + \dots + X_m$

$\Rightarrow E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_m) = \underbrace{p + \dots + p}_{m\text{-volte}}$

Varianza di X $Var(X) = E([X - \underset{\text{numero}}{E(X)}]^2) = \dots = E(X^2) - [E(X)]^2$

Es: Sia $X \sim bin(m, p)$ quanto vale $Var(X)$ $\to$ $X = X_1 + \dots + X_m$

$X_i \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ X_i indip $\Rightarrow Cov = 0$

$Z: X+Y$ $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{E([X - E(X)][Y - E(Y)])}_{\text{Covarianza}}$ $\Rightarrow E(XY) - E(X)E(Y)$

$\begin{cases} Cov(X,Y) = Cov(Y,X) \\ Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) \\ Cov(aX+b, cY+d) = a \cdot c \cdot Cov(X,Y) \end{cases}$

$\Rightarrow Var(X) = Var(X_1) + \dots + Var(X_m)$

indipendenti i.i.d ; $\Rightarrow Var(X) = m \cdot Var(X_1)$
$= m(p - p^2) = mp(1-p)$

se $X \perp Y \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$

se $X \perp Y \Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$Var(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2$
$= E(X_1) - [E(X_1)]^2 = p - p^2$

$X_1^2 \begin{cases} 1^2 = 1 \\ 0^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1$

Si pescano 5 carte con reinserimento da un mazzo di 52 carte

X: # carte di cuori pescate

$P(X=3)$

$E(X)$

$Var(X)$

$X \sim bin(n=5, p=1/4)$

$E(X)=n \cdot p$

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$Var(X)=n \cdot p \cdot (1-p)$

$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$E(X)=5 \cdot \frac{1}{4}$

$x_i^2 = x_i$

$x_i \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo carta di cuori} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$X=\sum_{i=1}^{5} x_i \qquad E(X)=E\left(\sum x_i\right)=\sum_{i=1}^{5}E(x_i)=5 \cdot \frac{1}{4}$

$Var(X)=\sum_{i=1}^{5}Var(x_i)=5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}=\frac{15}{16}$

Ripetiamo il gioco senza reinserimento

X: # carte di cuori pescate

$P(X=3)=?$

$P(X=k)=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}=$

$X \sim hyp(N, n, R)$

carte, # estrazioni, carte speciali del mazzo

$=\binom{n}{k}\Big(\underbrace{\frac{R}{N}}_{p}\Big)^k\underbrace{\left(1-\frac{R}{N}\right)^{n-k}}_{1-p} \Rightarrow P(X=3)=\binom{5}{3}\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\left(1-\frac{10}{49}\right)\left(1-\frac{10}{48}\right)$

$E(X)=E(x_1)+\dots+E(x_5)=5 \cdot \frac{1}{4}$

$x_i \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo cuori} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E(x_1)=\frac{1}{4}=\frac{13}{52} \quad E(x_2)=\frac{13}{52} \dots \quad \frac{13 \cdot 51!}{52!}=\frac{13}{52}$

$E(x_i x_j)=P(x_i=1, x_j=1)$

$x_i x_j \begin{cases} 1 & x_i=x_j=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$x_j \backslash x_i$	0	1
0	0	0
1	0	1

$X \sim hyper(N, n, R) \quad Var(X)?$

$X=\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad x_i \begin{cases} 1 & i\text{-esimo carta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$Var(X)=Cov(X,X)=Cov\left(\sum_i^n x_i, \sum_j^n x_j\right)=\sum_i\sum_j Cov(x_i,x_j)=$

$\underbrace{\sum_i Cov(x_i,x_i)}_{\sum_i Var(x_i)}+\sum_i\sum_{j\neq i}Cov(x_i,x_j)$

$Cov(x_i,x_j)=E(x_iX_j)-E(x_i)E(x_j)$

X uniforme Discreta (dado a 4 facce)

$|supp(x)| = n \qquad P(X = x_i) = \frac{1}{4} \quad x_i \in supp(X)$

$supp(x) = 1, 2, \dots, n$

$\hookrightarrow E(x) = \frac{n+1}{2} \qquad Var(x) = \frac{n^2 - 1}{12}$

$X \sim$ geometrica a parametro p

\# di tentativi, in una serie di prove indipendenti, per avere il primo successo (# lanci per avere il primo 6

$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad E(x) = \frac{1}{p} \qquad Var(x) = \frac{1-p}{p^2}$

$X \sim$ Poisson (λ)

\# di "esiti vari" che si verificano $\sim$ binomiale $n >> 1$, $p << 1$, $np = \lambda$

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad E(x) = \lambda \qquad Var(x) = \lambda$

Variabili Aleatorie Continue

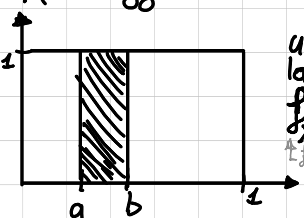
Si estrae un Numero uniformemente a caso nell'intervallo $[0, 1]$. Qual'è la probabilità che il numero estratto sia $1/2$?

$\frac{\text{\# CASI FAVOREVOLI}}{\text{\# CASI POSSIBILI}} = 0 \quad (\forall x \in [0, 1])$

tuttavia.... quanto mi aspetto che valga

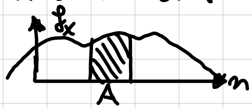
$P(\text{estraggo un numero} \le \frac{1}{2}) = ?$

estrarre uniformemente a caso da un intervallo $\leftrightarrow$ intervalli della stessa lunghezza hanno la stessa probabilità di "essere" scelti



una variabile Aleatoria continua è una V.A per cui la $P(X \in A)$ è specificata in termini di una funzione f_X e vale $\int_A f_X(t)\,dt$

funzione di densità di probabilità



Esempio nel caso di prima $A = [0, 1/2]$ $\quad P(X \in [0, 1/2]) = \int_0^{1/2} 1 \cdot dt = [t]_0^{1/2} = 1/2 \qquad f_X(t) \ge 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) = 1$

$\begin{cases} P_X(x_i) \ge 0 \\ \sum_{x_i} P_X(x_i) = 1 \end{cases}$

$U \sim \text{unif.}(0,1) \quad f_U(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le u \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\{0 \le u \le 1\} \quad P(U \le u) = \int_0^u 1\, dt \quad \int_{-\infty}^{u} \mathbb{1}\{0 \le t \le 1\}\, dt$

$p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

$F_X(x) := P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \qquad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

funzione di distribuzione della V.A X definita $\forall x$

funzione di distr. di una V.A unif.

$X \sim$ V.A con densità $f_X(x)$ $\quad E(X) = ? \quad Var(X) = ?$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \qquad Var(X) = E([X - E(X)]^2$

in generale $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$

$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f_U(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot \mathbb{1}\{0 \le u \le 1\}\, du = \int_0^1 u \cdot 1\, du =$

$= \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \qquad Var(U) = \left[E(U^2) - (E(U))^2\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot f_U(u)\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot \mathbb{1}\{0 \le u \le 1\}\, du = \int_0^1 u^2\, du = \frac{u^3}{3} = \frac{1}{3}$

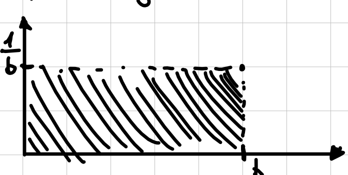
X una variabile aleatoria com $E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$

poniamo $Y = aX + b \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; Determimare $E(Y), Var(Y), E(Z), Var(Z)$

Sia $U \sim$ uniforme $(0,1)$ qual'è la densità della V.A $Y = b \cdot U$

$F_Y(y) = P(Y = y) = P(b \cdot U \le y) = P(U \le \frac{1}{b} \cdot y) = F_U(\frac{1}{b} y) = \frac{1}{b} y$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ per $0 \le y b \rightarrow$ Derivo F comp. $\frac{d}{dy} F_U(\frac{1}{b} y) = \frac{1}{b} f_U(\frac{1}{b} y) \quad Y \sim \text{Unif.}(0, b)$

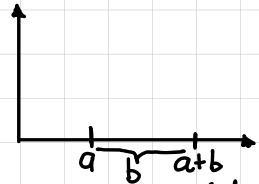


$P(X \in A) = \int_A f_X(t)\, dt$ ← Funzione di Densità di Probabilità

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(t)\, dt$ $\qquad E(g(x)) \underset{\text{esempio}}{=} E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(t)\,dt$

Esercizio: Determino la distribuzione di:

$a + bU$ per $U \sim$



$U \in [0,1] \Rightarrow bU \in [0,b] \Rightarrow a + bU \in [a, a+b]$

$Y = a + bU$

$$f_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + bU \leq y) = P(bU \leq y - a) = P\left(U \leq \frac{y-a}{b}\right) = F_U\left(\frac{1}{b}(y-a)\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_U\left(\frac{1}{b}(y-a)\right)$$

Es: X t.c. $E(X) = \mu$ $\quad Var(X) = \sigma^2$

$Y = aX + b$ $\qquad$ determinare $E(Y), Var(Y)$; $E(Z), Var(Z)$

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ → Standardizzazione

$$E(Y) = E(aX + b) = E(aX) + E(b) = a\,E(X) + b$$

$$Var(Y) = a^2\, Var(X)$$

$$E(Z) = E\left[\frac{1}{\sigma}(X - \mu)\right] = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{1}{\sigma}(X - \mu)\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

Oss: Z t.c. $E(Z) = 0$ $\quad Var(Z) = 1$ $\quad \sigma Z + \mu$ ha valore atteso μ e varianza σ^2

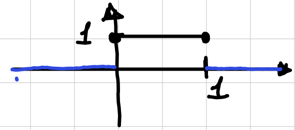
inoltre sia $Y = aX + b$

$$F_Y(y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{1}{a}(y - b)\right) = F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

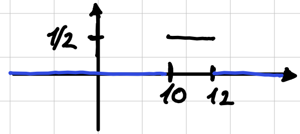
$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$U \sim \text{Uniforme}(0,1) \qquad f_U(u) \sim \mathbb{1}\{0 \le u \le 1\}$

Vale 1 se è 0 atrimenti



$X \sim \text{Unif}(10,12) \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 10 \le x \le 12 \\ 0 & \end{cases}$



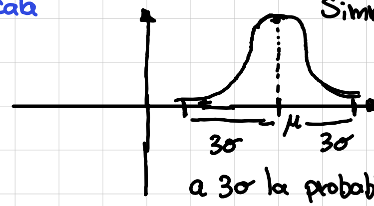
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

X ha distribuzione normale di parametri μ e σ^2 se $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (>0)

Fattori di scala

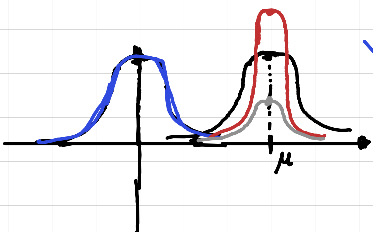
Si può dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

Si scopre che $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$



Simmetrica rispetto a μ

a 3σ la probabilità è quasi 0



$Y = X - \mu$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ: E(X) $\quad \sigma^2$: Var(X)

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

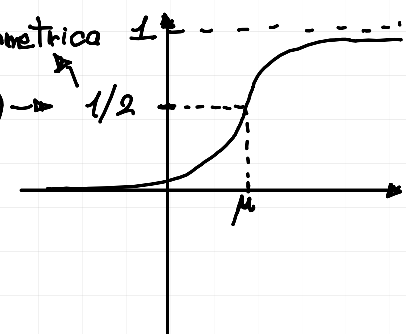
So $Z = N(0,1)$, $X = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

$N(\mu, \sigma^2)$ Matematici

μ: Valore Atteso $\quad \sigma^2$: Varianza

$N(\mu, \sigma)$ Ingegneri

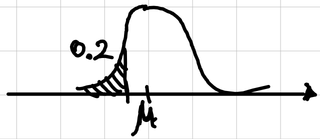
σ: Dev. Standard



$X \sim N(2,4) \quad P(X \le 8) = \int_{-\infty}^{8} f_X(x)\,dx$

$\int e^{-x^2}\,dx$ Non è esprimibile in termini di f elementari

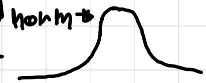
$X \sim N(2,4)$ $\quad P(X \le 8)$? $= P\left(\frac{x-2}{2} \le \frac{8-2}{2}\right) = P(Z \le 3) \cong 0.998$



qnorm(0.2)

pnorm( ) →

dnorm →



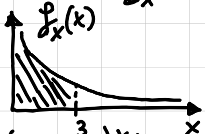
prendono μ e σ come param

no σ^2!!

rnorm() estrae n numeri

Altri modelli di V.A

$X \sim \exp(\lambda) \to f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}\{x \ge 0\}$ $\quad \lambda > 0$



$E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}\{x \ge 0\}$

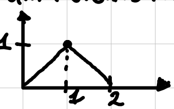
$P(X \le x)$ $\quad P(X < x) = e^{-\lambda x}$

rexp(), pexp(), qexp(), dexp()

Oss: Somma di V.A indipendenti con lo "stessa" distribuzione hanno, in generale, una distribuzione di tipo diversa.

Esempio $\quad U_1 \sim Unif.(0,1)$ $\quad U_1 \perp U_2$ $\quad U_1 + U_2$? $\quad U_1 + U_2 \in (0,2)$ $\quad f_{U_1+U_2}$

$U_2 \sim Unif.(0,1)$



Ci sono eccezioni

$X \sim bin(n,p)$ $\quad X + Y \sim bin(n+m, p)$ # 6 in 7 lanci di dado

$Y \sim bin(m,p)$

Ex: X: # 6 in 3 lanci di dado $\quad$ Y: # 6 in 4 lanci di dado

$X \sim Poisson(\lambda)$ $\quad Y \sim poisson(\mu)$ $\quad X+Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$

$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ $\quad X \perp Y$

$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

INTERVALLO DI CONFIDENZA PER LA MEDIA

μ: valore vero (incognita) dell'altezza media di una popolazione

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

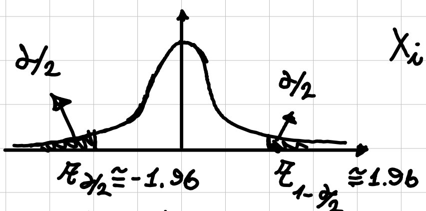
Altezza dell'i-esimo elemento del campione

$\hat{\mu} = \bar{x}$ prendiamo la media campionaria come stima della media "vera" (stimatore)

"$P(a < \mu \leq b)$" $= 1-\alpha$ ← Livello di confidenza (fiducia)

idea: fissare a priori la probabilità che l'intervallo "stimato" contenga il valore vero della media della popolazione.

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad P(a < Z < b) = 1-\alpha$



qnorm(0.025)

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\quad \bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$

$P\left(z_{\alpha/2} < \underbrace{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} - \bar{x} < -\mu < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2} - \bar{x}\right)$

$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2} < \mu < \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$

$P\left(\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_{1-\alpha/2}\right] \ni \mu\right) = 1-\alpha$

$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right]$ ← Intervallo di confidenza per la media di una pop. Normale con livello di confidenza $(1-\alpha)$

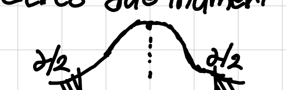
Cosa succede se non conosco σ?

Posso sostituire σ con la stima ottenuta utilizzando la deviazione standard campionaria

$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$ $\quad$ IN R S= sd(X) S= sqrt(Var(X))

cerco due numeri $-t_{n-1,\alpha/2}$, $t_{n-1,\alpha/2}$ t.c $P\left(t_{n-1,\alpha/2} \leq \boxed{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}} \leq t_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

questo oggetto è una V.A con distribuzione t_{n-1}



La densità di t_n ha una forma a campana ⇒ Non è una Gaussiana, ma ci assomiglia sempre di più per $n \to \infty$

⇒ Intervallo di confidenza per la media di una popolazione con distribuzione Normale con livello di confidenza $1-\alpha$

$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \underbrace{t_{n-1,1-\alpha/2}}_{qt(1-\alpha/2,\, n-1)}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right]$ $\quad$ t.test(X, conf.level = α)

Cosa facciamo se la popolazione non ha distr. norm. ?

Sia $\bar{X}$ la media campionaria, possiamo dire qualcosa riguardo la distribuzione di $\bar{X}$?

Teorema limite centrale

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad n \to \infty$$

μ ← Media della popolazione

σ ← Deviazione standard della popolazione

se n è "molto grande"

La somma di n variabili aleatorie $\{X_i\}_{i=1 \dots n}$ i.i.d con $E(X_1)=\mu$, $Var(X_1)=\sigma^2$ è distribuito in maniera approssimativamente normale con valore atteso $n \cdot \mu$ e varianza $n \cdot \sigma^2$

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (Approssimativamente) Un intervallo di confidenza approssimato per la media di una popolazione Non Normale con livello di confidenza $(1-\alpha)$ è dato da:

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \underbrace{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}_{qt(1-\frac{\alpha}{2},\, n-1)}, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

t.test(X, conf.level=α)

Esercizio: Domanda a 81 cittadini, 36 si

- Intervallo di confidenza al 95%
- Intervallo di confidenza al 99%
- Taglio del campione per far sì che ampiezza campione sia 0.02 con intervallo di conf al 95%

n: taglio del campione X: # si p: Frazione si sa tutta popol.

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ a e b t.c $P(a < p < b) = 0.95$ $(1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0.05)$

$$P\left(a < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < b\right) = 0.95$$

$\sqrt{Var(\hat{p})}$ → Qual'è la distribuzione di questo oggetto? ≈ approx. normale standard

$$P\left(a < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < b\right) \approx P(a < Z < b) = 1-\alpha$$

$a = z_{\alpha/2} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $b = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$= P(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{1-\alpha/2}) \qquad Var(\hat{p}) \approx \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$$

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$\Rightarrow$ Intervallo di confidenza $(1-\alpha)\%$ per $\hat{p}$ è dato da $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Nel nostro caso: $\hat{p} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$; $\sqrt{Var(\hat{p})} \approx \sqrt{\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}}{81}} = \sqrt{\frac{20}{81 \cdot 81}} = 2\frac{\sqrt{5}}{81} = 0.055$

$$z_{1-\frac{0.05}{2}} \approx 1.96 \Rightarrow I_{0.95}(p) = \frac{4}{9} \pm 1.96 \cdot \frac{2}{27} \approx 0.44 \pm \underbrace{1.96 \cdot 0.055}_{0.108} \Rightarrow 0.44 \pm 0.108 \Rightarrow [0.332, 0.548]$$