1) considere un sistema con el langragiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 sen^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

a) derive las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}sen^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})(\cos y) = a\dot{x}sen^2 y + b\dot{x}\cos^2 y + b\dot{z}\cos y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}sen^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\,seny\cos y + b\ddot{x}\cos^2 y - 2b\dot{x}\dot{y}\,seny\cos y + b\ddot{z}\cos y - b\dot{z}\dot{y}\,seny$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = a\ddot{x}sen^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\,sen\cos y + b\ddot{x}\cos^2 y - 2b\dot{x}\dot{y}\,seny\cos y + b\ddot{z}\cos y - b\dot{z}\dot{y}\,seny \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a\dot{x}^2 seny\cos y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})(-\dot{x}\,seny) = a\dot{x}^2 seny\cos y - b\dot{x}^2\cos y\,seny - b\dot{z}\,seny$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a\ddot{y} - a\dot{x}^2 seny\cos y + b\dot{x}\cos y\,seny + b\dot{z}\,seny \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = b(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\,seny + \ddot{z})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = b\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\,seny + \ddot{z} \quad (3)$$

b) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable el sistema?

como $\mathcal{L}$ no depende de x, z => $P_x = P_z = cte$ se conserva

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\,sen^2 y + b\dot{x}\cos^2 y + b\dot{z}\cos y = cte$$

$$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b\dot{x}\cos y + b\dot{z} = cte$$

y como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ la energía se conserva

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = cte$$

es integrable ya que la cantidades conservada es igual a los grados de libertad ✗

c) calcule la energía del sistema

$$E = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\dot{z}$$

$$= a\dot{x}^2 sen^2 y + b\dot{x}^2\cos^2 y + b\dot{x}\dot{z}\cos y + a\dot{y}^2 + b\dot{z}\dot{x}\cos y + b\dot{z}^2$$

$\Rightarrow$

$$E = a\dot{x}^2 sen^2 y + a\dot{y}^2 + b\dot{x}^2\cos^2 y + 2b\dot{x}\dot{z}\cos y + b\dot{z}^2 - \frac{1}{2}a\dot{x}^2 sen^2 y - \frac{1}{2}a\dot{y}^2 - \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y - \dot{z})^2$$

$$= \frac{1}{2}a\dot{x}^2 sen^2 y + \frac{1}{2}a\dot{y}^2 + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2 - \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y - \dot{z})^2$$

$$E = \frac{1}{2}a\dot{x}^2 sen y + \frac{1}{2}a\dot{y}^2 + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$E = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 sen^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

Powered by CamScanner

d) suponga que $y(t) = y_0 = cte$. es una solucion ¿ cuales son $x(t)$ y $z(t)$?

$$P_x = cte = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$$

$$a\dot{x}\,\text{sen}^2 y_0 + b\dot{x}\cos^2 y_0 + b\dot{z}\cos y_0 = C_1 \quad (1)$$

$$P_z = cte = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}$$

$$b\dot{x}\cos y_0 + b\dot{z} = C_2 \quad (2)$$

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \dot{x}\cos y_0 \quad (3)$$

(3) → (1)

$$a\dot{x}\,\text{sen}^2 y_0 + b\dot{x}\cos^2 y_0 + C_2\cos y_0 - b\dot{x}\cos^2 y_0 = C_1$$

$$a\dot{x}\,\text{sen}^2 y_0 + C_2\cos y_0 = C_1$$

$$\dot{x} = \frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\,\text{sen}^2 y_0} \quad (4)$$

$$x = \frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\,\text{sen}^2 y_0}\,t + x_0$$

(4) → (3)

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \left(\frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\,\text{sen}^2 y_0}\right)\cos y_0$$

$$z = \frac{C_2}{b} - \left(\frac{C_1 - C_2\cos y_0}{a\,\text{sen}^2 y_0}\right)\cos y_0 + z_0$$

2) una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

a) Encuentre el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento del sistema

El lagrangeano es $\mathcal{L} = T - V$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{2\alpha V_0 \operatorname{senh}(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)} = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{2\alpha V_0 \operatorname{senh}(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)} = 0$$

b) ¿Existen cantidades conservadas?

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ la energía se conserva

c) Muestre ~~que~~ que el movimiento de la partícula es finito si su energía $E<0$, y ~~es infinito~~ es infinito si $E \geq 0$

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \mathcal{L} \Rightarrow m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \Rightarrow E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \geq 0 \quad ①$$

para $E<0$, si $x \to \pm\infty \Rightarrow$

$$\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \to 0 \Rightarrow$$

Para $x \to \pm\infty$

$$E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} = E \geq 0$$

Pero como $E<0 \Rightarrow E \not\geq 0 \Rightarrow$ x debe estar en un rango finito tal que ① cumpla

Si $E \geq 0 \Rightarrow$ la condición ① siempre cumple para toda x
Ya que $\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$ Va desde 0 para $x \to \pm\infty$ hasta V_0 para $x=0$

d) Encuentre los puntos de retorno y el mínimo valor posible de E.

Punto de retorno $= \dot{x}=0 \Rightarrow$

$$E = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$

$$\cosh^2(\alpha x) = -\frac{V_0}{E}$$

$$\alpha x = \pm\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{-V_0}{E}}\right)$$

$$x = \pm\frac{\cosh^{-1}}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{-V_0}{E}}\right) \rightarrow \text{puntos de retorno}$$

el mínimo valor posible de E es cuando $V(0) \Rightarrow$

$$E = V(0) = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha 0)} = -V_0 \rightarrow E_{min}$$

3) El langrongiano es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

a, b, c esta sujetos a que $b^2 - ac \neq 0$

a) Encuentre la ecuaciónes de movimiento

$X \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(ma\dot{x} + mb\dot{y}) + kax + kby = 0$$

$$\Rightarrow ma\ddot{x} + mb\ddot{y} + kax + kby = 0$$

$Y \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mb\dot{x} + mc\dot{y}) + kbx + kcy = 0$$

$$\Rightarrow mb\ddot{x} + mc\ddot{y} + kbx + kcy = 0$$

b) calcule e identifique los cantidades conservadas

como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ la energía se conserva

$$\Rightarrow E = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow E = ma\dot{x}^2 + mb\dot{x}\dot{y} + mb\dot{x}\dot{y} + mc\dot{y}^2 - \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

c) ¿es integrable? como el # de cantidades conservados no son igual al # de grados de libertad