剰余の定理について

剰余の定理（じょうよのていり、Remainder Theorem）によると、多項式 $f(x)$ をある x の値 a で割ったときの余りは $f(a)$ となります。具体的には、多項式 $f(x)$ を $x-a$ で割ると、その余りは $f(a)$ です。

$$f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$$

ここで、$q(x)$ は除算の商を表し、$f(a)$ は余りを表します。

具体例

次の多項式を考えます：

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

この多項式を $x-2$ で割ったときの余りを求めるには、$f(2)$ を計算します：

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) - 5 \\ &= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 8 - 5 \\ &= 16 - 12 + 8 - 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

つまり、剰余の定理によって多項式 $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ を $x-2$ で割ったときの余りは 7 です。

因数定理について

因数定理（いんすうていり、Factor Theorem）によると、多項式 $f(x)$ のある値 a に対して $f(a) = 0$ であるならば、$x-a$ は $f(x)$ の因数であることを意味します。つまり、多項式 $f(x)$ を $x-a$ で割ったときの余りが 0 であるとき、$x-a$ は $f(x)$ の因数となります。

$$f(x) = (x-a)q(x)$$

具体例

次の多項式を考えます：

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

多項式 $p(x)$ に対してゼロとなる値を見つけるために計算を行います。まず、$p(2)$ を計算します：

$$\begin{aligned} p(2) &= (2)^3 - 2(2)^2 - 4(2) + 8 \\ &= 8 - 8 - 8 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

つまり、$p(2) = 0$ なので、因数定理により $x-2$ は $p(x)$ の因数となります。

練習問題

1. 多項式 $g(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$ を $x - 1$ で割ったときの余りを求めてください。2. 多項式 $h(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ を $x + 1$ で割ったときの余りを求めてください。3. 多項式 $k(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ が $x - 1$ と $x - 2$ の両方を因数として持つかどうかを確認してください。

解答

1.

多項式 $g(x)$ を $x - 1$ で割るために $g(1)$ を計算します：

$$\begin{aligned} g(1) &= (1)^3 + 2(1)^2 - 1 + 3 \\ &= 1 + 2 - 1 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

よって、余りは 5 です。

2.

多項式 $h(x)$ を $x + 1$ で割るために $h(-1)$ を計算します：

$$\begin{aligned} h(-1) &= 4(-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) + 1 \\ &= 4 - (-3) + 1 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 1 + 2 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

よって、余りは 11 です。

3.

まず、$k(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ に対して $x = 1$ を代入します：

$$\begin{aligned} k(1) &= (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 \\ &= 1 - 6 + 11 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

次に、$x = 2$ を代入します：

$$\begin{aligned} k(2) &= (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 \\ &= 8 - 24 + 22 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、$k(1) = 0$ かつ $k(2) = 0$ なので、因数定理より $x - 1$ と $x - 2$ の両方が $k(x)$ の因数となります。