L1 CCA S1
Travaux dirigés de mathématique Appliquée 1

Exercice 1 Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. A l'ordre 4. (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Exercice 2 Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x}{(x+1)^4}$.

1. Déterminer la forme littérale de la décomposition en éléments simples de f.
2. Déterminer les réels a_3, a_2, a_1 et a_0 tels que

$$x^3 + 2x^2 + 3x = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0$$

3. En déduire la décomposition en éléments simples de f.

Exercice 3 On considère le polynôme $P(X) = X^5 - X + X^4 - 1$.

1. Montrer que -1 et 1 sont des racines de P et déterminer leur multiplicité.
2. Déduire la décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de $P(X)$.
3. Résoudre l'inéquation $P(X) \geq 0$

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver, en fonction de n, le reste de la division euclidienne de X^n par chacun des polynômes suivants :$X^2 - 6X - 16; X^2 + 4X + 4$.

Exercice 5 Soit la fraction $F = \dfrac{1}{X(X+1)}$.

1. Réaliser la décomposition en éléments simples de F.
2. En déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 6

1. Soit le polynôme donné par

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 2$$

   (a) Déterminer a et b pour que -1 soit racine double de P.

   (b) Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$.

2. Décomposer en éléments simples la fraction

$$F = \frac{x-2}{x^4(x-1)}$$

(indication : on peut effectuer la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $x - 2$ par $x - 1$.)

Exercice 7
Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où un désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. En 2010, la forêt possède 50000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par: $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.
2. Calculer u_1. Combien d'arbre comptera la forêt en 2012 ?
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison son premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n et u_n en fonction de n.
4. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
5. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $u_{n+1}-u_n = 0,5(0,95)^n$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat.

Exercice 8 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnu x definie par $x^2 + 39x - 20790 = 0$.

2. On considère les suites suivantes définies pour $n \geq 1$ par $u_1 = 1000$, $u_{n+1} = u_n + 50$ et $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Exprimer en fonction de n, u_n et S_n.
3. Une entreprise estime le coût d'un forage de la faéon suivante: le premier mètre coûte 1000 F, le deuxième mètre coûte 1050 F et ensuite chaque mètre coûte 50 F de plus que le précédent.
   (a) Quelle somme faut il prévoir prévoir si on veut atteindre ue profondeur de 150 m?
   (b) Quelle profondeur pourra t-on atteindre si on dispose d'une somme de 519 750 F.

Exercice 9 A. Soit f la fonction définie sur $[0, 50]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1) - 50$$

1. Etudier le sens de variation de f sur $[0, 50]$.
2. Dresser le tableau de variation de f
3. Représenter graphiquement f.
4. Montrer graphiquement que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur α de $]0, 50]$ et déduire le signe de $f(x)$ sur $[0, 50]$.
5. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs Pour la suite on prendra α pour la plus petite de ces deux valeurs.

B. Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit. Le coût marginal C , exprimé en euros, est définie sur [0 , 50] par :

$$C(x) = 2x + \frac{50}{x+1}$$

1. On suppose que la fonction coût total Ct prend la valeur 50 en 0. Vérifier que

$$Ct(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50.$$

2. Déterminer le coût moyen unitaire Cm puis étudier ses variations.
3. Quelle est la production donnant le coét moyen minimal ? Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

Exercice 10
Une entreprise fabrique des pièces de haute technologie. La fabrication hebdomadaire est limitée à 2000 pièces. Le prix de vente de 100 pièces est fixé à 15000 euros. La recette en milliers d'euros, obtenue pour la vente de x centaines de pièces est donc $R(x) = 15x$.
Le graphique fourni en annexe donne la représentation graphique R_1 de la fonction R et la représentation graphique C_1 de la fonction coût de production notée C sur l'intervalle $[0, 20]$.
Partie A : lectures graphiques
Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes:

1. Quel est le coût de production de 900 pièces?
2. Quelle fabrication hebdomadaire correspond à un coût de production de 90000 euros?
3. Combien l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre de pièces pour être bénéficiaire?

Partie B
On admet que la fonction C définie sur l' intervalle $[0; 20]$ est donnée par

$$C(x) = 0.5x^2 + 6.5x + 10 + 4.5\ln(x + 1)$$

On rappelle que le coût de production, en milliers d'euros, est le nombre $C(x)$, x étant le nombre de centaines de pièces produites (x est compris entre 0 et 20 centaines de pièces). On admet que toutes les pièces produites sont vendues.

1. Montrer que le bénéfice est donné par la fonction B, définie sur $[0; 20]$ par

$$B(x) = -0.5x^2 + 8.5x - 10 - 4.5\ln(x + 1)$$

2. Calculer $B'(x)$ la fonction dérivée de B sur $[0; 20]$.
3. Justifier que le signe de $B'(x)$ est celui de $(8 - x)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
4. En déduire le signe de $B'(x)$ puis le tableau de variation de B sur l'intervalle $[0; 20]$.
5. Pour qu'elle fabrication hebdomadaire le bénéfice est-il maximal? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près?

Exercice 11
Une entreprise produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10. Le coût total de production en euros de l'entreprise est donné en fonction de la longueur x par la formule $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$. Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique de la fonction C. Les deux parties **I** et **II** de cet exercice sont indépendantes.
I-Etude du bénéfice
Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

1. Tracer sur le graphique de l'annexe la droite D_1 d'équation $y = 400x$. Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
2. 0n suppose maintenant que le prix du marché est égal à 680 euros.
   (a) Tracer sur le graphique de l'annexe la droite D_2 d'équation $y = 680x$. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par
$B(x) = 680x - C(x)$.
Etudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

II-Étude du coût moyen
On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite.
On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$ on a:
$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}.$$
2. Etudier les variations de la fonction C_M sur l'intervalle.
3. Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum? Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total?

Exercice 12 Partie A
On considére la fonction définie sur $[1, 13]$ par $f(x) = 3x + 14 - 12\ln(2x)$.

1. Calculer la fonction dérivée de f sur $[1, 13]$.
2. Etudier le signe de f' sur $[1, 13]$.
3. Construire le tableau de variations de f sur $[1, 13]$.
4. Construire la courbe C_f de f dans un répère orthonormé avec pour unité le centimètre.

Partie B
Soit F la fonction définie sur $[1, 13]$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 26x - 12\ln(2x)$.

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $[1, 13]$.
2. Calculer $I = \int_1^{13} f(x)dx$ et interpréter ce résultat.
3. Calculer la valeur exacte de la valeur moyenne $V_m(f)$ de la fonction f sur $[1, 13]$.

Partie C
Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 1300 objets identiques. On admet que pour x centaines d'objets fabriqués, le coût moyen de fabrication d'un objet est $f(x)$ où f est la fonction qui a été définie dans la partie A.

1. Déterminer la quantité de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication soit minimal.
2. Déterminer alors le coût moyen.
3. Déterminer graphiquement les quantités d'objets à fabriquer afin que le coût moyen de fabrication d'un objet soit inférieur à où égale à 4.

Exercice 13 Une usine de fabrication de voitures a une capacité de production de 100 véhicules par jour.
Partie A : Étude graphique Sur le graphique ci-dessous sont tracées deux courbes

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. L'une représente le coût de production en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour, l'autre le chiffre d'affaires de l'usine en fonction du nombre de voitures produites et vendues par jour.

1. Sachant que le chiffre d'affaires de l'usine est proportionnel au nombre de voitures produites et vendues chaque jour, laquelle des deux courbes représente ce chiffre d'affaires?

2. Avec la précision permise par le graphique, donner le coût de production de 55 voitures.
3. Combien de voitures faut-il produire et vendre pour réaliser un chiffre d'affaires de 600000 euros?
4. Pour combien de voitures produites et vendues par jour l'usine réalise-t-elle un bénéfice? Le résultat sera donné sous forme d'un intervalle.

Partie B : Etude d'une fonction
On considère la fonction R définie sur $[0\ ;\ 100]$ par

$$R(x) = -0,001x^3 + 0,07x^2 + 3,36x - 186.$$

On admet que la fonction R est dérivable sur $[0\ ;\ 100]$. On note R' sa fonction dérivée.

1. Calculer $R'(x)$.
2. Étudier le signe de $R'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 100]$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction R sur $[0\ ;\ 100]$.
4. On appelle *résultat* la différence entre le chiffre d'affaires et le coût de production. S'il est positif, il correspond à un bénéfice, s'il est négatif, il correspond à une perte. Pour un nombre entier x de voitures produites et vendues par jour, on modélise le *résultat* par $R(x)$.
   (a) Selon ce modèle, combien de voitures l'usine doit-elle produire et vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal.
   (b) Quel est alors ce bénéfice ?

Exercice 14 Une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines, dans une ville donnée, afin de promouvoir une nouvelle marque de boissons gazeuses. Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes résidant dans cette ville ayant pris connaissance de la marque est donné par l'expression

$$f(x) = \frac{75x}{x+2}$$

où x est un réel compris entre 0 et 30.

La courbe représentative de f est fournie en annexe.

L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit cette nouvelle marque de boissons est qu'au moins 70 % des habitants de la ville aient pris connaissance de cette marque.

1. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif fixé est atteint? Justifier la réponse.
2. Déterminer graphiquement le nombre de semaines nécessaires pour que le pourcentage d'habitants ayant pris connaissance de la marque passe de 50 % à 60 %. On laissera apparents les tracés utiles.
3. On note f' la dérivée de f. Calculer la dérivée puis déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$.
4. Après ces 15 semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
5. Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires à l'agence pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise?