

# Árboles Generales

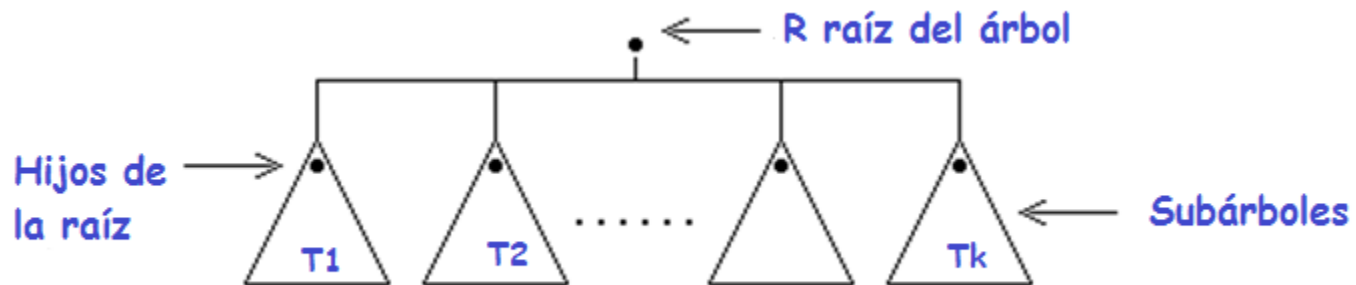
# Agenda

- Definición
- Descripción y terminología
- Ejemplos
- Representaciones
- Recorridos

# Definición

➤ *Un árbol es una colección de nodos, tal que:*

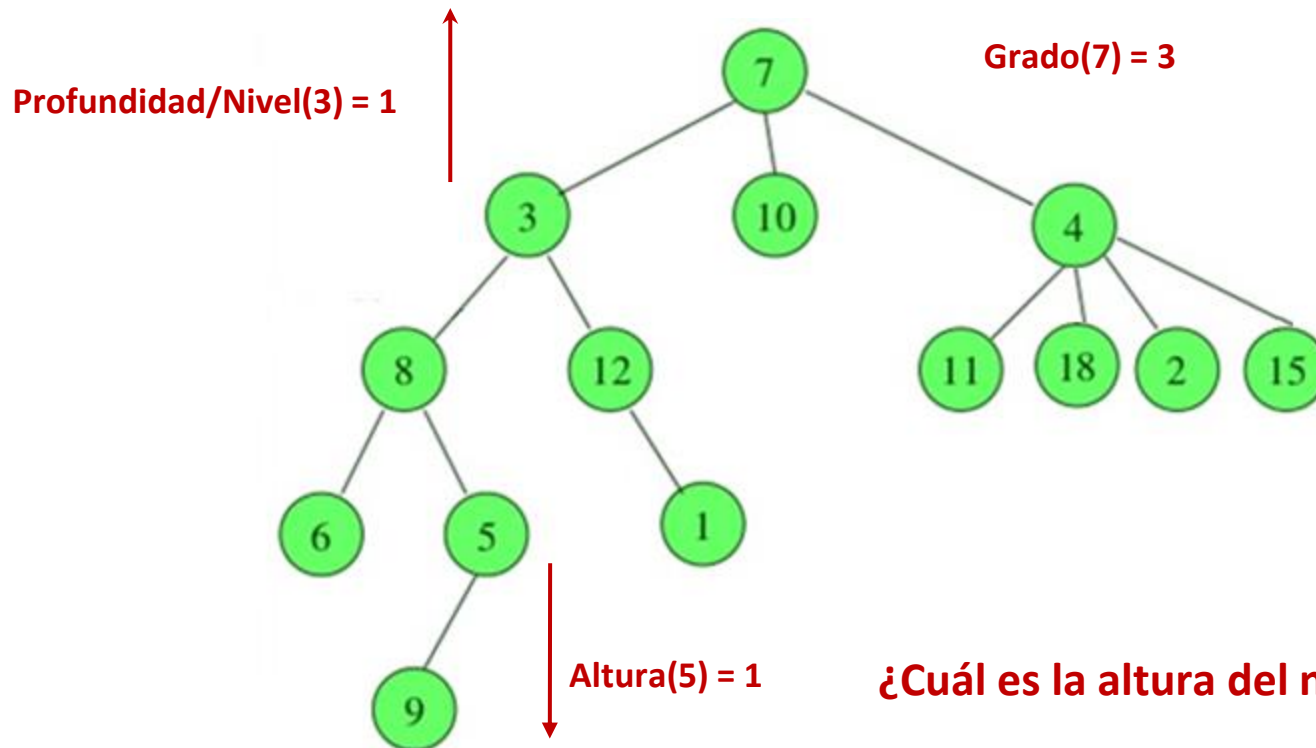
- *puede estar vacía. (Árbol vacío)*
- *puede estar formada por un nodo distinguido  $R$ , llamado **raíz** y un conjunto de árboles  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ,  $k \geq 0$  (subárboles), donde la raíz de cada subárbol  $T_i$  está conectado a  $R$  por medio de una arista*



# Descripción y terminología

- *Grado* de  $n_i$  es el número de hijos del nodo  $n_i$ .
  - Grado del árbol es el grado del nodo con mayor grado.
- *Altura* de  $n_i$  es la longitud del camino más largo desde  $n_i$  hasta una hoja.
  - Las hojas tienen altura **cero**.
  - La altura de un árbol es la altura del nodo raíz.
- *Profundidad / Nivel*: de  $n_i$  es la longitud del único camino desde la raíz hasta  $n_i$ .
  - La raíz tiene profundidad o nivel **cero**.

# Descripción y terminología



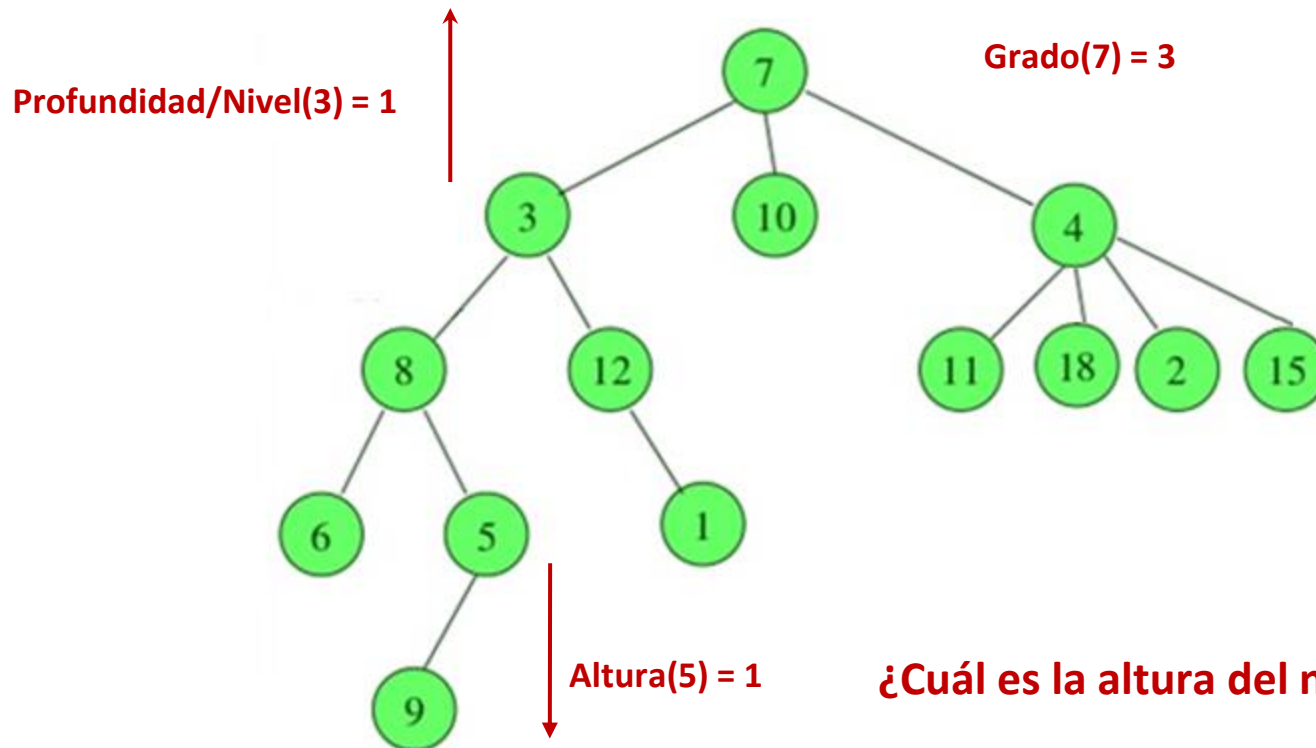
¿Cuál es la altura del nodo 3?

¿Cuál es la profundidad del nodo 12?

¿Cuál es el grado del árbol?

¿Cuál es la altura del árbol?

# Descripción y terminología



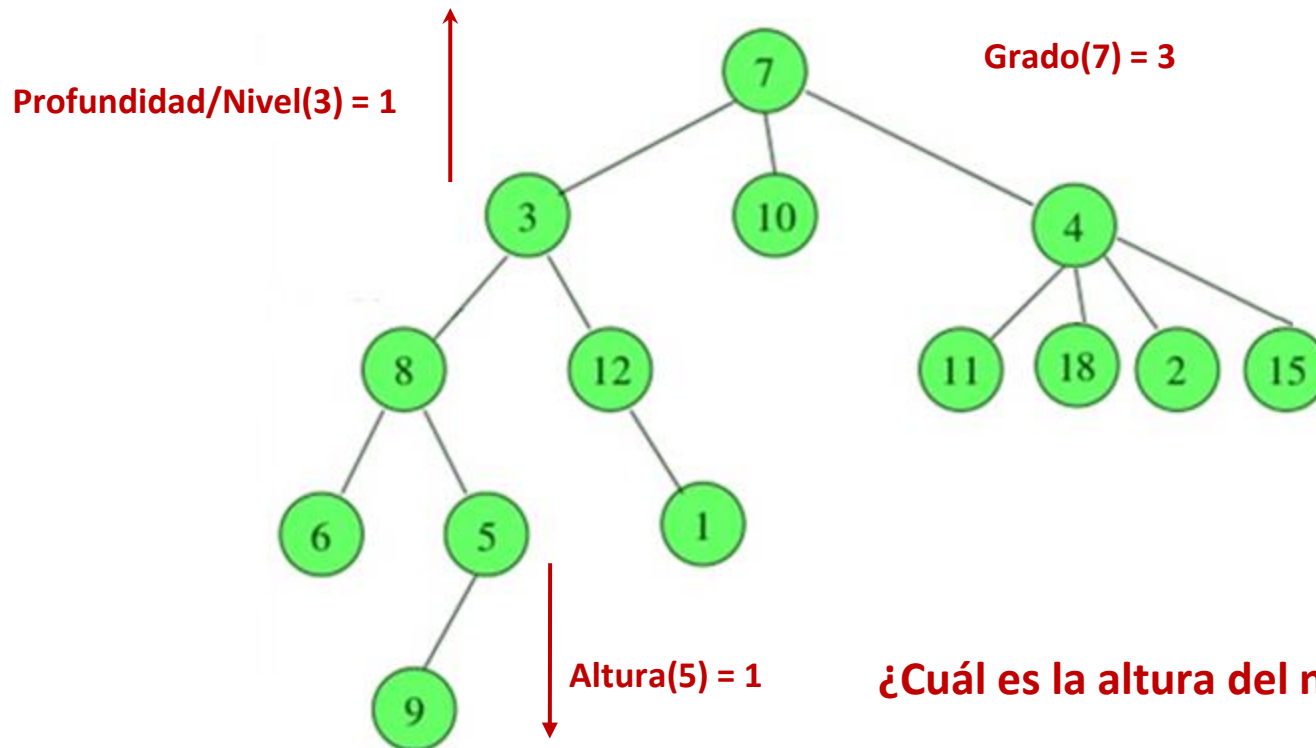
¿Cuál es la altura del nodo 3? 3

¿Cuál es la profundidad del nodo 12? 2

¿Cuál es el grado del árbol?

¿Cuál es la altura del árbol?

# Descripción y terminología



¿Cuál es la altura del nodo 3? 3

¿Cuál es la profundidad del nodo 12? 2

¿Cuál es el grado del árbol? 4

¿Cuál es la altura del árbol? 4

# Descripción y terminología

- *Árbol lleno*: Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *lleno* si cada nodo interno tiene grado  $k$  y todas las hojas están en el mismo nivel ( $h$ ).

Es decir, recursivamente,  $T$  es *lleno* si :

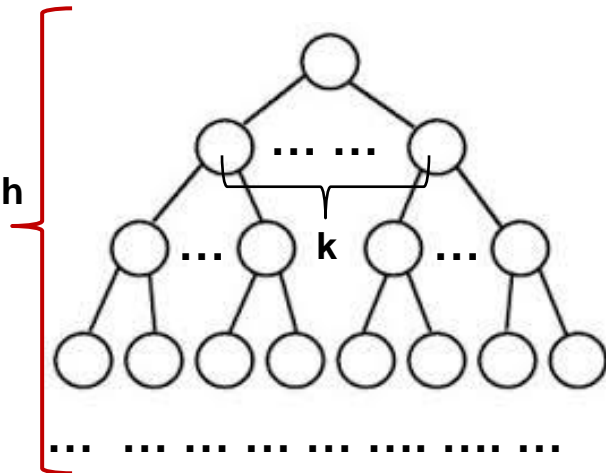
- 1.-  $T$  es un nodo simple ( árbol lleno de altura 0), o
- 2.-  $T$  es de altura  $h$  y todos sus sub-árboles son llenos de altura  $h-1$ .



# Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *completo* si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.
- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea  $T$  un árbol lleno de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  es  $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$  ya que:

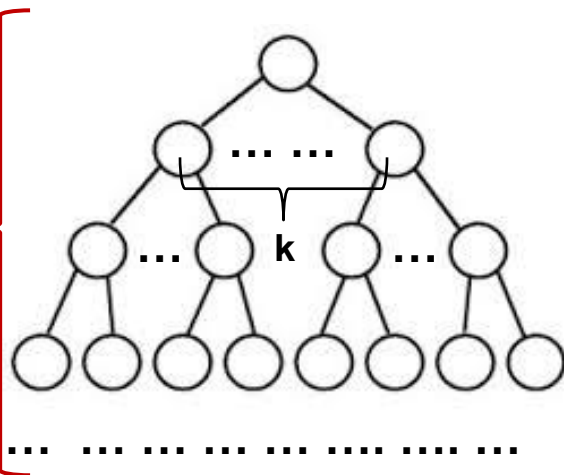


# Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *completo* si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea  $T$  un árbol lleno de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  es  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que:



Nivel 0  $\rightarrow k^0$  nodos

Nivel 1  $\rightarrow k^1$  nodos

Nivel 2  $\rightarrow k^2$  nodos

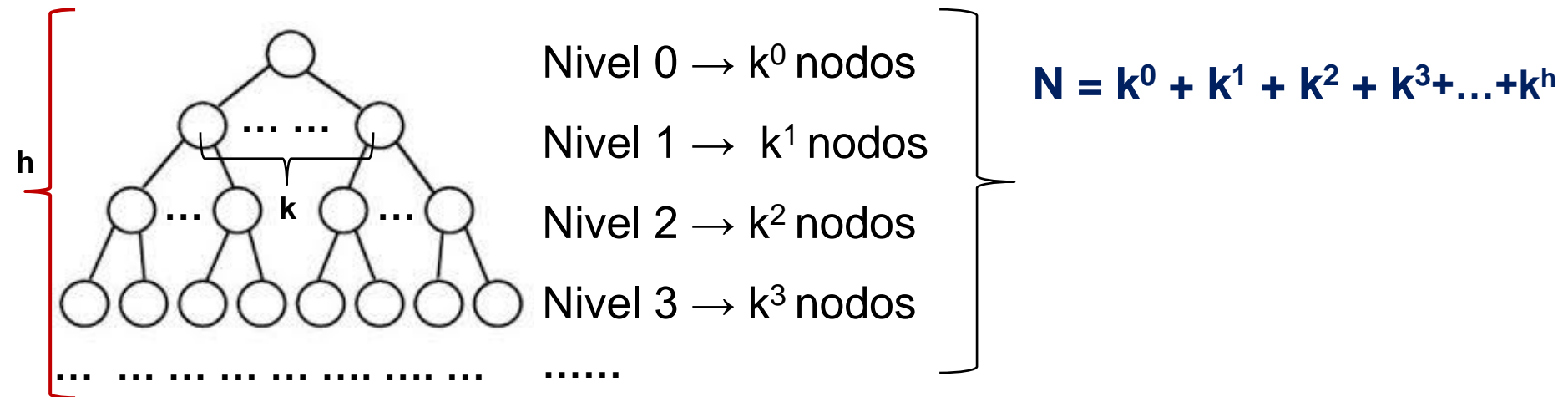
Nivel 3  $\rightarrow k^3$  nodos

# Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *completo* si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea  $T$  un árbol lleno de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  es  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que:

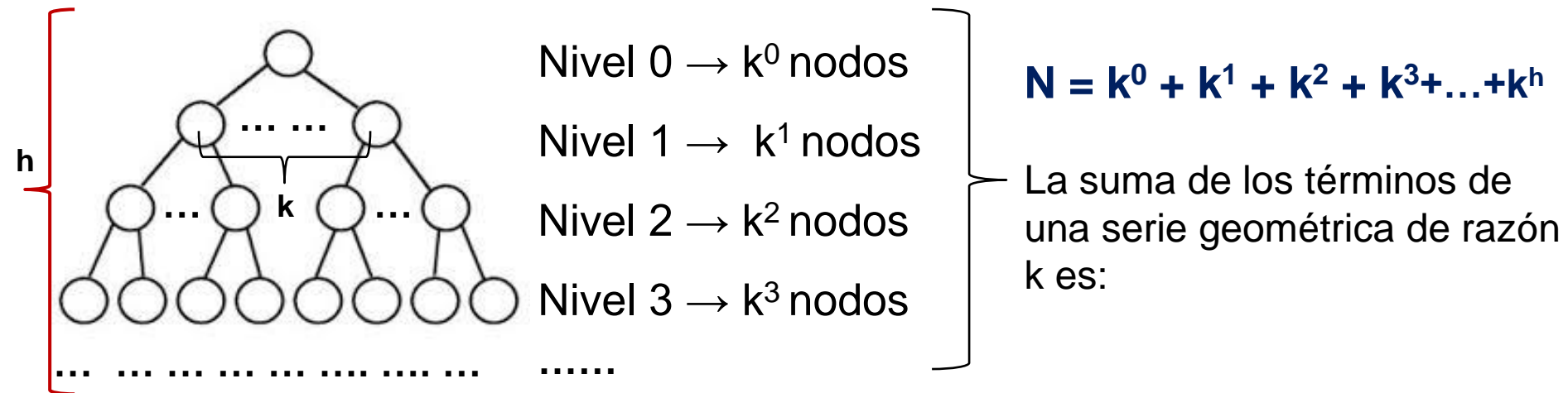


# Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *completo* si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

Sea  $T$  un árbol lleno de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  es  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que:

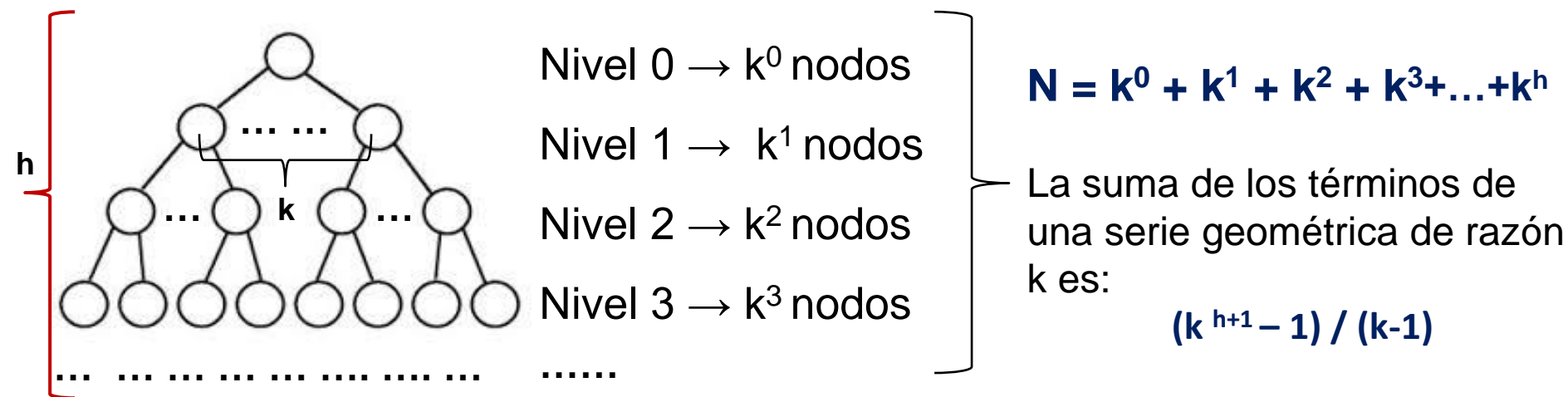


# Descripción y terminología

- **Árbol completo:** Dado un árbol  $T$  de grado  $k$  y altura  $h$ , diremos que  $T$  es *completo* si es lleno de altura  $h-1$  y el nivel  $h$  se completa de izquierda a derecha.

- **Cantidad de nodos en un árbol lleno:**

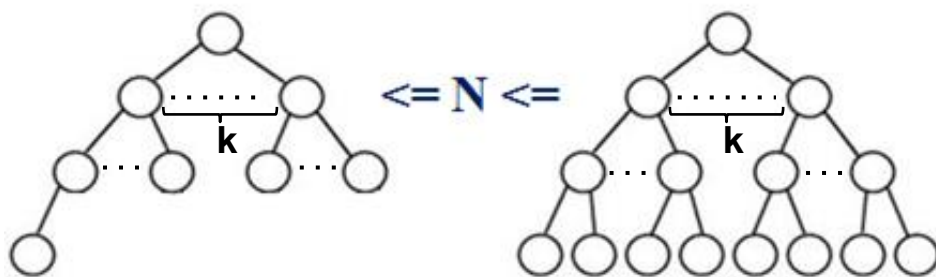
Sea  $T$  un árbol lleno de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  es  $(k^{h+1} - 1) / (k-1)$  ya que:



# Descripción y terminología

- *Cantidad de nodos en un árbol completo:*

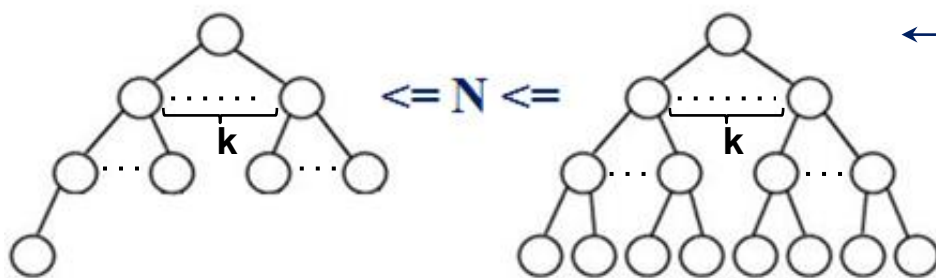
Sea  $T$  un árbol completo de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  varía entre  $(k^h + k - 2) / (k - 1)$  y  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que ...



# Descripción y terminología

- *Cantidad de nodos en un árbol completo:*

Sea  $T$  un árbol completo de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  varía entre  $(k^h + k - 2) / (k - 1)$  y  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que ...

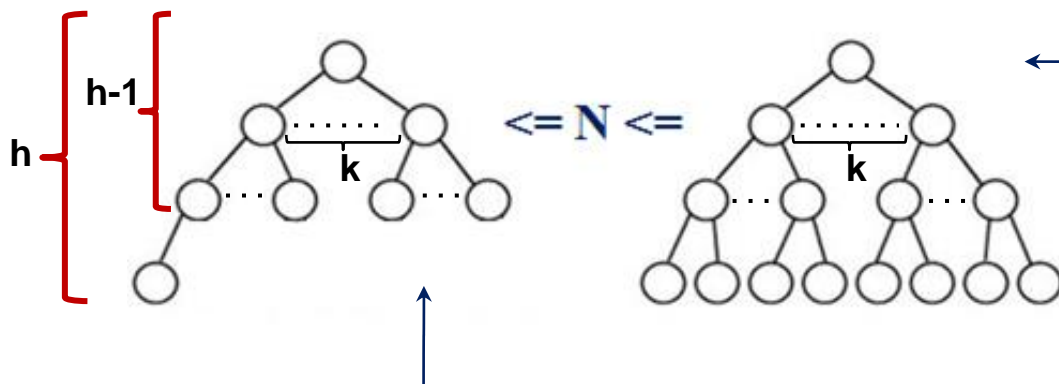


- Si el árbol es lleno  
 $N = (k^{h+1} - 1) / (k - 1)$

# Descripción y terminología

- *Cantidad de nodos en un árbol completo:*

Sea  $T$  un árbol completo de grado  $k$  y altura  $h$ , la cantidad de nodos  $N$  varía entre  $(k^h + k - 2) / (k - 1)$  y  $(k^{h+1} - 1) / (k - 1)$  ya que ...



- Si el árbol es lleno  

$$N = (k^{h+1} - 1) / (k - 1)$$

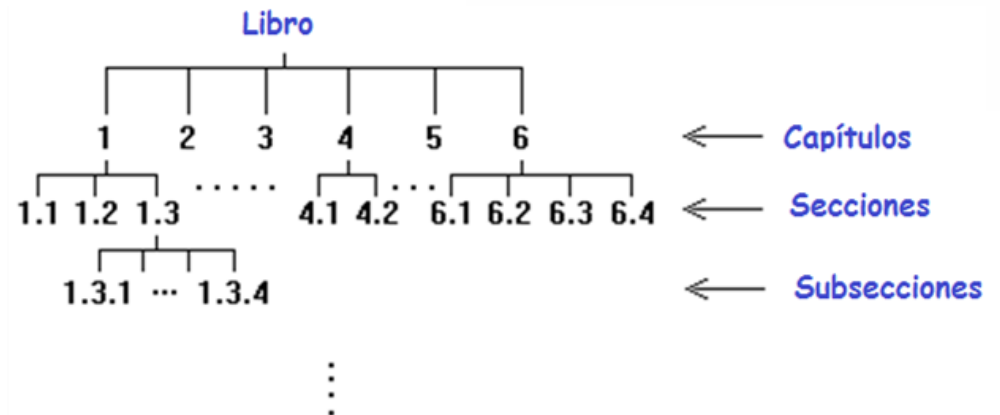
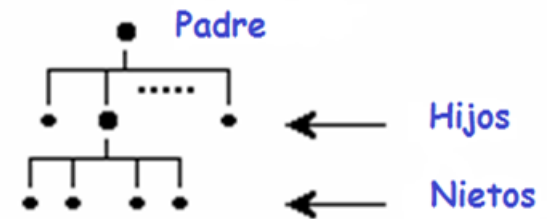
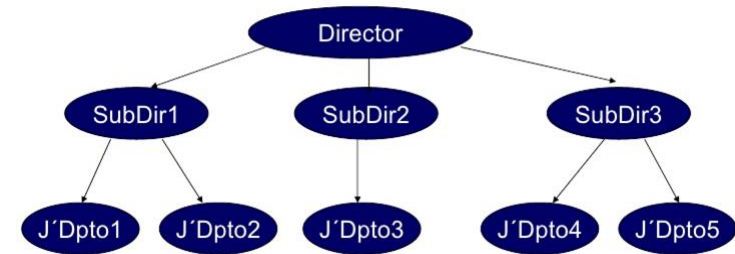
- Si no, el árbol es lleno en la altura  $h-1$  y tiene por lo menos un nodo en el nivel  $h$ :  

$$N = (k^{h-1+1} - 1) / (k - 1) + 1 = (k^h + k - 2) / (k - 1)$$

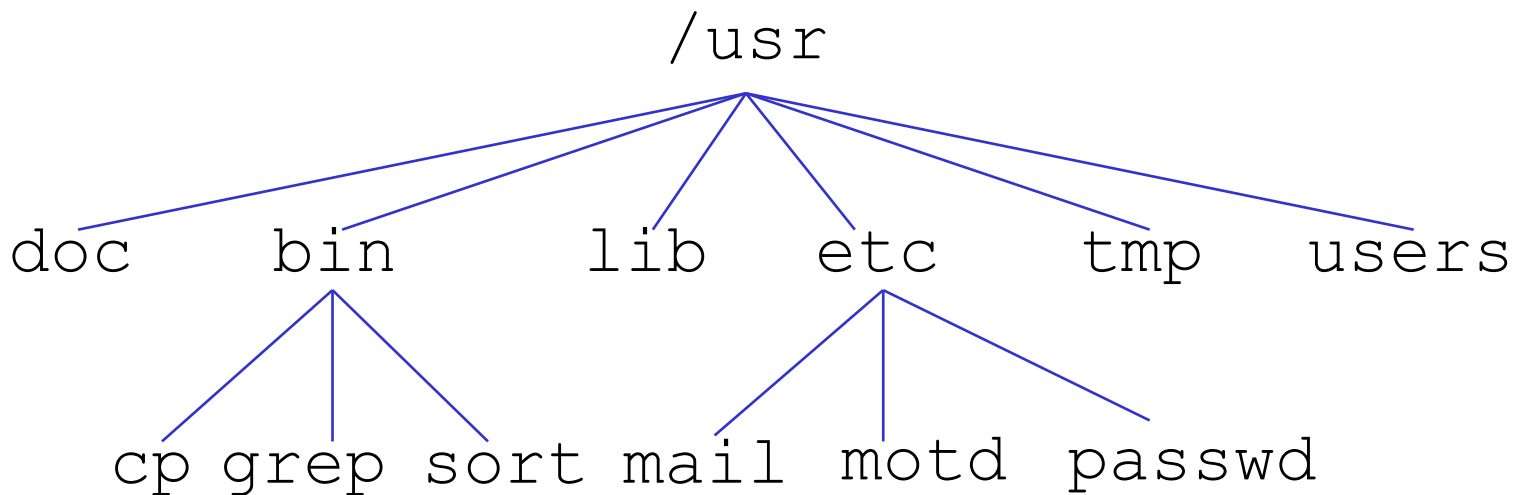


# Ejemplos

- ✓ Organigrama de una empresa
- ✓ Árboles genealógicos
- ✓ Taxonomía que clasifica organismos
- ✓ Sistemas de archivos
- ✓ Organización de un libro en capítulos y secciones



# Ejemplo: Sistema de archivos



# Representaciones

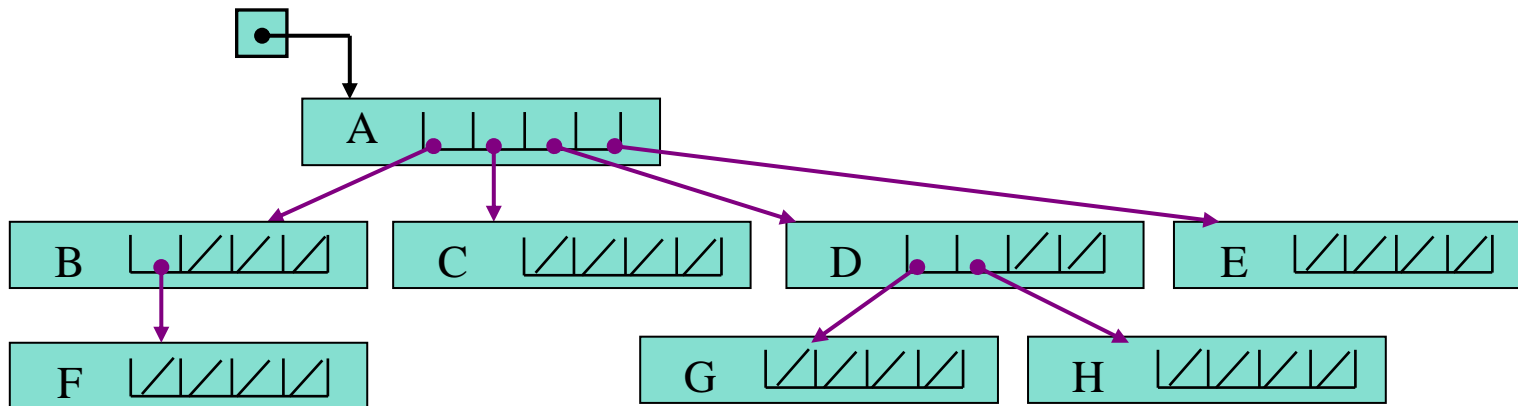
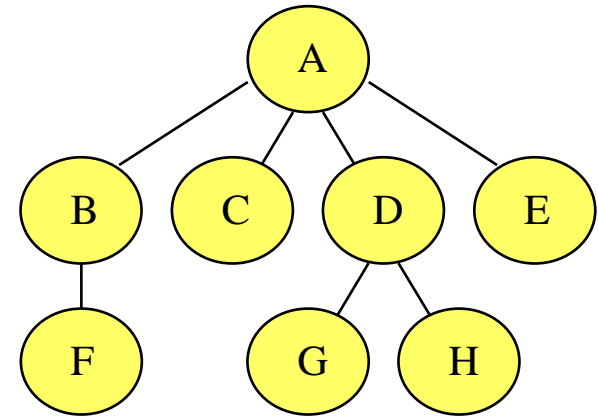
- ✓ Lista de hijos
  - Cada nodo tiene:
    - Información propia del nodo
    - Una lista de todos sus hijos
- ✓ Hijo más izquierdo y hermano derecho
  - Cada nodo tiene:
    - Información propia del nodo
    - Referencia al hijo más izquierdo
    - Referencia al hermano derecho

# Representación: Lista de hijos

- ✓ La lista de hijos, puede estar implementada a través de:
  - Arreglos
    - Desventaja: espacio ocupado
  - Listas dinámicas
    - Mayor flexibilidad en el uso

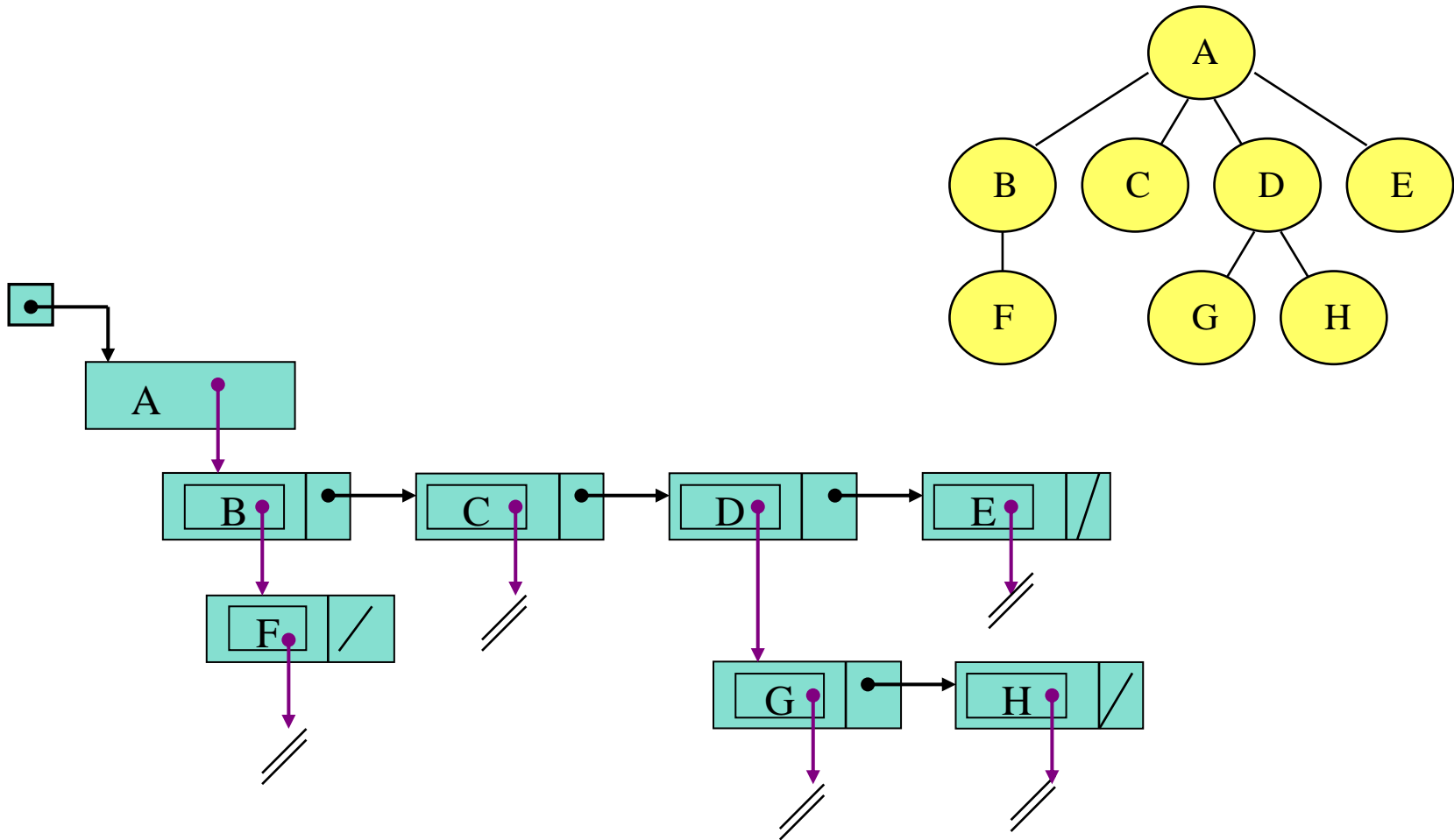
# Representación: Lista de hijos

## Implementada con Arreglos

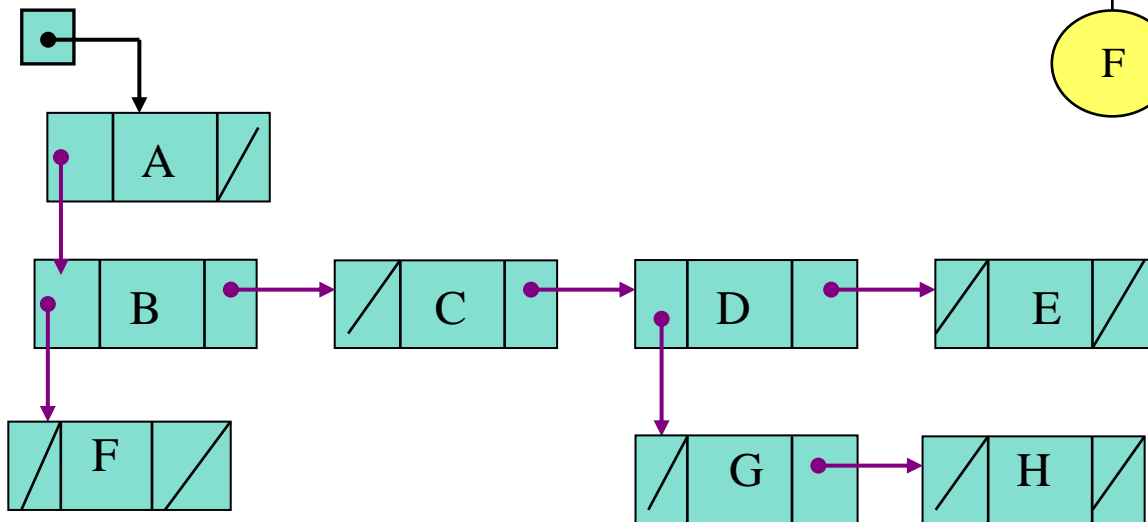
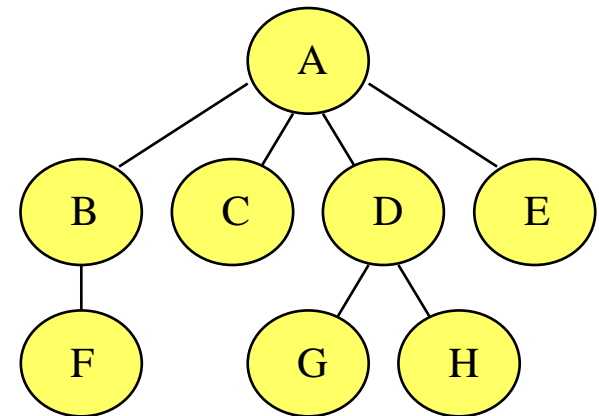


# Representación: Lista de hijos

## Implementada con Listas enlazadas



# Representación: Hijo más izquierdo y hermano derecho



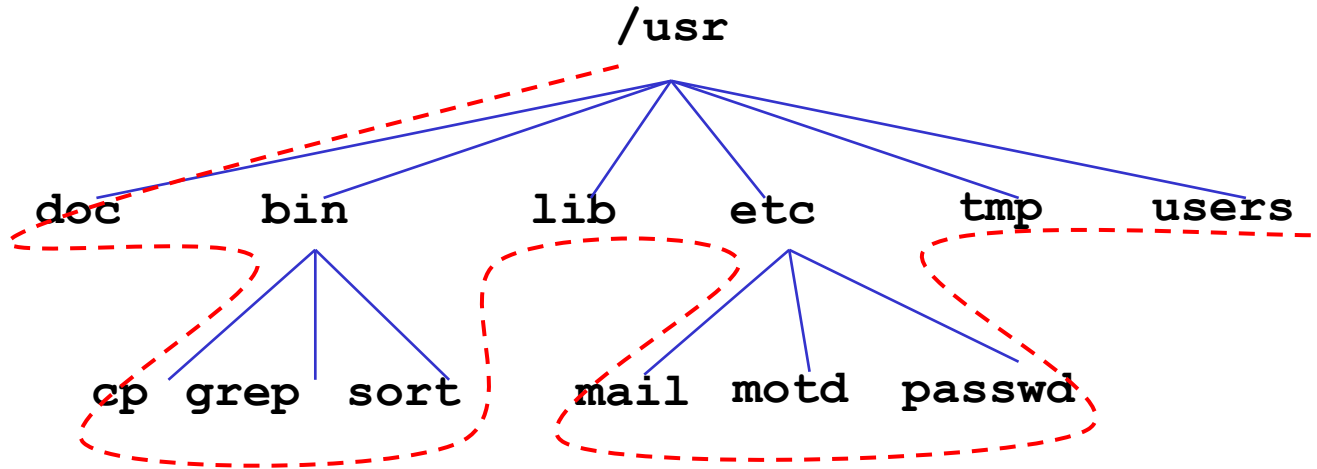
# Recorridos

- **Preorden**  
Se procesa primero la raíz y luego los hijos
- **Inorden**  
Se procesa el primer hijo, luego la raíz y por último los restantes hijos
- **Postorden**  
Se procesan primero los hijos y luego la raíz
- **Por niveles**  
Se procesan los nodos teniendo en cuenta sus niveles, primero la raíz, luego los hijos, los hijos de éstos, etc.



# Árbol General

## Recorrido en preorden

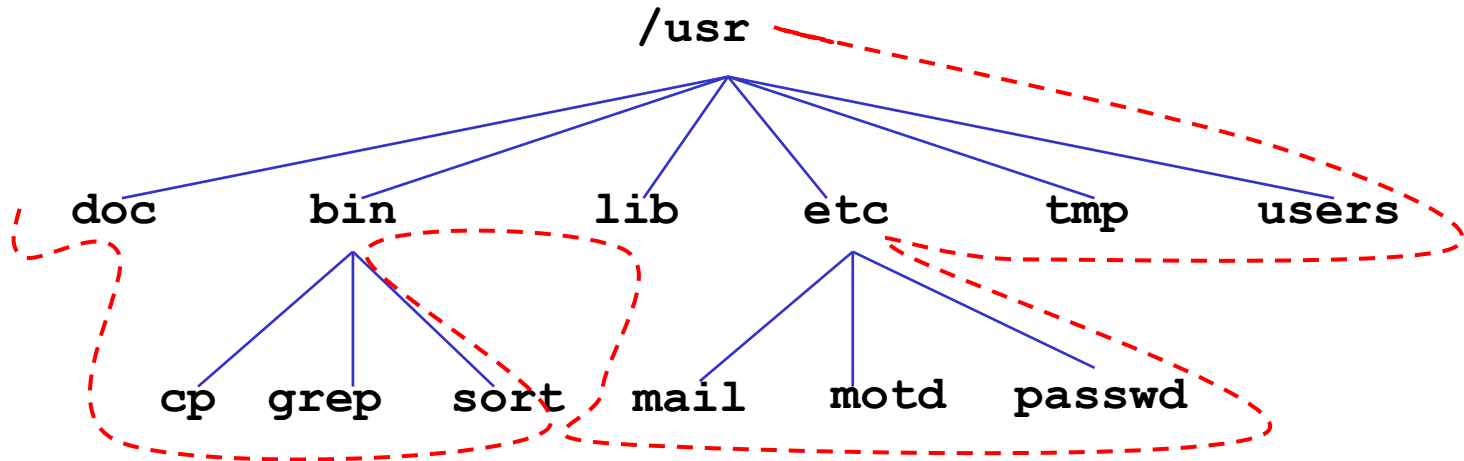


```
public void preOrden() {  
    imprimir (dato);  
    obtener lista de hijos;  
    mientras (lista tenga datos) {  
        hijo ← obtenerHijo;  
        hijo.preOrden();  
    }  
}
```

**Ejemplo: Listado del contenido de un directorio**

# Árbol General

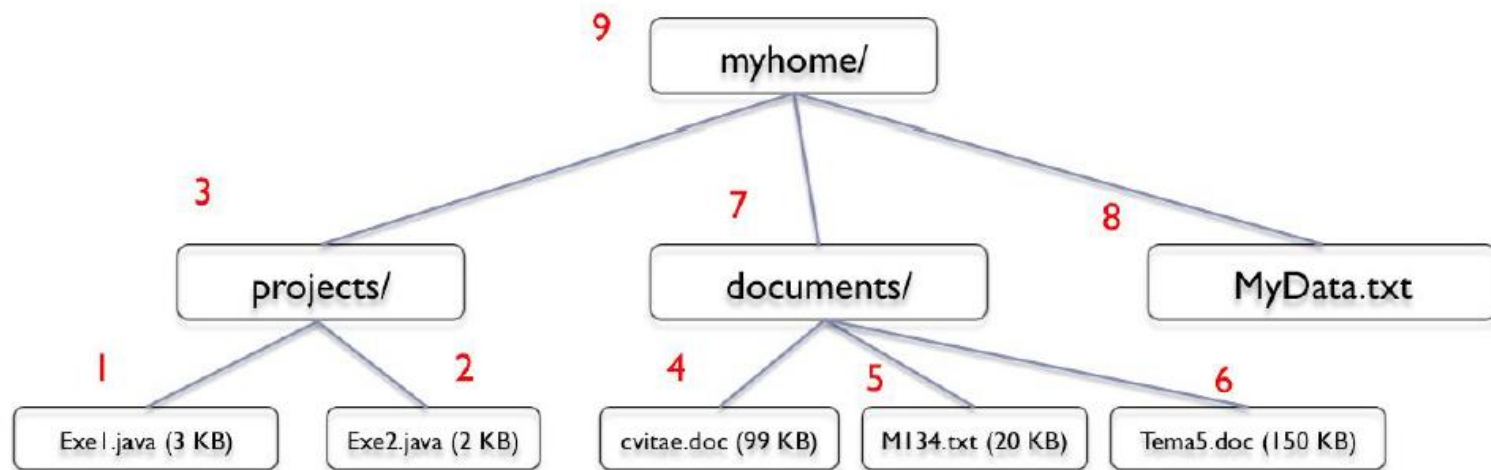
## Recorrido en postorden



```
public void postOrden() {  
    obtener lista de hijos;  
    mientras (lista tenga datos) {  
        hijo ← obtenerHijo;  
        hijo.postOrden();  
    }  
    imprimir (dato);  
}
```

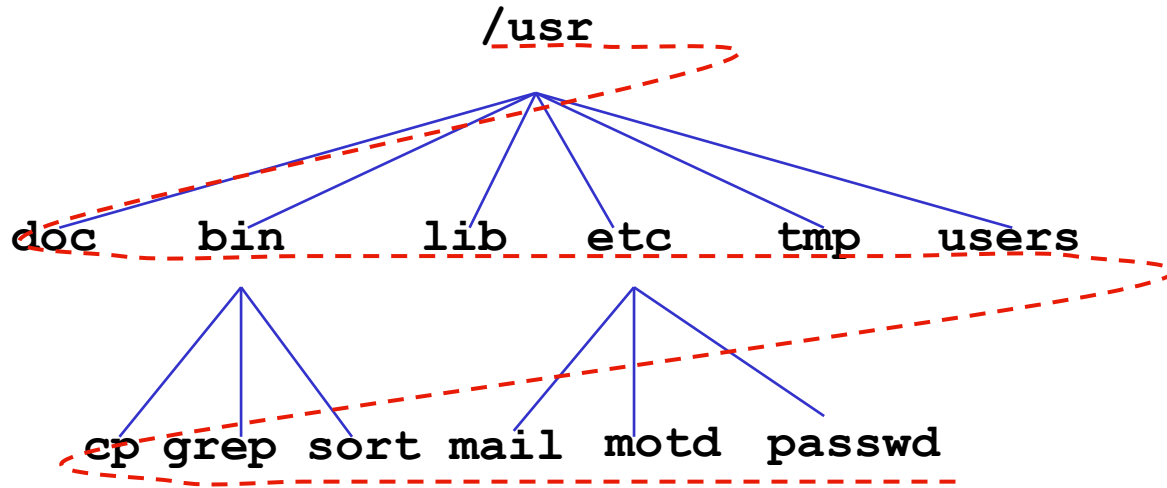
# Recorrido: Postorden

**Ejemplo: Calcular el tamaño ocupado por un directorio**



# Árbol General

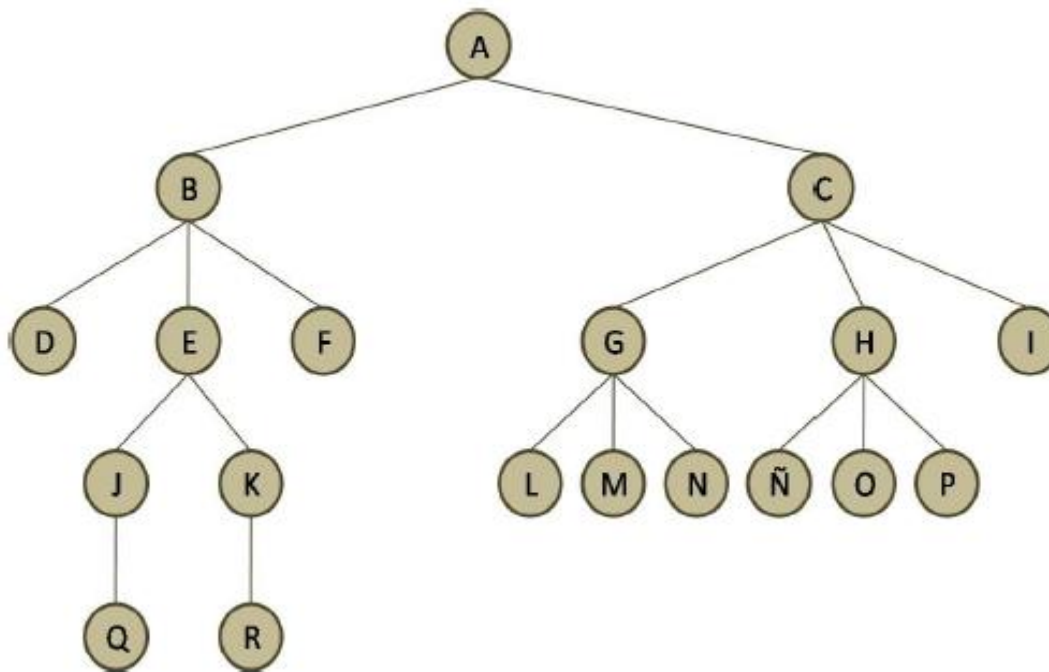
## Recorrido por niveles



```
public void porNiveles() {
    encolar(raíz);
    mientras cola no se vacíe {
        v ← desencolar();
        imprimir (dato de v);
        para cada hijo de v
            encolar(hijo);
    }
}
```

# Ejercicio

**Dado el siguiente árbol, escriba los recorridos preorden, inorden y postorden**



# Ejercicio

## Abeto navideño

Problem - B - Codeforces

Considere un árbol general. Recordemos que el vértice  $u$  se llama hijo del vértice  $v$  y el vértice  $v$  se llama padre del vértice  $u$  si existe una arista dirigida de  $v$  a  $u$ . El árbol tiene un vértice distinguido llamado **raíz**, que es el único vértice que no tiene padre. Un vértice se llama **hoja** si no tiene hijos y tiene padre.

Llamaremos **abeto** a un árbol si cada vértice no hoja tiene al menos 3 hijos hojas. Dado un árbol general, compruebe si es un abeto.

### Input

La primera línea contiene un entero  $n$ : el número de vértices en el árbol ( $3 \leq n \leq 1000$ ). Cada una de las siguientes  $n - 1$  líneas contiene un entero  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) — el índice del padre del  $i + 1$ -ésimo vértice ( $1 \leq p_i \leq i$ ).

El vértice 1 es la raíz. Está garantizado que la raíz tiene al menos 2 hijos.

### Output

Imprima "Yes" si el árbol es un abeto y "No" de lo contrario.

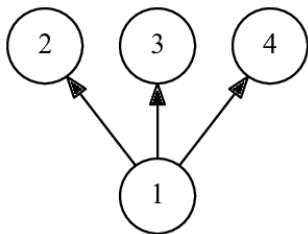
## Ejemplo 1

**Input**

4  
1  
1  
1

**Output**

Yes



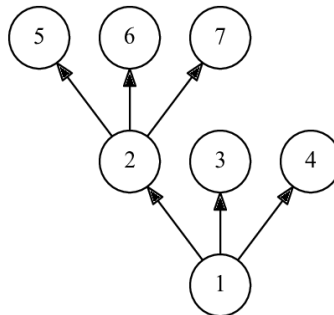
## Ejemplo 2

**Input**

7  
1  
1  
1  
2  
2  
2

**Output**

No



## Ejemplo 3

**Input**

8  
1  
1  
1  
1  
1  
3  
3  
3

**Output**

Yes

