

# 第一章 倍数特性

## 1. 整除

如果，  $A = B \times C$  ( $B$ 、 $C$  均为整数)， 那么，  $A$  能被  $B$  整除， 且  $A$  能被  $C$  整除。

(1) 口诀法 (常用于 **3、4、5、9**) :

**3/9** 看各位数字之和， **5** 看末位， **4** 看末两位。

**3/9** → 看各位数字之和能否被 **3/9** 整除；

**2/5** → 看数字末一位能否被 **2/5** 整除；

**4/25** → 看数字末两位能否被 **4/25** 整除；

**8/125** → 看数字末三位能否被 **8/125** 整除。

(2) 拆分法 (没口诀， 常用于 **7、11、13**)

一个数=接近且明显能被整除的数±零头， 只看零头。

623÷7 把 623 拆成 7 的倍数±零头， 只看零头能否被 7 整除。

(3) 因式分解 (复杂倍数， 常用于 **6、12、18、24** 等)

因式分解成两个互质 (**互质指两数没有公约数**) 的数， 同时满足能被这两个数整除。

$24=3\times8$

## 2. 余数

余数型 (公务员思想：均分思想、多退少补)

(1) 特性：每人、均分、多几个、少几个；

(2) 若总数 =  $ax + b$ ， 则 (总数 -  $b$ ) 能被  $a$  整除。( $a$ 、 $x$  均为整数)。

## 3. 比例

比例型适用于：

- 1、题干特征：分数、比例、百分数、倍数
- 2、对象特征：描述对象为不可分割的整体，整数才有意义。人、车、年龄等  
核心：问题和分子、分母的关系。

已知某班： $\frac{\text{男}}{\text{女}} = \frac{m}{n}$

(最简分数)，问：

- ① 男生人数是  $m$  的倍数。
- ② 女生人数是  $n$  的倍数。
- ③ 全班人数是  $(m + n)$  的倍数。
- ④ 男女生人数差是  $(m - n)$  的倍数。

表达方式：

- ① 男员工是女员工的  $\frac{3}{5}$  (分数)；
- ② 男员工与女员工之比  $3 : 5$  (比例)；
- ③ 男员工是女员工的  $60\%$  (百分数)；
- ④ 男员工是女员工的  $0.6$  倍 (倍数)。

### 3.延伸考法

(1) 考法一：

$$\frac{\text{男}}{\text{女}} = \frac{m}{n}$$

(2) 考法二：

$$\frac{\text{男} - 2}{\text{女}} = \frac{m}{n}$$

(3) 考法三 (A与非A思想)：

$$\frac{\text{甲}}{\text{其它}} = \frac{m}{n}$$

## 4.倍数特性之增长率型 (用资料解决数量)

充分利用已学过的资料分析来解决数量问题。

- (1) 分析关系：基期、现期、增长量、增长率。
- (2) 结合选项，做猜结合。

## 5. 倍数特性之 $A = \underline{B} \times C$ (用资料解决数量)

1. 形式:  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ , 给单个量。

2. 方法: 赋值。

公倍数求法: 短除法

**最小公倍数求法:**

$$\begin{array}{r}
 10 \mid 750 \quad 1350 \\
 \hline
 5 \mid 75 \quad 135 \\
 \hline
 3 \mid 15 \quad 27 \\
 \hline
 & 5 \quad 9
 \end{array}$$

最小公倍数为  $\underline{10} \times \underline{5} \times \underline{3} \times 5 \times 9 = 6750$

## 第二章 方程问题

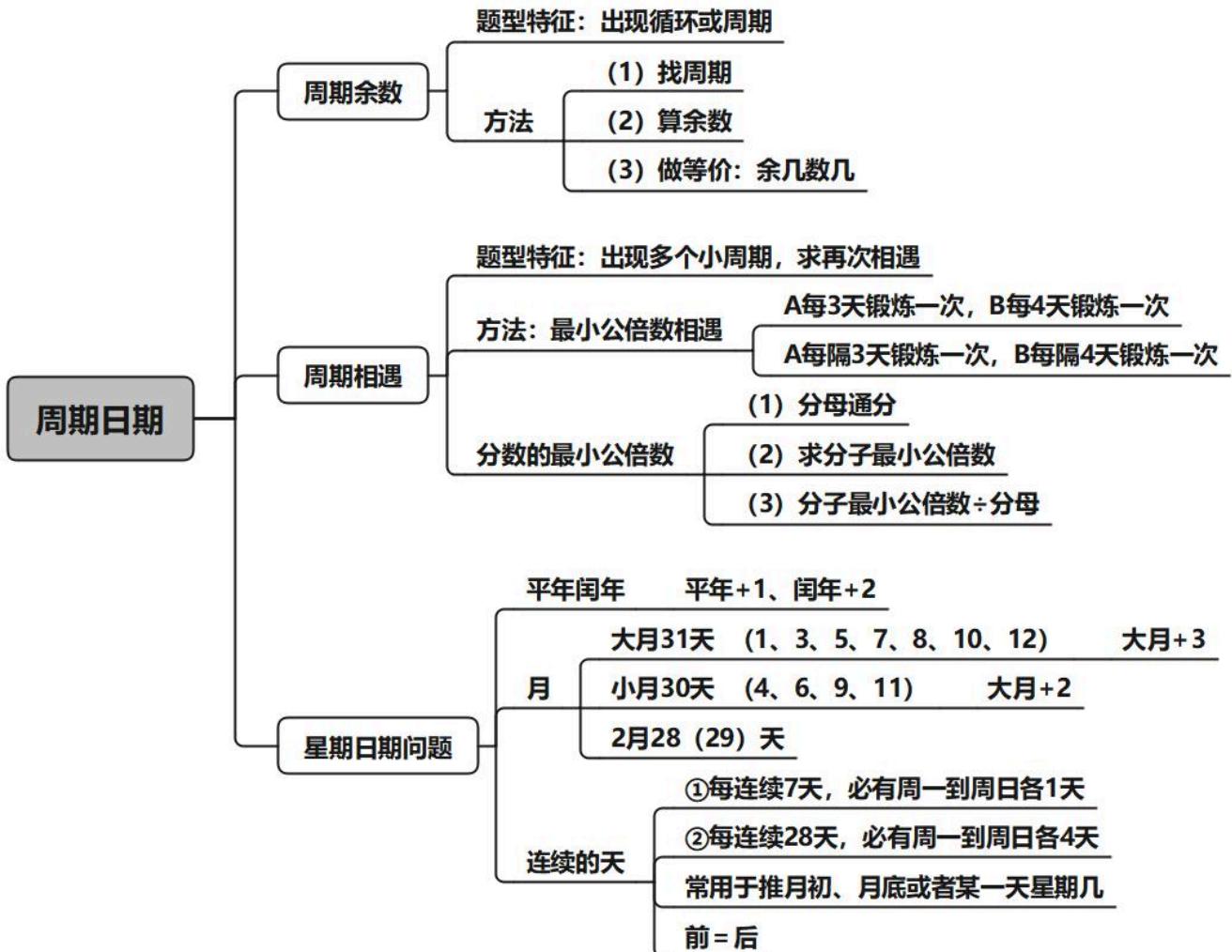
1. 普通方程：一个未知数 (x)

2. 普通方程组：多个未知数 (设 x、y、z)

3. 不定方程

4. 不定方程

# 第三章 周期问题



## 一、周期余数

1. **题型特征:** 出现循环或周期, 问? 个, 往往数据很多, 或者数字很大, 找规律即可。

### 2. 解题思路:

- (1) 找周期: 确定周期的起点和长度。
- (2) 算余数:  $\text{总数} \div \text{周期长度} = \text{多个周期...余数 (n)}$
- (3) 做等价: 第 n 个: 余几数几 (无余数, 周期最后一个)

3. 一串数字, 一定枚举找规律。

## 二、周期相遇

1.题型特征：出现多个小周期，求再次相遇；

2.方法：最小公倍数相遇；

3.注（题目坑）：每隔  $n$  天 = 每  $n+1$  天

## 三、星期日期问题

星期日期判断：

大月与小月：一三五七八十腊，三十一天永不差。

大月 31 天 (1、3、5、7、8、10、12)

小月 30 天 (4、6、9、11)

2 月 28 (29) 天

注：

(1) 每个月都必然有完整的 4 周

(2) 鉴于“一个自然月内最多有……”应将这个自然月按照大月 31 天计算。

12 生肖：

子鼠、丑牛、寅虎、卯兔、辰龙、巳蛇、午马、未羊、申猴、酉鸡、戌狗、亥猪。

注意：本命年以 12 为周期

1.题型特征：给出一段时间内有若干个周几，推算某一天为周几。

2.常用结论：

(1) 每连续 7 天，必有周一到周日各 1 天

(2) 每连续 28 天，必有周一到周日各 4 天

3.解题思路：每个月都必然有 4 周，取连续 28 天

4.结论：平年+1，闰年+2，大月+3，小月+2。

平闰年判定：平年 365 天 (2 月 28 天)，闰年 366 天 (2 月 29 天)

下半年固定为 184 天

年份数能被 4 整除的为闰年，否则为平年；整百的年份需要被 400 整除。

整年推断：过一个平年星期数 +1，过一个闰年星期数 +2。

注：可以简记为 52 周零 1 天 (闰年零 2 天)。

5.技巧：前 = 后 (余数)

即余数为几，则取周期排列的前几天

如  $\frac{30}{7} = 4 \dots\dots 2$

六日一二三四五|六日一二三四五|六日一二三四五|六日

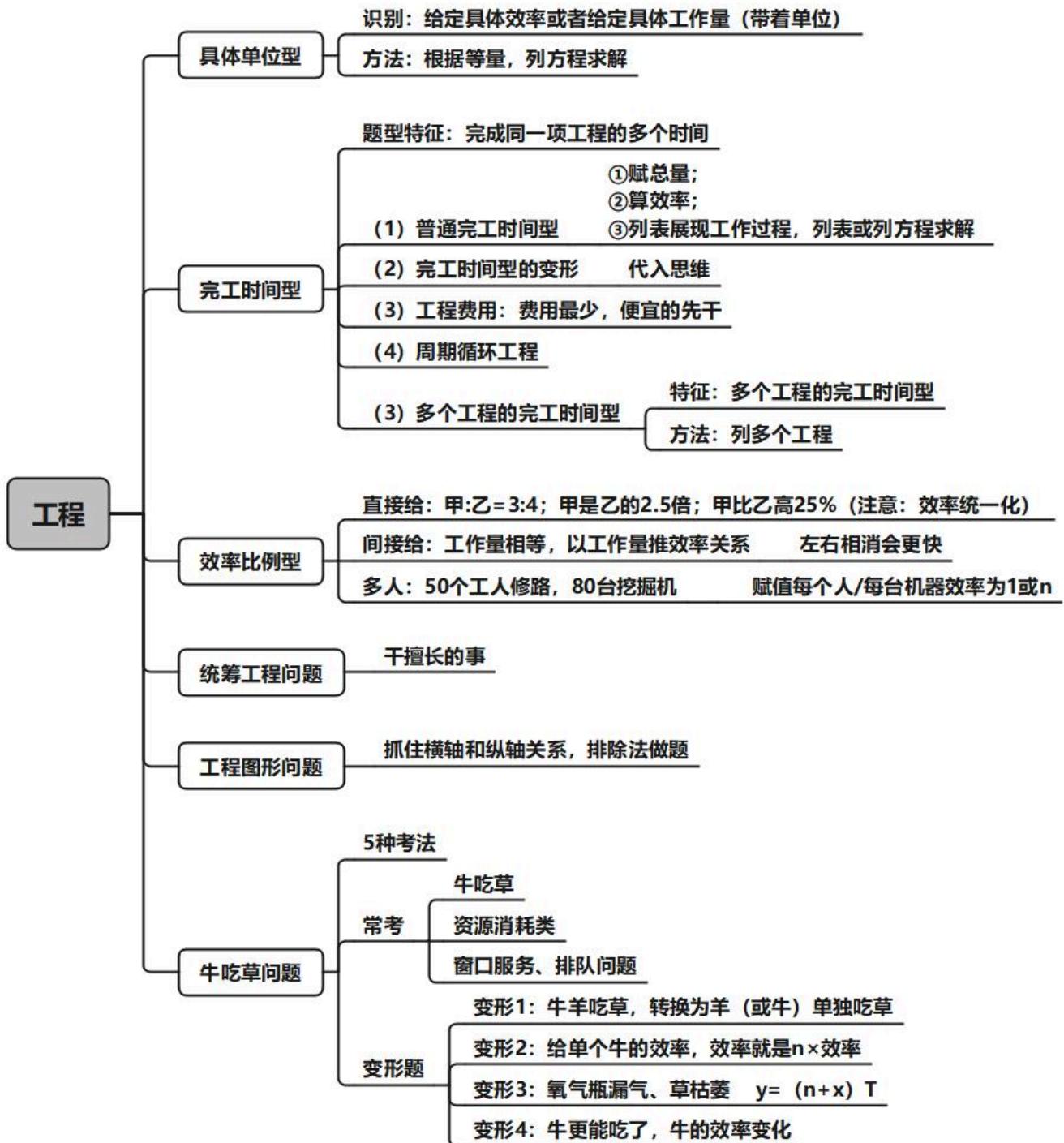
如何求分数的最小公倍数：

$$\text{分数的最小公倍数} \left\{ \begin{array}{l} \text{(1) 分母通分} \\ \text{(2) 求分子最小公倍数} \\ \text{(3) } \frac{\text{分子最小公倍数}}{\text{分母}} \end{array} \right.$$

求： $10$ 、 $\frac{25}{4}$ 、 $\frac{25}{6}$  的最小公倍数

注意：对日期和星期对应题，或者复杂相遇问题，直接枚举即可。

## 第四章 工程问题



### 一、具体单位型

特征: 有具体的效率或者总量。

方法：列方程，根据问题求解。

## 二、完工时间型

### 1.普通完工时间型

完工时间型

特征：多个主体的完工时间

方法：

总量 = 效率 × 时间

第一步：赋值总量（公倍数）

第二步：求效率

第三步：列表或列方程求解

### 2.工程费用

特征：有工期时间的限制。

费用最小：让便宜的工作最久。

### 3.周期循环工程（确定周期）

方法：确定周期

### 4.复杂方程的完工时间型

方法：不会解，不想解，就代入。

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+15} = 1 \quad x=?$$

### 5.多个工程的完工时间型

特征：多个工程的完工时间型

方法：列多个工程

计算：好算为原则

### 三、效率比例型

1.直接给：甲 : 乙 = **3 : 4**；甲的效率是乙的 **2.5** 倍；甲的效率比乙高 **25%**。

2.间接给：工作量相等，以工作量推效率关系

(1) 甲 **4** 天的工作量等于乙 **3** 天的工作量（坑点）

$$4\text{甲} = 3\text{乙} \rightarrow \frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{3}{4}$$

(2) 甲、乙两个工程队合作完成某工程需 **36** 天，若甲工程队先做 **10** 天，剩下的工程再由两队合作 **30** 天完成。

$$\text{总} = 36(\text{甲} + \text{乙}) = 10\text{甲} + 30(\text{甲} + \text{乙})$$

$$\rightarrow \frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{3}{2}$$

3.给具体人数或机器数：

**50** 个工人修路，**80** 台挖掘机；

赋值每个人 / 每台机器效率为 **1**。

### 四、统筹工程问题

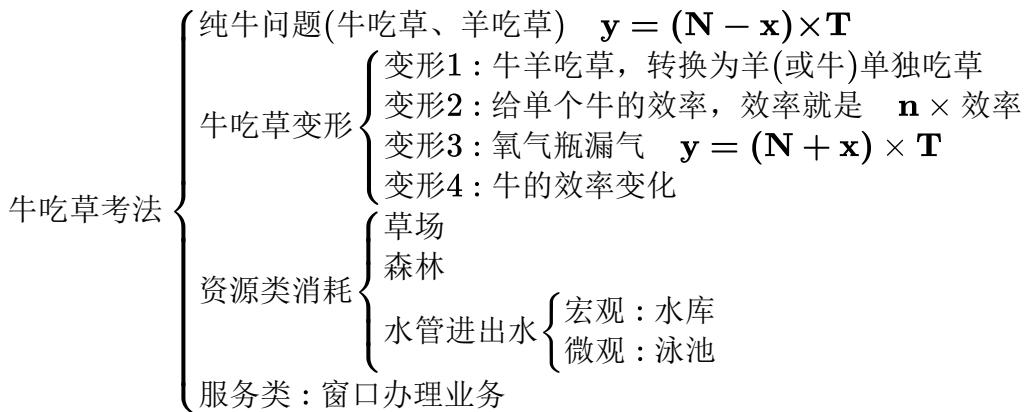
方法：擅长的人干擅长的事。

### 五、工程图形问题

研究：时间的关系、效率的关系

做题方法：排除法

## 六、牛吃草问题



### (1) 普通牛吃草

基本公式  $y = (N - x) \times T$

**y**: 代表原有存量的消耗量 (比如: 原有草量吃完啦)

**N**: 促使原有存量消耗的变量 (比如: 牛数)

**x**: 存量的自然生长速度 (比如: 草长速度)

**T**: 时间

【考法合集：充分认知】

一片草地每天都以平均速度生长，已知这片草地可以供 25 头牛吃 12 天，或者供 40 头牛吃 6 天。

$$y = (N - x) \times T = (25 - x) \times 12 = (40 - x) \times 6$$

$$\rightarrow x = 10, \quad y = 180$$

问题1：草生长速度是多少？

**10**

问题2：这片草地原有多少草量？

**180**

问题3：这片草地可以供 30 头牛吃多少天？

$$180 = (30 - 10) \times T$$

$$\rightarrow T = 9$$

问题4：草地上有 28 头牛，需要多少天，原有草地还剩 40% ?

$$180 \times 60\% = (28 - 10) \times T$$

$$\rightarrow T = 6$$

问题5：要想可持续发展（草永远吃不完），每天最多放多少头牛？

**N = x** 时，可持续最多

### (2) 牛吃草变形

变形 1：牛羊吃草，转换为羊(或牛)单独吃草

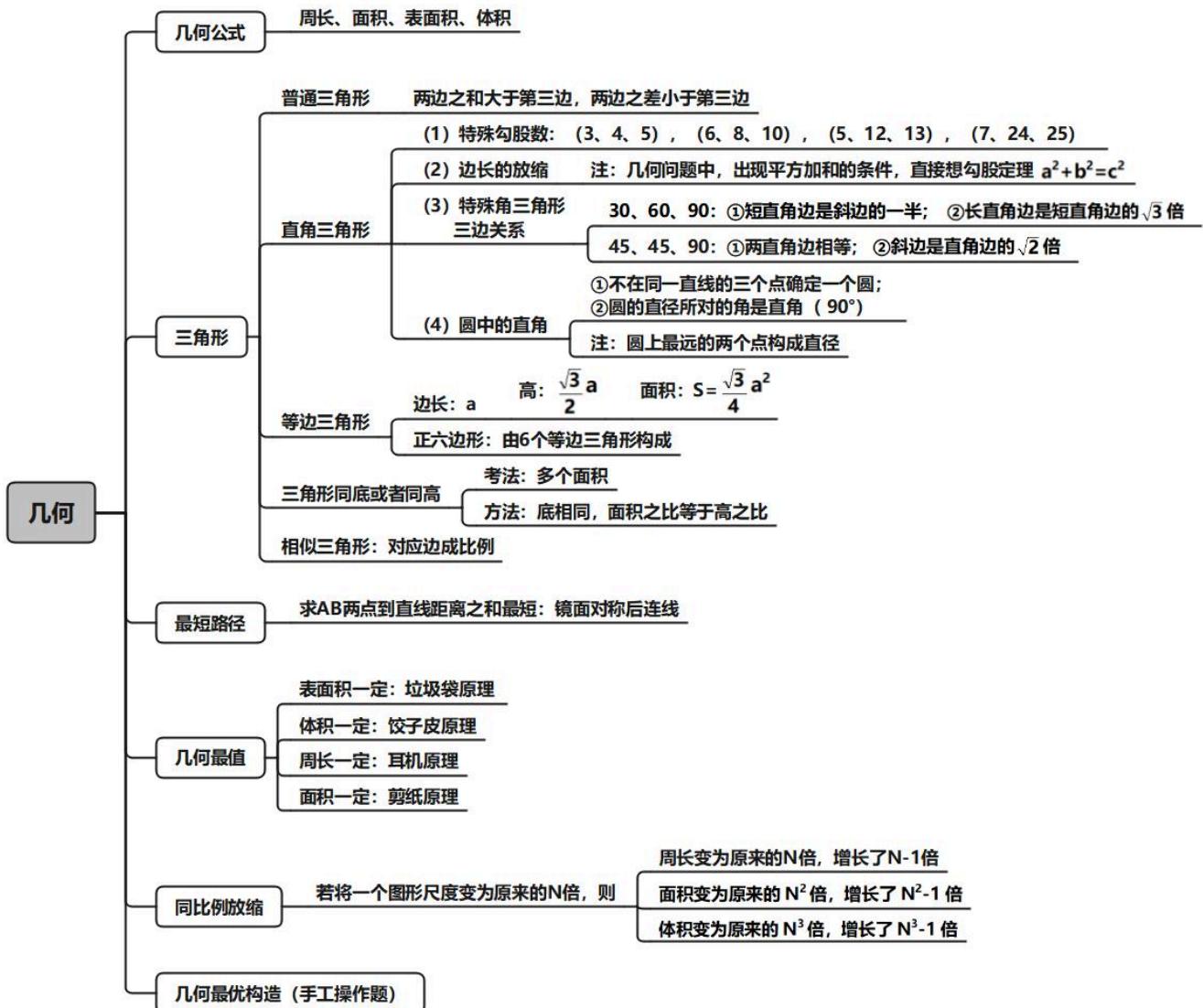
变形 2：给单个牛的效率，效率就是  $n \times$  效率

变形 3：氧气瓶漏气  $y = (N + x) \times T$

变形 4：牛的效率变化



# 第五章 几何问题



情: 超级高频题型

特点: 技巧性特别强: 做、量、猜

最佳策略: 识别、记忆

需要图形意识, 图形意识, 学会画图, 建立图形意识。

## 一、几何公式

### ✓ 周长类

$$\text{正方形周长} = 4a \quad \text{长方形周长} = 2(a + b) \quad \text{圆形周长} = 2\pi r \quad \text{弧长} = \frac{n^\circ}{360^\circ} 2\pi r$$

## ✓ 面积类

$$\text{正方形面积} = \mathbf{a}^2$$

$$\text{三角形面积} = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$$

$$\text{梯形面积} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{h}$$

$$\text{长方形面积} = \mathbf{a}\mathbf{b}$$

$$\text{圆形面积} = \pi\mathbf{r}^2$$

$$\text{菱形面积} = \frac{1}{2} \text{对角线乘积}$$

$$\text{平行四边形面积} = \text{底} \times \text{高}$$

$$\text{扇形面积} = \frac{\mathbf{n}^\circ}{360^\circ} \pi\mathbf{r}^2$$

## ✓ 表面积类

$$\text{正方体表面积} = 6\mathbf{a}^2$$

$$\text{圆柱体表面积} = 2\pi\mathbf{R}^2 + 2\pi\mathbf{R}\mathbf{h}$$

$$\text{长方体表面积} = 2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac})$$

$$\text{球体表面积} = 4\pi\mathbf{R}^2$$

## ✓ 体积类

$$\text{正方体体积} = \mathbf{a}^3$$

$$\text{柱体体积} = \mathbf{Sh}$$

$$\text{长方体体积} = \mathbf{abc}$$

$$\text{锥体体积} = \frac{1}{3} \mathbf{Sh}$$

$$\text{锥体侧面积} = \pi\mathbf{rl}$$

$$\text{长方体体对角线} = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2}$$

$$\text{球体体积} = \frac{4}{3} \pi\mathbf{R}^3$$

$$\text{圆台侧面积} = \pi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\mathbf{l}$$

## ✓ 其他

$$\text{锥体侧面积} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\mathbf{rl} = \pi\mathbf{rl} \quad (\text{类三角形})$$

$$\text{圆台侧面积} = \frac{1}{2} (2\pi\mathbf{r}_1 + 2\pi\mathbf{r}_2)\mathbf{l} = \pi(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\mathbf{l} \quad (\text{类梯形})$$

$$\text{多边形内角和} = (\mathbf{n} - 2) \times 180^\circ$$

$$\text{常考根号: } \sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236$$

## 二、三角形

### 1、普通三角形

两边之和大于第三边

两边之差小于第三边

### 2、特殊三角形：直角三角形、等边三角形

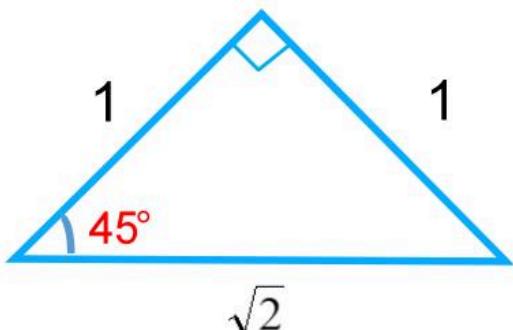
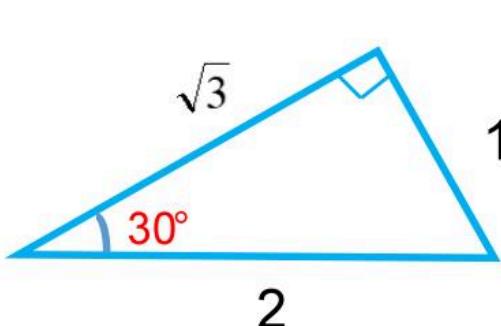
常考点  $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ 、特殊角三角形三边关系；

(1) 特殊勾股数: (3、4、5)、(6、8、10)、(5、12、13)、(7、24、25)

(2) 边长的放缩

注: 几何问题中, 出现平方加和的条件, 直接想勾股定理 ( $a^2 + b^2 = c^2$ )

(3) 特殊角三角形三边关系。



### 30、60、90

① 短直角边是斜边的一半

② 长直角边是短直角边的  $\sqrt{3}$  倍

### 45、45、90 (等腰直角三角形)

① 直角边相等

② 斜边是直角边的  $\sqrt{2}$  倍

## 4. 等边三角形

$$\text{边长: } a \quad \text{高: } \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{面积: } S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

## 5. 正六边形:

由 6 个等边三角形构成

## 6. 圆中的直角

(1) 不在同一直线的三个点确定一个圆;

(2) 圆的直径所对的角是直角 (90°)。

注: 圆上最远的两个点构成直径。

## 7. 三角形同底或者同高

考法: 多个面积

方法: 底相同, 面积之比等于高之比

## (1) 直角三角形

## (2) 正六边形

## (3) 坐标构造

## (4) 三角形同底或者同高

考法：多个面积

方法：底相同， 面积之比等于高之比

## (5) 相似三角形

两个角相等， 三角形相似。

对应边成比例。

## 三、最短路径

1. 考查方式：求AB两点到直线距离之和最短

2. 解题原理：两点之间，线段最短

3. 解题技巧：

(1) 两点异侧，直接连线

(2) 两点同侧，到直线的最短，镜面对称后连线

## 四、几何最值

### 1、立体最值

(1) 立体图形中，若表面积一定，越接近于球，体积越大。（垃圾袋原理）

(2) 立体图形中，若体积一定，越接近于球，表面积越小。（饺子皮原理）

### 2、平面最值

(1) 平面图形中，周长一定，越接近于圆，面积越大

(2) 平面图形中，面积一定，越接近于圆，周长越小

### 3、长方形最值

- (1) 四边形周长一定时，正方形面积最大  
 (2) 四边形面积一定时，正方形周长最小

## 五、等比例放缩

若将一个图形尺度变为原来的  $N$  倍，则

- 1、对应角度不变
- 2、周长变为原来的  $N$  倍，增长了  $N - 1$  倍
- 3、面积变为原来的  $N^2$  倍，增长了  $N^2 - 1$  倍
- 4、体积变为原来的  $N^3$  倍，增长了  $N^3 - 1$  倍

尺度	比例	增长了
长度比	$1 : N$ ↓	$N - 1$ ↓
面积比	$1 : N^2$ ↓	$N^2 - 1$ ↓
体积比	$1 : N^3$	$N^3 - 1$

## 第六章 经济问题

1.基础经济

2.分段收费

3.经济函数最值

4.经济函数图形

## 第七章 最值问题

1.最不利构造

2.构造数列

3.多集合反向构造

## 第八章 容斥原理

1.两集合

2.三集合

3.画图法

4.容斥原理结合不定方程

5.容斥原理和周期结合

## 第九章 等差数列和等比数列

### 1.等差数列

### 2.等比数列

## 第十章 行程问题

1.基础行程

2.相对行程

3.比例行程

# 第十一章 排列组合

1.基础概念

2.分类思想

3.枚举

4.捆绑法

5.插空法

6.插板法

7.错位排列

8.环形排列

## 第十二章 概率问题

1.给情况求概率

2.给概率求概率

3.分类思想：正反向思维

4.几何概率

5.跟屁虫问题

6.比赛类概率

7.抓阄密码类

8.骰子问题

## 第十三章 年龄问题

1. 年龄特性解题和方程法解题

2. 年龄和不定方程结合

3. 年龄和年龄的平方

4. 属相和本命年

## 第十四章 溶液问题

1.溶液公式

2.等量变化：蒸发稀释

3.反复操作

## 第十五章 计数问题：平方数、植树和方阵问题

1. 平方数

2. 植树问题

3. 方阵问题

## 第十六章 数量易拿分小题型

1.钟表问题

2.标1法

3.空瓶换酒公式

4.货物集中——统筹运输问题

5.线切面问题

6.时间统筹

7.爬楼问题

8.网状图

9.脑筋急转弯——天平问题