

Банковский институт. Зачет по стохастическому анализу.

1. В рамках модели Блэка-Шоулза оцените в момент времени  $t = 0$  актив, выплачивающий в момент времени  $t$  сумму равную  $\ln(S_t)$ , где  $S_t$  — цена акции в момент времени  $t$ . Ответ можно оставить в виде обыкновенного интеграла.
2. Случайный процесс  $Z_t$  задан уравнением  $Z_t = \exp(W_t + bt)$ , где  $b$  — это константа.
  - (a) Найдите  $dZ_t$
  - (b) Выпишите формулу для  $dZ_t$  в полной записи (с интегралами)
  - (c) При каком  $b$  процесс  $Z_t$  будет мартингалом?
3. Случайный процесс  $Y_t$  задан уравнением  $Y_t = 2W_t + 5t$ . Момент остановки  $\tau$  — это момент времени, когда  $Y_t^2$  впервые достигнет 100,  $\tau = \min\{t | Y_t^2 = 100\}$ .
  - (a) Какие значения может принимать  $Y_\tau$  и с какими вероятностями?
  - (b) Чему равно  $\mathbb{E}(\tau)$ ?

Подсказка: процессы  $a^{Y_t}$  и  $Y_t - f(t)$  могут быть полезны

4. Найдите  $\mathbb{P}(W_2 - W_1 > 1)$
5. Распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано вероятностями  $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0,1$  при  $1 \leq i \leq j \leq 4$ . Найдите  $\mathbb{E}(Y | X)$ .
6. Изначально воюют один воин Добра и один воин Зла. Каждый день судьба выбирает одного из воюющих наугад и добавляет еще одного воина той же стороны. Никто никогда не погибает, они просто сражаются. Пусть  $T$  - время, когда Судьба впервые добавит война Добра. Найдите  $E(1/(T + 2))$

Подсказка: может быть доля войнов Добра в конце дня  $t$  — это мартингал...