В этой работе W_t — винеровский процесс.

1. На 6 гранях кубика написаны буквы a (3 раза), b (два раза), c (один раз). Кубик подбрасывается один раз. Случайная величина X равна 3, если выпало a, двум — если b, и одному — если c.
   (a) Найдите минимальную σ-алгебру $\mathcal{F}$ содержащую множество $A = \{a, c\}$
   (b) Найдите $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
   (c) Найдите $\mathbb{E}(Z)$ если $Z = X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
2. Пусть S_n — симметричное случайное блуждание с началом в нуле, а σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ содержит всю доступную к моменту времени n информацию. Найдите $\mathbb{E}(S_{30}|S_{18})$, $\mathbb{E}(S_{18}|S_{30})$, $\mathbb{E}(S_{18}S_{30}|\mathcal{F}_{25})$.
3. Найдите $\mathbb{P}(W_1 + 2W_2 > W_3)$ и $\mathbb{E}(W_1W_2W_3)$
4. Случайный процесс Z_t задан выражением $Z_t = \exp(a + bt + 6W_t)$, где a и b — это константы.
   (a) Найдите dZ_t
   (b) Выпишите формулу для dZ_t в полной записи (с интегралами)
   (c) При каких a и b процесс Z_t будет мартингалом?
5. Пусть $X_t = W_t^5 - 4W_t^2t^2$
   (a) Найдите dX_t
   (b) Является ли процесс X_t мартингалом?
   (c) Найдите $\mathbb{E}(X_t)$
6. В рамках модели Блэка-Шоулса положим $S_0 = 100$, $r = 0.1$, $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$. Найдите текущую цену актива, который в момент времени $T = 2$ выплачивает Вам 1 рубль, если через год цена актива превысит 120 рублей.
   Подсказка: в ответе может фигурировать функция распределения стандартной нормальной случайной величины $F()$.