

Домашнее задание по стохастическому анализу.

1. Найдите $\mathbb{E}(W_6^2 | W_4 = 5)$, $\mathbb{P}(W_6 > 6 | W_4 = 5)$
2. Пусть W_t — стандартное броуновское движение. Мы ждем до тех пор, пока оно не достигнет отметки 4 или отметки -3 , т.е. до момента $\tau = \min\{t | W_t = 4 \cup W_t = -3\}$.
Найдите $\mathbb{P}(W_\tau = 4)$, $\mathbb{E}(\tau)$, $\mathbb{E}(\tau W_\tau)$
Подсказка: Рассмотрите мартингалы W_t , $W_t^2 - t$, $W_t^3 - 3tW_t \dots$

3. Пусть $X_t = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1) \\ -2, & t \in [1; 2) \\ W_{1.5}, & t \in [2; \infty) \end{cases}$
Найдите $\int_0^t X_u dW_u$

4. Для следующих случайных процессов найдите dZ_t и выпишите соответствующую формулу в полной записи (с интегралами вместо d): $Z_t = \cos(t^2 \cdot W_t^3)$, $Z_t = t^3 W_t^3$.
5. В рамках модели Блэка-Шоулса определите сколько стоит в момент времени $t = 0$ актив, выплачивающий в момент времени T величину $\frac{1}{S(T)}$. Ответ должен зависеть только от текущей цены акции, безрисковой процентной ставки и параметров модели Блэка-Шоулса.

Дополнительные задачи для подготовки к зачету (не оцениваются, сдавать не нужно).

1. Пусть $X_t = \int_0^t \exp(as) dW_s$. Найдите $\mathbb{E}(X_t)$, $\mathbb{E}(W_t \cdot X_t)$, $\mathbb{E}(X_t \cdot X_s)$
2. Вася прыгает на один метр вперед с вероятностью p и на два метра вперед с вероятностью $1 - p$. Как только он пересечет дистанцию в 100 метров он останавливается. Получается, что он может остановиться либо на отметке в 100 метров, либо на отметке в 101 метр. Какова вероятность того, что он остановится ровно на отметке в 100 метров?
Подсказка: Если X_t — Васина координата, то можно выбрать a так, что $Y_t = a^{X_t}$ будет мартингалом...

3. Используя лемму Ито и свойства стохастического интеграла найдите

- (a) dW_t^4 и $\mathbb{E}(W_t^4)$
- (b) dW_t^6 и $\mathbb{E}(W_t^6)$
- (c) dW_t^8 и $\mathbb{E}(W_t^8)$

4. В рамках модели Блэка-Шоулса определите сколько стоит в момент времени $t = 0$ актив, выплачивающий в момент времени T величину $\max\{\ln(S(T)), 0\}$.
5. Цена акции в долларах подчиняется уравнению $dS = \alpha S dt + \sigma S dW_1$
Валютный курс (евро за доллар) подчиняется уравнению $dY = \beta Y dt + \delta Y dW_2$
 W_1 и W_2 - независимые броуновские движения
Опцион платит $\ln(SY)$ (евро) в момент времени T
 r - процентная ставка в евро.

Найдите цену этого опциона в евро в момент времени 0 (выразите ее через цену акции в евро).

Подсказка: Если нужно $dW_1 dW_2$, то оно равно нулю.

6. Используя лемму Ито, определите, являются ли следующие процессы мартингалами:
 - (a) $X_t = W_t^2 - t$
 - (b) $\exp(-uW_t - \frac{u^2}{2}t)$