

1. Игральный кубик подбрасывают два раза. Пусть  $X$  — это остаток от деления на 3 результата первого броска, а  $Y$  — остаток от деления на 3 суммарного результата двух бросков. Обозначим  $\hat{Y} = \mathbb{E}(Y \mid X)$ .
  - (a) Какие значения принимает  $\hat{Y}$  и с какими вероятностями?
  - (b) Найдите  $\mathbb{P}(\hat{Y} = X)$ .
2. Случайный процесс  $Z_t$  задан выражением  $Z_t = \exp(-1 + 3W_t + bt)$ , где  $b$  — это константа.
  - (a) Найдите  $dZ_t$
  - (b) Выпишите формулу для  $dZ_t$  в полной записи (с интегралами)
  - (c) При каком  $b$  процесс  $Z_t$  будет мартингалом?
3. Пусть  $X_t = e^{t/2} \sin W_t$ , а  $Y = e^{-t/2} \cos W_t$ .
  - (a) Найдите  $dX_t, dY_t$
  - (b) Являются ли процессы  $X_t$  и  $Y_t$  мартингалами?
  - (c) Найдите  $\mathbb{E}(X_t)$  и  $\mathbb{E}(Y_t)$
4. Саша и Маша играют в орлянку. Саша немного жульничает, поэтому вероятность его победы в каждой отдельной партии равна 0.6. Ничья невозможна, они решили играть до преимущества одного из игроков в 10 побед, не обязательно подряд. Какова вероятность того, что победителем серии партии окажется Саша?
5. В рамках модели Блэка-Шоулса найдите текущую цену актива, который в момент времени  $T = 2$  выплачивает Вам сумму равную  $S_2/S_1$ .