

В этой работе W_t — винеровский процесс.

1. На 6 гранях кубика написаны буквы a (3 раза), b (два раза), c (один раз). Кубик подбрасывается один раз. Случайная величина X равна 3, если выпало a , двум — если b , и одному — если c .
 - (a) Найдите минимальную σ -алгебру \mathcal{F} содержащую множество $A = \{a, c\}$
 - (b) Найдите $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
 - (c) Найдите $\mathbb{E}(Z)$ если $Z = X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$
2. Пусть S_n — симметричное случайное блуждание с началом в нуле, а σ -алгебра \mathcal{F}_n содержит всю доступную к моменту времени n информацию. Найдите $\mathbb{E}(S_{40}|S_{20})$, $\mathbb{E}(S_{20}|S_{40})$, $\mathbb{E}(S_{20}S_{40}|\mathcal{F}_{25})$.
3. Найдите $\mathbb{P}(3W_1 - 2W_2 > W_3)$ и $\mathbb{E}(W_1W_2W_3)$
4. Случайный процесс Z_t задан выражением $Z_t = \exp(a + bt - 3W_t)$, где a и b — это константы.
 - (a) Найдите dZ_t
 - (b) Выпишите формулу для dZ_t в полной записи (с интегралами)
 - (c) При каких a и b процесс Z_t будет мартингалом?
5. Пусть $X_t = W_t^4 - 3W_t^2t^2$
 - (a) Найдите dX_t
 - (b) Является ли процесс X_t мартингалом?
 - (c) Найдите $\mathbb{E}(X_t)$
6. В рамках модели Блэка-Шоулса положим $S_0 = 200$, $r = 0.1$, $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.3$. Найдите текущую цену актива, который в момент времени $T = 2$ выплачивает Вам 1 рубль, если через год цена актива превысит 220 рублей.
Подсказка: в ответе может фигурировать функция распределения стандартной нормальной случайной величины $F()$.