

Задачи для подготовки к контрольной. Сдавать ни одну задачу не нужно.

Задача 0.1.

Пусть X и Y - независимые биномиально распределенные случайные величины, $X \sim \text{Bin}(n_1, p)$, $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$. Найдите $E(X|X+Y)$.

Задача 0.2.

Введем понятие условной дисперсии. По определению, $\text{Var}(X|\mathcal{H}) := E(X^2|\mathcal{H}) - (E(X|\mathcal{H}))^2$. Докажите, что $\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|\mathcal{H})) + \text{Var}(E(X|\mathcal{H}))$

Задача 0.3.

Пусть X и Y имеют совместное нормальное распределение, $E(X) = E(Y) = 0$, $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ и $\text{Corr}(X, Y) = \rho$. Найдите $E(X|Y)$, $E(Y|X)$, $\text{Var}(X|Y)$, $\text{Var}(Y|X)$

Задача 0.4.

Монетка выпадает орлом с вероятностью p . Эксперимент состоит из двух этапов. На первом этапе монетку подкидывают 100 раз и записывают число орлов. На втором этапе монетку подбрасывают до тех пор пока не выпадет столько орлов, сколько выпало на первом этапе. Обозначим число подбрасываний монетки на втором этапе буквой X .

Найдите $E(X)$, $\text{Var}(X)$.

Hint: $E(X) = E(E(X|Y))$, $\text{Var}(X) = E(\text{Var}(X|Y)) + \text{Var}(E(X|Y))$

Задача 0.5.

Вася случайно выбирает между 0 и 1 число X_1 , затем случайно выбирает между 0 и X_1 число X_2 , затем X_3 между 0 и X_2 , и так до бесконечности.

1. Найдите $E(X_n)$, $\text{Var}(X_n)$;
2. Найдите функцию плотности распределения X_n ;
3. Найдите $E(X_2|X_1, X_3)$;
4. К какой случайной величине стремится X_n и в каких смыслах?

Задача 0.6.

Приведите пример последовательности X_n и предела X , таких что: $\lim E|X_n - X| = 0$, но $E(|X_n|) = \infty$

Задача 0.7.

Пусть $X \sim U[0; 1]$. К чему и в каких смыслах сходится $X_n = 1_{X > \frac{n}{2n+1}}$

Задача 0.8.

Пусть X_i независимы и одинаково распределены и $E(X_i) = 2010$. К чему и в каких смыслах сходится $\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$? (доказывать закон больших чисел не нужно, следует просто вспомнить его формулировку)

Задача 0.9.

На столе хорошо перемешанная колода из 36 карт. Карты открывают одну за одной до появления первого туза. Какова вероятность того, что следующая карта будет тузом?

Hint: а может быть доля тузов в неоткрытой части колоды — это мартингал? Впрочем, можно и без мартингалов обойтись.

Задача 0.10.

Изначально воюют один воин Добра и один воин Зла. Каждый день судьба выбирает одного из воюющих наугад и добавляет еще одного воина той же стороны. Никто никогда не погибает, они просто сражаются. Пусть T - время, когда Судьба впервые добавит война Добра. Найдите $E(1/(T+2))$.

Hint: может доля войнов Добра в конце дня t — мартингал?