Задачи для подготовки к контрольной. Сдавать ни одну задачу не нужно.

Задача 0.1.

Пусть A — множество всех подмножеств натуральных чисел, а B — множество бесконечных последовательностей из 0 и 1. Для примера: $\{5, 6, 178\} \in A$, $01010101010101..... \in B$. Сравните мощность множеств A и B.

Задача 0.2.

Монетка подкидывается бесконечное количество раз: X_n равно 1, если при n-ом подбрасывании выпадает орел и 0, если решка. Определим кучу σ-алгебр: $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\mathcal{H}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...)$.

Приведите по два нетривиальных (т.е. Ω и $\emptyset$ не называть) примера такого события A, что:

- $A \in \mathcal{F}_{2010}$
- $A \notin \mathcal{F}_{2010}$
- A лежит в каждой $\mathcal{H}_n$

В какие из упомянутых σ-алгебр входят события:

- $X_{37} > 0$
- $X_{37} > X_{2010}$
- $X_{37} > X_{2010} > X_{12}$

Упростите выражения: $\mathcal{F}_{11} \cap \mathcal{F}_{25}$, $\mathcal{F}_{11} \cup \mathcal{F}_{25}$, $\mathcal{H}_{11} \cap \mathcal{H}_{25}$, $\mathcal{H}_{11} \cup \mathcal{H}_{25}$

Задача 0.3.

Может ли в σ-алгебре быть ровно 2010 элементов?

Задача 0.4.

Пусть X - равномерная на $[0; 1]$ случайная величина. Пусть $\mathcal{H}_1$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все события вида $X = t$, а $\mathcal{H}_2$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все события вида $X < t$. Сравните σ-алгебры $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Задача 0.5.

Правильная монетка подбрасывается бесконечное количество раз. Вася наблюдает за результатами подбрасываний до тех пор, пока не выпадет 3 орла подряд. Пусть T - случайный момент времени, когда Вася прекратил наблюдения, и $\mathcal{F}_T$ — σ-алгебра событий различимых Васей. Приведите пример двух нетривиальных (т.е. не Ω и не $\emptyset$) событий входящих в $\mathcal{F}_T$.

Задача 0.6.

Правильный кубик подбрасывается один раз. X - число очков, выпавшее на кубике. Y - индикатор того, выпала ли четная грань. Z - индикатор того, выпало ли число больше 2-х.

Найдите закон распределения (проще говоря, заполните табличку) для случайных величин $E(XY|XZ)$, $E(Z|X)$, $E(X|Z)$

Табличка для заполнения:

Ω	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
$E(XY\|XZ)$						
$E(Z\|X)$						
$E(X\|Z)$						

Задача 0.7.

Пусть совместное распределение X и Y задано таблицей:

	$X=-1$	$X=1$
$Y=-1$	$1/8$	$4/8$
$Y=2$	$2/8$	$1/8$

а) Найдите $E(X|Y)$, представьте ответ в виде $E(X|Y)=a+bY$.
б) Убедитесь, что $E(E(X|Y))=E(X)$
в) Найдите $E(XY|Y)$ и представьте ответ в виде $f(Y)$

Задача 0.8.

Find conditional expectation $E(X|Y)$ intuitively (without formal proof)
$Z\sim U[0;1]$, $A=\{Z>0.5\}$, $X=2Z^2$, $Y=2Z-1_A$.

Задача 0.9.

Маша собрала n грибов в лесу наугад. Рыжики попадаются с вероятностью r, лисички - с вероятностью l, где $r+l<1$. Пусть R - количество собранных рыжиков, L - лисичек. Найдите:

1. $E(R|L)$
2. $P(E(R|L)=0)$

Задача 0.10.

Случайные величины X и Y независимы и одинаково распределены. Найдите $E(X|X+Y)$, $E(X-Y|X+Y)$, $E(X^2-Y^2|X+Y)$