Заметки к курсу стохастического анализа*

Борис Демешев, boris.demeshev@gmail.com

1 января 2016 г.

Содержание

*Свежая версия: https://github.com/bdemeshev/sc401/tree/master/sc_book

Цель: строгий курс для студентов не имеющих подготовки по теории меры, но знающих элементарный курс теории вероятностей. Дойти до простых SDE и модели БШ. Книга должна быть открыто доступна в интернете.

Пригодность для самостоятельной подготовки: после каждой subsection идет небольшое количество (5?) задач, которые нужно решить для себя. На них есть ответы. После каждой section идут дополнительные задачи (уже не обязательно с ответами?)

Идеология курса:

Все определения - строго

Все теоремы - строго формулируются

Несложные теоремы - строго доказываются

Сложные теоремы - по возможности дается набросок доказательства и ссылки для любопытных

Вопросы, приветы - boris.demeshev@gmail.com

Задачи на док-во лучше формулировать «Верно ли что, ...», а не «Докажите...»

Если доказательство больше страницы - в приложение.

Если временя урезано, то нарушать идеологию по принципу:

Оставлять только «практические» и компьютерные главы.

Глава 1. Счетность - несчетность множеств.

Сюда можно сделать подборку задач на повторение по теор. вер.

Кое-что вспомнить из матанализа.

Греческие буквы, аддитивный вариант, задачи из Crack

Глава 14 «Практическая». Модель Блэка-Шоулса.

Предпосылка модели.

Решение в явном виде для S_t

Уравнение на $e^{-rt}S_t$

Уравнение на $e^{-rt}X_t$

Теорема. Гирсанов.

Способ оценки актива - 1. $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_0)$

Примеры (в т.ч. оценить 75 центов в случае >1 - см. Crack)

Необходимое условие - дифференциальное уравнение.

Способ оценки актива - 2. Решение ДУ с начальными условиями.

Пример (оценить 75 центов в случае >1 - см. Crack)

Глава 15. Блэк-Шоулс глубже.

Греческие буквы.

Аддитивный вариант.

Быстрые вычисления

Задачи из Crack

Глава 16. Компьютерная.

Компьютерные симуляции броуновского движения.

Оценки мат. ожидания, дисперсии и функции плотности методом Монте-Карло.

Численное решение ДУ.

Оценка опционов через Монте-Карло и решение ДУ.
Глава 17. Path-Dependent Euro Option.
Knock-out options. Перестает действовать, если...
Look-back options. Выигрыш зависит от максимальной цены.
Asian options. Выигрыш зависит от средней цены.
Source: Shreve-II
Аддон: комменты к популярных книжкам
Список литературы обязательно с комментариями! Возможно абзац на книжку!

1 Прививки для туристов

Здесь собраны сюжеты, которые нужно знать до изучения стохастического анализа.

1.1 Бесконечности бывают разные

Икеевских карандашей никогда не наберешь достаточно!

Определение 3.1. Множества A и B называются **равномощными**, если между элементами этих множеств существует взаимно-однозначное соответствие.

Пример 3.2. Множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{5, 11, 12, 17\}$ равномощны, так как есть взаимно-однозначное соответствие:

$1 \leftrightarrow 5$
$2 \leftrightarrow 11$
$3 \leftrightarrow 12$
$4 \leftrightarrow 17$

Пример 3.3. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и множество четных натуральных чисел равномощны в силу соответствия:

$1 \leftrightarrow 2$
$2 \leftrightarrow 4$
$3 \leftrightarrow 6$
$4 \leftrightarrow 8$
...

Заметим, что в определении требуется только существование взаимно-однозначного соответствия. Это не противоречит тому, что могут существовать другие, не взаимно-однозначные соответствия. В примере 3.3 можно добиться и того, что среди натуральных чисел останутся «лишние»:

$1 \leftrightarrow ?$
$2 \leftrightarrow 2$
$3 \leftrightarrow 4$
$4 \leftrightarrow 6$
...

И того, что среди четных останутся «лишние», а именно:

$? \leftrightarrow 2$
$1 \leftrightarrow 4$
$2 \leftrightarrow 6$
$3 \leftrightarrow 8$
...

Пример 3.4. Множества $\{1, 2, 3, 4\}$ и множество $\mathbb{N}$ неравномощны. При любой попытке построить взаимно-однозначное соответствие среди натуральных чисел останутся «лишние».

Возникает естественный вопрос, все ли бесконечные множества равномощны?

Пусть S множество всех бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1. Например, одним из элементов S является последовательность 1010101010…

Теорема 4.0. *Множество S бесконечно, но не равномощно множеству $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Допустим противоположное, что S и $\mathbb{N}$ равномощны. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и последовательностями. К примеру оно могло бы выглядеть так: $1 \leftrightarrow 000000\ldots$ $2 \leftrightarrow 011000\ldots$ $3 \leftrightarrow 101011\ldots$ $4 \leftrightarrow 101001\ldots$

…Оказывается какое бы соответствие ни было создано, всегда существует последовательность, которой не сопоставлено ни одно число!

Создадим последовательность a по следующему принципу: возьмем первую цифру из первой последовательности, затем вторую из второй, затем третью из третьей и т.д. В нашем примере $a = 0110\ldots$: $1 \leftrightarrow \underline{0}00000\ldots$ $2 \leftrightarrow 0\underline{1}1000\ldots$ $3 \leftrightarrow 10\underline{1}011\ldots$ $4 \leftrightarrow 101\underline{0}01\ldots$

Затем построим последовательность b заменив единицы на нули, а нули на единицы в последовательности a. В нашем примере $b = 1001\ldots$

Вне зависимости от того, какое соответствие мы взяли (как в примере, или любое другое) последовательность b не может идти в нем ни под каким номером! Она не может идти под номером 1, так как отличается от первой последовательности первой цифрой. Она не может идти под номером 2, так как отличается от второй последовательности второй цифрой и т.д.

Мы пришли к противоречию, в S есть «лишняя» незанумерованная последовательность b. Значит S и $\mathbb{N}$ неравномощны. $\square$

Определение 4.1. Мы говорим, что множество A имеет мощность **континуум**, если оно равномощно множеству S бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1.

Определение 4.2. Множество A называется **счетным**, если оно конечно или равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Будьте бдительны при чтении других источников: некоторые авторы определяеют счетные как равномощные натуральным числам, но таких авторов меньшинство.

Из данного определения следует, что **несчетные** множества - это бесконечные множества не равномощные множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

(…) картинка с классификацией конечные-бесконечные, счетные, несчетные

Оказывается, что любые бесконечные множества можно сравнивать: либо они равномощные, либо одно из них «больше».

Теорема 4.3. *Если A и B, два произвольных множества, то возможна одна и только одна из трех ситуаций:*

1. *A и B равномощны.*
2. *A и B неравномощны, но A равномощно какому-нибудь подмножеству множества B.*
3. *A и B неравномощны, но B равномощно какому-нибудь подмножеству множества A.*

Доказательство. Доказательство можно найти (…). Может возникнуть вопрос, а что тут собственно доказывать, все же «очевидно»? Доказывать нужно два утверждения. Во-первых, что ситуации 2) и 3) не могут произойти одновременно. Во-вторых, что невозможна гипотетическая ситуация «несравнимости», когда A и B неравномощны, в A нет части равномощной B, и в B нет части равномощной A. $\square$

Из этой теоремы следует важное следствие:

Теорема 4.4. *Если A равномощно подмножеству B, то $A \preceq B$, т.е. либо мощность A меньше мощности B, либо A и B равномощны.*

Важные примеры!

- Бесконечные счетные множества:

- $\mathbb{N}^2$. Картинка:

  Фактически мы доказали, что объединение счетного количества счетных множеств счетно[1].

- $\mathbb{Z}$. Картинка:
- $\mathbb{Z}^n$ Доказательство — по индукции. Мы уже доказали, что $\mathbb{Z}^1$ — счетное множество. Теперь предположим, что $\mathbb{Z}^{n-1}$ — счетное. Получаем цепочку: $\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^1 \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$. Пусть $f(q)$ — это сумма модулей числителя и знаменателя дроби (после сокращения), например, $f(-2/3) = 5$. Сначала нумеруем дроби с $f(q) < 2$, потом — дроби с $f(q) < 3$, потом — дроби с $f(q) < 4$ и т.д. В результате каждая дробь получает свой номер.

• Множества мощности континуум:

- интервал $(0;1)$.
- прямая $\mathbb{R}$
- пространство $\mathbb{R}^n$
- функции непрерывные на отрезке $[0;1]$

Для целей стохастического анализа нам хватит этих сведений про мощности множеств, однако для общего развития полезно знать еще пару фактов.

Факт 1. Бесконечные множества не исчерпываются равномощными множеству $\mathbb{N}$ и множеству последовательностей S. Бесконечности бывают разные, и их бесконечно много. Если есть одно бесконечное множество A, то найдется бесконечное множесто B, где элементов еще больше, чем в A! А именно:

Теорема 5.1. *Если A произвольное множество, то B, множество всех подмножеств множества A, обозначаемое 2^A, не равномощно множеству A.*

Доказательство. Доказательству этого утверждения посвящено упражнение (...) □

Иными словами, подмножеств действительных чисел больше, чем действительных чисел. И так далее..

Факт 2. Невинный вопрос: а есть ли мощности промежуточные между континуумом и мощностью множества натуральных чисел? оказывается неожиданно сложным! Еще более неожиданно то, что любой ответ на него, и «да», и «нет» оказывается верным. Для ответа на этот вопрос интуитивных представлениях о множествах не хватает и нужно аксиоматизировать теорию множеств. Так вот разные системы аксиом приводят к разным ответам. В данном курсе мы это обсуждать не будем. Но заинтересовавшиеся могут посмотреть книгу Верещагин Шень, Начала теории множеств, http://www.mccme.ru/free-books/

Ссылки

Любопытствующим: Всего 40 страниц заметок «Set theory» на http://math.uga.edu/~pete/expositions.html.

Задачи

Задача 1.1. Чудо-чудное, диво-дивное! Существует ли список S всех возможных мощностей?

[1]Для знатоков может быть интересен тот факт, что в этом доказательстве неявно используется аксиома выбора. Без нее можно представить $\mathbb{R}$ как счетное объединение счетных множеств (ссылка, найти в Williams, Weighting the odds)

1.2 Частичный предел. Верхний и нижний.

Если есть последовательность a_i, то, забыв порядок чисел, можно рассмотреть ее как множество точек на числовой прямой.

Пример 6.0. Последовательности $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ на прямой соответствует множество точек:

(рисунок)

На прямой могут существовать точки в любой окрестности которых есть бесконечное количество членов последовательности a_n, в нашем примере это точки $x = -1$ и $x = 1$. Это точки называются точками накопления.

Определение 6.1. точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой **накопления** или **частичным пределом** для последовательности a_n, если в любой ε-окрестности точки x содержится бесконечное количество членов последовательности a_n.

Заметим, что если точка x является точкой накопления, то к ней можно «подобраться» сколь угодно близко выбрав некоторую подпоследовательность из последовательности a_n. Поэтому можно дать альтернативное определение:

Определение 6.2. точка $x \in \mathbb{R}$ называется точкой **накопления** или **частичным пределом** для последовательности a_n, если из последовательности a_n можно выбрать подпоследовательность b_k, сходящуюся к x.

Наконец про верхний и нижний частичные пределы. Наибольшая из точек накопления называется верхним частичным пределом, наименьшая - нижним частичным пределом. Обозначаются они $\limsup$ и $\liminf$, соответственно. Чтобы сделать эту мысль совсем точной, остается лишь добавить два крайних случая:

- Верхний частичный предел $\limsup a_n = +\infty$, если в последовательности a_n можно найти сколь угодно большие положительные числа
- Нижний частичный предел $\liminf a_n = -\infty$, если в последовательности a_n можно найти сколь угодно сильно отрицательные числа

Если от последовательности отрезать сколько-то элементов в начале (будь то $10, 100$ или 10^{100}), то на точки накопления это никак не повлияет. Если вокруг некой точки x было бесконечное количество членов последовательности, то после отрезания начала последовательности вокруг точки x существенных изменений не произойдет. Именно на этой идее базируется формальное определение. Заодно оно проливает свет на происхождение обозначения:

Определение 6.3. Верхний частичный предел , $\limsup_n a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k$.

Нижний частичный предел , $\liminf_n a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k$.

Несколько примеров.

Пример 6.4. Если $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, то $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

Пример 6.5. Если $a_n = n(-1)^n$, то $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = -\infty$

Пример 6.6. Если $a_n = n(1 + (-1)^n)$, то $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = 0$

1.3 Равномерная непрерывность

Понадобится для доказательств связанных с характеристическими функциями.

Рассмотрим непрерывную функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и произвольную точку x_0. Если мы хотим чтобы $f(x)$ не сильно отличалось от $f(x_0)$, то нам достаточно взять значение x не сильно отличающееся от x_0. А именно:

Определение 6.7. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого δ найдется такая ε-окрестность точки x_0, что для любого $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \delta$.

При этом нужное ε в общем случае будет зависить и от желаемого δ и от точки x_0:

Пример 6.8. Функция $f(t) = t^2$ на $\mathbb{R}$. Если мы хотим чтобы $f(x)$ отличалось от $f(2) = 4$ не более, чем на 5, то достаточно взять $\varepsilon = 1$. Действительно, если $|x - 2| < 1$, то $|f(x) - 4| < 5$.

Однако, чтобы $f(x)$ отличалось от $f(10) = 100$ не более, чем на 5, необходимо подойти к точке $x_0 = 10$ гораздо ближе чем на $\varepsilon = 1$. Достаточным окажется лишь $\varepsilon = \sqrt{105} - 10 \approx 0.25$.

Однако для некоторых функций необходимое ε можно выбирать даже не зная точки x_0.

Пример 7.1. Функция $f(t) = 2t + 7$ на $\mathbb{R}$. Если мы хотим, чтобы $f(x)$ отличалось от $f(x_0)$ не более, чем на 5, то достаточно взять $\varepsilon = 2.5$, вне зависимости от x_0.

Вот такие функции и называются равномерно непрерывными.

Определение 7.2. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $A \subset \mathbb{R}$, если для любого δ найдется такое ε, что для любых x и y, таких что $|x - y| < \varepsilon$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \delta$.

Пример 7.3. Функция $f(t) = cos(t)$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Пример 7.4. Функция $f(t) = t^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

1.4 Еще задачи

Задача 1.2. Счетно ли множество S_1 бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1, в которых количество 1 конечно? Для ясности, $1010101010\ldots$ (нули и единицы чередуются) $\notin S_1$, но $010000000000\ldots \in S_1$ (в последовательности только одна единица, стоящая на втором месте).

Задача 1.3. Декартово произведение конечного количества счетных множеств является счетным множеством. Да или нет?

Задача 1.4. Декартово произведение счетного количества счетных множеств является счетным множеством. Да или нет?

Задача 1.5. An enemy submarine is somewhere on the number line (consider only integers for this problem). It is moving at some rate (again, integral units per minute). You know neither its position nor its velocity.

You can launch a torpedo each minute at any integer on the number line. If the the submarine is there, you hit it and it sinks. You have all the time and torpedoes you want. You must sink this enemy sub - devise a strategy that is guaranteed to eventually hit the enemy sub.

Задача 1.6. Пусть A произвольное множество. Докажите, что мощность множества 2^A (множество всех подмножеств множества A) больше, чем мощность A.

Задача 1.7. Верно ли следующее утверждение: у последовательности a_n существует предел если и только если $\limsup a_n = \liminf a_n$

2 Списки событий и сигма-алгебры

2.1 Наделенность информацией и определение

Рассмотрим простой случайный эксперимент: игральный кубик подбрасывают два раза. Множество Ω исходов данного эксперимента содержит 36 элементов. Вася знает результат подбрасываний, и сообщает Пете значение случайной величины Z - произведения очков на выпавших гранях.

Всегда ли сможет ли Петя владея своей информацией, определить произошли ли события:

A - оба раза выпала единица,

B - хотя бы раз выпала пятерка,

C - хотя бы раз выпала шестерка?

Про события A и B Петя всегда сможет сказать произошли ли они: в первом случае достаточно сравнить Z с единицей, во втором - определить, делится ли Z на 5. Однако может сложиться такая ситуация, что Петя не будет уверен, произошло ли C: например, если Z окажется равным шести, то может быть это была пара (6,1) и тогда C произошло, а может это была пара $(2, 3)$ и тогда C не произошло.

Можно составить список событий, про которые Петя, зная Z, всегда сможет сказать, произошли ли они. Обозначим его буквой $\mathcal{F}$. В отличие от Пети Вася может уверенно сказать произошло ли любое событие и аналогичный список событий для него - все подмножества множества Ω.

(упр) Приведите примеры еще 3 событий, входящих в $\mathcal{F}$, и еще 3-х событий не входящих в $\mathcal{F}$.

В список $\mathcal{F}$ входят довольно много событий, а сам список обладает рядом важных свойств, а именно:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$ - даже ничего не зная, можно быть уверенным, что Ω произошло.

2) $\emptyset \in \mathcal{F}$ - даже ничего не зная, можно быть уверенным, что $\emptyset$ не произошло.

3) Если A и B входят в список $\mathcal{F}$, то $A \cup B$ и $A \cap B$ входят в список $\mathcal{F}$. Если Петя способен определить, произошли ли A и B по отдельности, то он путем простых логических заключений способен определить, произошли ли $A \cup B$ и $A \cap B$.

Подобные списки событий являются очень важными для нас и называются σ-алгебрами («сигма-алгебрами»).

Определение 8.1. Набор подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй[1], если обладает следующими тремя свойствами:

SA1. $\Omega \in \mathcal{F}$

SA2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $A^c \in \mathcal{F}$

SA3. Если $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, $A_3 \in \mathcal{F}$, и т.д., то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Пример 8.2.

Пример 8.3.

Почему в определении σ-алгебры мы не потребовали, чтобы выполнялись все свойства $(\ldots)$? Оказывается, неупомянутые свойства следуют из свойств SA1-SA3.

Пример 8.4. Применив SA1, а затем SA2 можно понять, что в любую σ-алгебру входит пустое множество.

Пример 8.5. Пересечение множеств можно заменить на несколько объединений и дополнений, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$. А значит из свойств SA2, SA3 следует также, что:

Если $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, $A_3 \in \mathcal{F}$, и т.д., то $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Ссылка на упражнение про симметрическую разность $(\ldots)$

Проще говоря, σ-алгебра - это набор событий замкнутый относительно любых операций с множествами ($\cup$, $\cap$, $()^c$, Δ) взятых в счетном количестве.

Самое время упомянуть два полезных множества, которые точно находятся в σ-алгебре $\mathcal{F}$ (если известно, что все A_i лежат в $\mathcal{F}$):

- $\limsup_n A_n$ - те исходы $w \in \Omega$, которые входят в бесконечное количество A_n. Почему это множество обязательно лежит в $\mathcal{F}$? Легко заметить, что $B_n = \cup_{k \geqslant n} A_k$ - это те исходы w, которые входят хотя бы в один A_k при $k \geqslant n$. Чтобы w входил в бесконечное количество A_n необходимо и достаточно того, чтобы исход w входил во все B_n. Значит, $\limsup_n A_n = \cap_n \cup_{k \geqslant n} A_k$.
- $\liminf_n A_n$ - те исходы $w \in \Omega$, которые входят во все A_n, начиная с некоторого. Рассуждая аналогично, $C_n = \cap_{k \geqslant n} A_k$ - это те исходы w, которые входят во все A_k при $k \geqslant n$. И, получается, что $\liminf_n A_n = \cup_n \cap_{k \geqslant n} A_k$

Пример 8.6. При заданном наборе Ω исходов случайного эксперимента самая «подробная» σ-алгебра - это 2^{Ω}, множество всех подмножеств Ω; а самая «бедная» σ-алгебра - это набор $\{\emptyset, \Omega\}$. Убедитесь, что аксиомы SA1-SA3 выполнены для обоих случаев!

Теорема 8.7. *Пересечение произвольного количества σ-алгебр - σ-алгебра.*

---

[1] Правильный английский термин σ-algebra. В некоторых текстах встречается устаревшее σ-field. Для знающих определения поля и алгебры отметим, что σ-алгебра действительно будет полем, только если $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. Вопрос для знатоков: относительно каких операций и над чем σ-алгебра будет алгеброй?

В силу этого простого наблюдения корректно говорить о минимальной σ-алгебре, порождаемой данным набором событие.

Определение 9.0. Пусть $\mathcal{H}$ - произвольный набор событий, не обязательно σ-алгебра. σ-алгебра $\mathcal{F}$ называется **минимальной** σ-алгеброй **порожденной** набором $\mathcal{H}$, если: $\mathcal{F}$ содержит набор $\mathcal{H}$, и любая другая σ-алгебра $\mathcal{F}'$, содержащая набор $\mathcal{H}$, содержит в себе $\mathcal{F}$. Обозначается порожденная σ-алгебра так: $\sigma(\mathcal{H})$.

Другими словами, чтобы найти σ-алгебру, содержащую заданный набор событий, можно рассмотреть все σ-алгебры, содержащие заданный набор событий, и взять их пересечение.

Заметим, что объединение даже двух σ-алгебр может не быть σ-алгеброй!

Пример 9.1. Пусть $\mathcal{F}_1 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty; 1), [1; +\infty)\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$ - две σ-алгебры. Тогда, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty; 1), [1; +\infty), (-\infty; 2), [2; +\infty)\}$ - не σ-алгебра.

В качестве небольшого итога: σ-алгебра, это список событий различимых рациональным индивидом. Т.е. список событий, про каждое из которых рациональный индивид (умеющий делать простые логические заключения) может гарантированно сказать, произошло они или нет. Забежим немного вперед и скажем, что именно для событий из σ-алгебры мы будем определять вероятность. У каждого события из данной σ-алгебры $\mathcal{F}$будет определена вероятность, число от 0 до 1. А у событий не входящих в σ-алгебру $\mathcal{F}$вероятности не будет вообще.

2.2 Борелевская сигма-алгебра

Из всех искусств для нас важнейшим является кино[1]. (Ленин)

Из всех σ-алгебр для нас важнейшей является борелевская σ-алгебра!!!

Определение 9.2. Борелевская σ-алгебра - это σ-алгебра порожденная открытыми подмножествами множества Ω.

Чаще всего нам понадобятся борелевские σ-алгебры: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что сам набор открытых множеств не является σ-алгеброй. Например, множество $A = (-\infty; 2)$ является открытым, а множество $\mathbb{R}\backslash A$ не является открытым.

Определение 9.3. Множество называется **борелевским** если оно является элементом борелевской σ-алгебры

Пример 9.4. Например на $\Omega = \mathbb{R}$ борелевскими являются:

- любой интервал, например $(2; 100)$ - т.к. он является открытым множеством
- любой отрезок, например $[2; 100]$ - т.к. его можно получить в виде $\mathbb{R}\backslash((-\infty; 2) \cup (100; +\infty))$
- любую произвольную точку, например $\{7\}$ - т.к. ее можно получить в виде $\mathbb{R}\backslash((-\infty; 7) \cup (7; +\infty))$
- любой полуинтервал, например $[2; 100)$ - т.к. его можно представить в виде объединения $[2; 3] \cup (3; 100)$

Самое время решить упражнение (...), которое показывает, что все «привычные» множества - борелевские.

Существуют ли неборелевские множества? Да, существуют! Но они очень «страшные» и не будут изучаться в этой книжке. Их даже больше, чем борелевских. Ситуация с ними похожа на ситуация с иррациональными числами: иррациональных больше, чем рациональных, но используют при практических расчетах как-правило рациональные. А именно:

Теорема 9.5. *Мощность борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - континуум.*

Доказательство. ссылка или в аппедникс? (...) □

Из этой теоремы следует, что неборелевских множеств больше, а именно $2^{continuum}$ (...)

Чуть позже (...) мы приведем три примера неборелевских множеств.

Борелевскую σ-алгебру можно породить также с помощью более простых наборов множеств. Например:

[1]Об этой цитате можно прочесть на http://liveuser.livejournal.com/62878.html

Теорема 9.6. *Если* $\mathcal{H} = \{(-\infty; t] | t \in \mathbb{R}\}$, *то* $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}$.

Доказательство. Шаг 1. Заметим, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$ и следовательно $\sigma(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}$. Для того, чтобы доказать равенство обеих частей, осталось доказать, что любое открытое множество войдет в $\sigma(\mathcal{H})$.

Шаг 2. Множества вида $(a; b]$ входят в $\sigma(\mathcal{H})$, т.к. в рамках σ-алгебры можно брать разность множеств, а $(a; b] = (-\infty; b] \backslash (-\infty; a]$.

Шаг 3. Пусть A - произвольное открытое множество. Мы докажем, что можно построить последовательность A_1, A_2, ..., такую, что каждое A_i лежит в $\sigma(\mathcal{H})$ и $A = \cup A_i$. И следовательно, $A \in \sigma(\mathcal{H})$:

В качестве A_1 возьмем объединение тех множеств вида $(n; n+1]$, где n - целое, а $(n; n+1]$ лежит в A. В качестве $A_2 \ldots (0.5n; 0.5(n+1)] \ldots$ В качестве $A_k \ldots (0.5^{k-1}n; 0.5^{k-1}(n+1)]$.

Иллюстрация для $A = (0; \sqrt{3}) = (0; 1.73\ldots)$: $A_1 = (0; 1]$, $A_2 = (0; 1.5]$, $A_3 = (0; 1.5]$, $A_4 = (0; 1.625]$ и т.д.

Почему нас всегда ждет успех? Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. Вокруг любой точки открытого множества A можно найти ε-окрестность, которая целиком лежит A. Длина кусочков, из которых состоит каждое A_k стремится к 0. Значит наступит, такой момент, когда кусочки очередного A_k «залезут» в произвольную ε-окрестность и покроют точку a. Следовательно, любая точка из A лежит в некотором A_k. А, значит, $A = \cup_i A_i$. □

...

Заметим, что в качестве порождающих множеств можно взять, например, такие наборы:

....

Задачи

Задача 2.1. Верно ли, что борелевскими являются следующие подмножества $\mathbb{R}$: a) множество целых чисел $\mathbb{Z}$ b) множество решений уравнения $cos(2x) + x = 0$ c) множество решений неравенства $x^5 - 5x^4 + x^3 - x + 8 \geqslant 0$

2.3 Еще задачи

Задача 2.2. За час до Нового года Дед Мороз дарит Вовочке одну конфету. За полчаса он забирает ее, съедает сам и дарит две другие конфеты. За четверть часа, забирает их, съедает и дарит четыре конфеты. И так далее. Пусть A_i - это номера тех конфет которые находятся в распоряжении Вовочки после i-го действия Деда Мороза. Например, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ и так далее.

Существует ли $\lim A_i$? Если да, то чему он равен?

Задача 2.3. Пусть N - произвольная функция сопоставляющая каждому исходу число или плюс-минус бесконечность, $N : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Можно думать об N как о случайной величине. Найдите $\lim_{k \to +\infty}(N < k)$

Задача 2.4. Игральный кубик подбрасывается один раз. В первый момент времени наблюдатель узнает, выпала ли четная грань или нет. Во второй момент времени наблюдатель узнает, выпала ли грань большая двух или нет. В третий момент времени наблюдатель точно узнает, какая грань выпала. Укажите множество элементарных событий и соответствующие три σ-алгебры событий.

3 Случайные величины

Сумма чисел на противоположных сторонах игральной кости всегда равна семи.

Обратите внимание, что мы начинаем главу про случайные величины перед главой про вероятность! Без последующего определения вероятности случайные величины окажутся бесполезны, но важно понимать, что понятие случайной величины не требует для себя наличия вероятности. Например, вероятность можно поменять, сохранив случайную величину, при этом, конечно, все интересные количества как то $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{E}(X)$ могут измениться.

3.1 Определение случайной величины

Определение 11.1. Случайная величина X - это функция, сопоставляющая каждому исходу случайного эксперимента некое действительное число, $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Если рациональному наблюдателю известно значение X, то он может определить, произошли ли например события $X < 0$, $X \in [2; 3]$, $X = \sqrt{3}$ и др. Таким образом, с каждой случайной величиной X связана сигма-алгебра $\sigma(X)$ событий гарантированно различимых наблюдателем, знающим значение X. Доведем эту идею до формального определения. Что означает, что я знаю X? Это означает, что я могу сравнить X с любым действительным числом, т.е. для любого заданного t могу сказать произошло ли событие вида $\{X < t\}$. Получаем определение:

Определение 11.2. Сигма-алгеброй порожденной случайной величиной X, $\sigma(X)$, называется минимальная сигма-алгебра, содержащая все события вида $\{X < t\}$, т.е. $\sigma(X) := \sigma(\{X < t | t \in \mathbb{R}\})$.

Как мы видели (...) с помощью подмножеств вида $(-\infty; t)$ можно породить нашу любимую борелевскую сигма-алгебру, а значит определение можно переформулировать и так:

Определение 11.3. Сигма-алгеброй порожденной случайной величиной X, $\sigma(X)$, называется минимальная сигма-алгебра, содержащая все события вида $\{X \in A\}$, где A — борелевское подмножество $\mathbb{R}$, т.е. $\sigma(X) := \sigma(\{X \in A | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$.

Тут упражнение ...

Для понимания структуры $\sigma(X)$ полезным может оказаться понятие прообраза:

Определение 11.4. Если задана функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$, то **прообразом** (pullback) множества A называется множество $\{w \in \Omega | X(w) \in A\}$, обозначается прообраз $X^{-1}(A)$.

Пример 11.5. Функция $f(t) = t^2$. Примеры прообразов: $f^{-1}(5) = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$.

Используя понятие прообраза можно понять, что $\sigma(X)$ состоит ровно из прообразов всех борелевских множеств. Действительно, прообразы борелевских множеств обязаны входить в $\sigma(X)$ исходя из определения (...). А никакое лишнее множество нам не нужно, т.к.

Теорема 11.6. *Пусть задана случайная величина X. Набор прообразов всех борелевских множеств $\{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Проверяем три свойства σ-алгебры.

- $\Omega = X^{-1}((-\infty; +\infty))$
- Если $A = X^{-1}(B)$, то $A^c = X^{-1}(B^c)$
-

□

Если рациональный индивид помимо событий из $\sigma(X)$ различает какие-то еще события, то он конечно же, также может определить значение случайной величины X. Для описания такой ситуации служит:

Определение 11.7. Случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется **измеримой** относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$.

Пример 11.8. Рассмотрим Ω, состоящее из 3-х элементов, σ-алгебру $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, a, \{b, c\}\}$ и случайные величины X и Y: (...)

В данном случае X является $\mathcal{F}$ - измеримой случайной величиной, а Y - не является $\mathcal{F}$-измеримой.

Иногда символом $\mathcal{F}$ обозначают не только саму σ-алгебру, но и множество всех случайных величин, являющихся $\mathcal{F}$-измеримыми. Это дает право использовать короткое обозначение $X \in \mathcal{F}$, означающее, что случайная величина X является $\mathcal{F}$-измеримой величиной. Буква $\mathcal{F}$ оказывается слегка перегруженной, но проблем при этом не возникает. Если A - событие, то $A \in \mathcal{F}$ следует понимать буквально: «множество A входит в список $\mathcal{F}$». Если X - случайная величина, то $X \in \mathcal{F}$ следует понимать как «X является $\mathcal{F}$-измеримой случайной величиной». В конце концов - букв мало, а событий и случайных величин - много!

Теорема 12.1. *Любая случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}$ является измеримой относительно самой «подробной» σ-алгебры 2^{Ω} (все подмножества множества Ω).*

Доказательство. Самая «подробная» σ-алгебра содержит все подмножества множества Ω и, в частности, содержит сигма-алгебру $\sigma(X)$, куда входят все прообразы борелевских множеств. $\square$

Пусть $X : \Omega \to \mathbb{R}$, на Ω задана σ-алгебра $\mathcal{F}$, а на $\mathbb{R}$- борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$. Оказывается, даже если X не является $\mathcal{F}$-измеримой ...

Множества, у которых «хороший» прообраз (прообраз попадает в $\mathcal{F}$) образуют σ-алгебру (не обязательно совпадающую с борелевской).

Теорема 12.2. *Пусть задана случайная величина X. Набор числовых подмножеств с прообразом, попадающим в $\mathcal{F}$, $\mathcal{D} := \{D | X^{-1}(D) \in \mathcal{F}\}$ является σ-алгеброй.*

Доказательство. Проверяем три свойства σ-алгебры. 1) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, значит $\mathbb{R} \in \mathcal{D}$

2) $X^{-1}(D^c) = (X^{-1}(D))^c$, значит имеем цепочку $D \in \mathcal{D} \Rightarrow X^{-1}(D) \in \mathcal{F} \Rightarrow (X^{-1}(D))^c \in \mathcal{F} \Rightarrow X^{-1}(D^c) \in \mathcal{F} \Rightarrow D^c \in \mathcal{F}$.

3) Аналогично б. в силу того, что прообраз объединения равен объединению прообразов.

$\square$

Говоря доступным языком, $\sigma(X)$ - это список событий, про которые мы сможем гарантированно сказать, произошли они или нет, если мы знаем значение X. Кроме того, если мы различаем события из $\sigma(X)$, то мы можем определить значение X.

Борелевская σ-алгебра - довольно сложный объект, мы даже не можем явно перечислить все входящие в нее множества. Как же на практике проверить, является ли данная случайная величина X измеримой относительно данной σ-алгебры $\mathcal{F}$?

Оказывается вместо проверки всех борелевских множеств достаточно проверить только некоторые. А именно, достаточно убедиться, что...

Теорема 12.3. *Пусть $\mathcal{H}$ - произвольный набор подмножеств $\mathbb{R}$ порождающий борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$, $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}$. Случайная величина X измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ если и только если для любого $H \in \mathcal{H}$ событие $\{X \in H\} \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. туда:

Пусть X измерима относительно $\mathcal{F}$. Значит прообразы всех борелевских множеств лежат в $\mathcal{F}$. так как $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}$, то и прообразы всех множеств из $\mathcal{H}$ лежат в $\mathcal{F}$.

обратно:

Мы доказывали, что $\mathcal{D} := \{D | X^{-1}(D) \in \mathcal{F}\}$ - σ-алгебра.

Мы знаем, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ - σ-алгебра и $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}$. Значит $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ $\square$

Пример..

Хорошая новость: $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины можно складывать, вычитать, умножать и делить!

Теорема 12.4. *Если X, Y - $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины, то: $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$ - $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины. Если выполнено дополнительное условие $Y \neq 0$, то и $\frac{X}{Y}$ - $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина.*

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $X + Y$, т.к. при доказательстве остальных трех случаев используется та же идея. (...) $\square$

Кроме того, можно брать смело брать пределы!

Теорема 13.0. *Если X_i - последовательность $\mathcal{F}$-измеримых случайных величин, то:*

a) Множество $A = \{w | \exists \lim X_i(w)\} \in \mathcal{F}$.

b) Если для $\forall w \in \Omega$ существует предел $\lim X_n(w)$, то случайная величина $\lim X_n$ является $\mathcal{F}$-измеримой.

Доказательство. □

Если преобразовать $\mathcal{F}$-измеримую случайную величину с помощью «хорошего» преобразования, то снова получится $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина. Сначала уточним, что значит «хорошее» преобразование:

Определение 13.1. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **борелевской** если прообраз любого борелевского множества является борелевским множеством ($f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ для $\forall B \in \mathcal{B}$).

Пример 13.2. $f(t) = t^2$, $f(t) = \cos(t)$, $f(t) = |t|$ - борелевские функции.

Более того, все «привычные» функции - борелевские, о чем говорит следующая теорема:

Теорема 13.3. *Если f имеет счетное число разрывов, то она - борелевская (... проверить)*

(...) Используя пример неборелевского множества, постройте пример неборелевской функции (упр.)

Итак, если использовать «хорошее» преобразование, то $\mathcal{F}$-измеримость сохраняется:

Теорема 13.4. *Если $X : \Omega \to \mathbb{R}$ - $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина, и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - борелевская функция, то $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ - $\mathcal{F}$-измеримая случайная величина.*

Доказательство. □

В случае, когда $\mathcal{F} = \sigma(X)$ эту теорему можно уточнить:

Теорема 13.5. *Случайная величина Y является $\sigma(X)$-измеримой если и только если $Y = f(X)$, где f - борелевская функция.*

Туда. X является $\sigma(X)$-измеримой. Поэтому согласно (...) если f - борелевская функция, то $f(X)$ является $\sigma(X)$-измеримой.

Обратно. Интуитивно: если зная X можно определить, чему равно Y, то Y - это функция от X. Строго:

3.2 Сигма-алгебры и случайные величины

На самом деле большинство σ-алгебр связано со случайными величинами. Для иллюстрации приведем три примера:

- Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной, $\sigma(X)$.
- Сигма-алгебра, связанная с моментом остановки T, $\mathcal{F}_T$.
- Остаточная (хвостовая) сигма-алгебра.

...

3.3 Обобщение случайных величин

Можно обобщать определение случайное величины по-разному. В любом случае у нас будет следующая картина. Функция $X : \Omega \to S$, где S - некое (не обязательно числовое) множество. Есть две σ-алгебры: $\mathcal{F}$, заданная на Ω и $\mathcal{H}$, заданная на S. Чаще всего на S определено понятие открытого множества и $\mathcal{H}$ является борелевской σ-алгеброй, т.е. минимальной σ-алгеброй, содержащей все открытые множества.

(....)

Самые популярные обобщения такие:

- Векторные случайные величины.
  В $\mathbb{R}^n$ есть понятие открытого множества. Поэтому есть и понятие борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^n$, т.е. минимальной σ-алгебры, содержащей все открытые множества. Впрочем, принципиально ничего нового не возникает:

  Теорема 14.0. *Вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ измерим относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ если и только если каждая случайная величина X_i измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$.*

  Хотя «чудеса, леший бродит и русалка на ветвях» сидит даже в $\mathbb{R}^2$:

  Теорема 14.1. *Существует измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^2$, такое, что его проекция на любую координату является неизмеримым в $\mathbb{R}$.*

  Доказательство. Пример можно найти...строится он примерно так... □

- Добавление бесконечностей.
  Иногда случайная величина может принимать значение плюс или минус бесконечность. Например, время первого выпадения орла при подбрасывании монетки может никогда не наступить и тогда удобно говорить, что оно равно плюс бесконечности. Порою может понадобится и минус бесконечность.
  Как выглядят определения в этом случаем? Вместо старого множества значений $\mathbb{R}$ будет множество $S = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. В качестве σ-алгебры $\mathcal{H}$ будем использовать борелевскую σ-алгебру. Она порождается множествами вида $[-\infty; a]$, где $a \in S$. Например, $[-\infty; 0)$ открыто, $(-\infty; 0)$ открыто, $\{-\infty\}$ замкнуто.
- Комплексные случайные величины, $X : \Omega \to \mathbb{C}$.
  В силу того, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ может быть естественным образом сопоставлена с плоскостью $\mathbb{R}^2$, то на $\mathbb{C}$ есть понятие открытых множеств. Вместо одной комплексной случайной величины можно рассматривать вектор из двух действительных случайных величин. Первая компонента вектора отвечает за действительную часть, вторая - за мнимую. Понятие измеримости для комплексной случайной величины совпадает с измеримостью для вектора.
- Случайные процессы. Об этом позже, в главе **??**.

3.4 Еще задачи

4 Вероятность

4.1 Определение вероятности

Вероятность - это размер событий! А именно:
Определение 14.2. Пусть $\mathcal{F}$ - σ-алгебра. Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty]$ называется **мерой**, если выполнены два условия:

M1. $\mu(\emptyset) = 0$

M2. Если все $A_i \in \mathcal{F}$ и они попарно не пересекаются ($A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то $\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Обратить внимание следует на то, что мера может принимать бесконечные значения, при этом они складываются по естественным правилам: $\infty+$(любое число)$= \infty$, $\infty + \infty = \infty$.
Пример 14.3. Например, $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$, и $\mu(A)$ - количество элементов в множестве A. Легко проверить, что это мера, которая может принимать бесконечные значения.
Пример 14.4. Например, $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$, и мера $\mu(A)$ - равна единице, если множество A содержит $\sqrt{3}$, и равна нулю, если A не содержит $\sqrt{3}$.
Пример 14.5. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{R}}$. Функция $\mu(A) = \sup(A)$ - не является мерой, т.к. $\mu([0; 1]) \neq \mu([0; 0.5)) + \mu([0.5; 1])$.

Пример 14.6. Длина. Если $\Omega = \mathbb{R}$, то на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$можно определить меру λ которая будет соответствовать естественному понятию длины. Например, $\lambda([0; 100]) = 100$. К сожалению (?), эту меру нельзя определить на σ-алгебре $2^{\mathbb{R}}$. Этот пример содержит в себе сразу два недоказанных утверждения. Во-первых, на $\mathcal{B}$можно определить такую меру, там не возникнет проблем с аксиомой M2. Во-вторых, не получится определить на $2^{\mathbb{R}}$ меру, которая соответствует естественному понятию длины. Доказательство чуть позже.
Определение 15.1. Мера P называется **вероятностью** если $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
Пример 15.2. (простенький пример с конечным омега)

В данном курсе мы будем иметь дело с вероятностью, которая является конечной мерой и с длиной подмножеств $\mathbb{R}$, которая является σ-конечной мерой.
Определение 15.3. Мера μ называется конечной, если $\mu(\Omega) < \infty$
Определение 15.4. Мера μ называется σ-конечной, если Ω можно разбить на счетное количество непересекающихся Ω_i, так что на каждом Ω_i мера μ будет конечной: $\Omega = \cup\Omega_i$, $\mu(\Omega_i) < \infty$.

Длина является σ-конечной в силу того, что числовую прямую можно разбить на счетное количество полуинтервалов единичной длины вида $[n; n + 1)$.

Задачи

Задача 4.1. Пусть μ_1 и μ_2 - конечные меры на Ω и $a > 0$. Верно ли, что: а) $\mu := a\mu_1$ - конечная мера? б) $\mu := \mu_1 + \mu_2$ - конечная мера?
Задача 4.2. Пусть μ - конечная мера на Ω. Верно ли, что $\nu(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ - вероятность на Ω
Задача 4.3. Приведите пример σ-алгебры $\mathcal{F}$ и функции $R : \mathcal{F} \to [0; 1]$ такой, что:

1. $R(\Omega) = 1$, $R(\emptyset) = 0$
2. Если $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ и $A \cap B = \emptyset$, то $R(A \cup B) = R(A) + R(B)$
3. Существует возрастающая последовательность $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ такая, что $R(\cup A_n) \neq \lim R(A_n)$

4.2 Свойства вероятности

Нам часто понадобятся следующие свойства:
Теорема 15.5. *Если P - вероятность, то:*
PP1. $\mathbb{P}(\cup A_i) \leqslant \sum \mathbb{P}(A_i)$.
PP2. Если $\mathbb{P}(A_i) = 0$, *то* $\mathbb{P}(\cup A_i) = 0$.
PP3. Если $\mathbb{P}(A_i) = 1$, *то* $\mathbb{P}(\cap A_i) = 1$.
PP4. Вероятность выдерживает взятие пределов:
PP4a. Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$, *то* $\mathbb{P}(\cup A_i) = \lim \mathbb{P}(A_i)$
PP4b. Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$, *то* $\mathbb{P}(\cap A_i) = \lim \mathbb{P}(A_i)$
PP4c. Если $lim A_i$ *существует, то* $\mathbb{P}(\lim A_i) = \lim \mathbb{P}(A_i)$

Доказательство. PP1: Воспользуемся следующим трюком, от последовательности A_n перейдем к последовательности «добавок» A'_n. То есть A'_n - это те новые элементы, которые приносит с собой A_n, которых еще нет в $\cup_i^{n-1} A_i$. Формально, $A'_i = A_i \backslash (\cup_i^{n-1} A_i)$. В силе этого A'_n попарно не пересекаются.

Остается заметить, что $\mathbb{P}(A'_n) \leqslant \mathbb{P}(A_n)$ и $\mathbb{P}(\cup A_n) = \mathbb{P}(\cup A'_n) = \sum \mathbb{P}(A'_n) \leqslant \sum \mathbb{P}(A_n)$.

PP2: Следует из PP1.

PP3: Перейдем к дополнениям, $B_n = A_n^c$. Тогда $\mathbb{P}(B_n) = 0$ и к ним применимо свойство PP2, $\mathbb{P}(\cup B_n) = 0$ и $\mathbb{P}((\cup B_n)^c) = 1$. Но это как раз и есть желаемое: $(\cup B_n)^c = (\cup A_n^c)^c = \cap A_n$. □

Еще несколько «именных» свойств, связанных с множеством $\limsup A_i$ («произошло бесконечное количество A_i»):

Лемма Фату для вероятностей: если есть бесконечно много A_i с вероятностью не ниже p, то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i не ниже p.

Теорема 15.6. $\mathbb{P}(\limsup A_i) \geqslant \limsup \mathbb{P}(A_i)$.

Доказательство. Шаг 1. Среди A_i выбираем подпоследовательность B_k такую, что $\lim \mathbb{P}(B_k) = \limsup \mathbb{P}(A_i)$. Заметим, что $\limsup B_i \subset \limsup A_i$ (если произошло бесконечное количество B_i, то произошло бесконечное количество A_i, но обратное в общем случае неверно), $\mathbb{P}(\limsup A_i) \geqslant \mathbb{P}(\limsup B_i)$.

Шаг 2. $\mathbb{P}(\limsup B_i) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k \geqslant n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geqslant n} B_k) \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$. $\square$

Первая лемма Бореля-Кантелли: если сумма вероятностей A_i не «велика», то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i равна нулю. Если быть точным, «не велика» в данном случае - меньше бесконечности:

Теорема 16.1. *Если* $\sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$, *то* $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 0$.

Доказательство. Шаг 1. $\mathbb{P}(\limsup A_i) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k\geqslant n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k)$.

Шаг 2. Частичные суммы $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ сходятся к сумме $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < \infty$, а это значит, что непосчитанный «хвост» стремится к нулю, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geqslant n} \mathbb{P}(A_k) = 0$. $\square$

4.3 Построение равномерной вероятности

Оказывается, что некоторые интересные вероятности нельзя определить для произвольного подмножества числовой прямой!!!

Очень важный пример!

У некоторых множеств на прямой нет длины!

Пример 16.2. Допустим мы хотим создать равномерное распределение на интервале $[0;1)$. Казалось бы, чего проще! Берем в качестве $\mathcal{F}$ все подмножества данного полуинтервала и в качестве вероятности попасть в данное подмножество берем его длину! Однако это не получится! Обязательно будет нарушена аксиома М2 в определении меры.

Давайте разберемся. Чего мы ждем от равномерного распределения? Если взять произвольное подмножество A и его копию A' сдвинутую, скажем чуть правее, то мы хотим, чтобы $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A')$. И все. Больше на ничего от равномерной вероятности ничего не нужно.

Для краткости будем использовать следующее обозначение:

Определение 16.3. $A \oplus r$ - это множество A сдвинутое вправо на r. Если при этом результат вылезает за пределы интервала $[0;1)$, то мы выступающую часть «внесем» обратно в $[0;1)$ с другой стороны. Например: $[0;0,5] \oplus 0,1 = [0,1;0,6]$, $(0,5;0,8) \oplus 0,3 = (0,8;1) \cup [0;0,1)$.

А сейчас мы построим довольно «хитрое» множество A. Для этого мы раскрасим весь интервал $[0;1)$ в разные цвета по следующему принципу:

Числа $x \in [0;1)$ и $y \in [0;1)$ красим в один цвет, если существует рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, такое что $x \oplus r = y$.

Из этого принципа следует, что если взять любое число x, то есть счетное количество покрашенных в тот же цвет чисел. Так, например, есть счетное количество чисел покрашенных в тот же цвет, что и $\sqrt{2}/2$. Заметим, что все рациональные числа покрашены в тот же цвет, что и число 0.

Множество A создадим так: возьмем по одному числу каждого цвета. Например, от рациональных можно взять ноль, от покрашенных в тот же цвет, что и $\sqrt{2}/2$ можно взять $\sqrt{2}/2 + 0,1$ и т.д. Неважно какого представителя мы берем, главное от каждого цвета ровно по одному.

Что у нас получилось? Если взять рациональное $r \in [0;1)$, то $A \oplus r$ не совпадает с A, т.к. каждый представитель своего цвета превратится в другое число своего цвета. Если взять два разных рациональных числа $r_1 \in [0;1)$, $r_2 \in [0;1)$, то $A \oplus r_1$ не пересекается с $A \oplus r_2$: в каждой группе представитель переходит в разных членов своей группы. Если перебрать все рациональные числа, то $\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A\oplus r) = [0;1)$, в каждой группе представитель успеет побывать в роли каждого члена своей группы.

Здесь и рождается противоречие! Напомню, что мы хотим, чтобы $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \oplus r)$:

С одной стороны, $\mathbb{P}(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A\oplus r)) = \mathbb{P}([0;1)) = 1$

С другой стороны, $\mathbb{P}(\cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)}(A\oplus r)) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)} \mathbb{P}(A\oplus r) = \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[0;1)} \mathbb{P}(A)$.

Но сумма бесконечного количества одинаковых слагаемых не может равняться единице! Либо нулю, если складываются нули, либо бесконечности, если складываются ненулевые числа.

Этот пример показал, что равномерную вероятность нельзя построить для произвольных подмножеств отрезка $[0;1)$. Поскольку от понятия длины мы ждем ровно той же неизменности при сдвиге вправо-влево на прямой, становится ясно, что нельзя присвоить понятие длины произвольному подмножеству $\mathbb{R}$.

Что же делать? Нужно отказаться от определения вероятности на этом «страшном» множестве A! Т.е. для некоторых множеств вероятность определена и является числом от нуля до единицы и подчиняется свойствами M1, M2, а для некоторых подмножеств вероятность просто не существует. В данном случае $\mathbb{P}(A \oplus r)$ и $\mathbb{P}(A)$ не будут существовать и противоречия не возникнет.

Возникает естественный вопрос: каким же подмножествам интервала $[0;1)$ можно присвоить вероятность, которая не менялась бы при сдвиге? Или каким подмножествам прямой можно присвоить понятие длины?

Длина есть у всех борелевских множеств!

Нас спасет уже знакомая нам борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}([0;1])$! На ней можно определить равномерную вероятность. А как мы видели эта σ-алгебра достаточно богата и включает все подмножества отрезка $[0;1]$ с которыми реально приходится работать.

Борелевских множеств много и они могут иметь достаточно сложную структуру, поэтому попытка явно определить «длину» каждого борелевского множества обречена на провал. Мы поступим следующим путем. Определим понятие «длины» на очень простом наборе множеств. Этот набор множеств будет порождать борелевскую σ-алгебру. И сформулируем теорему, которая будет гарантировать, что у каждого борелевского множества есть длина.

Итак, наш «простой» набор множеств это полуинтервалы вида $[a;b)$:

$\mathcal{H} = \{[a;b) | 0 \leqslant a < b < 1\}$.

Он, конечно, σ-алгеброй на $\Omega = [0;1)$ не является: $[0.1;0.2) \in \mathcal{H}$, но $[0.1;0.2)^c \notin \mathcal{H}$. Зато на нем тривиально определить длину:

$$\lambda([a;b)) := b - a \tag{17.1}$$

Кроме того, этот набор порождает борелевскую σ-алгебру, т.е. $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{B}([0;1))$.

Формально наш набор $\mathcal{H}$ является полу-алгеброй:

Определение 17.2.

Спасительная теорема формулируется так:

Теорема 17.3 (Каратеодори)**.** *Если функция μ задана на полу-алгебре $\mathcal{H}$ и на ней является σ-аддитивной (), то существует единственная мера $\mu*$, заданная на σ-алгебре $\sigma(\mathcal{H})$, совпадающая с μ на множестве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Идея проста. Для каждого подмножества Ω определим «внешнюю меру» μ^*... Эта «внешняя мера» μ^* не всегда будет σ-аддитивна, т.е. она не является мерой! Но если выбрать «хорошие» подмножества Ω, а именно такие, на которых μ^* будет мерой, то они будут образовывать σ-алгебру! Единственность будет следовать из того, что каждое «хорошее» множество можно «приблизить» с помощью объединения множеств из $\mathcal{H}$, а на них любая другая мера должна совпадать с μ^*. Полное доказательство в приложении. $\square$

Заметим, что конкретно в нашем случае σ-алгебра «хороших» окажется строго больше $\mathcal{B}([0;1)) = \sigma(\mathcal{H})$. Длина будет определена не только у борелевских множеств, но и у некоторых других. Это не страшно, и подробнее об этом чуть позже.

Пример 18.0. http://math.stackexchange.com/questions/2949/which-one-result-in-maths-has-s 2953 Пример, как можно каждое рациональное число накрыть маленьким интервальчиком и в результате длина всего множества будет конечная..

Как построить любой случайный эксперимент?

Почему так важно было установить существование равномерной вероятности? Оказывается, что имея одну равномерную случайную величину можно получить бесконечное количество независимых равномерных случайных величин! А имея бесконечно много равномерных случайных величин можно такого понастроить...

Пусть X - равномерно распределенная случайная величина на $[0;1)$. Мы хотим на базе одной X построить последовательность независимых равномерных X_1, X_2, X_3...

Нам окажется полезной такая неслучайная последовательность натуральных чисел:

$$[a_i] = [1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots] \tag{18.1}$$

Сначала сказали 1, потом посчитали от 1 до 2, потом от 1 до 3, потом от 1 до 4 и т.д. Эта последовательность нам будет говорить какому X_i «отдать» очередную цифру из десятичной записи X.

Например, пусть $X(w) = 0,583601935\ldots$. Первую цифру после запятой отдаем X_1, вторую - снова X_1, третью - X_2, четвертую - снова X_1, пятую - X_2, шестую - X_3... Получаем:

$X_1 = 0,5869\ldots$

$X_2 = 0,303\ldots$

$X_3 = 0,15\ldots$

Изобразим на картинке:

$$\begin{aligned}
X(w) &= 0,583601935\ldots \\
a_i &= \;\;\; 1121331234\ldots \\
X_1 &= 0,58\;\,6\;\,9\ldots \\
X_2 &= 0,\;\;\;\,3\;0\;\;\,3\ldots \\
X_3 &= 0,\;\;\;\;\;\;\;1\;\;\,5\ldots
\end{aligned}$$

В последовательность a_i каждое натуральное число k упомянуто бесконечное количество раз. Значит каждая случайная величина X_k получит от X бесконечное количество цифр. Разные цифры в десятичном разложении величины X независимы, отсюда будет следовать независимость X_k. Каждая цифра в десятичном разложении X равновероятно принимает значения от 0 до 9, значит и каждая цифра в десятичном разложении каждого X_k также равновероятно принимает значения от 0 до 9. Следовательно, все X_k равномерны на $[0;1)$.

Имея последовательность независимых равномерных X_k можно получить независимую последовательность Y_k с произвольным законом распределения. А в главе про броуновское движение мы узнаем, как из последовательности нормальных случайных величин сварить это самое броуновское движение.

Упр. докажите, что если X -равномерное, то ... - экспоненциальное, а ... - пуассон.

4.4 Почти наверное и пополнение вероятностного пространства!

неборелевское - не лежит в $\mathcal{B}$. неизмеримое (или, точнее, не измеримое по Лебегу, не лебеговоское) - не лежит в пополнении $\mathcal{B}$.

4.5 Еще задачи

Задача 4.4. Можно ли придумать последовательность σ-алгебр $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, ..., такую, что одновременно выполнены два условия: 1) для любого i: $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$; 2) $\cup\mathcal{F}_i$ - не σ-алгебра.

5 Зоопарк!

5.1 Канторово множество - дикое но симпатичное

Пример достаточно «сложного» борелевского множества - Канторово множество. Строится оно следующим образом...

Для начала возьмем отрезок $C_0 = [0; 1]$:

(...) рисунок

Затем вырежем из него середину, получим $C_1 = [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$.

(...) рисунок

Затем из каждого отрезка вырежем его середину, получим $C_2 = [0; 1/9] \cup [2/9; 3/9] \cup [6/9; 7/9] \cup [8/9; 1]$.

(...) рисунок

Продолжая процесс вырезания середины каждого отрезка бесконечно долго мы получим последовательность вложенных множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$.

Определение 19.1. Канторово множество - $C = \cap_{i=1}\infty C_i$.

Может показаться, что кроме концов отрезков там ничего не остается, однако это не так.

Пример 19.2. (проверить) точка 1/4 не является концом отрезка, но лежит в каждом C_i, а следовательно, лежит в C.

Каждое C_i лежит в борелевской σ-алгебре, а значит и их счетное пересечение, Канторово множество лежит в борелевской σ-алгебре. Раз Канторово множество является борелевским, значит у него есть длина (согласно (...) на борелевских множествах можно определить классическое понятие длины). Суммарная длина выкинутых отрезков равна единице: $1/3 + 2/9 + 4/27 + \ldots = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$. Значит Канторово множество имеет длину 0.

Несмотря на свою нулевую длину Канторово множество несчетно! точнее говоря, имеет мощность континуум. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных вправо последовательностей из 0 и 1 и точками Канторова множества. Берем произвольную точку в Канторовом множестве: в I_1 она попадает либо в правый отрезок, либо в левый (0 или 1); в рамках выбранного отрезка, в I_2 она попадает либо в правый отрезок, либо в левый (0 или 1) и т.д. И наоборот, если задана последовательность из 0 и 1, то ее можно переделать в последовательность «вправо»-«влево», а каждой такой последовательности сопоставить единственную точку. На $\mathbb{R}$любая последовательность Коши имеет предел, поэтому получается взаимнооднозначное соответствие.

Внутри него можно найти неборелевское! Существование неборелевского множества внутри Канторова можно установить путем разных рассуждений. Например, неконструктивно: подмножеств Канторова множества больше, чем континуум, а борелевских (...) (ссылка еще раз) - континуум. А можно построить в явном виде, что мы сделаем с помощью Канторовой лестницы (...).

Оно совершенно. Каждая точка является пределом последовательности из него.

Оно нигде не плотно.

Определение 19.3. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется **нигде не плотным**, если (...)

Почему оно так важно?

Во-первых, оно чудесным образом сочетает характеристики, которые на первый взгляд кажутся противоречивыми (несчетность и нулевую длину, несчетность и нигде не плотность). «Чудо», коротко говоря.

Во-вторых, характеристики Канторова множества типичны для множества нулей броуновского движения. Если взять типичную (выпадающую с вероятностью 1) траекторию броуновского движения, и посмотреть, где она пересекает горизонтальную ось, то это множество нулей будет несчетным, нулевой длины, нигде не плотным и совершенным. Подробнее об этом в главе про броуновское движение.

5.2 Канторова лестница

5.3 Парадокс Банаха-Тарского

5.4 Еще один пример неборелевского множества

Мы приведем еще один пример с целью свыкнуться с мыслью: неборелевских множеств очень много, но на них нелегко наткнуться! Неизмеримые множества - это очень странные математические объекты, способные поражать воображение. Но они лишены физического смысла! Легко отрезать веревку длиной (хотя бы примерно) $\sqrt{2}$, но разрезать арбуз так, чтобы из кусков получилось два арбуза (хотя бы примерно) не получится!

Каждое действительное число можно представить в виде непрерывной дроби:

$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$, где a_0 - целое, а остальные a_i - натуральные числа.

(представление иррациональных чисел - единственно, у каждого рационального числа есть два представления, более короткое считается каноническим).

Пусть A - те числа, для которых непрерывная дробь обладает условием: последовательность целых чисел a_i содержит в себе подпоследовательность, где каждый последующий член делится на предыдущий.

Теорема 20.1. *A - неборелевское, однако A - измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Lusin (...) □

5.5 Еще задачи

Задача 5.1. У нас есть счетное количество пленников. Пленники занумерованы натуральными числами и каждый из них видит цвета колпаков пленников с большим номером. Каждому пленнику надевают колпак, равновероятно белый или черный. У каждого пленника есть одна попытка угадать цвет своего колпака. Пленники заранее могут договориться об общей стратегии. Уточнение: никто из пленников не знает, ни что говорили предыдущие, ни угадали ли они. Сколько пленников можно гарантированно спасти?

Задача 5.2. Верно ли, что 1/4 лежит в Канторовом множестве? Верно ли, что 1/4 является концом одного из выброшенных интервалов?

6 Математическое ожидание - интеграл Лебега

6.1 Интеграл Лебега

Математическое ожидание - это синоним интеграла Лебега. Единственное отличие в том, что интеграл Лебега иногда считают относительно произвольной меры, а математическое ожидание - только относительно вероятности.

Нам потребуется строгое определение математического ожидания, подходящее для любой случайной величины. Мы будем строить математическое ожидание пошагово. Начнем с простых случайных величин. Затем рассмотрим произвольные неотрицательные, затем действительные. И, когда это требуется, комплексные.

Итак, перед нами четыре объекта: Ω - множество исходов $\mathcal{F}$ - σ-алгебра событий P - вероятность, определенная для событий из $\mathcal{F}$ X - случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}$ Сразу уточним, что все рассматриваемые случайные величины должны быть измеримы относительно $\mathcal{F}$.

Определение 21.1. Случайная величина X называется простой, если принимает конечное число значений.

Если случайная величина простая, то ее можно представить в виде: $X = \sum_i^n x_i 1_{A_i}$, где A_i не пересекаются. Таких представлений может быть несколько (можно множество A_1, где X равна, скажем 5, разбить на два подмножества).

Шаг 1. Простая неотрицательная случайная величина.

Определение 21.2. Пусть X - простая неотрицательная случайная величина, т.е. $X = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i}$. Интегралом Лебега по мере P (или математическим ожиданием) называется число

$$\mathbb{E}(X) := \int X dP := \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(A_i) \tag{21.3}$$

В определении неявно задействована измеримость. Вероятность P определена только для событий из некой σ-алгебры $\mathcal{F}$, поэтому чтобы $\mathbb{P}(A_i)$ существовали необходимо, чтобы случайная величина X была измерима относительно этой σ-алгебры $\mathcal{F}$. Легко заметить, что определение корректно, т.к. не зависит от выбранного разбиения.

Кроме того, выполняются следующие свойства.

Если X, Y - простые неотрицательные случайные величины и $a \geqslant 0$ - константа, то:

1. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

2. $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$.

3. Если $X \geqslant Y$, то $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.

Шаг 2. Произвольная неотрицательная случайная величина.

Определение 21.4. Пусть X - произвольная неотрицательная случайная величина. Интегралом Лебега по мере P (или математическим ожиданием) называется величина

$$\mathbb{E}(X) := \int X dP := \sup_{Z \leqslant X, Z-simple} \mathbb{E}(Z) \tag{21.5}$$

Т.е. мы перебираем все простые случайные величины Z, не превосходящие X и выбираем наибольшее из получающихся математических ожиданий. При этом нужно отметить, что в результате может получится уже не число, а плюс бесконечность. Также заметим, что новое определение не противоречит старому, т.к. если изначально X - простая, то взяв $Z := X$ мы получим старое значение математического ожидания, а больше получить невозможно в силу неравенства (...).

Все те же свойства:

Шаг 3. Произвольная случайная величина.

Любую случайную величину X всегда можно представить в виде $X = X^+ - X^-$, где $X^+ = \max\{X, 0\}$ - неотрицательная часть X, а $X^- = -\min\{X, 0\}$ - неположительная часть X, домноженная на (-1). Величины X^+ и X^- являются неотрицательными, а для неотрицательных у нас уже мат. ожидание придумано.

Картинка [...]

Определение 21.6. Пусть X - произвольная случайная величина. Интегралом Лебега по мере P (или математическим ожиданием) называется величина

$$\mathbb{E}(X) := \int X dP := \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) \tag{21.7}$$

,

PE1.

PE2.

PE3. Если $X \geqslant 0$, то $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

PE4. Если $X \geqslant 0$ и $\mathbb{E}(X) = 0$, то $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. (часто используется)

PE5. Если $X \geqslant 0$ и $\mathbb{E}(X) < \infty$, то $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$.

Обобщение для комплексных случайных величин!

6.2 MCT, DCT, Fatou's lemma

Теорема 22.1. *Если:*

1. X_n - неубывающая последовательность неотрицательных случайных величин измеримых относительно $\mathcal{F}$, $X_1 \leqslant X_2 \leqslant X_3 \leqslant \dots$

2. $\lim X_n = X$

То:

1. X - измерима относительно $\mathcal{F}$

2. $\lim \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$

Теорема учитывает случай, когда предел с обеих сторон равен плюс бесконечности.

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\mathbb{E}(X_n) \leqslant \mathbb{E}(X_{n+1})$. Т.е. предел слева обязательно существует, хотя возможно и равен плюс бесконечности.

Случай 1. Среди X_n есть такая величина X_k, что $\mathbb{E}(X_k) = \infty$.

Если $\mathbb{E}(X_k) = \infty$, то для любого числа M найдется такая простая случайная величина S, что $S \leqslant X_k$, но $\mathbb{E}(S) > M$. Замечаем, что $X \geqslant X_k \geqslant S$, а значит, $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(S) > M$. Но M произвольное число, значит $\mathbb{E}(X) = \infty$.

Случай 2. Все $\mathbb{E}(X_n)$ конечны, но $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$.

Случай 3. Все $\mathbb{E}(X_n)$ конечны, и $\mathbb{E}(X_n) \to const$.

□

Теорема 22.2. *Если:*

1. Последовательность X_n ограничена интегрируемой случайной величиной Y, т.е $|X_n| \leqslant Y$ и $\mathbb{E}(Y)\infty$.

2. $\lim X_n = X$

То:

$\lim \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$

Доказательство. □

Если применить лемму Фату к индикаторам, то получается лемма Фату для вероятностей.

Добавить Витали (?) Vitali convergence theorem

6.3 Неравенства, леммы Бореля Кантелли

Еще раз про леммы Бореля-Кантелли.

Первая лемма Бореля-Кантелли: если сумма вероятностей A_i конечна, то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i равна нулю. теперь можно дать другое прочтение этой формуле. Пусть N - количество произошедших A_i, и случайная величина N может принимать значение $+\infty$. Если среднее значение N конечно, то вероятность того, что $N = \infty$ равна нулю.

Теорема 22.3. *Если* $\sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$, *то* $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 0$.

Доказательство. $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\sum_i 1_{A_i})$. Применяя MCT получаем, что $\mathbb{E}(N) = \sum \mathbb{E}(1_{A_i}) = \sum \mathbb{P}(A_i) < \infty$. А значит (используя PE5) и $\mathbb{P}(N = \infty) = 0$. $\square$

Вторая лемма Бореля-Кантелли: если A_i независимы (или отрицательно коррелированы) и сумма вероятностей A_i «велика» (равна бесконечности), то вероятность того, что произойдет бесконечное количество A_i равна 1. Обобщение на отрицательно зависимые случайные величины заимстовано из [1]

(самое время сделать упр. про $Cov(1_A, 1_B) = 0 <> $ независимость)

Теорема 23.1. *Если события* A_i *независимы или неположительно коррелированы* ($Cov(1_{A_i}, 1_{A_j}) \leqslant 0$ *для* $\forall i, j$) *и* $\sum \mathbb{P}(A_i) = \infty$, *то* $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$.

Доказательство. Пусть N_k - число произошедших событий среди первых k событий, $N_k = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \ldots + 1_{A_k}$.

Шаг 1. $Var(N_k) \leqslant \mathbb{E}(N_k)$: $Var(N_k) \leqslant \sum Var(1_{A_i})$ (т.к. ковариация либо нулевая, либо отрицательная), $\sum Var(1_{A_i}) = \sum \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i)) \leqslant \sum \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{E}(N_k)$.

Шаг 2. Рассмотрим произвольное число $x < \mathbb{E}(N_k)$. Для такого x: $\mathbb{P}(N_k < x) = \mathbb{P}(\mathbb{E}(N_k) - N_k > \mathbb{E}(N_k) - x) \leqslant \mathbb{P}(|\mathbb{E}(N_k) - N_k| > \mathbb{E}(N_k) - x) \leqslant \frac{Var(N_k)}{(\mathbb{E}(N_k)-x)^2} \leqslant \frac{\mathbb{E}(N_k)}{(\mathbb{E}(N_k)-x)^2}$.

Шаг 3. Рассмотрим произвольное число x. В силу того, что $\mathbb{E}(N_k) \to \mathbb{E}(N) = \infty$, наступит такой момент, что неравенство из шага 2 начнет работать. А значит $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(N_k < x) = 0$. Но, $\mathbb{P}(N < x) \leqslant \mathbb{P}(N_k < x)$, значит для $\forall x$, вероятность $\mathbb{P}(N < x) = 0$.

Шаг 4. Для множеств действует предел $\lim(N < k) = N < \infty$, вероятность непрерывна, а значит $\mathbb{P}(N < \infty) = 0$. $\square$

Неравенство Чебышева (Маркова). $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.

Доказательство. $\square$

Неравенство Йенсена. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - выпуклая функция (уточним, выпуклая вниз, как, например, $f(t) = t^2$), то $\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$.

Доказательство. $\square$

Мне тут попалось малоизвестное забавное неравенство. Будем его популяризировать!

Неравенство «Раз-два-три»! Если X и Y независимые случайные величины, то $\mathbb{E}(|X - Y| < 2) < 3\mathbb{P}(|X - Y| < 1)$.

Noga Alon, The 123 theorem and its extensions. Или в упражнения (да, оно дальше не используется)?

6.4 Производная Радона-Никодима

Оказывается, если из одной вероятности легко получить новую!

Теорема 23.2. *Если* X*-неотрицательная случайная величина и* $\mathbb{E}(X) > 0$, *то функция* $Q : \mathcal{F} \to [0; 1]$, *определяемая по формуле:* $Q(A) = \frac{\mathbb{E}(1_A X)}{\mathbb{E}(X)}$ *является вероятностью.*

Доказательство. Легко убедиться, что $Q(\emptyset) = \frac{\mathbb{E}(0)}{\mathbb{E}(X)} = 0$ и $Q(\Omega) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\mathbb{E}(X)} = 1$. Осталось проверить счетную аддитивность (аксиому M2 в определении меры).

Пусть A_i - попарно непересекающиеся события. Определим $Y_n = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} X$. Последовательность X_n монотонная и поточечно сходится к $Y = \sum_{i=1}^\infty 1_{A_i} X$. Согласно MCT $(\ldots)$ $\mathbb{E}(Y) = \lim \mathbb{E}(X_n) = \lim \sum_{i=1} n\mathbb{E}(1_{A_i} X) = \sum_{i=1} \infty \mathbb{E}(1_{A_i} X)$. Разделив обе части на $\mathbb{E}(X)$ получаем $Q(\cup A_i) = \sum Q(A_i)$. $\square$

Пример 23.3. Пусть (табличка), $Q(A) = \frac{\mathbb{E}(1_A X)}{\mathbb{E}(X)}$ ...Найдите $Q(Y > 0)$, $E_Q(Y)$

Теорема 23.4. *Для новой вероятности* $Q(A) = \frac{\mathbb{E}(1_A X)}{\mathbb{E}(X)}$ *новое математическое ожидание будет считаться по формуле* $E_Q(Y) = \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(X)}$.

Доказательство. Доказательство использует стандартный пошаговый метод. Сначала для простых Y.

Теперь для неотрицательных Y.

Теперь для произвольных Y. □

Пример 24.1. Здесь будет дискретный пример.

Определение 24.2. Вероятность Q называется **абсолютно непрерывной** по отношению к вероятности P, если из условия $\mathbb{P}(A) = 0$ всегда следует, что $Q(A) = 0$. Обозначается абсолютная непрерывность PQ.

Пример 24.3. Пусть $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0; 1]$, λ - классическая мера Лебега на $[0; 1]$. . . . Чтобы была абсолютная и второй пример, чтобы не было.

Оказывается иногда верно и обратное, а именно:

Теорема 24.4. *Если P и Q - две вероятности, PQ, то существует единственная почти-наверное случайная величина X, такая что $E_P(X) = 1$ и $Q(A) = E_P(X1_A)$.*

Доказательство. Доказательство существования - в аппендикс (?) Нетрудно доказать, что $E_P(X) = E_P(X \cdot 1_\Omega) = Q(\Omega) = 1$. Легко доказать и единственность: Пусть X и Y две функции, удовлетворяющие теореме, тогда $Q(X > Y) = E_P(X \cdot 1_{X>Y}) = E_P(Y \cdot 1_{X>Y})$. Отсюда, $E_P((X - Y)1_{X-Y>0}) = 0$. Но, $(X - Y)1_{X-Y>0}$ - неотрицательная случайная величина, значит $\mathbb{P}((X - Y)1_{X-Y>0} > 0) = 0$ и $\mathbb{P}(X - Y > 0) = 0$. Из симметрии $\mathbb{P}(Y - X > 0) = 0$ и, наконец, $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. □

Пример 24.5. (или упр.) найдите производную радона-никодима - дискретный случай

Пример 24.6. Пусть $\Omega = [0; 1]$, (упр.?) - производная радона-никодима непрер. случай

6.5 Пространство L2 и его геометрия

Определение 24.7. Пусть X - случайная величина и $p \geqslant 1$. Определим $||X||_p := (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p}$.

Это определение допускает, что $||X||_p$ может равняться $+\infty$.

Упражнение. приведите пример X, такой что $||X||_1 < \infty$, а $||X||_2 = \infty$.

Определение 24.8. Пространством $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ назовем множество $\mathcal{F}$-измеримых случайных величин, таких, что $||X||_p < +\infty$.

Когда понятно о каких $\mathcal{F}$и P идет речь мы будем сокращать обозначение $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ до $L^p(\Omega)$ и даже до L^p.

Теорема 24.9. *Пространство L^p является линейный пространством над $\mathbb{R}$. Если $X \in L^p$, $Y \in L^p$ и $a \in \mathbb{R}$, то $X + Y \in L^p$ и $aX \in L^p$.*

Доказательство. □

Теорема 24.10. *Если $1 \leqslant p \leqslant q$, то $L^q \subset L^p$*

Доказательство. □

Holder, Minkowski

Чуть позже (. . .) мы докажем полноту пространства L^p.

Среди пространств L^p наибольший интерес представляет для нас пространство L^2. Во-первых, потому, что именно в L^2 мы будем по началу определять интеграл Ито. Во-вторых, потому, что в L^2 есть красивая геометрия, даже две!

(вставка про геометрию)

6.6 Сеанс связи с Землей

Может показаться, что этот конспект - какой-то другой курс теории вероятностей. Формально определяется то, что раньше без всяких проблем и заморочек считалось. Осталось связать эти «два» курса, указав, что способ подсчета был верный.

Как до теории меры мы считали математической ожидание случайной величины или функции от нее?

Мы использовали функцию плотности $p(x)$ и брали обычный (Римановский) интеграл: $\mathbb{E}(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$

Чтобы обосновать этот способ сначала напомним пару определений:

Определение 25.1. Функция $p(x)$ называется **функцией плотности** случайной величины X, если...

(дать два варианта? с борелевскими и с нормальными?)

Определение 25.2. Функция называется интегрируемой по Риману...

Теоремы, связывающие:

6.7 Еще задачи

7 Сходимости

Случайные величины - более сложные объекты, чем числа, поэтому сходимость случайных величин бывает разная.

7.1 Разные виды сходимостей

Определение 25.3. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **поточечно** если для любого $w \in \Omega$ имеет место сходимость $X_n(w) \to X(w)$.

Поскольку ни вероятность, ни математическое ожидание «не чувствуют» изменения происходящие на множестве меры нуль, то это определение имеет разумное обобщение:

Определение 25.4. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **почти наверное** если $\mathbb{P}(w|X_n(w) \to X(w)) = 1$.

В силу определений, из поточечной сходимости следует сходимость почти наверное, т.к. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Пример 25.5.

Несколько другим подходом является рассмотрение случайных величин, как векторов пространства L^p.

Определение 25.6. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **в пространстве** L^p $(p \geqslant 1)$, если $||X_n - X||_p \to 0$ или, эквивалентно, $E\left(|X_n - X|^p\right) \to 0$.

Следующие примеры показывают, что сходимость в L^p и сходимость почти наверное не всегда одно и то же.

Пример 25.7.

Пример 25.8.

Пример 25.9.

Однако и сходимость в L^p и сходимость почти наверное приводят к тому, что случайные величины сходятся по вероятности

Определение 25.10. Последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X **по вероятности**, если для любого ε вероятность $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$.

Как и было обещано, две теоремы:

Теорема 25.11. *Если X_n сходится к X почти наверное, то X_n сходится к X по вероятности.*

Доказательство. □

Теорема 25.12. *Если X_n сходится к X в L^1, то X_n сходится к X по вероятности.*

Доказательство. □

Для сходимостей по вероятности, почти наверное, в L^p и поточечной требуется, чтобы и все X_n, и X были заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ибо только в этом случае будет определена разность $X_n - X$.

От этого требования можно отказаться и получить еще более «слабую» концепцию сходимости.

Мы приведем два эквивалентных определения слабой сходимости и (?) докажем их эквивалентность:

Определение 26.1. Последовательность случайных величин X_n сходится **слабо** (или **по распределению**) к случайной величине X, если для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сходятся математические ожидания $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$.

Пример 26.2.

Почему в определении включены непрерывность и ограниченность показывают два примера:

Пример 26.3. Пусть X_n равномерно на $[0; \frac{1}{n}]$. А X - тождественно равно нулю. Интуитивно понятно, что X_n становятся похожи на X при $n \to \infty$. Возьмем разрывную $f(t) = 1_{t=0}$. Получается, что $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(1) = 1$, но $\mathbb{E}(f(X_n)) = 0$. Если же функция f непрерывна, то при достаточно большом n окажется, что $f(X_n)$ не может отличаться от $f(0)$ больше чем на ε. Следовательно, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$. Это и означает, что X_n слабо сходится к 0. Заметим, что X_n могли быть заданы на разных вероятностных пространствах.

Пример 26.4.

Второе определение формулируется с помощью функции распределения:

Определение 26.5. Последовательность случайных величин X_n (с функцией распределения $F_n(t)$) сходится **слабо** (или **по распределению**) к случайной величине X (с функцией распределения $F(t)$), если $F_n(t) \to F(t)$ для любой точки t, в которой функция распределения $F(t)$ непрерывна.

Почему в определении требуется сходимость только в тех точках, где $F_X(t)$ непрерывна можно понять из того же примера 26.3:

Пример 26.6. Пусть X_n равномерно на $[0; \frac{1}{n}]$. А X - тождественно равно нулю. На рисунках видно, что функции распределения $F_n(t)$ сходятся к $F(t)$ во всех точках, кроме точки $t = 0$. Но для точки 0 сходимость не требуется. Значит X_n слабо сходится к нулю.

(картинки)

Доказательство эквивалентности:

«Слабая сходимость» соответствует своему названию, и следует из любой другой.

Теорема 26.7. *Если X_n сходится к X по вероятности, то X_n слабо сходится к X.*

Доказательство. □

В результате общая картина сходимостей выглядит так:

Неединственность предела.

Все виды сходимостей (кроме поточечной) используют либо понятие математического ожидания, либо понятие вероятности. Ни математическое ожидание, ни вероятность не меняются, если значение случайной величины изменить на множестве меры нуль. Значит любой из пределов (кроме поточечного) не единственный! Т.е. из того, что $\lim X_n = Y$ и $\lim X_n = Z$ строго говоря не следует $X = Y$.

Конечно, не все так плохо и для всех сходимостей (кроме сходимости по распределению) будет верным утверждение: если $\lim X_n = Y$ и $\lim X_n = Z$ то $Y = Z$ почти наверное.

Старые свойства выполнены:

$\lim X_n + \lim Y_n = \lim(X_n + Y_n)$

Три критерия сходимости почти наверное: (тттк)

- Для любого ε существует такое N, что для всех $n > N$ выполнено $\mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) > 1 - \varepsilon$
- $\sum \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$ для всех ε.
- $\mathbb{P}(\limsup |X_n - X| > \varepsilon) = 0$ для всех ε.

Наиболее полезны, пожалуй, первые два, т.к. они «вытаскивают» предел изнутри вероятности наружу.

Упражнение.

Докажите, что обратные утверждения к леммам BC1 и BC2 неверны.

В силу неравенства Йенсена: $X \in L_p \Rightarrow X \in L_{p-1}$ для $p > 1$.

7.2 Обратные теоремы? Иногда!

В некоторых важных случаях можно получить «обратные» теоремы.

Теорема 27.1. *Если X_n сходится к X по вероятности, то из последовательности X_n можно выбрать подпоследовательность Y_k, сходящуюся к X почти наверное.*

Теорема 27.2. *(Скороход) X_n слабо сходится к X, если и только если существует последовательность X_n', сходящаяся к X' почти наверное, такая что для любого n распределение X_n совпадает с распределением X_n' и $X \sim X'$*

Теорема 27.3. *Если X_n сходится по вероятности к константе...*

Докажите такую характеристику сходимости по распределению:

X_n слабо сходится к X, если и только если существует последовательность X_n', сходящаяся к X' по вероятности, такая что для любого n распределение X_n совпадает с распределением X_n', а $X' \sim X$.

Пусть X_i - независимы и $N(0;1)$. Рассмотрим последовательность $Y_n = \sqrt{n}\bar{X}$. К чему и в каких смыслах она сходится?

По распределению сходится, т.к. $Y_n \sim N(0;1)$. По вероятности не сходится (трудно).

7.3 Еще задачи

8 Решения

1.1 Нет! От противного, допустим S существует. Для каждого $s \in S$ существует множество A_s соответстующей мощности. Построим множество $A = \cup_s A_s$. Здесь испольуется аксиома выбора. И теперь построим множество $B = 2^A$. Оно больше любого из A_s! Значит оно не было упомянуто в списке S.

1.2

1.3 Да. Считаем «змейкой»

1.4 Нет. Бесконечные вправо последовательности из 0 и 1 - это декартово произведение счетного количества A_i, где каждое $A_i = \{0, 1\}$

1.5 Объединение счетного количества счетных множеств, считаем змейкой

1.6 Мощность 2^A не меньше мощности A, т.к. есть одноточечные подмножества, которые можно сопоставить с элементами A. Допустим все же, что 2^A и A равномощны. Значит есть взаимно однозначное соответствие $b \longleftrightarrow B$, где $b \in A$ и $B \in 2^A$. Построим $C \subset A$ по принципу: будем включать туда только такие b, которые не входят в соответствующее B. Этому множеству C должен соответствовать некий элемент c. С одной стороны c не может входить в C, с другой стороны - обязан. Противоречие.

1.7 да

2.1 да, так как все эти множества представимы в виде счетного объединения точек, отрезков или интервалов.

2.2 $\lim A_i = \emptyset$

2.3 $N < +\infty$

2.4 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ldots$

4.1 а) да, б) да

4.2 да, если $\mu(\Omega) > 0$

4.3 Пусть $\Omega = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{F}$ — это все конечные множества и множества с конечными дополнениями. Функция R равна 0 для конечных множеств и единице для множеств с конечным дополнением. Занумеруем все рациональные числа на $[0; 1]$: r_i — i-ое по счету рациональное число. Возьмем $A_n = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Тогда $R(A_n) = 0$ т.к. A_n конечно, но $\cup A_n = \Omega$ и $R(\Omega) = 1$.

4.4 да

5.1 Гарантированно спасаем всех кроме конечного количества! Решение основано на неизмеримых множествах. В парадоксе Банаха-тарского - разрезали и меняем после переставновки объем. Здесь разрезали и мат. ожидание доли перестало равняться вероятности

5.2 да, лежит; нет, не конец интервала

Список литературы

[1] S. Ross. *Second course in probability.*
Разные доказательства ЦПт, много интересного, но иногда есть неточности.

Предметный указатель