# FUCO5A – Análise de Circuitos Elétricos 1

Notas de Aula

Prof. Maurício Moreira
mmoreira@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Apucarana

Curso de Graduação em Engenharia da Computação

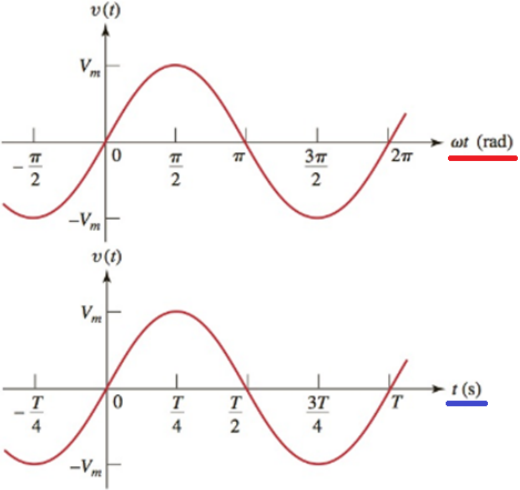
Apucarana, 2022

# Lição 1

Apucarana, 2022

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

# Funções Senoidais



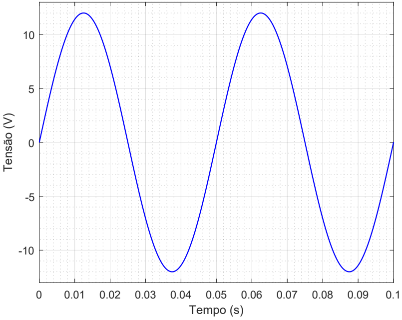

$$v(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t)$$

- $V_p$: amplitude de pico da senoide
- $\omega$: frequência angular (rad/s)
- $\omega t$: argumento da senoide (rad)

Período: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (s)

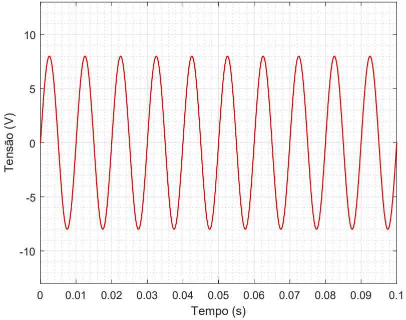
Frequência: $f = \dfrac{1}{T}$ (Hz)

# Exemplos: Função trigonométrica Seno




$$v(t) = 12\,\text{sen}(40\pi t)$$

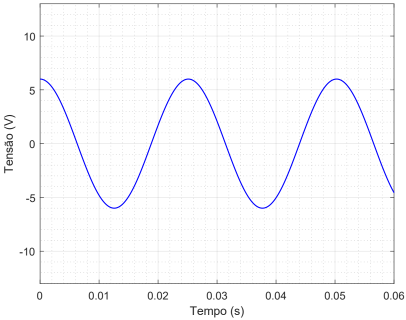
- Amplitude de pico: 12 V
- Freq. ang.: $\omega = 40\pi \approx 125,7$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/40\pi = 0,05$ s
- Frequência: $f = 1/0,05 = 20$ Hz




$$v(t) = 8\,\text{sen}(200\pi t)$$

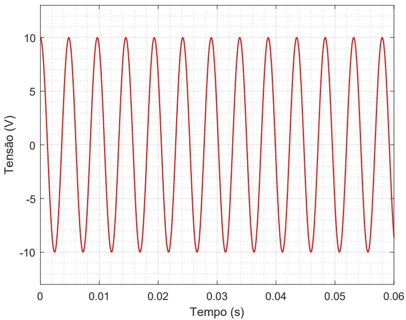
- Amplitude de pico: 8 V
- Freq. ang.: $\omega = 200\pi \approx 628,3$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/200\pi = 0,01$ s
- Frequência: $f = 1/0,01 = 100$ Hz

# Exemplos: Função trigonométrica Cosseno




$$v(t) = 6\cos(250t)$$

- Amplitude de pico: 6 V
- Freq. ang.: $\omega = 250$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/250 \approx 25,13$ ms
- Frequência: $f = 250/2\pi \approx 39,79$ Hz

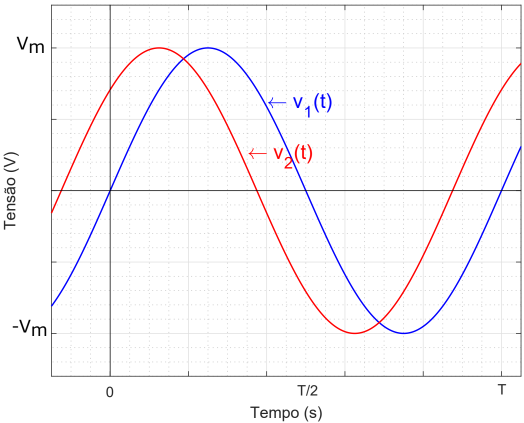



$$v(t) = 10\cos(1300t)$$

- Amplitude de pico: 10 V
- Freq. ang.: $\omega = 1300$ rad/s
- Período: $T = 2\pi/1300 = 4,83$ ms
- Frequência: $f = 1300/2\pi \approx 206,9$Hz

# Acrescentando um ângulo de fase ($\theta$)

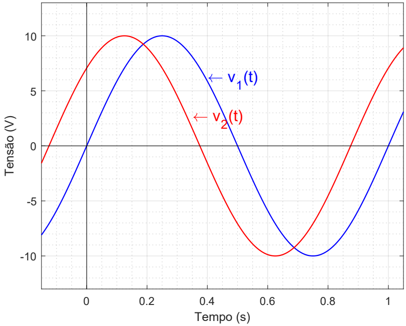
$v_1(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t)$
$v_2(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t+\theta)$




- $\theta$: ângulo de fase (graus ou rad)

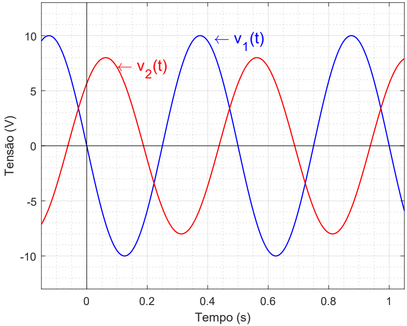
As duas senoides estão **defasadas** entre si de um ângulo $\theta$.
$v_2(t)$ está **adiantada** de $\theta$ em relação a $v_1(t)$ (pois chega no pico primeiro); ou
$v_1(t)$ está **atrasada** de $\theta$ em relação a $v_2(t)$ (pois chega no pico depois)

# Exemplos:




$$v_1(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t)$$
$$v_2(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t + \frac{\pi}{4})$$

- em relação a $v_2(t)$ está **adiantada** de $\pi/4$ rad $(45^\circ)$ em relação a $v_1(t)$




$$v_1(t) = 10\cos(4\pi t + 90^\circ)$$
$$v_2(t) = 8\cos(4\pi t - 45^\circ)$$

- $v_2(t)$ está **atrasada** de $90-(-45) = 135^\circ$ em relação a $v_1(t)$

# Observações importantes

- O conceito de defasagem (ou diferença de fase) só é aplicável quando se compara duas senoides de mesma frequência.
- Deve-se avaliar com maior cuidado a defasagem entre uma função **seno** e outra **cosseno**.
- Dizer que $v_2(t)$ está **adiantada** de $45^\circ$ em relação a $v_1(t)$ é o mesmo que dizer $v_2(t)$ está **atrasada** de $315^\circ$ em relação a $v_1(t)$. Contudo, adota-se a primeira forma (especifica-se sempre a defasagem entre $0^\circ$ e $180^\circ$).
- Uma notação do tipo $v(t) = 10\,\text{sen}(2\pi t + 45^\circ)$, com o ângulo de fase expresso em graus, é mais comumente utilizada. Contudo, deve-se notar que existe um conflito de unidades no argumento da senoide: $2\pi t$ radianos $+$ 45 graus.
- A defasagem entre duas senoides pode ser determinada mais facilmente por meio de fasores, como será estudado na sequência.

# Senos e cossenos

Uma função **seno** pode ser reescrita como uma função **cosseno**, e vice-versa, modificando-se o ângulo de fase da respectiva função, de acordo com as seguintes relações:

$$\mp sen(x) = cos(x \pm 90^\circ)$$
$$\pm cos(x) = sen(x \pm 90^\circ)$$

Exemplos:

- $v_1(t) = 180\,\text{sen}(40t + 23^\circ) = 180\cos(40t + 23^\circ \mathbf{-90}^\circ) = 180\cos(40t - 67^\circ)$ V
- $i_1(t) = 15\,\text{sen}(5t + 100^\circ) = 15\cos(5t + 100^\circ \mathbf{-90}^\circ) = 15\cos(5t + 10^\circ)$ A
- $v_2(t) = 30\cos(200t - 48^\circ) = 30\,\text{sen}(200t - 48^\circ \mathbf{+90}^\circ) = 30\,\text{sen}(200t + 42^\circ)$ mV

# Trabalhando com as senoides

## Exemplo 1

Dada a senoide $v(t) = 130\cos(5\pi t + 60^{\circ})V$, determine o instante de tempo $t_1$ em que $v(t)$ atinge o primeiro pico positivo após t $=$ 0.

**Solução:** Primeiramente, deve-se reescrever o argumento da senoide para uma mesma unidade (graus ou radianos). Transformando o ângulo de fase para radianos, tem-se: $v(t) = 130\cos(5\pi t + \frac{\pi}{3})$.

A função cosseno possui valor máximo quando o seu argumento assume os ângulos 0, $2\pi$, $4\pi$, $6\pi$, etc. Portanto, v(t) atinge o primeiro pico positivo após t $=$ 0 quando o argumento da função cosseno vale $2\pi$ rad, isto é,

para $t = t_1 \Rightarrow 5\pi t_1 + \frac{\pi}{3} = 2\pi$

$\mathbf{t_1 = \frac{1}{3} \approx 0,333}$ **s**.

# Trabalhando com as senoides

## Exemplo 2

Faça o gráfico da senoide $v(t) = 130\cos(5\pi t + 60^\circ)V$, sem o auxílio de um computador ou calculadora gráfica.

**Solução:** passo 1: A senoide descreve uma tensão com amplitude de pico de 130V e **período** $T = 2\pi/5\pi = 0,4$ s. Portanto, a escala mínima no eixo das ordenadas deve ser de -130 a 130 V, e a escala no eixo das abcissas pode ser estabelecida como 0 a 0,8 s, o que abrange dois períodos da senoide.
passo 2: determina-se alguns valores chave de v(t) dentro do intervalo 0 a 0,8 s, que servirão de guias para a construção do gráfico.

# Trabalhando com as senoides

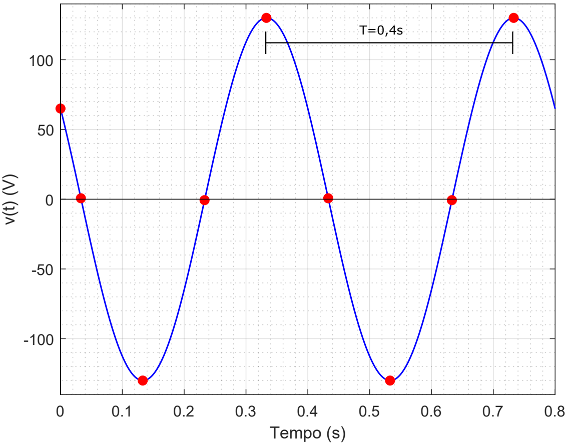
(Exemplo 2 - continuação...)

- instante inicial: para $t = 0s \Rightarrow v(0) = 130cos(\pi/3) = 65V$;
- primeiro pico positivo: do Exemplo 1, para $t \approx 0,333s \Rightarrow v(1/3) = 130V$;
- segundo pico positivo: ocorre **um período** após o primeiro pico positivo, em $t = 0,333 + T = 0,733s$;
- picos negativos: ocorrem em intervalos de **meio período** de cada pico positivo, em $t = 0,333 - \frac{T}{2} = 0,133s$ e em $t = 0,333 + \frac{T}{2} = 0,533s$.
- cruzamentos por zero: ocorrem em intervalos de **um quarto de período** de cada pico positivo ou negativo, em $t = 0,133 - \frac{T}{4} = 0,033s$; em $t = 0,333 - \frac{T}{4} = 0,233s$; em $t = 0,333 + \frac{T}{4} = 0,433s$; em $t = 0,533 + \frac{T}{4} = 0,633s$.

Assim, tem-se os seguintes pares ordenados (t, v(t)):
(0, 65); (0,333, 130); (0,733, 130); (0,133, -130); (0,533, -130);(0,033, 0); (0,233, 0); (0,433, 0); (0,633, 0).

# Trabalhando com as senoides

(Exemplo 2 - continuação...) passo 3: no plano cartesiano, anota-se os pares ordenados calculados no passo anterior. Em seguida, um esboço do gráfico da função pode ser traçado, como mostrado abaixo.



# Atividades

**Leitura Complementar**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.2

**Atividade 1**

Resolva os Exercícios **1 a 3** do **Caderno de Exercícios**.

**Sugestões de Exercícios Complementares**

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Exercícios 3 e 5

# Lição 2

# Números Complexos

Seja um número complexo $C$. Este número pode ser expresso de três formas distintas:

- Em coordenadas retangulares: $C = x + jy$;
- Em coordenadas polares: $C = r\underline{/\theta}$;
- Na forma exponencial: $C = r \cdot e^{j\theta}$;

$$j = \sqrt{-1}$$

Onde:

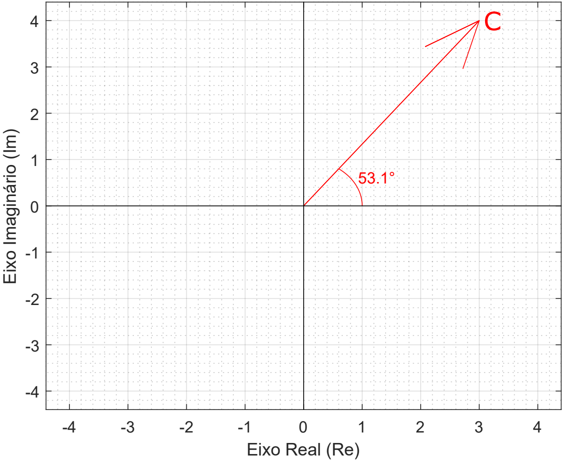
- $x$: parte **real** do número complexo;
- $y$: parte **imaginária** do número complexo
- $r$: **módulo** do número complexo
- $\theta$: **ângulo** do número complexo

# Números Complexos

Representação no Plano Complexo:

Exemplo 1:

- Em coordenadas retangulares: $C = 3 + j4$
- Em coordenadas polares: $C = 5\underline{/53,13^\circ}$
- Na forma exponencial: $C = 5 \cdot e^{j \cdot 53,13^\circ}$

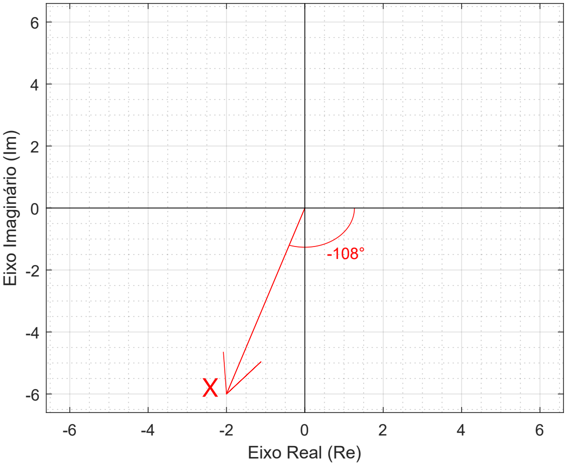


# Números Complexos

Representação no Plano Complexo:

Exemplo 2:

- Em coordenadas retangulares: $X = -2 - j6$
- Em coordenadas polares: $X = 7,834\underline{/-108,4^\circ}$
- Na forma exponencial: $X = 7,834 \cdot e^{j\cdot -108,4^\circ}$



# Conversão forma retangular para forma polar

Se $C = x + jy$:

- Módulo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Ângulo:

$$\theta = \begin{cases} tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0; \\ 180^\circ - tg^{-1}\left(\frac{y}{-x}\right), & x < 0. \end{cases}$$

Então, $C = r\underline{/\theta}$.

Exemplo: $C = 5 - j8$:

- Módulo:
  $r = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{89} \approx 9,434$
- Ângulo:
  $\theta = tg^{-1}\left(\frac{-8}{5}\right) \approx -57,9^\circ$

Portanto, $C = 9,434\underline{/-57,9^\circ}$

# Conversão forma polar para forma retangular

Se $C = r\underline{/\theta}$:

- Parte real:

$$x = r \cdot cos(\theta)$$

- Parte imaginária:

$$y = r \cdot sen(\theta)$$

Então, $C = x + jy$.

Exemplo: $C = 45\underline{/115^\circ}$:

- Parte real:
  $x = 45\cos(115^\circ) \approx -19,02$
- Parte imaginária:
  $y = 45\,\text{sen}(115^\circ) \approx 40,78$

Portanto,
$C = -19,02 + j \cdot 40,78$

# Operações com números complexos

**Adição e subtração**: podem ser calculadas mais facilmente quando os operandos estão representados em coordenadas retangulares.

Se $C_1 = x_1 + jy_1$ e $C_2 = x_2 + jy_2$, então:

- Adição:

$$C_1 + C_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

- Subtração:

$$C_1 - C_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

Exemplo:
$C_1 = 8 + j15$ e
$C_2 = 10 + j6$,

- Adição:
  $C_1 + C_2 =$
  $(8+10)+j(15+6) = 18+j21$
- Subtração:
  $C_1 - C_2 =$
  $(8-10)+j(15-6) = -2+j9$

# Operações com números complexos

**Multiplicação e divisão**: podem ser calculadas mais facilmente quando os operandos estão representados em coordenadas polares.

Se $C_1 = r_1\underline{/\theta_1}$ e $C_2 = r_2\underline{/\theta_2}$, então:

- Multiplicação:

$$C_1 \cdot C_2 = (r_1 \cdot r_2)\underline{/(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Divisão:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}\underline{/(\theta_1 - \theta_2)}$$

Exemplo:
$C_1 = 54\underline{/28^\circ}$ e
$C_2 = 9\underline{/-132^\circ}$,

- Multiplicação:
  $C_1 \cdot C_2 =$
  $(54 \cdot 9)\underline{/(28 + (-132))} =$
  $486\underline{/-104^\circ}$
- Divisão:
  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{54}{9}\underline{/(28^\circ - (-132^\circ))} =$
  $6\underline{/160^\circ}$

# Observações importantes

- Embora as operações com números complexos necessárias para este curso sejam executadas com o auxílio de calculadora, é necessário sempre realizar uma **análise crítica dos resultados** a fim de identificar erros.
- Alguns exemplos de números complexos nas formas retangular, polar e exponencial, de uso frequente:

$$
\begin{array}{lclll}
C_1 = 8 & \rightarrow & C_1 = 8 + j0 & = 8\underline{/0^\circ} & = 8 \cdot e^{j0^\circ} \\
C_2 = j & \rightarrow & C_2 = 0 + j1 & = 1\underline{/90^\circ} & = 1 \cdot e^{j90^\circ} \\
C_3 = -j & \rightarrow & C_3 = 0 - j1 & = 1\underline{/-90^\circ} & = 1 \cdot e^{-j90^\circ} \\
C_4 = -6 & \rightarrow & C_4 = -6 + j0 & = 6\underline{/180^\circ} & = 6 \cdot e^{j180^\circ} \\
C_5 = \dfrac{1}{j} & \rightarrow & C_5 = \dfrac{1}{j} = -j & &
\end{array}
$$

# Atividades

**Leitura Complementar**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.3.

**Atividade 1**

Descubra como utilizar a sua calculadora para realizar operações com números complexos e conversão de coordenadas entre polares e retangulares. Em seguida, confira os resultados das operações mostradas nos exemplos desta Lição. Inclusive, um dos exemplos apresentados está incorreto. Localize-o e determine o resultado correto.

**Atividade 2**

Resolva os Exercícios **4 a 6** do **Caderno de Exercícios**.

**Sugestões de Exercícios Complementares**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Problemas P 10.3-2, P 10.3-3, P 10.3-4.

# Fasores e senoides

- Um **fasor** é um número complexo utilizado para **representar no domínio da frequencia** uma tensão ou corrente senoidal.
- Um fasor denota a amplitude e o ângulo de fase de uma senoide, quando expressa por meio de uma função trigonométrica cosseno.

Seja uma tensão $v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta)$ V. Esta tensão pode ser representada por meio do fasor $\mathbf{V} = V_p\underline{/\theta}$ V.

Seja uma corrente $i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta)$ A. Esta corrente pode ser representada por meio do fasor $\mathbf{I} = I_p\underline{/\theta}$ A.

Exemplos:

- $v_1(t) = 12\cos(50t + 36^\circ)$ V $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{V_1} = 12\underline{/36^\circ}$ V
- $i_1(t) = 46\cos(200t - 140^\circ)$ mA $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{I_1} = 46\underline{/-140^\circ}$ mA
- $i_2(t) = 28\,\mathrm{sen}(3t + 120^\circ)$ A $\rightarrow$ Fasor correspondente: $\mathbf{I_2} = 28\underline{/30^\circ}$ A

# Observações importantes

- Uma senoide é denotada por letra mínuscula, enquanto o fasor correspondente é denotado por letra maiúscula. Alguns autores destacam esta letra em negrito (forma adotada neste documento); outros expressam como uma função da frequência angular, no formato $V(\omega)$ e $I(\omega)$.
- Como é um número complexo, um fasor pode ser representado também na forma retangular ou exponencial.
- Em um circuito elétrico alimentado por uma fonte senoidal, todas as tensões e correntes possuem a mesma frequência angular $\omega$. Por isso, omite-se o termo $\omega t$ na representação fasorial.
- O conceito de **domínio da frequência** será melhor explorado e poderá ser melhor compreendido nas aulas seguintes.

# Operações com Fasores

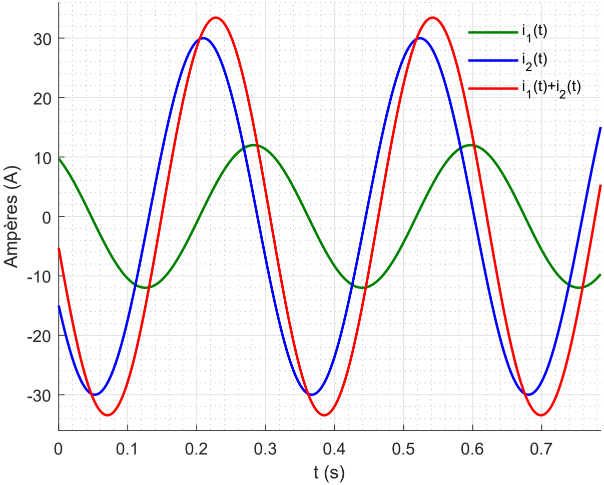
- Em um circuito elétrico alimentado por uma fonte senoidal, todas as tensões e correntes possuem a mesma frequência angular $\omega$. Por isso, omite-se o termo $\omega t$ na representação fasorial.
- A soma e a subtração de tensões e correntes senoidais **de mesma frequência** resultam em senoides. Estas operações podem ser feitas mais facilmente por meio dos fasores.

Exemplo: Sejam $i_1(t) = 12\cos(20t + 36^\circ)$ A e $i_2(t) = 30\cos(20t + 120^\circ)$ A. Determine $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Solução: As duas correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ possuem a mesma frequência angular $\omega = 20$ rad/s. Assim, representando as senoides por meio de fasores, tem-se: $\mathbf{I_1} = 12\underline{/36^\circ}$ A e $\mathbf{I_2} = 30\underline{/120^\circ}$ A.
A soma no domínio dos fasores é $\mathbf{I_3} = \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} = 12\underline{/36^\circ} + 30\underline{/120^\circ} = 33,46\underline{/99,1^\circ}$ A.

Transformando $\mathbf{I_3}$ para o domínio do tempo, com $\omega = 20$ rad/s, tem-se:
$i_3(t) = 33,46\cos(20t + 99,1^\circ)$ A.

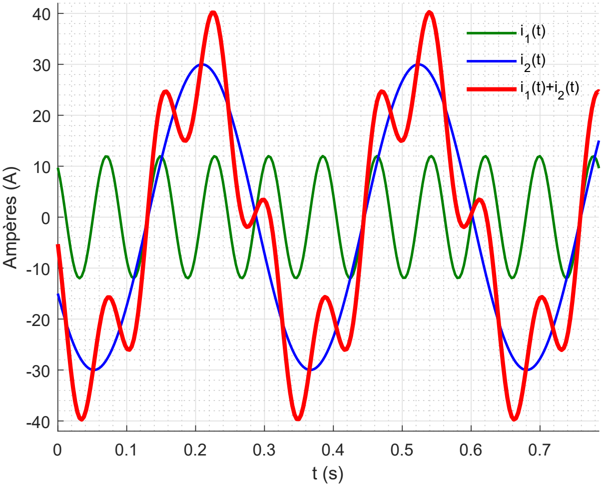
# Exemplo: soma de senoides de mesma frequência




$i_1(t) = 12\cos(20t + 36^\circ)$ A; $i_2(t) = 30\cos(20t + 120^\circ)$ A

$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_3(t) = 33,46\cos(20t + 99,1^\circ)\mathrm{A}$

# Exemplo: soma de senoides de frequências distintas




$i_1(t) = 12\cos(80t + 36°)$ A; $i_2(t) = 30\cos(20t + 120°)$ A

$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow i_3(t) = 12\cos(80t + 36°) + 30\cos(20t + 120°)\mathrm{A}$

# Atividades

## Leitura Complementar

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Seção 10.3.

## Atividade 1

Resolva o Exercício **7** do **Caderno de Exercícios**.

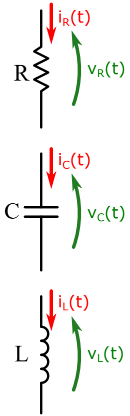
## Sugestões de Exercícios Complementares

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Exercícios 25 a 28.

# Lição 3

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

Sejam os seguintes componentes pertencentes a um circuito de corrente alternada (CA), representados no **domínio do tempo**:




$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v_C(t)$$

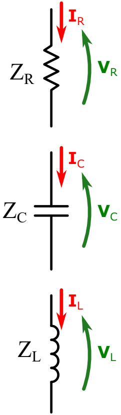
$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

- $v_R(t)$, $v_C(t)$, $v_L(t)$, $i_R(t)$, $i_C(t)$ e $i_L(t)$ são senoides.

$R$: Resistência [Ohm ($\Omega$)]
$C$: Capacitância [Farad ($F$)]
$L$: Indutância [Henry ($H$)]

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

Sejam os mesmos componentes representados no **domínio da frequência**:




$$\mathbf{V}_R = \mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{I}_R$$

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_C \cdot \mathbf{I}_C$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_L$$

- $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_C$, $\mathbf{V}_L$, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_C$ e $\mathbf{I}_L$ são fasores.

$\mathbf{Z}_R$: Impedância do resistor [Ω]
$\mathbf{Z}_C$: Impedância do capacitor [Ω]
$\mathbf{Z}_L$: Impedância do indutor [Ω]

**Impedância** (**Z**): definida como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$$

# Impedância (**Z**) e Admitância (**Y**)

Impedância de um Resistor ($\mathbf{Z}_R$):

$$\mathbf{Z}_R = R \qquad \mathbf{Z}_R = R\underline{/0^\circ}$$

Impedância de um Capacitor ($\mathbf{Z}_C$):

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} \qquad \mathbf{Z}_C = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$$

Impedância de um Indutor ($\mathbf{Z}_L$):

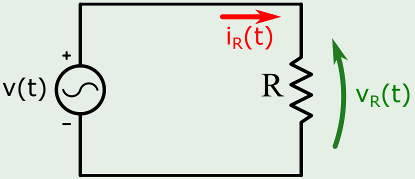
$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \qquad \mathbf{Z}_L = \omega L\underline{/90^\circ}$$

- A impedância é uma medida da oposição imposta por um componente à passagem da corrente elétrica, quando submetido a uma tensão **em um circuito CA** → Análogo à resistência em um circuito CC.
- A impedância também é um número complexo;
- O inverso da **Impedância (Z)** é denominado **Admitância (Y)** → Análogo à condutância em um circuito CC.

# Exemplo 1

## Circuito CA com um resistor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)$ V, e a resistência $R = 20\Omega$. Determine $v_R(t)$ e $i_R(t)$.



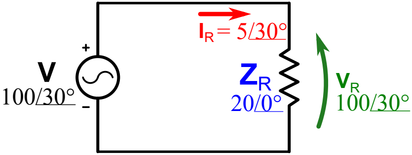

Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com frequência angular $\omega = 50$ rad/s.

Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da tensão da fonte: $\mathbf{V} = 100\underline{/30^\circ}$ V;
- Impedância do resistor: $\mathbf{Z}_R = R = 20\ \Omega$;

# Exemplo 1 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_R = \mathbf{Z}_R \cdot \mathbf{I}_R$

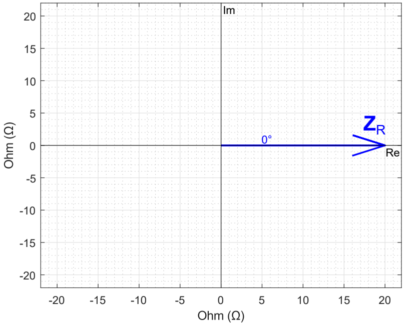
Uma vez que $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}$, tem-se: $100\underline{/30°} = 20\underline{/0°} \cdot \mathbf{I}_R$

$$\mathbf{I}_R = \frac{100\underline{/30°}}{20\underline{/0°}} \Rightarrow \mathbf{I}_R = 5\underline{/30°} \text{ A}.$$

Transformando $\mathbf{V}_R$ e $\mathbf{I}_R$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 50$ rad/s:
$v_R(t) = 100\cos(50t + 30°)$ V; e
$i_R(t) = 5\cos(50t + 30°)$ A.

# Exemplo 1 (continuação...)

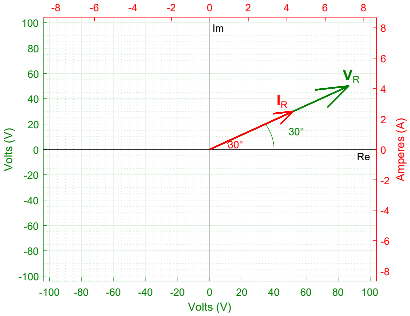
Representação da impedância $\mathbf{Z}_R$ no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z}_R = 20\underline{/0^\circ}\ \Omega$$

A impedância de um **resistor** tem **ângulo 0°**

Representação dos fasores $\mathbf{V}_R$ e $\mathbf{I}_R$ no Plano Complexo:

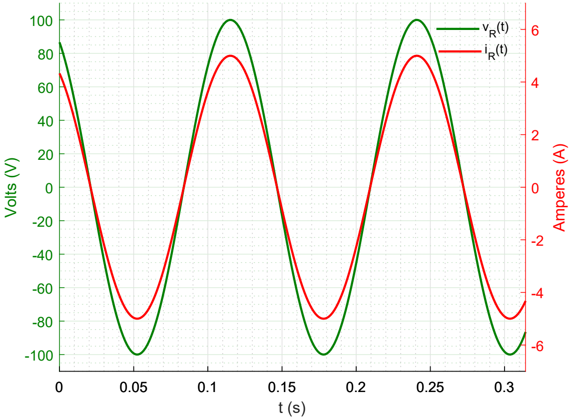



$$\mathbf{V}_R = 100\underline{/30^\circ}\ \text{V};\ \mathbf{I}_R = 5\underline{/30^\circ}\ \text{A}$$

A defasagem entre tensão e corrente em um **resistor** é **0°**

# Exemplo 1 (continuação...)

## Gráfico das senoides $v_R(t)$ e $i_R(t)$



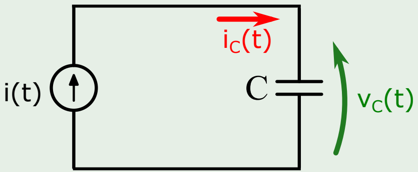

$$v_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)\ \text{V};\ i_R(t) = 5\cos(50t + 30^\circ)\ \text{A}.$$

As senoides de tensão e corrente em um **resistor** estão **em fase**

# Exemplo 2

## Circuito CA com um capacitor

A corrente da fonte de corrente é $i(t) = 8\cos(200t - 45°)$ A, e a capacitância $C = 1250\mu F$. Determine $v_C(t)$ e $i_C(t)$.




Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de corrente senoidal com frequência angular $\omega = 200$ rad/s.

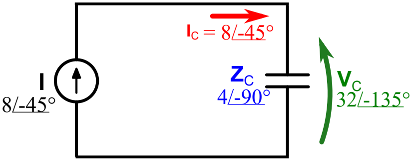
Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da corrente da fonte: $\mathbf{I} = 8\underline{/-45°}$ A;
- Impedância do capacitor:

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{200 \cdot 1250 \times 10^{-6}} = -j4\ \Omega;$$

# Exemplo 2 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:



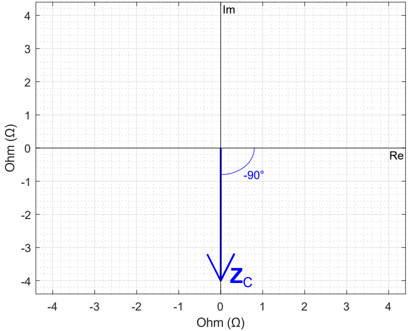

Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_C = \mathbf{Z}_C \cdot \mathbf{I}_C$

Uma vez que $\mathbf{I}_C = \mathbf{I}$, tem-se:
$\mathbf{V}_C = 4\underline{/-90^\circ} \cdot 8\underline{/-45^\circ} \Rightarrow \mathbf{V}_C = 32\underline{/-135^\circ}$ V

Transformando $\mathbf{V}_C$ e $\mathbf{I}_C$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 200$ rad/s:
$v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)$ V; e $i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)$ A.

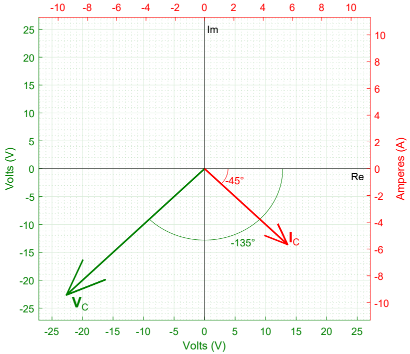
# Exemplo 2 (continuação...)

Representação da impedância $\mathbf{Z}_C$ no Plano Complexo:




$\mathbf{Z}_C = 4\underline{/-90^\circ}\ \Omega$

Representação dos fasores $\mathbf{V}_C$ e $\mathbf{I}_C$ no Plano Complexo:



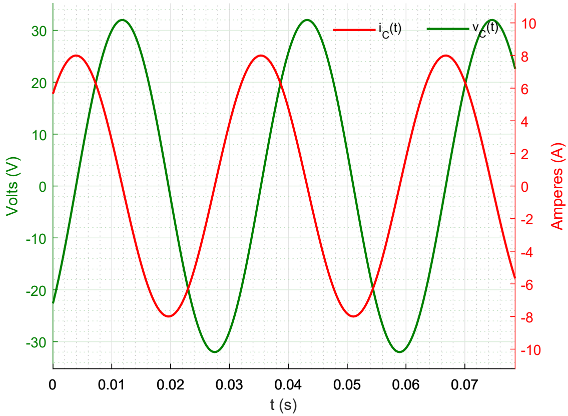

$\mathbf{V}_C = 32\underline{/-135^\circ}$ V; $\mathbf{I}_R = 8\underline{/-45^\circ}$ A

A impedância de um **capacitor** tem **ângulo -90°**

Em um **capacitor**, a corrente está defasada **+90°** em relação à tensão.

# Exemplo 2 (continuação...)

Gráfico das senoides $v_C(t)$ e $i_C(t)$



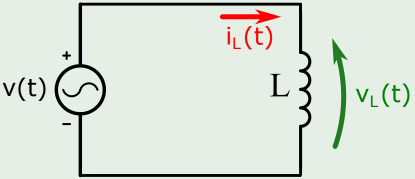

$$v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)\ \text{V};\quad i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)\ \text{A}.$$

Em um **capacitor**, a corrente está **adiantada 90°** em relação à tensão.

# Exemplo 3

## Circuito CA com um indutor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 90\cos(40t + 110°)$ V, e a indutância $L = 500mH$. Determine $v_L(t)$ e $i_L(t)$.



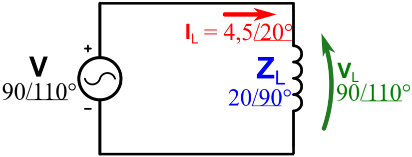

Solução: O circuito é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com frequência angular $\omega = 40$ rad/s.

Representando o circuito no domínio da frequência, tem-se:

- Fasor da tensão da fonte: $\mathbf{V} = 90\underline{/110°}$ V;
- Impedância do indutor: $\mathbf{Z}_L = j\omega L = j40 \cdot 500 \times 10^{-3} = j20\ \Omega$;

# Exemplo 3 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a **Lei de Ohm para circuitos CA**: $\mathbf{V}_L = \mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_L$

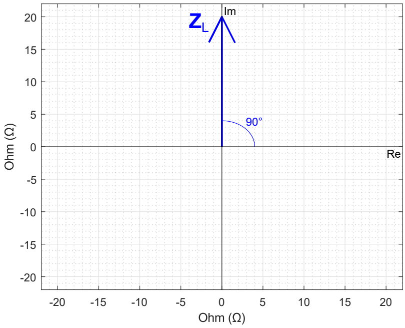
Uma vez que $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}$, tem-se:
$90\angle 110^\circ = 20\angle 90^\circ \cdot \mathbf{I}_L$

$$\mathbf{I}_L = \frac{90\angle 110^\circ}{20\angle 90^\circ} \Rightarrow \mathbf{I}_L = 4,5\angle 20^\circ \text{ A}.$$

Transformando $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$ para o domínio do tempo, lembrando que $\omega = 40$ rad/s:
$v_L(t) = 90\cos(40t + 110^\circ)$ V; e $i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20^\circ)$ A.

# Exemplo 3 (continuação...)

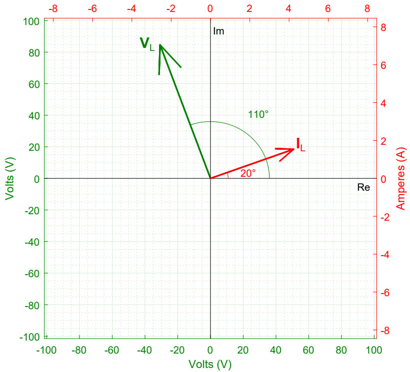
Representação da impedância $\mathbf{Z}_L$ no Plano Complexo:




$\mathbf{Z}_L = 20\angle 90^\circ\ \Omega$

A impedância de um **indutor** tem **ângulo +90°**

Fasores $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$ no Plano Complexo:

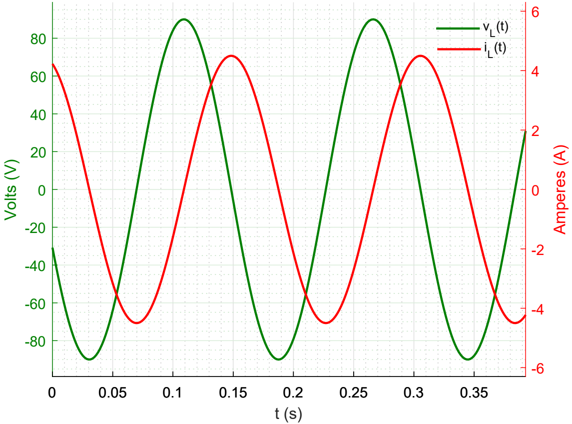



$\mathbf{V}_L = 90\angle 110^\circ$ V; $\mathbf{I}_L = 4,5\angle 20^\circ$ A

Em um **indutor**, a corrente está defasada **-90°** em relação à tensão.

# Exemplo 3 (continuação...)

## Gráfico das senoides $v_L(t)$ e $i_L(t)$




$$v_L(t) = 90\cos(40t + 110^\circ)\ \text{V};\ i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20^\circ)\ \text{A}.$$

Em um **indutor**, a corrente está **atrasada 90°** em relação à tensão.

# Cálculos de Impedâncias

- Analogamente à análise de circuitos CC, impedâncias de diferentes elementos (resistores, capacitores e indutores) em um circuito elétrico CA podem ser combinadas para gerar uma **Impedância Equivalente**;
- Impedâncias equivalentes em associações série e paralelo de elementos podem ser calculadas de forma idêntica ao cálculo de resistências equivalentes em circuitos CC.

A associação de dois ou mais elementos resulta em uma impedância $\mathbf{Z}$ que pode ser representada na forma retangular:

$$\mathbf{Z} = R + jX \ (\Omega)$$

$R$ = Resistência $(\Omega)$ $\rightarrow$ parte real da impedância, resultante dos **resistores**

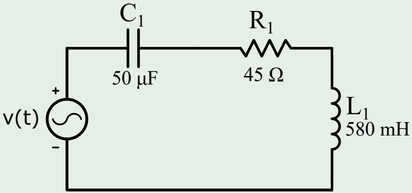
$X$ = Reatância $(\Omega)$ $\rightarrow$ parte imaginária da impedância, resultante de **capacitores e indutores**

A reatância depende da frequência

# Exemplo 4

## Impedância equivalente de um circuito série

Represente o circuito a seguir no domínio da frequência, para $\omega = 250$ rad/s. Em seguida, determine a impedância equivalente $\mathbf{Z}$.

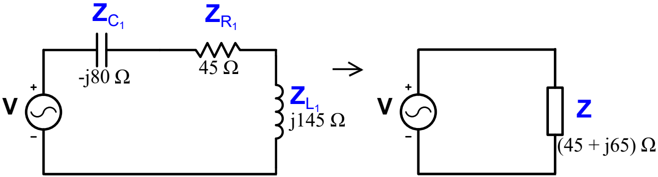



Solução: Cálculo das impedâncias de cada elemento:

- Capacitor: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{250 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j80\ \Omega$;
- Resistor: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 45\ \Omega$;
- Indutor: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j250 \cdot 580 \times 10^{-3} = j145\ \Omega$;

# Exemplo 4 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Uma vez que a associação é **série**, a impedância equivalente ($\mathbf{Z}$) é

$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1}$

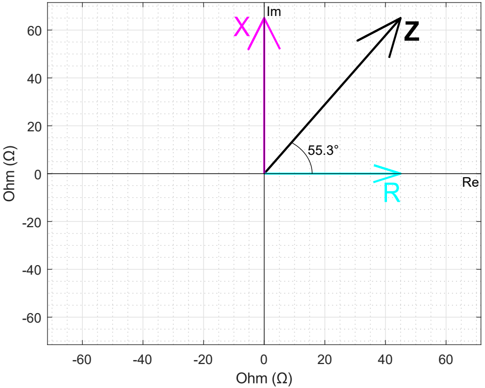
$\mathbf{Z} = -j80 + 45 + j145$

$\mathbf{Z} = 45 + j65\ \Omega$

A impedância equivalente é composta por uma resistência $R = 45\ \Omega$ e por uma reatância $X = 65\ \Omega$

# Exemplo 4 (continuação...)

Representação da impedância equivalente no Plano Complexo:



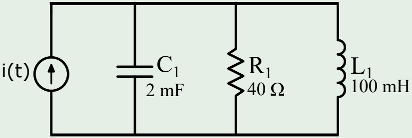

$$\mathbf{Z} = 45 + j65 = 79,06\underline{/55,3^\circ}\ \Omega$$

$X = 65\ \Omega$ corresponde a uma reatância **indutiva** de 65 Ω.

# Exemplo 5

## Impedância equivalente de um circuito paralelo

Represente o circuito a seguir no domínio da frequência, para $\omega = 120$ rad/s. Em seguida, determine a impedância equivalente **Z**.

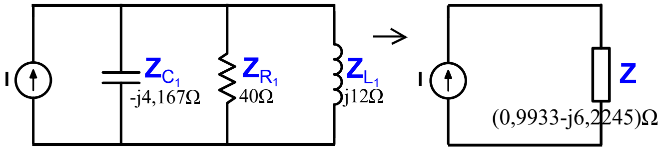



Solução: Cálculo das impedâncias de cada elemento:

- Capacitor: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{120 \cdot 2 \times 10^{-3}} \approx -j4,167\ \Omega$;
- Resistor: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 40\ \Omega$;
- Indutor: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j120 \cdot 0,1 = j12\ \Omega$;

# Exemplo 5 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Cálculo da impedância equivalente ($\mathbf{Z}$), para a associação em **paralelo**:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{C_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{R_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{L_1}}$$

$$\mathbf{Y} \approx \frac{1}{-j4,167} + \frac{1}{40} + \frac{1}{j12} \approx 0,025 + j0,157$$

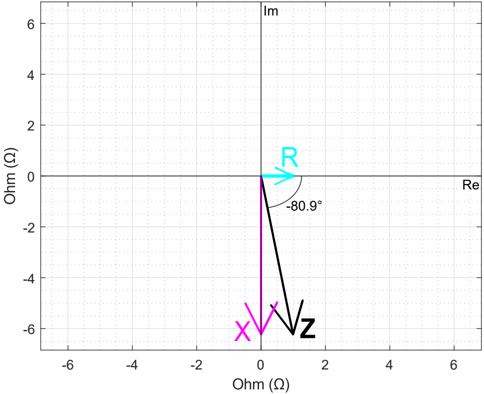
$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} \approx \frac{1}{0,025 + j0,157}$$

$$\mathbf{Z} \approx 0,9933 - j6,2245\ \Omega$$

A impedância equivalente é composta por uma resistência $R = 0,9933\ \Omega$ e por uma reatância $X = -6,2245\ \Omega$

# Exemplo 5 (continuação...)

Representação da impedância equivalente no Plano Complexo:




$$\mathbf{Z} \approx 0,9933 - j6,2245 = 6,3032\underline{/-80,93^\circ}\ \Omega$$

$X = -6,2245\ \Omega$ corresponde a uma reatância **capacitiva** de 6,2245 Ω.

# Atividades

**Leitura Complementar**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seção 10.5.

**Atividade 1**

Resolva os Exercícios **8 a 11** do **Caderno de Exercícios**.

**Sugestões de Exercícios Complementares**

[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 10, Exercícios 37, 39, 40, 41, 43.

# Lição 4

# Técnicas de Análise de Circuitos CA

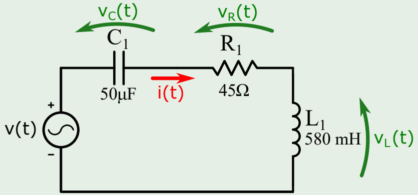
Consideração: Regime Estacionário Senoidal $\Rightarrow$ existem apenas fontes senoidais, e não se avalia as respostas transitórias

- Em um circuito CA alimentado por **uma ou mais** fontes operando **na mesma frequência** $\omega$, todas as tensões e correntes serão senoides de mesma frequência $\omega$.
- As técnicas de análise utilizadas em circuitos CC podem ser aplicadas de forma idêntica para o regime estacionário senoidal em termos de fasores e impedâncias.

# Exemplo 1

## Análise de um circuito RLC série

Determine a corrente e as tensões indicadas no circuito a seguir, onde $v(t) = 380\cos(250t - 28°)$.

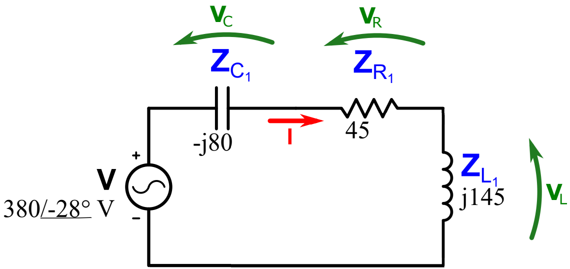



Solução: Cálculo das impedâncias de cada elemento:

- Capacitor: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{250 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j80\ \Omega$;
- Resistor: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 45\ \Omega$;
- Indutor: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j250 \cdot 580 \times 10^{-3} = j145\ \Omega$;

# Exemplo 1 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a **Lei de Kirchhoff das tensões (LKT)** às tensões fasoriais, tem-se:

$$\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}$$

Agora, utilizando a Lei de Ohm para circuitos CA:

$$\mathbf{Z}_{C_1} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{R_1} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{L_1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

$$(\mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1}) \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

# Exemplo 1 (continuação...)

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{(\mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})}$$

Substituindo os valores das impedâncias e da tensão da fonte:

$$\mathbf{I} = \frac{380\angle -28^\circ}{(-j80 + 45 + j145)} = \frac{380\angle -28^\circ}{(45 + j65)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I} = 4,8067\angle -83,3^\circ \text{ A}}$$

Em seguida, por meio da Lei de Ohm, determina-se as tensões fasoriais em cada elemento do circuito:

$$\mathbf{V_C} = \mathbf{Z}_{C_1} \cdot \mathbf{I} = -j80 \cdot 4,8067\angle -83,3^\circ \Rightarrow \boxed{\mathbf{V_C} = 384,53\angle -173,3^\circ \text{ V}}$$

$$\mathbf{V_R} = \mathbf{Z}_{R_1} \cdot \mathbf{I} = 45 \cdot 4,8067\angle -83,3^\circ \Rightarrow \boxed{\mathbf{V_R} = 216,30\angle -83,3^\circ \text{ V}}$$

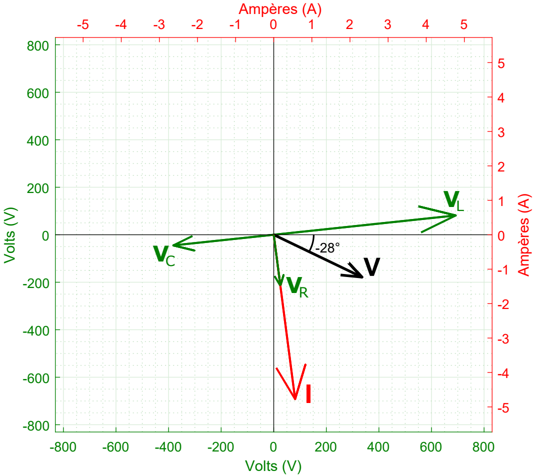
$$\mathbf{V_L} = \mathbf{Z}_{L_1} \cdot \mathbf{I} = j145 \cdot 4,8067\angle -83,3^\circ \Rightarrow \boxed{\mathbf{V_L} = 696,97\angle 6,7^\circ \text{ V}}$$

Transformando os fasores para o domínio do tempo, com $\omega = 250$ rad/s:

- $i(t) = 4,8067\cos(250t - 83,3^\circ)$ A
- $v_C(t) = 384,53\cos(250t - 173,3^\circ)$ V
- $v_R(t) = 216,30\cos(250t - 83,3^\circ)$ V
- $v_L(t) = 696,97\cos(250t + 6,7^\circ)$ V

# Exemplo 1 (continuação...)

Diagrama Fasorial:




- $\mathbf{V} = 380\underline{/-28^\circ}$ V
- $\mathbf{V_C} = 384,53\underline{/-173,3^\circ}$ V
- $\mathbf{V_R} = 216,30\underline{/-83,3^\circ}$ V
- $\mathbf{V_L} = 696,97\underline{/6,7^\circ}$ V
- $\mathbf{I} = 4,8067\underline{/-83,3^\circ}$ A

# Exemplo 1 (continuação...)

Análise e interpretação dos resultados:

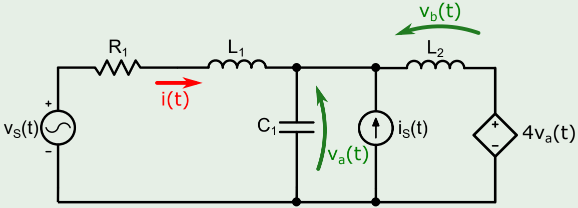
- Confira que $\mathbf{V}_C + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}$.
- Observe que **I** está em fase com $\mathbf{V}_R$.
- Observe que **I** está **adiantada** 90 °em relação a $\mathbf{V}_C$.
- Observe que **I** está **atrasada** 90 °em relação a $\mathbf{V}_L$.
- A impedância equivalente vista pela fonte, $(\mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1}) = 45 + j65$, tem característica indutiva. Por isso, ela tende a atrasar a corrente em relação à tensão da fonte **V**.
- A impedância equivalente, na forma polar, é igual a $79,06\angle 55,3^\circ$. Consequentemente, **I** está **atrasada 55,3** ° em relação a **V**.
- Note que, neste exemplo, as amplitudes das tensões no indutor e no capacitor são superiores à amplitude da tensão imposta pela fonte.

Ao analisar um circuito, **sempre** avalie a coerência dos resultados.

# Exemplo 2

## Análise Nodal [Svoboda; Dorf, 2016]

Determine a corrente e as tensões indicadas no circuito a seguir, onde: $v_S(t) = 20\cos(250t)$ V; $i_S(t) = 1,2\cos(250t + 45^\circ)$ A; $R_1 = 8\Omega$; $C_1 = 0,25mF$ mH; $L_1 = 36$ mH; e $L_2 = 80$ mH.




**Solução**: Primeiramente, observar que as fontes independentes possuem mesma frequência ($\omega = 250$ rad/s). Portanto, o circuito pode ser analisado por meio de fasores considerando as duas fontes simultaneamente.

# Exemplo 2 (continuação...)

Cálculo das impedâncias:

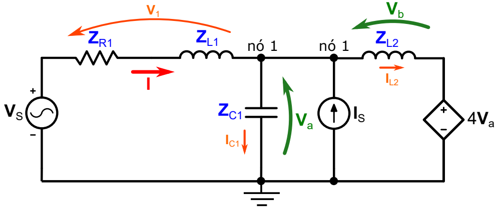
- Resistor $R_1$: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 8\ \Omega$;
- Capacitor $C_1$: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{250 \cdot 0,25 \times 10^{-3}} = -j16\ \Omega$;
- Indutor $L_1$: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j250 \cdot 36 \times 10^{-3} = j9\ \Omega$;
- Indutor $L_2$: $\mathbf{Z}_{L_2} = j\omega L_2 = j250 \cdot 80 \times 10^{-3} = j20\ \Omega$;

Tensões fasorias das fontes:

- Fonte de tensão independente: $\mathbf{V}_S = 20\underline{/0^\circ}$ V;
- Fonte de corrente independente: $\mathbf{I}_S = 1,2\underline{/45^\circ}$ V;
- Fonte de tensão dependente: $4\mathbf{V}_a$ V;

# Exemplo 2 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Aplicando a Lei de Kirchhoff das Correntes ao **nó 1**, tem-se:

$$\mathbf{I} + \mathbf{I}_S = \mathbf{I}_{C1} + \mathbf{I}_{L2} \ \textbf{(Eq. 1)}$$

Escrevendo as correntes desconhecidas na **(Eq. 1)** em termos das tensões e impedâncias:

- $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_1}{(\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_a}{(\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})}}$ **(Eq. 2)**
- $\boxed{\mathbf{I}_{C1} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_{C_1}}}$ **(Eq. 3)**
- $\mathbf{I}_{L2} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_{L_2}} = \frac{\mathbf{V}_a - 4\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_{L_2}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I}_{L2} = \frac{-3\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_{L_2}}}$ **(Eq. 4)**

# Exemplo 2 (continuação...)

Substituindo (Eq. 2), (Eq. 3) e (Eq. 4) em (Eq. 1):

$$\frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_a}{(\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})} + \mathbf{I}_S = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_{C_1}} + \frac{-3\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_{L_2}}$$

Colocando $\mathbf{V}_a$ em evidência:

$$\frac{\mathbf{V}_S}{(\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})} + \mathbf{I}_S = \mathbf{V}_a \left( \frac{1}{\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{C_1}} - \frac{3}{\mathbf{Z}_{L_2}} \right)$$

- Substituindo os valores calculados das impedâncias e os fasores correspondentes às fontes, determina-se $\mathbf{V}_a$:

$$\frac{20\underline{/0^\circ}}{(8 + j9)} + 1,2\underline{/45^\circ} = \mathbf{V}_a \left( \frac{1}{8 + j9} + \frac{1}{-j16} - \frac{3}{j20} \right)$$

$$1,99\underline{/-11,38^\circ} = \mathbf{V}_a \left(0,16\underline{/69,86^\circ}\right) \Rightarrow \boxed{\mathbf{V}_a = 12,43\underline{/-81,24^\circ}\ \mathrm{V}}$$

# Exemplo 2 (continuação...)

- Por sua vez, a tensão $\mathbf{V}_b$ é dada por:

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - 4\mathbf{V}_a = -3\mathbf{V}_a \Rightarrow \boxed{\mathbf{V}_b = 37,29\underline{/98,76^\circ}\ \text{V}}$$

- Por fim, para determinar $\mathbf{I}$, utiliza-se a (Eq.2):

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_a}{(\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{L_1})} = \frac{20\underline{/0^\circ} - 12,43\underline{/-81,24^\circ}}{(8 + j9)} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I} = 1,82\underline{/-14,21^\circ}\ \text{A}}$$

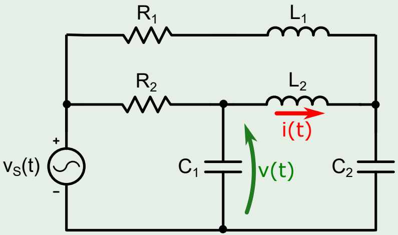
Assim, as senoides correspondentes aos fasores $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$ e $\mathbf{I}$ são:

- $v_a(t) = 12,43\cos(250t - 81,24^\circ)$ V
- $v_b(t) = 37,29\cos(250t + 98,76^\circ)$ V
- $i(t) = 1,82\cos(250t - 14,21^\circ)$ A

# Exemplo 3

## Análise de Malhas [Svoboda; Dorf, 2016]

Determine a corrente e a tensão indicadas no circuito a seguir, onde: $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 200\Omega$; $L_1 = 80$ mH; $L_2 = 50$ mH; $C_1 = 25\mu$F; $C_2 = 12,5\mu$F; e $v_S(t) = 45\cos(500t)$ V.



# Exemplo 3 (continuação...)

**Solução**: Cálculo das impedâncias, para $\omega = 500$ rad/s:

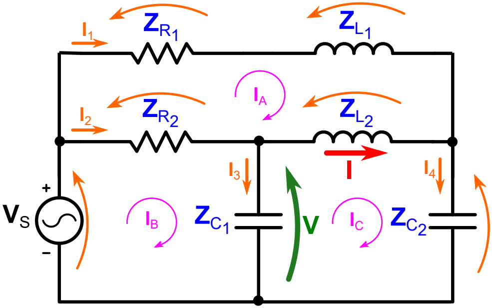
- Resistor $R_1$: $\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 100\ \Omega$;
- Resistor $R_2$: $\mathbf{Z}_{R_2} = R_2 = 200\ \Omega$;
- Capacitor $C_1$: $\mathbf{Z}_{C_1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j\dfrac{1}{500 \cdot 25 \times 10^{-6}} = -j80\ \Omega$;
- Capacitor $C_2$: $\mathbf{Z}_{C_2} = -j\dfrac{1}{\omega C_2} = -j\dfrac{1}{500 \cdot 12,5 \times 10^{-6}} = -j160\ \Omega$;
- Indutor $L_1$: $\mathbf{Z}_{L_1} = j\omega L_1 = j500 \cdot 80 \times 10^{-3} = j40\ \Omega$;
- Indutor $L_2$: $\mathbf{Z}_{L_2} = j\omega L_2 = j500 \cdot 50 \times 10^{-3} = j25\ \Omega$;

Tensão fasorial da fonte:

- Fonte de tensão independente: $\mathbf{V}_S = 45\underline{/0^\circ}$ V;

# Exemplo 3 (continuação...)

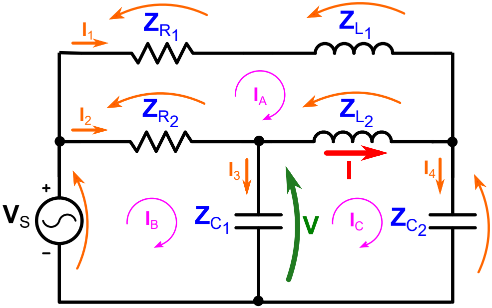
Representação do circuito no domínio da frequência:




$$\begin{cases} \text{(malha A): } -\mathbf{Z}_{R_1}\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_{L_1}\mathbf{I}_1 + \mathbf{Z}_{L_2}\mathbf{I} + \mathbf{Z}_{R_2}\mathbf{I}_2 = 0 \\ \text{(malha B): } \mathbf{V}_S - \mathbf{Z}_{R_2}\mathbf{I}_2 - \mathbf{Z}_{C_1}\mathbf{I}_3 = 0 \\ \text{(malha C): } \mathbf{Z}_{C_1}\mathbf{I}_3 - \mathbf{Z}_{L_2}\mathbf{I} - \mathbf{Z}_{C_2}\mathbf{I}_4 = 0 \end{cases}$$

# Exemplo 3 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




$$\begin{cases} \text{(malha A): } -\mathbf{Z}_{R_1}\mathbf{I}_A - \mathbf{Z}_{L_1}\mathbf{I}_A + \mathbf{Z}_{L_2}(\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_A) + \mathbf{Z}_{R_2}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A) = 0 \\ \text{(malha B): } \mathbf{V}_S - \mathbf{Z}_{R_2}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A) - \mathbf{Z}_{C_1}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C) = 0 \\ \text{(malha C): } \mathbf{Z}_{C_1}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C) - \mathbf{Z}_{L_2}(\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_A) - \mathbf{Z}_{C_2}\mathbf{I}_C = 0 \end{cases}$$

# Exemplo 3 (continuação...)

$$\begin{cases} \text{(malha A):} & -\mathbf{Z}_{R_1}\mathbf{I}_A - \mathbf{Z}_{L_1}\mathbf{I}_A + \mathbf{Z}_{L_2}(\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_A) + \mathbf{Z}_{R_2}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A) = 0 \\ \text{(malha B):} & \mathbf{V}_S - \mathbf{Z}_{R_2}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_A) - \mathbf{Z}_{C_1}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C) = 0 \\ \text{(malha C):} & \mathbf{Z}_{C_1}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C) - \mathbf{Z}_{L_2}(\mathbf{I}_C - \mathbf{I}_A) - \mathbf{Z}_{C_2}\mathbf{I}_C = 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações de malha:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_A(-\mathbf{Z}_{R_1} - \mathbf{Z}_{L_1} - \mathbf{Z}_{L_2} - \mathbf{Z}_{R_2}) + \mathbf{I}_B(\mathbf{Z}_{R_2}) + \mathbf{I}_C(\mathbf{Z}_{L_2}) = 0 \\ \mathbf{I}_A(-\mathbf{Z}_{R_2}) + \mathbf{I}_B(\mathbf{Z}_{R_2} + \mathbf{Z}_{C_1}) + \mathbf{I}_C(-\mathbf{Z}_{C_1}) = \mathbf{V}_S \\ \mathbf{I}_A(\mathbf{Z}_{L_2}) + \mathbf{I}_B(\mathbf{Z}_{C_1}) + \mathbf{I}_C(-\mathbf{Z}_{C_1} - \mathbf{Z}_{L_2} - \mathbf{Z}_{C_2}) = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores das impedâncias e da tensão da fonte:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_A(-100 - j40 - j25 - 200) + \mathbf{I}_B(200) + \mathbf{I}_C(j25) = 0 \\ \mathbf{I}_A(-200) + \mathbf{I}_B(200 + (-j80)) + \mathbf{I}_C(-(-j80)) = \mathbf{V}_S \\ \mathbf{I}_A(j25) + \mathbf{I}_B(-j80) + \mathbf{I}_C(-(-j80) - j25 - (-j160)) = 0 \end{cases}$$

# Exemplo 3 (continuação...)

$$\begin{cases} \mathbf{I}_A(-300 - j65) + \mathbf{I}_B(200) + \mathbf{I}_C(j25) = 0 \\ \mathbf{I}_A(-200) + \mathbf{I}_B(200 - j80) + \mathbf{I}_C(j80) = \mathbf{4}5 \\ \mathbf{I}_A(j25) + \mathbf{I}_B(-j80) + \mathbf{I}_C(j215) = 0 \end{cases}$$

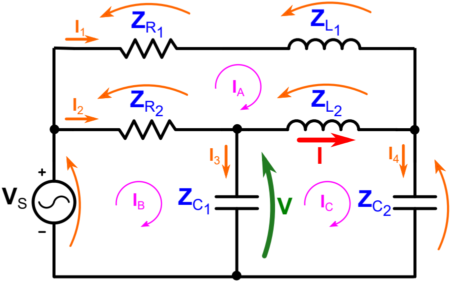
Escrevendo o sistema de equações na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -300 - j65 & 200 & j25 \\ -200 & 200 - j80 & j80 \\ j25 & -j80 & j215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações, tem-se a solução:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}374 \ \underline{/15,16^\circ} \\ 0{,}575 \ \underline{/25,25^\circ} \\ 0{,}171 \ \underline{/27,81^\circ} \end{bmatrix}$$

# Exemplo 3 (continuação...)




$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_A \\ \mathbf{I}_B \\ \mathbf{I}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}374\ \underline{/15,16^\circ} \\ 0{,}575\ \underline{/25,25^\circ} \\ 0{,}171\ \underline{/27,81^\circ} \end{bmatrix}$$

A corrente $\mathbf{I}$ é:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_C - \mathbf{I}_A = 0,171\underline{/27,81^\circ} - 0,374\underline{/15,16^\circ} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I}{=}0{,}211\ \underline{/-175,09^\circ}\ \ \mathrm{A}}$$

A tensão $\mathbf{V}$ é:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{C_1}\mathbf{I}_3 = \mathbf{Z}_{C_1}(\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_C) = -j80(0,575\underline{/25,25^\circ} - 0,171\underline{/27,81^\circ}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{V}{=}32{,}32\ \underline{/114,17^\circ}\ \ \mathrm{V}}$$

$i(t) = 0,211\cos(500t - 175,09^\circ)\ \mathrm{A}$ e $v(t) = 32,32\cos(500t + 114,17^\circ)\ \mathrm{V}$

# Atividades

**Leitura Complementar**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seções 10.5 e 10.6.

**Atividade 1**

Resolva os Exercícios **12 a 17** do **Caderno de Exercícios**.

**Sugestões de Exercícios Complementares**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Problemas P 10.5-13, P 10.5-18, P 10.5-29, P 10.6-6, P 10.6-22, PP 10-2, PP 10-3.

# Lição 5

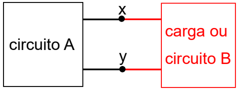
# Teoremas na análise de circuitos CA

Os circuitos CA contendo elementos R, L e C são circuitos lineares.

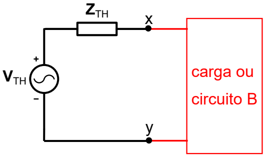
Desta forma, assim como nos circuitos CC, pode-se utilizar métodos de análise empregando os **Teoremas de Thévenin e Norton**, a **transformação de fontes** e o **princípio da superposição**.

# Teoremas de Thévenin e Norton

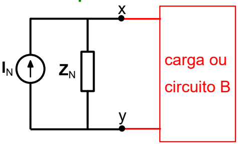
**circuito original**



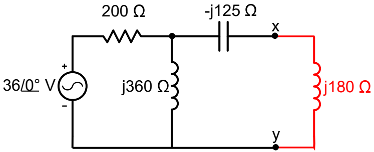

**circuito equivalente de Thévenin**

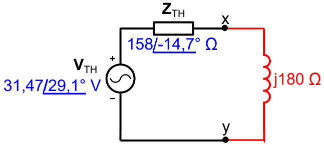


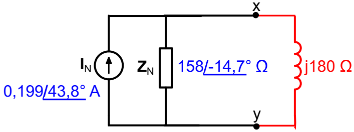

**circuito equivalente de Norton**




**Exemplo**

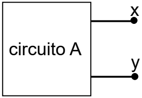


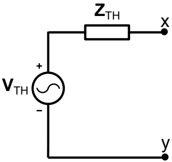



# Teoremas de Thévenin e Norton

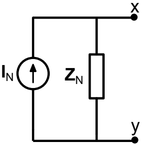
circuito original




circuito equivalente de Thévenin




circuito equivalente de Norton



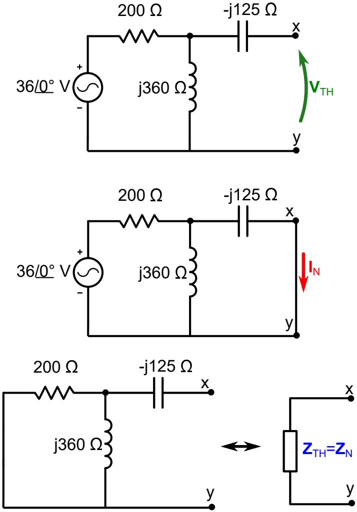

Determinação de $\mathbf{V}_{TH}$, $\mathbf{Z}_{TH}$, $\mathbf{I}_N$ e $\mathbf{Z}_N$:

- $\mathbf{V}_{TH}$ é a tensão entre os terminais x e y abertos.
- $\mathbf{Z}_{TH}$ é a impedância equivalente entre os terminais x e y, eliminando-se todas as fontes independentes do circuito A. As fontes dependentes permanecem inalteradas.
- $\mathbf{I}_N$ é a corrente de curto-circuito que surge quando um curto-circuito é ligado aos terminais x e y.
- $\mathbf{Z}_{TH} = \mathbf{Z}_N$.

$$\mathbf{V}_{TH} = \mathbf{Z}_{TH} \cdot \mathbf{I}_N$$

$$\mathbf{V}_{TH} = \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{I}_N$$

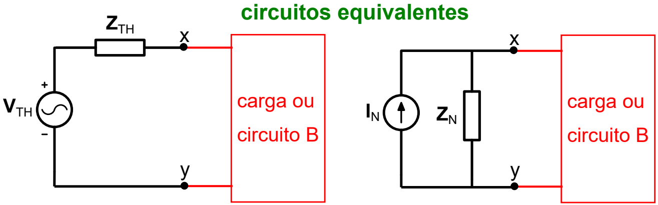
# Exemplo 1




- No primeiro circuito, pode-se calcular que $V_{TH} = 31,47\underline{/29,1^\circ}$ V
- No segundo circuito, pode-se calcular que $I_N = 0,199\underline{/43,8^\circ}$ A
- No terceiro circuito, pode-se determinar a impedância equivalente $Z_{TH} = Z_N = 158\underline{/-14,7^\circ}$ Ω

# Transformação de fontes

Em qualquer circuito, pode-se substituir uma **combinação em série de uma fonte de tensão e uma impedância** por uma **combinação em paralelo de uma fonte de corrente e uma impedância**, e vice-versa.



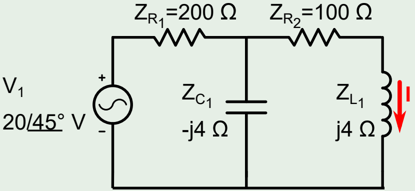

$$\mathbf{V}_{TH} = \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{I}_N$$

$$\mathbf{Z}_{TH} = \mathbf{Z}_N$$

# Exemplo 2

## Transformação de fontes

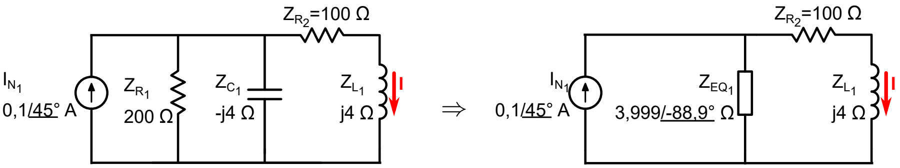
Determine a corrente fasorial **I** no circuito a seguir utilizando transformações de fontes.




**Solução**: A associação em série da fonte de tensão $\mathbf{V}_1$ com a impedância $\mathbf{Z}_{R_1}$ é equivalente a uma associação em paralelo de uma fonte de corrente com a mesma impedância $\mathbf{Z}_{R_1}$, sendo que a corrente da fonte é:

$$\mathbf{I}_{N_1} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{R_1}} = \frac{20\underline{/45^\circ}}{200} = 0,1\underline{/45^\circ}\ \text{A}$$

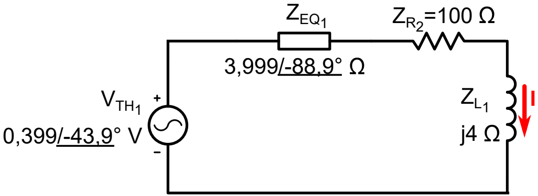
# Exemplo 2 (continuação...)




Por sua vez, a associação em paralelo da fonte de corrente $\mathbf{I}_{N_1}$ com a impedância $\mathbf{Z}_{EQ_1}$ é equivalente a uma associação em série de uma fonte de corrente com a mesma impedância $\mathbf{Z}_{EQ_1}$, sendo que a tensão da fonte é:

$$\mathbf{V}_{TH_1} = \mathbf{Z}_{EQ_1} \cdot \mathbf{I}_{N_1} = 3,999\underline{/-88,9^\circ} \cdot 0,1\underline{/45^\circ} = 0,399\underline{/-43,9^\circ}\ \text{V}$$

# Exemplo 2 (continuação...)




Assim, o circuito original é equivalente ao circuito em série da figura acima. A corrente **I** do circuito é:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{TH_1}}{(\mathbf{Z}_{EQ_1} + \mathbf{Z}_{R_2} + \mathbf{Z}_{L_1})} = \frac{0,399\angle{-43,9^\circ}}{(3,999\angle{-88,9^\circ} + 100 + j4)}$$

$$\boxed{\mathbf{I}=0{,}004\ \angle{-43,9^\circ}\ \mathrm{A}}$$

# Superposição

Princípio da superposição:

> A saída de um circuito linear com **várias entradas** é igual à soma das saídas que seriam observadas para cada entrada individualmente.

- Circuito CA com várias fontes operando na **mesma frequência**: pode ser analisado em termos de fasores e impedâncias considerando todas as fontes simultâneamente. **A resposta do circuito é uma senoide.**
- Circuito CA com várias fontes operando em **frequências distintas**: deve-se empregar o **princípio da superposição** e determinar a resposta para cada fonte individualmente. Os resultados devem ser somados no **domínio do tempo**. **A resposta do circuito não é uma senoide!**

# Superposição

Importante:

- As impedâncias dependem da frequência.
- Apenas circuitos com fontes em uma única frequência podem ser analisados em termos de fasores e impedâncias.
- Ao analisar a resposta de uma fonte individualmente, deve-se **eliminar** as demais fontes independentes do circuito.

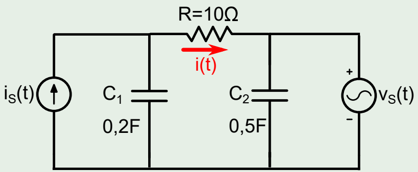
Eliminar uma fonte de tensão significa substituí-la por um **curto-circuito**.

Eliminar uma fonte de corrente significa substituí-la por um **circuito aberto**.

# Exemplo 3

## Circuito com fontes em frequências distintas

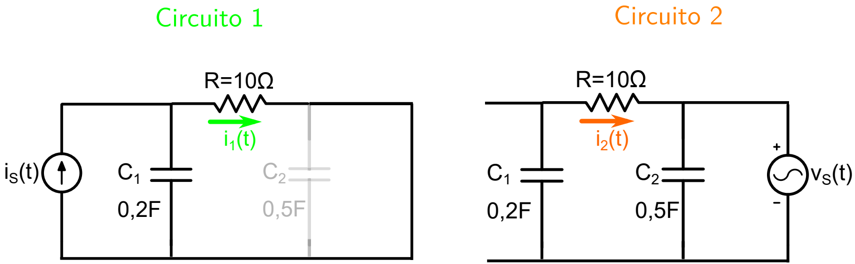
Determine a corrente $i(t)$ indicada no circuito a seguir, em que $i_S(t) = 5\cos(4t)$ A e $v_S(t) = 20\cos(5t)$ V.




**Solução**: O circuito possui fontes com frequências distintas: a fonte de corrente tem frequência $\omega_1 = 4$ rad/s e a fonte de tensão tem frequência $\omega_2 = 5$ rad/s.

Aplicando o princípio da superposição, o circuito original pode ser separado em dois circuitos com fontes senoidais únicas.

# Exemplo 3 (continuação...)




Cada circuito pode ser analisado individualmente em termos de fasores e impedâncias, a fim de se obter $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

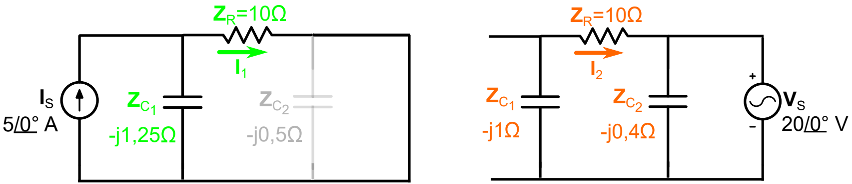
A resposta $i(t)$ será:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

# Exemplo 3 (continuação...)

Circuitos representados no domínio da frequência:

Circuito 1 ($\omega_1 = 4$ rad/s) Circuito 2 ($\omega_2 = 5$ rad/s)




Analisado-se os circuitos individualmente, obtém-se os fasores $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$.

**Note que as impedâncias são distintas nos dois circuitos!**

Atenção: não somar os resultados $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ no domínio da frequência!!

# Atividades

**Leitura Complementar**

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Seções 10.7 e 10.8.

**Atividade 1**

Determine a resposta $i(t)$ no Exemplo 3 desta Lição.

**Atividade 2**

Resolva os Exercícios **18 a 23** do **Caderno de Exercícios**.

**Sugestões de Exercícios Complementares**

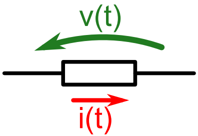
[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 10, Problemas P 10.7-6, P 10.7-8, P 10.8-8.

# Lição 6

# Potência em circuitos CA

Potência instantânea absorvida por um elemento do circuito:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)\,[W]$$




A equação é válida para quaisquer tipos de funções, incluindo tensões e correntes não senoidais.

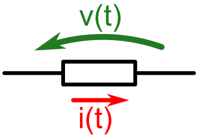
Para um elemento com referências de tensão e corrente na forma passiva:

- $p(t) > 0$ indica que o elemento está **absorvendo** potência;
- $p(t) < 0$ indica que o elemento está **fornecendo** potência;

# Potência instantânea

Para tensões e correntes senoidais:

$v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)$ V
$i(t) = I_p \cos(\omega t + \theta_i)$ A




$$p(t) = V_p \cdot I_p \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$\boxed{p(t) = \frac{V_p \cdot I_p}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_p \cdot I_p}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) \, [W]}$$

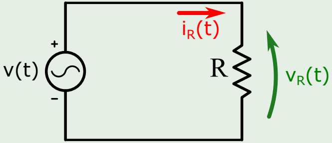
A potência instantânea é composta por:

- Um termo constante (independente de $t$)
- Uma senoide com o dobro da frequência de $v(t)$ e $i(t)$.

# Exemplo 1

## Circuito CA com um resistor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)$ V, e a resistência $R = 20\Omega$. Determine a função $p_R(t)$ que representa a potência dissipada pelo resistor.

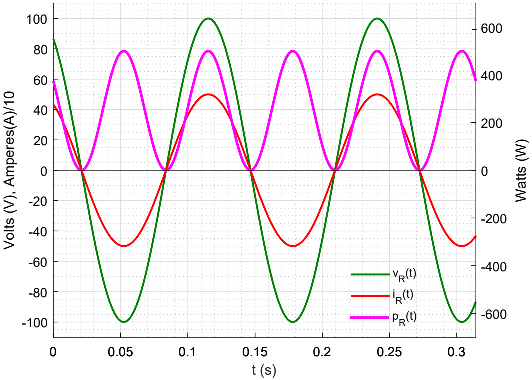



**Solução:** Analisando-se o ciruito, pode-se determinar que $v_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)$ V e $i_R(t) = 5\cos(50t + 30^\circ)$ A. Assim,

$$p_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ) \cdot 5\cos(50t + 30^\circ)$$
$$p_R(t) = \frac{100 \cdot 5}{2}\cos(30^\circ - 30^\circ) + \frac{100 \cdot 5}{2}\cos(2 \cdot 50t + 30^\circ + 30^\circ)$$
$$\boxed{p_R(t) = 250 + 250\cos(100t + 60^\circ)\ \mathrm{W}}$$

# Exemplo 1 (continuação...)

Gráficos de $v_R(t)$, $i_R(t)$ e $p_R(t)$



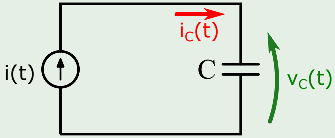

$$v_R(t) = 100\cos(50t + 30^\circ)\ \text{V};\ i_R(t) = 5\cos(50t + 30^\circ)\ \text{A}$$
$$p_R(t) = 250 + 250\cos(100t + 60^\circ)\ \text{W}$$

Em qualquer instante $t$, um **resistor** sempre **absorve** potência.

# Exemplo 2

## Circuito CA com um capacitor

A corrente da fonte de corrente é $i(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)$ A, e a capacitância $C = 1250\mu F$. Determine a potência instantânea absorvida pelo capacitor, $p_C(t)$.

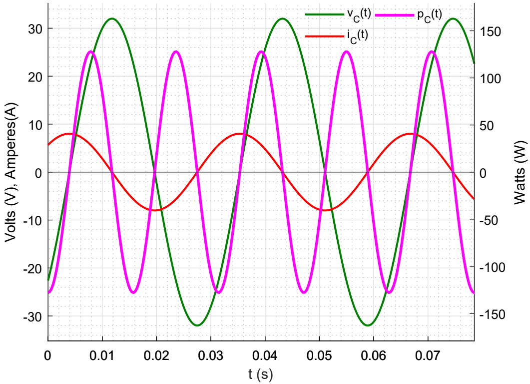



**Solução:** Analisando-se o ciruito, pode-se determinar que $v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)$ V; e $i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)$ A. Assim,

$$p_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ) \cdot 8\cos(200t - 45^\circ)$$
$$p_C(t) = \frac{32\cdot 8}{2}\cos(-135^\circ - (-45^\circ)) + \frac{32\cdot 8}{2}\cos(2\cdot 200t + (-135^\circ) + (-45^\circ))$$
$$\boxed{p_C(t) = 128\cos(400t - 180^\circ)\ \text{W}}$$

# Exemplo 2 (continuação...)

## Gráficos de $v_C(t)$, $i_C(t)$ e $p_C(t)$



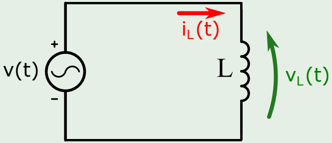

$$v_C(t) = 32\cos(200t - 135^\circ)\ \text{V};\ i_C(t) = 8\cos(200t - 45^\circ)\ \text{A}$$
$$p_C(t) = 128\cos(400t - 180^\circ)\ \text{W}$$

O **capacitor absorve** potência em metade do período e **fornece** potência na outra.

# Exemplo 3

## Circuito CA com um indutor

A tensão da fonte de tensão é $v(t) = 90\cos(40t + 110°)$ V, e a indutância $L = 500mH$. Determine a potência instantânea absorvida pelo indutor, $p_L(t)$.

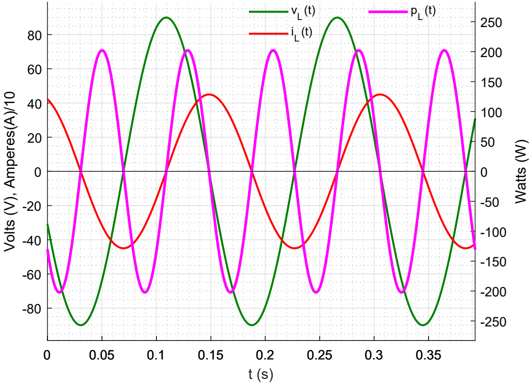



**Solução:** Analisando-se o ciruito, pode-se determinar que $v_L(t) = 90\cos(40t + 110°)$ V; e $i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20°)$ A. Assim,

$$p_L(t) = 90\cos(40t + 110°) \cdot 4,5\cos(40t + 20°)$$
$$p_L(t) = \frac{90 \cdot 4,5}{2}\cos(110° - 20°) + \frac{90 \cdot 4,5}{2}\cos(2 \cdot 40t + 110° + 20°)$$
$$\boxed{p_L(t) = 202,5\cos(80t + 130°)\ \text{W}}$$

# Exemplo 3 (continuação...)

Gráficos de $v_L(t)$, $i_L(t)$ e $p_L(t)$




$$v_L(t) = 90\cos(40t + 110^\circ)\ \text{V};\ i_L(t) = 4,5\cos(40t + 20^\circ)\ \text{A}$$
$$p_L(t) = 202,5\cos(80t + 130^\circ)\ \text{W}$$

O **indutor absorve** potência em metade do período e **fornece** potência na outra.

# Potência Média ($P$)

A potência média absorvida ($P$) por um elemento do circuito é dada por

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt$$

Para tensões e correntes senoidais, o resultado é:

$$P = \frac{V_p \cdot I_p}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)\,[W]$$

Utilizando os exemplos anteriores, pode-se verificar que:

- A potência média absorvida por um **Resistor** é $P = \frac{R \cdot I_p^2}{2}$;
- A potência média absorvida por um **Capacitor** é sempre **zero**;
- A potência média absorvida por um **Indutor** é sempre **zero**;

# Potência Complexa (**S**)

Os cálculos de potência também podem ser realizados no domínio da frequência.
Assim, define-se a grandeza Potência Complexa (**S**):

$$\mathbf{S} = P + jQ$$

- **S**: Potência Complexa [$VA$]
- $P$: Potência Ativa [$W$]
- $Q$: Potência Reativa [$VAr$]

$$\mathbf{S} = S\underline{/\theta_S}$$

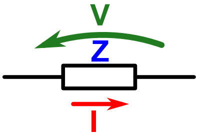
- $S$: Potência Aparente [$VA$] (módulo da potência complexa)

A Potência Ativa $P$ corresponde à potência média absorvida pelo elemento.

# Potência Complexa (**S**)

A Potência Complexa pode ser calculada em termos dos fasores **V** e **I** por:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{I}}}{2}$$




$\bar{\mathbf{I}}$ é o complexo conjugado do fasor **I**.

**Forma Retangular:**

$$\mathbf{S} = \frac{V_p \cdot I_p}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_p \cdot I_p}{2} \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$

**Forma Polar:**

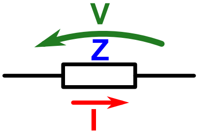
$$\mathbf{S} = \frac{V_p \cdot I_p}{2} \underline{/\theta_v - \theta_i}$$

- Observe que $(\theta_v - \theta_i)$ é igual ao ângulo da impedância, $\theta_z$

# Potência Complexa (**S**)

A Potência Complexa também pode ser calculada em termos da impedância **Z** e do fasor **I**, por:

Se $\mathbf{Z} = R + jX = Z\underline{/\theta_z}$ e $\mathbf{I} = I_p\underline{/\theta_i}$




**Forma Retangular:**

$$\mathbf{S} = R \cdot \frac{I_p^2}{2} + j \cdot X \cdot \frac{I_p^2}{2}$$

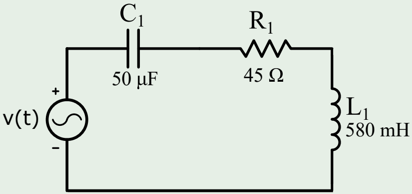
**Forma Polar:**

$$\mathbf{S} = Z \cdot \frac{I_p^2}{2}\underline{/\theta_z}$$

# Exemplo 4

## Potência complexa em um circuito série

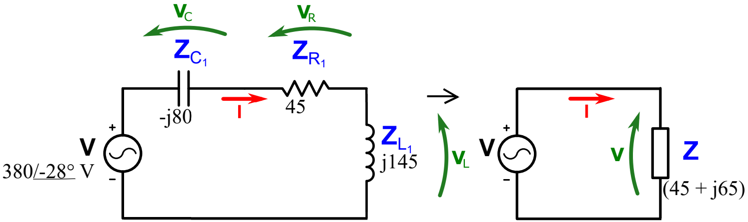
Determine a potência complexa em cada elemento do circuito a seguir. Em seguida, determine as potências ativa, reativa e aparente fornecidas pela fonte.




**Solução:** Representando o circuito no domínio da frequência

# Exemplo 4 (continuação...)

Representação do circuito no domínio da frequência:




Impedâncias:

- $\mathbf{Z}_{C_1} = 80\angle{-90^\circ}\ \Omega$;
- $\mathbf{Z}_{R_1} = 45\angle{0^\circ}\ \Omega$;
- $\mathbf{Z}_{L_1} = 145\angle{90^\circ}\ \Omega$;
- $\mathbf{Z} = 79,06\angle{55,3^\circ}\ \Omega$;

Fasores:

- $\mathbf{V_C} = 384,53\angle{-173,3^\circ}\ \mathrm{V}$
- $\mathbf{V_R} = 216,30\angle{-83,3^\circ}\ \mathrm{V}$
- $\mathbf{V_L} = 696,97\angle{6,7^\circ}\ \mathrm{V}$
- $\mathbf{I} = 4,8067\angle{-83,3^\circ}\ \mathrm{A}$

# Exemplo 4 (continuação...)

As potências complexas absorvidas por cada elemento do circuito são:

- Capacitor: $\mathbf{S}_C = \dfrac{\mathbf{V_C} \cdot \bar{\mathbf{I}}}{2} = \dfrac{384,53\underline{/-173,3^\circ} \cdot 4,8067\underline{/+83,3^\circ}}{2}$

  $\boxed{\mathbf{S}_C = 924,16\underline{/-90^\circ} = 0 + j(-924,16) \text{ VA}}$

- Resistor: $\mathbf{S}_R = \dfrac{\mathbf{V_R} \cdot \bar{\mathbf{I}}}{2} = \dfrac{216,30\underline{/-83,3^\circ} \cdot 4,8067\underline{/+83,3^\circ}}{2}$

  $\boxed{\mathbf{S}_R = 519,84\underline{/0^\circ} = 519,84 + j0 \text{ VA}}$

- Indutor: $\mathbf{S}_L = \dfrac{\mathbf{V_L} \cdot \bar{\mathbf{I}}}{2} = \dfrac{696,97\underline{/6,7^\circ} \cdot 4,8067\underline{/+83,3^\circ}}{2}$

  $\boxed{\mathbf{S}_L = 1675,06\underline{/+90^\circ} = 0 + j1675,06 \text{ VA}}$

# Exemplo 4 (continuação...)

As potência complexa **fornecida pela fonte** é igual à potência **absorvida pela impedância equivalente** ($\mathbf{S}_Z$), e corresponde à soma das potências complexas absorvidas por cada elemento:

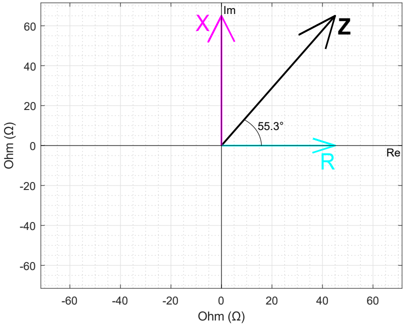
- Impedância Equivalente $Z$:
  $\mathbf{S}_Z = \mathbf{S}_C + \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L = 924,16\underline{/-90^\circ} + 519,84\underline{/0^\circ} + 1675,06\underline{/+90^\circ}$
  $\boxed{\mathbf{S}_Z = 913,28\underline{/55,3^\circ} = 519,84 + j750,9 \text{ VA}}$

O mesmo resultado pode ser obtido por $\mathbf{S}_Z = \dfrac{\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{I}}}{2}$. Confira!

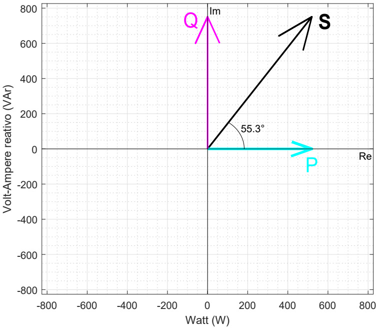
Note que o ângulo da potência complexa é o mesmo ângulo da impedância.

# Exemplo 4 (continuação...)

Triângulo de Impedâncias:




Triângulo de Potências:




$\mathbf{Z} = 45 + j65 = 79,06\angle 55,3^\circ\ \Omega$

$\mathbf{S} = 519,84 + j750,9 = 913,28\angle 55,3^\circ$ VA

$P = 519,84$ W é a potência ativa e $Q = 750,9$ VAr corresponde a uma potência reativa com característica **indutiva**.

# Exemplo 5

## Cálculos de potência e impedância

A primeira figura mostra uma carga de impedância **Z** alimentada por uma fonte de corrente $i_s = 4\cos(5t - 35^\circ)$ A. A fonte fornece à carga uma potência 20 - j20 VA. **(a)** determine a impedância da carga, **Z**; **(b)** Sabendo que a carga é composta por uma associação **em paralelo** de dois elementos (Figura 2 ou Figura 3), determine os valores dos dois componentes.

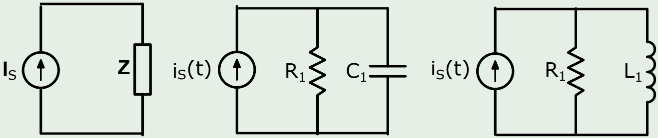



Figura 1 Figura 2 Figura 3

# Exemplo 5 (continuação...)

**Solução:**

- A potência **complexa** fornecida pela fonte e, portanto, absorvida pela carga, é $\mathbf{S} = 20 - j20$ VA.
- Uma vez que a parte imaginária de **S** é negativa, a potência reativa absorvida pela carga tem característica **capacitiva**.
- Consequentemente, a carga é formada por uma associação de um resistor com um capacitor (Figura 2).

**(a)** Cálculo da impedância da carga, $\mathbf{Z} = R + jX$:

$$\mathbf{S} = R \cdot \frac{I_p^2}{2} + j \cdot X \cdot \frac{I_p^2}{2} = 20 + j \cdot (-20)$$

- $R \cdot \frac{I_p^2}{2} = 20 \Rightarrow R \cdot \frac{4^2}{2} = 20 \Rightarrow \boxed{\text{R=2,5 } \Omega}$
- $X \cdot \frac{I_p^2}{2} = -20 \Rightarrow X \cdot \frac{4^2}{2} = -20 \Rightarrow \boxed{\text{X=-2,5 } \Omega}$

Assim, a impedância da carga é $\boxed{\mathbf{Z} = 2,5 - j \cdot 2,5\ \Omega}$

# Exemplo 5 (continuação...)

**Importante**: Não confundir a resistência da impedância $\mathbf{Z}$ ($R = 2,5\Omega$) com o valor do resistor da Figura 2
(neste exemplo, denotado por $R_1$ para facilitar!)

**(b)** Cálculo de $R_1$ e $C_1$:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{R_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{C_1}} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \Rightarrow \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{-j\dfrac{1}{\omega C_1}} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \Rightarrow \qquad \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$\frac{1}{R_1} + j \cdot 5C_1 = \frac{1}{2,5 - j \cdot 2,5} \Rightarrow \qquad \frac{1}{R_1} + j \cdot 5C_1 = 0,2 + j \cdot 0,2$$

- $\frac{1}{R_1} = 0,2 \Rightarrow \boxed{R_1 = 5\Omega}$
- $5C_1 = 0,2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0,04 \text{ F}}$

# Atividades

### Leitura Complementar

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Seções 11.1 a 11.3 e 11.5.

### Atividade 1

Refaça o Exemplo 4 desta Lição calculando as potências complexas em termos das impedâncias e do fasor de corrente. Verifique o resultados.

### Atividade 2

Resolva os Exercícios **24 a 31** do **Caderno de Exercícios**.

### Sugestões de Exercícios Complementares

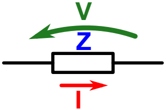
[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Problemas P 11.5-4, P 11.5-7, P 11.5-12.
[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 11, Exercícios 7, 14.

# Lição 7

# Fator de Potência

Potência média absorvida por um elemento do circuito (fonte senoidal):

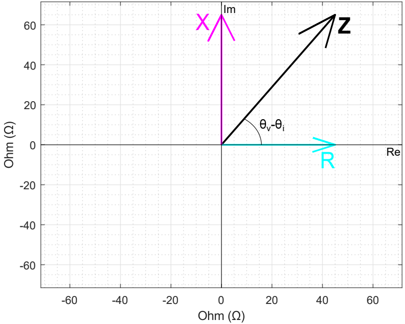
$$P = \frac{V_p \cdot I_p}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)\,[W]$$



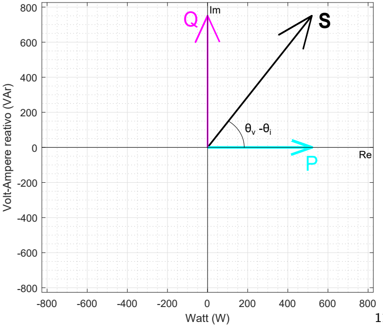

Fator de Potência:

$$f_p = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

Triângulo de Impedâncias:




Triângulo de Potências:



# Fator de Potência

Observações:

- Deve-se lembrar que o ângulo $\theta_v - \theta_i$ corresponde ao ângulo da impedância;
- O ângulo $\theta_v - \theta_i$ é comumente chamado de **ângulo do fator de potência**;
- A equação $f_p = \cos(\theta_v - \theta_i)$ permite avaliar o fator de potência em termos da tensão e da corrente;
- O fator de potência também pode ser calculado por diferentes formas:

**Pelo triângulo de impedâncias:**

$$f_p = \frac{R}{Z}$$

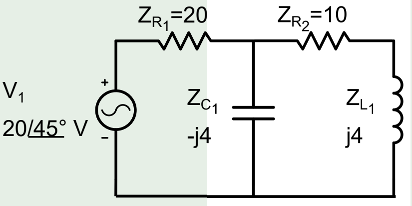
**Pelo triângulo de potências:**

$$f_p = \frac{P}{S}$$

# Exemplo 1

## Fator de potência

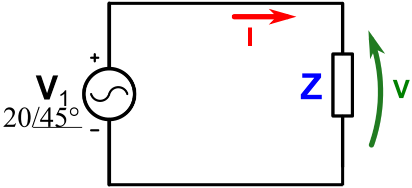
No circuito a seguir, determine o fator de potência da associação vista pela fonte.




**Solução**: Uma vez que as impedâncias de todos os elementos são conhecidas, pode-se calcular a impedância equivalente vista pela fonte.

# Exemplo 1 (continuação...)

Pode-se verificar que o circuito original é equivalente ao circuito a seguir:




onde a impedância equivalente é $\mathbf{Z} = 21,967\angle{-10,49^\circ} = 21,6 - j4\Omega$.
Assim:

- a corrente fornecida pela fonte é

$$\mathbf{I} = \frac{20\angle 45^\circ}{21,967\angle{-10,49^\circ}} = 0,9105\angle 55,49^\circ \text{ A}$$

- A potência complexa fornecida pela fonte é

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}\cdot\bar{\mathbf{I}}}{2} = \frac{20\angle 45^\circ \cdot 0,9105\angle{-55,49^\circ}}{2}$$

$$\mathbf{S} = 9,105\angle{-10,49} = 8,953 - j1,658 \text{ VA}$$

# Exemplo 1 (continuação...)

Assim, o fator de potência da associação pode ser dado por:

- $f_p = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(45 - 55,49) = \cos(-10,49) = 0,983$;
- $f_p = \dfrac{21,6}{21,967} = 0,983$;
- $f_p = \dfrac{8,953}{9,105} = 0,983$

Uma vez que o ângulo do fator de potência é **negativo**, então o fator de potência da associação é $f_p = 0,983$ **adiantado** ou $f_p = 0,983$ **capacitivo**.

> O fator de potência é sempre indicado por um valor numérico (entre 0 e 1) adimensional, acompanhado de um qualificador (atrasado ou adiantado).

# Exemplo 2

## Correção do fator de potência

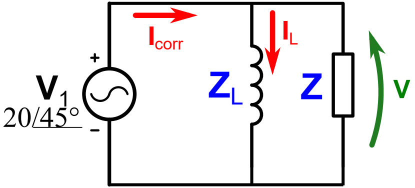
Determine qual a carga que deve ser ligada em paralelo com a impedância equivalente no circuito do Exemplo 1, a fim de corrigir o fator de potência do circuito para 1,0.

**Solução**: A potência complexa absorvida pela associação mostrada no Exemplo 1 é $\mathbf{S} = 8,953 - j1,658$ VA. A potência reativa absorvida tem característica capacitiva.

Assim, deve-se acrescentar um elemento de impedância com característica indutiva, que absorva uma potência complexa $\mathbf{S}_L = 0 + jQ_L = 0 + j1,658$ VA. Portanto, o elemento a ser acrescentado é um indutor.

# Exemplo 2 (continuação...)

O circuito após a correção do fator de potência pode ser representado no domínio da frequência por:




A potência complexa $\mathbf{S}_L$ absorvida pela impedância $\mathbf{Z}_L = jX_L$ é dada por:

$$\mathbf{S}_L = 0 + j \cdot X_L \cdot \frac{I_{L_p}^2}{2}.$$

Por sua vez, a corrente de pico que circula pelo indutor, $I_{L_p}$, é $I_{L_p} = \frac{V_1}{X_L}$.
Assim, tem-se:

$$\mathbf{S}_L = 0 + j \cdot \frac{V_1^2}{2X_L}$$

# Exemplo 2 (continuação...)

Igualando a equação anterior ao valor desejado da potência complexa e substituindo os valores conhecidos:

$$0 + j1,658 = 0 + j \cdot \frac{V_1^2}{2X_L}$$

$$j1,658 = j \cdot \frac{20^2}{2X_L}$$

Assim, a reatância do indutor é

$$\boxed{X_L = \frac{20^2}{2 \cdot 1,658} = 120,627\Omega}$$

**Após a correção**, a potência complexa fornecida pela fonte será $\mathbf{S}_{corr} = 8,953 + j0$ VA, e a nova corrente fornecida pela fonte, $\mathbf{I}_{corr}$, pode ser obtida por

$$\mathbf{S}_{corr} = \frac{\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{I}}_{corr}}{2} \Rightarrow 8,953\underline{/0^\circ} = \frac{20\underline{/45^\circ} \cdot \bar{\mathbf{I}}_{corr}}{2}$$

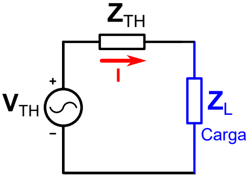
$$\bar{\mathbf{I}}_{corr} = 0,8953\underline{/-45^\circ} \Rightarrow \boxed{\mathbf{I}_{corr} = 0,8953\underline{/+45^\circ}\ \mathrm{A}}$$

# Interpretação dos resultados e observações

- O conceito de fator de potência é importante para a operação de sistemas de potência, em que há transferência de energia de um ponto a outro de um circuito.
- A correção do fator de potência de uma carga ou de um circuito tem o objetivo de **diminuir a potência reativa** fornecida/absorvida, **sem alterar a potência ativa**.
- Observe que a corrente fornecida pela fonte está em fase com a tensão da fonte, no circuito corrigido.
- Observe que a **intensidade da corrente** fornecida pela fonte **no circuito corrigido é menor** do que no circuito original.
- A correção visa aumentar o fator de potência, porém normalmente para um valor próximo e não necessariamente igual à unidade.
- Se a frequência for conhecida, pode-se especificar o valor da indutância necessária.
- Normalmente, é mais comum que um circuito tenha característica indutiva e necessite de uma compensação por meio de um capacitor.

# Teorema da Máxima Transferência de Potência

Circuito representado pelo circuito equivalente de Thevenin:




A **potência média** fornecida pelo circuito à **carga** é **máxima** quando a impedância $\mathbf{Z}_L$ é igual ao complexo conjugado da impedância $\mathbf{Z}_{TH}$:

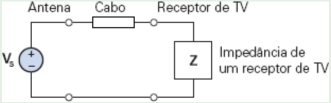
$$\mathbf{Z}_L = \bar{\mathbf{Z}}_{TH}$$

Demonstração: [Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Seção 11.8.

# Exemplo 3

## Máxima transferência de Potência

[Svoboda; Dorf, 2016] Um aparelho de televisão recebe o sinal da antena através de um cabo de impedância $200 + j12\Omega$, em que $v_s = 4\cos(\omega t)$ mV. A frequência da estação que está sendo sintonizada é 52 MHz. Determine a máxima potência que pode ser fornecida ao receptor.




**Solução**: A potência média transferida para o receptor é máxima quando a impedância **Z** é escolhida de tal forma que seja igual ao complexo conjugado da impedância do cabo, ou seja, $\mathbf{Z} = 200 - j12\Omega$.

# Exemplo 3 (continuação...)

A potência média $P$ transferida para o receptor pode ser calculada por: $P = \frac{R \cdot I_p^2}{2}$, onde $R$ é a parte real da impedância do receptor $\mathbf{Z}$, e $I_p$ é o módulo do fasor da corrente que percorre o circuito.

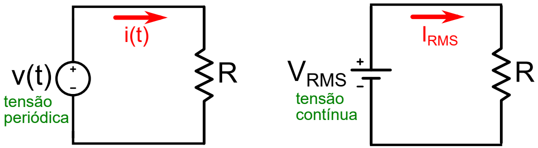
A corrente do circuito é:
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{\mathbf{Z}_{cabo} + \mathbf{Z}} = \frac{0,004\underline{/0^\circ}}{200 + j12 + 200 - j12} = 10\underline{/0^\circ}\ \mu\text{A}$$

Assim, tem-se:
$$P = \frac{200 \cdot (10 \times 10^{-6})^2}{2} = 10 \text{ nW}.$$

# Valor Eficaz ou Valor RMS

O valor eficaz de **qualquer forma de onda periódica** de **tensão ou corrente** é uma medida da capacidade desta tensão ou corrente fornecer potência (ou energia) a um **resistor** de carga.

> O valor eficaz de uma tensão periódica ($V_{RMS}$) ou de uma corrente periódica ($I_{RMS}$) corresponde ao valor da tensão ou corrente **contínua** que fornece a um resistor de carga a mesma potência média fornecida pela forma de onda periódica.



# Valor Eficaz ou Valor RMS

A tensão eficaz de uma forma de onda de tensão $v(t)$ é dada por:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\,dt}$$

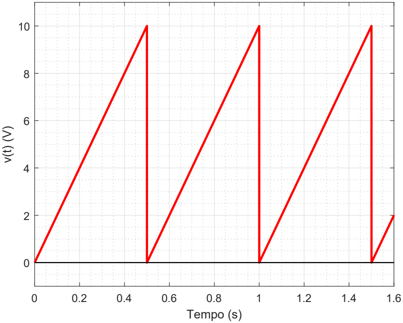
Analogamente, a corrente eficaz de uma forma de onda de corrente $i(t)$ é dada por:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,dt}$$

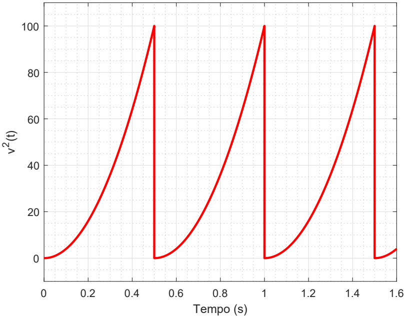
em que $T$ é o período da função.

# Exemplo: Cálculo de valor RMS

$v(t)$**: forma de onda dente de serra**




$v^2(t)$**:**




$$V_{RMS} = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77 \text{ V} \quad \Leftarrow \quad V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{0,5}\int_0^{0,5} v^2(t)\,dt}$$

# Caso particular: senoidal

$$\boxed{v(t) = V_p \cos(\omega t + \theta_v)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{RMS} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}}$$

- Não confundir valor eficaz (um escalar, um número real) com um fasor (número complexo).
- Exemplo: Uma **rede elétrica de tensão 220V** (este é o **valor eficaz**) fornece uma tensão senoidal com **amplitude de pico de aproximadamente 311 V**.
- Muitas vezes, valores de tensão ou corrente são especificados sem explicitar a qual dos valores (de pico ou eficaz) se referem.
- Assim, deve-se estar atento ao **contexto** no qual a informação é dada.
- Em geral, no contexto da transmissão de energia/potência elétrica, as tensões e correntes são especificados em valores eficazes.

# Caso particular: senoidal

- Os cálculos de potência já estudados também podem ser realizados em termos dos valores eficazes.
  **Exemplo:** cálculo de Potência Ativa

$$P = \frac{V_p \cdot I_p}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)\,[W] \qquad \Rightarrow \qquad P = V_{RMS} \cdot I_{RMS} \cdot \cos(\theta_v - \theta_i)\,[W]$$

- Na análise de circuitos, os fasores também podem ser representados em termos dos valores eficazes.
  **Exemplo:**

| **Senoide:** | | **Fasor correspondente:** |
|---|---|---|
| $i(t) = 100\cos(50t + 20^\circ)$ A | $\Rightarrow$ | $\mathbf{I} = 100\underline{/20^\circ}$ A ou $\mathbf{I} = 70,71\underline{/20^\circ}$ A rms |

# Exemplo 4

**Cálculos de corrente e potência utilizando valores eficazes**

Analise o Exemplo 11.6-1 de
[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Seção 11.6.

# Atividades

### Leitura Complementar

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Seção 11.6.

### Atividade 1

Reescreva as equações estudadas para cálculo de potências (ativa, reativa, aparente e complexa) em termos dos valores eficazes de tensão e corrente.

### Atividade 2

Demonstre o cálculo do valor RMS da forma de onda dente de serra e confira o resultado apresentado no exemplo desta lição.

# Atividades

## Atividade 3

Resolva os Exercícios **32 a 39** do **Caderno de Exercícios**.

## Sugestões de Exercícios Complementares

[Svoboda; Dorf, 2016]: Capítulo 11, Problemas P 11.5-12, P 11.5-13, P 11.6-7, .
[Hayt Jr. et al., 2014]: Capítulo 11, Exercícios 33, 37, 45.

# Referências Bibliográficas

# Referências Bibliográficas

William H. Hayt, Jr. et al.
**Análise de Circuitos em Engenharia**. 8.ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.
Disponível na Base de Dados **Minha Biblioteca**.

James A. Svoboda; Richard C. Dorf.
**Introdução aos circuitos elétricos**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
Disponível na Base de Dados **Minha Biblioteca**.

Robert L. Boylestad.
**Introdução à análise de circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.