AT13 - Transformada de Laplace

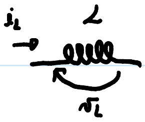
Análise de circuitos
Diagrama de blocos
Realização de sistemas
Resposta em frequência de sistema LCIT

① Análise de circuitos

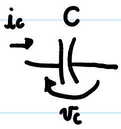
⤳ As equações diferenciais de circuitos podem ser resolvidas pela transformada de Laplace

⤳ É um procedimento mais simples, pois trata os outros elementos como se fosse um resistor.

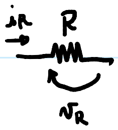
Considerando condições iniciais nulas



$v_L(t) = L\,\dfrac{di_L(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} V_L(s) = \boxed{L\,s}\,I_L(s)$ — Impedância = Reatância indutiva



$i_c(t) = C\,\dfrac{dv_c(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} I_c(s) = C\,s\,V_c(s) \rightsquigarrow V_c(s) = \boxed{\dfrac{1}{Cs}} \cdot I_c(s)$ — Impedância = Reatância cap.



$v_R(t) = \boxed{R}\cdot i_R(t) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} V_R(s) = \boxed{R\cdot}\, I_R(s)$ — Resistência

$V = Z \cdot I$
- Resistor $\Rightarrow Z = R \Rightarrow V_R = R \cdot I_R$
- Indutor $\Rightarrow Z = sL \Rightarrow V_L = sL \cdot I_L$
- Capacitor $\Rightarrow Z = \frac{1}{sC} \Rightarrow V_c = \frac{1}{sC} \cdot I_c$

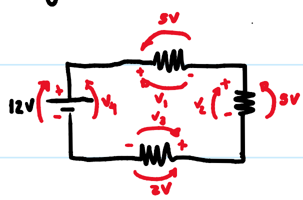
1- No domínio da frequência ("s") as relações de tensão/corrente se tornam algébricas.

2- Indutor e capacitor se comportam como "resistores" Ls e $\frac{1}{Cs}$, respectivamente.

3- A resistência generalizada de um elemento é chamada de impedância.

4- As leis de Kirchhoff permanecem válidas no domínio da frequência.

$$\sum_{j=1}^{K} v_j(t) = 0$$ ⤳ tensão em K elementos de uma malha

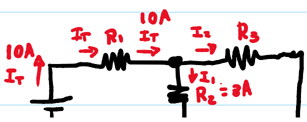


$+12 - 5 - 5 - 2 = 0$

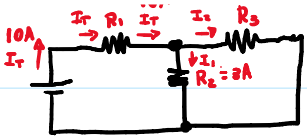
$\xrightarrow{\mathcal{L}\{\}}$ $$\sum_{j=1}^{K} V_j(s) = 0$$ ✓

$$\sum_{j=1}^{m} i_j(t) = 0$$ ⤳ j correntes de um nó

$I_T - I_1 - I_2 = 0$

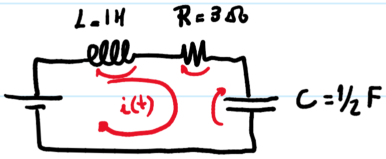


$\xrightarrow{\mathcal{L}\{\}}$ $$\sum_{j=1}^{m} I_j(s) = 0$$



$$\sum_{j=1}^{m} I_j(s) = 0$$

Exemplo 1) Determine a corrente de malha $i(t)$ no circuito, se todas as condições iniciais forem nulas.

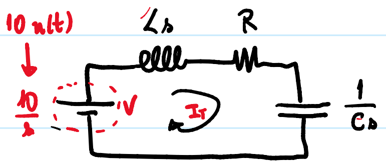


$$v(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

$$v(t) = L\frac{di}{dt} + R\cdot i + \frac{1}{C}\int i\,dt \rightsquigarrow \frac{dv(t)}{dt} = L\frac{d^2 i}{dt} + R\cdot\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i$$

$i(t)$?

$\mathcal{L}\{\}$ $\rightsquigarrow$



$u(t) \Rightarrow \frac{1}{s}$

$V_T = Z_T I_T$

$I_T = \frac{V_T}{Z_T}$

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} \quad \text{(Lei de Ohm)}$$

$V(s) = 10/s$ e $Z(s)$? $\quad Z_T = Z_L + Z_R + Z_C$

$$Z = Ls + R + \frac{1}{sC} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{sC}$$

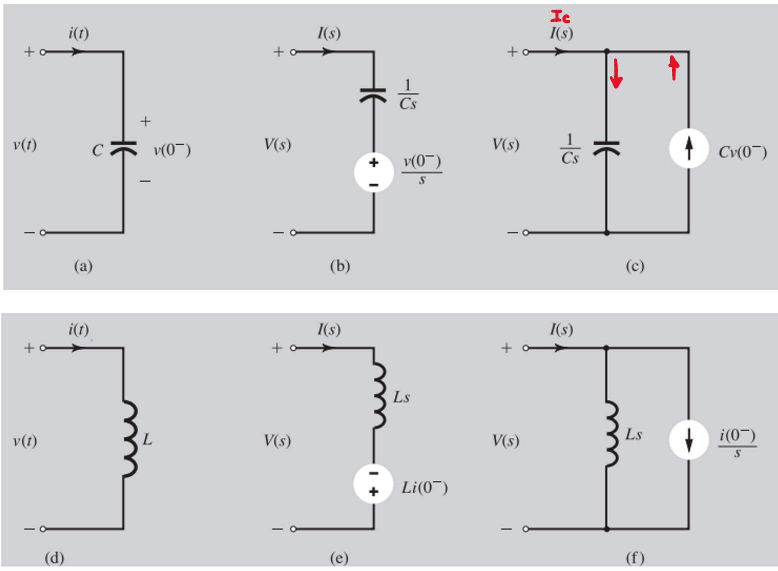
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{\cancel{s}\left(\frac{LCs^2 + RCs + 1}{\cancel{s}C}\right)} = \frac{10}{L\,s^2 + R\,s + 1/C}$$

$$I(s) = \frac{10}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

$$I(s) = \frac{10}{(s+1)} - \frac{10}{(s+2)}$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = 10\,e^{-t} - 10\,e^{-2t}$$

Elementos em condições iniciais não-nulas



$$i_c = C \frac{dV_c}{dt}$$

$\mathcal{L}$

$$I_c(s) = C\left(s\,V_c(s) - V_c(0)\right)$$

$$\therefore \; V_c(s) = \frac{1}{Cs}\,I_c(s) + \frac{1}{s}\,V_c(0)$$

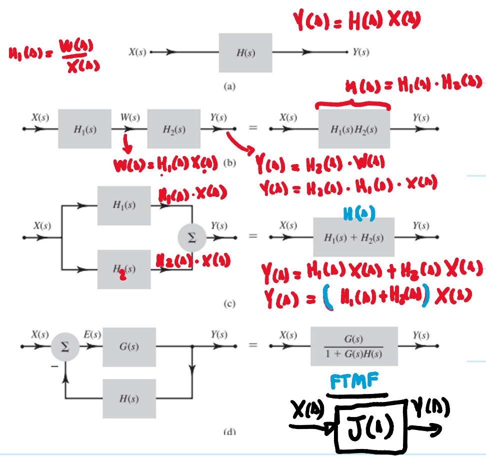
② Diagrama de Blocos

→ Sistemas = $\sum$ (componentes + elementos)

Ex.: diagrama de receptor de rádio ou TV

→ É mais conveniente analisar subsistemas conectados

Conexões elementares



$Y(s) = G(s)\,E(s)$

$E(s) = X(s) - H(s)\,Y(s)$

$Y(s) = G(s)\cdot[X(s) - H(s)\cdot Y(s)]$

$Y(s) = G(s)\,X(s) - G(s)\,H(s)\,Y(s)$

$Y(s) + G(s)\,H(s)\,Y(s) = G(s)\,X(s)$

$Y(s)\,\underbrace{(1 + G(s)\,H(s))} = G(s)\,X(s)$

$$J(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

FTMF

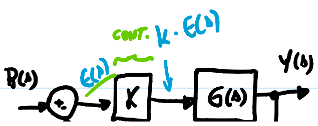
Exercício 1) Considere a função de transferência

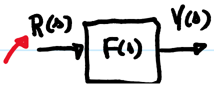
+

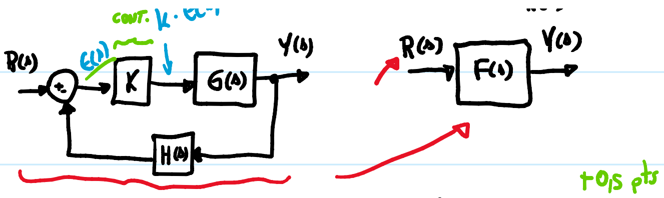
$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+10)}$$

$H(s) = 1$

$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

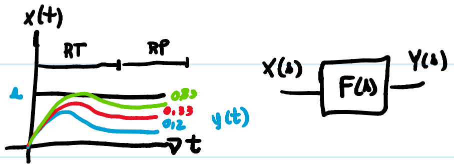






+0,5 pts

Determine a função de transferência de malha fechada $\frac{Y(s)}{R(s)}$ e verifique o valor de regime permanente de y(t) para uma entrada do tipo degrau, considerando $K=5$, $K=10$ e $K=100$. +0,5 pts



$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+12s+20+K}$$

$$y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)\cdot R(s)$$

$$y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{K}{s^2+12s+20+K}\cdot\frac{1}{s}$$

$$K=5 \Rightarrow y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^2+12s+20+K} = \frac{K}{20+K} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$K=10 \Rightarrow y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^2+12s+20+K} = \frac{K}{20+K} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$K=100 \Rightarrow y(t)\Big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^2+12s+20+K} = \frac{K}{20+K} = \frac{100}{120} \cong 0{,}8$$

③ Realização de sistemas

⤳ Método sistemático p/ realização (implementação) de uma função transferência de ordem N.

Uma função de transferência genérica c/ $M=N$ é dada por

$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \cdots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1} s + a_N}$$

- A realização é um problema de síntese ⇒ não há uma forma única de realizar um sistema

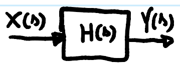
- Deve-se evitar o uso de diferenciadores, por motivos práticos.
  Portanto, para implementações utiliza-se integradores + somadores + multiplicadores

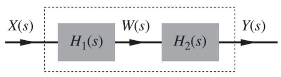
- Deve-se evitar o uso de diferenciadores, por motivos práticos.
Portanto, para implementações utiliza-se integradores + somadores + multiplicadores

① Realização na forma direta I

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \begin{matrix}\div 1/s^3 \\ \div 1/s^3\end{matrix} = \frac{b_0 + b_1\frac{1}{s} + b_2\frac{1}{s^2} + b_3\frac{1}{s^3}}{1 + a_1\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + a_3\frac{1}{s^3}}$$

$$H(s) = \underbrace{\left(b_0 + b_1\frac{1}{s} + b_2\frac{1}{s^2} + b_3\frac{1}{s^3}\right)}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 + a_1\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + a_3\frac{1}{s^3}}\right)}_{H_2(s) \,=\, \frac{1}{X}}$$



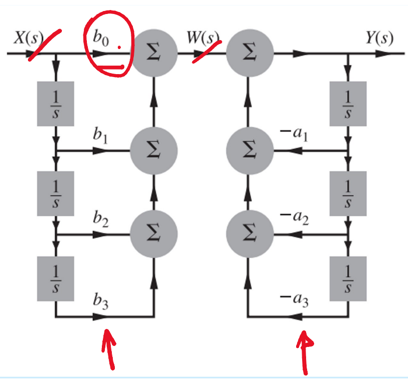


- $H_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} \Rightarrow W(s) = H_1(s)\,X(s) = \left(b_0 + b_1\frac{1}{s} + b_2\frac{1}{s^2} + b_3\frac{1}{s^3}\right)X(s)$

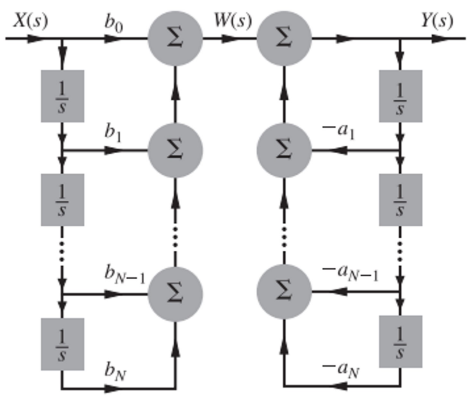
- $H_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \Rightarrow W(s) = \frac{1}{H_2(s)}\cdot Y(s) = \left(1 + a_1\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + a_3\frac{1}{s^3}\right)\cdot Y(s)$

$$W(s) = Y(s) + \left(a_1\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + a_3\frac{1}{s^3}\right)Y(s)$$

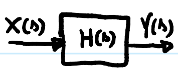
$$\therefore\; Y(s) = W(s) - \left(a_1\frac{1}{s} + a_2\frac{1}{s^2} + a_3\frac{1}{s^3}\right)Y(s)$$

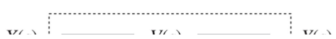


2N

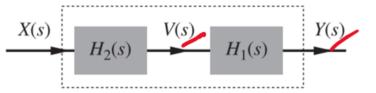


Ⅱ Realização na forma direta II





$X(s) \to \boxed{H(s)} \to Y(s)$

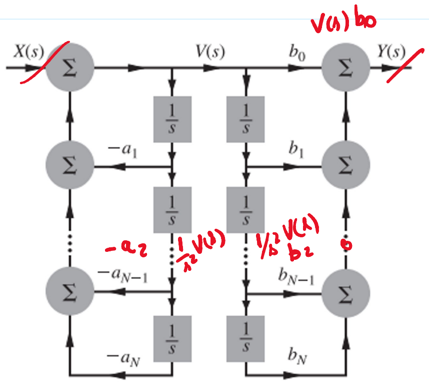


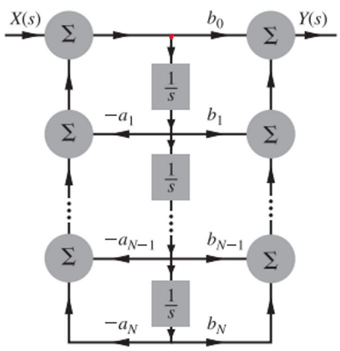
$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = H_2(s)\, H_1(s)$

$$H(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{1 + a_1 \frac{1}{s} + a_2 \frac{1}{s^2} + a_3 \frac{1}{s^3}}\right)}_{H_2(s)} \underbrace{\left(b_0 + b_1 \frac{1}{s} + b_2 \frac{1}{s^2} + b_3 \frac{1}{s^3}\right)}_{H_1(s)}$$

- $H_2(s) = \frac{V(s)}{X(s)} \Rightarrow V(s) = X(s) - \left(a_1 \frac{1}{s} + a_2 \frac{1}{s^2} + a_3 \frac{1}{s^3}\right) V(s)$

- $H_1(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} \Rightarrow Y(s) = H_1(s)\, V(s) \Rightarrow Y(s) = \left(b_0 + b_1 \frac{1}{s} + b_2 \frac{1}{s^2} + b_3 \frac{1}{s^3}\right) V(s)$





N

- Uma eq. dif de ordem N (c/ M=N) requer N integradores.

  ↳ Uma realização é canônica se o número de integradores utilizados na implementação for igual a ordem do sistema.
  FD I não é canônica e FD II é canônica.

- FD I implementa primeiro os zeros seguido pelos pólos
- FD II implementa primeiro os pólos seguidos pelos zeros

⇒ comportamentos ≠ em termos de sensibilidade e variação paramétrica

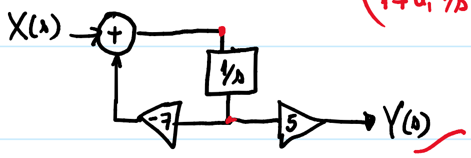
Exercício 2) Determine a realização na forma direta canônica de:

a) $H(s) = \frac{5}{s+7}$ b) $H(s) = \frac{s}{s+7}$ c) $H(s) = \frac{s+5}{s+7}$ d) $\frac{4s+28}{s^2+6s+5}$

a) $H(s) = \boxed{\frac{1}{s+a_1}} \cdot \boxed{b_0 s + b_1}$, $a_1 = 7$, $b_0 = 0$, $b_1 = 5$

$$\left(\frac{1}{1+a_1 \frac{1}{s}}\right)\left(b_0 + b_1 \frac{1}{s}\right)$$

$$H(s) = Y(s)/X(s) \Rightarrow Y(s) = \left(\frac{1}{1+a_1 \frac{1}{s}}\right)\left(b_0 + b_1 \frac{1}{s}\right) X(s)$$



III Realizações em cascata (Série) e paralelo

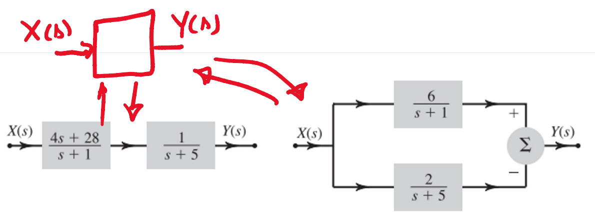
$$H(s) = \frac{4s+28}{s^2+6s+5} = \frac{4s+28}{(s+1)\cdot(s+5)}$$

$$\hookrightarrow H(s) = \underbrace{\left(\frac{4s+28}{s+1}\right)}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{s+5}\right)}_{H_2(s)}$$ Série

ou ainda

$H_1(s) \pm H_2(s)$

$$\hookrightarrow H(s) = \frac{6}{s+1} - \frac{2}{s+5}$$ Paralelo



IV Realização transposta

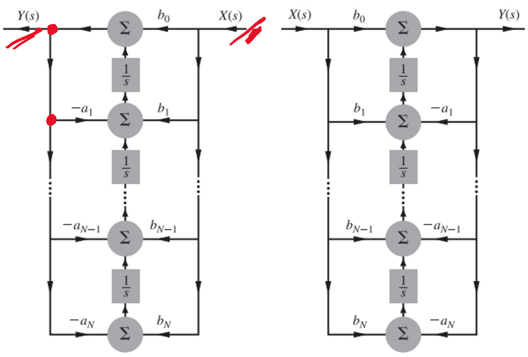
→ Realização equivalente ⇒ mesma função de transferência

→ Realização transposta é equivalente

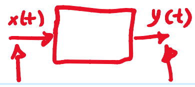
1- Inverta todas as direções das setas sem alterar os valores dos multiplicadores

2- Substitua os nós de derivação por somadores e vice-versa.

3- Substitua a entrada $X(s)$ pela saída $Y(s)$ e vice-versa.



(4) Resposta em frequência de um sistema LCIT



- Filtragem é uma das áreas de processamento de sinais
- A característica de filtragem de um sistema é indicada pela resposta do sistema a senóides de várias frequências (0 a ∞).

$\Downarrow$

RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA

* Relembrando:

Qual é a resposta de um sistema para uma entrada

$x(t) = e^{st} \rightsquigarrow y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * e^{st}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$y(t) = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{H(s)}$$

$$e^{st} \Rightarrow H(s) e^{st} \qquad y(t) = H(s) \cdot e^{st}$$

Fazendo $s = j\omega$ nesta relação tem-se

$$e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

Sabendo que $\cos(\omega t) = Re\{e^{j\omega t}\}$ então

$$\cos(\omega t) \Rightarrow Re\{H(j\omega) e^{j\omega t}\} \qquad (1)$$

Expressando $H(j\omega)$ na forma polar

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \qquad (2)$$

Então (1) torna-se:

$$\cos(\omega t) \Rightarrow Re\{|H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\cos(\omega t) \Rightarrow Re\{|H(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}\}$$

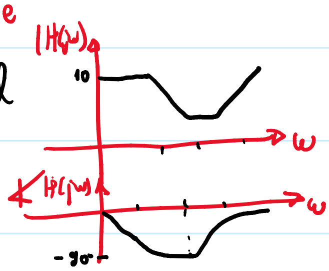
$$\cos(\omega t) \Rightarrow |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

$\cos(\omega t) \Rightarrow \text{Re}\left[|H(j\omega)| e \ldots \right]$

$$\cos(\omega t) \Rightarrow |H(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle H(j\omega))$$

Em outras palavras, se $x(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) = \cos(\omega t)$ a saída do sistema $y(t)$ é

$$y(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle H(j\omega))$$, válido p/ BIBO estável

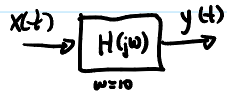


Exemplo 1) $|H(j\omega)|_{\omega = 10\,rad/s} = 3$ e $\measuredangle H(j\omega)|_{\omega=10} = -30°$

p/ $x(t) = \cos(10t) \rightsquigarrow y(t) = 3\cos(10t - 30°)$

$x(t) = 5\cos(10t + 50°) \rightsquigarrow y(t) = 15\cos(10t + 20°)$

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1}\Bigg|_{\omega=10}$$

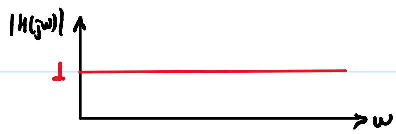


$\hookrightarrow |H(j\omega)| \measuredangle H(j\omega)$

- $|H(j\omega)|$ é o ganho de amplitude do sistema = resposta de magnitude
- $\measuredangle H(j\omega)$ é a resposta de fase

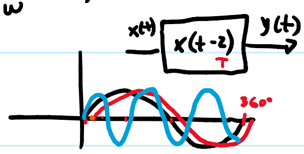
Exemplo) Determine a resposta em frequência p/

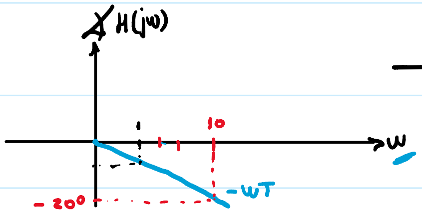
a) Atrasador ideal $\quad H(s) = e^{-sT} = e^{-j\omega T} = |1| e^{-j\omega T}$



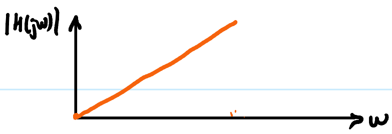
$|H(j\omega)| = 1$

$\measuredangle H(j\omega) = -\omega T$

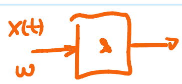


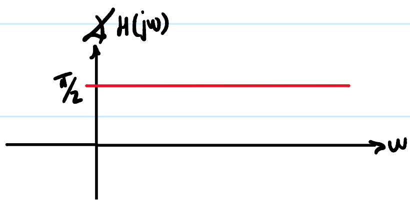


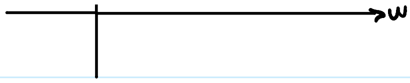
b) Diferenciador ideal $\quad H(s) = s \Rightarrow H(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\pi/2}$



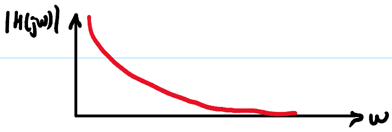
$|H(j\omega)| = \omega$







c) Integrador ideal $\quad H(s) = 1/s = \frac{1}{jw} = \frac{-j}{w} = \frac{1}{w} e^{-j\pi/2}$



$|H(jw)| = 1/w$