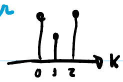
AT10 - Transf. de Fourier

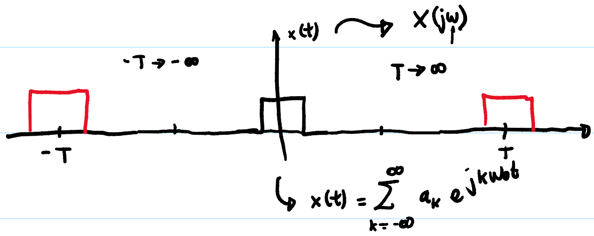
- Sinais periódicos
- Resposta de sistemas LIT

} Comb. linear de exp. complexas ⇓ Séries de Fourier

$x(t) \rightsquigarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ ⟶ componentes espectral.



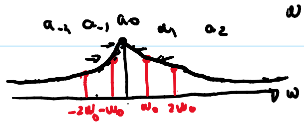
Sinais não-periódicos? ⇒ Transformada de Fourier



$\hookrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$a_0 = 1/2 \quad a_1 = a_{-1} = 1/4 \quad a_2 = a_{-2} = 1/8$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$



- Qual a diferença? ⇝ Série de Fourier: $\sum_k e^{jk\omega_0 t}$ (harmônicas) $k \in \mathbb{Z}$

⇝ Transf. de Fourier: $k\omega_0 \to 0$ (infinitesimal// próximas)

$\int e^{j\omega t}\, dt$

- Ideia? → Um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico c/ um período infinito.

$T\uparrow, \ \omega_0\downarrow, \ \underline{k\omega_0}$ ficam mais próximos

→ Se $T \to \infty$, $\omega_0 \to 0$, $k\omega_0$ se tornam um conjunto de valores contínuos

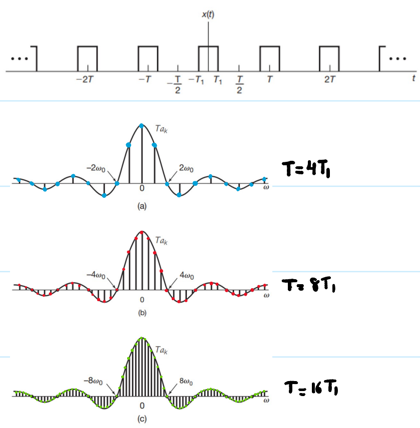


Figura 4.2 Os coeficientes da série de Fourier e sua envoltória para a onda quadrada periódica na Figura 4.1, para diferentes valores de T (com T_1 fixo): (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

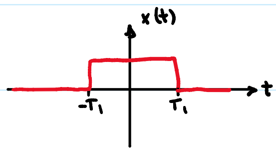
SF

$a_k = \dfrac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow T a_k = \dfrac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega}\Big|_{\omega = k\omega_0}$

$T \to \infty$?

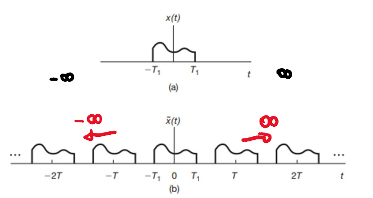
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



∴ espaçamento entre os coeficientes espectrais Ta_k (amostras da envoltória) fica menor, tornando-se valores contínuos, quando $T \to \infty$

💡 Um sinal aperiódico ⇝ como um sinal periódico $f(x)$, $\lim_{T \to \infty} f(x)$

Exemplo 1)



(a) Sinal aperiódico $x(t)$; (b) sinal periódico $\tilde{x}(t)$, construído para ser igual a $x(t)$ em um período.

Se $T \to \infty \Rightarrow x(t) = \tilde{x}(t)$

Qual o efeito na representação por série de Fourier?

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (1)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \,, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

Para $|t| < T/2 \Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t)$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$x(t) = 0 \,, \; |t| > T/2$

$$\underline{a_k} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Definindo a envoltória $Ta_k = X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad (3)$$

ou ainda

$$\underline{a_k} = \frac{1}{T} X(j\overbrace{k\omega_0}^{\omega}) \qquad (4)$$

Considerando (4) em (1)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\, \omega_0$$

$$\underline{\tilde{x}(t)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\underline{k}=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\, \underline{\omega_0}$$

Quando $T \to \infty$, $\underline{\tilde{x}(t) = x(t)}$ e $\omega_0 \to 0$, $X(jk\omega_0)\underline{e^{jk\omega_0 t}} \to X(j\omega)\, e^{j\omega t}$

$$\underline{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (5)$$

→ $X(j\omega)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

→ eq. análise
→ espectro de $x(t)$

→ A transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

→ eq. síntese

↳ comb. linear de sinais senoidais de dif. freq., cujos coeficientes de ponderação são $\frac{X(j\omega)}{2\pi}\, d\omega$

⇓ SF

a_k

* Convergência da transformada de Fourier (Condições de Dirichlet)

* Convergência da transformada de Fourier (Condições de Dirichlet)

I - x(t) deve ser absolutamente integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

II - x(t) deve ter número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito

III - x(t) deve ter um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito. A descontinuidade deve ser finita.

Exemplo 2) Considere o sinal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a>0$$

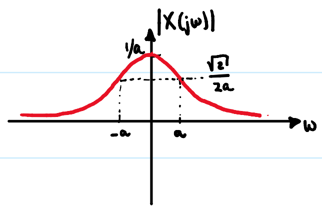
Solução:

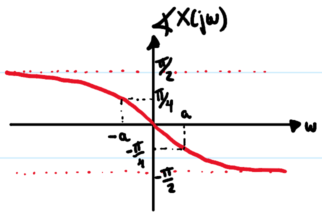
$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$X(j\omega) = -\frac{1}{(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

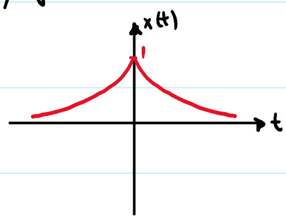
$$X(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)}, \quad a>0$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \sphericalangle X(j\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$





Exemplo 3) Seja $x(t) = e^{-a|t|}, \quad a>0$



Solução:

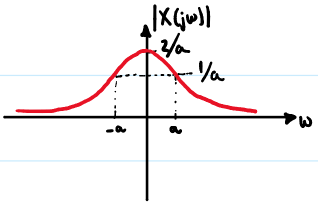
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \in \mathbb{R}$$



Exemplo 4) Determine a transformada de Fourier do impulso unitário

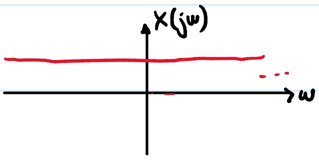
$$x(t) = \delta(t)$$

Solução:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

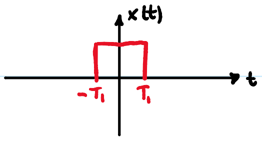
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \underbrace{e^{-j\omega t}}_{t=0}\, dt$$

$$X(j\omega) = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$



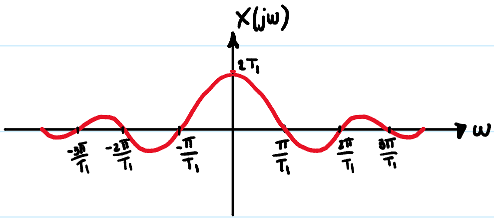
Exemplo 5) Considere o sinal pulso retangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



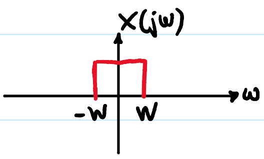
Solução:

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = 2\,\frac{\operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$$



Exemplo 6) Considere o sinal $x(t)$ cuja transformada de Fourier é:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

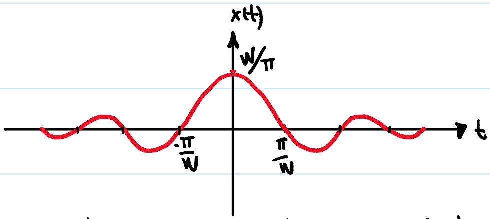


Determine $x(t)$.

$-W \mid W$

Determine $x(t)$.

Solução: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{\text{sen}\, Wt}{\pi t}$



Comparando os gráficos de $x(t)$ e $X(j\omega)$ c/ os do Exemplo 5) $\Rightarrow$ DUALIDADE

DOMÍNIO TEMPO t		DOMÍNIO FREQUÊNCIA ω
PULSO	$\leftrightarrow$	$\frac{\text{sen}(a\omega)}{b\omega}$
$\frac{\text{sen}(\alpha t)}{\beta t}$	$\leftrightarrow$	pulso

$$\text{sinc}\ \theta = \frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}$$

- $\frac{2\,\text{sen}(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1\, \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$
- $\frac{\text{sen}(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi}\, \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$

$$\frac{2 \cdot T_1\, \text{sen}(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

* Transformada de Fourier p/ sinais periódicos

Seja

$$X(j\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$$

$\mathcal{F}^{-1}\{\}$ $\hookrightarrow$ $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, \underbrace{\delta(\omega-\omega_0)}_{\omega=\omega_0}\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Generalizando, se $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$\hookrightarrow$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$ $\leftarrow$ Série de Fourier

Conclusão: A transformada de Fourier de um sinal periódico c/ coeficientes da série de Fourier a_K pode ser interpretada como um trem de impulsos ocorrendo nas frequências harmônicas e cujo impulso na k-ésima frequência harmônica $K\omega_0$ é $2\pi a_K$

Exemplo 7)

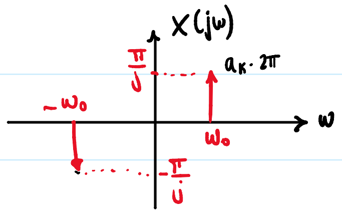
a) Seja $x(t) = \text{sen}\, \omega_0 t$, cujos coeficientes da série de Fourier são:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2j} \quad \text{e} \quad a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$a_K = 0, \quad |k| \neq 1$$

A transformada de Fourier é então:

$$a_K = \frac{X(j\omega)}{2\pi}$$



b) Seja $x(t) = \cos \omega_0 t$, cujos coeficientes da série de Fourier são:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_K = 0, \quad |k| \neq 1$$

A transformada de Fourier é então: