- As respostas $|H(j\omega)|$ e $\angle H(j\omega)$ é facilitada c/ escalas logarítmicas

$\Downarrow$

DIAGRAMAS DE BODE

↳ comportamento assintótico da resposta de amplitude e fase

- Considere $H(s) = \dfrac{K(s+a_1)(s+a_2)}{s(s+b_1)(s^2+b_2s+b_3)}$ → zeros $-a_1$ $-a_2$

polos $0, -b_1, P_1$ e P_2 ↳ raízes complexas conjugadas

$$H(s) = \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{s}{a_1}+1\right)\left(\frac{s}{a_2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{b_1}+1\right)\left(\frac{s^2}{b_3}+\frac{b_2}{b_3}s+1\right)}$$

$s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left(\frac{j\omega}{a_1}+1\right)\left(\frac{j\omega}{a_2}+1\right)}{j\omega\left(\frac{j\omega}{b_1}+1\right)\left(\frac{(j\omega)^2}{b_3}+\frac{b_2}{b_3}j\omega+1\right)}$$

A resposta em amplitude $|H(j\omega)|$ e de fase $\angle H(j\omega)$ pode ser dada como:

$$|H(j\omega)| = \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\left|1+\frac{j\omega}{a_2}\right|}{|j\omega|\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right|\left|1+j\frac{b_2}{b_3}\omega+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|}$$

$$\angle H(j\omega) = \angle\left(1+\frac{j\omega}{a_1}\right)+\angle\left(1+\frac{j\omega}{a_2}\right) - \angle j\omega - \angle\left(1+\frac{j\omega}{b_1}\right) - \angle\left(1+j\frac{b_2}{b_3}\omega+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right)$$

↳ termo $j\omega$

↳ termo de 1ª ordem $\left(1+\frac{j\omega}{a_1}\right)$

↳ termo de 2ª ordem $\left(1+j\frac{b_2}{b_3}\omega+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right)$

→ Vantagens do log

↳ Multiplicação e divisão ⇒ SOMA e Subtração

∴ ao invés de traçar $|H(j\omega)|$ ⇒ $\log|H(j\omega)|$

→ Lei de Weber-Fechner (1834) ⇒ "Os sentidos humanos geralmente respondem de forma logarítmica"

→ Unidade logarítmica ⇒ dB

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\underbrace{|H(j\omega)|}_{100} \qquad \angle H(j\omega)$$

Diagrama de Bode

$$|H(j\omega)| = \frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3} \frac{\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\left|1+\frac{j\omega}{a_2}\right|}{|j\omega|\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right|\left|1+j\frac{b_2}{b_3}\omega+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|}$$

Diagrama de Bode

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3}\right| + 20\log\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right| + 20\log\left|1+\frac{j\omega}{a_2}\right| - 20\log|j\omega|$$
$$- 20\log\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right| - 20\log\left|1+j\frac{b_2}{b_3}\omega+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|$$

① Constantes

↳ Amplitude logarítmica $20\log\left|\frac{K a_1 a_2}{b_1 b_3}\right|$, $20\log|K|$

↳ Fase $K>0 \rightsquigarrow 0°$

$K<0 \rightsquigarrow -180°$

$H(j\omega) = s = j\omega \Rightarrow |H(j\omega)| = 20\log|j\omega|$

→ Fase $K>0 \rightsquigarrow 0°$
$K<0 \rightsquigarrow -180°$

② Polo/Zero na origem

$H(j\omega) = s = j\omega \Rightarrow |H(j\omega)| = 20\log|j\omega|$
$= 20\log(\omega)$

→ Amplitude logarítmica $-20\log|j\omega| = -20\underbrace{\log \omega}$

Se $x = \log\omega$

$\therefore -20\log\omega = -\underline{20}\,x$

Razão de $10\times \Rightarrow$ década   Razão de $2\times \Rightarrow$ oitava

polo $\Rightarrow -20\log|j\omega| = -20\log\omega \Rightarrow \underline{-20\ dB/\text{década}}$

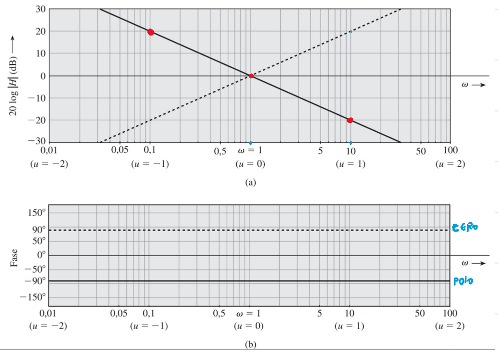
ZERO $\Rightarrow +20\ dB/\text{década}$

→ Fase   POLO $\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle j\omega = -90°$

ZERO $\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle j\omega = +90°$

Polo $\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{j\omega} \Rightarrow 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right|$
$= 20\log|j\omega|^{-1}$
$= -20\log\omega$

Zero ?



③ Polo/Zero de 1ª ordem

→ Amplitude logarítmica

Um polo em $-a \Rightarrow \frac{1}{(s+a)} \Rightarrow \frac{1/a}{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)}$, $H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)}$ dB

$= -20\log\left|\frac{j\omega}{a}+1\right|$ dB

A análise é feita de maneira assintótica ($\omega \ll a$ e $\omega \gg a$)

- $\omega \ll a$

$$-20\log\left|\frac{j\omega}{a}+1\right| = 0\ dB$$

- $\omega \gg a$

$$-20\log\left|\frac{j\omega}{a}+1\right| \approx -20\log(\omega/a)$$

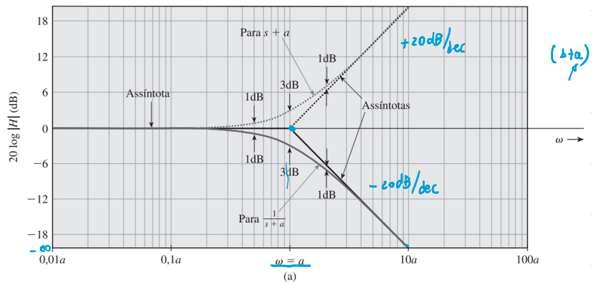
$$= \underline{-20\log\omega} + 20\log\underline{a}$$ $(-20\ dB/dec)$ ou $(-6\ dB/\text{oitava})$

Assíntota p/ $\omega = a \Rightarrow 0\ dB$

Amplitude logarítmica exata p/ $\omega = a \Rightarrow -20\log\left|\frac{j\omega}{a}+1\right|_{\omega=a} = -20\log\left(\frac{\omega^2}{a^2}+1\right)^{1/2}\Big|_{\omega=a}$

$= -20\log\sqrt{2}$

$\approx -3\ dB$ (Freq. de canto, Freq. de corte)



→ Fase

Para um polo em $-a$, $\frac{1}{(s+a)} \Rightarrow \frac{1}{a\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)}$

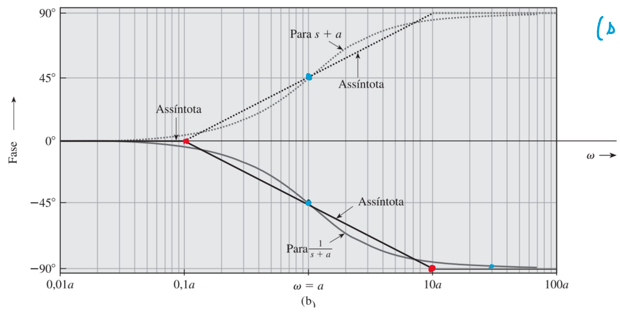
$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)$$

$$= -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- $\omega \ll a$ $\quad -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \approx 0°$

- $\omega \gg a$ $\quad -tg^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \approx -90°$



4) Pólos/Zeros de 2º ordem

$$\frac{1}{s^2+b_2 s+b_3} = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow \frac{1}{(j\omega)^2+j2\xi\omega_n\omega+\omega_n^2}$$

RAÍZES COMPLEXA
$\omega_n \to$ freq. nat. do sistema
$\xi \to$ coef. amortecimento

$$= \frac{1/\omega_n^2}{1+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}+\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

→ Amplitude logarítmica

$$H(j\omega)_{dB} = -20\log\left|1+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right|$$

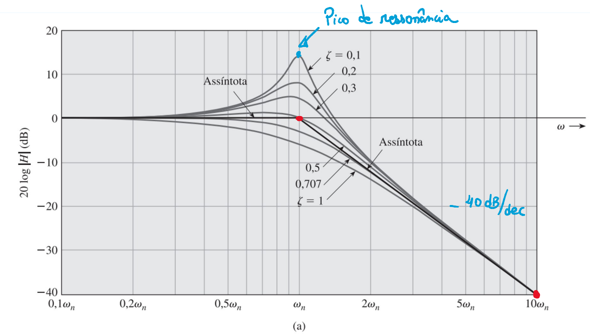
- $\omega \ll \omega_n$

$$H(j\omega)_{dB} = -20\log 1 \approx 0\ dB$$

- $\omega \gg \omega_n$

$$H(j\omega)_{dB} \cong -20\log\left|\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right| = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$= -40\log\omega + 40\log\omega_n \quad (-40\text{ dB/dec}) \text{ ou } (-12\text{ dB/oitava})$$



(a)

→ Fase

$$\measuredangle H(j\omega) = -\measuredangle\left(1 + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$$

$$= -\measuredangle\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)$$

$$= -tg^{-1}\left(\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

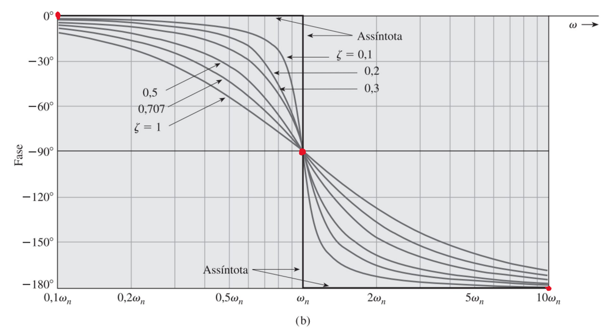
- $\omega \ll \omega_n$

$$\measuredangle H(j\omega) \approx -tg^{-1}(0) \approx 0^\circ$$

- $\omega \gg \omega_n$

$$\measuredangle H(j\omega) \approx -180^\circ$$

Semelhante ao caso de amplitude, tem-se uma família de curvas dependendo do valor de ζ.



(b)

Exercício) Obter o diagrama de Bode de

$$H(s) = \frac{20\,s\,(s+100)}{(s+2)(s+10)}$$

Solução)

$$H(s) = \frac{20\cdot 100}{2\cdot 10}\cdot\frac{\overset{+20\text{dB/dec}}{s}\cdot\overset{+20\text{dB/dec}}{\left(\frac{s}{100}+1\right)}}{\underset{-20\text{dB/dec}}{\left(\frac{s}{2}+1\right)}\underset{-20\text{dB/dec}}{\left(\frac{s}{10}+1\right)}}$$

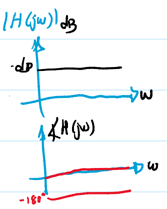
$$H(s) = 100\,\frac{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

$$H(j\omega) = 100\,\frac{j\omega\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

- Constante $20\log 100 = 20\cdot 2 = 40\text{ dB}$
- Zeros em $\omega = 0$ e $\omega = 100$

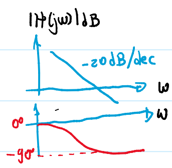
Resumo

* Ganho K ⇒ $\begin{cases} \text{Magnitude} & 20\log|K| \\ \text{Fase} & \measuredangle K = \begin{cases} 0^\circ, & K>0 \\ -180^\circ, & K<0 \end{cases} \end{cases}$



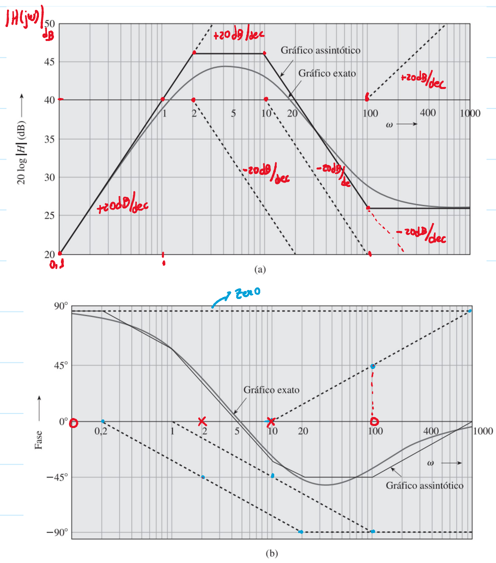
* 1ª ordem na origem

↳ $\frac{1}{s}$ (Polo) ⇒ $\begin{cases} \text{Magnitude} & -20\text{dB/dec} \\ \text{Fase} & 0^\circ \text{ a } -90^\circ \end{cases}$



↳ s (Zero) ⇒ $\begin{cases} \text{Magnitude} & +20\text{dB/dec} \\ \text{Fase} & 0^\circ \text{ a } +90^\circ \end{cases}$

• Polos em $w = 2$ e $w = 10$



*** 1ª ordem deslocado**

↳ $\dfrac{1}{s+a}$ (polo em $s=-a$, $w=a$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Magnitude} & -20\,dB/dec, \; w > a \\ \text{Fase} & \underset{w \ll a}{0°}, \; \underset{w=a}{-45°}, \; \underset{w \gg a}{-90°} \end{cases}$

↳ $(s+a)$ (zero em $s=-a$, $w=a$) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Magnitude} & +20\,dB/dec, \; w > a \\ \text{Fase} & \underset{w \ll a}{0°}, \; \underset{w=a}{+45°}, \; \underset{w \gg a}{+90°} \end{cases}$

*** 2ª ordem**

↳ $\dfrac{1}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$ (pólos complexos) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Magnitude} & -40\,dB/dec, \; w > w_n \\ \text{Fase} & \underset{w \ll w_n}{0°}, \; \underset{w=w_n}{-90°}, \; \underset{w \gg w_n}{-180°} \end{cases}$

↳ $s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2$ (zero complexos) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Magnitude} & +40\,dB/dec, \; w > w_n \\ \text{Fase} & \underset{w \ll w_n}{0°}, \; \underset{w=w_n}{+90°}, \; \underset{w \gg w_n}{+180°} \end{cases}$