★ Tópicos de estudo

- **Números complexos : história, representação, álgebra, relação de Euler, Fasor**
- **Sinais periódicos**
- **Sinais: exponenciais, senoides variando exponencialmente**
- **Regra de Cramer**
- **Expansão em frações parciais**
- **Miscelâneas**

? O que são números complexos?
? Por que existem? Para que servem?

História

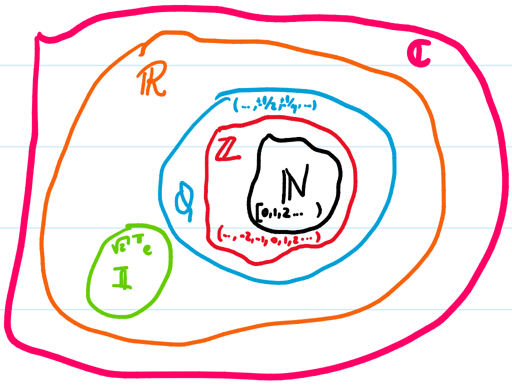
- Sistema numérico de tempos remotos (qtd. pessoas, flechas, animais) => números **naturais**
- Havia necessidade de frações? Egípcios e babilônicos passaram a adotar números fracionários (agricultura) - números **racionais**
- Mas Pitágoras impôs pena de morte para um segredo - números **irracionais**
- E os números **negativos**? É algo recente, embora hindus medievais (Bhaskar, 1114-1185) tinham conhecimento sobre tais.

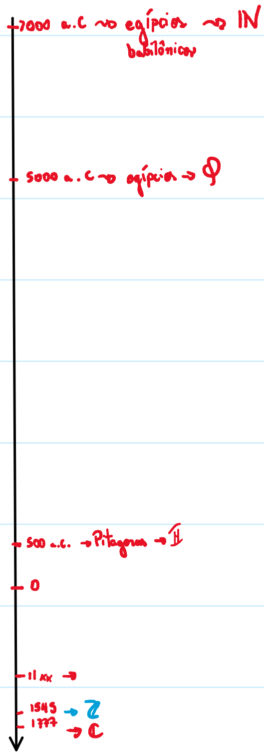
- Muito tempo depois, na Europa surge sistema bancário em Florença e Veneza, no final do Renascimento, séc. XV. Considerando -2 no livro contábil como empréstimo para alguém.

- Além disto, a adoção de números negativos permitiu resolução de equações como x+5= 0, que não havia solução até então.

- E $x^2+1=0$? Novamente houve a necessidade de definir um número novo.
- 1545 - Gerolamo Cardano de Milão, $x^3+6x-20=0 \Rightarrow x=2$, mas e para $x^3-15x-4=0? \Longrightarrow x=(2+j)(2-j)=4$
- Durante o tempo de Descartes e Newton havia aceitação de uma nova representação numérica para solução deste problema, mas como ficção algébrica (números imaginários).
- **1777** - Leonard Euler foi quem introduziu a notação i para os números imaginários para representar $\sqrt{-1}=\pm j=\pm i$

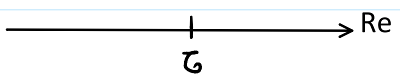
Surge então os números complexos





$\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+$

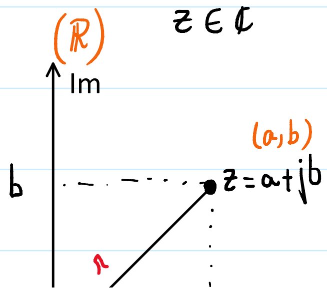
Representação dos números reais (unidimensional)

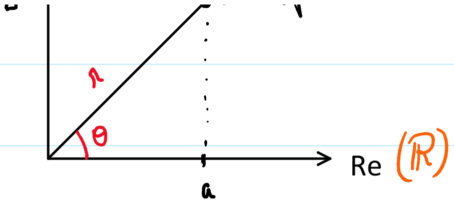


⇝ $6 \in \mathbb{R}$

Representação dos números complexos

$z \in \mathbb{C}$





Coord. cartesiana e polar

$$z = a + jb = re^{j\theta}$$

$$Re\{z\} = a \ , \quad Im\{z\} = b$$

$$|z| = r \qquad \measuredangle z = \theta$$

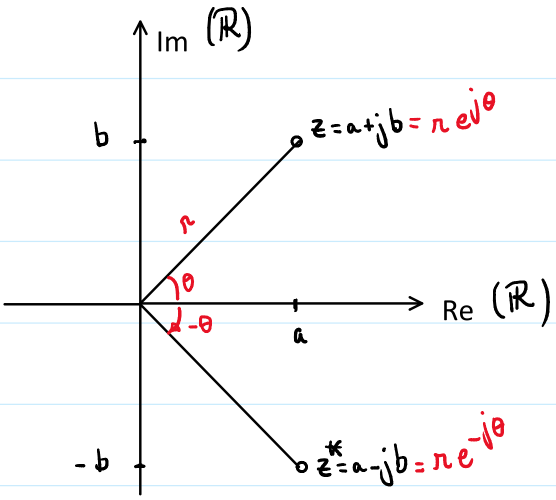
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = r\cos\theta \qquad b = r \operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore \ z = a + jb = r\cos\theta + j\, r \operatorname{sen}\theta =$$

$$z = r\underbrace{(\cos\theta + j\operatorname{sen}\theta)} = r\underbrace{e^{j\theta}}$$

Conjugado (coord. cartesiana e polar)



Álgebra com números complexos

Coordenadas cartesianas

$$z_1 = a_1 + jb_1 \quad e \quad z_2 = a_2 + jb_2$$

a) $z_1 \pm z_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2)$
$= (a_1 + a_2) \pm j(b_1 + b_2)$

b) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2)$
$= a_1 a_2 + j a_1 b_2 + j a_2 b_1 + \overset{= -1}{j^2} b_1 b_2$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \dfrac{a_2 - jb_2 \to z^*}{a_2 - jb_2 \to z^*}$

$= \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

$= \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \dfrac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

Coord. polares

$z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j\theta_1} \cdot e^{-j\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

c) $z_1 + z_2 = r_1(\cos\theta_1 + j \operatorname{sen}\theta_1) + r_2(\cos\theta_1 + j \operatorname{sen}\theta_2)$
$= r_1 \cos\theta_1 + j r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \cos\theta_1 + j r_2 \operatorname{sen}\theta_2$
$= (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2) + j(r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2)$

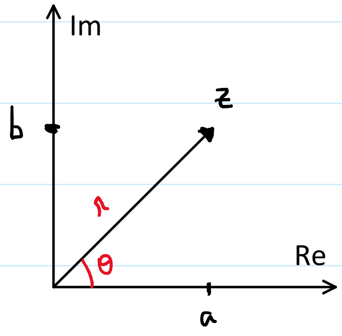
Operações com conjugado

a) $z_1 + z_1^* = a_1 + \cancel{jb_1} + a_1 - \cancel{jb_1} = 2a_1 = 2\Re\{z_1\}$
b) $z_1 \cdot z_1^* = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_1 e^{-j\theta_1} = r_1^2 e^{j0} = r_1^2 = |z_1|^2$

Relações de Euler

$z \in \mathbb{C}$

Cartesiana $z = a + jb$



Polar $z = r e^{j\theta}$

Trigonométrica

$$r \cos\theta = a$$

$$r \,\text{sen}\,\theta = b$$

$$z = r\cos\theta + j\, r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r e^{j\theta} = r(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta)$$

$$\therefore e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta$$

Algumas identidades úteis

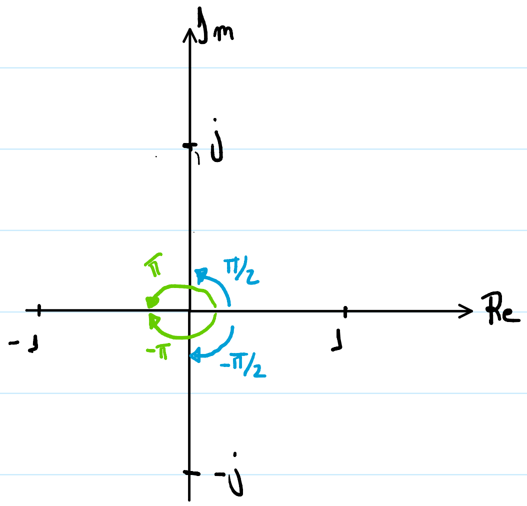
$$e^{\pm j n\pi} = -1 \quad , n \in \mathbb{Z} \text{ ímpar}$$

$$e^{\pm j 2n\pi} = 1 \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$e^{j\pi/2} = j$$

$$e^{-j\pi/2} = -j$$

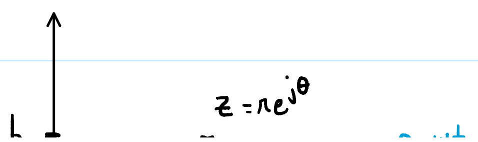
$$e^{\pm j n\pi/2} = \begin{cases} \pm j, & n = 1, 5, 9, \dots \\ \mp j, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

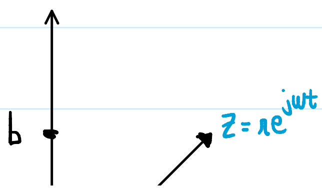


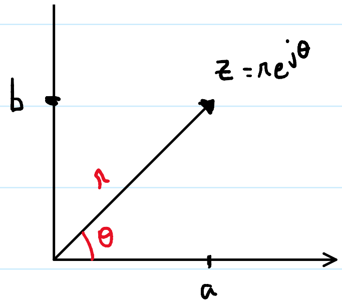
$$\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha + j\omega t)} = \lim_{t\to\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha < 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha > 0 \end{cases}$$

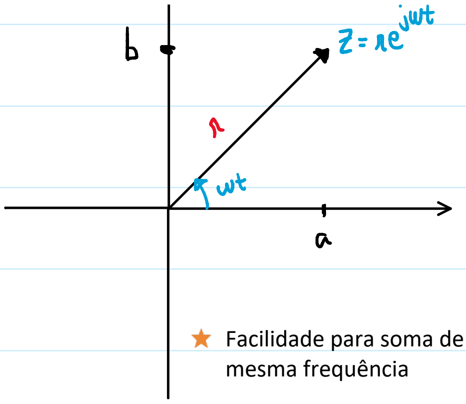
Vetor variante no tempo => Fasor



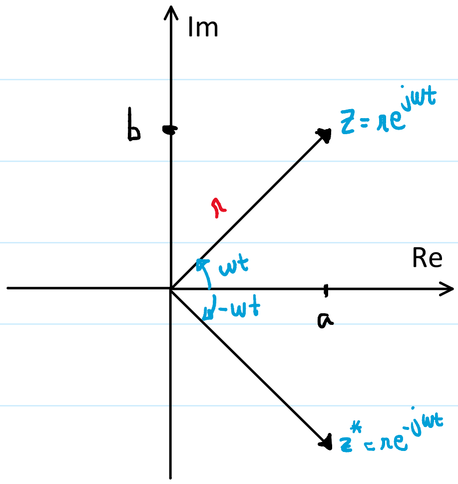




$\theta = \omega t$



★ Facilidade para soma de senoides de mesma frequência



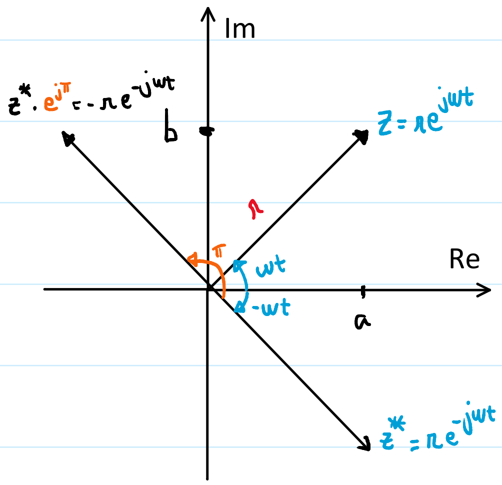
$$z + z^* = re^{j\omega t} + re^{-j\omega t} = r(\cos\omega t + j\,\mathrm{sen}\,\omega t) + r\underbrace{(\cos\omega t - j\,\mathrm{sen}\,\omega t)}_{}$$

$\cos(-\omega t) + j\,\mathrm{sen}(-\omega t)$

$$re^{j\omega t} + re^{-j\omega} = 2r\cos\omega t$$

$$\therefore\ r\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) = 2r\cos\omega t$$

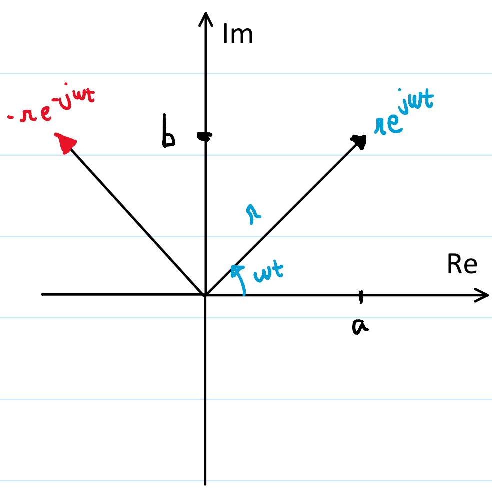
$$\Rightarrow \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$



$$z^* \cdot e^{j\pi} = re^{-j\omega t} \cdot e^{j\pi}$$

$$= re^{-j\omega t} \cdot (\cancelto{-1}{\cos\pi} + j\,\cancelto{0}{\mathrm{sen}\,\pi})$$

$$= -re^{-j\omega t}$$



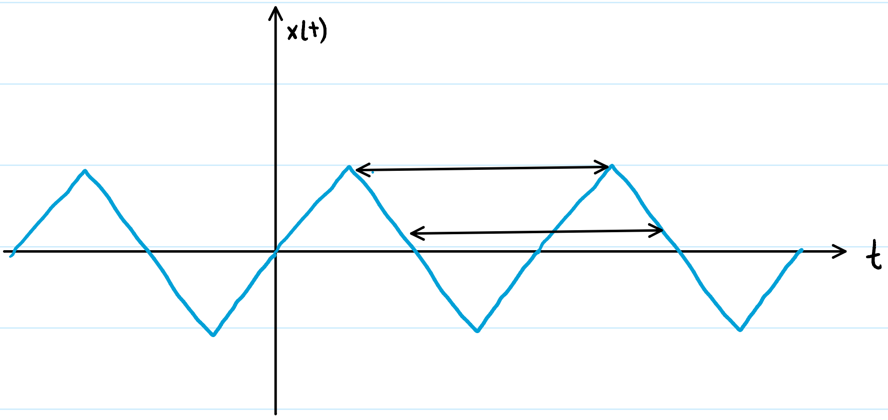
$$re^{j\omega t} + \left(-re^{-j\omega t}\right) = r\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) = r\left(\cancel{\cos\omega t} + j\,\mathrm{sen}\,\omega t - \left(\cancel{\cos\omega t} - j\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)\right)$$

$$\cancel{r}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) = \cancel{r}\,2j\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

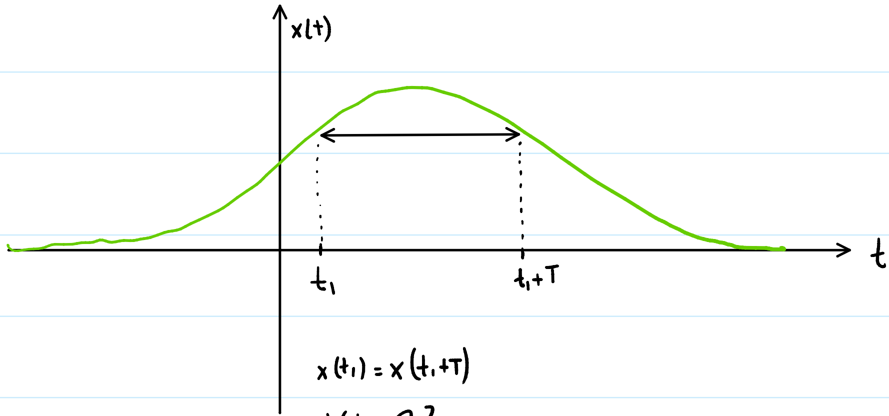
$$\therefore\ \mathrm{sen}\,\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Fasores em tempo contínuo

Periodicidade $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$ $x(t)$ é periódico c/ tempo T



Contra exemplo

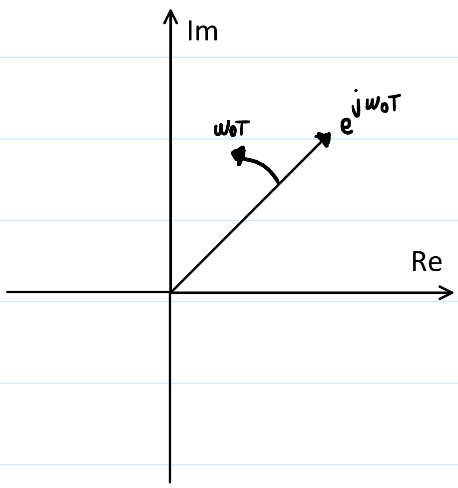


$x(t_1) = x(t_1+T)$

$\forall t \in \mathbb{R}$?

- Um sinal periódico com período T é periódico com período $2T, 3T, 4T \ldots nT$
- A periodicidade pode ser verificada pela translação do sinal

- Existe periodicidade em fasores? $x(t) = e^{j\omega_0 T}$



$x(t) = x(t+T)$?

$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$

$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{1}$

$e^{j\omega_0 T} = 1$?

$\underbrace{\cos \omega_0 T}_{1} + j \underbrace{\operatorname{sen} \omega_0 T}_{0} = 1$

$\rightarrow \omega_0 T = k\, 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ Se $\omega_0 \neq 0, T \neq 0 \xrightarrow{k=1} T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ $e^{-j\omega_0}$

$\rightarrow$ Se $\omega_0 \neq 0, T \neq 0 \xrightarrow{k=1} \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}} \leftarrow e^{-j\omega_0}$

PERÍODO FUNDAMENTAL

$e^{j\omega_0 T}$ é periódico c/ período $T = kT_0$, $k \in \mathbb{Z}^*$

$$x(t) = x(t + nT_0), n \in Z^*, \forall t \in \mathbb{R}$$

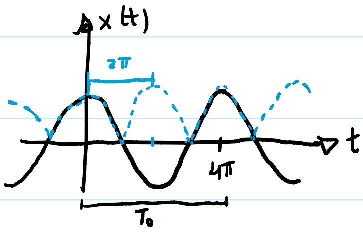
Exemplo: Considere $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$, $|x(t)|$ é periódico? Qual o período fundamental?

1ª

$$x(t) = e^{j2,5t}\left(e^{-j0,5t} + e^{j0,5t}\right)$$

$$= \underbrace{e^{j2,5t}}_{=1}\left(2\cos 0,5t\right)$$

$$|x(t)| = 2\,|\cos 0,5t| \rightsquigarrow \omega_0 = 0,5 \Rightarrow T_0 = 4\pi$$



Soma de sinais periódicos

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = x_2(t + T_2)$$
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad x(t) = x(t + T_0)\,?$$
$$\forall t \in \mathbb{R}\,?$$
$$T_0\,?$$

Para ser periódica $x(t)$ depende da relação de T_0 c/ T_1 e T_2.

$\hookrightarrow$ Se $\begin{cases} T_0 = k_1 T_1, & k_1 \in \mathbb{Z}^* \\ T_0 = k_2 T_2, & k_2 \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$

Então T_0 é um período de $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

$$x_1(t) = x_1(t + T_0) \quad \text{e} \quad x_2(t) = x_2(t + T_0)$$

$$\therefore\ \underline{x(t)} = x_1(t) + x_2(t) = x_1(t + T_0) + x_2(t + T_0) = \underline{x(t + T_0)}$$

★ O valor mínimo de T_0, que é um inteiro múltiplo de T_1e T_2, é conhecido como mínimo múltiplo comum (MMC) de T_1e T_2.

- Se $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ (razão de inteiros) então $x(t)$ é periódica.
- Se $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{I}$ (irracionais) então $x(t)$ é aperiódica.

★ Se o período fundamental da soma é o MMC dos períodos fundamentais das duas funções somadas, então a frequência fundamental da soma é o MDC entre as frequências fundamentais da soma.

Exemplo: Considere $g(t) = 10sen(12\pi t) + 4\cos(18\pi t)$ determine o período fundamental de $g(t)$.

$12\pi t \Rightarrow w_1 = 12\pi \rightarrow T_1 = 1/6$ ou $f_1 = 6$ Hz

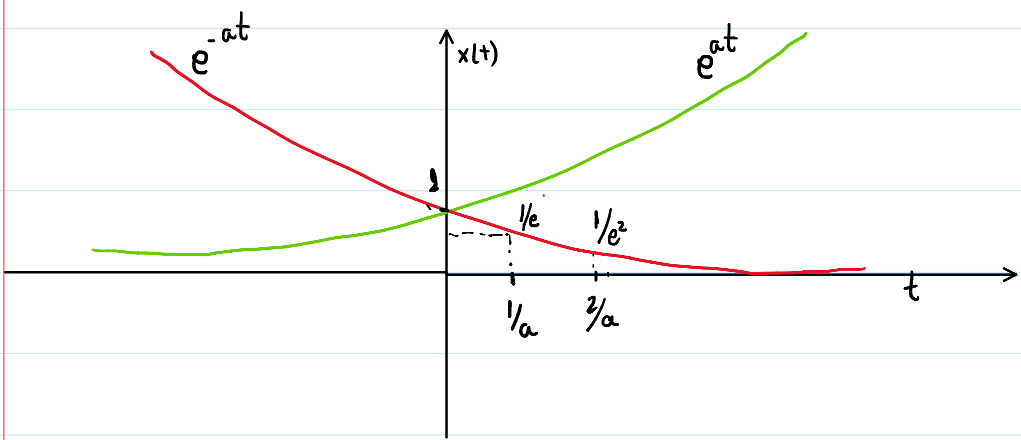
$18\pi t \Rightarrow w_2 = 18\pi \rightarrow T_2 = 1/9$ ou $f_2 = 9$ Hz

f / MDC	6	9	
	2	3	3
	2	1	3
	1	1	2

$MDC(6,9) = 3 \Rightarrow f_0 = 3 \Rightarrow T_0 = 1/3$

★ Rascunho de sinais/ funções

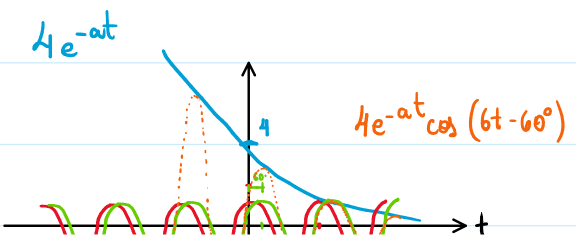
- Exponencial monotônica
- Senoide variando exponencialmente

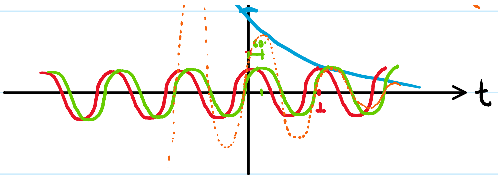


CONSTANTE DE TEMPO τ

$t = 1/a \Rightarrow e^{-a\cdot(1/a)} = e^{-1} \cong 0,37$

b) $x(t) = 4e^{-at}\cos(6t - 60°)$





$\cos 6t \Rightarrow \omega = 6 \Rightarrow T = \pi/3 \approx 1s$

$\cos(6t - 60°) \Rightarrow \frac{60°}{360°} \cdot 1s = 1/6 \, s$

Resolução de sistemas lineares

Regra de Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A\,x = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 4 \neq 0$ existe solução não trivial

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{-8}{4} = -2$$

Matriz inversa

$$A\,x = b$$

$$\cancel{A^{-1} A}\, x = A^{-1} b$$

$$x = A^{-1} b$$

$$x = \frac{adj(A)}{det(A)} \cdot b \quad , \quad adj(A) = cof(A)^T$$

$$= \left\{(-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right\}^T$$

Exemplo anterior

$$adj(A) = adj\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & -1/4 & 5/4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & -1/4 & 5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Expansão em frações parciais

$$F(x) = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Se $m \geq n \Rightarrow F(x)$ é imprópria

Se $m < n \Rightarrow F(x)$ é própria

Exemplo

1) $$F(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 + 9x^2 + 11x + 2 & x^2 + 4x + 3 \\ \cline{3-3}
- & 2x^3 + 8x^2 + 6x & 2x + 1 \\ \cline{2-2}
 & x^2 + 5x + 2 & \\
- & x^2 + 4x + 3 & \\ \cline{2-2}
 & x - 1 &
\end{array}$$

$$\therefore F(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3} = 2x + 1 + \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} \, ,$$

$$\therefore \; F(x) = \frac{2x^3 + 9x^2 + 11x + 2}{x^2 + 4x + 3} = \underbrace{2x + 1}_{\text{polinômio em } x} + \underbrace{\frac{x - 1}{x^2 + 4x + 3}}_{\text{função própria}}$$

Método de eliminação de frações

Método de Heaviside ou método dos resíduos