AT2 - Sinais - P1

sexta-feira, 3 de fevereiro de 2023 10:21

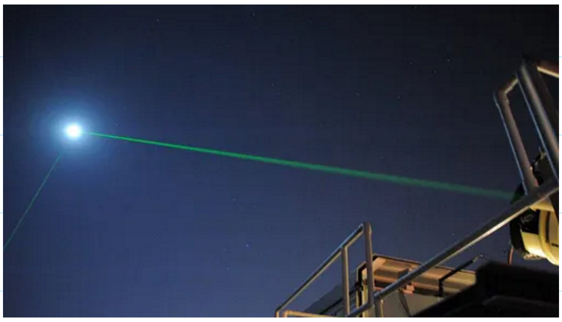
- **O que é sinal?**

LATHI (2007): É um conjunto de dados que contém informação sobre algum fenômeno ou sobre algum objeto em estudo. Esse fenômeno pode ser real ou abstrato.

Oppenheim, Willsky e Nawab (2010): sinal normalmente é descrito por uma função matemática de uma ou mais variáveis independentes.

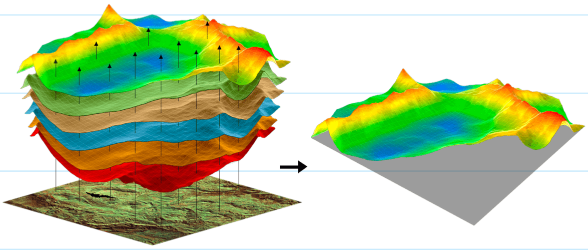
Um tipo bem comum de sinal é aquele cuja variável independente é o **tempo.**

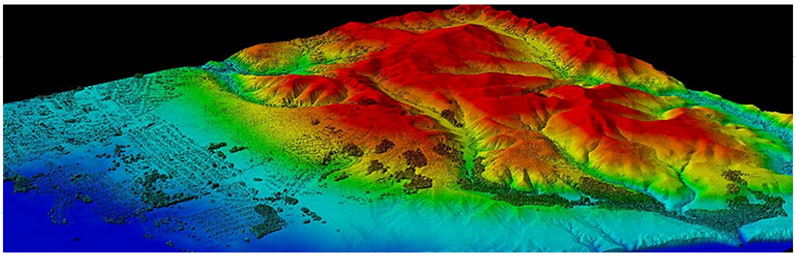
Esses sinais em grande parte modelam fenômenos físicos como temperatura, tensão elétrica, deslocamento e velocidade de partículas, vazão de fluídos, ondas eletromagnéticas etc



Mas podem ser sinais cuja variável independente seja o **espaço.**

Exemplos: a densidade de carga elétrica distribuída sobre um corpo, análise espacial de bacias hidrográficas, densidade de vegetação, grau de umidade e temperatura do solo, detecção de desmatamento e previsão de incêndios, derramamentos de óleo no oceano,





Obs.: Neste curso iremos tratar apenas de sinais cuja variável independente é o **tempo**.

O que é um sistema?

Um sistema processa os sinais, realizando alguma modificação ou extração de informação.

Ex.: Operador de artilharia antiáerea pode querer saber a posição futura de um alvo hostil que sendo seguido por seu radar. Com o sinal do radar sabe-se a posição e velocidade passadas do alvo (sinal de entrada). Através de um processamento do sinal de entrada (radar), ele pode estimar a posição futura do alvo.

Tamanho de um sinal (Amplitude, duração de tempo)

- Energia

$$\mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

- $x(t) \to 0 \Big|_{|t|\to\infty} \Rightarrow \mathcal{E}_x \neq \infty$

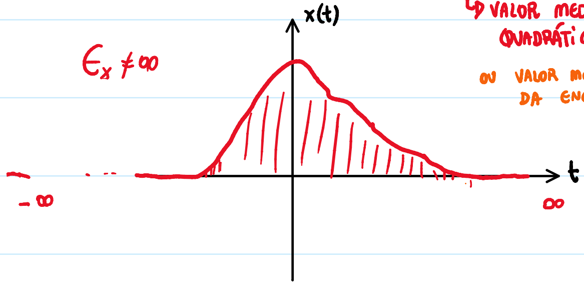
- Potência

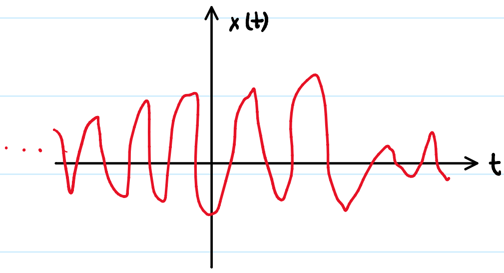
$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt \quad \text{ou} \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\,dt$$

↳ VALOR MÉDIO QUADRÁTICO

OU VALOR MÉDIO DA ENERGIA

$E_x \neq \infty$





Obs.: → Energia do sinal ≠ Energia real

→ $\sqrt{P_x} = P_{RMS}$ → Raiz do valor médio quadrático

→ Energia e potência de sinais são indicadores p/ análise

Ex: $\underline{SNR} = \frac{P_x}{P_n}$

SNR ↑ → P_n ↓ → qualidade boa

SNR ↓ → P_n ↑ → qualidade ruim

→ Sinais do tipo <u>energia</u> caracterizam eventos transitórios

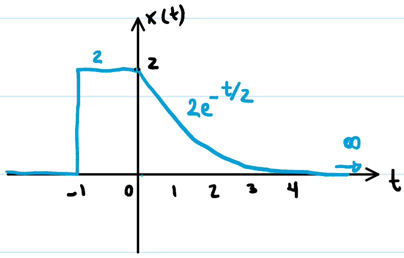
→ Geralmente, a média de uma entidade existe ao longo de um um grande intervalo de tempo ($t\to\infty$) se a entidade possuir uma regularidade estatística ou periódica.

→ Sinais periódicos se enquadram como tipo potência

→ Se $x(t)$ é periódica, $|x(t)|^2$ também é periódica

Exemplo 1) Calcule as medidas adequadas dos sinais

a)



$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-1}^{0} 2^2\,dt + \int_{0}^{\infty} (2e^{-t/2})^2\,dt$$

↳ $2e^{-\frac{t}{2}} \cdot 2e^{-\frac{t}{2}} = 4e^{-\frac{2t}{2}} = 4e^{-t}$

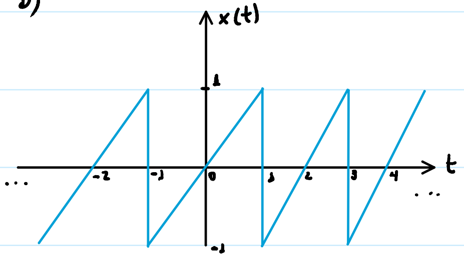
$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-1}^{0} 2^2\,dt + \int_0^{\infty} \left(2e^{-t/2}\right)^2 dt$$

$$\hookrightarrow 2e^{-\frac{t}{2}} \cdot 2e^{-\frac{t}{2}} = 4e^{-\frac{2t}{2}} = 4e^{-t}$$

$$= \int_{-1}^{0} 2^2\,dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t}\,dt \sim \frac{4e^{-t}}{-1}$$

$$= 4t\Big|_{-1}^{0} - 4e^{-t}\Big|_0^{\infty} = +4 - (0-4) = 8$$

b)



$$P_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \qquad \mathcal{E}_x \to \infty$$

$$T=2 \Rightarrow P_x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\,dt$$

$$P_x = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = 1/3$$

$$P_{x_{RMS}} = \sqrt{P_x} = 1/\sqrt{3}$$

Exemplo 2) Determine a potência e o valor RMS de

a) $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta) \rightsquigarrow P_x = \frac{C^2}{2}$

b) $x(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) \cdot C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$

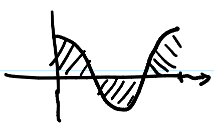
c) $x(t) = De^{j\omega_0 t}$

a) Sinal periódico c/ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ⇝ a medida adequada é P_x e $\mathcal{E}_x \to \infty$

$$P_x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)\,dt$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\therefore \cos^2(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_0 t + 2\theta)$$



$$P_x = \lim_{t\to\infty} \frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} 1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\,dt$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} dt + \cancel{\lim_{t\to\infty} \frac{C^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\,dt}^{\,0}$$

$$= \frac{C^2}{2T}\left(T/2 + T/2\right)$$

$$= \frac{C^2}{2\cancel{T}}(\cancel{T})$$

$P_x = \frac{C^2}{2}$ $\qquad P_{x_{RMS}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$ ~ 127 V_{RMS}

b) $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cdot C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$

$$P_x = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt$$

$x^2(t)$? $\quad x^2(t) = C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1) + C_2^2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$
$\qquad + 2 C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)$

$$P_x = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1)\, dt}_{\frac{C_1^2}{2}} +$$
$$\underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_2^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_2)\, dt}_{\frac{C_2^2}{2}} +$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2 C_1 C_2 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2)\, dt$$

$\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

$\cos(\omega_1 t + \theta_1) \cos(\omega_2 t + \theta_2) = \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)]$
$\qquad + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]$

$$P_x = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_1)\, dt}_{\frac{C_1^2}{2}} +$$
$$\underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C_2^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_2)\, dt}_{\frac{C_2^2}{2}} +$$
$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)]\, dt$$
$$+ \lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)]\, dt$$

Se $\omega_1 \neq \omega_2$, a integral de ambos será nula!

Se $\omega_1 = \omega_2$, $\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_1 t + (\theta_1 + \theta_2))\, dt}_{\to 0}$ e $\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\theta_1 - \theta_2)\, dt}_{cte}$

considerando $\omega_1 = \omega_2$

$\therefore \quad P_x = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2}$ (ORTOGONALIDADE)

$$P_{x_{RMS}} = \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{2}}$$

Podemos generalizar $\quad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$, $\omega_n \neq 0$ e distintos

$$P_x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

ou ainda se:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \ \omega_n \neq 0 \text{ e dist.}$$

$$P_x = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2$$

c) $x(t) = D e^{j\omega_0 t} = D \cos(\omega_0 t) + j D \sin(\omega_0 t)$

c) $x(t) = De^{j\omega_0 t} = D\cos(\omega_0 t) + j\,D\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |De^{j\omega_0 t}|^2\,dt$$

$$|e^{j\omega_0 t}| = 1 \Rightarrow |e^{j\omega_0 t}|^2 = 1$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} 1/T \int_{-T/2}^{T/2} |D|^2\,dt$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\cancel{T}} |D|^2 \cdot \cancel{T}$$

$P_x = |D|^2$ // $\qquad P_{x\,RMS} = |D|$ //

EXEMPLO 3) Determine o tamanho e o tipo de sinal

$x(t) = e^{-2t}\,\underline{1(t)}$ ou $e^{-2t}\,\underline{u(t)}$

$E_x < \infty$ e $P_x = 0$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$$

$$E_x = \int_0^{\infty} \left(e^{-2t}\,1(t)\right)^2 dt$$

$$E_x = \int_0^{\infty} e^{-4t}\,dt = \left.\frac{e^{-4t}}{-4}\right|_0^{\infty}$$

$E_x = \frac{1}{4}$ //

Exercício) Avalie o tamanho e o tipo de sinal

a) $x(t) = \cos(t)$

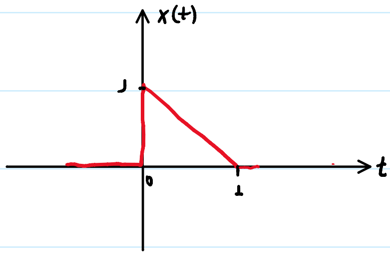
b) $x(t) = 1 + \cos(t)$

1.2) Algumas operações úteis com sinais

→ Transformação de sinais
- → Amplitude
  - → Amplificar, atenuar
  - → Deslocar, inverter
- → Tempo
  - → Deslocamento
  - → Reversão (Espelho), Escalonamento

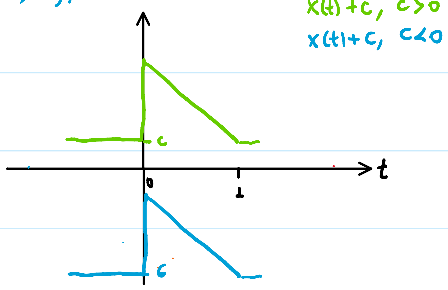
→ Transformação de sinais
- → Amplitude → Deslocar, inverter
- → Tempo → Deslocamento
  - → Reversão (Espelho), Escalonamento
- → Combinação (Amplitude e Tempo)

• Operações na amplitude



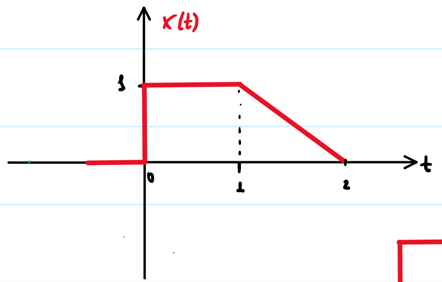
1)

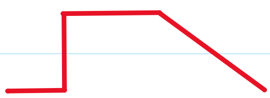
2) Offset

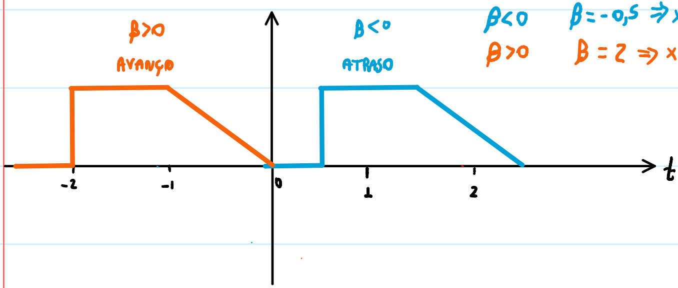


• Operações no tempo → Transformações no argumento $x(t) \rightarrow x(\alpha t+\beta)$

1) Deslocamento temporal $\alpha=1$, $\beta\neq 0$







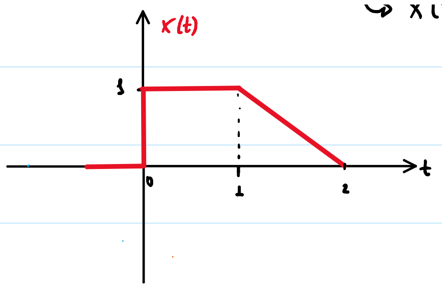
$\beta<0$ $\beta=-0{,}5 \Rightarrow x(t-0{,}5)$

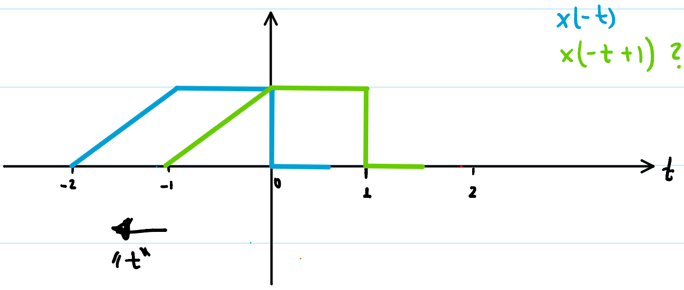
$\beta>0$ $\beta=2 \Rightarrow x(t+2)$

2) Reflexão no tempo $\alpha=-1$, $\beta=0$

↳ $x(-t)$

$\rightsquigarrow x(-t)$





Ao refletir o tempo muda-se o sentido dos deslocamentos temporais

se $\alpha = -1 \Rightarrow \beta > 0 \rightsquigarrow$ deslocamento à direita

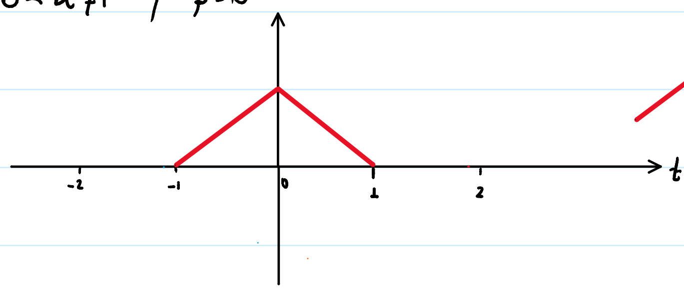
$\beta < 0 \rightsquigarrow$ deslocamento à esquerda

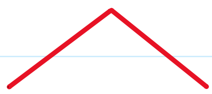
$\alpha = 1 \Rightarrow \beta > 0 \rightsquigarrow$ deslocamento à esq.

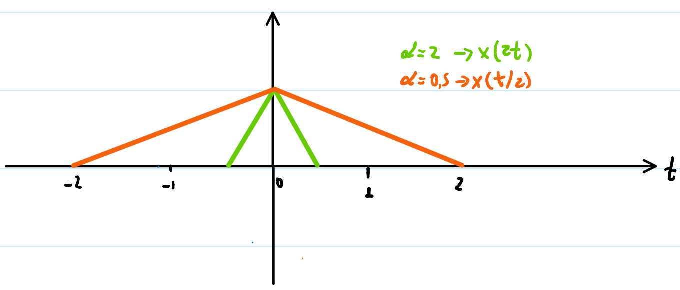
$\beta < 0 \rightsquigarrow$ " à direita

3º) Escalonamento / Mudança de escala temporal

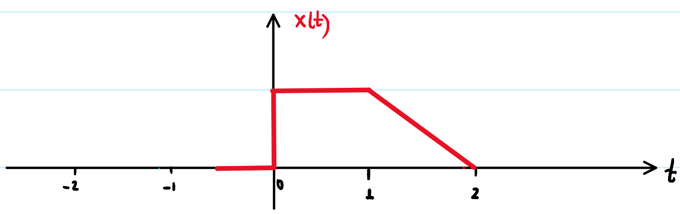
$0 < \alpha \neq 1 \quad , \quad \beta = 0$

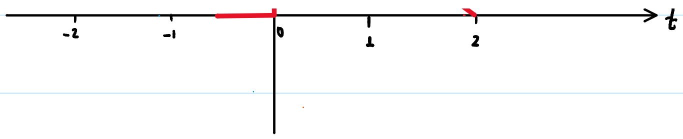


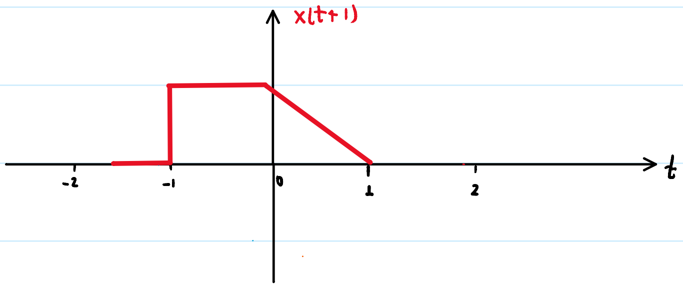


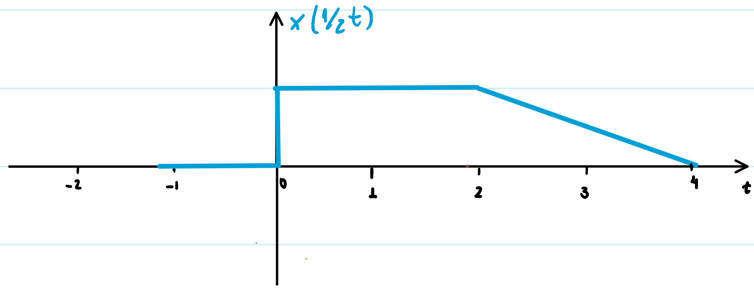


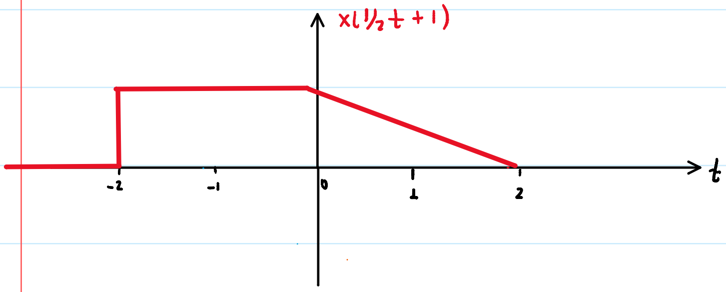
Atenção: $x(t) \rightsquigarrow x(\frac{1}{2}t + 1)$?

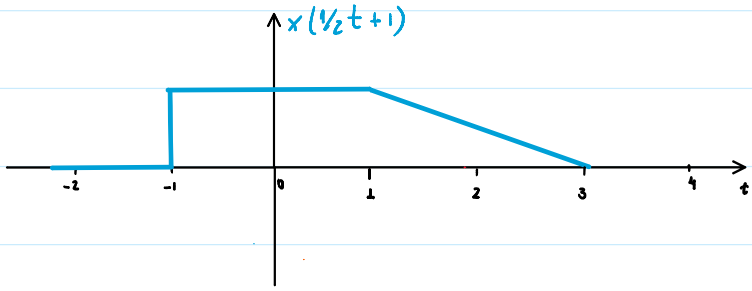








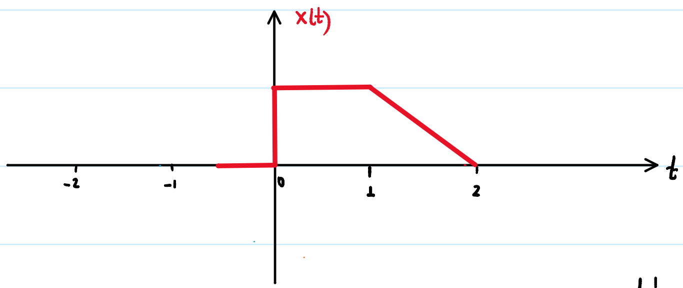




Regra prática $\quad x(t) \rightsquigarrow x(\alpha t' + \beta)$

$$\alpha t' + \beta = t$$

$$t' = \frac{t}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}$$



$$t' = \frac{t}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \quad , \quad \alpha = 1/2 \text{ e } \beta = 1$$

$$t' = 2t - 2$$