SLCO4A - Aula Prática 13

Sumário

Função de transferência

Um sistema LTI é completamente descrito por uma equação diferencial com coeficientes constantes (a_n e b_m), ou seja, por uma equação diferencial de $n-$ésima ordem da forma

$$a_n \frac{d^n y(t)}{\mathrm{dt}^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{\mathrm{dt}} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{\mathrm{dt}^m} + \cdots + b_1 \frac{d\,x(t)}{\mathrm{dt}} + b_0 x(t).$$

Aplicando transformada de Laplace de ambos lados da equação e considerando condições iniciais nulas, obtém-se

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{n-1} s^{n-1} X(s) + \cdots + a_0 X(s)$$

Readequando para a forma de função de transferência $\frac{Y(s)}{H(s)}$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$H(s)$é chamada função de transferência e é uma descrição completa de um sistema LTI.

Uma visão alternativa de função transferência é cosiderar a resposta temporal de saída de um sistema, no qual

$y(t) = h(t) * x(t)$

Aplicando a transformada de Laplace de ambos lados, obtém-se

$Y(s) = H(s)X(s)$

ou ainda $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

onde $H(s) = L\{h(t)\}$. Portanto, a função de transferência de um sistema é a transformada de Laplace da resposta impulsiva do sistema.

Exercício 1: Compute a função de transferência $H(s)$ do sistema descrito pela resposta impulsiva

$h(t) = \mathrm{te}^{-t} u(t)$

```
syms t s
```

```
h=t*exp(-t)*heaviside(t);
H=laplace(h,s)
```

H =

$$\frac{1}{(s+1)^2}$$

Exercício 2: Compute a função de transferência do sistema descrito pelas equação diferencial:

$y''(t) + 3y'(t) - 2y(t) = x''(t) - x'(t) - 6x(t)$, considerando condições iniciais nulas.

```
syms t s Y X
G=s^2*Y+3*s*Y-2*Y-s^2*X+s*X+6*X;
Y=solve(G,Y);
H=simplify(Y/X)
```

H =

$$-\frac{-s^2+s+6}{s^2+3\,s-2}$$

Comando tf

As funções de transferência é usualmente dada na forma racional, escrita na forma de dois polinômios

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Para definir uma função de transferência pode-se utilizar a função `tf,` cuja sintaxe é dada por:

```
H=tf(num,den)
```

Exercício 3: Crie a função de transferência $H(s) = \frac{s^2}{s^2+s+1}$

```
num=[1 0 0];
den=[1 1 1];
H=tf(num,den)
```

```
H =

      s^2
  -----------
  s^2 + s + 1

Continuous-time transfer function.
```

Exercício 4: Um sistema é descrito pela seguinte função de transferência $H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$

Determine a função de transferência do sistema no qual ocorra um atraso temporal de 2 segundos na resposta temporal do sistema.

```
num=[1 2];
```

```
den=[1 3 1];
H=tf(num,den)
```

```
H =
 
      s + 2
  -------------
  s^2 + 3 s + 1
 
Continuous-time transfer function.
```

```
H_atraso=tf(num,den,'inputdelay',2)
```

```
H_atraso =
 
                   s + 2
  exp(-2*s) * -------------
              s^2 + 3 s + 1
 
Continuous-time transfer function.
```

Exercício 5: Compute e plot a resposta impulsiva $h_1(t)$ e $h_2(t)$dos sistemas com funções de transferência sejam

$H_1(s) = \frac{s}{(s^2+4)}$ e $H_2(s) = \frac{s}{(s^2+4)}e^{-3s}$, respectivamente.

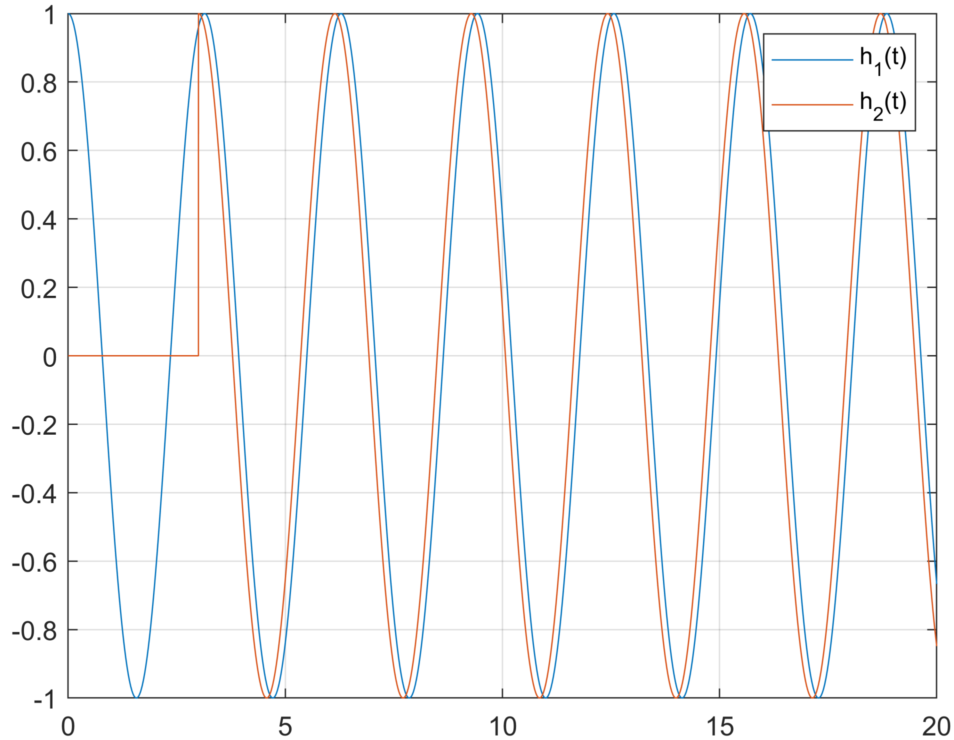
```
syms t s
H1=s/(s^2+4);
H2=exp(-3*s)*s/(s^2+4);

h1=ilaplace(H1,t)
```

h1 = $\cos(2\,t)$

```
h2=ilaplace(H2,t)
```

h2 = $\mathrm{heaviside}(t-3)\cos(2\,t-6)$

```

fplot(h1,[0 20])
grid on
hold on
fplot(h2,[0 20])
legend('h_1(t)','h_2(t)')
```




```
figure
```

Estabilidade de sistemas contínuos

Um critério para defiir estabilidade de um sistema é o *bounded-input bounded output (BIBO)* se a resposta impulsiva do sistema é absolutamente integrável. A expressão matemática é

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\mathrm{dt} < \infty$$

Um critério alternativo em relação ao BIBO estabilidade pode ser considerado a partir da avaliação dos polos:

Se ***todos os polos*** *de uma funçaõ de transferência estão localizados no* ***semiplano esquerdo*** *do plano complexo, o sistema é BIBO* ***estável.***

Equivalentemente, se a parte real de todos os polos são negativas, o sistema é BIBO estável.

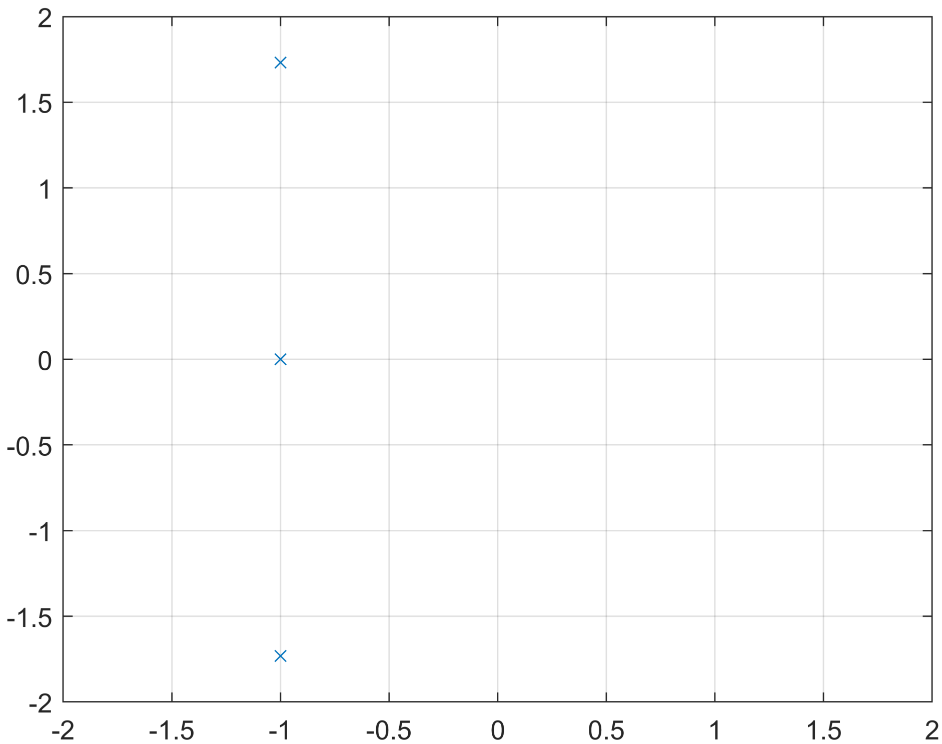
Se um polo está no semiplano direito do plano complexo (equivalentemente tem parte real positiva), então o sistema é instável.

Exercício 6: Dada a função de transferência de um sistema

$$H(s) = \frac{3s^2 + 5}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}$$

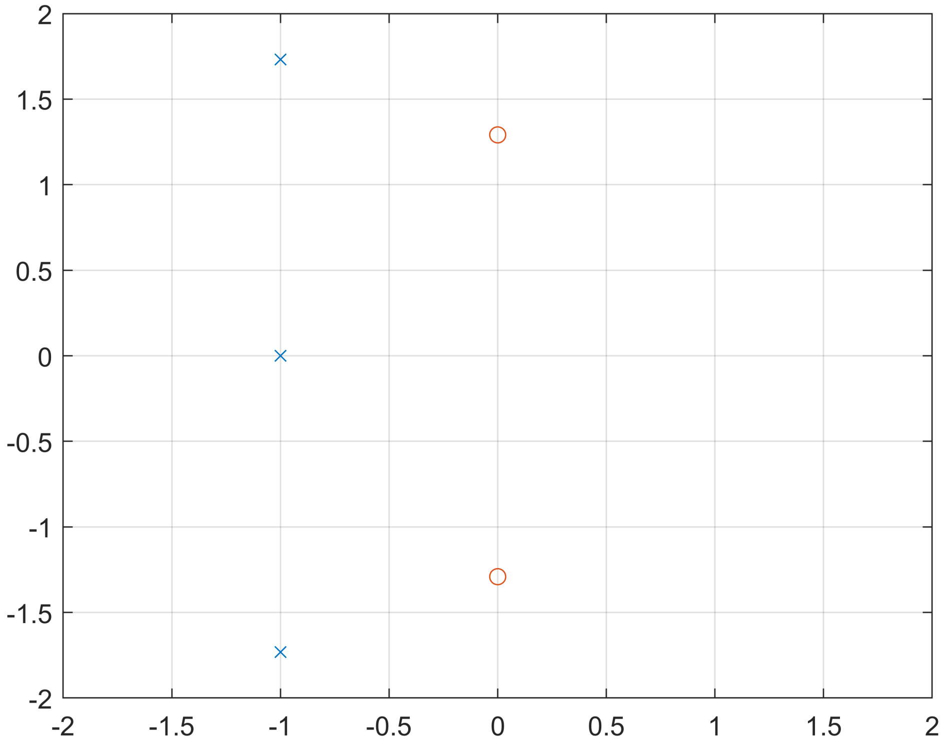
a) Determine se o sistema é estável.

```
den=[1 3 6 4];
polos=roots(den);

plot(real(polos),imag(polos),'x')
%Se alguma raiz do polo for negativa então o sistema é instável
%se todas as raizes do polo for negativa então o sistema é estável
grid on
xlim([-2 2])
```



b) Plot os polos e zeros

```
num=[3 0 5];
zeros=roots(num);
plot(real(polos),imag(polos),'x',real(zeros),imag(zeros),'o')
grid on
xlim([-2 2])
```

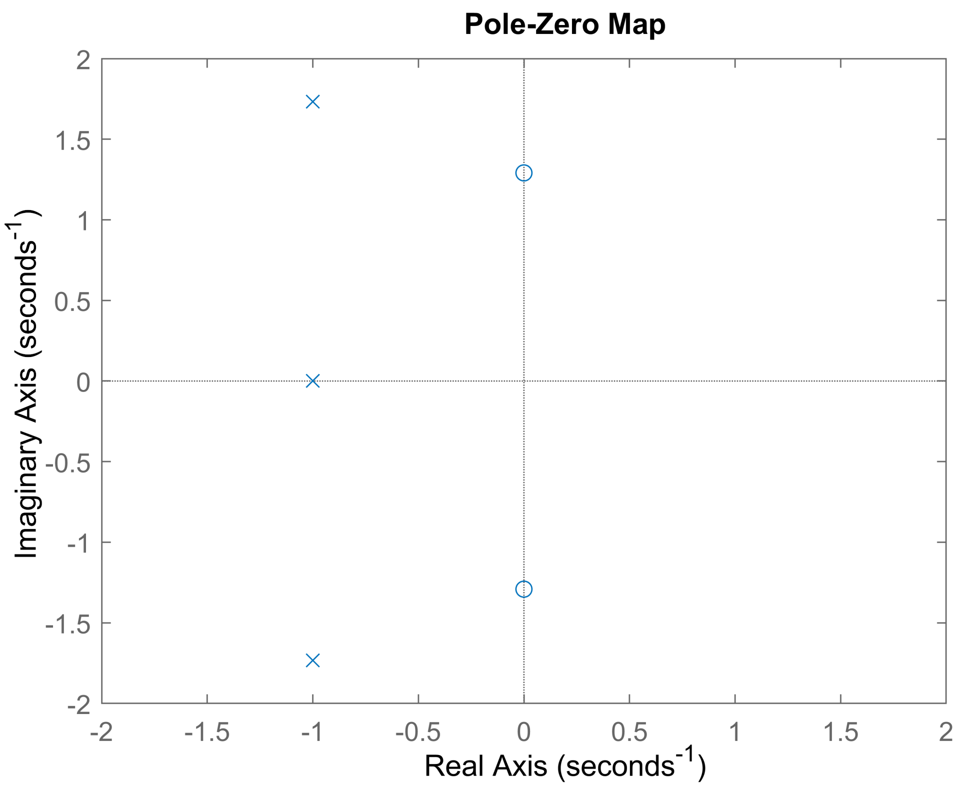


c) Plot os polos e zeros utilizando comandos `tf, pzmap`

```
H=tf(num,den)
```

```
H =

        3 s^2 + 5
  ---------------------
  s^3 + 3 s^2 + 6 s + 4

Continuous-time transfer function.
```

```
%poles=pole(H)
%zeros=zero(H)

figure
pzmap(H)
xlim([-2 2])
```



Função de transferência na forma zero, polo e ganho

A função de transferência de um sistema SISO pode ser escrito na forma

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

onde z_m são os zeros do sistema, p_n são os polos do sistema e K é o ganho do sistema.

Exercício 7: Expresse a função de transferência na forma de zeros, polos e ganho

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}$$

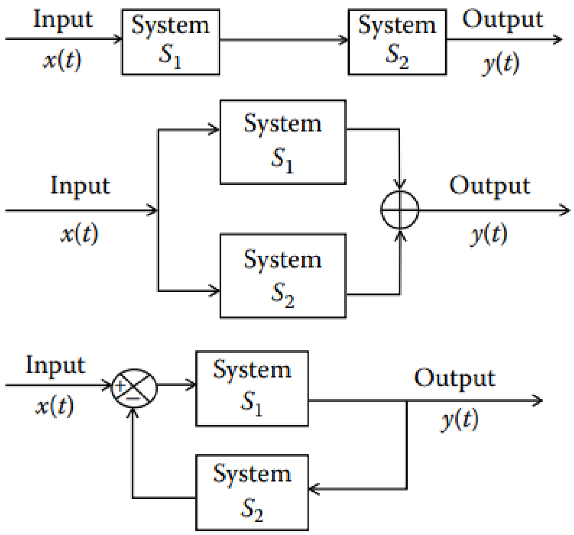
```
H=tf([2 1],[1 3 2]);
Hzpk=zpk(H)
```

```
Hzpk =
 
   2 (s+0.5)
  -----------
  (s+2) (s+1)
 
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Interconexão de sistemas

Exercício 8: A função de transferência do subsistema S_1 é $H_1(s) = \dfrac{s+1}{500s^2}$ e do subsistema S_2 é $H_2(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$

Calcule a função de transferência $H(s)$ total do sistema para os casos de conexão em cascata, paralelo, e realimentado (*feedback*).



a) subsistemas em série (cascata).

```
num1=[1 1];
den1=[500 0 0];
H1=tf(num1,den1);
num2=[1 1];
den2=[1 2];
H2=tf(num2,den2);

Hs=series(H1,H2)
```

```
Hs =

    s^2 + 2 s + 1
  ------------------
  500 s^3 + 1000 s^2

Continuous-time transfer function.
```

b) subsistemas em paralelo.

```
Hp=parallel(H1,H2)
```

```
Hp =

  500 s^3 + 501 s^2 + 3 s + 2
  ---------------------------
      500 s^3 + 1000 s^2

Continuous-time transfer function.
```

c) subsistemas com realimentação.

```
Hr=feedback(H1,H2)
```

```
Hr =

        s^2 + 3 s + 2
  ----------------------------
  500 s^3 + 1001 s^2 + 2 s + 1

Continuous-time transfer function.
```

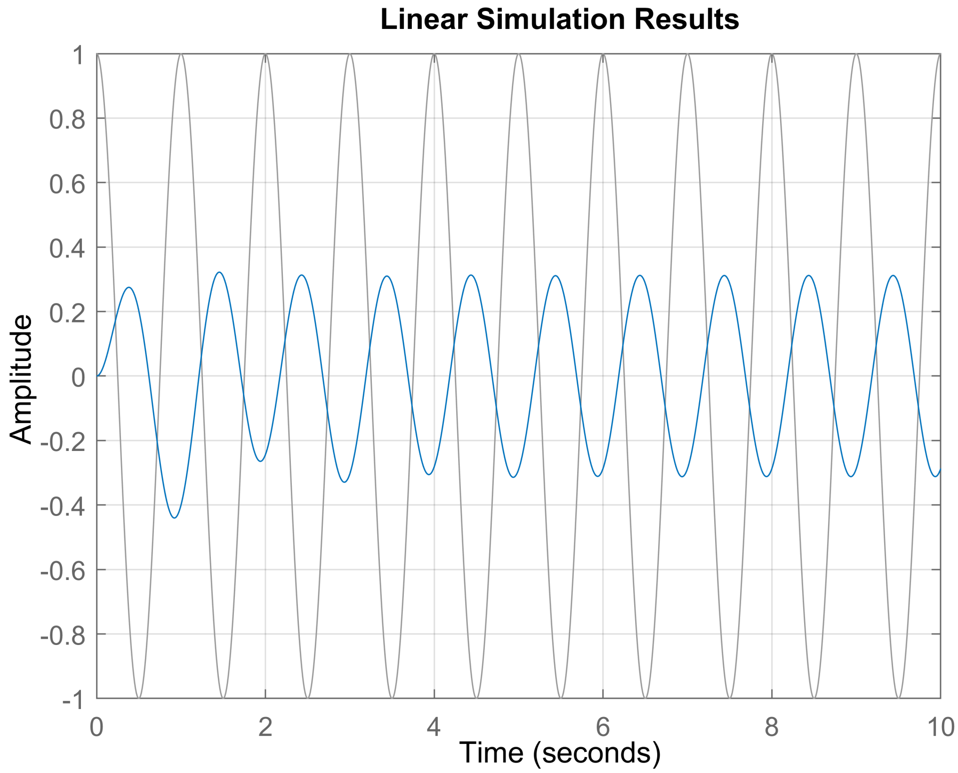
Resposta temporal de sistemas contínuos

```
H=tf[num,den];
y=lsim(H,x,t)

ou

y=lsim(num,den,x,t)
```

Exercício 9: Um sistema é especificado pela seguinte função de transferência $H(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$

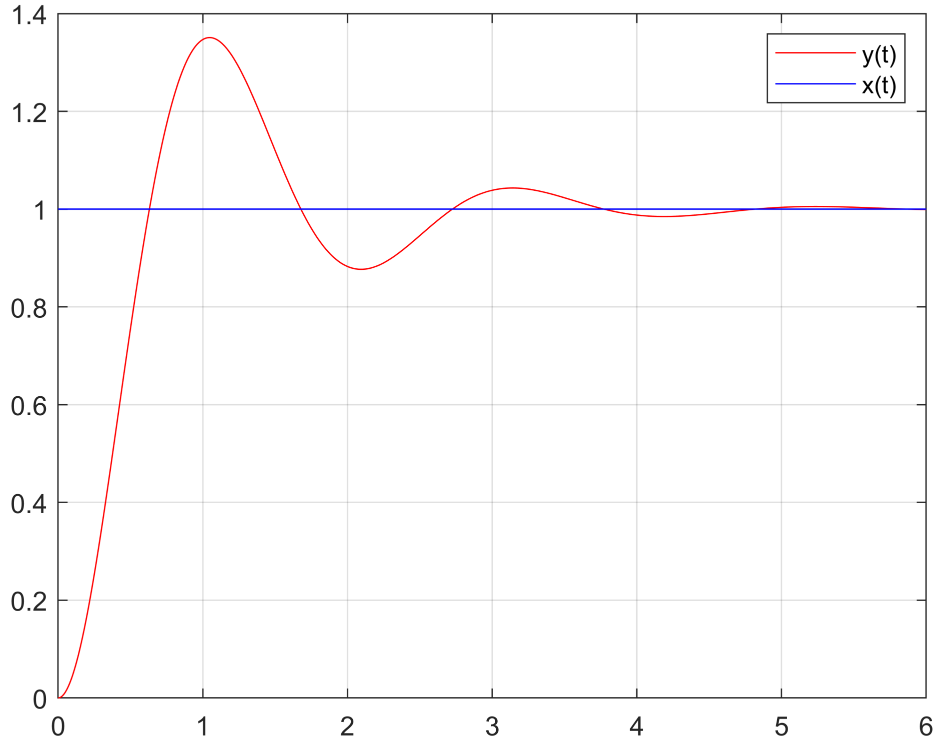
a) Compute e plote a resposta temporal de saída do sistema $y(t)$ para um sinal de entrada $x(t) = \cos(2\pi\, t)$, $0 \le t \le 10$.

```
H=tf(10,[1 2 10]);
t=0:0.01:10;
x=cos(2*pi*t);

figure
lsim(H,x,t);
grid on
```

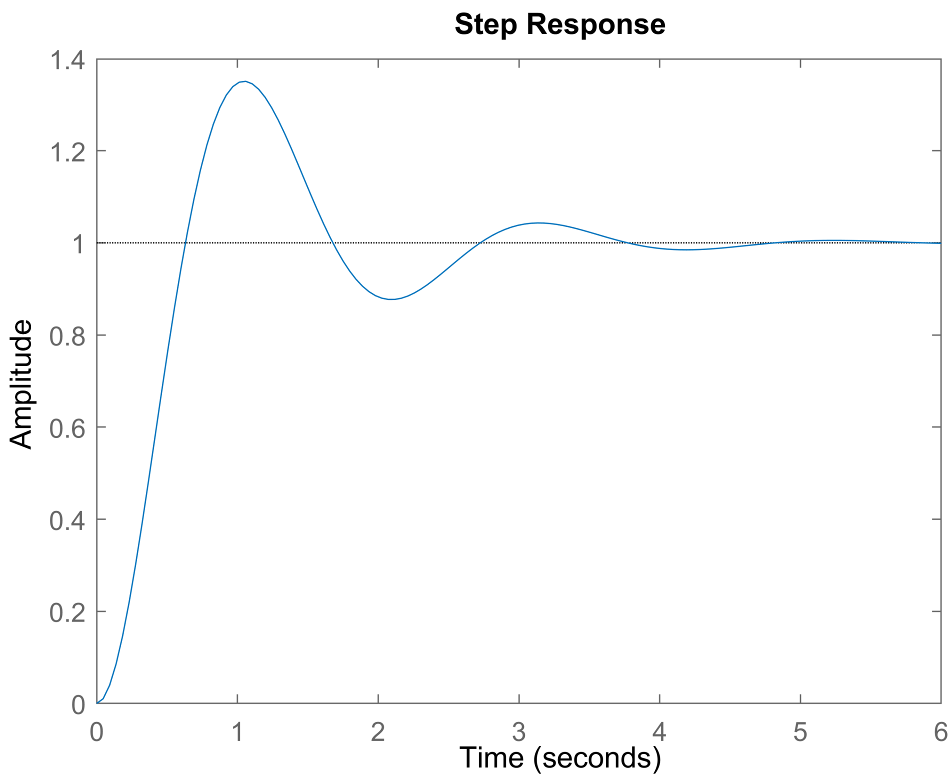


b) compute e plote a resposta temporal de saída do sistema $y(t)$ para um sinal de entrada do tipo degrau unitário $x(t) = u(t)$, $0 \leq t \leq 6$.

```
t=0:0.01:6;
x=ones(size(t));
figure
y=lsim(H,x,t);
plot(t,y,'r')
hold on
plot(t,x,'b')
grid on
legend('y(t)','x(t)')
```

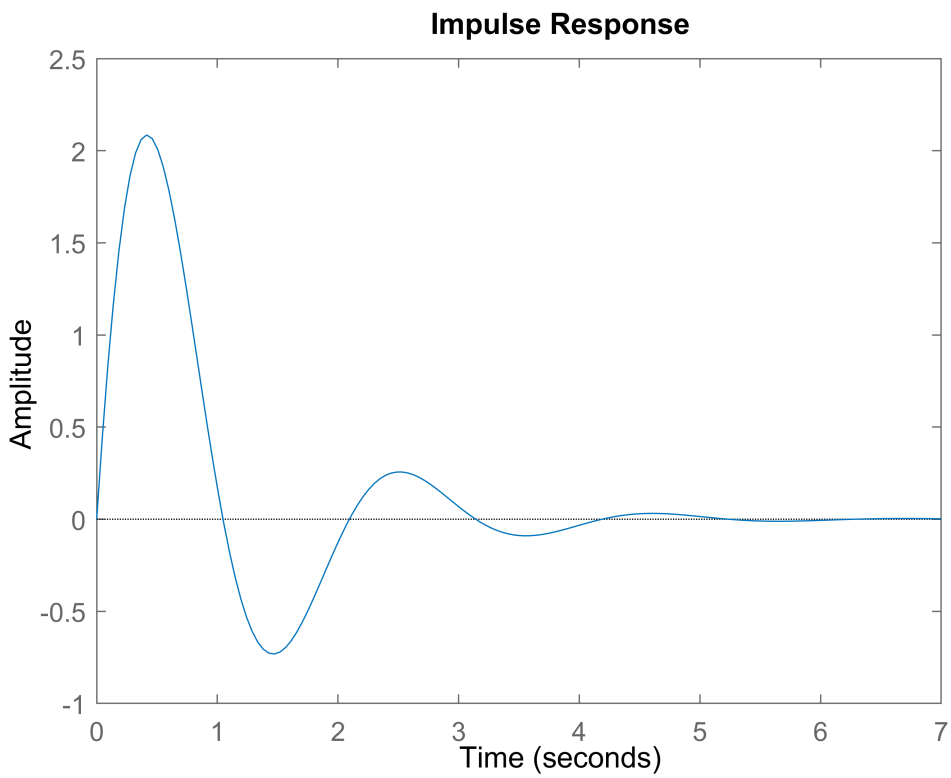



```
figure
step(H)
```



c) compute e plote a resposta temporal de saída do sistema $y(t)$ para um sinal de entrada do tipo impulso $x(t) = \delta(t)$, $0 \leq t \leq 6$.

```
impulse(H)
```


Impulse Response
Amplitude
Time (seconds)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7