

→ Há 2 métodos de análise de SLIT

- Método do domínio do tempo
- Método do domínio da frequência

→ Que tipo de sistemas lineares estamos analisando?

$$\begin{aligned} \frac{d^N y}{dt^N} + a_1 \cdot \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y + \cdots + a_{N-1} \frac{dy}{dt} + a_N y(t) \\ = b_{N-M} \frac{d^M x}{dt^M} + b_{N-M+1} \frac{d^{M-1} x}{dt^{M-1}} + \cdots + b_{N-1} \frac{dx}{dt} + b_N x(t) \quad (1) \end{aligned}$$

Considerando a notação  $D = \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(D^N + a_1 D^{N-1} + \cdots + a_{N-1} D + a_N)}_{Q(D)} y(t) \\ & = \underbrace{(b_{N-M} D^M + b_{N-M+1} D^{M-1} + \cdots + b_{N-1} D + b_N)}_{P(D)} x(t) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\underset{N}{\underbrace{Q(D)}} y(t) = \underset{M}{\underbrace{P(D)}} x(t)$$

→ Para questões práticas considera-se que  $M \leq N$ .

→ Se  $M > N$  obtém-se um sistema diferenciador de ordem  $(M-N)$ .

↪ 1) Diferenciador representa um sistema instável (BIBO): se  $x(t) \neq 0 \Rightarrow y(t) \rightarrow \infty$   
p.e.x.  $x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = \delta(t)$

↪ 2) Ruídos são amplificadores por diferenciadores.  $\eta(t) \rightsquigarrow BW\{\eta(j\omega)\}, \omega [0, \infty)$   
↪ componentes que variam rapidamente

↳ componentes que variam rapidamente

$\frac{d}{dt} \rightarrow$  sinus de grande amplitude  
↑ BW

Vimos anteriormente que um sistema descrito por (1) é do tipo linear.

∴ Sua resposta pode ser expressa como a soma de duas componentes:

$$\text{Resposta total} = \underbrace{\text{Resposta de entrada nula}}_{\substack{x(t)=0 \\ \text{INTERNO}}} + \underbrace{\text{Resposta de estado nulo}}_{\substack{x(0)=0 \\ \text{EXTERNO}}}$$

① Resposta do sistema a condições internas  $\Rightarrow$  Resposta de entrada nula

Sistema linear:  $\mathcal{Q}(D)y(t) = \mathcal{P}(D)x(t)$

Se  $x(t)=0 \Rightarrow \mathcal{Q}(D)y(t)=0$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0 \quad (2)$$

↳ quem é  $y(t)$ ?

↳ uma função que da e suas derivadas combinadas de maneira linear = 0 ou seja, função semelhante a sua própria derivada

$$e^{\lambda t}$$

$\therefore y_0(t) = c e^{\lambda t} \quad (3)$

Então  $Dy_0(t) = c \lambda e^{\lambda t} \quad (4)$

$$D^2y_0(t) = c \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (5)$$

$$\vdots$$
  
$$D^N y_0(t) = c \lambda^N e^{\lambda t} \quad (6)$$

Substituindo (3) - (6) em (2)

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y_0(t) = 0$$

$$c \underbrace{(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N)}_{=0} e^{\lambda t} = 0$$

Solução trivial  $\rightarrow c=0$  ou  $e^{\lambda t}=0$

Solução trivial  $\rightarrow c=0$  ou  $e^{\lambda t}=0$

Solução não-trivial  $(\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0 \rightarrow$  eq. caract. do sistema

$\Phi(\lambda) \rightarrow$  polinômio característico do sistema  
III)

$\Phi(D)$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N)$$

$\Phi(\lambda)$  pode ser expressa em fatores,  $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_N)$

RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA DO SISTEMA

AUTOVALORES  
POLOS  
FREQUÊNCIAS NATURAIS

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0 \quad (N \text{ soluções})$$

$$\hookrightarrow y_o(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t}$$

determinado pelos N reais (cond. auxiliares)  
 $\hookrightarrow t=0 \Rightarrow$  cond. iniciais



"Todo o comportamento de um sistema é ditado pelos modos característicos"

Exemplo) Determine  $y_o(t)$ , a componente de entrada nula da resposta de um SIT, descrito pela seguinte equação diferencial:

$$(D^2 + 3D + 2) y(t) = D x(t)$$

quando as condições iniciais são  $y_o(0) = 0$ ,  $y'(0) = -5$ .

Solução: Assumindo  $x(t)=0 \Rightarrow (D^2 + 3D + 2)y_o(t) = 0$

O polinômio característico é:  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

Raízes:  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$

$$e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t}$$

Logo, os modos característicos do sistema são:  $e^{-t}$  e  $e^{-2t}$

$\therefore$  A resposta de entrada nula é:

$$-t \quad -2t$$

∴ A resposta de entrada nula é:

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad (7)$$

$$\dot{y}_0(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \quad (8)$$

$$t=0 \Rightarrow (7): y_0(0) = 0 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-2 \cdot 0}$$

$$0 = c_1 + c_2 \quad (9)$$

$$(8): \dot{y}_0(0) = -s = -c_1 e^{-0} - 2c_2 e^{-2 \cdot 0}$$

$$-s = -c_1 - 2c_2 \quad (10)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = -s \end{cases} \Rightarrow c_1 = -s \quad c_2 = s$$

$$\therefore y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$y_0(t) = -s e^{-t} + s e^{-2t}$$

Prova REAL:

$$\dot{y}_0 = s e^{-t} - 10 e^{-2t} \quad (11)$$

$$\ddot{y}_0 = -s e^{-t} + 20 e^{-2t} \quad (12)$$

$$(D^2 + 3D + 2)y_0 = 0$$

$$(-s e^{-t} + 20 e^{-2t}) + 3(s e^{-t} - 10 e^{-2t}) + 2(-s e^{-t} + s e^{-2t}) = 0$$

$$-s e^{-t} + 20 e^{-2t} + 15 s e^{-t} - 30 e^{-2t} - 10 s e^{-t} + 10 e^{-2t} = 0$$

$$e^{-t} (-s + 15 - 10) + e^{-2t} (+20 - 30 + 10) = 0$$

• Raízes repetidas

$$Q(\lambda) = 0$$

$$2 \text{ raízes: } (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_1) = 0$$

$$(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$$

$$\dots \rightarrow \lambda_1 \lambda_1 \lambda_1 \dots$$

$$(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_o(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_1 t}$$

$n$  raízes  $(D - \lambda)^n y_o(t) = 0$  (13)

$$\hookrightarrow c^{\lambda t}, t c^{\lambda t}, t^2 c^{\lambda t}, \dots, t^{n-1} c^{\lambda t} \quad (14)$$

$$y_o(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_n t^{n-1}) e^{\lambda t} \quad (15)$$

Caso o polinômio característico seja:

$$\Phi(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda_1)^n}_{n} (\lambda - \lambda_{n+1}) \dots (\lambda - \lambda_N) \quad (16)$$

$$\Rightarrow y_o(t) = \underbrace{(c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1})}_{n} e^{\lambda_1 t} + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t} \quad (17)$$

Exemplo 2)

Determine  $y_o(t)$ , a componente de entrada nula da resposta de um SIT, descrito pela seguinte equação diferencial:

$$(D^2 + 6D + 9) y_o(t) = (3D + 5)x(t) \quad (18)$$

quando as condições iniciais são  $y(0) = 3, \dot{y}(0) = -7$ .

Solução: Considerando  $x(t) = 0$

$$(D^2 + 6D + 9) y_o = 0$$

$\downarrow$   
polinômio característico  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$$(\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -3 \quad e \quad \lambda_2 = -3$$

Os modos característicos são:  $e^{-3t}$  e  $te^{-3t}$

A resposta de entrada nula será

$$y_o(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$$

$$y(0) = 3 \rightarrow c_1 = 3$$

$$\dot{y}(0) = -7 \rightarrow y_o = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} - 3c_2 t e^{-3t}$$

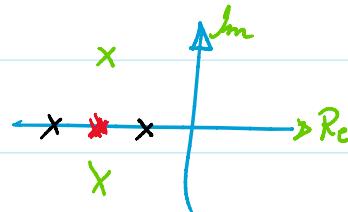
$$y(0) = 3 \rightarrow c_1 = 3$$

$$y'(0) = -7 \rightarrow y_0 = -3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} - 3c_2 t e^{-3t}$$

$$-7 = -3c_1 + c_2$$

$$\therefore c_2 = 2$$

$$y_0(t) = 3e^{-3t} + 2te^{-3t}, t \geq 0$$



• Raízes complexas

↳ Modos característicos complexos

↳ Para um sistema real, as raízes complexas devem ocorrer em pares conjugados se os coeficientes de  $Q(\lambda)$  forem reais.

$$\text{Se } \lambda_1 = \alpha + j\beta \Rightarrow \lambda_2 = \alpha - j\beta$$

$$y_0(t) = c_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha-j\beta)t} \quad \text{→ FORMA COMPLEXA (19)}$$

P/ um sistema real,  $c_1 = c_2^*$

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{j\theta} \quad c_2 = \frac{c}{2} e^{-j\theta}$$

$$\Rightarrow y_0(t) = \left[ \frac{c}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{c}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha-j\beta)t} \right]$$

$$y_0(t) = \frac{c}{2} e^{\alpha t} \left[ e^{j(\beta t + \theta)} + e^{-j(\beta t + \theta)} \right]$$

$$y_0(t) = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \quad \text{→ FORMA REAL (20)}$$

Exemplo 3)

Determine  $y_0(t)$ , a componente de entrada-tulha da resposta de um SLIT, devido pela seguinte equação diferencial:

$$(D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)x(t) \quad (21)$$

quando as condições iniciais são  $y(0) = 2$ ,  $y_0(0) = 16,78$ .

Solução: Considerando  $x(t) = 0$

$$(D^2 + 4D + 40)y_0(t) = 0$$

$$(D^2 + 4D + 40)y_0(t) = 0$$



polinômio característico  $\lambda^2 + 4\lambda + 40 = 0$

raízes  $\lambda_{1,2} = -2 \pm j6$

$$\therefore (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$(\lambda + 2 - j6)(\lambda + 2 + j6) = 0$$

A solução  $y_0(t)$  pode ser dada:

Complexa  $y_0(t) = c_1 e^{-2+j6t} + c_2 e^{-2-j6t}$ ,  $\alpha + j\beta \Rightarrow \beta = 6$

Real  $y_0(t) = \underline{c} e^{-2t} \cdot \cos(6t + \theta)$

$$y_0(0) = 2 \rightarrow 2 = c \cos \theta$$

$$\begin{aligned} y'_0(0) = 16,78 &\rightarrow 16,78 = -2c e^{-2t} \cos(6t + \theta) - 6c e^{-2t} \sin(6t + \theta) \\ 16,78 &= -2c \cos \theta - 6c \sin \theta \end{aligned}$$

$$16,78 = -4 - 6 \cos \theta$$

$$\Rightarrow c \sin \theta = -3,463$$

$$\begin{cases} c \cos \theta = 2 \\ c \sin \theta = -3,463 \end{cases}$$

$$\therefore c^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta = 2^2 + (-3,463)^2$$

$$c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore \frac{c \cos \theta}{c \sin \theta} = \frac{2}{-3,463}$$

$$\tan \theta = -\frac{3,463}{2} \Rightarrow \theta = -7/3$$

Portanto,  $y_0(t) = \underline{4} e^{-2t} \cos(6t - \underline{7/3})$  (??)

Discussão:

→ Resposta de entrada nula é a resposta do sistema pelas suas condições internas ( $x(t)=0$ ).

→ Se um sistema for perturbado momentaneamente e se a perturbação for removida, o sistema não irá retornar ao repouso instantaneamente.

$\text{no } \dots 0, \dots 1, \dots -1, \dots 1, \dots 0, \dots$

→ se um sistema for perturbado momentaneamente e se a perturbação for removida, o sistema não irá retornar ao repouso instantaneamente.

→ Em geral, ele demorará um certo período p/ retornar ao repouso e fará uma trajetória específica, que é característica do sistema.

## ② Resposta ao impulso unitário $\delta(t)$

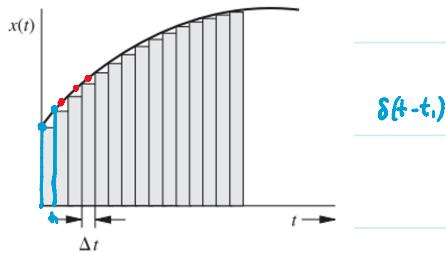
De um sistema é linear então

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) + \dots + a_k y_k(t) \quad (23)$$

onde  $y_k(t)$  é a resposta de estado nulo p/ a entrada  $x_k(t)$ .

\* PARECE TRIVIAL, MAS ESTA OBSERVAÇÃO POSSUI PROFUNDAS IMPLICAÇÕES NA ANÁLISE DE SISTEMAS.

Consideremos um sinal  $x(t)$ , que pode ser approximado por uma soma de pulsos retangulares.



$$\Delta t = \delta t \rightarrow 0 \rightarrow x(t) = \sum x(t) \cdot \delta(\delta - t)$$

• pulsos retangulares se transformam em impulsos unitários quanto  $\delta t \rightarrow 0$

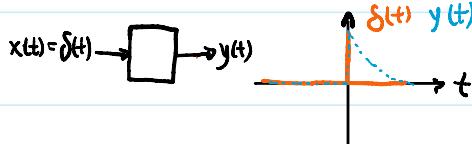
∴ Se soubermos a resposta do sistema para uma entrada impulsiva  $h(t)$

↳ podemos determinar a resposta do sistema para qualquer entrada arbitrária  $x(t)$ !



$$x(t) \xrightarrow{f} y(t) = \int \{ x(t), h(t) \}$$

\* Compreensão qualitativa do impulso unitário



→  $\delta(t) \approx$  ruído → devido em  $t=0$  e devido nulo p/  $t \neq 0$ .

→  $t > 0$  o sistema continua tendo uma resposta de saída  $y(t) \neq 0$  e/  $x(t)=0$ .

∴ é como se  $t=0$  o sistema armazenasse energia, ou seja,  
criar-se condições iniciais não-nulas em  $t=0^+$

A resposta ao impulso possui摸es característicos p/  $t > 0^+$

$$y(t) = h(t) = \text{termos característicos, } t > 0^+ \quad (24)$$

$\rightarrow$  Se  $t=0$ ? Só pode haver um impulso.  $y(t) = h(t) = A_0 \delta(t)$ ,  $t=0$  (25)

Logo, a resposta completa é

$$y(t) = A_0 \delta(t) + \text{termos característicos}, \quad t > 0 \quad (26)$$

Então, considerando o SLIT e assumindo que  $x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) y(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N) x(t)$$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) h(t) = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N) \delta(t)$$

$$(D^N + a_1 D^{N-1} + \dots + a_{N-1} D + a_N) [A_0 \delta(t) + T_M] = (b_0 D^N + b_1 D^{N-1} + \dots + b_{N-1} D + b_N) \delta(t)$$

$$A_0 D^N \delta(t) = b_0 D^N \delta(t) \Rightarrow A_0 = b_0$$

$$\therefore h(t) = b_0 \delta(t) + \text{termos característicos}, \quad t > 0 \quad (27)$$

↳ Como determinar os coeficientes do  $N$  modos característicos?

Método simplificado de cálculo de impulso

$$\text{Se } M < N, \quad Q(D) y(t) = P(D) x(t) \Rightarrow b_0 = 0$$

$\downarrow$  ordem  $N$        $\downarrow$  ordem  $M$

Método simplificado de cálculo de impulso

$$\text{Considerando } Q(D) y(t) = P(D) x(t)$$

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [P(D) y_n(t)] u(t) \quad (28)$$

$y_n(t)$  é a combinação linear dos modos característicos do sistema sujeito às cond. iniciais

$$y_1(0) = \dot{y}_1(0) = \ddot{y}_n(0) = \dots = y_n^{(N-2)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad y_n^{(N-1)}(0) = 1$$

$y_n^{(k)}(t)$  é a  $k$ -ésima derivada de  $y_n(t)$ ,  $t=0$ .

$$N=1 \Rightarrow y_n(0) = 1$$

$$N=2 \Rightarrow y_n(0) = 0, \quad \dot{y}_n(0) = 1$$

$$N=3 \Rightarrow y_n(0) = \dot{y}_n(0) = 0, \quad \ddot{y}_n(0) = 1$$

**Exemplo 4)** Determine a resposta  $y(t)$  ao impulso unitário para o sistema especificado pelas equações:

$$(D^2 + 3D + 2) y(t) = D x(t) \quad (29)$$

**Solução:**

Trata-se de um sistema de 2º orden ( $N=2$ ), possuindo o polinômio característico

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

ou seja  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$

Portanto,  $y_n(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$  (30)

Diferenciando (30)

$$\dot{y}_n(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \quad (31)$$

As condições iniciais p/  $N=2$  são:

$$\dot{y}_n(0) = 1 \quad \text{e} \quad y_n(0) = 0$$

Assumindo  $t=0 \Rightarrow$  (30):  $0 = C_1 + C_2$

(31):  $1 = -C_1 - 2C_2$

$$\therefore C_1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 = -1$$

Logo  $y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Considerando que o sistema é

$$(D^2 + 3D + 2) y(t) = D x(t)$$

$$\mathcal{Q}(D) y(t) = \mathcal{P}(D) x(t)$$

Do método simplificado de cálculo de impulso

$$h(t) = b_0 \delta(t) + [\mathcal{P}(D) y_n(t)] u(t)$$

$$\mathcal{P}(D) y_n(t) = D y_n(t) = \dot{y}_n(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Em neste caso  $b_0 = 0$  (termo de 2º orden ausente em  $\mathcal{P}(D)$ )

Portanto,  $h(t) = [\mathcal{P}(D) y_n(t)] u(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t}) u(t)$

\* Dicas: se  $x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$

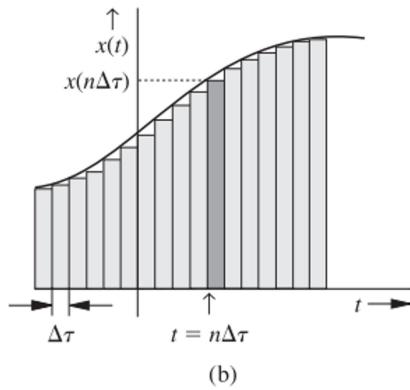
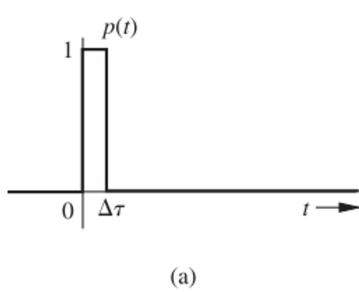
então  $x(t) = \delta(t-\tau) \Rightarrow y(t) = h(t-\tau)$

∴ INVARIÂNCIA NO TEMPO

③ Resposta do sistema à uma entrada externa: resposta de estado nulo

→ Princípio da superposição p/ determinar a resposta do sistema p/ uma entrada arbitrária  $x(t)$ .

→ Ideia



- O pulso em  $t = n\Delta T$  pode ser expresso como  $x(n\Delta T) p(t - n\Delta T)$

-  $x(t)$  pode ser descrito como a soma de todos os pulsos:

$$x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta T) p(t - n\Delta T)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n\Delta T)}{\Delta T} p(t - n\Delta T) \Delta T$$

↑ pulso c/ altura  $\frac{x(n\Delta T)}{\Delta T}$   
↑ área  $x(n\Delta T)$

Se  $\Delta T \rightarrow 0$ , a altura  $\frac{x(n\Delta T)}{\Delta T} \rightarrow \infty$ , mas a área permanece  $x(n\Delta T)$

↳ pode-se aproximar a fixa por impulso  $x(n\Delta T) \delta(t - n\Delta T)$

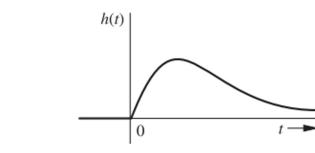
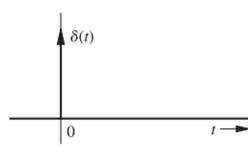
$$\Rightarrow x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} x(n\Delta T) \delta(t - n\Delta T) \Delta T$$

Para determinar a resposta para  $x(t)$ , podemos considerar a entrada e o saída de vários componentes.

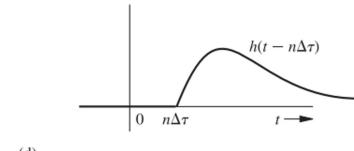
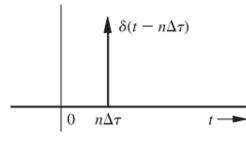
Para determinar a resposta para  $x(t)$ , podemos considerar a entrada e saídas de saída correspondentes

$$\text{Entrada} \quad \text{Saída}$$

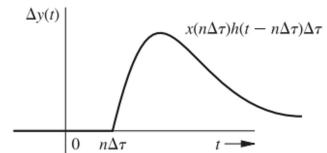
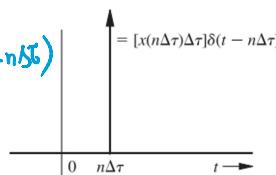
$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$



$$\delta(t-n\Delta\tau) \Rightarrow h(t-n\Delta\tau)$$



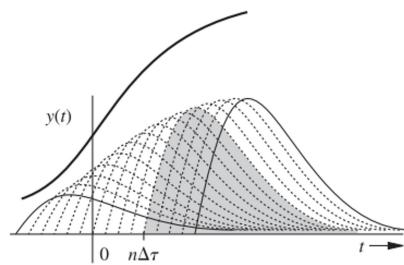
$$[x(n\Delta\tau)\Delta\tau] \delta(t-n\Delta\tau) \Rightarrow [x(n\Delta\tau)\Delta\tau] h(t-n\Delta\tau)$$



$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau \Rightarrow \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum x(n\Delta\tau) h(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$$

$\underbrace{x(t)}$

$\underbrace{y(t)}$



(f)

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum x(n\Delta\tau) h(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$$

$$\hookrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (\text{SILT})$$

INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

$$y(t) = x(t) * h(t)$$