SLCO4A - Aula Prática 8

Sumário

Séries de Fourier

Ortogonalidade de sinais exponenciais complexos

Suponha que $x_m(t)$ e $x_k(t)$ são dois sinais periódicos contínuos complexos com período T. O produto interno $< x_m(t), x_k(t) >$ é dado por

$$< x_m(t), x_k(t) > \;=\int_{t_0}^{t_0+T} x_m(t)x_k^*(t)\,\mathrm{dt} = \begin{cases} T & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Se o produto interno for nulo para $m \neq k$, os sinais $x_m(t)$ e $x_k(t)$ são ortogonais.

Exercício 1: Considere os sinais $x(t) = e^{\mathrm{j}3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$ e $y(t) = e^{\mathrm{j}5\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$. Verifique a ortogonalidade dos sinais.

```
syms t T
w=2*pi/T;
x=exp(j*3*w*t);
yc=exp(-j*5*w*t);
prod_int=int(x*yc, t, 0, T)
```

prod_int = 0

```
xc=exp(-j*3*w*t);
y=exp(j*5*w*t);
prod_int=int(y*xc, t, 0, T)
```

prod_int = 0

```
prod_int2=int(x*xc, t, 0, T)
```

prod_int2 = T

Séries de Fourier na forma exponencial complexa

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$

Os coeficientes complexos da série de Fourier são dados por:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-\mathrm{jk}\omega_0 t}\mathrm{dt}$$

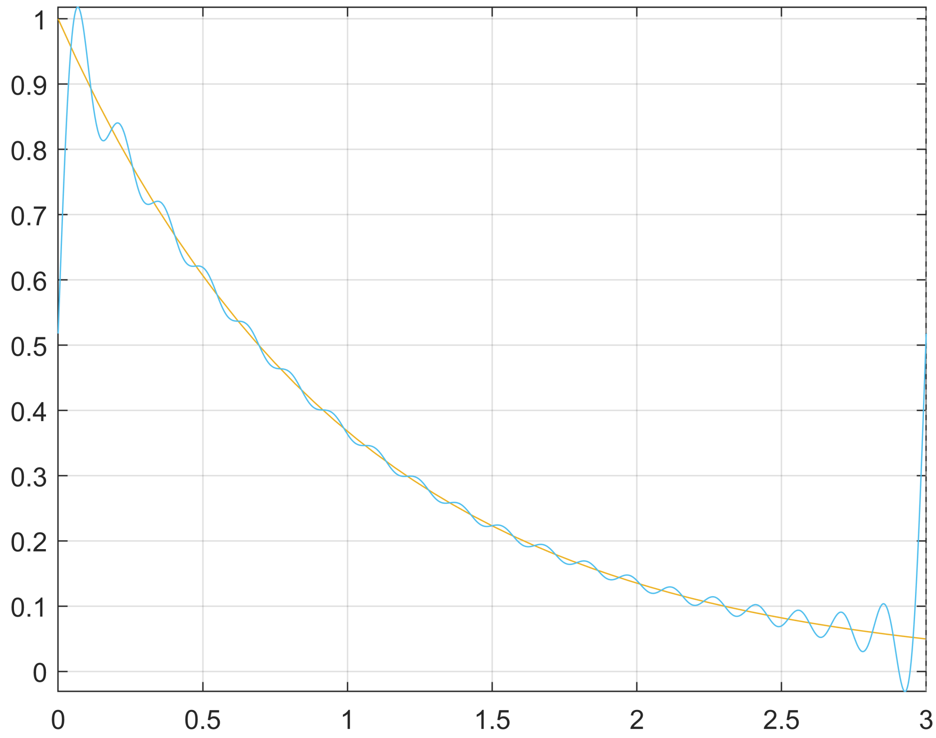
Cada coeficiente complexo a_k corresponde à projeçao do sinal $x(t)$ sobre a componente ortogonal $e^{\mathrm{jk}\omega_0 t}$ e indica o conteúdo do espectro do sinal na frequência $k\omega_0$, que é conhecida como *k-ésima* harmônica.

Enquanto que a_0 é um número real que corresponde a uma constante e é denominada como componente DC do sinal.

Exercício 2: Expanda o sinal $x(t) = e^{-t}$, $0 \le t \le 3$, em série de Fourier na forma exponencial complexa, considerando os seguintes termos de aproximação: 3, 11, 41 e 201.

```
t0=0;
T=3;
w=2*pi/T;
syms t
x=exp(-t);
fplot(x, [t0 t0 + T])
hold on
% Aproximações

% Coeficientes da serie de Fourier

% 3 termos
for k=-1:1
    a(k+2)=1/T*int(x*exp(-j*k*w*t), t, t0, t0+T);
end
% Serie de Fourier
for k=-1:1
    ex(k+2)=exp(j*k*w*t);
end
xx=sum(a.*ex); % x(t) aproximado para 3 termos
fplot(xx, [t0, t0+T])

% 11 termos
for k=-5:5
    a(k+6)=1/T*int(x*exp(-j*k*w*t), t, t0, t0+T);
end
% Serie de Fourier
for k=-5:5
    ex(k+6)=exp(j*k*w*t);
end
xx11=sum(a.*ex); % x(t) aproximado para 3 termos
fplot(xx11, [t0, t0+T])
grid on
% 41 termos
for k=-20:20
    a(k+21)=1/T*int(x*exp(-j*k*w*t), t, t0, t0+T);
end
```

```
% Serie de Fourier
for k=-20:20
    ex(k+21)=exp(j*k*w*t);
end
xx41=sum(a.*ex); % x(t) aproximado para 3 termos
fplot(xx41, [t0, t0+T])
grid on
```



Séries de Fourier na forma trigonométrica

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t), \ t \in [t_0, t_0 + T]$

Os coeficientes da série de Fourier na forma trigonométricasão dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{dt}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{dt}$$

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\mathrm{dt}$$

Exercício 3: Considere o sinal do exercício 2. Expanda o sinal $x(t) = e^{-t}$, $0 \le t \le 3$, em série de Fourier na forma trigonométrica, utilizando uma aproximação com a seguinte quantidade de termos: 6, 21 e 201.

```
T=3;
t0=0;
w=2*pi/T;
syms t
x=exp(-t);
figure
fplot(x, [t0 t0+T])
hold on

% Aproximações

% Coeficientes da série de Fourier forma trigonométrica
a0=(1/T)*int(x, t, t0, t0+T);

% 6 termos => a0, a1 ... a5;
for n=1:5
    b(n)=(2/T)*int(x*cos(n*w*t), t, t0, t0+T);
    c(n)=(2/T)*int(x*sin(n*w*t), t, t0, t0+T);
end
k=1:5;
xx6=a0+sum(b.*cos(k*w*t)+c.*sin(k*w*t));
fplot(xx6, [t0 t0+T])
hold on

% 21 termos => a0, a1 ... a20;
for n=1:20
    b(n)=(2/T)*int(x*cos(n*w*t), t, t0, t0+T);
    c(n)=(2/T)*int(x*sin(n*w*t), t, t0, t0+T);
end
k=1:20;
xx21=a0+sum(b.*cos(k*w*t)+c.*sin(k*w*t));
fplot(xx21, [t0 t0+T])
hold on
```

Séries de Fourier na forma de cosseno e fase

A terceira forma da série de Fourier é usando a propriedade trigonométrica

$$b_k\cos(k\Omega_0 t) + c_k\text{sen}(k\Omega_0 t) = A_k\cos(k\Omega_0 t + \Theta_k)$$

O sinal $x(t)$ que é definido no intervalo $[t_0, t_0 + T]$ é expresso como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(k\omega_0 t + \Theta_k)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\mathrm{d}t$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2},\ k = 1, 2, \ldots$$

$$\Theta_k = \begin{cases} \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{c_k}{b_k}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{c_k}{b_k}\right) & k = 1, 2, \ldots b_k \geq 0 \\ \pi + \mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{c_k}{b_k}\right) & k = 1, 2, \ldots b_k < 0 \end{cases}$$

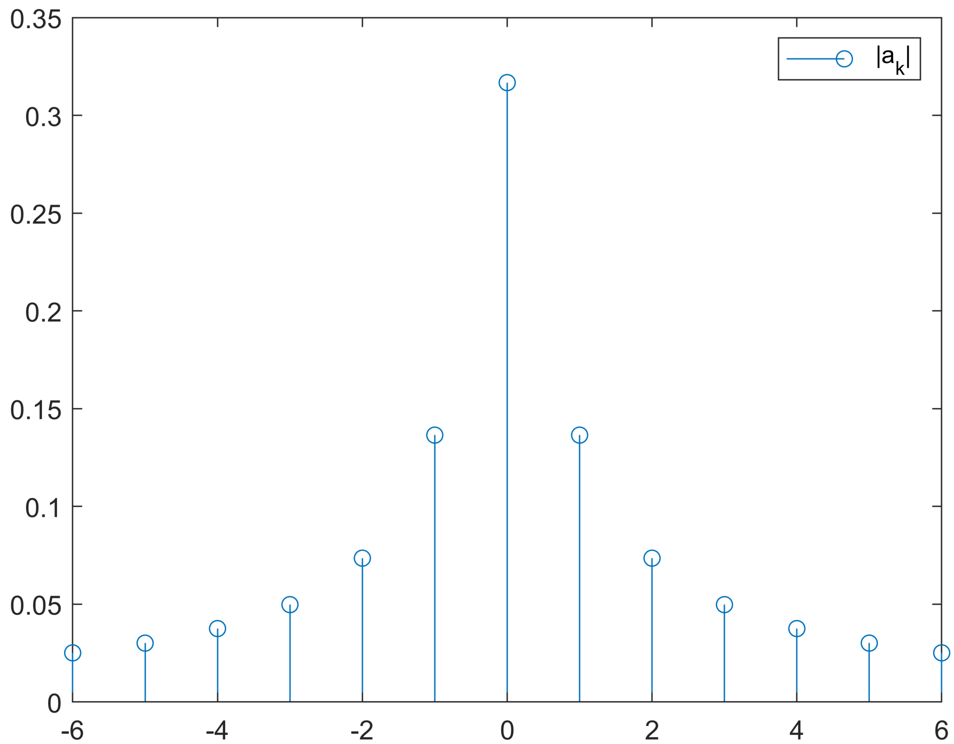
Exercício 4: Expanda o sinal $x(t) = e^{-t^2}$, $-2 \leq t \leq 2$ por série de Fourier na forma trigonométrica de cosseno com fase, utilizando uma aproximação de 101 termos.

```
T=4;
t0=-2;
w=2*pi/T;
syms t n
x=exp(-t^2);
figure
fplot(x, [t0 t0+T])
hold on

% Coeficientes da forma trigonometrica compacta
a0 = 1/T*int(x, t, t0, t0+T);
b = (2/T)*int(x*cos(n*w*t), t, t0, t0+T);
c = (2/T)*int(x*sin(n*w*t), t, t0, t0+T);
n1=1:100;
bn=subs(b, n, n1);
cn=subs(c, n, n1);
% Aproximação por serie de Fourier - forma trigonometrica
xx=a0+sum(bn.*cos(n1*w*t) + cn.*sin(n1*w*t));
fplot(xx, [t0 t0+T])

% Coeficientes da forma trigonometrica compacta
k=1:100;
A=sqrt(bn.^2+cn.^2);
Theta=atan2(-cn, bn);
xxc=a0+sum(A.*cos(k*w*t+Theta))
fplot(xxc, [t0 t0+T])
```

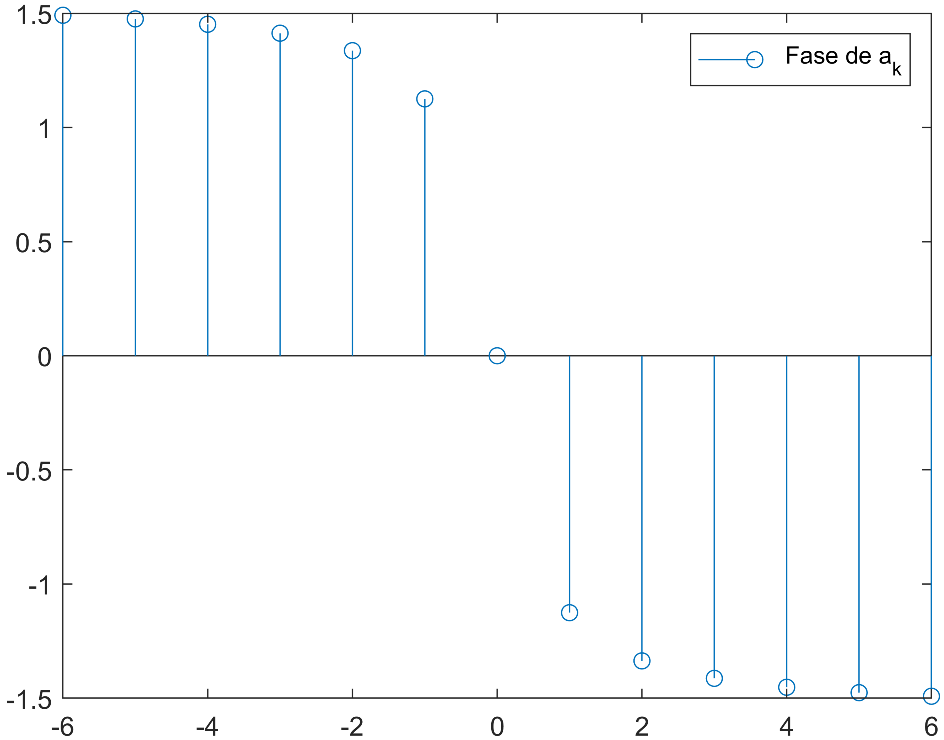
Representação gráfica dos coeficientes da série de Fourier

```
t0=0;
T=3;
w=2*pi/T;
syms t k n
x=exp(-t);
% Coeficientes da série de Fourier na forma complexa
```

```
a=(1/T)*int(x*exp(-j*k*w*t), t, t0, t0+T);
k1=-6:6;
ak=subs(a, k, k1);
figure
stem(k1, abs(ak)) % Plot de sinais discretos
legend('|a_k|');
```




```
figure
stem(k1, angle(ak))
legend('Fase de a_k');
```


Fase de a_k
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-6
-4
-2
0
2
4
6