AT11 - Transf. de Fourier

* Propriedades da Transformada de Fourier

Notação

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$$

$$x(t) \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} X(j\omega)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, dt \rightsquigarrow \text{síntese}$$

→ comp. espectrais

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightsquigarrow \text{síntese SF}$$

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \rightsquigarrow \text{análise}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \rightsquigarrow \text{análise SF}$$

Exemplo de notação

$g(t)$

$G(j\omega)$

$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$

$$\mathcal{F}\{\overbrace{e^{-at}u(t)}^{x(t)}\} = \overbrace{\frac{1}{a+j\omega}}^{X(j\omega)}$$

$$\underbrace{e^{-at}u(t)}_{x(t)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

$$\underbrace{e^{-at}u(t)}_{x(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\underbrace{a+j\omega}_{X(j\omega)}}$$

① Linearidade

Se $\quad x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \qquad X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

$\quad\;\; y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) \qquad Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

Então

$$\underbrace{a\,x(t) + b\,y(t)}_{z(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \underbrace{a\,X(j\omega) + b\,Y(j\omega)}_{Z(\omega)}$$

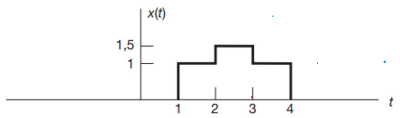
② Deslocamento no tempo

Se $\quad x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

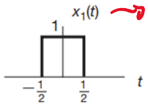
Então $\quad x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

$y(t) = S\{x(t-t_0)\}$

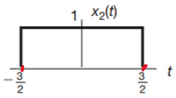
Exercício 1) Obtenha a transformada de Fourier $X(j\omega)$ do sinal $x(t)$ da figura abaixo:



Solução: Note que $x(t)$ pode ser expresso como a combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$



$\to X_1(j\omega)$ $\qquad$ $X_2(j\omega)$



$$x(t) = \underline{0{,}5}\, x_1(t - \underline{2{,}5}) + 1\, x_2(t - \underline{2{,}5})$$

A transformada de Fourier da função pulso já foi calculada (vide Exemplo 5, AT10):

$$z(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} Z(j\omega) = 2\,\frac{\operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}$$

Então,

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 3/2 \\ 0, & |t| > 3/2 \end{cases}$$

$$X_1(j\omega) = 2\,\frac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega} \qquad X_2(j\omega) = 2\,\frac{\operatorname{sen}(3\omega/2)}{\omega}$$

Usando as propriedades de deslocamento e linearidade

$$X(j\omega) = \underline{0{,}5} \cdot X_1(j\omega) \cdot e^{-j2{,}5\omega} + 1 \cdot X_2(j\omega) \cdot e^{-j2{,}5\omega}$$

$$X(j\omega) = 0{,}5 \cdot \frac{2 \operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega} \cdot e^{-j2{,}5\omega} + 2\,\frac{\operatorname{sen}(3\omega/2)}{\omega} \cdot e^{-j2{,}5\omega}$$

$$X(j\omega) = e^{-j2{,}5\omega}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega} + 2\,\frac{\operatorname{sen}(3\omega/2)}{\omega}\right]$$

③ Conjugação e simetria conjugada

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X(j\omega)$$

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X^*(-j\omega)$$

Seja $\quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right]^*$$

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

Substituindo $\omega = -\omega$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^*(t)}_{x(t)} \cdot e^{-j\omega t}\, dt \qquad X(j\omega) \in \mathbb{C}$$

↳ Conclusões parciais

↝ Se $x(t) \in \mathbb{R}$, então $X(j\omega)$ tem simetria conjugada

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad , \quad \forall\, x(t) \in \mathbb{R}$$

Se $x(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) = x^*(t)$

$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{x^*(t)}{x(t)}\, e^{-j\omega t}\, dt = X(j\omega)$$

Exemplo) $x(t) = e^{-at}u(t) \quad \in \mathbb{R}$

$\Big\downarrow \mathcal{F}\{\}$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} \longrightarrow X^*(j\omega) = \frac{a+j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$X(-j\omega) = \frac{1}{a-j\omega}$

$$X(-j\omega) = \frac{a+j\omega}{a^2+\omega^2} \longleftarrow$$

$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$

$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

• Avaliando $X(j\omega) = \mathrm{Re}\{X(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$ (forma retangular)

sendo $\underline{x(t) \in \mathbb{R}}$ ↝ $X(-j\omega) = \underline{X^*(j\omega)}$

$\therefore$ $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ ↝ função par de ω

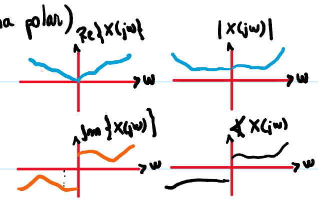
$\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$ ↝ função ímpar de ω

• Avaliando $X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega)}$ (forma polar)

sendo $x(t) \in \mathbb{R}$ ↝ $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

$\therefore$ $|X(j\omega)|$ ↝ função par de ω

$\measuredangle X(j\omega)$ ↝ função ímpar de ω



• Se $x(t) \in \mathbb{R}$ e par

$\therefore$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$ e par.

• Se $x(t) \in \mathbb{R}$ e ímpar

$\therefore$ $X(j\omega) \in \mathbb{R}$ e ímpar

• Uma função pode ser expressa em termos de suas componentes par e ímpar

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$\downarrow \mathcal{P}\{x(t)\} \qquad \downarrow \mathcal{I}\{x(t)\}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{\underbrace{\mathcal{P}\{x(t)\}}_{\text{real}}\} + \mathcal{F}\{\underbrace{\mathcal{I}\{x(t)\}}_{\text{imaginária}}\}$$

$\therefore$

$$x(t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$\mathcal{P}\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(j\omega)\}$$

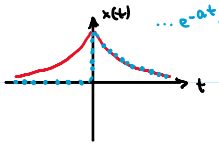
$$\mathcal{I}\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Im}\{X(j\omega)\}$$

Exercício 2) Seja $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$. Determine $X(j\omega)$, sabendo que

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

Solução:



$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$

$x(t) \in \mathbb{R}$ e par $\rightsquigarrow$ $x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

$$x(t) = \underline{e^{-at}u(t)} + e^{at}u(-t)$$

$$x(t) = 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right]$$

↳ função par

$$x(t) = 2 \cdot \mathcal{P}\{\underbrace{e^{-at}u(t)}\}$$

Então, $\mathcal{P}\{e^{-at}u(t)\} \longleftrightarrow \mathcal{R}e\left\{\underbrace{\frac{1}{a+j\omega}}_{X(j\omega)}\right\}$

$x(t) = 2\,\mathcal{P}\{e^{-at}u(t)\}$

$$\therefore X(j\omega) = 2\,\mathcal{R}e\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

4) Diferenciação e integração

- $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \underbrace{\pi X(0)\,\delta(\omega)}_{\text{valor médio}}$

Exercício 3) Seja $x(t) = u(t)$, determine $X(j\omega)$ sabendo que

$$g(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(j\omega) = 1$$

Solução: Note que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

Aplicando a propriedade de integração

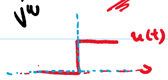
$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\,\underline{G(j\omega)} + \pi\,\underset{\omega=0}{G(0)}\,\delta(\omega) \qquad G(j\omega) = 1$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega), \quad x(t) = u(t)$$

Exercício 4) Seja $g(t) = \delta(t)$, determine $\underline{G(j\omega)}$ considerando que

$$x(t) = \underline{u(t)} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

Solução: Neste caso observa-se que



$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Então

$$G(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)$$

$$G(j\omega) = j\omega\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right)$$

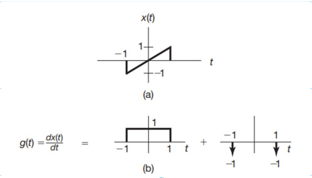
$$G(j\omega) = 1 + j\pi\omega\,\underset{\omega=0}{\delta(\omega)}$$

$\therefore\ \omega\,\delta(\omega) = 0$

$\therefore\ G(j\omega) = 1$, $g(t) = \delta(t)$

Exercício 5) Determine $X(j\omega)$ para o sinal $x(t)$, tal que

$$g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightsquigarrow G(j\omega) = j\omega\, \underline{X(j\omega)}\ ?$$



$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} G(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

Solução: $G(j\omega) = \underbrace{2\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega} - e^{-j\omega} - e^{+j\omega}}$ =

$$g(t) = \frac{dx}{dt} \rightsquigarrow x(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi\, G(0)\, \delta(\omega)$$

$\omega = 0$; $\omega = 0$

$$X(j\omega) = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{j\omega^2} - \frac{2(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{2j\omega} + \pi \cdot (\cancel{2 - 2})^{0} \cdot \delta(0)$$

$\cos(\omega)$

$$X(j\omega) = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

$X(j\omega)$ é puramente imaginária e ímpar

$\Updownarrow$

$x(t) \in \mathbb{R}$ e ímpar

5 Mudança de escala no tempo e na frequência

Se $x(t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$

Então $x(at) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$, $a \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1) Se $a = -1$; $x(t) \rightsquigarrow X(j\omega)$

$$x(-t) \overset{\mathcal{F}\{\}}{\longleftrightarrow} X(-j\omega)$$

$\therefore$ Reversão temporal $\Rightarrow$ Reversão da transformada de Fourier

Exemplo 2) Áudio gravado em uma determinada taxa ("velocidade"), v_g

$x(t)$

Efeitos de reprodução

- Se a velocidade de reprodução v_r for mais rápida que a de gravação v_g

$$y(t) = x(at)\ ,\ a > 1 \rightsquigarrow \text{compressão no tempo}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \rightsquigarrow \text{expansão na frequência}$$

O efeito audível é que as frequências de reprodução são mais altas

- Se $v_r < v_g$

$$y(t) = x(at)\ ,\ 0 < a < 1 \rightsquigarrow \text{expansão no tempo}$$

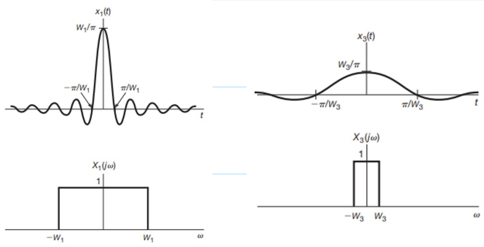
$$Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \rightsquigarrow \text{compressão na frequência}$$

O efeito audível é que as frequências de reprodução são mais baixas.

Exemplo 3) A propriedade de mudança de escala exemplifica a relação inversa entre tempo e frequência.

$$\text{Se}\quad X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Então quando $W \to \infty$, $\mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \to \delta(t)$



⑥ Dualidade

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

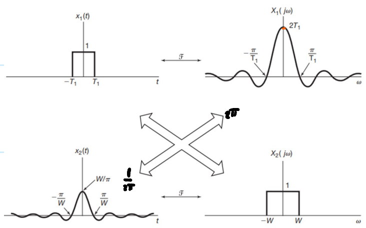
Dualidade

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Exemplo)

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega}$$

$$X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_2(t) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$$



Exercício 6) Determine $G(j\omega)$ do sinal

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \rightsquigarrow G(j\omega)$$

Solução: Considerando a propriedade de dualidade pode-se aproveitar do resultado obtido em exercício anterior

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$x(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)}^{X(j\omega)} e^{j\omega t}\, d\omega$$

$t = -t$

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) e^{-j\omega t}\, d\omega$$

$t = \omega,\ dt = d\omega$

$$2\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{1+t^2}\right)} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\underbrace{2\pi e^{-|\omega|}}_{X(j\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\therefore\ \mathcal{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

⇝ Conclusões parciais da dualidade

→ Conclusões parciais da dualidade

1- Da propriedade de diferenciação no tempo obteve-se

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

Se diferenciar na frequência obtém-se

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jt\, x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -jt\, x(t)$$

2 - Do deslocamento temporal obteve-se

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Para um deslocamento de frequência obtém-se

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega-\omega_0))$$

3 - Da integração temporal

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$

Então, a integração na frequência

$$-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\,\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)\, d\eta$$

⑦ Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

↳ espectro de densidade de energia do sinal x(t)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt$$

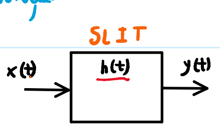
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\, e^{-j\omega t} d\omega\right] dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt\right] d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\, X(j\omega)\, d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

⑧ Convolução



$y(t) = ?$ $\quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$Y(j\omega)$? $\quad Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\; e^{-j\omega t}\, dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{\text{DESLOCAMENTO TEMPORAL} \rightsquigarrow e^{-j\omega\tau} H(j\omega)} d\tau \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}_{H(j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} H(j\omega)\, d\tau$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau}_{X(j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$\therefore$

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) = H(j\omega)\, X(j\omega)$$

$\rightsquigarrow$ Conclusões parciais

1- $H(j\omega)$ representa a resposta em frequência do sistema

↳ útil tanto quanto $h(t)$, porém análise mais fácil

Exemplo: Filtro

$H(j\omega)$ representa a mudança de amplitude complexa da entrada do sistema $X(j\omega)$ em cada frequência ω.

Exercício 7) Considere um SLIT

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

determine $y(t)$ p/ qualquer sinal $x(t)$.

Solução: $\quad H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \cdot$ ↲

$$\therefore \; Y(j\omega) = H(j\omega)\, X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0}\, X(j\omega)$$

$\mathcal{F}^{-1}\{\}$ ↓

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Exercício 8) Considere um sistema diferenciador

$$y(t) = \frac{d\, x(t)}{dt}$$

determine a resposta em frequência $H(j\omega)$

Solução: $\quad Y(j\omega) = \underbrace{j\omega}_{H(j\omega)}\, X(j\omega)$

$H(j\omega) = j\omega$