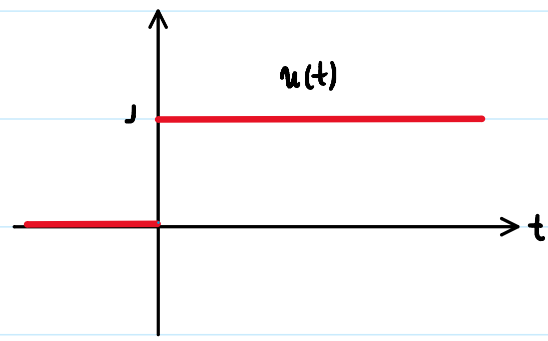
AT3 - Sinais - P2

★ Função degrau unitário

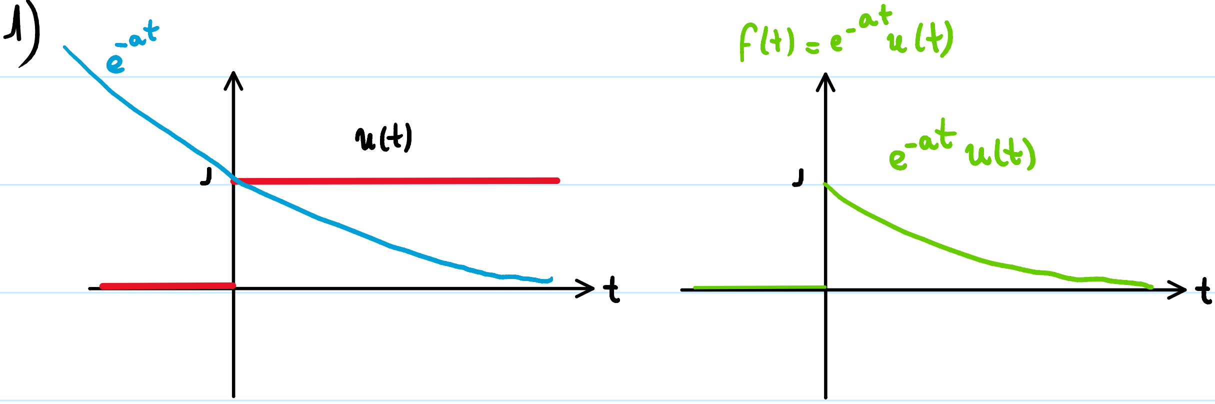
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$u(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$



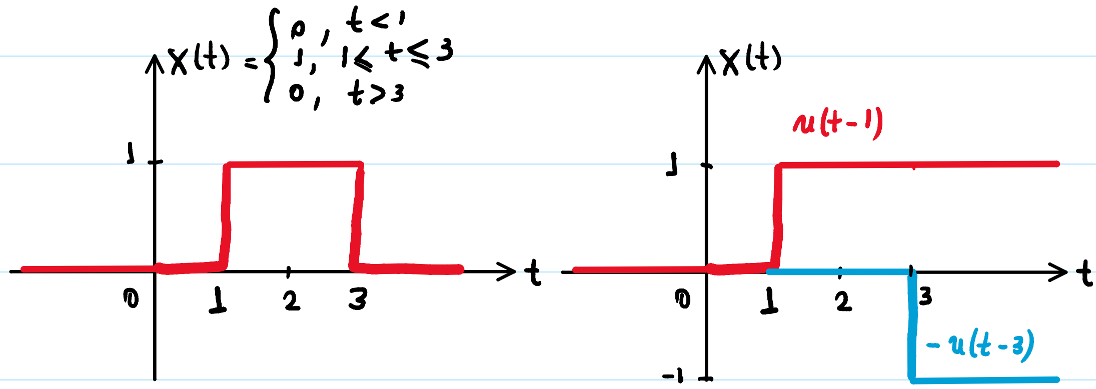
Utilidade ⇝ descrição p/ sinais causais (que começam $t=0$)

1)



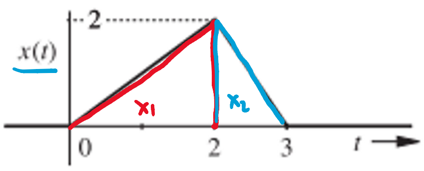
2) Descrição de sinais

a)

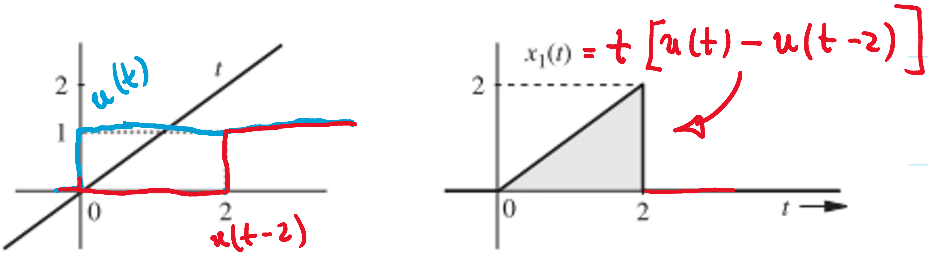


$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

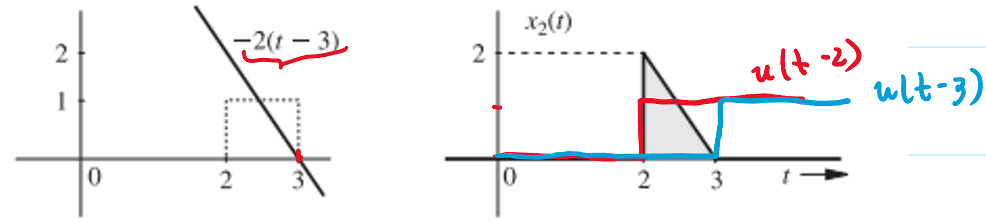
b)



(a)



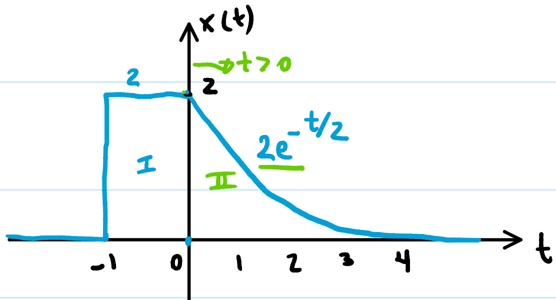
(b)



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x(t) = t\cdot\left[u(t) - u(t-2)\right] - 2\,(t-3)\left[u(t-2) - u(t-3)\right]$$

c)



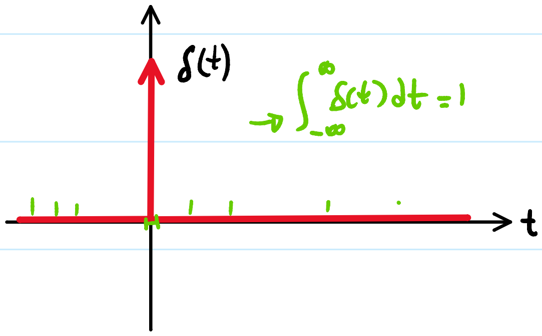
$$x(t) = \underbrace{2\left[u(t+1) - u(t)\right]}_{} + \underbrace{2e^{-t/2}\,u(t)}_{}$$

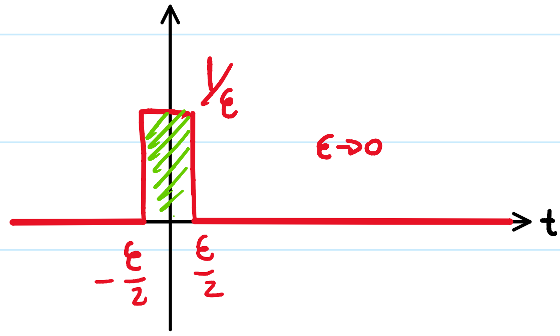
★ Função impulso unitário

$\delta(t) = 0\ ,\ \forall t \neq 0$ e p/ $t = 0 \rightsquigarrow \infty$ (indefinido)

$$\delta(t) = 0 \;,\; \forall t \neq 0 \qquad \text{e } p/\ t=0 \rightsquigarrow \infty \text{ (indefinido)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$





Propriedades de multiplicação

$\rightarrow \phi(t) \cdot \delta(t) = \phi(0)\,\delta(t)$

$\delta(t) = 0 \,,\ \forall t \neq 0$

$\rightarrow \phi(t) \cdot \delta(t-T) = \phi(T)\,\delta(t-T)$

$t = T \qquad \delta(t-T) = 0 \quad \forall t \neq T$

A multiplicação de uma função contínua no tempo $\phi(t)$ pelo impulso unitário resulta em um impulso unitário $\delta(t-T)$ resulta em um impulso unitário c/ "força"/amplitude $\phi(T)$.

→ Propriedade da amostragem

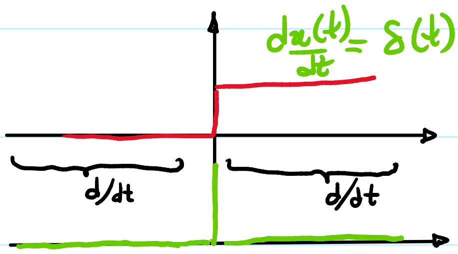
- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t)\, dt = \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = \phi(0)$

  $t = 0$

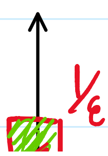
- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t-T)\, dt = \phi(T)$

  T

→ Impulso unitário como função generalizada

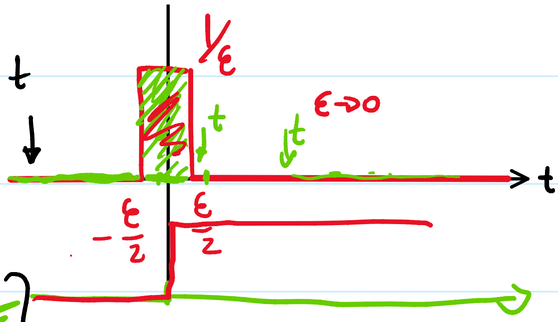


$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$



$\int^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$ $\quad t$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$



$$t < -\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = 0$$

$$t \geqslant \varepsilon/2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

$\therefore\ \varepsilon \to 0 \Rightarrow u(t)$

★ Função exponencial e^{st}

- $s \in \mathbb{C} \rightsquigarrow s = \sigma + j\omega$

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)$$

- $s^* \rightsquigarrow s = \sigma - j\omega$

$$e^{s^* t} = e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma} \cdot e^{-j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t)$$

$$\therefore \quad e^{st} + e^{s^* t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + \cancel{j \operatorname{sen} \omega t}) + e^{\sigma t}(\cos \omega t - \cancel{j \operatorname{sen} \omega t})$$

$$e^{st} + e^{s^* t} = 2 e^{\sigma t} \cos \omega t$$

$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{e^{st} + e^{s^* t}}{2} \rightsquigarrow \text{forma generalizada}$$

Fórmula de Euler $\quad \cos \omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$e^{st} \rightsquigarrow$ generaliza $e^{j\omega t}$ $\therefore$ s é a frequência complexa

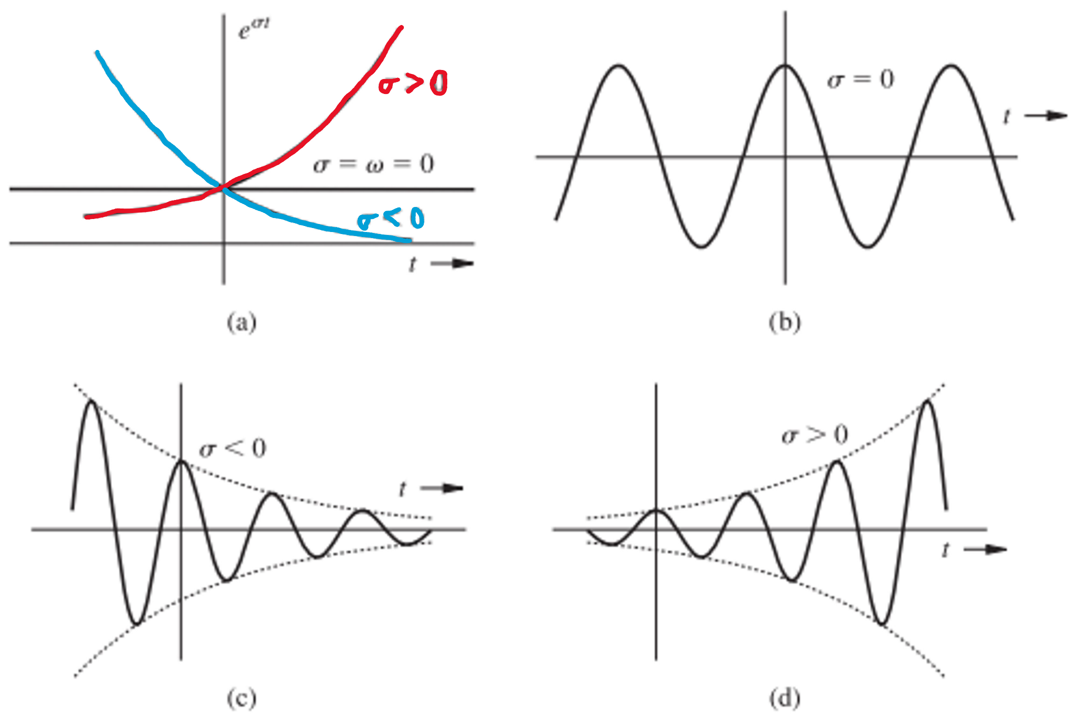
Note que e^{st} engloba uma grande classe de funções:

1) Uma constante $k = ke^{0t}$ $(s=0)$

2) Uma exponencial monotónica $e^{\sigma t}$ $(\omega=0,\ s=\sigma)$

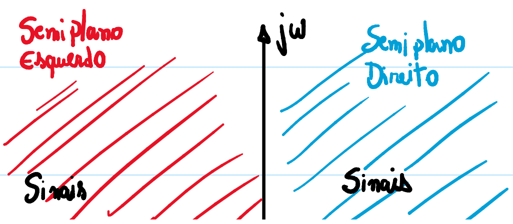
3) Uma senóide $\cos \omega t$ $(\sigma=0,\ s=\pm j\omega)$

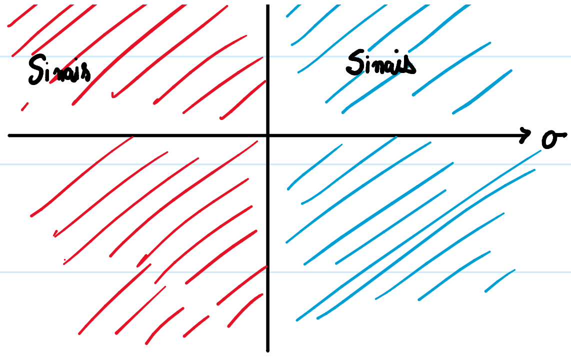
4) Uma senóide variando exponencialmente $e^{\sigma t}\cos \omega t$ $(s=\sigma\pm j\omega)$



Senóides de frequência complexa $s = \sigma + j\omega$

↳ Plano da frequência complexa s





⭐ Função pares e ímpares

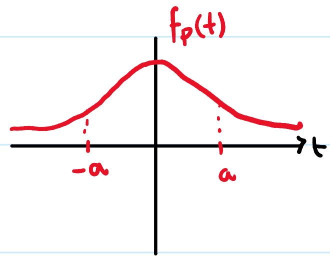
- Par $\quad f_p(t) = f_p(-t)$ ⤳ simétrica em relação ao eixo y
- Ímpar $\quad f_i(t) = -f_i(-t)$ ⤳ anti-simétrica 〃 〃

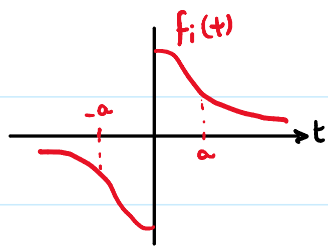
Propriedades

$$f_p(t) \times f_i(t) = g_i(t)$$

$$f_p(t) \times f_p(t) = g_p(t)$$

$$f_i(t) \times f_i(t) = g_i(t)$$





Área $\quad \int_{-a}^{a} f_p(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f_p(t)\,dt$

$$\int_{-a}^{a} f_i(t)\,dt = 0$$

Componentes pares e ímpares de um sinal

Todo sinal $x(t)$ pode ser descrito como

$$x(t) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]}_{\text{par}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]}_{\text{ímpar}}$$

Exemplo: $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x_p(t) = \tfrac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)\right]$$

$$x_i(t) = \tfrac{1}{2}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right]$$