Capítulo 5

Integrais

Um engenheiro pode usar informações quanto a taxa de variação segundo a qual a água está escoando de um tanque para determinar a quantidade escoada durante um certo período. Da mesma maneira um físico conhecendo a velocidade ou a aceleração de uma partícula pode determinar sua posição em um dado instante.

Em cada caso, o objetivo é encontrar uma função F cuja derivada é uma função conhecida f. Se a função F existir então ela é chamada de ***antiderivada*** de f.

5.1 Antidiferenciação

Você já está familiarizado com ***operações inversas: adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação.*** Nesta seção, vamos desenvolver a operação inversa da diferenciação chamada de ***antidiferenciação***.

$$F'(x) = f(x) \underset{\text{antidiferenciação}}{\Longrightarrow} F(x)$$

Definição 5.1 *Uma função F será chamada de antiderivada (ou integral indefinida) de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.*

Notação: Usa-se o símbolo $\displaystyle\int$ para denotar a operação de antidiferenciação.

Antidiferenciação é o processo de encontrar o conjunto de todas as antiderivadas de uma dada função.

Exemplo 5.1 *$F(x) = x^3$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2$ pois*

$$F'(x) = D_x(x^3) = f(x),$$

onde $D_x(x^3)$ é a derivada de x^3 em relação a x.

Há muitas outras antiderivadas de $3x^2$, tais como, $x^3 - 1$, $x^3 + \sqrt{2}$ e $x^3 + 5$. De modo geral, se C é umas constante arbitrária, então $x^3 + C$ é antiderivada de $3x^2$, pois

$$D_x(x^3 + C) = 3x^2 + 0 = 3x^2.$$

Assim, existe uma família de antiderivadas de $3x^2$ da forma $F(x) = x^3 + C$, onde C é uma constante qualquer. O próximo teorema afirma que toda antiderivada é desta forma.

Teorema 5.1 *Seja F uma antiderivada de f em um intervalo I. Se G é uma outra antiderivada de f em I, então*

$$G(x) = F(x) + C$$

para alguma constante C e todo x em I.

Observação 5.1 *Usando a definição de **diferencial** temos:*

$$d(F(x)) = F'(x)\,dx \underset{F'(x)=f(x)}{\Longrightarrow} d(F(x)) = f(x)dx$$

*Aplicando a **antidiferenciação,** temos:*

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Notação: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ se, $F'(x) = f(x)$.

Como a antidiferenciação é a operação inversa da diferenciação, os teoremas sobre antidiferenciação podem ser obtidos dos teoremas sobre diferenciação.

Teorema 5.2

i) $\displaystyle\int [D_x f(x)]dx = f(x) + C$

ii) $\displaystyle D_x\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$

Demonstração:

i) Verdadeira pois, $f'(x) = D_x f(x)$.

ii) $\displaystyle D_x\left[\int f(x)dx\right] = D_x\left[F(x) + C\right] = F'(x) + 0 = f(x)$, onde $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$.

Teorema 5.3 $\displaystyle\int dx = x + C$

Teorema 5.4 $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, *onde c é constante real.*

Teorema 5.5 *Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \ + \int f_2(x)dx$$

Teorema 5.6 *Se $f_1, f_2, ..., f_n$ estão definidas no mesmo intervalo,*

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]dx = c_1\int f_1(x)dx \ + \ c_2\int f_2(x)dx + ... + c_n\int f_n(x)dx$$

onde $c_1, c_2, ..., c_n$ são constantes.

Teorema 5.7 *Se n for um número racional*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \text{ e } C \text{ uma constante qualquer.}$$

Demonstração: $D_x\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = (n+1)\dfrac{x^n}{n+1} + 0 = x^n.$

Observação 5.2 *Para* $n{=}{-1}$ *temos* $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = ln|x|{+}C,$ $\quad C$ *uma constante qualquer.*

Exemplo 5.2 *Calcule* $\displaystyle\int (x^5 + 3x - 1)dx.$

Solução:

$$\begin{aligned}
\int (x^5 + 3x - 1)dx &= \int x^5 dx + \int 3x dx - \int dx \\
&= \int x^5 dx + 3\int x dx - \int dx \\
&= \frac{x^6}{6} + C_1 + 3\frac{x^2}{2} + C_2 - x + C_3 \\
&= \frac{x^6}{6} + 3\frac{x^2}{2} - x + C
\end{aligned}$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Observação: Não é necessário a utilização de três constantes, pois a soma de constantes é uma constante, portanto podemos substituir a soma por uma única constante.

Exemplos:

1) $\displaystyle\int x^3\,dx =$

2) $\displaystyle\int x^2\,dx =$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx =$

4) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx =$

5) $\displaystyle\int (3x+5)\,dx$

6) $\displaystyle\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$

7) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{5t^2+7}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt$

Os teoremas para a antiderivada das funções seno e cosseno seguem imediatamente dos teoremas correspondentes para diferenciação.

Teorema 5.8 $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Teorema 5.9 $\displaystyle\int sen\, x\, dx = -cos\, x + C$

Teorema 5.10 $\displaystyle\int cos\, x\, dx = sen\, x + C$

Teorema 5.11 $\displaystyle\int sec^2\, x\, dx = tg\, x \ + \ C$

Teorema 5.12 $\displaystyle\int cossec^2\, x\, dx = -cotg\, x \ + \ C$

Teorema 5.13 $\displaystyle\int sec\, x.tg\, x\, dx = sec\, x \ + \ C$

Teorema 5.14 $\displaystyle\int cossec\ x.cotg\, x\, dx = -cossec\, x \ + \ C$

Exemplo 5.3 *Calcule* $\displaystyle\int (3sec\ x\ tg\ x\ - 5\, cossec^2\, x\,)dx$

Exemplo 5.4 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{2cotgx - 3sen^2x}{senx}dx$

Exemplo 5.5 *Calcule* $\displaystyle\int (tg^2x + cotg^2x + 4)dx$

Antiderivada e taxas de variação

1. Estima-se que daqui a t meses a população de certa cidade esteja aumentando à taxa de $\frac{d}{dt}p(t) = 4 + 5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é de 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

2. Um corpo está se movendo de tal forma que que sua velocidade após t minutos é $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ m/min. Que distância o corpo percorre no 3º minuto?

3. Um botânico descobre que certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h(t)$, após t anos, está variando a uma taxa de $0,06t^{2/3} + 0,3t^{1/2}$ metros/ano. Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, qual altura estimada para daqui 27 anos?

5.1.1 Técnicas de Antidiferenciação: Regra da Cadeia e Mudança de Variável

Regra da cadeia para antidiferenciação

Observe que, para diferenciar $\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}$ usamos a Regra da Cadeia e obtemos:

$$D_x\left[\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}\right] = (1+x^2)^9(2x).$$

Suponha que desejamos antidiferenciar $(1+x^2)^9.(2x)$. Então, precisamos calcular:

$$\int (1+x^2)^9.(2x)dx = \int [g(x)]^9.[g'(x)dx] = \int u^9 du = \frac{1}{10}u^{10} + C = \frac{1}{10}(1+x^2)^{10} + C$$

A justificativa do procedimento usado para obter o resultado acima é dada pelo Teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para diferenciação, sendo chamado de *regra da cadeia para antidiferenciação.*

Teorema 5.15 *Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,*

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Se $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, então

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Exemplo 5.6 *Calcule:*

1) $\int \sqrt{3x+4}\, dx$

2) $\displaystyle\int x^2(5+2x^3)^8dx$

3) $\displaystyle\int 3x^4(5+x^5)^3dx$

4) $\displaystyle\int x.cos(x^2)dx$

5) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}\,dx$

6) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

8) $\displaystyle\int sen\,x\sqrt{1-cos\,x}\,dx$

9) $\displaystyle\int tg\,x\,dx$