

Capítulo 1

Curvas Paramétricas

1.1 Noções intuitivas

1.2 Curvas definidas por equações paramétricas

1.3 Cálculo com curvas paramétricas

1.3.1 Tangentes

1.3.2 Comprimento de arco



Figura 1.1:

Já sabemos como encontrar o comprimento L de uma curva dada na forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Suponha que C também possa ser descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde $\frac{dx}{dt} = f'(t) > 0$. Isso significa que C é percorrida uma vez da esquerda para a direita, quando t aumenta de α até β e $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$.

Usando a regra da substituição, temos:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt$$

Podemos simplificar esta fórmula e obter o seguinte teorema:

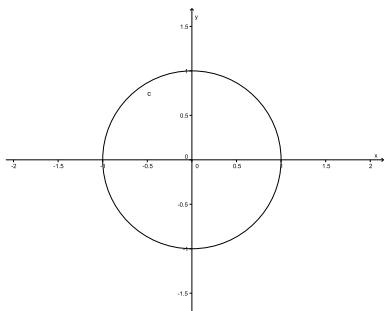
Teorema 1.1 *Se uma curva C for descrita pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C for percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de α até β , então o comprimento de C é*

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Exemplo 1.1 *Consideremos o círculo unitário cuja representação paramétrica é*

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Encontremos o comprimento do arco desta circunferência.



Exemplo 1.2 *Considere agora, encontrar o comprimento do arco da circunferência dada por:*

$$x = \sin 2t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

O que você observa???

1.3.3 Área de superfície

Da mesma maneira como para o comprimento de arco, é possível adaptar a fórmula de área de superfície vista em CDI I, para obter uma fórmula de área de superfície para curvas.

Se a curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ girar ao redor do eixo x , onde f' e g' são contínuas e $g(t) \geq 0$, então a área de superfície resultante é dada por:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Exemplo 1.3 *Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.*

1.4 Exercícios

1. Esboce a curva usando as equações paramétricas para plotar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

- (a) $x = 2t + 4$, $y = t - 1$;
- (b) $x = 3 - t$, $y = 2t - 3$, $-1 \leq t \leq 4$;
- (c) $x = 1 - 2t$, $y = t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 3$;
- (d) $x = \sin t$, $y = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$;
- (e) $x = 2\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- (f) $x = e^t$, $y = e^{-t}$

2. (a) Esboce a curva usando as equações paramétricas para plotar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

(b) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

- (a) $x = 3t - 5$, $y = 2t + 1$;
- (b) $x = 1 + t$, $y = 5 - 2t$;
- (c) $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$

3. Encontre $\frac{dy}{dx}$;

- (a) $x = t - t^3$, $y = 2 - 5t$;
- (b) $x = te^t$, $y = t + e^t$

- (c) $x = t \ln t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t;$
4. Encontre uma equação da tangente à curva no ponto correspondente ao valor do parâmetro dado.
- (a) $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t, \quad t = -1;$
 (b) $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad t = 0;$
 (c) $x = 2t^2 + 1, \quad y = \frac{1}{3}t^3 - t, \quad t = 3;$
5. Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado por dois métodos: (a) sem eliminar o parâmetro e (b) primeiro eliminando o parâmetro;
- (a) $x = e^t, \quad y = (t - 1)^2, \quad (1, 1);$
 (b) $x = 5 \cos t, \quad y = 5 \operatorname{sen} t, \quad (3, 4);$
6. Ache $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$. Para quais valores de t a curva é côncava para cima?
- (a) $x = 4 + t^2, \quad y = t^2 + t^3;$
 (b) $x = t^3 + t^2 + 1, \quad y = 1 - t^2;$
 (c) $x = t^4 - 1, \quad y = t - t^2;$
 (d) $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t;$
 (e) $x = e^{-t}, \quad y = te^{2t};$
7. Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical.
- (a) $x = t^3 - 3t, \quad y = 3(t^2 - 3);$
 (b) $x = t^3 - 3t^2, \quad y = t^3 - 3t$
8. Monte mas não avalie, uma integral que represente o comprimento da curva
- (a) $x = t - t^2, \quad y = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \quad 1 \leq t \leq 2;$
 (b) $x = 1 + e^t, \quad y = t^2, \quad -3 \leq t \leq 3;$
 (c) $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$
9. Calcule o comprimento da curva
- (a) $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 4;$

(b) $x = a(\cos t + t \cos t), \quad y = a(\sin t - t \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi;$

(c) $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3;$

(d) $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi;$

10. Monte mas não avalie, uma integral que represente a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x

(a) $x = t^3, \quad y = t^4, \quad 0 \leq t \leq 1;$

(b) $x = \sin^2 t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

11. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x

(a) $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1;$

(b) $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

Capítulo 2

Funções Vetoriais

2.1 Noções intuitivas

Funções vetoriais são aquelas funções cujos valores são vetores, tais funções são úteis para descrever superfícies e curvas espaciais; também descrevem movimento de objetos no espaço.

2.2 Funções vetoriais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem.

Uma função vetorial, ou função de valor vetorial, é uma função cujo domínio é o conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores.

Em particular, o grande interesse são as funções r cujos valores são vetores tridimensionais. Isto significa que para todo número t no domínio de r existe um único vetor de V_3 denotado por $r(t)$.

Se $f(t), g(t), h(t)$ são os componentes do vetor $r(t)$, então f, g e h são funções de valor real chamadas **funções componentes** de r e escrevemos:

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

Exemplo 2.1 *Identifique as funções componentes e estude o domínio da função vetorial $r(t)$ a seguir*

$$r(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

O **limite** de uma função vetorial r é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como se segue:

Definição 2.1 Se $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = \langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \rangle$$

desde que os limites das funções correspondentes existam.

Exemplo 2.2 Determine $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ onde $r(t) = (1 + t^3)i + te^{-t}j + \frac{\sin t}{t}k$

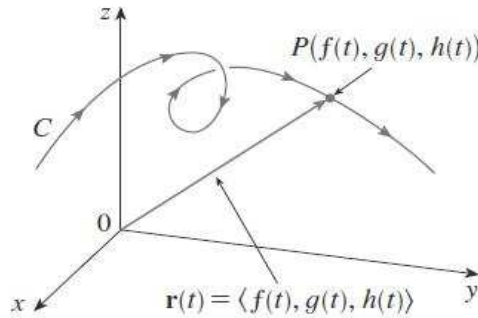


Figura 2.1:

Definição 2.2 Uma função vetorial r é **contínua em a** se

$$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = r(a)$$

E, tendo em vista a definição anterior, temos que r é contínua em a se e somente se suas funções componentes f, g e h são contínuas em a .

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que f, g e h sejam funções reais contínuas em um intervalo I . Então o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço para os quais

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I é chamado **curva espacial**. As equações anteriores são denominadas **equações paramétricas de C** e t é o **parâmetro**.

Podemos pensar em C como tendo sido traçado pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos a função vetorial $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ então $r(t)$ é o vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ sobre C . Assim, qualquer função vetorial r define uma curva espacial C que é traçada pela ponta do vetor em movimento $r(t)$, como mostrado na Figura 2.1

Exemplo 2.3 *Descreva a curva definida pela função vetorial*

$$r(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

Curvas planas podem ser representadas utilizando-se notação vetorial. Por exemplo, a curva dada pelas equações paramétricas $x = t^2 - 2t$ e $y = t + 1$ pode ser descrita pela equação vetorial

$$r(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)i + (t + 1)j$$

Exemplo 2.4 *Determine a equação vetorial e as equações paramétricas para o segmento de reta ligando o ponto $P(1, 3, -2)$ ao ponto $Q(2, -1, 3)$.*

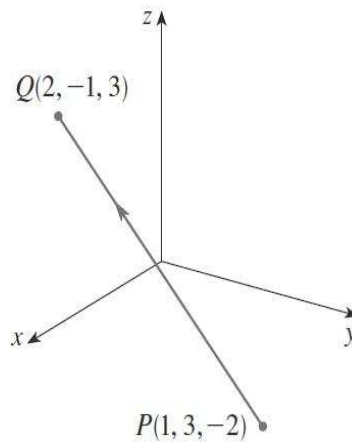


Figura 2.2:

2.3 Derivadas e integrais de funções vetoriais

2.3.1 Derivadas

A derivada r' de uma função vetorial r é definida do mesmo modo como foi feito para as funções reais:

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

se este limite existir. O significado geométrico é dado nas figuras a seguir:

O vetor $r'(t)$ é chamado de **vetor tangente** à curva definida por r no ponto P , desde que exista $r'(t)$ e $r'(t) \neq 0$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é

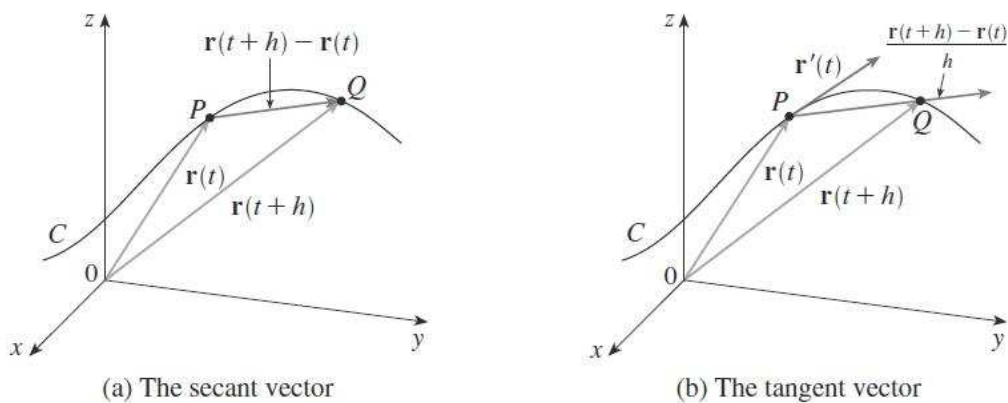


Figura 2.3:

paralela ao vetor $r'(t)$. Podemos ainda, considerar o **vetor tangente**, dado por

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

O teorema a seguir fornece um método para calcular a derivada de uma função vetorial r por diferenciação de cada componente de r :

Teorema 2.1 Se $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)i + g(t)j + h(t)k$, onde f, g e h são funções diferenciáveis, então

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k$$

Exemplo 2.5 (a) Determine a derivada de $r(t) = (1 + t^3)i + te^{-t}j + \sin 2tk$;

(b) Encontre o vetor tangente onde $t = 0$;

Exemplo 2.6 Para a curva $r(t) = \sqrt{t}i + (2 - t)j$, determine $r'(t)$ e desenhe o vetor de posição $r(1)$ e o vetor tangente $r'(1)$.

2.3.2 Regras de diferenciação

Teorema 2.2 Suponha que u e v sejam funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f , uma função real. Então,

$$1. \frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t);$$

2. $\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t);$
3. $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t);$
4. $\frac{d}{dt}u(t)f(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t);$
5. $\frac{d}{dt}u(t) \times f(t) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t);$
6. $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = f'(t)u'(f(t))$ Regra da cadeia;

Exemplo 2.7 Mostre que, se $|r(t)| = c$ (uma constante), então $r'(t)$ é ortogonal a $r(t)$ para todo t .

2.3.3 Integrais

A **integral definida** de uma função vetorial contínua $r(t)$ pode ser estabelecida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de r como a integral de suas funções componentes f, g e h como se segue:

$$\int_a^b r(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)i + \left(\int_a^b g(t)dt\right)j + \left(\int_a^b h(t)dt\right)k$$

Para estes casos, o Teorema Fundamental do Cálculo para funções vetoriais é dado como:

$$\int_a^b r(t)dt = R(t)]_a^b = R(b) - R(a)$$

onde R é uma primitiva de r , ou seja, $R'(t) = r(t)$.

Exemplo 2.8 Seja $r(t) = 2\cos t i + \sin t j + 2tk$. Calcule a integral indefinida.

Exemplo 2.9 Para o exemplo anterior, aplique o TFC para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

2.4 Exercícios

1. Determine o domínio das funções vetoriais

(a) $r(t) = \langle t\sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

(b) $r(t) = \langle \frac{t-2}{t+2}i + \sin t j + \ln(9-t^2)k \rangle$

(c) $r(t) = \langle \ln t, \frac{t}{t-1}, e^{-t} \rangle$

2. Calcule os limites

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle \cos t, \sin t, t \ln t \rangle$
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \frac{3}{1+t} \rangle$
- (c) $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{3+t} i + \frac{t+1}{t^2-1} j + \frac{tg t}{t} k \right)$
- (d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-t}, \frac{t-1}{t+1}, tg^{-1} t \rangle$

3. Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q .

- (a) $P(0, 0, 0)$ e $Q(1, 2, 3)$;
- (b) $P(1, -1, 2)$ e $Q(4, 1, 7)$;

4. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $r(t)$. (a) Desenhe os vetores $r(4, 5) - r(4)$ e $r(4, 2) - r(4)$.

(b) Esboce os vetores

$$\frac{r(4, 5) - r(4)}{0, 5} \quad \frac{r(4, 2) - r(4)}{0, 2}$$

(c) Escreva a expressão para $r'(4)$ e para seu versor tangente $T(4)$.

(d) Desenhe o vetor $T(4)$.

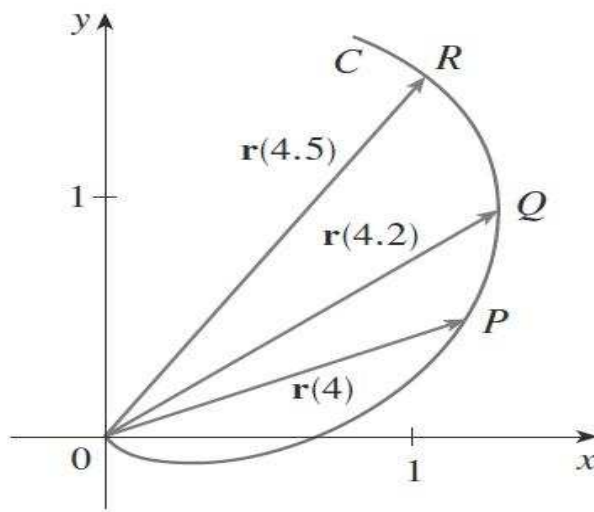


Figura 2.4:

5. (a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação dada. (b) Determine $r'(t)$. (c) Desenhe o vetor posição $r(t)$ e o vetor tangente $r'(t)$ para o valor dado de t .

(a) $r(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad t = \frac{\pi}{4}$

(b) $r(t) = \langle t^3, t^2 \rangle, \quad t = 1$

6. Determine a derivada da função vetorial

(a) $r(t) = \langle t^2, 1 - t, \sqrt{t} \rangle;$

(b) $r(t) = i - j + e^{4t}k;$

(c) $r(t) = \langle \cos 3t, t, \sin 3t \rangle;$

(d) $r(t) = e^{t^2}i - j + \ln(1 + 3t)k$

(e) $r(t) = at \cos 3t i + b \sin^3 t j + c \cos^3 t k$

7. Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

(a) $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

(b) $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

8. Calcule a integral

(a) $\int_0^1 (16t^3 i - 9t^2 j + 25t^4 k) dt;$

(b) $\int_1^2 [(1 + t^2)i - 4t^4 j - (t^2 - 1)k] dt$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t i + \sin 2t j + t \sin t k) dt$

(d) $\int_1^4 (\sqrt{t} i + t e^{-t} j + t^{-2} k) dt$

(e) $\int (e^t i + 2t j + \ln t k) dt$

(f) $\int (\cos \pi t i + \sin \pi t j + t k) dt$

9. Determine $r(t)$ se $r'(t) = t^2 i + 4t^3 j - t^2 k$ e $r(0) = j$.

10. Determine $r(t)$ se $r'(t) = \sin t i - \cos t k + 2t k$ e $r(0) = i + j + 2k$.

Capítulo 3

Cálculo Vetorial

3.1 Noções intuitivas

Aqui estudaremos o cálculo de campos vetoriais. Esses campos são funções que associam vetores a pontos do espaço. Eles surgem principalmente na hidrodinâmica e no eletromagnetismo.

Exemplos:

Exemplo 3.1 1. *Consideremos a função vetorial V que associa a cada ponto da atmosfera terrestre D a velocidade do vento neste ponto. V define um campo vetorial em D , chamado campo de velocidade.*

2. *Consideremos D como o espaço ocupado pela água em um riacho. A função que associa a velocidade de cada partícula de D em certo instante, também define um campo de velocidade em D .*

3. *A partir da Lei da Gravitação universal de Newton a terra exerce uma força de atração para o seu centro sobre qualquer corpo em sua atmosfera. A função que associa essa força a cada ponto da atmosfera D define um campo vetorial em D chamado campo de força. No caso, esse campo de força é o famoso campo gravitacional da terra.*

De forma particular, estudaremos a integral de linha para determinar o trabalho efetuado por um campo de força agindo sobre um objeto que se move ao longo de uma curva.

Definiremos a integral de superfície, usada para determinar a taxa de vazão de um fluido através de uma superfície; além dos teoremas de Green, Stokes e da Divergência.

3.2 Campos vetoriais

Os vetores da Figura 3.1 a seguir, representam os vetores velocidade do ar e indicam a rapidez, a direção e o sentido em pontos 10 metros acima da superfície na área da baía de São Francisco. Na figura a esquerda, nota-se que maior a rapidez dos ventos naquele instante ocorre quando os ventos entram na baía através da ponte Golden Gate. Na figura da direita, existe uma aspecto bem diferente em uma época posterior. Associado a cada ponto no ar podemos imaginar o vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo de vetores velocidade*.

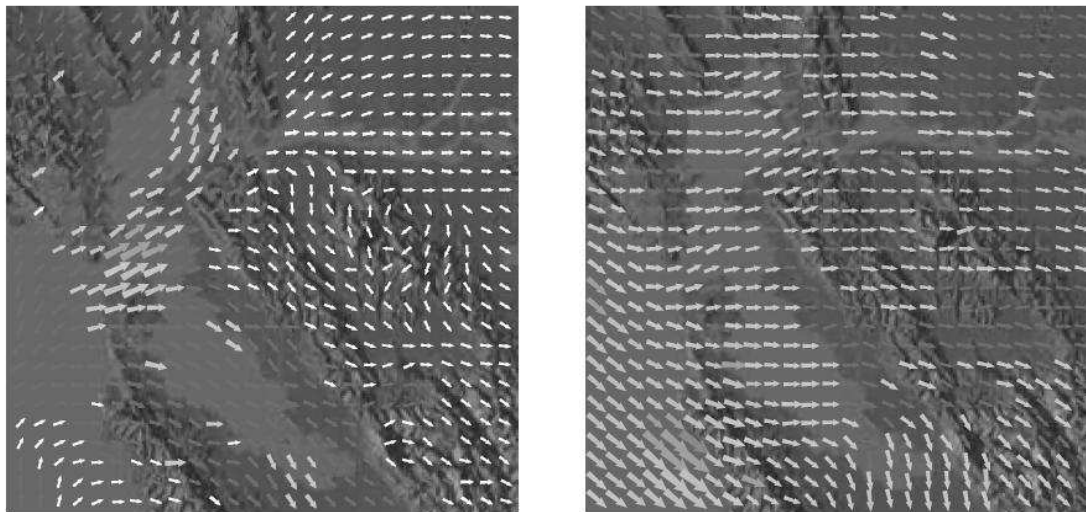


Figura 3.1:

Outro tipo de campo vetorial, chamado de *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional.

Geralmente, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos do \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

Definição 3.1 *Seja D um conjunto em \mathbb{R}^2 (uma região plana). Um **campo vetorial sobre \mathbb{R}^2** é uma função F que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $F(x, y)$.*

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar setas representando os vetores $F(x, y)$ começando por um ponto (x, y) . É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y) , mas podemos visualizar $F(x, y)$ fazendo isso para alguns pontos representativos em D , como na Figura 3.2.

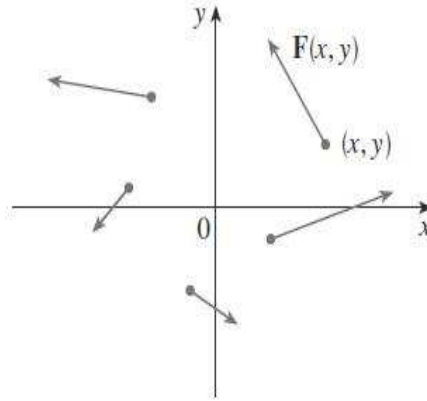


Figura 3.2: Campo vetorial no \mathbb{R}^2

Como $F(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q , como segue:

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle = Pi + Qj$$

Note que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares**, para distinguir dos campos vetoriais.

Exemplo 3.2 Consideremos o campo vetorial F dado por $F(x, y) = (-y, x)$ e selecionado alguns pontos temos

(x, y)	(1,1)	(-1,1)	(-1,-1)	(1,-1)	(1,3)	(-3,1)	(-1,-3)	(3,-1)
$F(x, y)$								

Esboçemos o campo vetorial correspondente:

Os vetores deste campo vetorial representam um campo de velocidade de uma roda em movimento.

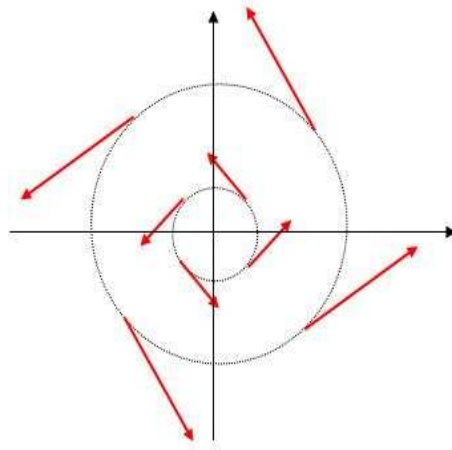


Figura 3.3: Campo vetorial no \mathbb{R}^2 exemplo

Definição 3.2 *Seja E um conjunto em \mathbb{R}^3 . Um **campo vetorial** sobre \mathbb{R}^3 é uma função F que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $F(x, y, z)$.*

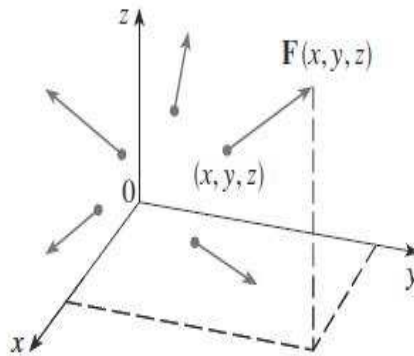


Figura 3.4: Campo vetorial no \mathbb{R}^3

Um campo vetorial F sobre \mathbb{R}^3 está ilustrado na figura 3.6. Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes P, Q e R como

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

Note que podemos definir **continuidade** de campos vetoriais e mostrar que F é contínua se e somente se suas funções componentes P, Q e R são contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor de posição $x = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $F(x)$ em vez de $F(x, y, z)$. Então F é uma função que associa um vetor $F(x)$ ao vetor x .

NOTA: Alguns softwares matemáticos são capazes de plotar campos vetoriais de no plano e no espaço como por exemplo, o Maple 12. Vejamos alguns exemplos de seu uso:

Exemplo 3.3 Consideremos novamente, o campo vetorial F dado por $F(x, y) = (-y, x)$, no Maple temos:

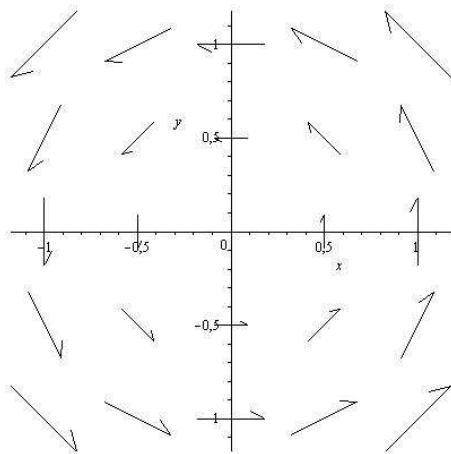


Figura 3.5: Campo vetorial no \mathbb{R}^2

Exemplo 3.4 Consideremos agora, plotar o campo vetorial F dado por $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$, no Maple temos:

3.2.1 Campos Gradientes

Se f é uma função escalar de duas variáveis, sabemos que seu gradiente ∇f (ou $\text{grad } f$) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em \mathbb{R}^2 e é denominado **campo do vetor gradiente**. Da mesma forma, se f for uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k$$

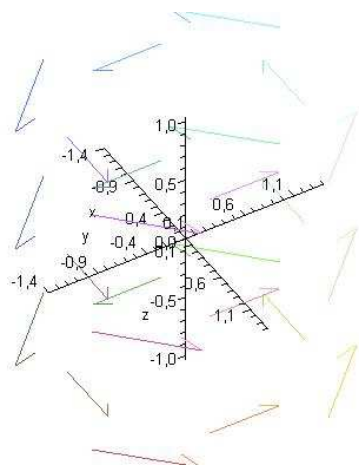


Figura 3.6: Campo vetorial no \mathbb{R}^3

Exemplo 3.5 Determine o vetor gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo de vetores gradiente e o mapa de contorno de f .

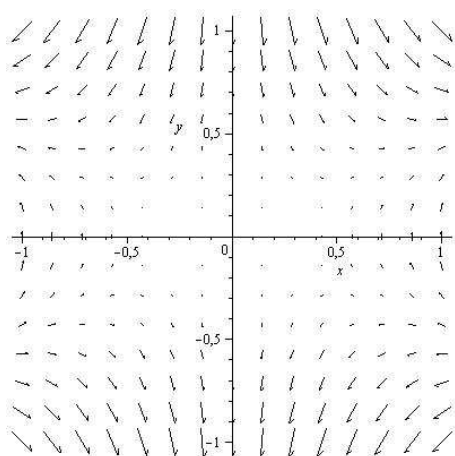


Figura 3.7: Campo de vetores gradiente

A figura 3.8 mostra o mapa de contorno de f e a figura 3.7 mostra o campo de vetores gradiente. Note que os vetores gradiente são perpendiculares às curvas de nível. Note ainda, que os vetores são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais

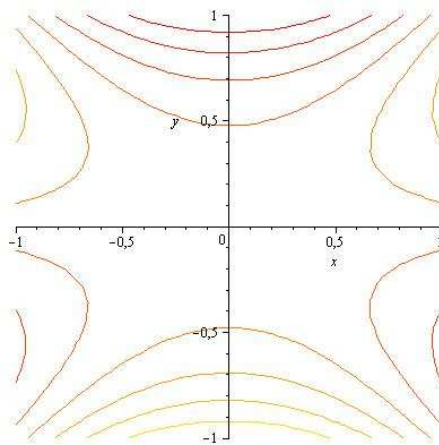


Figura 3.8: contorno de f

curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação do gráfico.

um campo vetorial F é dito ser um **campo vetorial conservativo** se ele é o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existe uma função f tal que $F = \nabla f$. Nessa situação, f é dita ser uma **função potencial de F** .

Exemplo 3.6 *Seja o campo gravitacional $F(x) = \frac{-mMGx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}i + \frac{-mMGy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}j + \frac{-mMGz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}k$. Se definirmos*

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

então

Capítulo 4

Integrais de linha

Semelhante a uma integral de uma função de uma variável real, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integramos sobre uma curva C .

Essas integrais foram inventadas no começo do século *XIX* para resolver problemas que envolviam escoamento de líquidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Seja uma curva plana C dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

ou, equivalentemente, pela equação vetorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$, e admitiremos que C seja uma curva lisa (isso significa que r' é contínua e $r'(t) \neq 0$)

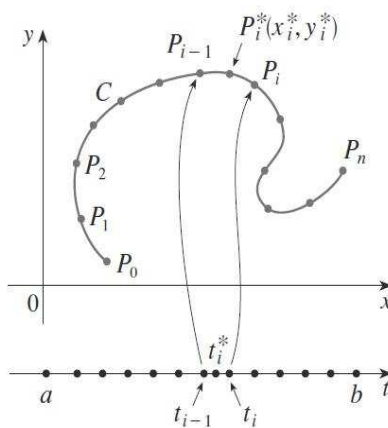


Figura 4.1:

Se dividirmos o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P(x_i, y_i)$ dividem C em

n subarcos de comprimento $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Escolhemos um ponto qualquer $P^*(x_i^*, y_i^*)$ no i -ésimo subarco. Se f é função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva C , calculamos f no ponto (x_i^*, y_i^*) , multiplicamos pelo comprimento Δs_i do subarco e somamos:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

que é semelhante à soma de Riemann. Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição por analogia com a integral de função de uma variável real.

Definição 4.1 *Se f é definida sobre uma curva lisa C dada pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, a integral de linha de f sobre C é*

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Já vimos que o comprimento de uma curva C é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

De maneira semelhante, se f é uma função contínua, então o limite da definição 4 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Assim como para integrais de funções de uma variável real, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como a área. De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y) ds$ representa a área de um lado da “cerca” ou “cortina” da figura 4.2 cuja base é C e cuja altura acima do ponto (x, y) é $f(x, y)$.

Exemplo 4.1 *Calcule $\int_C (2 + x^2 y) ds$ onde C é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.*

Suponha que C seja uma **curva lisa por trechos**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas lisas C_1, C_2, \dots, C_n onde, como ilustrado na figura 4.3 o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto

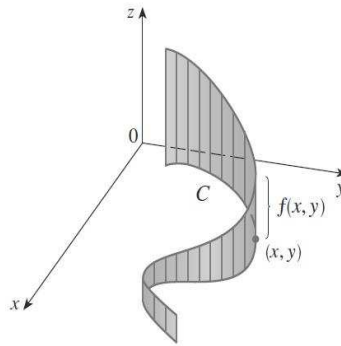


Figura 4.2:

terminal de C_i . Então definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada trecho liso de C :

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

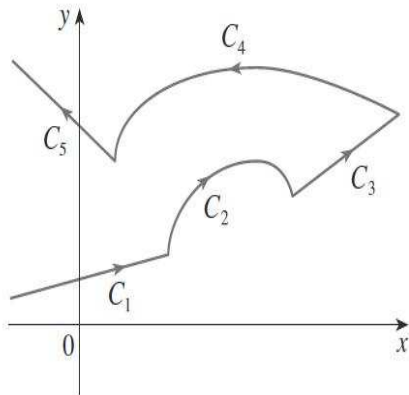


Figura 4.3:

Exemplo 4.2 Calcule $\int_C 2x ds$ onde C é formada pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

4.1 Integrais de linha no espaço

Suponhamos que C seja uma curva espacial lisa dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b$$

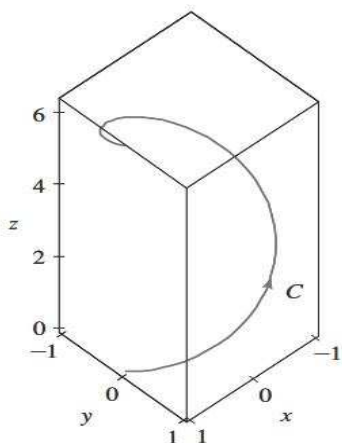
ou pela equação vetorial $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Se f é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo C , então definimos a **integral de linha de f ao longo de C** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito para curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

e calculamos esta integral da seguinte forma:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Exemplo 4.3 Calcule $\int_C y \sin z \, ds$ onde C é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



4.2 Integrais de linha de campos vetoriais

Lembremos que o trabalho feito por uma força $f(x)$ que move uma partícula de a até b ao longo do eixo x é

$$W = \int_a^b f(x) dx$$

Posteriormente, foi visto que o trabalho feito por uma força constante F para mover um objeto de um ponto P para outro Q do espaço é

$$W = F \cdot D, \quad D = \vec{PQ}$$

D é o vetor deslocamento.

Suponha que $F = Pi + Qj + Rk$ é um campo de força contínuo no \mathbb{R}^3 , queremos calcular o trabalho exercido por essa força movimentando uma partícula ao longo de uma curva lisa C .

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i dividindo o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em subintervalos de mesmo tamanho, como na figura 4.4. Escolhemos $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ do i -ésimo subarco correspondendo ao valor do parâmetro t_i^* . Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva se processa aproximadamente na direção de $T(t_i^*)$, vetor tangente a P_i^* . Então o trabalho feito pela força F para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente:

$$F(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i T(t_i^*)] = [F(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot T(t_i^*)] \Delta s_i$$

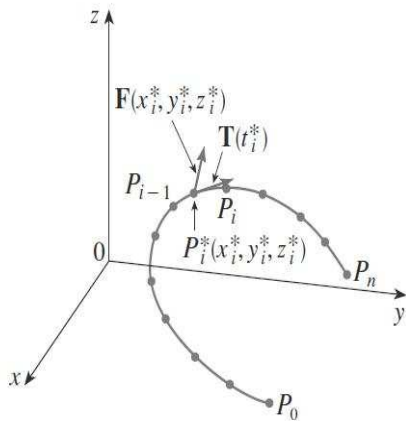


Figura 4.4:

e o trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n [[F(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot T(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \Delta s_i$$

onde $T(x, y, z)$ é o vetor tangente ao ponto (x, y, z) sobre C . Intuitivamente, podemos ver que essas aproximações ficam melhores a medida que n aumenta. Portanto, definimos o **trabalho** W

feito por um campo de força F como o limite da soma de Riemann dada pela equação anterior, ou seja

$$W = \int_C F(x, y, z) \cdot T(x, y, z) ds = \int_C F \cdot T ds$$

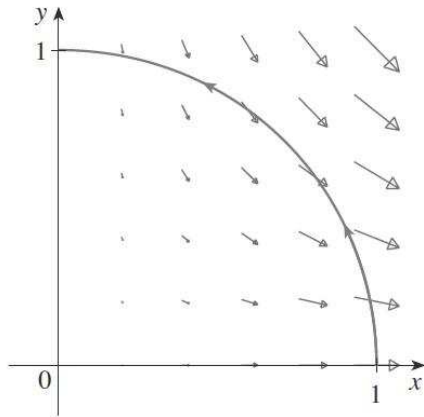
Esta integral nos diz que o trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Depois destas considerações, podemos definir a integral de linha para um campo vetorial contínuo qualquer

Definição 4.2 *Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre a curva lisa C dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Então, a **integral de linha de F ao longo de C** é*

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_C F \cdot T ds$$

Exemplo 4.4 *Determine o trabalho feito pelo campo de força $F(x, y) = x^2i - xyj$ para mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $r(t) = \cos t i + \sin t j$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.*



4.3 Teorema Fundamental para as integrais de linha

Lembremos que

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Se considerarmos o vetor gradiente ∇f da função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f , então o teorema seguinte pode ser considerado como uma versão do TFC para as integrais de linha

Teorema 4.1 *Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $r(t)$, $a \leq t \leq b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C . Então*

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(r(b)) - f(r(a))$$

Assim, se f é uma função de duas variáveis e C uma curva plana com início em $A(x_1, y_1)$ e término em $B(x_2, y_2)$, como na figura 4.5 o teorema 4.3, fica como

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Se f é uma função de três variáveis e C uma curva espacial ligando o ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ ao ponto $B(x_2, y_2, z_2)$, então temos

$$\int_C \nabla f \cdot dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

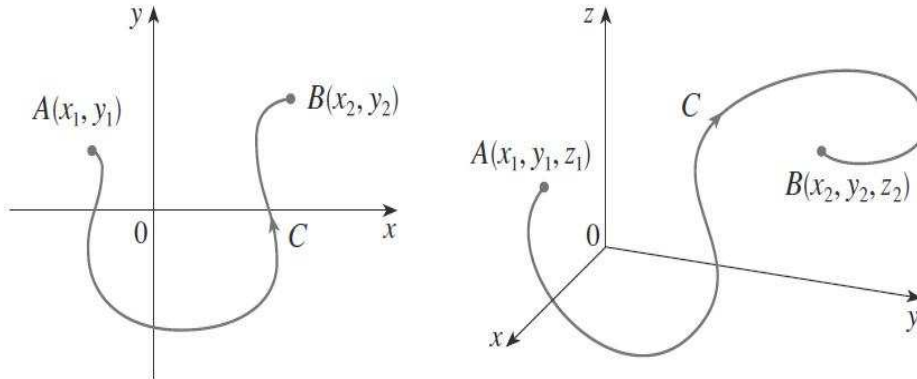


Figura 4.5:

Exemplo 4.5 *Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional*

$$F(x) = -\frac{mMG}{|x|^3}x$$

ao mover uma partícula com massa m do ponto $(3, 4, 12)$ para o ponto $(2, 2, 0)$ ao longo da curva lisa por trechos C .

4.3.1 Independência do caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas lisas por trecho (chamadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto terminal B . Sabemos que, em geral, $\int_{C_1} F \cdot dr \neq \int_{C_2} F \cdot dr$. Entretanto, do teorema 4.3

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot dr = \int_{C_2} \nabla f \cdot dr$$

sempre que ∇f for contínuo. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente dos pontos extremos da curva.

Em geral, se F for um campo vetorial contínuo com domínio D , dizemos que a integral de linha $\int_C F \cdot dr$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Assim, podemos dizer: *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho*.

Uma curva é dita **fechada** se seu ponto terminal coincide com seu ponto inicial ($r(b) = r(a)$). Se $\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D , podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A

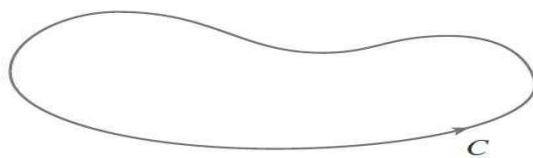


FIGURE 2
A closed curve

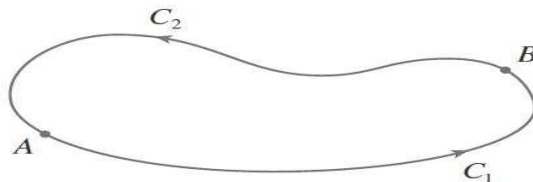


Figura 4.6: Uma curva fechada

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr - \int_{-C_2} F \cdot dr = 0$$

já que C_1 e C_2 têm os mesmos pontos iniciais e finais. Assim,

Teorema 4.2 $\int_C F \cdot dr$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C F \cdot dr = 0$ para todo caminho fechado C em D .

Como interpretação física: o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

Admitamos que D seja **aberto**, ou seja, para todo ponto P em D existe uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D (portanto D não tem nenhum ponto de sua fronteira) e que também D seja **conexo**, ou seja, quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em D .

Teorema 4.3 *Suponha que F seja um campo vetorial contínuo sobre uma região aberta conexa D . Se $\int_C F \cdot dr$ for independente do caminho em D , então F é um campo vetorial conservativo, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = F$.*

Uma questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial é conservativo ou não?

Teorema 4.4 *Se $F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre um domínio D , então em todos os pontos de D , temos*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

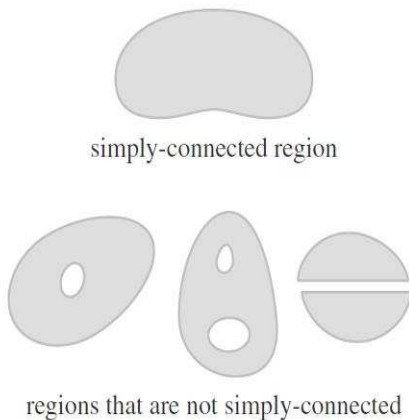


Figura 4.7: Regiões

Teorema 4.5 *Seja $F = Pi + Qj$ um campo vetorial sobre uma região D aberta e simplesmente conexa. Suponha que P e Q tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

por toda a região D .

Então F é conservativo.

Exemplo 4.6 *Determine se o campo vetorial*

$$F(x, y) = (x - y)i + (x - 2)j$$

e ou não conservativo.

Exemplo 4.7 *Determine se o campo vetorial*

$$F(x, y) = (3x + 2yx)i + (x^2 - 3y^2)j$$

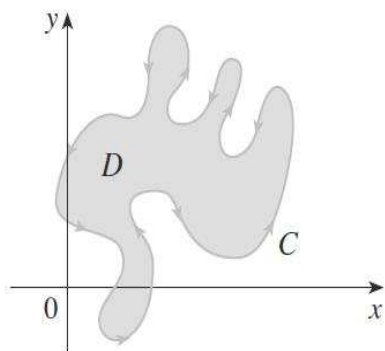
e ou não conservativo.

Exemplo 4.8 *Se $F(x, y, z) = y^2i + (2xy + e^{3z})j + 3ye^{3z}k$, determine uma função f tal que $\nabla f = F$.*

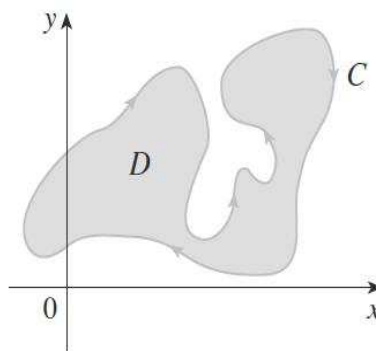
Capítulo 5

Teorema de Green

O Teorema de Green fornece uma relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região D do plano cercada por C . Para enunciar o Teorema, usaremos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples C se refere a percorrer C no *sentido anti-horário* apenas uma vez:



(a) Positive orientation



(b) Negative orientation

Teorema 5.1 *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplo 5.1 *Calcule $\int_C x^4 dx + xy dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.*

Exemplo 5.2 *Calcule $\oint (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 = 9$.*

Capítulo 6

Rotacional e Divergência

6.1 Rotacional

Se $F = Pi + Qj + Rk$ é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de F é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

Lembre que

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor com componentes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ podemos considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial F :

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}F$$

Exemplo 6.1 Se $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$, determine $\text{rot}F$.

Teorema 6.1 Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

Como um campo vetorial conservativo é tal que $F = \nabla f$, o teorema acima pode ser escrito como

$$\text{Se } F \text{ conservativo} \Rightarrow \text{rot}F = 0$$

E acabamos de obter um modo de verificar se um campo vetorial é conservativo ou não.

Exemplo 6.2 *Mostre que o campo vetorial $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$ não é conservativo.*

Teorema 6.2 *Se F é um campo vetorial definido sobre todo o \mathbb{R}^3 cujas funções componentes têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot}F = 0$, então F é um campo vetorial conservativo.*

6.2 Divergência

Se $F = Pi + Qj + Rk$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e existem $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, então a **divergência** de F é função de três variáveis definida por

$$\text{div}F = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Note que

$$\text{div}F = \nabla \cdot F$$

Exemplo 6.3 *Se $F(x, y, z) = xzi + xyzj - y^2k$, calcule $\text{div}F$.*

Teorema 6.3 *Se $F = Pi + Qj + Rk$ é um campo vetorial sobre \mathbb{R}^3 e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então*

$$\text{divrot}F = 0$$

Capítulo 7

Integrais de superfície

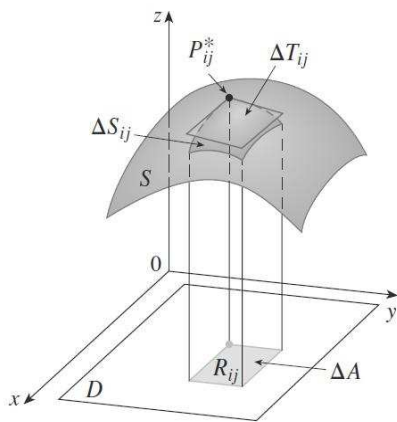
A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco.

Suponha que f seja uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície S . Dividimos S em retalhos S_{ij} com área ΔS_{ij} . Calculamos f em um ponto P_{ij}^* de cada retalho, multiplicamos por ΔS_{ij} e formamos a soma

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Então tomamos o limite quando o tamanho dos retalhos se aproxima de 0 e definimos a **integral de superfície de f sobre a superfície S** como

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$



Para calcular a integral de superfície dada anteriormente, aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área ΔT_{ij} de um paralelogramo aproximadamente no plano tangente, e o limite é a integral dupla.

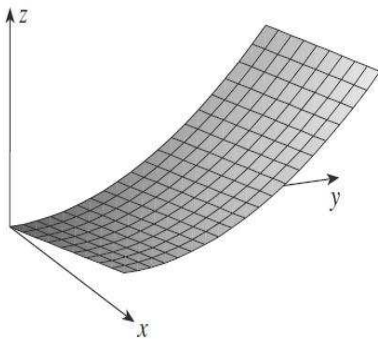
Usaremos a seguinte aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx \Delta T_{ij} = \sqrt{[g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A$$

Assim, temos para calcular a integral de superfície

$$\int_S \int f(x, y, z) dS = \int_D \int f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Exemplo 7.1 Calcule $\int \int_S y dS$ onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, como na figura abaixo.

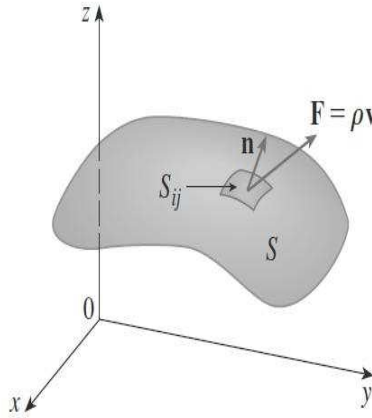


7.1 Integrais de superfície de Campos vetoriais

Suponha que S seja uma superfície orientada com vetor normal n , e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $v(x, y, z)$ fluindo através de S . Então a taxa de vazão por unidade de área é ρv . Se dividirmos S em retalhos S_{ij} , como na figura, então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal n por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho v \cdot n) A(S_{ij})$$

onde ρ , v e n são calculados em algum ponto de S_{ij} .



Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos a integral de superfície da função $\rho v \cdot n$ sobre S :

$$\int_S \int \rho v \cdot n dS = \int_S \int \rho(x, y, z) v(x, y, z) \cdot n(x, y, z) dS$$

e é interpretada fisicamente como a taxa de vazão através de S .

Se fizermos $F = \rho v$, então F é também um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e a temos

Definição 7.1 Se F for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com versor normal n , então a **integral de superfície de F sobre S** é

$$\int_S \int F \cdot dS = \int_S \int F \cdot n dS$$

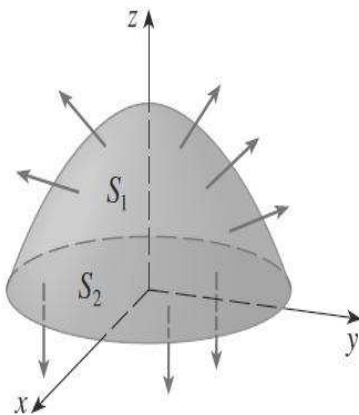
Essa integral é também chamada **fluxo** de F através de S .

e simplificando,

$$\int_S \int F \cdot dS = \int_D \int \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

onde $z = g(x, y)$.

Exemplo 7.2 Calcule $\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = yi + xj + zk$ e S é a fronteira da região sólida E contida pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.



7.2 Superfície paramétrica

Se S é dada pela função vetorial $r(u, v)$, então n é dado por

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$$

e temos

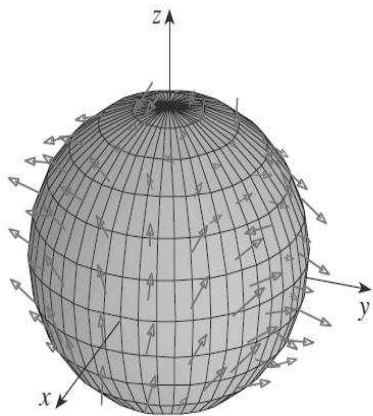
$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} dS = \iint_D \left[F(r(u, v)) \cdot \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|} \right] |r_u \times r_v| dA$$

onde D é o domínio dos parâmetros.

Note que,

$$r_x \times r_y = -\frac{\partial g}{\partial x} i - \frac{\partial g}{\partial y} j + k$$

Exemplo 7.3 Determine o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = zi + yj + xk$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

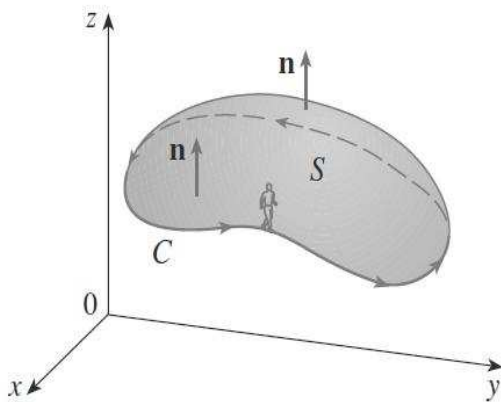


Capítulo 8

Teorema de Stokes

Pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o T. de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha ao redor de sua curva fronteira plana, o T. de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral ao redor da curva de fronteira S .

A figura 8 mostra uma superfície orientada com seu versor normal n . A orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira C** mostrada na figura. Isso significa que se vc andar na direção positiva ao redor da curva C com sua cabeça na direção e sentido de n , então a superfície estará sempre à sua esquerda.



Teorema 8.1 (Teorema de Stokes) *Seja S uma superfície orientada, lisa por trechos, cuja fronteira é formada por uma curva simples C simples, fechada, lisa por trechos, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas na região*

aberta de \mathbb{R}^3 que contém S . Então

$$\int_C F \cdot dr = \int_S \int \text{rot} F \cdot dS$$

Como

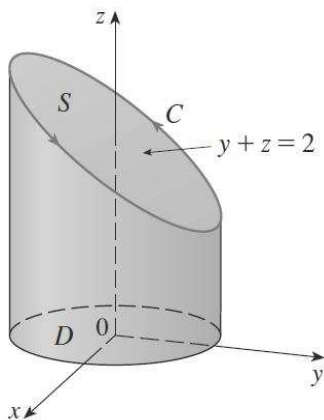
$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T ds \quad e \quad \int_S \int \text{rot} F \cdot dS = \int_S \int \text{rot} F \cdot n dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha ao redor da curva fronteira de S do componente tangencial de F é igual à integral de superfície do componente normal do rotacional de F .

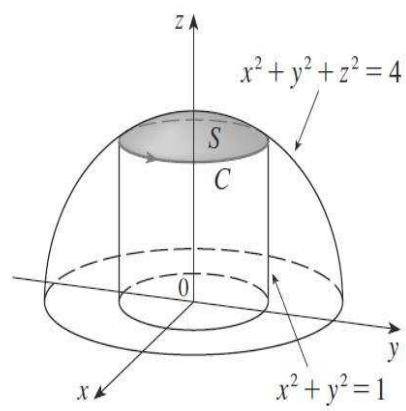
A curva fronteira orientada positivamente da superfície orientada S é com frequência denotada por ∂S , de modo que o T. de Stokes possa a ser escrito por

$$\int_S \int \text{rot} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

Exemplo 8.1 Calcule $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = -y^2i + xj + z^2k$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



Exemplo 8.2 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_S \int \text{rot} F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano- xy .



Capítulo 9

Teorema da Divergência

Também conhecido como Teorema de Gauss, este teorema estabelece o fluxo de um campo vetorial sobre uma **superfície fechada** S que é fronteira de uma região Q em três dimensões. Por exemplo, S pode ser uma esfera, um elipsóide, um cubo ou um tetraedro.

Lembremos o teorema de Green:

$$\int_C F \cdot nds = \int_D \int div F(x, y) dA$$

onde C é a curva fronteira da região do plano D , orientada positivamente. Se quisermos estender esse teorema para campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , podemos apostar que

$$\int_S \int F \cdot ndS = \int \int_E \int div F(x, y, z) dV$$

onde S é a superfície fronteira da região sólida E .

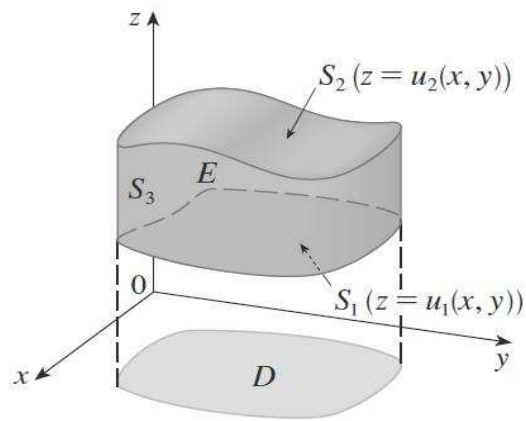
A equação anterior é verdadeira sob hipóteses apropriadas, e é chamada **Teorema da divergência**.

Teorema 9.1 (Teorema da Divergência) *Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja F um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então*

$$\int_S \int F \cdot dS = \int \int_E \int div F dV$$

Isto é, o o fluxo de F sobre S é igual à integral tripla da divergência de F sobre E .

Exemplo 9.1 *Seja E a região delimitada pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Denotaremos por S a superfície de E . Se $F(x, y, z) = x^3i + y^3j + z^3k$, use o teorema da divergência para calcular $\int_S \int F \cdot ndS$.*



Exemplo 9.2 Calcule $\int_S \int F \cdot dS$ onde

$$F(x, y, z) = xyi + (y^2 + e^{xz^2})j + \sin(xy)k$$

e S é a superfície da região E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

