16

Cálculo Vetorial

16.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha

O Teorema Fundamental das Integrais de Reta

Lembre-se que a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrita como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde *F*′ é contínua em [*a*, *b*]. A Equação 1 é também chamada Teorema da Variação Total: a integral de uma taxa de variação é a variação total.

O Teorema Fundamental das Integrais de Reta

Se consideramos o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis como uma espécie de derivada de f, então o teorema seguinte pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

$\boxed{2}$ **Teorema** Seja C uma curva lisa dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Exemplo 1

Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa *m* do ponto (3, 4, 12) para o ponto (2, 2, 0) ao longo da curva suave por partes *C*.

SOLUÇÃO: Sabemos que **F** é um campo vetorial conservador e, de fato, **F** = ∇*f*, onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Portanto, pelo Teorema 2, o trabalho realizado é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$

Independência do Caminho

Independência do Caminho

Suponha que C_1 e C_2 sejam curvas suaves por partes (denominadas **caminhos**) que têm o mesmo ponto inicial A e o mesmo ponto final B. Sabemos que, em geral, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Mas uma decorrência do Teorema 2 é que

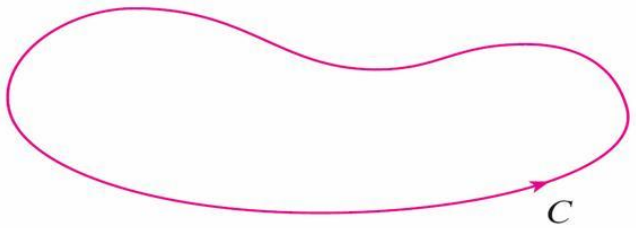
$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que ∇f é contínua. Em outras palavras, a integral de linha de um campo vetorial *conservativo* depende somente das extremidades da curva.

Independência do Caminho

Em geral, se **F** for um campo vetorial contínuo com domínio D, dizemos que a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é **independente do caminho** se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em D que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com essa terminologia, podemos dizer que *as integrais de linha de campos vetoriais conservativos são independentes do caminho.*

Uma curva é denominada **fechada** se seu seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (veja a Figura 2).



Uma curva fechada

Figura 2

Independência do Caminho

Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D e C é uma curva fechada em D, podemos escolher quaisquer dois pontos A e B sobre C e olhar C como composta por um caminho C_1 de A a B seguido de um caminho C_2 de B a A. (Veja a Figura 3.)

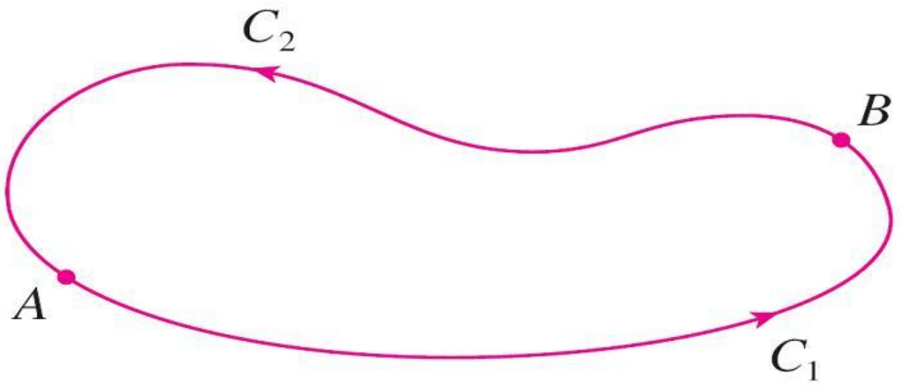


Figura 3

Independência do Caminho

Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

já que C_1 e $-C_2$ têm os mesmos pontos inicial e final.

Por outro lado, se é verdade que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ sempre que C for um caminho fechado em D, podemos demonstrar a independência do caminho da seguinte forma. Tome quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 de A a B em D e defina C como a curva constituída por C_1 seguida por $-C_2$.

Independência do Caminho

Então

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

e assim $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Assim, demonstramos o seguinte teorema:

$\boxed{3}$ **Teorema** $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

Como sabemos que a integral de linha de qualquer campo vetorial conservativo **F** é independente do caminho, segue que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer caminho fechado.

Independência do Caminho

A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

O teorema a seguir diz que *todos* os campos vetoriais independentes do caminho são conservativos. Ele foi enunciado e demonstrado para curvas planas, mas existe uma versão espacial desse teorema.

4 **Teorema** Suponha $\mathbf{F}$ como sendo um campo vetorial contínuo em uma região aberta conectada D. Se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for independente do caminho em D, então $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservador em D, ou seja, existe uma função f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Independência do Caminho

Admita que D seja **aberto**, o que significa que para cada ponto P em D existirá uma bola aberta com centro em P inteiramente contida em D. (Portanto, D não tem nenhum ponto de sua fronteira). Além disso, vamos supor que D seja **conexo por caminhos**: isso significa que quaisquer dois pontos em D podem ser ligados por um caminho que se encontra em D.

A questão permanece: como é possível saber se um campo vetorial **F** é conservativo ou não? Suponha que saibamos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então existe uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, ou seja,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Independência do Caminho

Portanto, pelo Teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

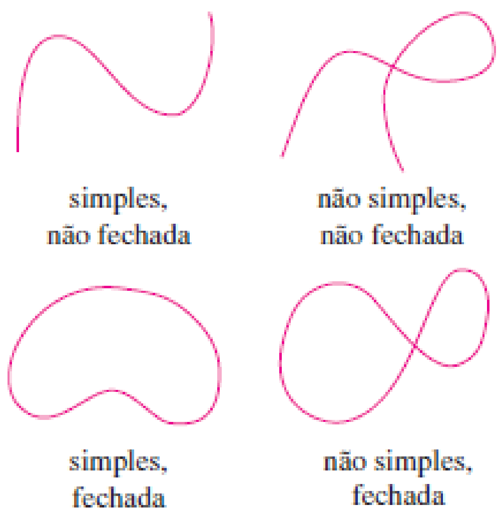
$\boxed{5}$ **Teorema** Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservador, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

A recíproca do Teorema 5 só é verdadeira para um tipo especial de região.

Independência do Caminho

Para explicar isso, precisamos do conceito de **curva simples**, que é uma curva que não se autointercepta em nenhum ponto entre as extremidades. [Veja a Figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para uma curva fechada simples, mas $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ quando $a < t_1 < t_2 < b$.]



Tipos de curva

Figura 6

Independência do Caminho

No Teorema 4 precisamos de uma região conexa por caminhos. Para o próximo teorema, precisaremos de uma condição mais forte. Uma **região simplesmente conexa** no plano é uma região conexa por caminhos *D* tal que toda curva fechada simples em *D* inclui os pontos que estão em *D*. Observe a partir da Figura 7 que, intuitivamente falando, uma região simplesmente conexa não contém nenhum buraco e não podem consistir em duas partes separadas.

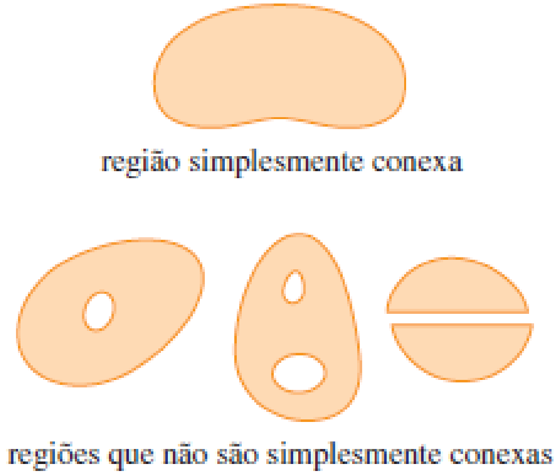


Figura 7

Independência do Caminho

Para regiões simplesmente conexas podemos agora enunciar a recíproca do Teorema 5, que fornece um processo conveniente para verificar se um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é conservativo.

$\boxed{6}$ **Teorema** Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conectada D. Suponhamos que P e Q têm contínuos de primeira ordem e derivados

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o D}$$

Então $\mathbf{F}$ é conservador.

Exemplo 2

Determine se o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

é ou não conservativo.

SOLUÇÃO: Sejam $P(x, y) = x - y$ e $Q(x, y) = x - 2$. Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, pelo Teorema 5, **F** não é conservativo.

Conservação de Energia

Conservação de Energia

Vamos aplicar as ideias deste capítulo a um campo de força contínuo **F** que move um objeto ao longo de um caminho C dado por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $\mathbf{r}(a) = A$ é o ponto inicial e $\mathbf{r}(b) = B$ é o ponto terminal de C. De acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, a força $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ a um ponto em C está relacionada com a aceleração $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ pela equação

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\,\mathbf{r}''(t)$$

Assim, o trabalho realizado pela força sobre o objeto é

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Conservação de Energia

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)] \, dt$$

(Pela fórmula $\frac{d}{dt}$ $[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$
$= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$)

$$= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2 \, dt = \frac{m}{2} \Big[|\mathbf{r}'(t)|^2 \Big]_a^b$$

(Teorema Fundamental do Cálculo)

$$= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right)$$

Portanto,

15
$$W = \tfrac{1}{2} m |\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2} m |\mathbf{v}(a)|^2$$

onde **v** = **r**′ é a velocidade.

Conservação de Energia

A quantidade $\frac{1}{2}m\,|\,\mathbf{v}(t)\,|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

$$\boxed{16} \qquad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho *C* é igual à variação da energia cinética nas extremidades de *C*.

Agora vamos admitir que **F** seja um campo de forças conservativo; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$.

Conservação de Energia

Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

Conservação de Energia

que diz que, se um objeto se move de um ponto *A* para outro *B* sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo.*