5.5 Técnicas de Integração

5.5.1 Integração por partes

Se $u = f(x)$ e $v = g(x)$, e se f' e g' são contínuas, então

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Exemplo 5.13 *Calcular* $\int xe^x dx$.

Exemplo 5.14 *Calcular* $\int \ln x dx$.

Exemplo 5.15 *Calcular* $\int e^x \cos x dx$.

Exemplo 5.16 *Calcular* $\int x^2\ e^x dx$.

5.5.2 Integrais trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

Exemplo 5.17 *Calcular* $\int \cos^3 x dx$.

Exemplo 5.18 *Calcular* $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx$.

Exemplo 5.19 *Ache* $\int \operatorname{sen}^4 x dx$.

Estratégia para calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$

(a) Se a potência do cosseno é ímpar (n=2k+1), guarde um fator cosseno e use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de seno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \operatorname{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx\end{aligned}$$

Neste caso, substitua $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Se a potência de seno é ímpar (m=2k+1), guarde um fator seno e use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, para expressar os fatores remanescentes em termos de cosseno:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$

Então substitua $u = \cos x$. [Note que se ambos os fatores de seno e cosseno são ímpares, podemos usar (a) ou (b)]

(c) Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algumas vezes é útil usar a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Exemplo 5.20 *Calcule* $\displaystyle\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x dx$.

Podemos empregar uma estratégia semelhante para avaliar as integrais da forma $\displaystyle\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$.

Exemplo 5.21 *Calcule* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$.

Exemplo 5.22 *Calcule* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 \theta \sec^7 \theta d\theta$.

Estratégia para avaliar $\displaystyle\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$

(a) Se a potência da secante é par ($n = 2k, k \geq 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x dx &= \int \operatorname{tg}^m x (sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx\end{aligned}$$

Assim, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

(b) Se a potência da tangente é ímpar (m=2k+1), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use

$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores remanescentes em termos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx\end{aligned}$$

Então substitua $u = \sec x$.

Exemplo 5.23 *Calcular* $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas. Para avaliar as integrais

$(a) \int \operatorname{sen} mx \cos nx dx$;
$(b) \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx dx$;
$(c) \int \cos mx \cos nx dx$; use a identidade correspondente:

(a) $\operatorname{sen} A \ \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \ \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

(c) $\cos A \ \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

Exemplo 5.24 *Calcule* $\int \operatorname{sen} 4x \ \cos 5x \ dx$.

Exemplo 5.25 *Calcule* $\int \cos 5x \ \cos 3x \ dx$.

5.5.3 Substituição Trigonométrica

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja um a um (possui inversa).

Expressão	Substituição	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 \theta - 1 = \operatorname{tg}^2\theta$

Exemplo 5.26 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx.$

Exemplo 5.27 *Ache* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} dx$

Exemplo 5.28 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx, \; a > 0.$

5.5.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Integração de funções racionais por frações parciais quando o denominador tem somente fatores lineares

Recordemos que, se H é uma função racional, então $H(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios. Agora estabeleceremos regras para o cálculo de $\int H(x)\ dx$.

Consideremos o caso específico $H(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)}$. É fácil ver que

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

A expressão á esquerda da equação é chamada decomposição em frações parciais de $\dfrac{2}{(x^2-1)}$. Para achar $\int H(x)\ dx$, integramos cada uma das frações que constituem a decomposição, obtendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx \\
&= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \\
&= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C
\end{aligned}$$

Estamos interessados em calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

onde o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$. Se isto não ocorrer, teremos que recorrer à divisão para chegar à forma adequada. Por exemplo, dada

$$\frac{x^3-6x^2+5x-3}{x^2-1}$$

obtemos, por divisão,

$$\frac{x^3-6x^2+5x-3}{x^2-1} = x - 6 + \frac{6x-9}{x^2-1}$$

Passamos então á decomposição de $\dfrac{6x-9}{x^2-1}$ em frações parcias.

Para escrever $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como uma soma de frações parciais usamos a fatoração de $Q(x)$ num produto de fatores lineares e quadráticos. A existência desses fatores é garantida pelo Teorema Fundamental da Álgebra.

Caso 1: os fatores de Q(x) são todos lineares e nenhum é repetido.

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)...(a_nx + b_n)$$

Nesse caso, teremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n},$$

onde A_1, $A_2 \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 5.29 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$

Exemplo 5.30 *Mostre que* $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ *e que* $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

Caso 2: os fatores de Q(x) são todos lineares e alguns são repetidos, ou seja, em algum $\mathbf{(a_ix+b_i)^{p_i}}$ têm-se: $\mathbf{p_i > 1}$

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^{p_1}(a_2x + b_2)^{p_2}...(a_nx + b_n)^{p_n},\ p_i \in \mathbb{N}$$

Se $(a_ix + b_i)$ é um fator que se repete p vezes ($p_i = p$) então o correspondente a este fator é a soma das seguintes p frações parciais:

$$\frac{A_1}{(a_ix+b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_ix+b_i)^{p-1}} + ... + \frac{A_{p-1}}{(a_ix+b_i)^2} + \frac{A_p}{(a_ix+b_i)^1},$$

onde A_1, $A_2 \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas para cada fator $(a_ix + b_i)$ que se repete p vezes.

Exemplo 5.31 $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}dx = \int \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}dx$

Integração de funções racionais por frações parciais quando o denominador contém fatores quadráticos irredutíveis

Caso 3: Os fatores de Q(x) são lineares e quadráticos e nenhum fator quadrático é repetido.

Correspondendo ao fator quadrático $ax^2 + bx + c$ no denominador, temos uma fração parcial da forma $\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$.

Exemplo 5.32 $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 2x - 3)}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}dx$

Caso 4: Os fatores de Q(x) são lineares e quadráticos e alguns dos fatores quadráticos são repetidos.

Se $ax^2 + bx + c$ for um fator quadrático de $Q(x)$ que se repete p vezes, então, correspondendo ao fator $(ax^2 + bx + c)^p$, teremos a soma das p frações parciais:

$$\frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)^p} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^{p-1}} + ... + \frac{A_px + B_p}{(ax^2 + bx + c)^1}$$

ILUSTRAÇÃO: Se o denominador contém o fator $(x^2 - 5x + 2)^3$, correspondendo a esse fator,

$$\frac{Ax + B}{(x^2 - 5x + 2)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 - 5x + 2)^1}$$

ou de forma mais conveniente,

$$\frac{A(2x - 5) + B}{(x^2 - 5x + 2)^3} + \frac{C(2x - 5) + D}{(x^2 - 5x + 2)^2} + \frac{E(2x - 5) + F}{(x^2 - 5x + 2)^1}$$

Exemplo 5.33 $\displaystyle\int \frac{(1 - x + 2x^2 - x^3)}{x(x^2 + 1)^2}dx$