13 Funções Vetoriais

13.1

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em geral, uma função é uma regra que associa a cada elemento de seu domínio um elemento de sua imagem.

Uma **função vetorial**, ou **função a valores vetoriais**, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores. Estamos particularmente interessados em funções $\mathbf{r}$ cujos valores são tridimensionais. Isso significa que, para todo número t no domínio de $\mathbf{r}$ existe um único vetor de V_3 denotado por $\mathbf{r}(t)$. Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são as componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f, g e h são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de $\mathbf{r}$ e podemos escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Se $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ são as componentes do vetor $\mathbf{r}(t)$, então f, g e h são funções a valores reais chamadas **funções componentes** de $\mathbf{r}$ e podemos escrevemos

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

Usamos a letra t para denotar a variável independente porque ela representa o tempo na maioria das aplicações de funções vetoriais.

Exemplo 1 – *Domínio da função vetorial*

Se

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

então, as funções componentes são

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

Pela convenção usual, o domínio de **r** constituído por todos os valores de t para os quais a expressão $\mathbf{r}(t)$ está definida. As expressões t^3, $\ln(3 - t)$ e $\sqrt{t}$ são definidas quando $3 - t > 0$ e $t \geq 0$. Portanto, o domínio de **r** é o intervalo $[0, 3)$.

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

O **limite** de uma função vetorial **r** é definido tomando-se os limites de suas funções componentes como a seguir.

$\boxed{1}$ Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

desde que os limites das funções componentes existam.

Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Uma função vetorial **r** é **contínua em *a*** se

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Em vista da Definição 1, vemos que **r** é contínua em *a* se e somente se suas funções componentes *f*, *g* e *h* são contínuas em *a*.

As curvas espaciais e as funções vetoriais contínuas estão intimamente relacionadas. Suponha que *f*, *g* e *h* sejam funções reais contínuas em um intervalo *I*.

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Em seguida, o conjunto C de todos os pontos (x, y, z) no espaço, onde

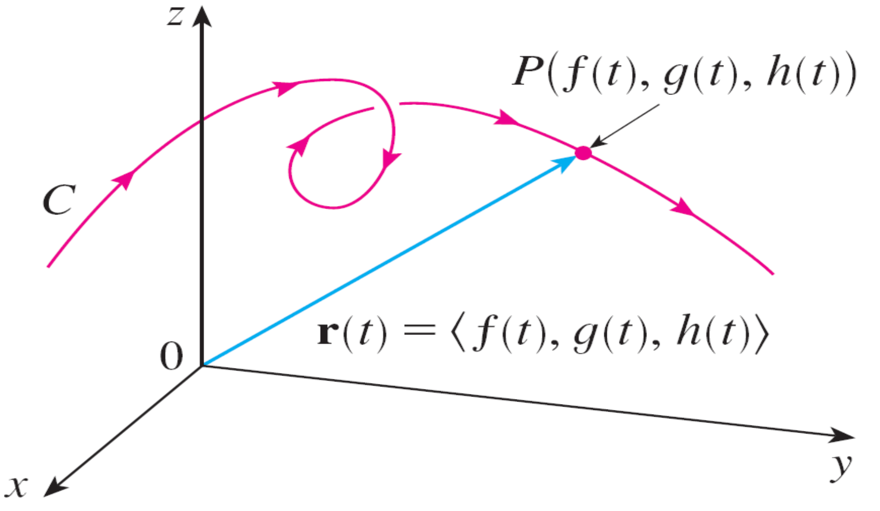
$$\boxed{2} \qquad x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

e t varia no intervalo I, é chamado **curva espacial**.

As equações em $\boxed{2}$ são denominadas **equações paramétricas de *C*** e t é conhecido como **parâmetro**. Podemos pensar em C como tendo sido traçada pelo movimento de uma partícula cuja posição no instante t é $(f(t), g(t), h(t))$. Se considerarmos agora a função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, então $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição do ponto $P(f(t), g(t), h(t))$ em C.

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

Assim, qualquer função de vetor contínuo **r** define uma curva espacial *C* que é traçada pela ponta do vetor em movimento **r**(*t*), como mostrado na Figura 1.



C é traçada pelo movimento da ponta do vetor de posição **r**(*t*).

Figura 1

Exemplo 4 – *Esboce uma hélice*

Esboce a curva cuja equação vetorial é

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \ \mathbf{i} + \text{sen } t \ \mathbf{j} + t \ \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO: As equações paramétricas para essa curva são

$$x = \cos t \qquad y = \text{sen } t \qquad z = t$$

Uma vez que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$, a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto de (x, y, z) está diretamente acima do ponto de $(x, y, 0)$, que se move para a esquerda em torno do círculo $x^2 + y^2 = 1$ no plano xy.

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

(A projeção da curva sobre o *xy* plano têm equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 0 \rangle$.) Como $z = t$ a curva gira para cima ao redor do cilindro quando *t* aumenta. A curva, mostrada na Figura 2, é chamada **hélice**.

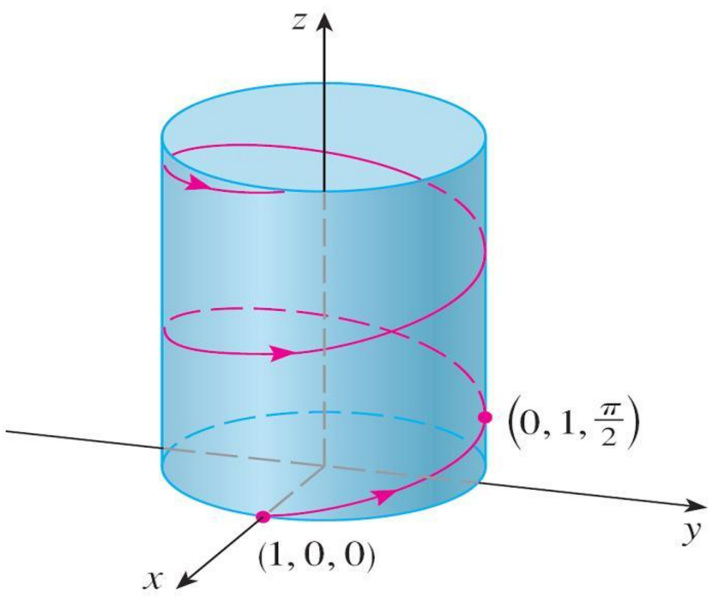


Figura 2

Funções Vetoriais e Curvas Espaciais

A forma de saca-rolha da hélice circular do Exemplo 4 é a mesma das molas. Elas também aparecem no modelo do DNA (ácido desoxirribonucleico, material genético de células vivas). Em 1953 James Watson e Francis Crick mostraram que a estrutura da molécula de DNA é de duas hélices, circulares paralelas interligadas, como na Figura 3.

Uma hélice dupla

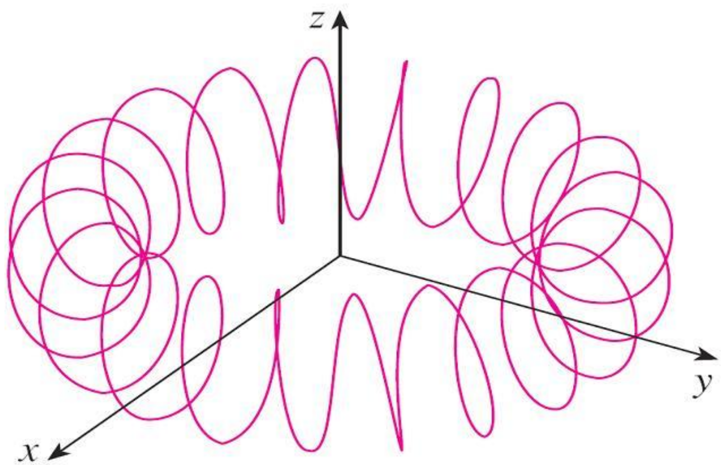
Figura 3

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

As curvas espaciais são inerentemente mais difíceis de desenhar que as curvas planas. Para uma representação mais precisa precisamos utilizar a tecnologia. Por exemplo, a Figura 7 mostra o gráfico gerado por computador da curva com equações paramétricas

$$x = (4 + \text{sen } 20t) \cos t$$
$$y = (4 + \text{sen } 20t) \text{ sen } t$$
$$z = \cos 20t$$



Espiral toroidal

Figura 7

Essa curva é denominada **espiral toroidal**, pois está sobre um toro.

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

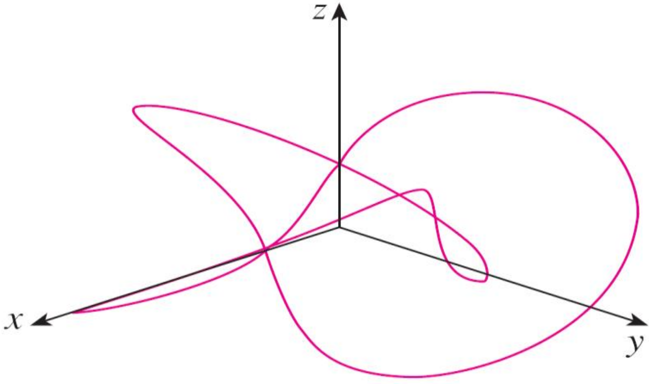
Outra curva interessante, o **nó de trevo ou trifólio**, com equações

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t$$

$$y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$

$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

está ilustrada na Figura 8. Seria muito difícil traçar qualquer uma dessas curvas à mão.



Nó de trevo

Figura 8

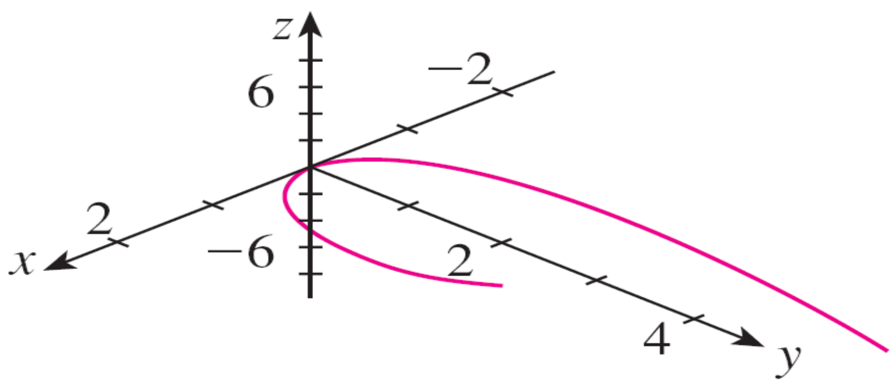
Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Mesmo com o auxílio de computador no desenho de curvas espaciais, as ilusões ópticas tornam difícil entender a forma real da curva. (Isso é especialmente verdadeiro para a Figura 8.) O exemplo seguinte mostra como lidar com este problema.

Exemplo 7

Utilize um computador para traçar a curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Essa curva é chamada **cúbica retorcida**.

SOLUÇÃO: Começaremos traçando, com o auxílio do computador, a curva com equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ para $-2 \leq t \leq 2$. O resultado é mostrado na Figura 9(a), mas é difícil ver a verdadeira natureza da curva através desse único gráfico.



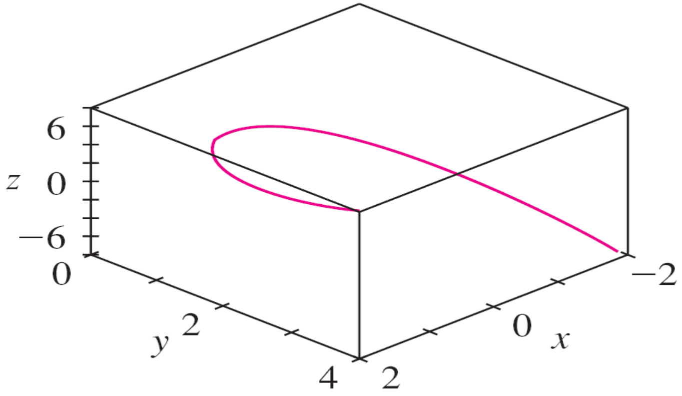
Vistas da cúbica torcida

Figura 9(a)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

A maioria dos programas de computador para desenhar em três dimensões permite, em vez de utilizar os eixos coordenados, colocar uma caixa envolvendo a curva ou superfície. Quando olhamos a mesma curva na caixa na Figura 9(b), conseguimos visualizar melhor sua forma.



Vistas da cúbica torcida

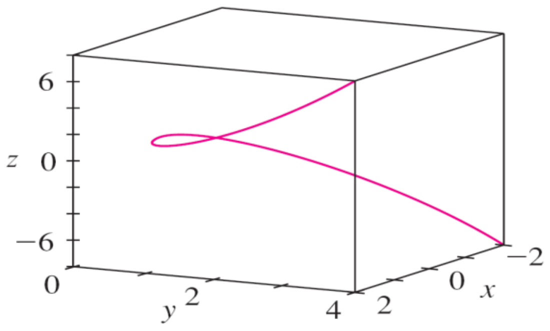
Figura 9(b)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Podemos ver que a curva se eleva do canto inferior da caixa para o canto superior mais próximo de nós, torcendo-se à medida que sobe.

Temos uma ideia melhor da curva quando a observamos de diversos ângulos. A Figura 9(c) apresenta o resultado da rotação da caixa para fornecer outro ponto de vista.



Vistas da cúbica torcida

Figura 9(c)

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

As partes 9(d), 9(e) e 9(f) mostram o que vemos quando olhamos diretamente através de uma face da caixa.

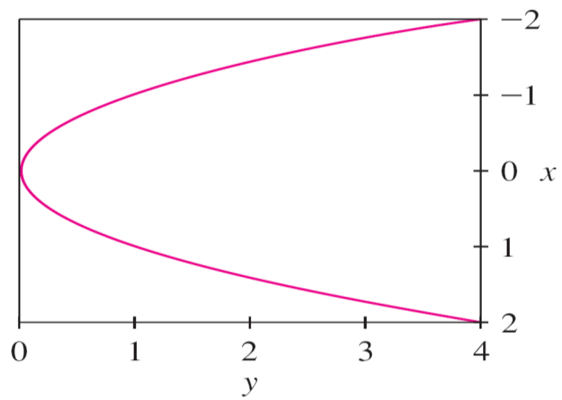


Figura 9(d)

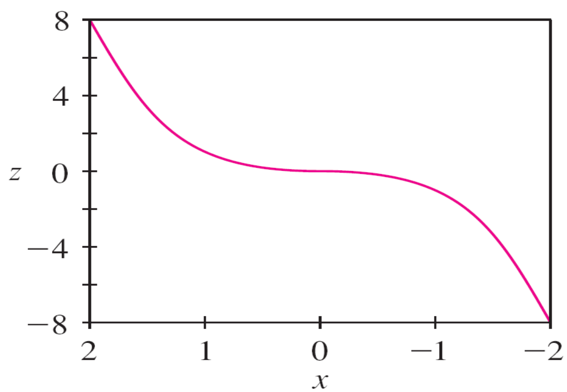


Figura 9(e)

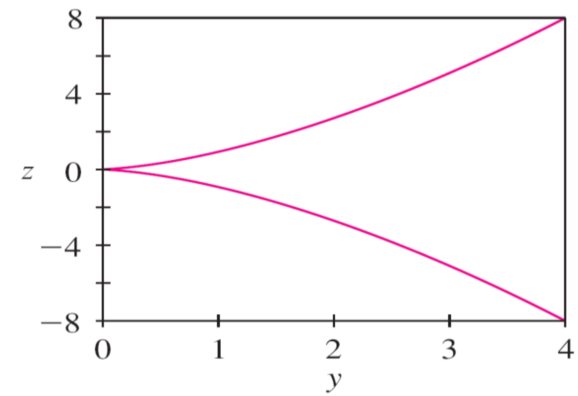


Figura 9(f)

Vistas da cúbica torcida

Em particular, a parte 9(d) mostra a vista de cima da caixa.

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

A curva obtida é a projeção da curva no plano *xy*, a parábola $y = x^2$. A parte 9(e) exibe a projeção no plano *xz* a curva cúbica $z = x^3$. Fica claro o porquê de essa curva ser chamada cúbica retorcida.

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Outra maneira de visualizar uma curva espacial é desenhá-la em uma superfície. Por exemplo, a cúbica retorcida do Exemplo 7 está no cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine o parâmetro das duas primeiras equações paramétricas, $x = t$ e $y = t^2$.) A Figura 10 mostra o cilindro e a cúbica retorcida sobrepostos, tornando mais fácil enxergar que a curva caminha da origem para cima, sobre o cilindro.

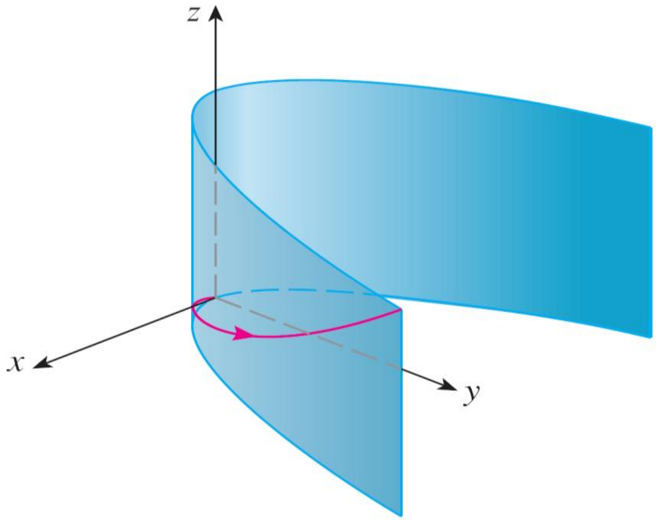


Figura 10

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Usamos essa mesma técnica no Exemplo 4 para visualizar a hélice circular.

Um terceiro processo de visualização para a cúbica retorcida é constatar que a curva também está contida na superfície cilíndrica $z = x^3$. Então podemos ver a curva como a intersecção das duas superfícies cilindricas $y = x^2$ e $z = x^3$. (Veja a Figura 11.)

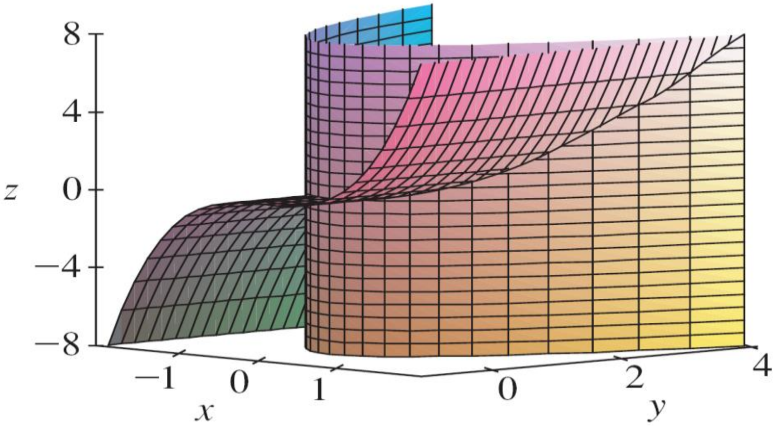


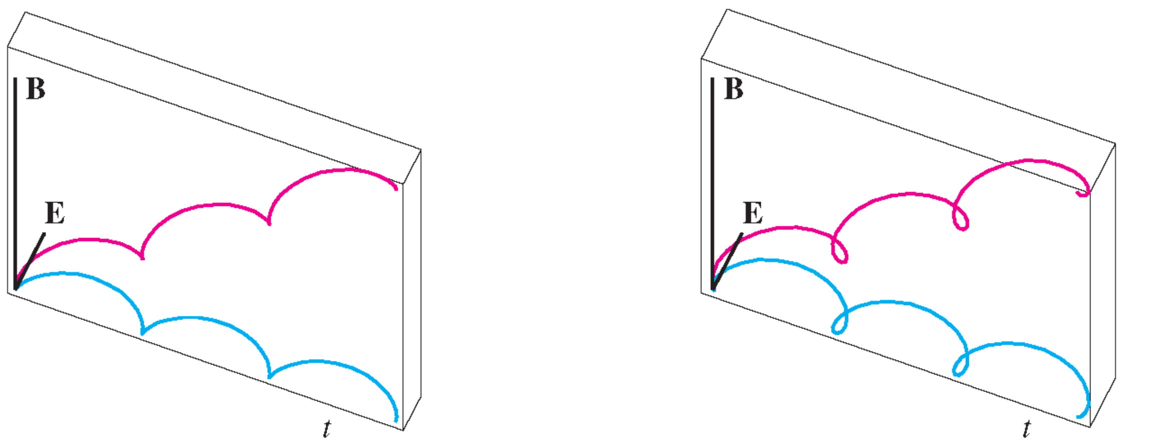
Figura 11

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Vimos que uma curva espacial interessante, a hélice, aparece no modelo do DNA. Outro exemplo notável de uma curva espacial na ciência é a trajetória de uma partícula de carga positiva em campos elétricos e magnéticos ortogonalmente orientados **E** e **B**.

Utilizando Computadores para Traçar Curvas Espaciais

Dependendo da velocidade inicial dada à partícula na origem, a trajetória da partícula ou é uma curva espacial, cuja projeção sobre o plano horizontal é a cicloide [Figura 12(a)], ou é uma curva cuja projeção é a trocoide [Figura 12(b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$

(b) $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \right\rangle$

Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

Figura 12