15 Integrais Múltiplas

15.10 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em cálculo unidimensional, frequentemente usamos uma mudança de variável (uma substituição) para simplificar uma integral. Revertendo os papéis de *x* e *u*, podemos escrever como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du$$

onde $x = g(u)$ e $a = g(c)$, $b = g(d)$. Outro modo de escrever a Fórmula 1 é o seguinte:

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Uma mudança de variáveis pode também ser útil em integrais duplas. Já vimos um exemplo disso: a conversão para coordenadas polares. As novas variávei r e θ estão relacionadas às velhas variáveis x e y pelas equações

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e a fórmula de mudança de variáveis pode ser escrita como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

onde S é a região no plano $r\theta$ que corresponde à região R no plano xy.

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

De modo mais geral, consideremos uma mudança de variável dada pela **transformação** *T* do plano *uv* no plano *xy*:

$$T(u, v) = (x, y)$$

onde *x* e *y* *estão* relacionados com *u* e *v* pelas equações

$$\boxed{3} \qquad x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

ou, como às vezes escrevemos,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em geral, consideramos T uma **transformação C^1**, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Uma transformação T é de fato somente uma função cujo domínio e imagem são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Se $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, então o ponto (x_1, y_1) é denominado **imagem** do ponto (u_1, v_1). Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é **injetora**.

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

A Figura 1 mostra o efeito de uma transformação *T* em uma região *S* no plano *uv*. *T* transforma *S* em uma região *R* no plano *xy* denominada **imagem de *S***, constituída das imagens de todos os pontos de *S*.

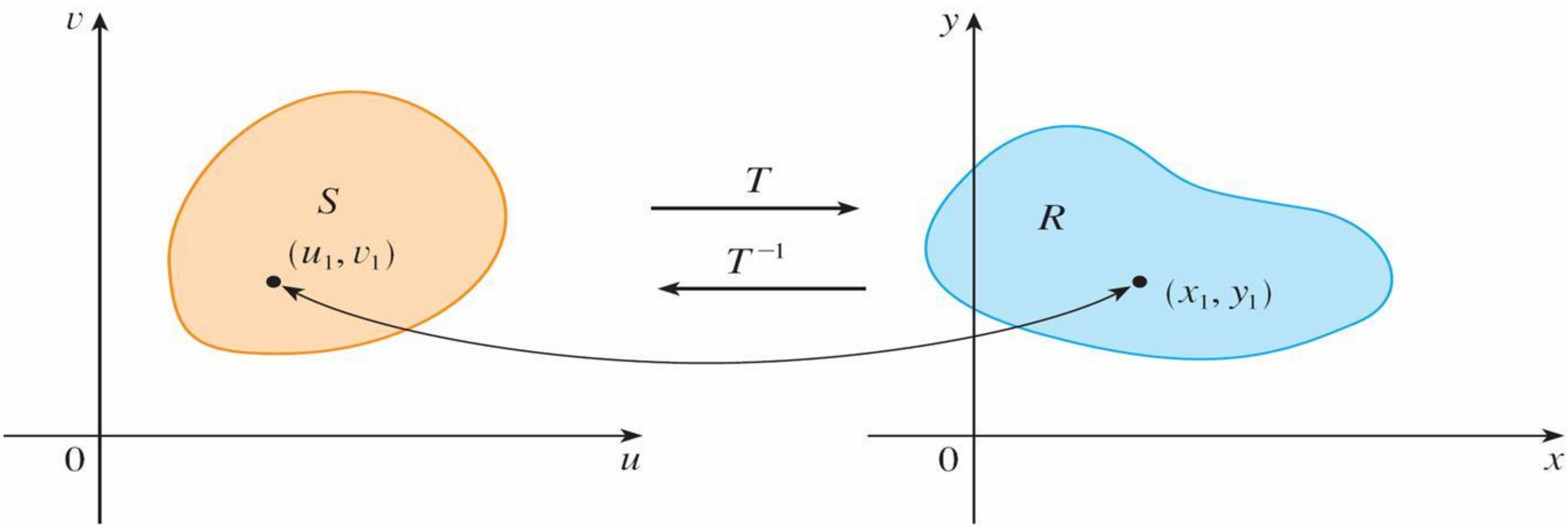


Figura 1

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Se T é injetora, então existe uma **transformação inversa** T^{-1} do plano xy para o plano uv e pode ser possível inverter as Equações 3 para escrever u e v em termos de x e y:

$$u = G(x, y) \qquad\qquad v = H(x, y)$$

Exemplo 1

Uma transformação é definida pelas equações

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Determine a imagem do quadrado

$S = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

SOLUÇÃO: A transformação leva a fronteira de S na fronteira da imagem. Assim, começamos por determinar a imagem dos lados de S.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

O primeiro lado, S_1, é dado por $v = 0$ ($0 \leq u \leq 1$). (Veja a Figura 2.)

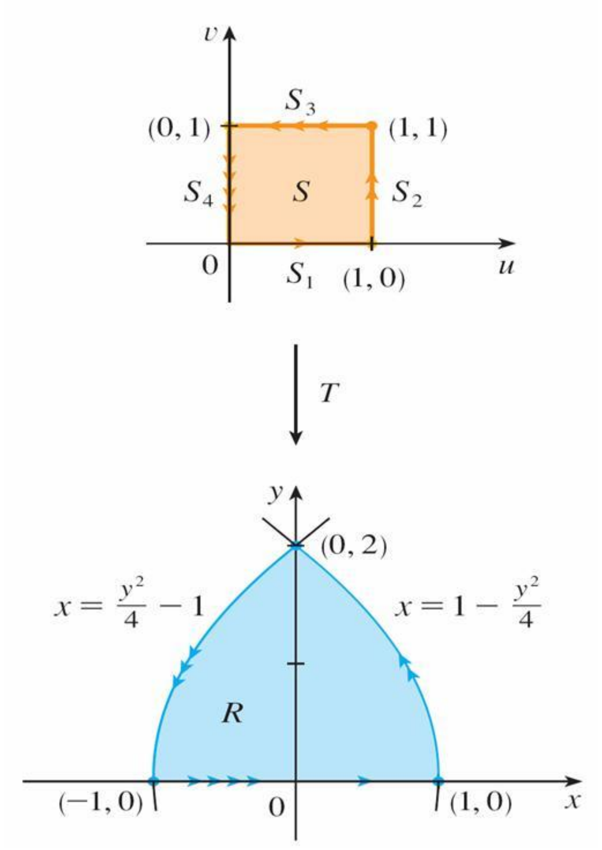


Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

Das equações dadas, temos $x = u^2$, $y = 0$ e, então,

$0 \leq x \leq 1$. Então, S_1 é levado no segmento de reta de (0, 0)

a (1, 0) no plano xy. O segundo lado, S_2, é $u = 1$ $(0 \leq v \leq 1)$

e, colocando $u = 1$ nas equações dadas, temos

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Eliminando v, obtemos

$$\boxed{4} \qquad x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

que é parte de uma parábola.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Da mesma forma, S_3 é dado por $v = 1$ $(0 \leq u \leq 1)$, cuja imagem é o arco parabólico

5
$$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leq x \leq 0$$

Finalmente, S_4 é dado por $u = 0$ $(0 \leq v \leq 1)$, cuja imagem é $x = -v^2$, $y = 0$, ou seja, $-1 \leq x \leq 0$. (Observe que quando nos movemos ao redor do quadrado no sentido anti-horário, também nos movemos ao redor da região parabólica no sentido anti-horário).

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

A imagem de S é a região R (mostrada na Figura 2) limitada pelo eixo x e as parábolas dadas pelas Equações 4 e 5.

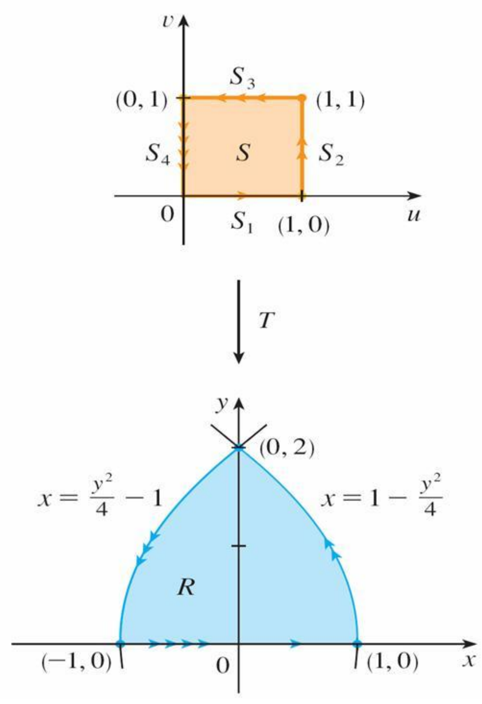


Figura 2

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Agora vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla. Comecemos com um retângulo pequeno *S* no plano *uv* cujo canto inferior esquerdo é o ponto (u_0, v_0) e cujas dimensões são Δu e Δv. (Veja a Figura 3.)

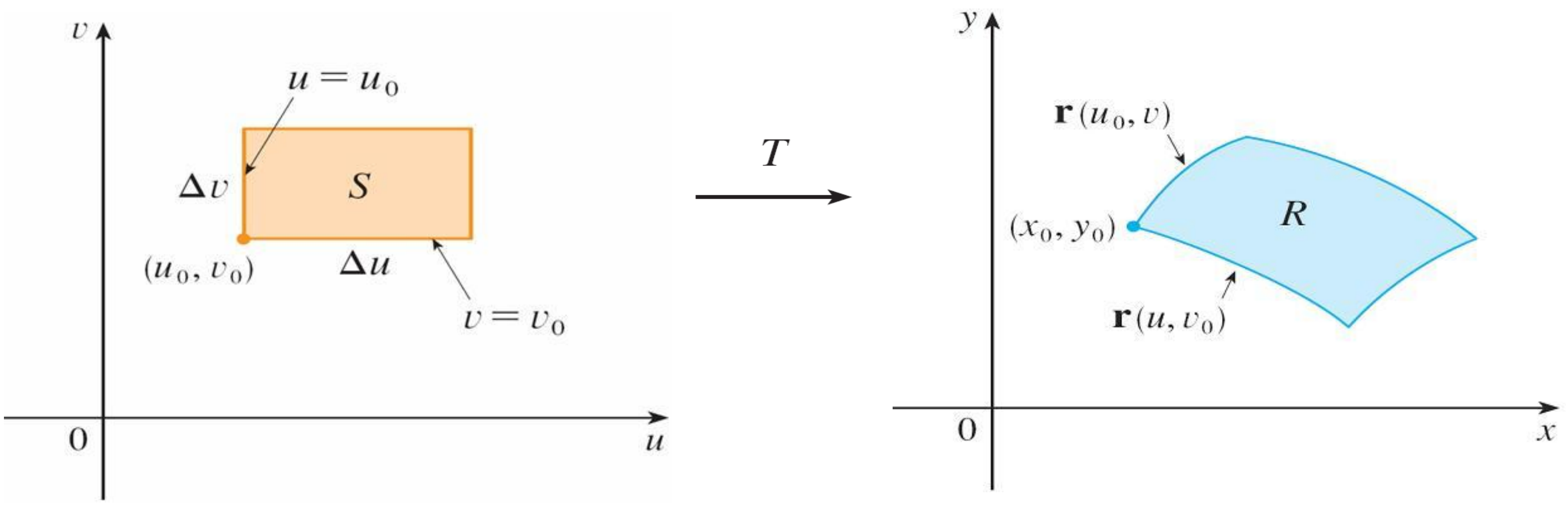


Figura 3

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

A imagem de S é uma região R no plano xy, sendo que um dos pontos do limite é $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. O vetor

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\,\mathbf{i} + h(u, v)\,\mathbf{j}$$

é o vetor posição da imagem do ponto (u, v). A equação do lado inferior de S é $v = v_0$, cuja curva imagem é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. O vetor tangente em (x_0, y_0) a essa curva imagem é

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Da mesma forma, o vetor tangente em (x_0, y_0) à curva imagem do lado esquerdo de S é (a saber, $u = u_0$) é

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

Podemos aproximar a região imagem $R = T(S)$ pelo paralelogramo determinado pelos vetores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

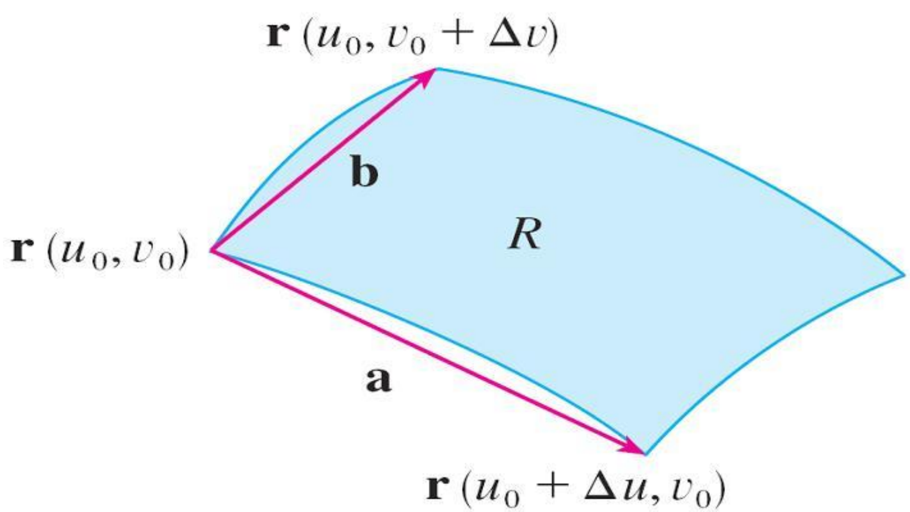


Figura 4

mostrados na Figura 4.

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Mas

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

e assim $\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\, \mathbf{r}_u$

Da mesma forma $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\, \mathbf{r}_v$

Isso significa que podemos aproximar *R* por um paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ e $\Delta v\, \mathbf{r}_v$. (Veja a Figura 5).

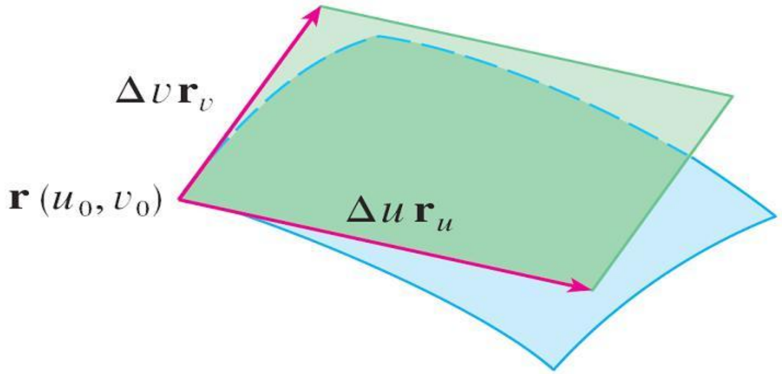


Figura 5

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Portanto, podemos aproximar a área de *R* pela área desse paralelogramo, que é

$$\boxed{6} \qquad (\Delta u\, \mathbf{r}_u) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v$$

Calculando o produto vetorial, obtemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

O determinante que aparece nesse cálculo é chamado *jacobiano* da transformação e tem uma notação especial.

7 Definição O jacobiano da transformação T dada por $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$ é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Com essa notação, podemos utilizar a Equação 6 para obter uma aproximação da área ΔA de R:

$$\boxed{8} \qquad \Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_0, v_0).

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Em seguida, dividimos a região *S* no plano *uv* em retângulos S_{ij} e chamamos suas imagens no plano *xy* R_{ij}. (Veja a Figura 6.)

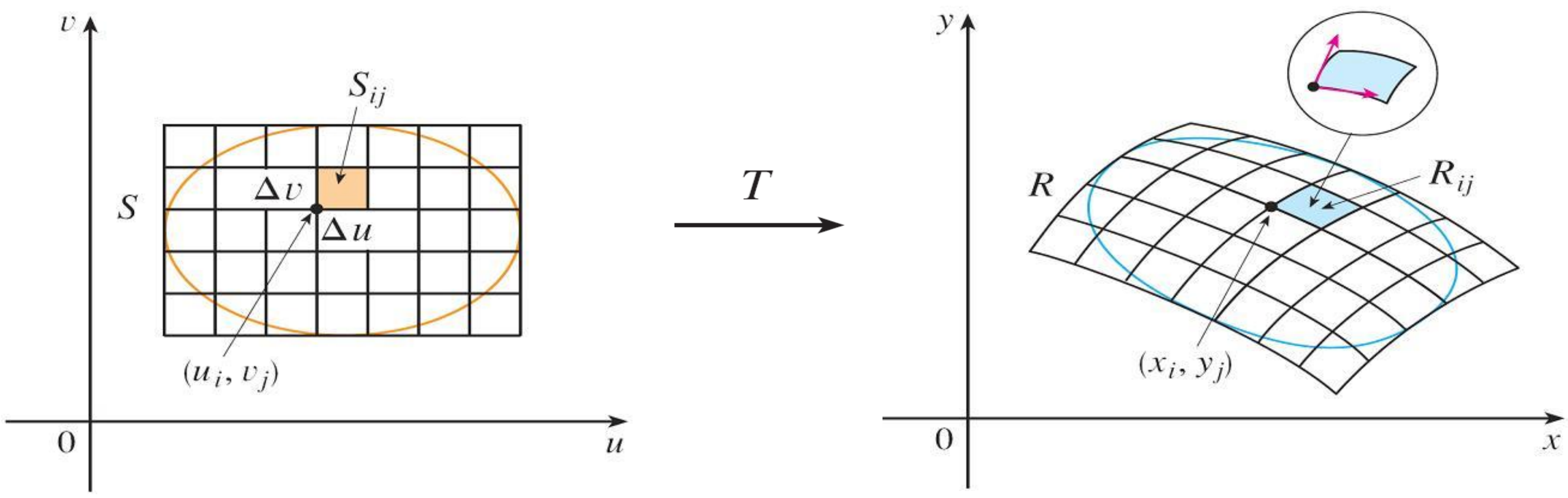


Figura 6

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Aplicando a aproximação $\boxed{8}$ a cada R_{ij}, aproximamos a integral dupla de f sobre R como segue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\big(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

onde o jacobiano é calculado em (u_i, v_j). Observe que a soma dupla é a soma de Riemann para a integral

$$\iint_S f\big(g(u, v), h(u, v)\big) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

A argumentação precedente sugere que o seguinte teorema seja verdadeiro.

9 Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla Suponha que T seja uma transformação C^1 cujo jacobiano seja não nulo e leve uma região S do plano uv para uma região R do plano xy. Suponha que f seja contínua sobre R e que S e sejam regiões planas do tipo I ou II. Suponha ainda que T seja injetora, exceto possivelmente nos pontos de limite de S. Então,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

O Teorema 9 diz que mudamos de uma integral em *x* e *y* para uma integral em *u* e *v* escrevendo *x* e *y* em termos de *u* e *v* e escrevendo

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Observe a semelhança entre o Teorema 9 e a fórmula unidimensional da Equação 2. Em vez da derivada dx/du, temos o valor absoluto do jacobiano, ou seja, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.

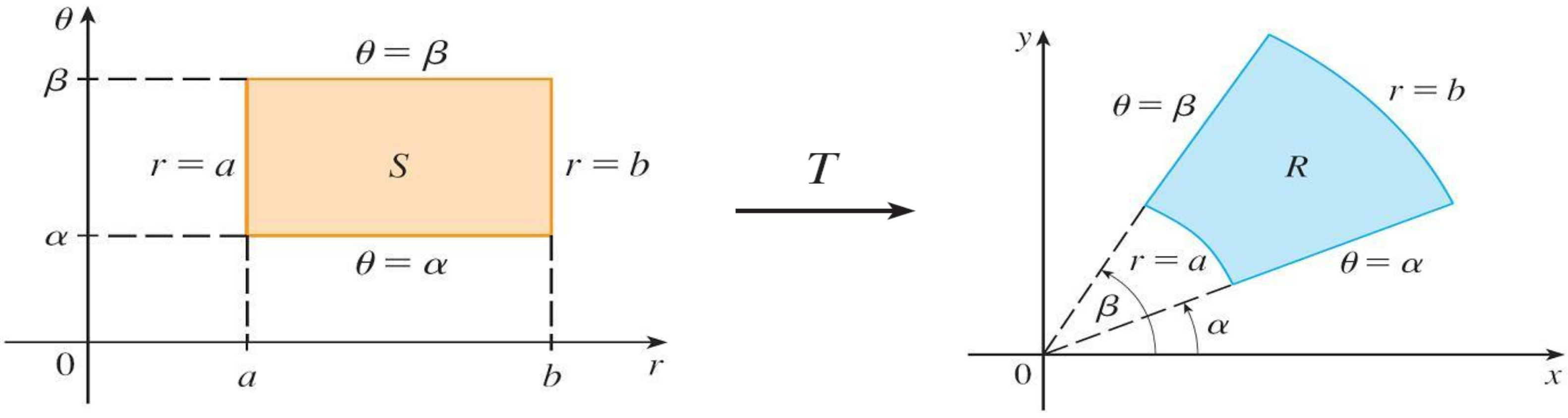
Como primeira ilustração do Teorema 9, vamos mostrar que a fórmula de integração em coordenadas polares é um caso especial deste.

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

Aqui, a transformação T do plano $r\theta$ para o plano xy é dada por

$$x = g(r, \theta) = r \cos \theta \qquad\qquad y = h(r, \theta) = r \operatorname{sen} \theta$$

e a geometria da transformação é mostrada na Figura 7. T transforma um retângulo comum do plano $r\theta$ em um retângulo polar do plano xy.



Transformação para as coordenadas polares

Figura 7

Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

O jacobiano de *T* é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta = r > 0$$

Assim, o Teorema 9 fornece

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

Integrais Triplas

Integrais Triplas

Existe uma fórmula de mudança de variáveis semelhante para as integrais triplas. Seja *T* a transformação que leva uma região *S* no espaço *uvw* para uma região *R* no espaço *xyz* por meio das equações

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

O **jacobiano** de *T* é o seguinte determinante 3 × 3:

$$\boxed{12} \qquad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Integrais Triplas

Sob hipóteses semelhantes àquelas do Teorema 9, temos a seguinte fórmula para integrais triplas:

$$\boxed{13} \quad \iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f\big(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\big) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

Exemplo 4

Utilize a Fórmula 13 para deduzir a fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas.

SOLUÇÃO: Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Calculamos o jacobiano como segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} - \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\,(-\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\cos^2\theta)$$

$$- \rho\operatorname{sen}\phi\,(\rho\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos^2\phi - \rho^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Visto que $0 \leq \phi \leq \pi$, temos sen $\phi \geq 0$.

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Portanto

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = |-\rho^2 \operatorname{sen}\phi| = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$