TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO POR PARTES

Nessa semana, estudaremos outra importante técnica de integração:

1. Método de Integração por Partes
2. Uma estratégia para integrar por partes
3. Integração por partes para integrais definidas

1. Método de Integração por Partes

O método da integração por partes é aplicado na resolução de uma integral que envolve o produto de duas funções, e é uma consequência da regra do produto para a derivação.

Fórmula da integração por partes: Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções deriváveis em um intervalo I. Então, para cada x em I temos:

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Integrando ambos lados desta equação:

$$\int [u(x)\cdot v(x)]'\,dx = \int u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

sendo $du = u'(x)dx$ e $dv = v'(x)dx$ podemos escrever a fórmula da integração por partes:

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{u\cdot v} - \int \boldsymbol{v\,du}\,.$$

Para aplicar esta fórmula na resolução de uma determinada integral, devemos separar o integrando em duas partes u e dv (daí o nome do método), considerando dois princípios:

1. A primitiva $v = \int dv$ deve ser fácil de determinar.
2. A nova integral $\int v\,du$ deve ser mais fácil de calcular que a integral original.

<u>Exemplo:</u> Calcule $\int \ln(x)\ dx$.

Solução: Fazendo $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, teremos $du = \frac{dx}{x}$ e $v = x$.

Substituindo esses resultados na fórmula de integração por partes, temos:

$$\int \ln(x)\ dx = x\cdot\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\cdot\ln(x) - x + c\,.$$

<u>Exemplo:</u> Calcule $\int x\, e^x \; dx$

Solução: Fazendo $u = x$ e $dv = e^x \, dx$, teremos $du = dx$ e $v = \int e^x \; dx = e^x$.
Substituindo estes resultados na fórmula de integração por partes, segue

$$\int x\, e^x \; dx = x\, e^x - \int e^x \; dx = x\, e^x - e^x + c\,.$$

Observe que se tivéssemos escolhido $u = e^x$ e $dv = x\, dx$, teríamos $du = e^x\, dx$ e $v = \int x \; dx = \frac{x^2}{2}$. Nesse caso, aplicando a fórmula de integração por partes transformaríamos a integral original em outra mais difícil de ser calculada, como segue

$$\int x\, e^x \; dx = \frac{x^2\, e^x}{2} - \int \frac{x^2\, e^x}{2} \; dx$$

Portanto, esta segunda escolha é inadequada para resolver a integral proposta.

Para nos auxiliar nesse processo de escolha para a aplicação do método, vejamos a estratégia a seguir.

2. Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar $\int u(x) \cdot v(x)\, dx$ devemos sempre escolher, dentre as funções da expressão $u(x) \cdot v(x)\, dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como sendo o dv. Como mencionado, esta escolha deve ser feita de modo que ao passarmos da integral $\int u\, dv$ para a integral $\int v\, du$, passemos para uma integral mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem **na maioria das vezes** é escolher as funções u e dv segundo o critério abaixo:

L	I	A	T	E
Logarítmicas	Inversas de trigonométricas	Algébricas elementares	Trigonométricas	exponenciais

- Você deve escolher como u o tipo de função que estiver mais à esquerda do anagrama, mais próximo de L;
- Você deve escolher como dv o tipo de função que estiver mais à direita do anagrama, mais próxima de E.

<u>Exemplo:</u> Calcule $\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\ dx$.

Solução: Nessa integral temos uma função Algébrica (x) e outra Trigonométrica $(\operatorname{sen}(x))$.

De acordo com a estratégia apresentada, tomamos $u = x$ e $dv = \operatorname{sen}(x)\,dx$.

Então, $du = dx$ e $v = \int \operatorname{sen}(x)\ dx = -\cos(x)$.

Assim,

$$\int x \cdot \operatorname{sen}(x)\ dx = -x \cdot \cos(x) - \int -\cos(x)\ dx = -x \cdot \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c\,.$$

<u>Exemplo:</u> Calcule $\int x^2 \cdot e^{5x}\ dx$.

Solução: Nessa integral temos uma função Algébrica (x^2) e outra Exponencial (e^{5x}).

De acordo com a estratégia apresentada, tomamos $u = x^2$ e $dv = e^{5x}dx$.

Então, $du = 2x\ dx$ e $v = \int e^{5x}\ dx = \frac{1}{5}e^{5x}$.

Assim,

$$\int x^2 \cdot e^{5x}\ dx = \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \int \frac{2x \cdot e^{5x}}{5}\ dx = \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int x \cdot e^{5x}\ dx$$

A integral obtida $\int x \cdot e^{5x}\ dx$ não é imediata, mas pode ser resolvida aplicando novamente a fórmula de integração por partes. Fazendo $u = x$ e $dv = e^{5x}dx$, obtemos $du = dx$ e $v = \int e^{5x}\ dx = \frac{1}{5}e^{5x}$, e então

$$\int x \cdot e^{5x}\ dx = \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}\ dx = \frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}$$

Voltando à integral inicial temos:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^{5x}\ dx &= \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int x \cdot e^{5x}\ dx \\ &= \frac{x^2 \cdot e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{x \cdot e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}\right) \\ &= e^{5x}\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{5} + \frac{1}{125}\right) + c\,.\end{aligned}$$

Como mostrado no exemplo anterior, por vezes é necessário aplicar a fórmula de integração por partes mais de uma vez para resolver a integral original.

Outro caso possível ocorre quando aplicamos o método da integração por partes e retornamos à integral original, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo: Calcule $\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx$.

Solução: Nessa integral temos uma função Exponencial (e^x) e outra Trigonométrica $(\text{sen}(x))$. De acordo com a estratégia LIATE, tomamos $u = \text{sen}(x)$ e $dv = e^x\ dx$.
Então, $du = \cos(x)\ dx$ e $v = \int e^x\ dx = e^x$, assim

$$\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx = e^x \cdot \text{sen}(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\ dx$$

Aplicando novamente a fórmula de integração por partes na integral $\int e^x \cdot \cos(x)\ dx$, temos:

$u = \cos(x)$ e $dv = e^x\ dx$, então, $du = -\text{sen}(x)\ dx$ e $v = \int e^x\ dx = e^x$

$$\int e^x \cdot \cos(x)\ dx = e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx$$

Note que essa última integral é igual à integral original, então temos

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx &= e^x \cdot \text{sen}(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\ dx \\ &= e^x \cdot \text{sen}(x) - \left[e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx\right] \\ &= e^x \cdot \text{sen}(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx\end{aligned}$$

Portanto

$$\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx + \int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx = e^x \cdot \text{sen}(x) - e^x \cdot \cos(x)$$

$$2\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx = e^x \cdot \text{sen}(x) - e^x \cdot \cos(x)$$

$$\int e^x \cdot \text{sen}(x)\ dx = \frac{e^x \cdot \text{sen}(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} + C\ .$$

3. Integração por partes para integrais definidas

No caso de integrais definidas a fórmula de integração por partes é equivalente a

$$\int_a^b \boldsymbol{u\,dv} = \Big(\boldsymbol{u(x) \cdot v(x)}\Big)_a^b - \int_a^b \boldsymbol{v\,du}$$

ou seja, calculamos a integral e depois aplicamos os limites de integração ao resultado, como proposto no Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo: Calcule $\int_1^2 t^2 \cdot \ln(t)\ dt$.

Solução: Nessa integral temos uma função Algébrica (t^2) e outra Logarítmica $(\ln(t))$.

De acordo com a estratégia LIATE, tomamos $u = \ln(t)$ e $dv = t^2\ dt$.

Então, $du = \frac{1}{t}\ dt$ e $v = \int t^2\ dt = \frac{t^3}{3}$, assim

$$\int_1^2 t^2 \cdot \ln(t)\, dt = \left(\frac{t^3 \ln(t)}{3}\right)_1^2 - \int_1^2 \frac{t^3}{3} \cdot \frac{1}{t}\ dt = \left(\frac{t^3 \ln(t)}{3}\right)_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 t^2\ dt$$

$$= \left(\frac{t^3 \ln(t)}{3}\right)_1^2 - \left(\frac{t^3}{9}\right)_1^2 = \left(\frac{2^3 \ln(2)}{3}\right) - \left(\frac{1^3 \ln(1)}{3}\right) - \left(\frac{2^3}{9}\right) + \left(\frac{1^3}{9}\right)$$

$$= \frac{8\ln(2)}{3} - 0 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}.$$

REFERÊNCIAS:

BALBO, A. R. Notas de aula: Integral Indefinida. UNESP, Bauru. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~arbalbo/arquivos/integralindefinida.pdf . Acesso em: 30/09/2020.

THOMAS, G. B. Cálculo. Vol. 1. 10 ed. São Paulo: Pearson, 2002.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

MOGNO, A. Notas de aula: Cálculo Diferencial e Integral I. UTFPR-CM, 2013.