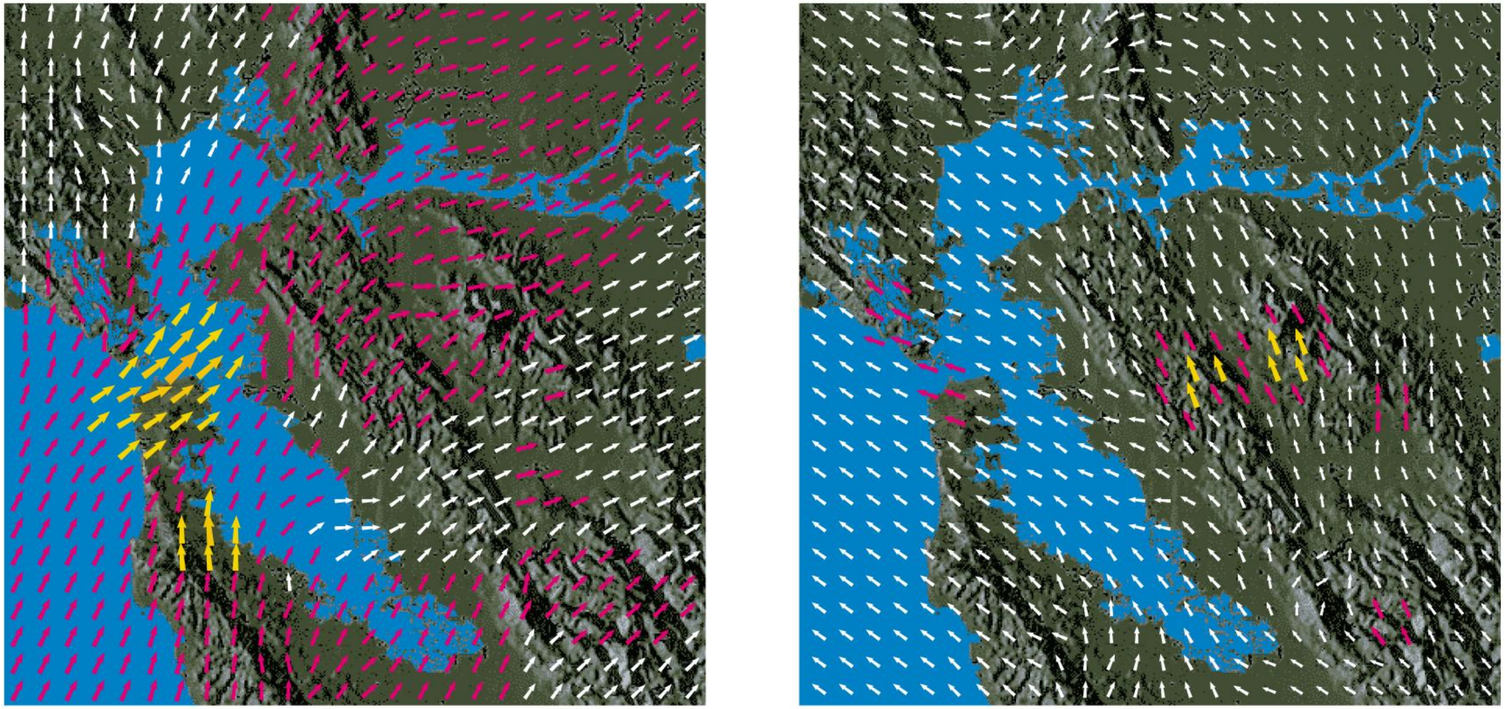
16 Cálculo Vetorial

16.1 Campos Vetoriais

Campos Vetoriais

Os vetores da Figura 1 representam os vetores velocidade do ar e indicam a velocidade escalar, a direção e o sentido do vento em pontos a 10 m da superfície, na área da Baía de São Francisco. Nós vemos num relance a partir das maiores setas na parte (a) que as velocidades do vento maiores naquele tempo ocorreram quando entraram na baía do outro lado da Ponte Golden Gate. A parte (b) mostra o padrão de vento muito diferente 12 horas antes.

Campos Vetoriais



(a) 18:00, 1º março de 2010 (b) 6:00, 1º março de 2010

Campos vetoriais de velocidade mostrando aspectos do vento na Baía de São Francisco

Figura 1

Campos Vetoriais

Associado a cada ponto do ar, podemos imaginar um vetor velocidade do vento. Este é um exemplo de *campo vetorial de velocidade.*

Campos Vetoriais

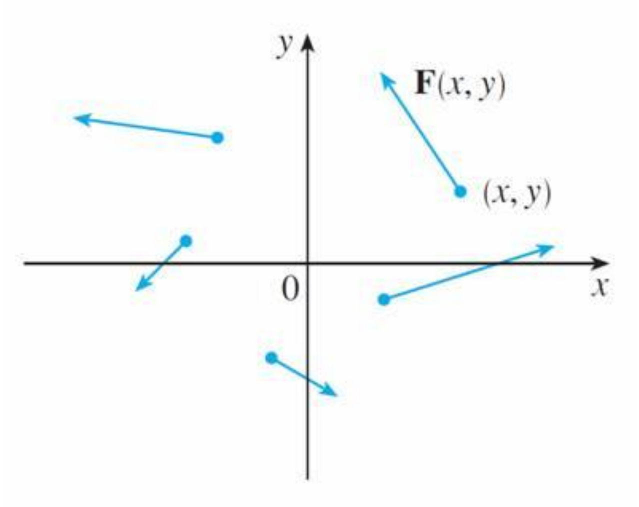
Outro tipo de campo vetorial, chamado *campo de força*, associa um vetor força a cada ponto da região. Um exemplo é o campo de força gravitacional.

Em geral, um campo vetorial é uma função cujo domínio é um conjunto de pontos e $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e cuja imagem é um conjunto de vetores em V_2 (ou V_3).

1 Definição Seja D um conjunto em $\mathbb{R}^2$ (uma região plana). Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^2$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y) em D um vetor bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

Campos Vetoriais

A melhor maneira de enxergar um campo vetorial é desenhar a seta representando o vetor **F**(x, y) começando no ponto (x, y). É claro que é impossível fazer isso para todos os pontos (x, y), mas podemos visualizar **F** fazendo isso para alguns pontos representativos em D, como na Figura 3.



Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

Figura 3

Campos Vetoriais

Uma vez que $\mathbf{F}(x, y)$ é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas **funções componentes** P e Q da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

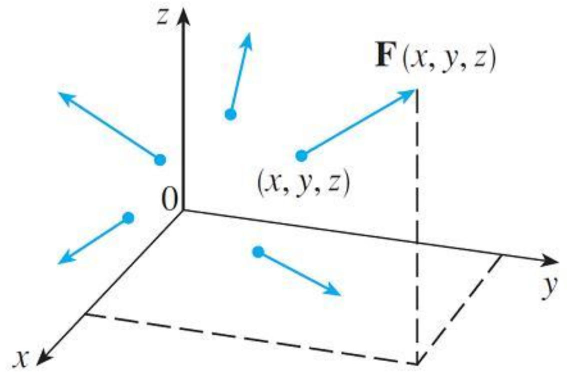
ou, de forma mais compacta, $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$

Observe que P e Q são funções escalares de duas variáveis e são chamadas, algumas vezes, **campos escalares** para distingui-los dos campos vetoriais.

$\boxed{2}$ **Definição** Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Um **campo vetorial em** $\mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F}$ que associa a cada ponto (x, y, z) em E um vetor tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Campos Vetoriais

Um campo vetorial **F** em $\mathbb{R}^3$ está ilustrado na Figura 4.



Campo vetorial em $\mathbb{R}^3$

Figura 4

Podemos escrevê-lo em termos das funções componentes *P*, *Q* e *R* como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

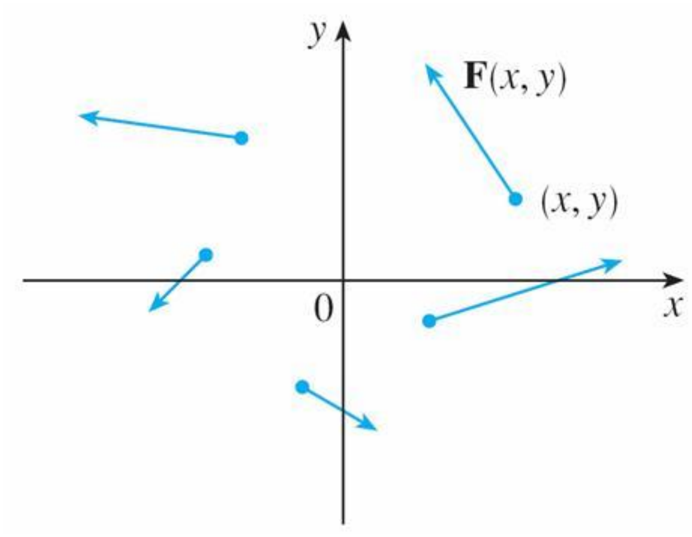
Campos Vetoriais

Como nas funções vetoriais, podemos definir a continuidade dos campos vetoriais e mostrar que **F** será contínua se e somente se suas funções componentes *P*, *Q* e *R* forem contínuas.

Às vezes identificamos o ponto (x, y, z) com seu vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ e escrevemos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em vez de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Então, **F** se torna uma função que associa um vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a um vetor $\mathbf{x}$.

Exemplo 1

Um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ é definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Descreva **F** esboçando alguns dos vetores $\mathbf{F}(x, y)$ como na Figura 3.

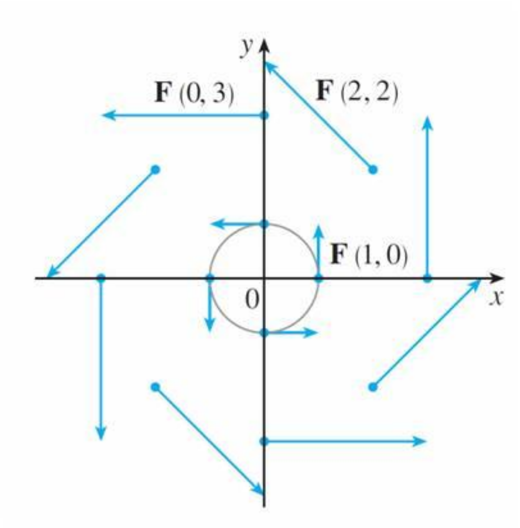


Campo vetorial em $\mathbb{R}^2$

Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

Uma vez que **F**(1, 0) = **j**, desenhamos o vetor **j** = ⟨0, 1⟩ começando no ponto (1, 0) na Figura 5.



F(x, y) = –y **i** + x **j**

Figura 5

Uma vez que **F**(0, 1) = –**i**, desenhamos o vetor ⟨–1, 0⟩ com ponto inicial (0, 1).

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

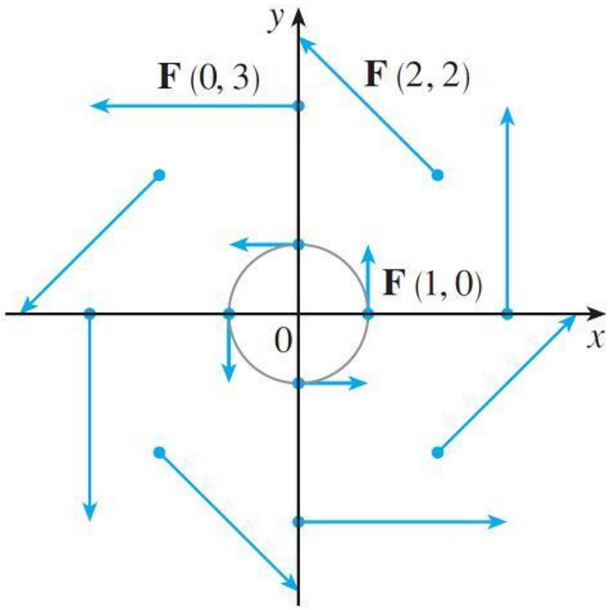
Continuamos desta maneira, podemos calcular vários outros valores representativos de **F**(x, y) na tabela e extrair os vetores correspondentes para representar o campo vetorial na Figura 5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

Exemplo 1 – *Solução*

cont.

Na Figura 5, parece que cada seta é tangente a um círculo com centro na origem.



$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

Figura 5

Exemplo 1 – *Solução*

Para confirmarmos isso, vamos tomar o produto escalar do vetor posição $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ com o vetor $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0$$

Isso mostra que $\mathbf{F}(x, y)$ é perpendicular ao vetor posição $\langle x, y \rangle$ e, portanto, tangente ao círculo com centro na origem e raio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe também que

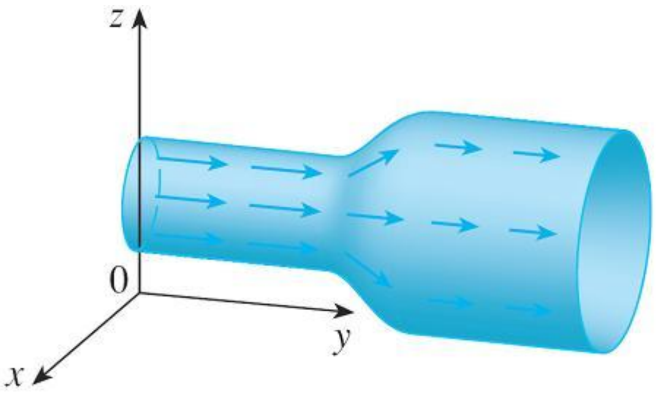
$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que o comprimento do vetor $\mathbf{F}(x, y)$ é igual ao raio do círculo.

Exemplo 3

Imagine um líquido escoando uniformemente em um cano e seja **V**(x, y, z) o vetor velocidade em um ponto (x, y, z).

Então **V** associa um vetor a cada ponto (x, y, z) de certo domínio E (interior do cano) e assim, **V** é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado **campo de velocidade**. Um possível campo de velocidade é ilustrado na Figura 13.



Campo de velocidade do escoamento de um fluido

Figura 13

Exemplo 3

continuação

A velocidade em qualquer ponto é indicada pelo comprimento da seta.

Campos de velocidade ocorrem em outras áreas da física.

Por exemplo: o campo vetorial do Exemplo 1 pode ser usado como o campo de velocidade descrevendo a rotação no sentido anti-horário de uma roda.

Exemplo 4

A Lei da Gravitação de Newton afirma que a intensidade da força gravitacional entre dois objetos com massas *m* e *M* é

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

onde *r* é a distância entre os objetos e *G* é a constante gravitacional. (Este é um exemplo de uma lei inversa da raiz quadrada). Vamos supor que o objeto com massa *M* esteja localizado na origem em $\mathbb{R}^3$. (Por exemplo, *M* pode ser a massa da Terra e a origem estaria em seu centro).

Seja o vetor posição do objeto com massa *m* $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$. Então $r = |\mathbf{x}|$, logo, $r^2 = |\mathbf{x}|^2$.

Exemplo 4

continuação

A força gravitacional exercida nesse segundo objeto age em direção à origem e o vetor unitário em sua direção é

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Portanto, a força gravitacional agindo no objeto em $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

Exemplo 4

continuação

[Os físicos usam frequentemente a notação **r** ao invés de **x** para o vetor posição, então você pode ver a Fórmula 3 escrita na forma **F** = –(*mMG*/*r*^{3})**r**.] A função dada pela Equação 3 é um exemplo de campo vetorial, chamado **campo gravitacional**, porque associa um vetor [a força **F**(**x**)] a cada ponto **x** do espaço.

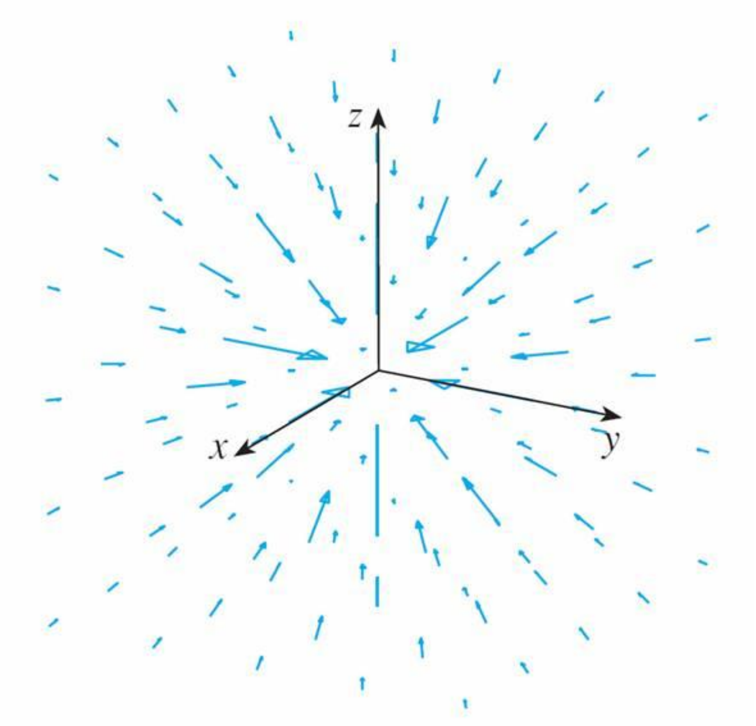
A Fórmula 3 é um modo compacto de escrever o campo gravitacional, mas podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes, usando o fato de que
$\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

Exemplo 4

continuação

O campo gravitacional **F** está ilustrado na Figura 14.



Campo de força gravitacional

Figura 14

Exemplo 5

Suponha que uma carga elétrica Q esteja localizada na origem. Pela Lei de Coulomb, a força elétrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ exercida por essa carga sobre uma carga q localizada no ponto (x, y, z) com vetor posição $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

onde ε é uma constante (que depende da unidade usada).

Para cargas de mesmo sinal, temos $qQ > 0$ e a força é repulsiva; para cargas opostas temos $qQ < 0$ e a força é atrativa. Observe a semelhança entre as Fórmulas 3 e 4. Ambas são exemplos de **campos de força**.

Exemplo 5

continuação

Em vez de considerarem a força elétrica **F**, os físicos frequentemente consideram a força por unidade de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

Então **E** é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ chamado **campo elétrico** de *Q*.

Campos Gradiente

Campos Gradiente

Se f é uma função escalar de duas variáveis, lembre-se de que seu gradiente ∇f (ou grad f) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Portanto, ∇f é realmente um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ e é denominado **campo vetorial gradiente**. Da mesma forma, se f é uma função escalar de três variáveis, seu gradiente é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Exemplo 6

Determine o campo vetorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Desenhe o campo vetorial gradiente juntamente com um mapa de contorno de f. Como eles estão relacionados?

SOLUÇÃO: O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

A Figura 15 mostra o mapa de contorno de *f* com o campo vetorial gradiente.

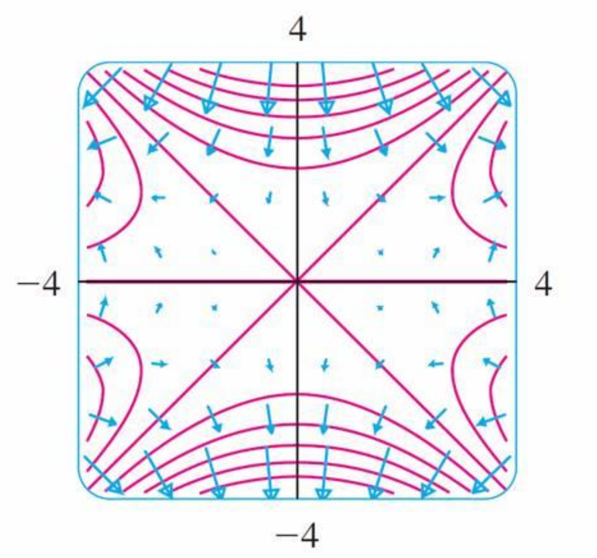


Figura 15

Observe que os vetores gradientes são perpendiculares às curvas de nível.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Observe também que os vetores gradientes são mais longos onde as curvas de nível estão mais próximas umas das outras e mais curtos quando elas estão mais distantes entre si. Isso se deve ao fato de o comprimento do vetor gradiente ser o valor da derivada direcional de f e a proximidade das curvas de nível indicar uma grande inclinação no gráfico.

Campos Gradiente

Um campo vetorial **F** é chamado **campo vetorial conservativo** se for o gradiente de uma função escalar, ou seja, se existir uma função *f* tal que **F** = ∇*f*. Nessa situação, *f* é denominada **função potencial** de **F**.

Nem todos os campos vetoriais são conservativos, mas estes campos aparecem frequentemente em física. Por exemplo: o campo gravitacional **F** do Exemplo 4 é conservativo, pois, se definirmos

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Campos Gradiente

então

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

$$= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{F}(x, y, z)$$