16

Cálculo Vetorial

16.8 Teorema de Stokes

Teorema de Stokes

O Teorema de Stokes pode ser visto como uma versão em dimensão maior do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana *D* com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície *S* com uma integral em torno da curva da fronteira *S* (que é uma curva espacial). A Figura 1 mostra uma superfície orientada com vetor normal unitário **n**.

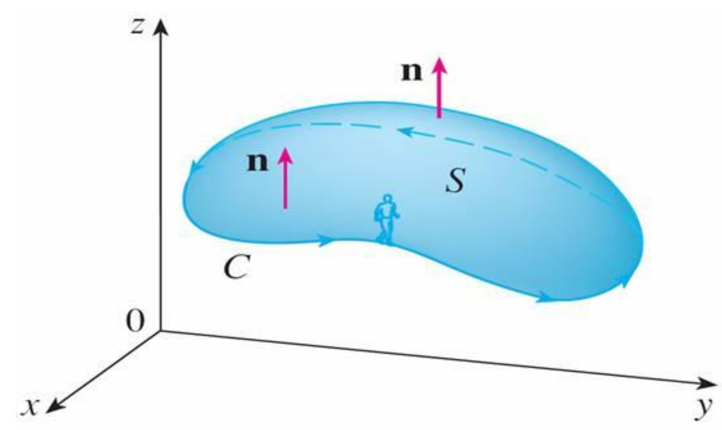


Figura 1

Teorema de Stokes

A orientação de *S* induz a **orientação positiva da curva fronteira *C*** mostrada na figura. Isso significa que, se você andar na direção positiva ao redor da curva *C* com sua cabeça na direçã e sentido de **n**, então a superfície estará sempre à sua esquerda.

Teorema de Stokes Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Teorema de Stokes

Como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{e} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

o Teorema de Stokes nos diz que a integral de linha em torno da curva fronteira de *S* da componente tangencial de **F** é igual à integral da superfície sobre *S* da componente normal do rotacional de **F**.

A curva na fronteira orientada positivamente da superfície orientada *S* é com frequência denotada por ∂S, de modo que o Teorema de Stokes pode ser escrito como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Teorema de Stokes

Existe uma analogia entre o Teorema de Stokes, o de Green e o Teorema Fundamental do Cálculo. Como anteriormente, existe uma integral envolvendo derivadas do lado esquerdo da Equação 1 (lembre-se de que rot **F** é uma espécie de derivada de **F**) e do lado direito, envolvendo valores de **F** calculados somente na *fronteira* de *S*.

De fato, no caso especial em que a superfície *S* é plana e pertence ao plano *xy*, com orientação ascendente, o vetor normal unitário é **k**, a integral de superfície se transforma em uma integral dupla, e o Teorema de Stokes fica

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

Teorema de Stokes

Essa é precisamente a forma vetorial do Teorema de Green. Assim, vemos que o Teorema de Green é realmente um caso especial do Teorema de Stokes.

Exemplo 1

Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ e C é a curva de intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando observado de cima.)

SOLUÇÃO: A curva C (uma elipse) é mostrada na Figura 3.

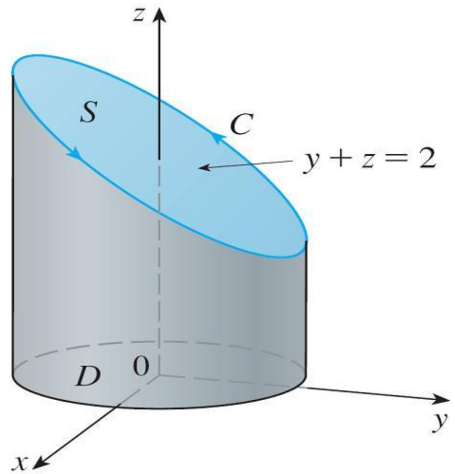


Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Apesar de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ pode ser calculada diretamente, é mais simples usar o Teorema de Stokes. Vamos inicialmente calcular

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Apesar de existirem muitas superfícies com fronteira *C*, a escolha mais conveniente é a região elíptica *S* no plano $y + z = 2$ cuja fronteira é *C*.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Se orientarmos S para cima, C tem a orientação induzida positiva. A projeção D de S no plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$ e portanto, usando a equação com $z = g(x, y) = 2 - y$, temos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3} \operatorname{sen} \theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \theta \right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

Teorema de Stokes

Em geral, se S_1 e S_2 são superfícies orientadas com mesma fronteira orientada C e ambas satisfazem as hipóteses do Teorema de Stokes, então

$$\boxed{3} \qquad \iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Esse fato é muito útil quando for difícil integrar sobre uma das superfícies, mas for mais fácil integrar sobre a outra.

Usaremos agora o Teorema de Stokes para tentar explicar o significado do vetor rotacional. Suponha que C seja uma curva fechada orientada e **v** represente o campo de velocidade de um fluido.

Teorema de Stokes

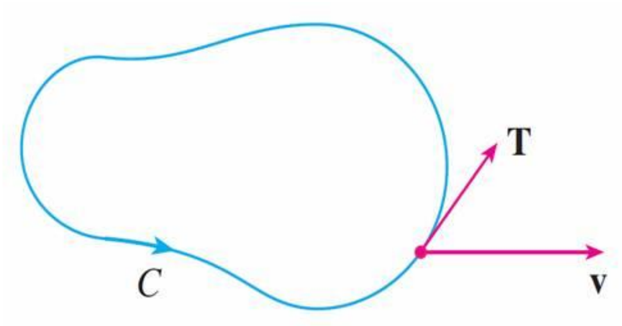
Considere a integral de linha

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

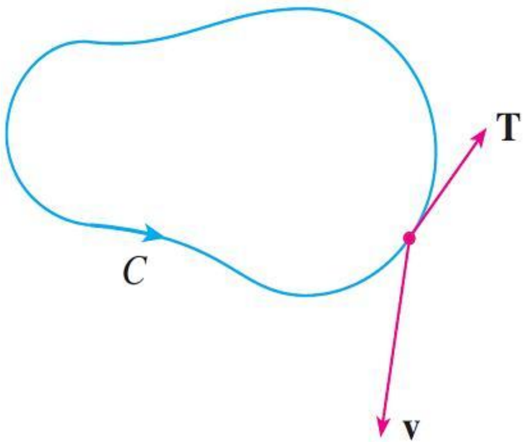
e recorde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ é a componente do vetor **v** na direção do vetor tangente unitário **T**. Isto significa que quanto mais perto a direção de **v** é a direção de **T**, maior é o valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$.

Teorema de Stokes

Assim, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ é a medida da tendência de o fluido se mover em torno de C e é chamada **circulação** de **v** em torno de C. (Veja a Figura 5.)



(a) $\int_C$ v • dr > 0, circulação positiva



(b) $\int_C$ v • dr < 0, circulação negativa

Figura 5

Teorema de Stokes

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0. Então (rot **F**)(P) ≈ (rot **F**)(P_0) para todos os pontos P em S_a porque rot **F** é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação do fluxo em torno do círculo fronteira C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot}\, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot}\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot}\, \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, dS = \text{rot}\, \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Teorema de Stokes

Esta aproximação se torna melhor quando $a \to 0$ e temos

$$\boxed{4} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot **v** · **n** é uma medida do efeito de rotação do fluido em torno do eixo **n**. O efeito de ondulação é maior sobre o eixo paralelo a rot**v**.

Teorema de Stokes

Sabemos que **F** é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada caminho fechado *C*. Dado *C*, suponha que possamos encontrar uma superfície orientável *S* cuja fronteira é *C*. Em seguida, o Teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada *C*.