15 Integrais Múltiplas

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular uma integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

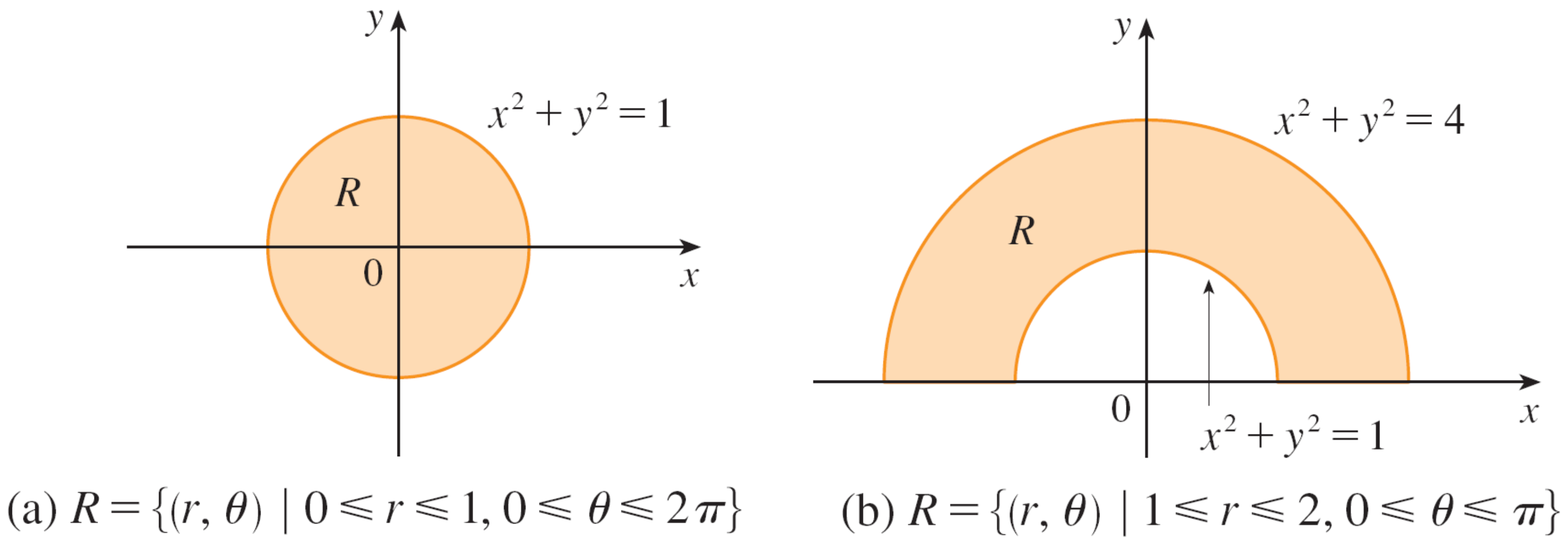


Figura 1

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

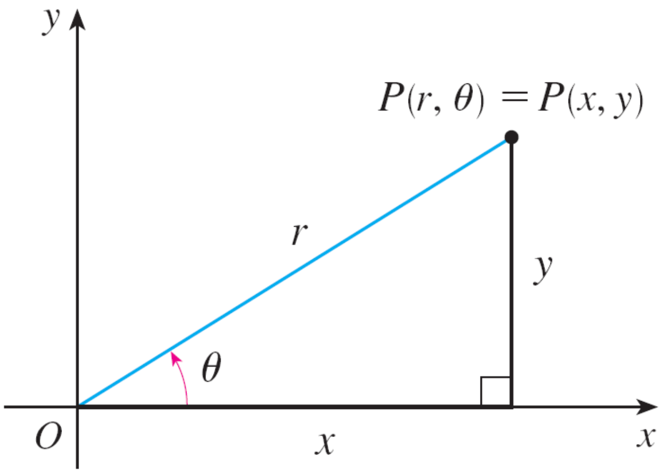


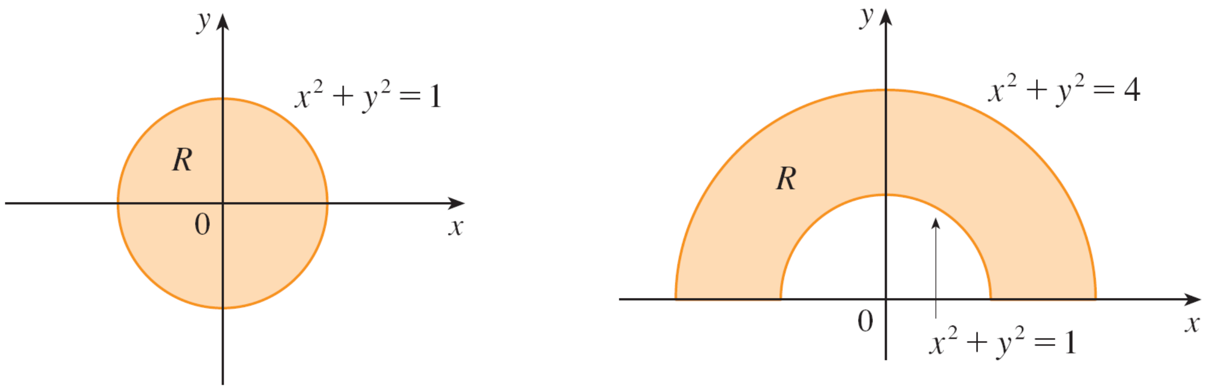
Figura 2

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

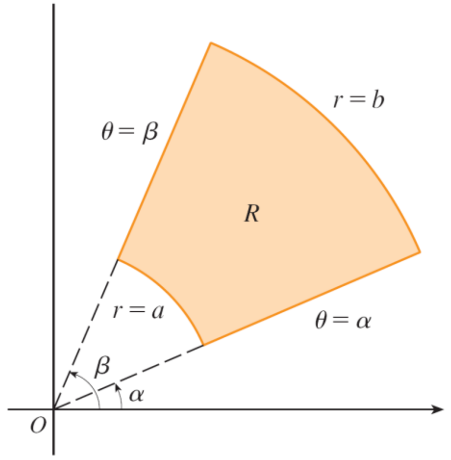
que é apresentado na Figura 3.



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$

(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Figura 1

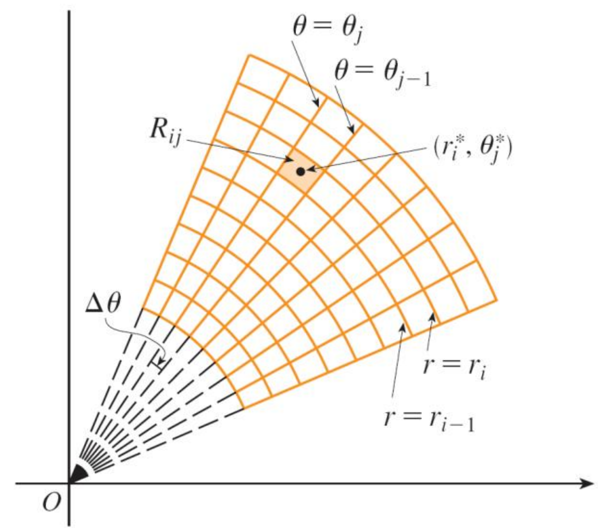


Retângulo polar

Figura 3

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Para calcularmos a integral dupla $\int\int_R f(x, y)\, dA$, onde$R$ é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b - a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{i-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R em retângulos menores R_{ij}, mostrados na Figura 4.



Dividindo R em sub-retângulos polares

Figura 4

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

O “centro” dos sub-retângulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{i-1} \le \theta \le \theta_j\}$$

tem coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Calculamos a área de R_{ij} usando o fato de que a área de um setor de círculo de raio r e ângulo central θ é $\frac{1}{2}r^2\theta$.

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Subtraindo as áreas de dois desses setores, cada um deles com ângulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos que a área de R_{ij} é

$$\Delta A_i = \tfrac{1}{2} r_i^2 \,\Delta\theta - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2 \,\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^* \,\Delta r\,\Delta\theta$$

Apesar de termos definido a integral dupla $\iint_R f(x, y)\, dA$ em termos de retângulos convencionais, podemos mostrar que, para as funções contínuas f, obtemos a mesma resposta usando retângulos polares.

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

As coordenadas retangulares do centro R_{ij} são

$(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)$, portanto, uma soma de Riemann típica é

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*) \, \Delta A_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*) \, r_i^* \, \Delta r \, \Delta \theta$$

Se escrevermos $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, a soma de Riemann da Equação 1 pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*) \, \Delta r \, \Delta \theta$$

que é a soma de Riemann para a integral dupla

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} g(r, \theta) \, dr \, d\theta$$

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Portanto, temos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)\, \Delta A_i$$

$$= \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\, \Delta r\, \Delta \theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

2 **Mudança para Coordenadas Polares em uma Integral Dupla** Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, onde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

A fórmula em $\boxed{2}$ diz que convertemos coordenadas retangulares para coordenadas polares em uma integral dupla escrevendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, usando os limites de integração adequados para r e θ, e substituindo dA por $r\, dr\, d\theta$. Cuidado para não esquecer o fator adicional r no lado direito da Fórmula 2. Um método clássico para se lembrar disso está na Figura 5, onde podemos pensar nos retângulos polares "infinitesimais" como retângulos convencionais com dimensões $r\, d\theta$ e dr e, portanto, com "área" $dA = r\, dr\, d\theta$.

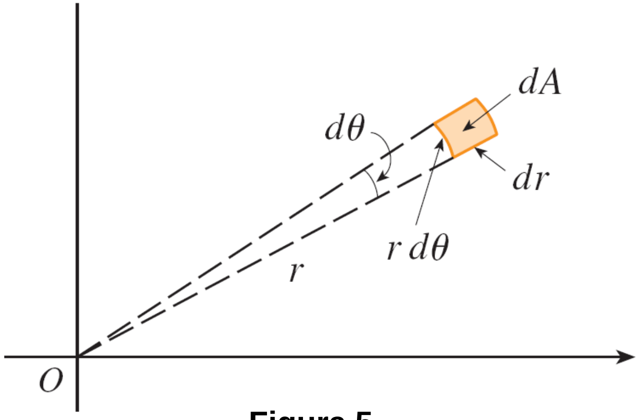


Figura 5

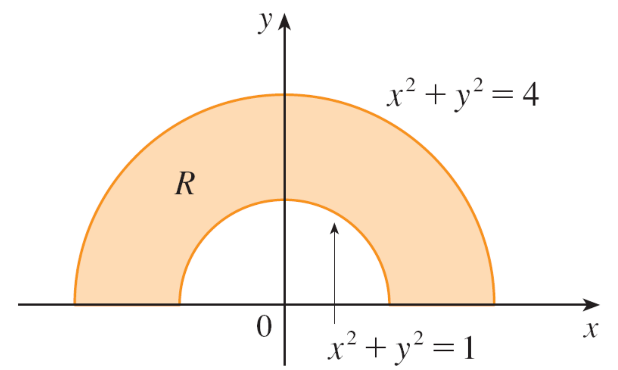
Exemplo 1

Calcule $\iint_R (3x + 4y^2)\, dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO: A região R pode ser descrita como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

É a metade do anel mostrado na Figura 1(b), e em coordenadas polares é dado por $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.



$$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Figura 1(b)

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Portanto, pela Fórmula 2,

$$\iint_R (3x + 4y^2)\, dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\text{sen}^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[r^3\cos\theta + r^4\,\text{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15\,\text{sen}^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= 7\,\text{sen}\,\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\,\text{sen}\,2\theta\Bigg]_0^\pi = \frac{15\pi}{2}$$

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

O que fizemos até aqui pode ser estendido para tipos de região mais complicados, como o mostrado na Figura 7. De fato, combinando a Fórmula 2 com

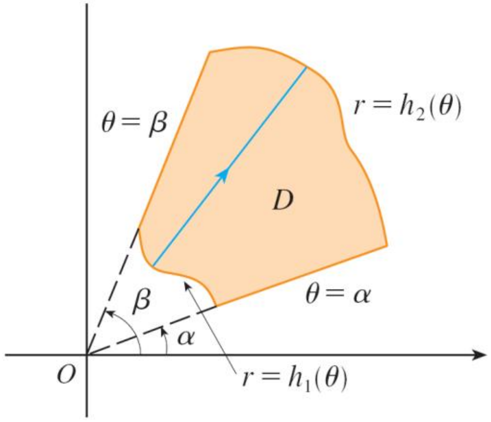


Figura 7

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

onde *D* é uma região do tipo II, obtemos a fórmula a seguir.

3 Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

então,
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Em particular, tomando $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ e $h_2(\theta) = h(\theta)$ nessa fórmula, vemos que a área da região D limitada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e $r = h(\theta)$ é

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_\alpha^\beta \int_0^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$