15 Integrais Múltiplas

15.9

Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

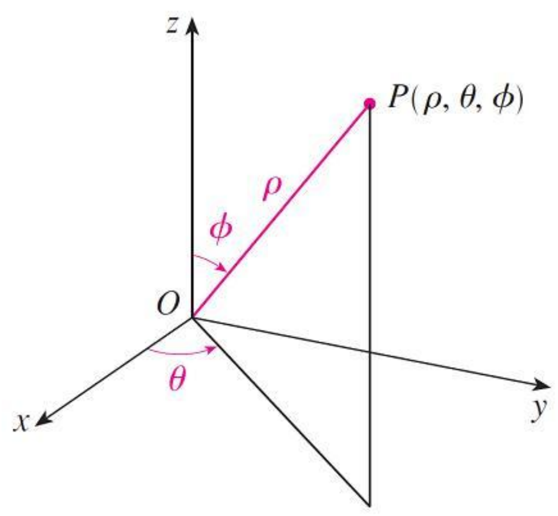
Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Outro sistema de coordenadas tridimensionais útil é o *sistema de coordenadas esféricas*. Ele simplifica o cálculo de integrais triplas em regiões limitadas por esferas ou cones.

Coordenadas Esféricas

Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) de um ponto P no espaço são mostradas na Figura 1, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P, θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas cilíndricas e ϕ e o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP.



As coordenadas esféricas de um ponto

Figura 1

Coordenadas Esféricas

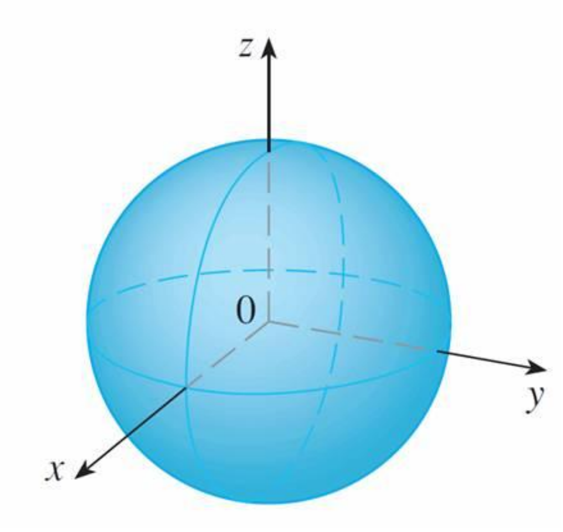
Observe que

$$\rho \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

O sistema de coordenadas esféricas é especialmente útil em problemas nos quais exista simetria em torno de um ponto e a origem esteja colocada neste ponto.

Coordenadas Esféricas

Por exemplo, a esfera com centro na origem e raio c tem a equação simples $\rho = c$ (veja a Figura 2) – essa é a razão do nome “coordenadas esféricas”.

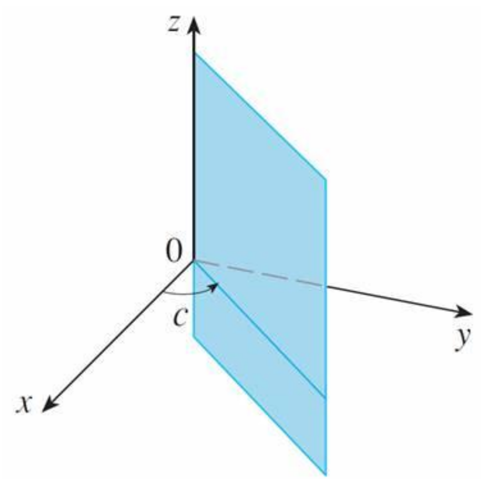


$\rho = c$, uma esfera

Figura 2

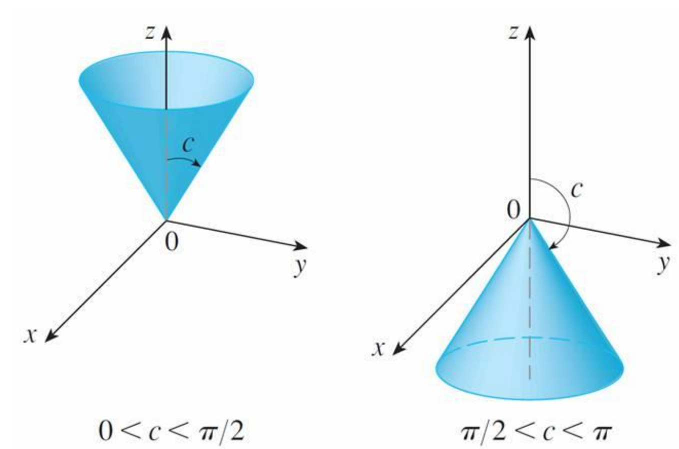
Coordenadas Esféricas

O gráfico da equação $\theta = c$ é um semiplano vertical (veja a Figura 3) e a equação $\phi = c$ representa um semicone com o eixo z como seu eixo (veja a Figura 4).



$\theta = c$, um semiplano

Figura 3



$\phi = c$, um cone

Figura 4

Coordenadas Esféricas

A relação entre coordenadas esféricas e retangulares pode ser vista na Figura 5. Dos triângulos OPQ e OPP', temos

$$z = \rho \cos \phi \qquad\qquad r = \rho \operatorname{sen} \phi$$

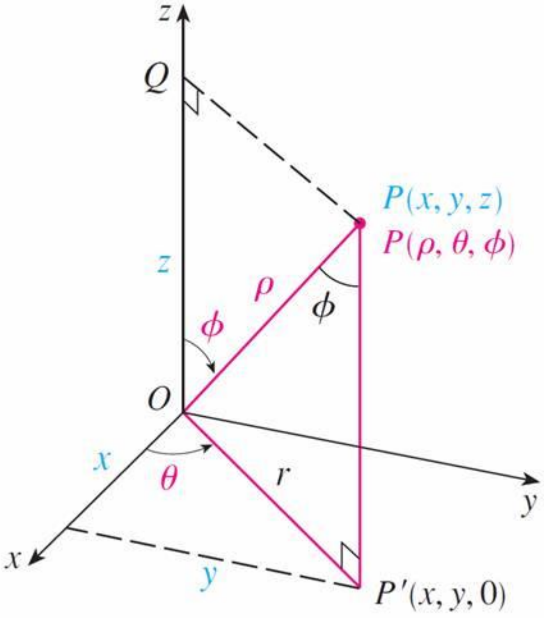


Figura 5

Coordenadas Esféricas

Mas $x = r \cos \theta$ e $y = r \text{ sen } \theta$, de modo que para converter de coordenadas esféricas para retangulares, usamos as equações

1 $$x = \rho \text{ sen } \phi \cos \theta \qquad y = \rho \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Além disso, a fórmula da distância mostra que

2 $$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Usamos essa equação para converter de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

Exemplo 1

O ponto (2, $\pi/4$, $\pi/3$) é dado em coordenadas esféricas. Marque o ponto e encontre suas coordenadas retangulares.

SOLUÇÃO: Marcamos o ponto na Figure 6.

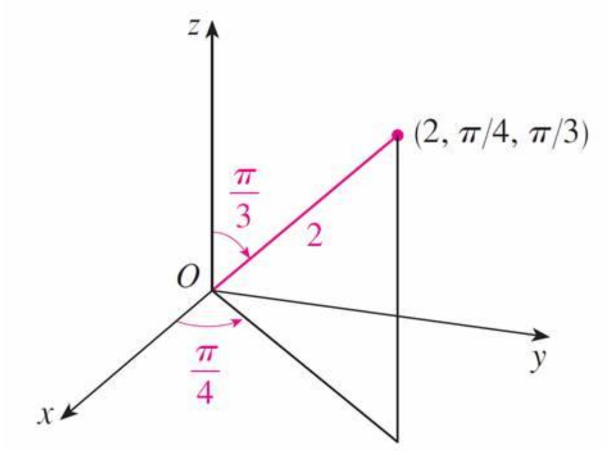


Figura 6

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Das Equações 1, temos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos\phi = 2 \cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Logo, o ponto (2, π/4, π/3) é $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ em coordenadas retangulares.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas, o correspondente à caixa retangular é uma **cunha esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \le \rho \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ c \le \phi \le d\}$$

onde $a \ge 0$ e $\beta - \alpha \le 2\pi$ e $d - c \le \pi$. Apesar de termos definido as integrais triplas dividindo sólidos em pequenas caixas, podemos mostrar que, dividindo o sólido em pequenas cunhas esféricas, obtemos sempre o mesmo resultado. Assim, dividiremos E em pequenas cunhas esféricas E_{ijk} por meio de esferas igualmente espaçadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ e semicones $\phi = \phi_k$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

A Figura 7 mostra que E_{ijk} é aproximadamente uma caixa retangular com dimensões $\Delta\rho$, $\rho_i\,\Delta\,\phi$ (arco de circunferência de raio ρ_i, ângulo $\Delta\phi$) e ρ_i sen $\phi_k\,\Delta\,\theta$ (arco de de circunferência de raio ρ_i sen ϕ_k, ângulo $\Delta\theta$).

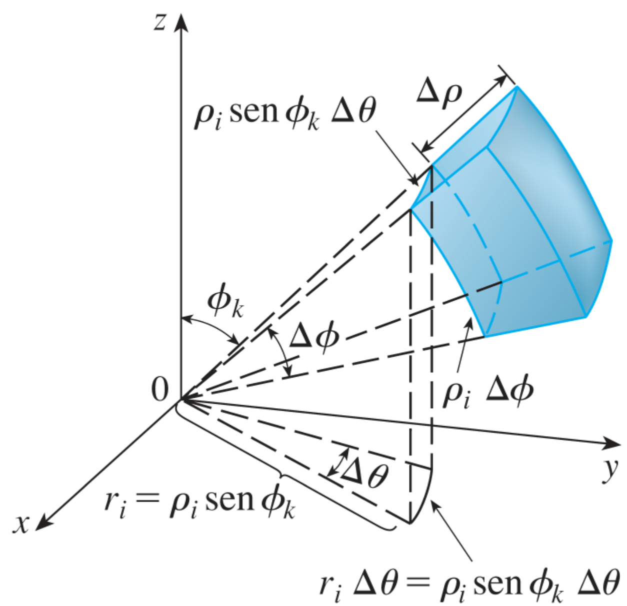


Figura 7

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Logo, uma aproximação do volume de E_{ijk} é dada por

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i \, \Delta\phi)(\rho_i \text{ sen } \phi_k \, \Delta\theta) = \rho_i^2 \text{ sen } \phi_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

De fato, pode ser mostrado, com a ajuda do Teorema do Valor Médio, que o valor exato do volume de E_{ijk} é dado por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \text{ sen } \phi_k \, \Delta\rho \, \Delta\theta \, \Delta\phi$$

onde $(\rho_i, \theta_j, \phi_k)$ é algum ponto em E_{ijk}.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Sejam $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ as coordenadas retangulares deste ponto. Então

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \cos \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k \operatorname{sen} \tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos \tilde{\phi}_k)\, \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen} \tilde{\phi}_k\, \Delta\rho\, \Delta\theta\, \Delta\phi$$

Mas essa é uma soma de Riemann para a função

$$F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Consequentemente, chegamos à seguinte **fórmula para a integração tripla em coordenadas esféricas**.

$\boxed{3}$ $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$$

onde E é uma cunha esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

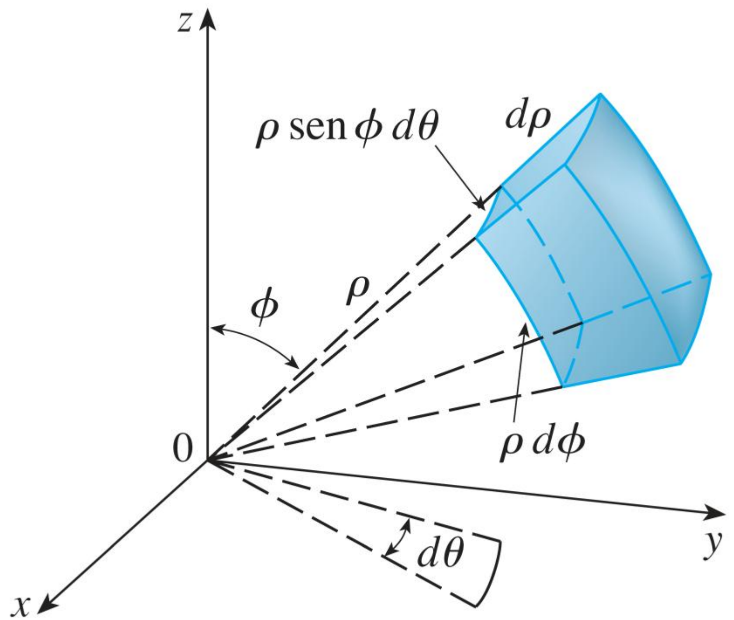
A Fórmula 3 nos diz que, para converter uma integral tripla de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas, escrevemos

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

utilizamosndo os limites de integração apropriados e substituindo dv por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Isso é ilustrado na Figura 8.



Elemento de volume em coordenadas esféricas: $dV = \rho^2$ sen $\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

Figura 8

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Nesse caso, a fórmula é a mesma que $\boxed{3}$, exceto que os limites de integração para ρ são $g_1(\theta, \phi)$ e $g_2(\theta, \phi)$.

Em geral, as coordenadas esféricas são utilizadas nas integrais triplas quando superfícies como cones e esferas formam a fronteira da região de integração.

Exemplo 4

Utilize coordenadas esféricas para determinar o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Veja a Figura 9.)

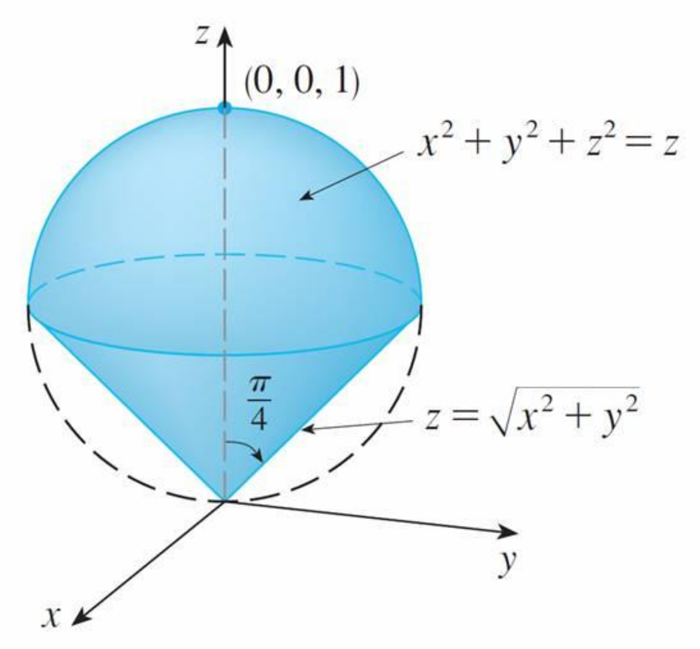


Figura 9

Exemplo 4 – *Solução*

Observe que a esfera passa pela origem e tem centro em ($0, 0, \frac{1}{2}$). Escrevemos a equação da esfera em coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{ou} \qquad \rho = \rho \cos \phi$$

A equação do cone pode ser escrita como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \, \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

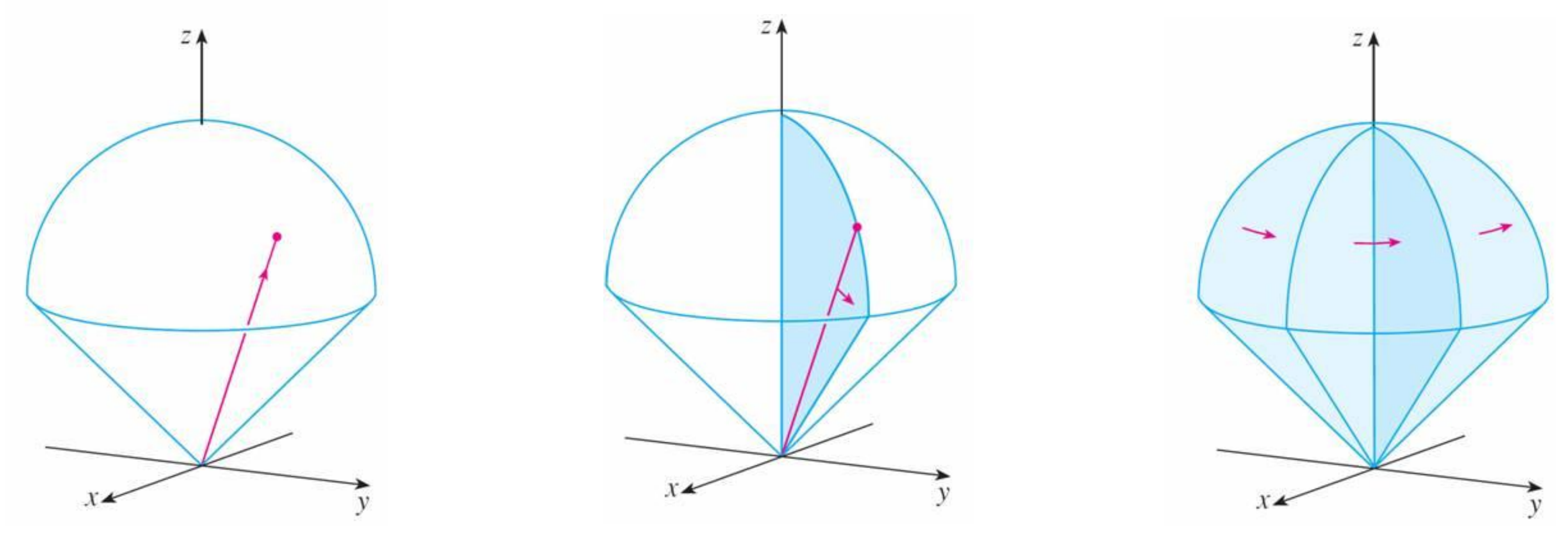
Isto resulta em *sen* $\phi = \cos \phi$, ou $\phi = \pi/4$. Portanto, a descrição do sólido *E* em coordenadas esféricas é

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq \rho \leq \cos \phi\}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

A Figura 11 mostra como *E* é apagado se integramos primeiro em relação a ρ, depois em relação a ϕ, e então em relação a θ.



ρ varia de 0 a cos ϕ , enquanto ϕ e θ são constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.

θ varia de 0 a 2π .

Figura 11

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

O volume de *E* é

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \; \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \; \cos^3\phi \; d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$