5.2 A Integral Definida

Consideremos um interlavo $[a,b]$ e uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada com $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$. Em outras palavras, estamos supondo que para algum número real $k>0$, temos

$$0\leq f(x)\leq k \ \text{ para todo } \ x\in[a,b].$$

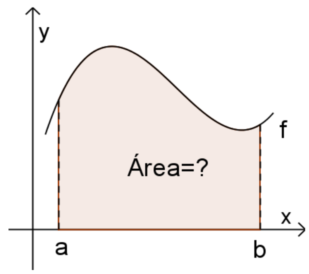

Figura 5.1:

A tentantiva de calcular a área da região entre as retas $x=a$ e $x=b$, situada entre o gráfico de f e o eixo das abscissas, leva-nos ao conceito de integral.

Um caminho natural para avaliar a área dessa região é iniciar com aproximações. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta_n=\dfrac{b-a}{n}$, através dos pontos $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$.

Em cada um dos intervalos $[t_{i-1},t_i]$ assim determinados, escolhemos um ponto c_i e construímos o retângulo com base $[t_{i-1},t_i]$ e altura igual a $f(c_i)$. Parece natural esperar que a soma das áreas desses retângulos forneça uma aproximação da área desejada, e que quanto menor for o comprimento Δ_n de cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$, tanto melhor será esta aproximação.

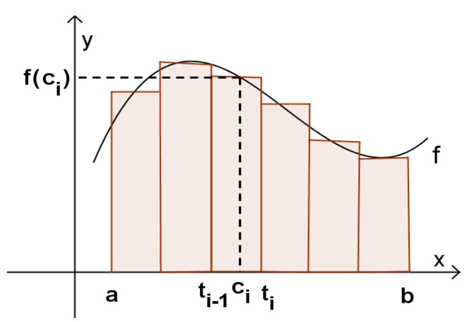

Figura 5.2:

.

Esta soma é

$$\begin{aligned} S_n(f) &= f(c_1)(t_1 - t_0) + f(c_2)(t_2 - t_1) + \ldots + f(c_n)(t_n - t_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_n. \end{aligned}$$

Quando existe $\lim_{n\to\infty} S_n(f)$, dizemos que a região acima descrita é mensurável e que sua área é

$$A = \lim_{n\to+\infty} S_n(f).$$

De acordo com a definição que daremos a seguir, este limite também será chamado de integral de f sobre $[a, b]$.

Observação 5.3 *É possível mostrar que este limite existe para um conjunto de funções.*

Integral definida de uma função

Dado um intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, um subconjunto finito

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$$

é chamado partição de $[a, b]$. Os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ são chamados *intervalos da partição* P ou, simplesmente, *intervalos* de P.

Consideremos uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, isto é, uma função para qual existe um número $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todos $x \in [a, b]$. (Assim, f poderá também assumir valores negativos o que não permitíamos na seção anterior).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes de mesmo comprimento $\Delta_n = \dfrac{b-a}{n}$ através da partição

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}.$$

Em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P escolhemos um ponto c_i. Os pontos $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$, constituem um pontilhamento de P. A soma

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

é chamada a ***soma de Riemann*** da função f relativamente à partição P.

Definição 5.2 *Quando existe* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)$ *diremos que* f *é integrável e que sua integral é esse limite.*

Observe que existir
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)$$
significa que esse limite deve ter o mesmo valor, qualquer que seja a escolha dos pontos $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Para indicar a integral definida de f de a até b usaremos a notação
$$\int_a^b f(x)dx$$
Portanto,
$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{S_n(f)} = \lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f(c_i)}\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{n}}.$$

Os números a e b são respectivamente *limite inferior* e *limite superior* da integral, a função $f(x)$ é o integrando e o símbolo $\int$ é um sinal de integração.

Quando o domínio de f contém um intervalo $[a, b]$, não sendo porém igual a este intervalo $[a, b]$, diremos integral de f sobre $[a, b]$.

Observação 5.4 *Fazer* n *tender a* ∞ *equivale a fazer* Δ_n *tender a zero.*

Observação 5.5 *Os intervalos* $[t_{i-1}, t_i]$ *de uma partição* P *não precisam ter o mesmo comprimento. Neste caso, porém, não basta exigir que* n *tenda ao infinito na definição da integral; precisamos exigir que o comprimento de cada intervalo de* P *tende a zero. Então teremos*
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} S_n(f),$$
onde $|P| = máx\{t_1 - t_0,\ t_2 - t_1, \ldots,\ t_n - t_{n-1}\}$. *O número* $|P|$ *é chamado* ***norma da partição*** P.

Teorema 5.16 *Se uma função for contínua no intervalo fechado* $[a, b]$, *então ela será integrável em* $[a, b]$.

5.3 Propriedades da Integral Definida

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$, onde c é qualquer constante.

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, onde c é qualquer constante.

4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

5. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

6. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

7. Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

8. Se f(a) existe, então $\int_a^a f(x)dx = 0$

9. Se $c > d$, então $\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

Exemplo 5.7 *Usando o fato que* $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$. *Calcule* $\int_0^1 [4 + x^2] dx$.

Teorema 5.17 *Se* $a < c < b$ *e se f é integrável tanto em [a,c] como em [c,b], então f é integrável em [a,b] e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

O resultado seguinte é uma generalização do Teorema 5.17 ao caso em que c não está necessariamente entre a e b.

Teorema 5.18 *Se f é integrável em um intervalo fechado e se a, b, c são números arbitrários no intervalo, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Exemplo 5.8 *Expresse como uma única integral* $\int_2^7 f(x)dx - \int_5^7 f(x)dx$.

5.4 O Teorema Fundamental do Cálculo(T.F.C)

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do cálculo: o cálculo diferencial e o cálculo integral.

O cálculo diferencial surgiu do problema da tangente, enquanto o cálculo integral surgiu do problema da área.

Foi ***Issac Barrow***(1630-1677), professor de Newtom em Cambridge que, descobriu a estreita relação entre esses dois problemas, relação esta expressa pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton e Leibniz exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o T.F.C os capacitou a computar as áreas muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas.

Teorema 5.19 *(**Teorema Fundamental do Cálculo/T.F.C**)*

Seja f uma função contínua em $[a, b]$.

1. *Se* $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então* $g'(x) = f(x)$.

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *quando* F *for uma antiderivada de* f.

Corolário 5.20 *Se f é contínua em [a,b] e F é uma antiderivada de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Integrais definidas e áreas planas

Como podemos ver o T.F.C pode ser usado para calcular áreas através da integral definida.

Aplique o T.F.C nas integrais definidas abaixo e interprete cada uma das funções geometricamente.

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2 dx$

2. $\displaystyle\int_0^\pi sen\, x dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^3 |x| dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^3 e^x dx$

6. $\displaystyle\int_4^2 3^x dx$

7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

Teorema 5.21 *Se* $u = g(x)$, *então* $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

O Teorema 5.21 afirma que, após fazer a substituição $u = g(x)$ e $du = g'(x)dx$, podemos utilizar os valores de g que corresponde a $x = a$ e $x = b$, respectivamente, como os limites da integral que envolve u. É, pois, desnecessário voltar á variável original x após integrar.

Exemplo 5.9 *Calcular* $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx$.

Exemplo 5.10 *Calcular* $\int_0^{\pi/4} (1 + sen\ 2x)^3 \cos 2x dx$.

Teorema 5.22 *Seja f contínua em [-a,a]*

(i) *Se f é uma função par,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) *Se f é uma função ímpar,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Exemplo 5.11 *Calcular*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^4 + 3x^2 + 1)dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^5 + 3x^3 + x)dx$

Teorema 5.23 *Se f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em [a,b], então a área A da região delimitada pelos gráficos de f, g, x=a e x=b é*

$$A = \int_{a}^{b}[f(x) - g(x)]dx$$

Exemplo 5.12 *Achar a área da região delimitada pelos gráficos das equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*