15 Integrais Múltiplas

15.3

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função *f* não somente sobre retângulos, como também sobre uma região *D* de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1.

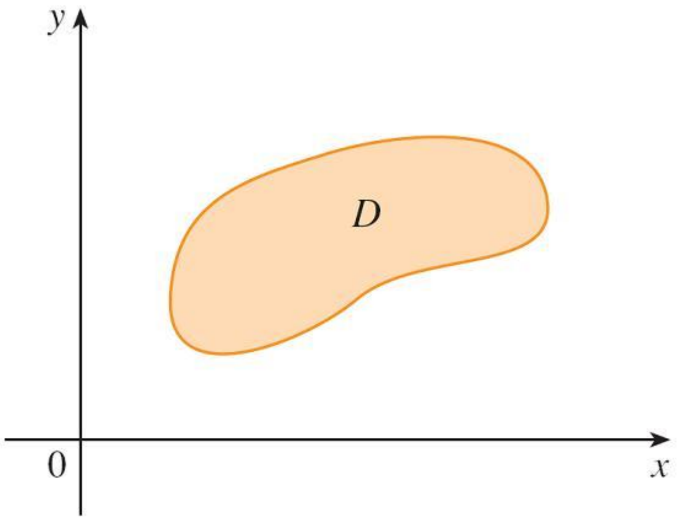


Figura 1

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Vamos supor que *D* seja uma região limitada, o que significa que *D* pode estar contida em uma região retangular *R* como na Figure 2.

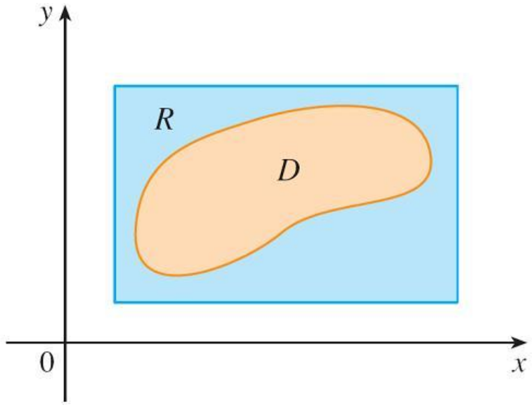


Figura 2

Definimos, então, uma nova função *F,* com domínio *R,* por

$\boxed{1}$ $$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de *f* em *D*** por

$$\boxed{2} \qquad \iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

A Definição 2 faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y)\, dA$ ja foi definida anteriormente.

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando (x, y) está fora da região D e dessa forma não contribuem para o valor da integral. Isso significa que não importa qual o retângulo R tomado, desde que contenha D.

No caso em que $f(x, y) \geq 0$, podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y)\, dA$ como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ (o gráfico de f).

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de *f* e *F* nas Figuras 3 e 4 e lembrando que $\iint_R F(x, y)\, dA$ é o volume abaixo do gráfico de *F*.

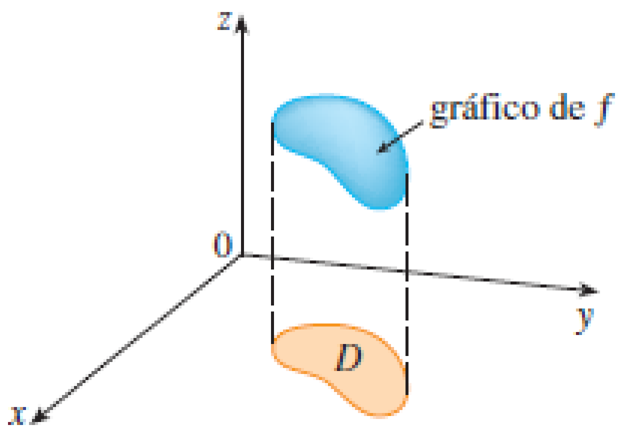


Figura 3

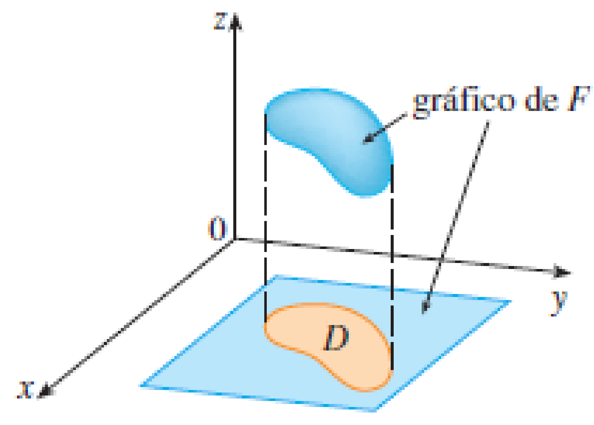


Figura 4

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

A Figura 4 mostra também que F é provavelmente tem descontinuidades de seus pontos limite de D. Apesar disso, se f for contínua em D e se a curva limite de D for "comportada", então pode ser mostrado que $\iint_R F(x, y)\, dA$ existe e, portanto, $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe. Em particular, esse é o caso para os dois tipos de regiões listados a seguir.

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Uma região plana D é dita do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de$x$, ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde g_1 e g_2 são contínuas em $[a, b]$. Alguns exemplos de regiões do tipo I estão mostrados na Figura 5.

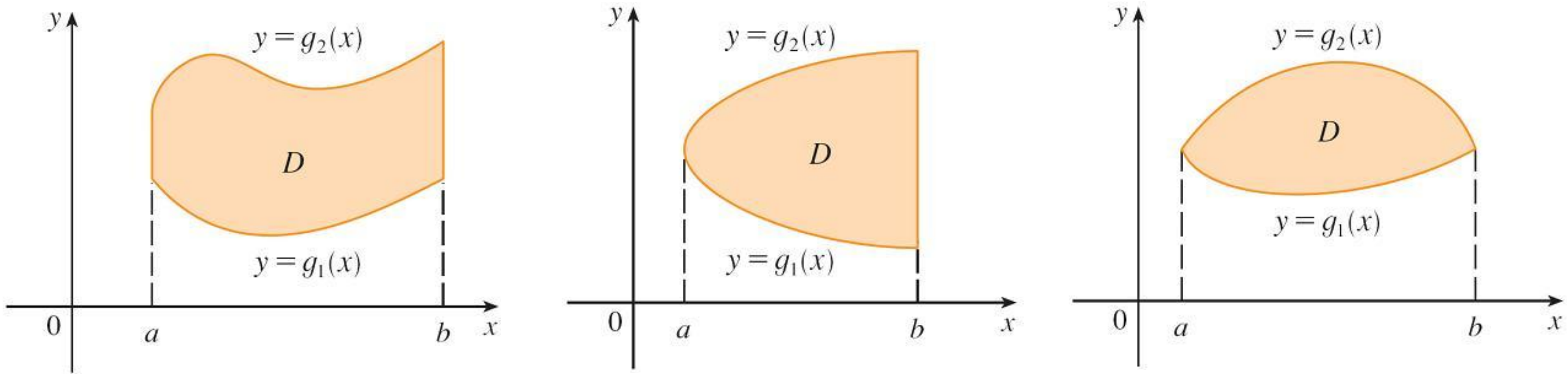


Figura 5

Algumas regiões do tipo I

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para calcularmos $\iint_D f(x, y)\, dA$ quando D é do tipo I, escolhemos um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenha D, como na Figura 6, e consideramos a função F definida na Equação 1; ou seja, F coincide com f em D e F é 0 fora de D.

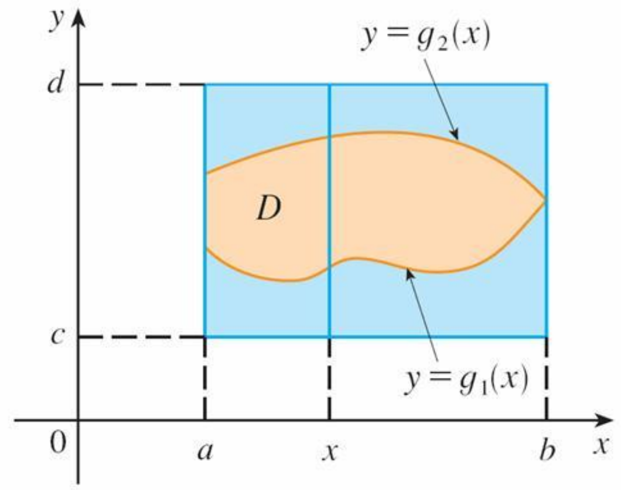


Figura 6

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ se $y < g_1(x)$ ou $y > g_2(x)$ porque (x, y) está fora de D. Portanto,

$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ quando $g_1(x) \le y \le g_2(x)$.

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Portanto, temos a seguinte fórmula, que nos permite calcular a integral dupla como uma integral iterada.

$\boxed{3}$ Se f é contínua em uma região D do tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

então, $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

A integral do lado direito de $\boxed{3}$ é uma integral iterada, exceto que na integral de dentro consideramos x constante não só em $f(x, y)$, mas também nos limites da integração, $g_1(x)$ e $g_2(x)$.

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Consideraremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas como

$$\boxed{4} \qquad D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

onde h_1 e h_2 são contínuas. Essas duas regiões estão ilustradas na Figura 7.

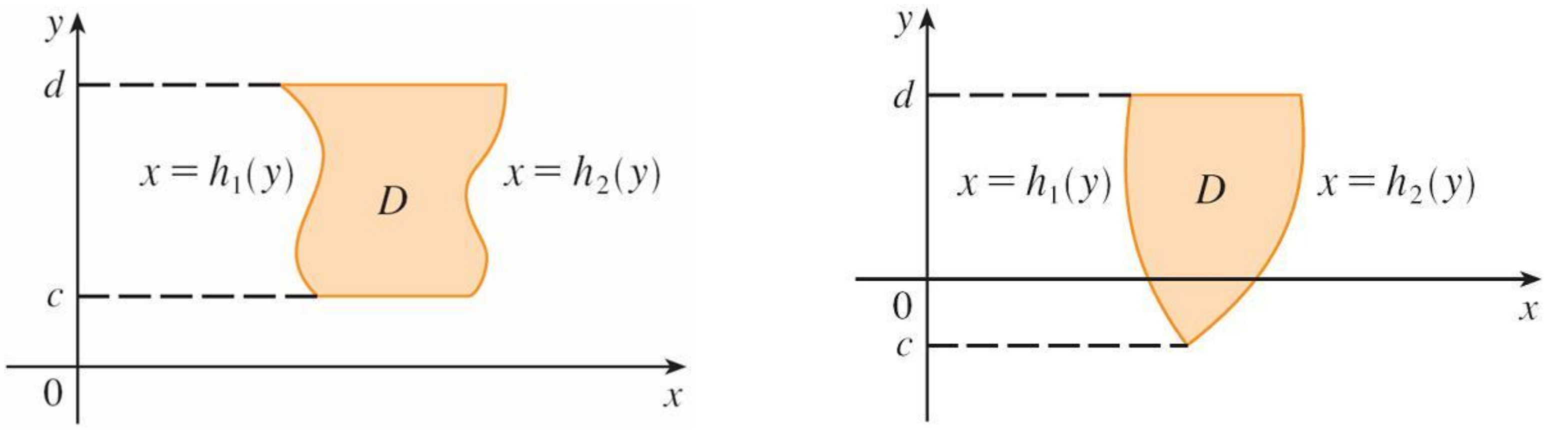


Figura 7

Algumas regiões do tipo II

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Utilizando o mesmo método que usamos para estabelecer $\boxed{3}$ podemos mostrar que

$\boxed{5}$

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

onde D é uma região do tipo II dada pela Equação 4.

Exemplo 1

Calcule $\iint_D (x + 2y)\, dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO: As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo $x = \pm 1$. Observamos que a região D, ilustrada na Figura 8, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$$

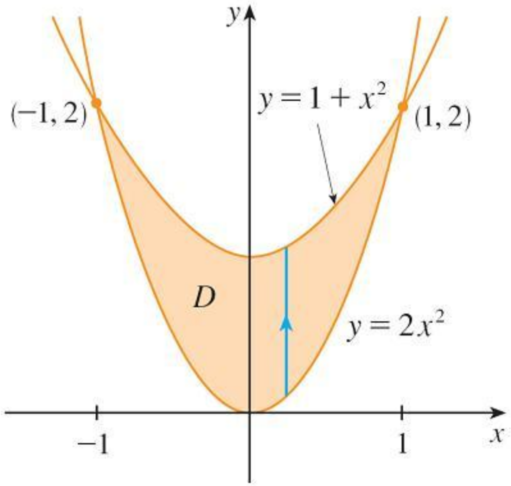


Figura 8

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx$$

$$= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Propriedades das Integrais Duplas

Propriedades das Integrais Duplas

Suponha que todas as seguintes integrais existam. As primeiras três propriedades das integrais duplas sobre uma região *D* seguem imediatamente da Definição 2.

6 $$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$

7 $$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA$$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em D, então

8 $$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$

Propriedades das Integrais Duplas

A próxima propriedade de integral dupla é semelhante à propriedade de integral de uma função de uma variável real, dada pela equação $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras (veja a Figura 17), então

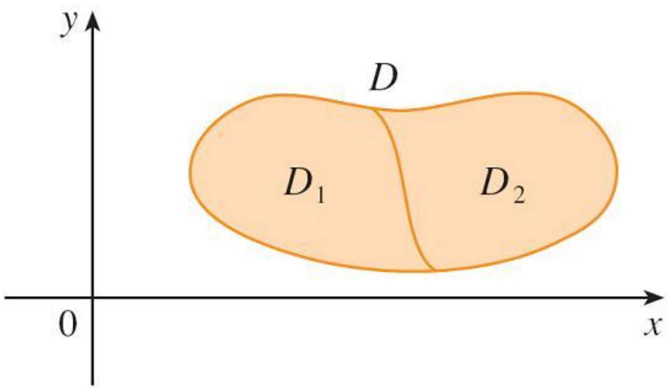
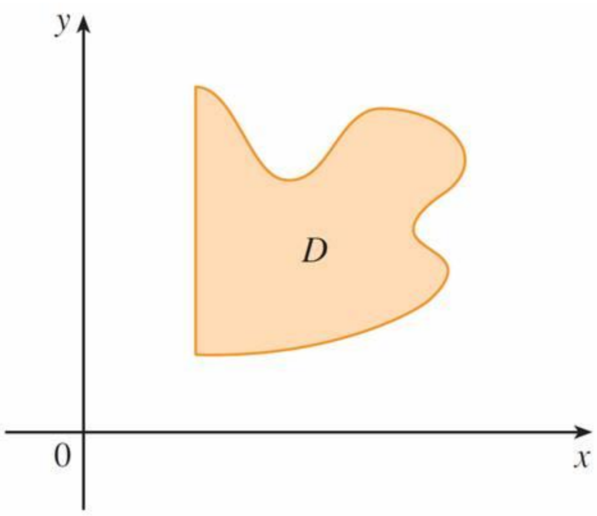


Figura 17

9 $$\iint_D f(x, y)\,dA = \iint_{D_1} f(x, y)\,dA + \iint_{D_2} f(x, y)\,dA$$

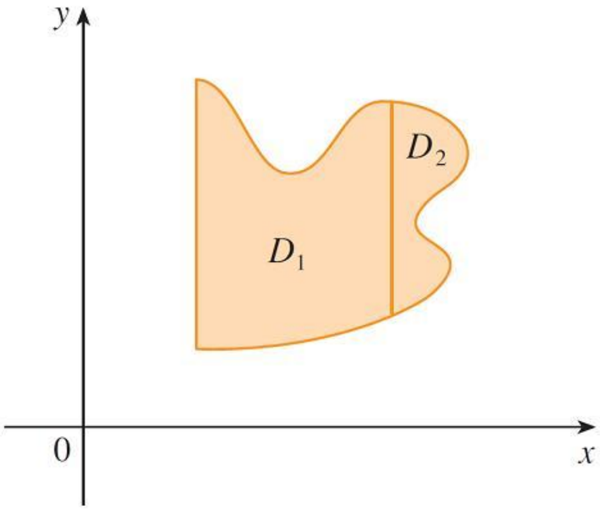
Propriedades das Integrais Duplas

A Propriedade 9 pode ser usada para calcular integrais duplas sobre regiões *D* que não sejam nem do tipo I nem do tipo II. A Figura 18 ilustra esse procedimento.



D não é do tipo I nem do tipo II.

Figura 18(a)



$D = D_1 \cup D_2$, D_1 é do tipo I, D_2 é do tipo II.

Figura 18(b)

Propriedades das Integrais Duplas

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D, obteremos a área de D:

10 $$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

Propriedades das Integrais Duplas

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\, dA$.

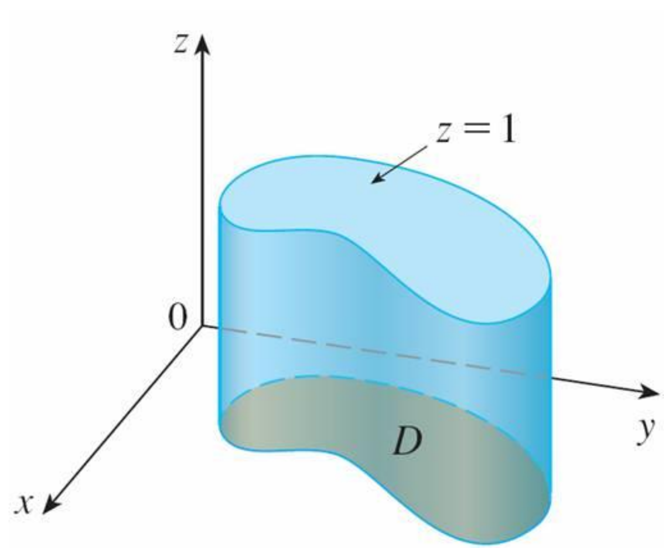


Figura 19

Cilindro com base *D* e altura 1

Propriedades das Integrais Duplas

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade.

11 Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

Exemplo 6

Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\text{sen}\, x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO: Como $-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$ e $-1 \leq \cos y \leq 1$, temos $-1 \leq \text{sen}\, x \cos y \leq 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leq e^{\text{sen}\, x \cos y} \leq e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\text{sen}\, x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$