UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ	**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO** **UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ** **CAMPUS APUCARANA**

Lista de Exercícios - Cálculo II – Engenharia Química - Prof^a Adriana Camila

(extraída do livro CÁLCULO - vol 2, James Stewart)

Integrais Duplas

1) Considere o retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 6,\ 0 \le y \le 4\}$.

a) Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo R. Utilize a soma de Riemann com $m = 3$, $n = 2$ e tome como ponto amostral o canto superior direito de cada sub-retângulo.

b) Use a regra do Ponto Médio para estimar o volume do sólido da parte (a).

2) Considere o retângulo $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

a) Use a soma de Riemann com $m = n = 2$ para estimar o valor de $\int\int_R \sin(x + y) dA$. Tome como pontos amostrais os cantos inferiores esquerdos.

b) Use a regra do Ponto Médio para dar uma estimativa da integral do item (a).

3) É dada a tabela de valores de uma função $f(x, y)$ definida em $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

a) Estime $\int\int_R f(x, y)dA$ utilizando a Regra do Ponto Médio com $m = n = 2$.

b) Estime a integral dupla com $m = n = 4$, escolhendo como pontos amostrais os pontos mais distantes da origem.

		y				
		0	1	2	3	4
	1,0	2	0	-3	-6	-5
	1,5	3	1	-4	-8	-6
x	2,0	4	3	0	-5	-8
	2,5	5	5	3	-1	-4
	3,0	7	8	6	3	0

4) Calcule as integrais duplas.

a) $\int\int_R 3\ dA, \quad R = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 6\}$

b) $\int\int_R (4 - 2y)dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

5) Calcule as integrais iteradas.

a) $\displaystyle\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\ dxdy$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_o^{\pi/2} \sin(x)\cos(y)\ dydx$

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (2x+y)^8 \ dxdy$

d) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \ dydx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (u-v)^5 \ dudv$

f) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^\pi r\sin^2\theta \ d\theta dr$

6) Calcule as integrais duplas.

a) $\int\int_R (6x^2y^3-5y^4) \ dA, \quad R=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 3, \ 0\leq y\leq 1\}$

b) $\int\int_R \frac{xy^2}{x^2+1} \ dA, \quad R=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 1, \ -3\leq y\leq 3\}$

c) $\int\int_R x\sin(x+y) \ dA, \quad R=[0,\pi/6]\times[0,\pi/3]$

d) $\int\int_R xye^{x^2y} \ dA, \quad R=[0,1]\times[0,2]$

7) Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 (4-x-2y) \ dxdy.$

8) Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x+2y+z=12$ e acima do retângulo $R=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 1, \ -2\leq y\leq 3\}$.

9) Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide elíptico $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$ e acima do retângulo $R=[-1,1]\times[-2,2]$.

10) Encontre o volume do sólido delimitado pelo paraboloide $z=2+x^2+(y-2)^2$ e pelos planos $z=1$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ e $y=4$.

11) Determine o valor médio da função $f(x,y)=x^2y$ sobre o retângulo com vértices $(-1,0),(-1,5),(1,5),(1,0)$.

12) Calcule as integrais iteradas.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} (x+2y)dydx$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} (1+2y)dydx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} e^{\sin\theta}drd\theta$

13) Calcule as integrais duplas.

a) $\int\int_D x^3y^2 \ dA, \quad D=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq 2, \ -x\leq y\leq x\}$

b) $\int\int_D x \ dA, \quad D=\{(x,y) \mid 0\leq x\leq \pi, \ 0\leq y\leq \sin x\}$

c) $\int\int_D y^2e^{xy} \ dA, \quad D=\{(x,y) \mid 0\leq y\leq 4, \ 0\leq x\leq y\}$

d) $\int\int_D x\cos y \ dA, \quad D$ é limitada por $y=0$, $y=x^2$, $x=1$

e) $\int\int_D y^3 \ dA, \quad D$ é a região triangular com vértices $(0,2),(1,1)$ e $(3,2)$

f) $\int\int_D (2x-y) \ dA, \quad D$ é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

14) Determine o volume dos sólidos.

a) Abaixo do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e acima da região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

b) Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.

c) Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$.

d) Delimitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$.

e) Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante.

15) Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

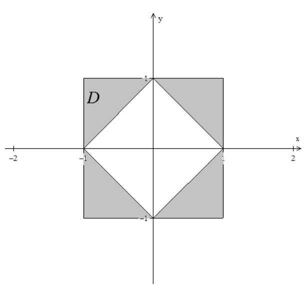
a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\ dydx$ b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\ dxdy$

c) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\ dydx$

16) Calcule a integral trocando a ordem de integração.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\ dxdy$ b) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\ dydx$

17) Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral $\int\int_D x^2\ dA$.



18) Esboce a região cuja área é dada pela integral $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \int_4^7 r dr d\theta$ e calcule-a.

19) Calcule a integral dada colocando-a em coordenadas polares.

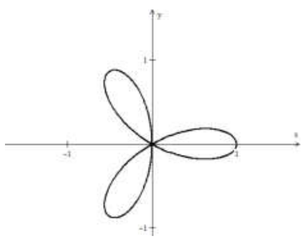
a) $\int\int_D xy\ dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3.

b) $\int\int_R \cos(x^2 + y^2) dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

c) $\int\int_D e^{-x^2-y^2} dA$, onde D é a região delimitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4-y^2}$ e o eixo y.

20) Utilize a integral dupla para calcular a área da região.

a) Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$



b) A região interior a ambos os círculos $r = \cos\theta$ e $r = \sin\theta$.

21) Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

a) Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e acima do disco $x^2+y^2 \leq 4$

b) Delimitado pelo hiperboloide $-x^2-y^2+z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

c) Uma esfera de raio a

d) Acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$

22) Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)dydx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)dxdy$

Respostas:

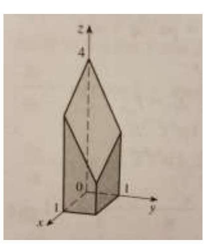
1) a) 288 b) 144 **2)** a) $\pi^2/2$ b) 0

3) a) -6 b) $3,5$ **4)** a) 60 b) 3

5) a) 10 b) 1 c) 261.632/45 d) $\frac{21}{2}\ln 2$ e) 0 f) π

6) a) $\frac{21}{2}$ b) $9\ln 2$ c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{12}\pi$ d) $\frac{1}{2}(e^2-3)$

7)



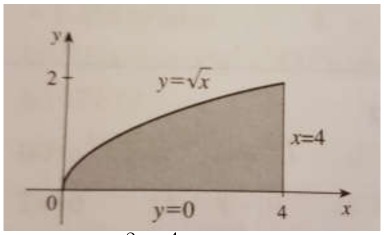
8) $47,5$ **9)** $\frac{166}{27}$ **10)** $\frac{64}{3}$

11) $\frac{5}{6}$ **12)** a) $\frac{9}{20}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $e-1$

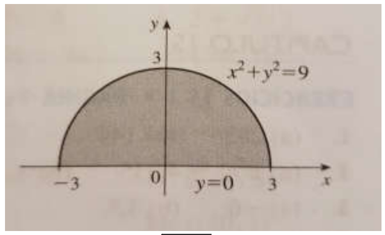
13) a) $\frac{256}{21}$ b) π c) $\frac{1}{2}e^{16}-\frac{17}{2}$ d) $\frac{1}{2}(1-\cos 1)$ e) $\frac{147}{20}$ f) 0

14) a) $\frac{6}{35}$ b) $\frac{31}{8}$

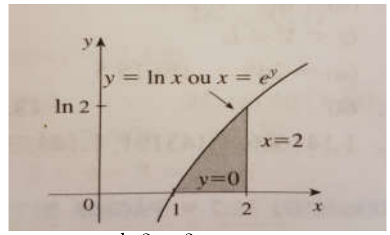
15)



(a) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)dxdy$



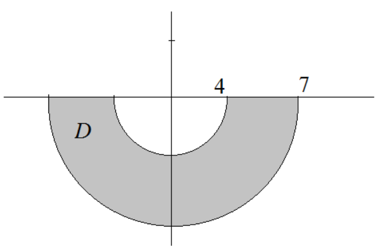
(b) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dydx$



(c) $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x,y)dxdy$

16) a) $\frac{1}{6}(e^9-1)$ b) $\frac{1}{3}\ln 9$ **17)** 1

18) $A=\frac{33\pi}{2}$



19) a) 0 b) $\frac{1}{2}\pi\sin 9$ c) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-4})$

20) a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{1}{8}(\pi-2)$

21) a) $\frac{16}{3}\pi$ b) $\frac{4}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}\pi a^3$ d) $\frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

22) a) $\frac{1}{2}\pi(1-\cos 9)$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$