16 Cálculo Vetorial

16.6 Superfícies Parametrizadas e suas Áreas

Superfícies Paramétricas e suas Áreas

Aqui, usaremos funções vetoriais para descrever superfícies mais gerais, chamadas *superfícies parametrizadas* e calcularemos suas áreas. A seguir, tomaremos a fórmula para a área de superfícies gerais e veremos como se aplica a superfícies especiais.

Superfícies Parametrizadas

Superfícies Parametrizadas

De modo muito semelhante à nossa descrição de curvas espaciais por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ de um único parâmetro t, podemos descrever uma superfície por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dois parâmetros u e v. Suponhamos que

$$\boxed{1} \qquad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

seja uma função a valores vetoriais definida sobre uma região D no plano uv. Então x, y e z, os componentes de funções de $\mathbf{r}$, serão funções das duas variáveis u e v com domínio D.

Superfícies Parametrizadas

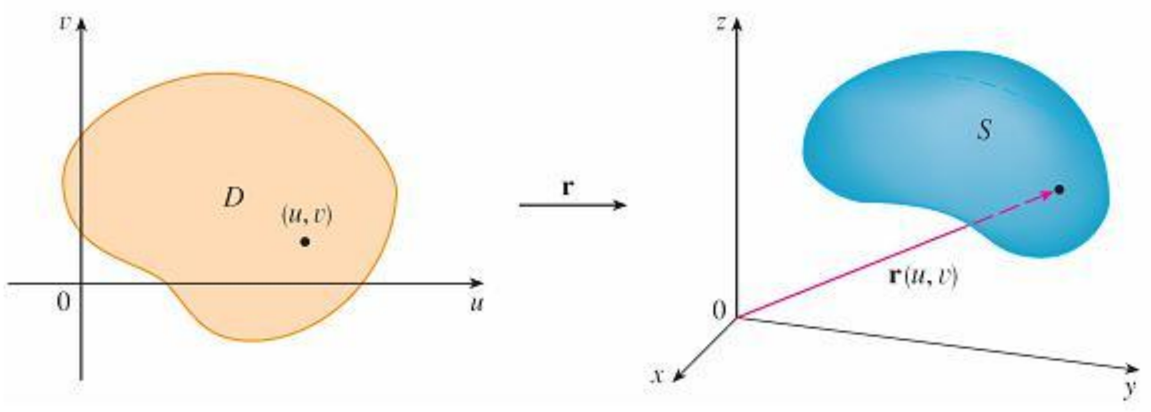
O conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\boxed{2} \qquad x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

e (u, v) varia ao longo de D, é chamado de **superfícies parametrizada** S e Equações 2 são chamados **equações parametrizadas** de S. Cada escolha de u e v resulta um ponto em S; fazendo todas as escolhas, fazendo todas as escolhas, temos todos os pontos de S.

Superfícies Parametrizadas

Em outras palavras, a superfície é traçada pela ponta do vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ enquanto (u, v) se move ao longo da região D. (Veja a Figura 1.)



Uma superfície parametrizada

Figura 1

Exemplo 1

Identifique e esboce a superfície com equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u \, \mathbf{i} + v \, \mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} u \, \mathbf{k}$$

SOLUÇÃO: As equações paramétricas para essa superfície são

$$x = 2 \cos u \qquad y = v \qquad z = 2 \operatorname{sen} u$$

Então, para qualquer ponto (x, y, z) da superfície, temos

$$x^2 + z^2 = 4 \cos^2 u + 4 \operatorname{sen}^2 u = 4$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Isso significa que todas as seções transversais verticais paralelas ao plano *xz* (isto é, com *y* constante) são circunferências de raio 2. Como $y = v$ e não existe restrição ao valor de *v*, a superfície é um cilindro circular de raio 2 cujo eixo é o eixo *y* (veja a Figura 2).

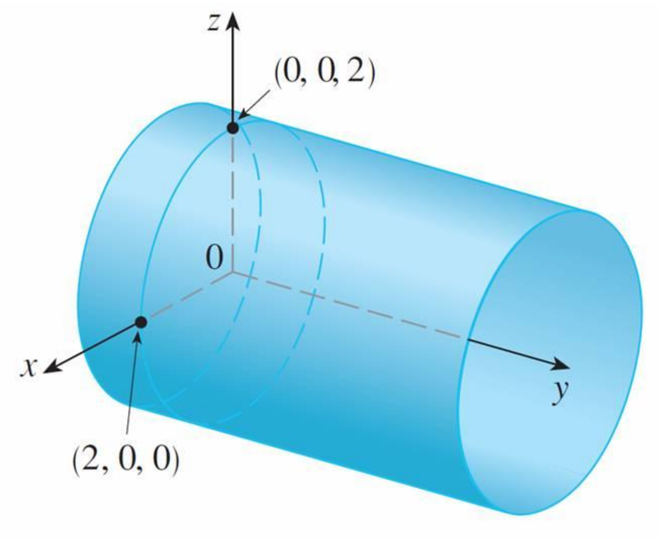


Figura 2

Superfícies Parametrizadas

Se uma superfície parametrizada S é dada por uma função vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então existem duas famílias de curvas úteis contidas em S, uma família com u constante e outra com v constante. Essas famílias correspondem a retas verticais e horizontais no plano uv. Se mantivermos u constante, impondo $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ se torna uma função vetorial com um único parâmetro v que define uma curva C_1 sobre S. (Veja a Figura 4.)

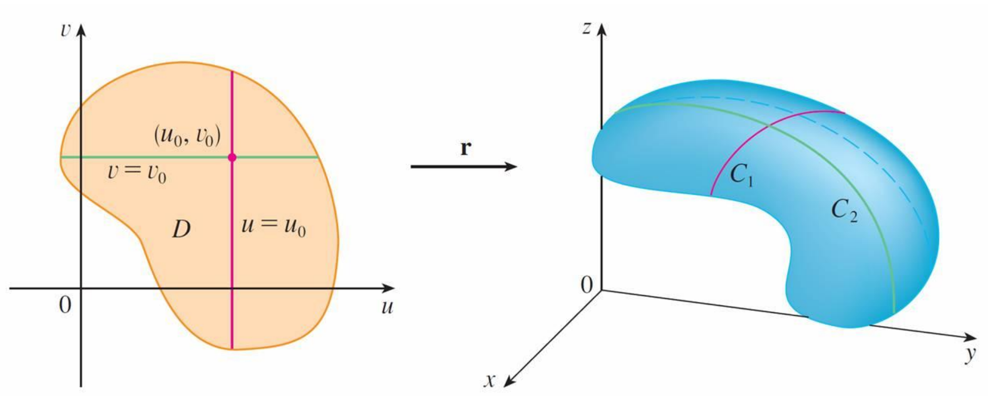


Figura 4

Superfícies Parametrizadas

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos uma curva C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está sobre S. Chamamos essas curvas **curvas da grade**. (No Exemplo 1, por exemplo, as curvas da grade obtidas tornando u constante são linhas horizontais, enquanto as curvas da grade obtidas com v constante são circunferências). Na verdade, quando um computador elabora em gráfico uma superfície parametrizada, que normalmente apresenta a superfície traçando as curvas da grade, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2

Use um sistema de computação algébrica para traçar o gráfico da superfície

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \cos v \rangle$$

Quais são as curvas da grade com u constante? Quais têm v constante?

Exemplo 2 – *Solução*

Traçamos o pedaço da superfície com os parâmetros delimitados por $0 \leq u \leq 4\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$ na Figura 5.

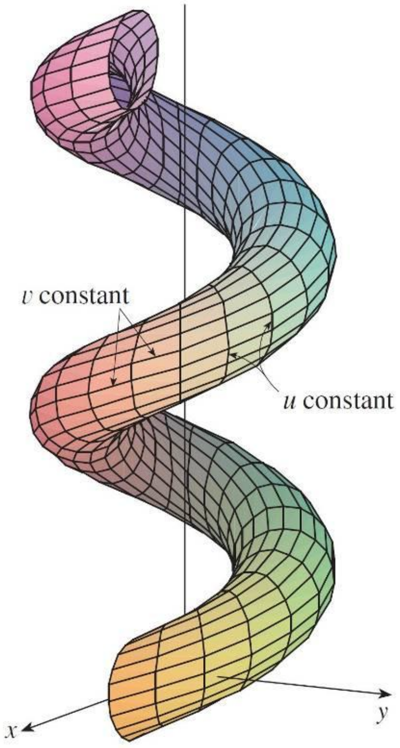


Figura 5

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Esse gráfico tem a aparência de um tubo espiral. Para identificarmos as curvas da grade, escrevemos as equações paramétricas correspondentes:

$x = (2 + \text{sen } v) \cos u \quad y = (2 + \text{sen } v) \text{ sen } u \quad z = u + \cos v$

Se v é constante, então sen v e cos v são constantes, portanto, as equações paramétricas se assemelham às da hélice. Assim, as curvas de grade com v constante são as curvas em espiral na Figura 5. Deduzimos que as curvas da grade com u constante devem ser curvas que parecem círculos na figura. Maior evidência dessa afirmação é que, se mantivermos u constante, $u = u_0$, então as equações $z = u_0 + \cos v$ mostram que os valores de z variam de u_0 – 1 até $u_0 + 1$.

Exemplo 4

Determine uma representação parametrizada da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

SOLUÇÃO: A esfera tem uma representação simples $\rho = a$ em coordenadas esféricas, então vamos escolher os ângulos ϕ e θ das coordenadas esféricas como parâmetros. Tomando $\rho = a$ nas equações para conversão de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares, obtemos

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

Exemplo 4 – *Solução*

como equações parametrizadas da esfera. A equação vetorial correspondente é

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \text{ sen } \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Temos $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, de modo que o domínio dos parâmetros é o retângulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. As curvas da grade com ϕ constante são as circunferências de latitude constante (incluindo o equador).

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

As curvas da grade com θ constante são os meridianos (semicircunferências), que ligam os Polos Norte e Sul (veja a Figura 7).

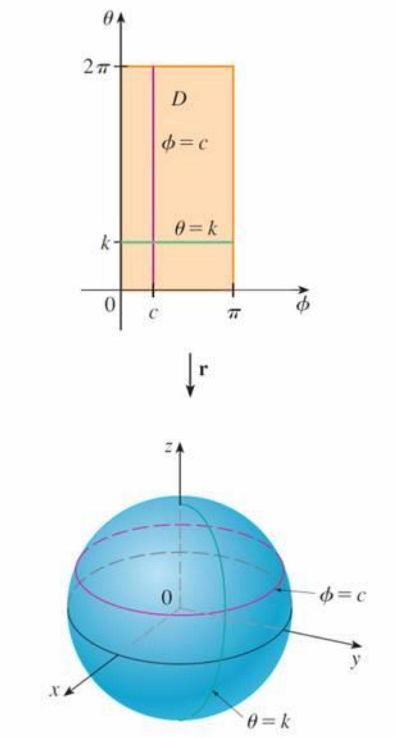


Figura 7

Superfícies Parametrizadas

OBSERVAÇÃO Vimos no Exemplo 4 que as curvas de grade para uma esfera são curvas de latitude e longitude constantes. Para uma superfície parametrizada geral, estamos realmente fazendo um mapa e as curvas da grade são semelhantes a linhas de latitude e longitude. Descrever um ponto sobre uma superfície parametrizada (como a da Figura 5) dando valores específicos de u e v é como dar a latitude e a longitude de um ponto.

Superfícies de Revolução

Superfícies de Revolução

As superfícies de revolução podem ser representadas na forma parametrizada e, portanto, seus gráficos podem ser traçados usando-se um computador. Por exemplo, vamos considerar a superfície S obtida pela rotação da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sobre o eixo x, onde $f(x) \geq 0$. Seja θ o ângulo de rotação, como mostrado na Figura 10.

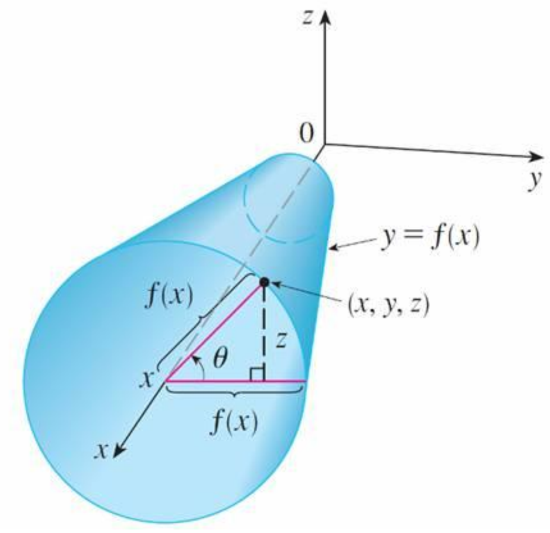


Figura 10

Superfícies de Revolução

Se (x, y, z) é um ponto em S, então

$$\boxed{3} \qquad x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta$$

Portanto, tomamos x e θ como parâmetros e olhamos as Equações 3 como equações paramétricas de S. O domínio do parâmetro é dado por $a \leq x \leq b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemplo 8

Encontre equações paramétricas para a superfície gerada pela rotação da curva y = sen x, $0 \leq x \leq 2\pi$, sobre o eixo x. Use essas equações para o gráfico da superfície de revolução.

SOLUÇÃO: Das Equações 3, as equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = \operatorname{sen} x \cos \theta \qquad z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta$$

e o domínio do parâmetro é $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemplo 8 – *Solução*

continuação

Usando um computador para traçar essas equações e girar a imagem, obtemos o gráfico da Figura 11.

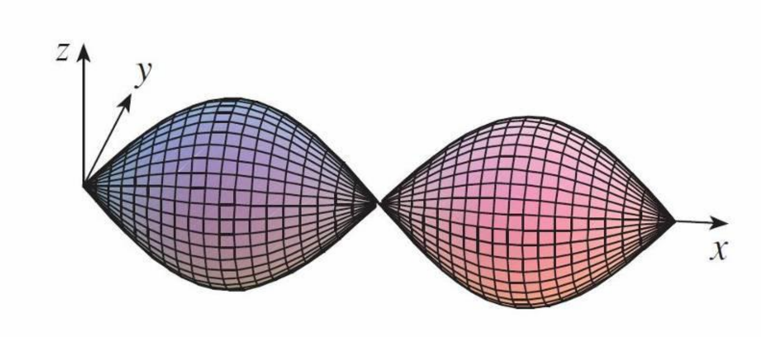


Figura 11

Planos Tangentes

Planos Tangentes

Agora vamos determinar o plano tangente a uma superfície parametrizada determinada por uma função vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

em um ponto P_0 com vetor posição $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

Planos Tangentes

Se mantivermos u constante usando $u = u_0$, então $\mathbf{r}(u_0, v)$ torna-se uma função vetorial do parâmetro único v e define uma curva da grade C_1 em S. (Veja a Figura 12.) O vetor tangente a C_1 em P_0 é obtido tomando-se a derivada parcial de $\mathbf{r}$ em relação a v:

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

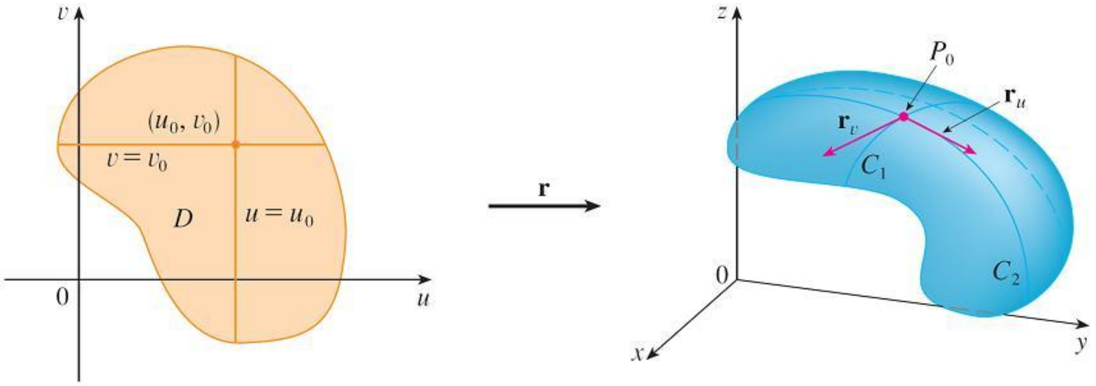


Figura 12

Planos Tangentes

Da mesma forma, se mantivermos v constante tomando $v = v_0$, obteremos a curva da grade C_2 dada por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que está em S, e cujo vetor tangente em P_0 é

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Se $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ não é $\mathbf{0}$, então a superfície S é dita **suave** (sem "bicos"). Para uma superfície suave, o **plano tangente** é o que contém os vetores tangentes $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ e $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é o vetor normal ao plano tangente.

Exemplo 9

Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO: Primeiro, vamos calcular os vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Exemplo 9 – *Solução*

Assim, o vetor normal ao plano tangente é

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Observe que o ponto (1, 1, 3) corresponde aos valores dos parâmetros $u = 1$ e $v = 1$, de forma que o vetor normal ali é

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Exemplo 9 – *Solução*

continuação

Portanto, uma equação do plano tangente em (1, 1, 3) é

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

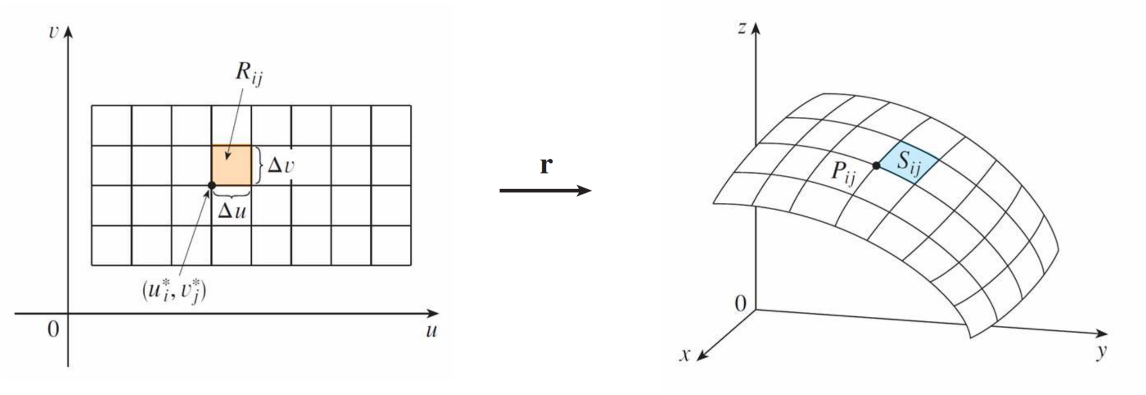
ou

$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$

Área de Superfície

Área de Superfície

Definiremos agora a área de uma superfície parametrizada geral dada pela Equação 1. Para simplificar, vamos considerar inicialmente uma superfície cujo domínio dos parâmetros *D* é um retângulo, que dividiremos em sub-retângulos R_{ij}. Vamos escolher (u_i^*, v_j^*) como o canto inferior esquerdo de R_{ij}. (Veja a Figura 14.)



A imagem do sub-retângulo R_{ij} é a retalho S_{ij}.

Figura 14

Área de Superfície

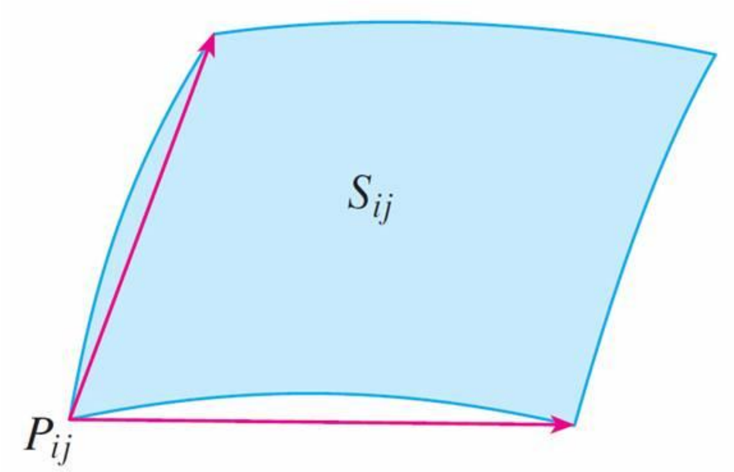
A parte de S_{ij} da superfície S que corresponde a R_{ij} é chamada de *retalho* e tem um ponto P_{ij} com vetor posição $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ como um de seus cantos. Sejam

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

os vetores tangentes em P_{ij} calculados pelas Equações 5 e 4.

Área de Superfície

A Figura 15(a) mostra como os dois lados do retalho que se encontram em P_{ij} podem ser aproximados por vetores. Esses vetores, por sua vez, podem ser aproximados pelos vetores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$ porque as derivadas parciais podem ser aproximadas pelos quocientes de diferenças.

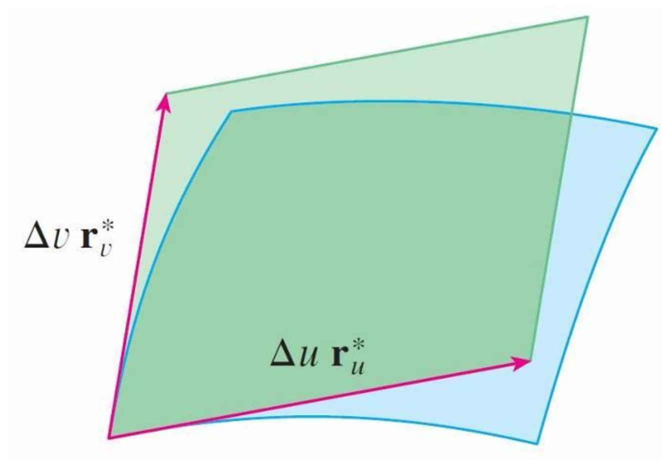


Aproximando um retalho por um paralelogramo.

Figura 15(a)

Área de Superfície

Assim, aproximamos S_{ij} pelo paralelogramo determinado pelos vetores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ e $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$. Esse paralelogramo está representado na Figura 15(b) e está contido no plano tangente a *S* em P_{ij}.



Aproximando um retalho por um paralelogramo.

Figura 15(b)

Área de Superfície

A área desse paralelogramo é

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

e então uma aproximação da área de *S* é

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

A intuição nos diz que essa aproximação fica melhor à medida que aumentamos o número de sub-retângulos e reconhecemos a soma dupla como a soma de Riemann para a integral dupla $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$.

Área de Superfície

Isso justifica a seguinte definição:

6 Definição Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D dos parâmetros, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde $\quad \mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

Exemplo 10

Determine a área da esfera de raio *a*.

SOLUÇÃO: No Exemplo 4 encontramos a representação parametrizada

$$x = a \text{ sen } \phi \cos\theta \qquad y = a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \qquad z = a \cos \phi$$

onde o domínio dos parâmetros é

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Exemplo 10 – *Solução*

continuação

Vamos calcular primeiro o produto cruzado dos vetores tangentes:

$$\mathbf{r}_f \times \mathbf{r}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\,\cos\theta & a\cos\phi\,\operatorname{sen}\theta & -a\operatorname{sen}\phi \\ -a\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta & a\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2\operatorname{sen}^2\phi\,\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\operatorname{sen}^2\phi\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + a^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Logo,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi\,\cos^2\theta + a^4\operatorname{sen}^4\phi\,\operatorname{sen}^2\theta + a^4\operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4\operatorname{sen}^4\phi + a^4\operatorname{sen}^2\phi\,\cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2\operatorname{sen}\phi$$

Exemplo 10 – *Solução*

continuação

uma vez que sen $\phi \geq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$. Portanto, pela Definição 6, a área da esfera é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Para o caso especial de uma superfície S com equação $z = f(x, y)$, onde (x, y) está em D e f tem derivadas parciais contínuas, tomamos x e y como parâmetros. As equações paramétricas são

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

assim

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

e

7

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Área de Superfície do Gráfico de uma Função

Então temos

$$\boxed{8} \qquad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e a fórmula de área da superfície na Definição 6 fica

$$\boxed{9} \qquad \boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA}$$

Exemplo 11

Determine a área da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$.

SOLUÇÃO: O plano intercepta o paraboloide no círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Portanto, a superfície dada fica acima do disco D com centro na origem e raio 3. (Veja a Figura 16.)

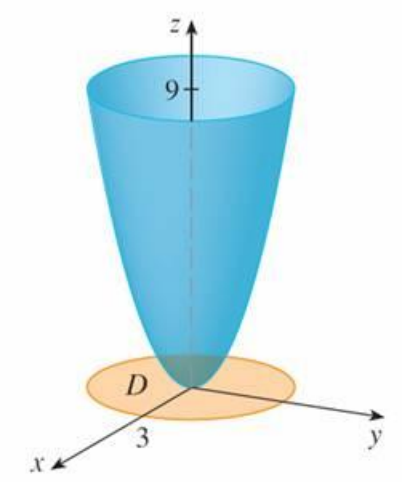


Figura 16

Exemplo 11 – *Solução*

continuação

Usando a Fórmula 9, temos

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Convertendo para coordenadas polares, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$