Sétima Lista de Exercícios
Cálculo II - Engenharia de Produção
(extraída do livro CÁLCULO - vol 2, James Stewart)

Cálculo Vetorial

1) Determine o campo vetorial gradiente de f.

a) $f(x,y) = \ln(x+2y)$

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

c) $f(x,y) = x^2 - y$

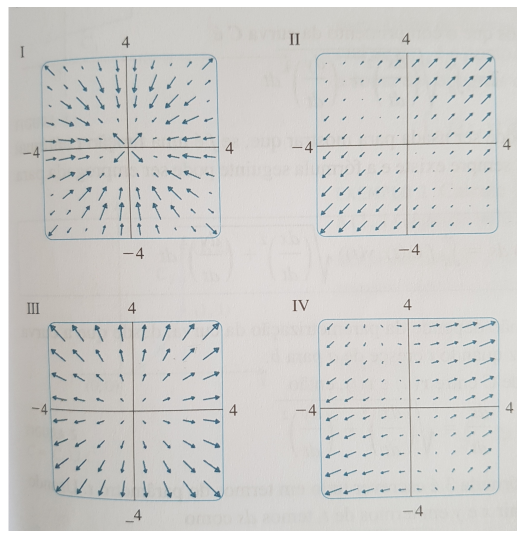
2) Faça uma correspondência entre as funções f e os desenhos de seus campos vetoriais gradientes.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = x(x+y)$

c) $f(x,y) = (x+y)^2$

d) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$



3) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

a) $\int_C y^3\,ds$, $\quad C:\ x = t^3,\ y = t,\ 0 \le t \le 2$

b) $\int_C xy^4\,ds$, $\quad C$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$

c) $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})\,dy$, $\quad C$ é o arco da curva $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$

d) $\int_C xy\,dx + (x-y)\,dy$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$, a $(3,2)$

e) $\int_C xy^3\,ds$, $\quad C:\ x = 4\sin t,\ y = 4\cos t$ e $z = 3t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

f) $\int_C xe^{yz}\,ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$

g) $\int_C x^2y\sqrt{z}\,dz$, $\quad C:\ x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \le t \le 1$

h) $\int_C (x+yz)\,dx + 2x\,dy + xyz\,dz$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de $(1,0,1)$ a $(2,3,1)$ e de $(2,3,1)$ a $(2,5,2)$

4) Calcule a integral de linha $\int_C F \cdot dr$, onde C é dada pela função vetorial $r(t)$.

a) $F(x, y) = xy\ \mathbf{i} + 3y^2\ \mathbf{j}, \quad r(t) = 11t^4\ \mathbf{i} + t^3\ \mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 1$

b) $F(x, y, z) = \sin x\ \mathbf{i} + \cos y\ \mathbf{j} + xz\ \mathbf{k}, \quad r(t) = t^3\ \mathbf{i} - t^2\ \mathbf{j} + t\ \mathbf{k},\ 0 \leq t \leq 1$

5) Calcule a integral de linha $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x, y) = e^{x-1}\ \mathbf{i} + xy\ \mathbf{j}$ e C é dada por $r(t) = t^2\ \mathbf{i} + t^3\ \mathbf{j},\ 0 \leq t \leq 1$

6) Determine se F é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $F = \nabla f$.

a) $F(x, y) = (2x - 3y)\ \mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\ \mathbf{j}$

b) $F(x, y) = e^x \sin y\ \mathbf{i} + e \cos y\ \mathbf{j}$

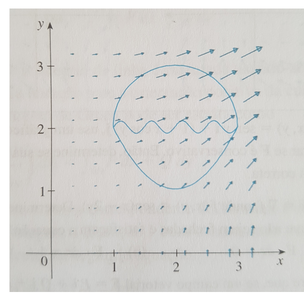
c) $F(x, y) = (ye^x + \sin y)\ \mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\ \mathbf{j}$

d) $F(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\ \mathbf{i} + (3x^2y^2 + \frac{x}{y})\ \mathbf{j}$

7) A figura mostra o campo vetorial $F(x, y) = < 2xy, x^2 >$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

a) Explique por que $\int_C F \cdot dr$ tem o mesmo valor para as três curvas.

b) Qual é esse valor comum?



8) Determine uma função f tal que $F = \nabla f$ e calcule $\int_C F \cdot dr$ sobre a curva C dada.

a) $F(x, y) = xy^2\ \mathbf{i} + xy^2\ \mathbf{j}$

b) $F(x, y, z) = yz\ \mathbf{i} + xz\ \mathbf{j} + (xy + 2z)\ \mathbf{k}$
C é segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

c) $F(x, y, z) = y^2 \cos z\ \mathbf{i} + 2xy \cos z\ \mathbf{j} - xy^2 \sin z\ \mathbf{k}$,
$C : r(t) = t^2\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + t\ \mathbf{k},\ 0 \leq t \leq \pi$

9) Mostre que a integral de linha $\int_C 2x \sin y\ dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\ dy$ é independente do caminho e calcule a integral onde C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(5, 1)$.

10) Calcule a integral de linha por dois métodos: diretamente e utilizando o Teorema de Green.

a) $\oint_C (x - y)\ dx + (x + y)\ dy, \quad C$ é o círculo com centro na origem e raio 2.

b) $\oint_C xy\ dx + x^2y^3\ dy, \quad C$ é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

11) Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

a) $\int_C e^y \, dx + 2xe^y \, dy$, $\quad C$ é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

b) $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) \, dx + (2x + \cos y^2) \, dy$, $\quad C$ é a fronteira da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

c) $\int_C y^3 \, dx - x^3 \, dy$, $\quad C$ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

12) Use o Teorema de Green para calcular $\int_C F \cdot dr$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema).

a) $F(x, y) =< \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} >$,
C consiste no arco da curva $y = \sin x$ de $(0, 0)$ a $(\pi, 0)$ e no segmento de reta $(\pi, 0)$ a $(0, 0)$.

b) $F(x, y) =< e^x + x^2, e^y - xy^2 >$,
C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, orientada no sentido anti-horário.

13) Utilize uma das fórmulas: $A = \oint_C x \, dy = -\oint_C y \, dx = \frac{1}{2} \oint_C x \, dy - y \, dx$ para achar a área sob um arco de cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

14) Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial.

a) $F(x, y, z) = xyz \, \mathbf{i} - x^2 y \, \mathbf{k}$

b) $F(x, y, z) = e^x \sin y \, \mathbf{i} + e^x \cos y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k}$

c) $F(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \, \mathbf{i} + y \, \mathbf{j} + z \, \mathbf{k})$

d) $F(x, y, z) =< \ln x, \ln(x, y), \ln(xyz) >$

15) Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $F = \nabla f$.

a) $F(x, y, z) = y^2 z^3 \, \mathbf{i} + 2xyz^3 \, \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \, \mathbf{k}$

b) $F(x, y, z) = 2xy \, \mathbf{i} + (x^2 + 2yz) \, vj + y^2 \, \mathbf{k}$

c) $F(x, y, z) = ye^{-x} \, \mathbf{i} + e^{-x} \, \mathbf{j} + 2z \, \mathbf{k}$

16) Existe um campo vetorial G em $\mathbb{R}^3$ tal que $rot \; G =< x \sin y, \cos y, z - xy >$?

17) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int \int_S rot \; F \cdot dS$.

a) $F(x, y, z) = x^2 z^2 \, \mathbf{i} + y^2 z^2 \, \mathbf{j} + xyz \, \mathbf{k}$, $\quad S$ é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado para cima.

b) $F(x, y, z) = xyz \, \mathbf{i} + xy \, \mathbf{j} + x^2 yz \, \mathbf{k}$, $\quad S$ é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora.

18) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot dr$. Em cada caso, C é orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

a) $F(x,y,z) = (x+y^2)\ \mathbf{i} + (y+z^2)\ \mathbf{j} + (z+x^2)\ \mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

b) $F(x,y,z) = yz\ \mathbf{i} + 2xz\ \mathbf{j} + e^{xy}\ \mathbf{k}$, C é a circunferência $x^2+y^2=16$, $z=5$.

RESPOSTAS:

1)

a) $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{x+2y}\ \mathbf{i} + \dfrac{2}{x+2y}\ \mathbf{j}$

b) $\nabla f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \mathbf{k}$

c) $\nabla f(x,y) = 2x\ \mathbf{i} - \mathbf{j}$

2)

(a) - III
(b) - IV
(c) - II
(d) - I

3)

a) $\frac{1}{54}(145^{3/2}-1)$ b) $1638,4$ c) $\frac{243}{8}$ d) $\frac{17}{3}$
e) 320 f) $\frac{1}{12}\sqrt{14}(e^6-1)$ g) $\frac{1}{5}$ h) $\frac{97}{3}$

4)

a) 45 b) $\frac{6}{5} - \cos 1 - \sin 1$

5) $\frac{11}{8} - \frac{1}{e}$

6)

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$
b) $f(x,y) = e^x \sin y + K$
c) $f(x,y) = ye^x + x\sin y + K$
d) $f(x,y) = x\ln y + x^2y^3 + K$

7) 16

8)

a) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ $\int_C F \cdot dr = 2$
b) $f(x,y,z) = xyz + z^2$ $\int_C F \cdot dr = 77$
c) $f(x,y,z) = xy^2\cos z$ $\int_C R \cdot dr = 0$

9) $25\sin 1 - 1$

10)

a) 8π b) $\frac{2}{3}$

11)
a) $e-1$ b) $\frac{1}{3}$ c) -24π

12)
a) $\frac{4}{3}-2\pi$ b) $\frac{625}{2}\pi$

13) 3π

14)
a) $rot\ F = -x^2\ \mathbf{i} + 3xy\ \mathbf{j} - xz\ \mathbf{k}$ $div\ F = yz$
b) $rot\ F = 0$ $div\ F = 1$
c) $rot\ F = 0$ $div\ F = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
d) $rot\ F = < \frac{1}{y}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x} >$ $divF = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

15)
a) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$
b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + K$
c) Não conservativo

16) Não

17) a) 0 b) 0

18) a) 1 b) 80π