16 Cálculo Vetorial

16.7 Integrais de Superfície

Integrais de Superfície

A relação entre integral de superfície e área de superfície é semelhante àquela entre a integral de linha e o comprimento de arco. Suponha que *f* é uma função de três variáveis cujo domínio inclui uma superfície *S*. Definiremos a integral da superfície de *f* sobre *S* de tal forma que, no caso em que $f(x, y, z) = 1$, o valor da integral de superfície seja igual à área da superfície de *S*. Começamos com superfícies parametrizadas e trataremos em seguida o caso especial onde *S* é o gráfico de uma função de duas variáveis.

Superfícies Parametrizadas

Superfícies Parametrizadas

Suponha que a superfície S tenha equação vetorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Vamos admitir inicialmente que o domínio dos parâmetros D seja um retângulo e vamos dividi-lo em sub-retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv. Então, a superfície S é dividida em retalhos correspondentes S_{ij}, como na Figura 1.

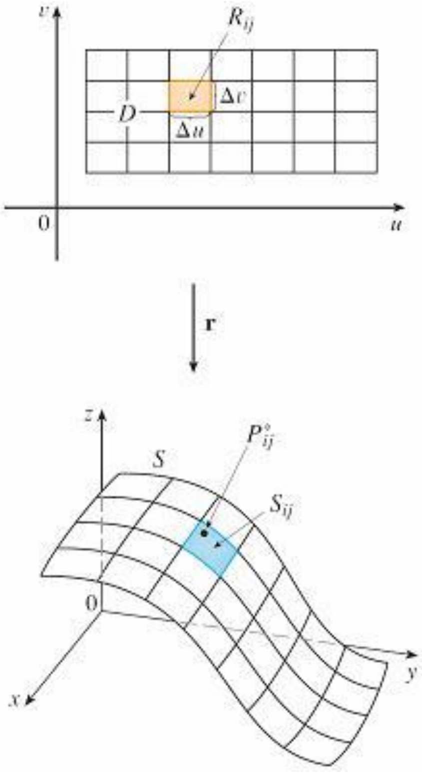


Figura 1

Superfícies Parametrizadas

Calculamos *f* em um ponto P_{ij}^* em cada retalho, multiplicamos pela área ΔS_{ij} do retalho e formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}$$

A seguir, tomamos o limite quando o número de retalhos aumenta e definimos a **integral de superfície de *f* na superfície *S*** como

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij}}$$

Observe a analogia com a definição de integral de linha e também a analogia com a definição de integral dupla.

Superfícies Parametrizadas

Para calcular a integral de superfície na Equação 1, aproximamos a área do retalho ΔS_{ij} pela área de um paralelogramo aproximador no plano tangente. Em nossa discussão sobre a área de superfície, fizemos a aproximação

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \Delta u \, \Delta v$$

onde $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ $\qquad$ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

são os vetores tangentes em um canto de S_{ij}.

Superfícies Parametrizadas

Se as componentes são contínuas e $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são nulos e não paralelos no interior de *D*, pode ser mostrado, da Definição 1, mesmo quando *D* não é retangular, que

$$\boxed{2} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Compare com a fórmula para a integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Superfícies Parametrizadas

Observe também que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

A Fórmula 2 permite calcular uma integral da superfície, convertendo-a em uma integral dupla sobre o domínio do parâmetro D. Ao usar essa fórmula, lembre-se de que $f(\mathbf{r}(u, v))$ é avaliado ao escrever $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, e $z = z(u, v)$ na fórmula $f(x, y, z)$.

Exemplo 1

Calcule a integral da superfície $\iint_S x^2 \, dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO: Utilizamos a representação parametrizada

$$x = \text{sen}\,\phi \cos\theta \qquad y = \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leq \phi \leq \pi \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

isto é, $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$

Podemos obter que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen}\,\phi$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Portanto, pela Fórmula 2,

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_D (\operatorname{sen}\phi\ \cos\theta)^2\,|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\,dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi\ \cos^2\theta\ \operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi\ \cos^2\phi)\,d\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi}\ \Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

Superfícies Parametrizadas

Por exemplo, se uma folha fina (digamos, uma folha de alumínio) tiver a forma de uma superfície *S* e se a densidade (massa por unidade de área) no ponto (x, y, z) for $\rho(x, y, z)$, então o total da **massa** da folha será

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

e o **centro de massa** será $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho(x, y, z)\, dS$$

Gráficos

Gráficos

Qualquer superfície S com equação $z = g(x, y)$ pode ser considerada uma superfície parametrizada com equações parametrizadas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

e, então, temos

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

de modo que

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Gráficos

Logo, neste caso, a Fórmula 2 se torna

$$\boxed{4} \qquad \iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Existem fórmulas análogas para quando for mais conveniente projetar*S* no plano *yz* ou no plano *xz*. Por exemplo, se *S* for a superfície com equação *y* = *h*(*x*, *z*) e *D* for sua projeção no plano *xz*, então

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

Exemplo 2

Calcule $\iint_S y \, dS$, onde S é a superfície $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. (Veja a Figura 2.)

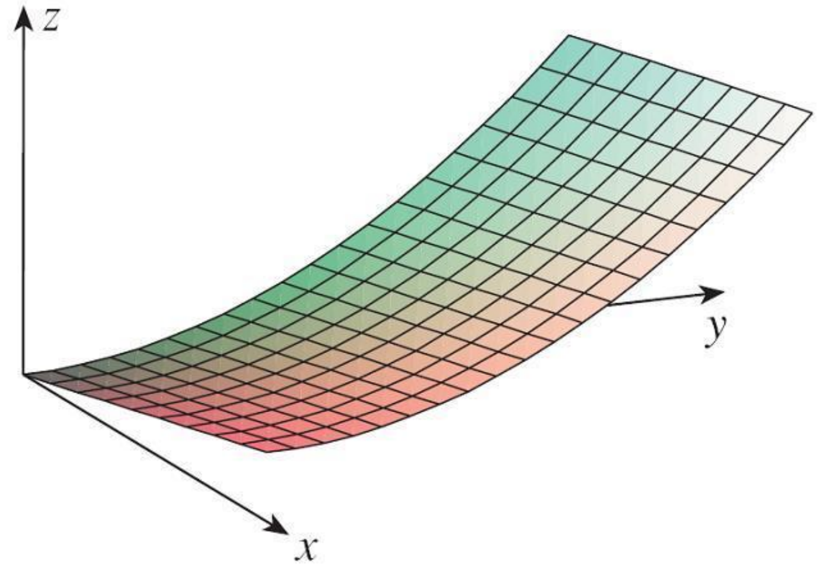


Figura 2

Exemplo 2 – *Solução*

Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

a Fórmula 4 dá

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 dx\, \sqrt{2} \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

Gráficos

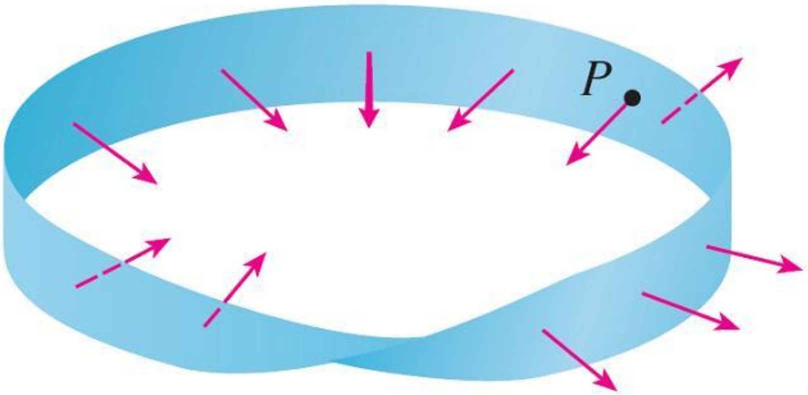
Se S é uma superfície suave por partes, ou seja, uma união finita de superfícies suaves $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que se interceptam somente ao longo de suas fronteiras, então a integral da superfície de f sobre S é definida por

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

Superfícies Orientadas

Superfícies Orientadas

Para definir integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos descartar superfícies não orientáveis tais como a faixa de Möbius mostrada na Figura 4. [Nomeado aasim por causa do geômetra alemão August Möbius (1790-1868).]

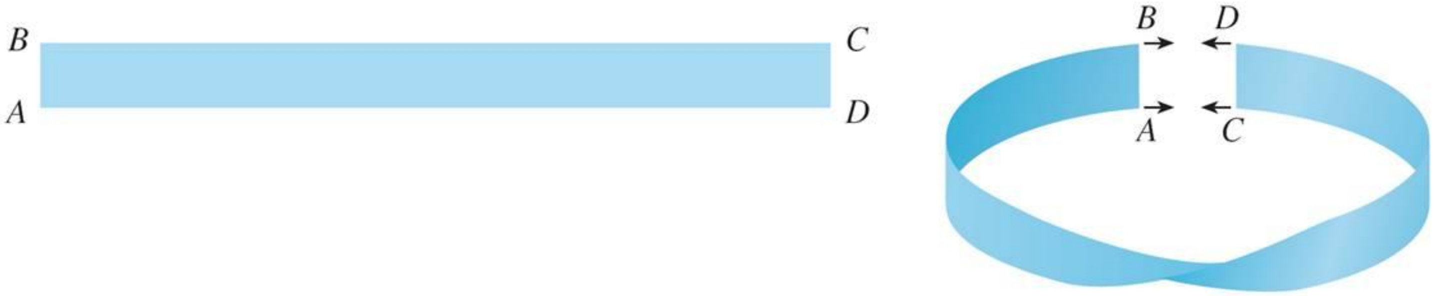


Uma faixa de Möbius

Figura 4

Superfícies Orientadas

Você pode construir uma tomando uma faixa retangular longa de papel, dando-he uma meia-torção e juntando as arestas curtas, como na Figura 5.



Construção de uma faixa de Möbius

Figura 5

Superfícies Orientadas

Se uma formiga andasse sobre uma faixa de Möbius começando no ponto *P*, ela acabaria do “outro lado” da faixa (ou seja, com sua parte de cima apontando para o sentido oposto). Então, se a formiga continuasse a andar na mesma direção, ela acabaria de volta no mesmo ponto *P* sem ter nunca cruzado uma aresta (se você construiu uma faixa de Möbius, tente desenhar uma linha a lápis pelo meio). Portanto, uma fita de Möbius realmente tem apenas um lado. Daqui para a frente consideraremos somente as superfícies orientáveis (com dois lados). Começaremos com uma superfície *S* que tenha um plano tangente em todos os pontos (x, y, z) em *S* (exceto nos pontos da fronteira).

Superfícies Orientadas

Existem dois vetores normais unitários $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ em (x, y, z) (veja a Figura 6).

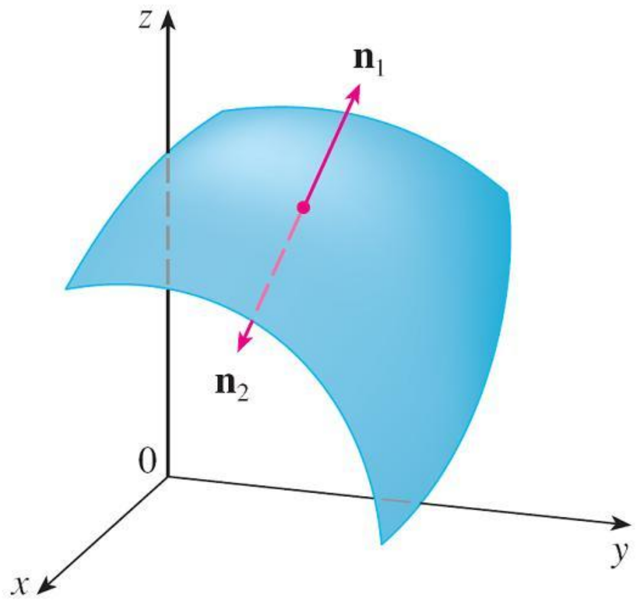
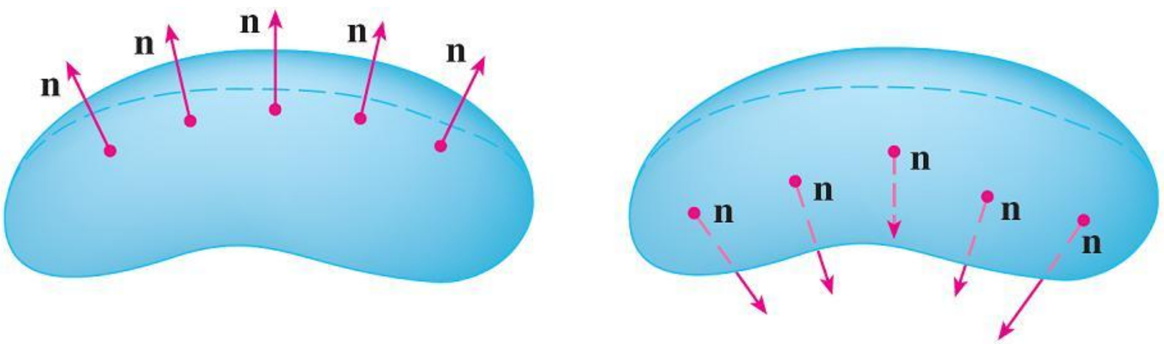


Figura 6

Superfícies Orientadas

Se for possível escolher um vetor normal unitário **n** em cada ponto (*x*, *y*, *z*) de modo que **n** varie continuamente sobre *S*, então *S* é chamada **superfície orientada** e a escolha dada de **n** fornece *S* uma **orientação**. Existem duas possíveis orientações para qualquer superfície orientada (veja a Figura 7).



As duas orientações de uma superfície orientável

Figura 7

Superfícies Orientadas

Para uma superfície $z = g(x, y)$ dada como o gráfico de g, usamos a Equação 3 e vemos que a orientação induzida é dada pelo vetor normal unitário

$$\boxed{5} \qquad \mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Com a componente na direção de **k** é positiva, isso fornece a orientação *ascendente* da superfície.

Superfícies Orientadas

Se S for uma superfície orientada suave dada na forma parametrizada pela equação vetorial $\mathbf{r}(u, v)$, então ela está automaticamente associada à orientação do vetor normal unitário

$$\boxed{6} \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

e a orientação oposta é dada por $-\mathbf{n}$. Por exemplo, a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \text{ sen } \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Superfícies Orientadas

Encontramos que

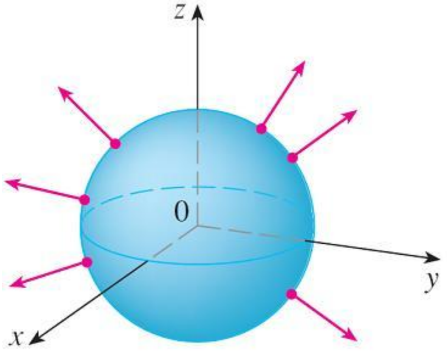
$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

$$\text{e } |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

Assim, a orientação induzida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ é definida pelo vetor normal unitário

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \sin \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \, \mathbf{j} + \cos \phi \, \mathbf{k} = \frac{1}{a} \mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que $\mathbf{n}$ aponta na mesma direção que o vetor posição, ou seja, para fora da esfera (veja a Figure 8).

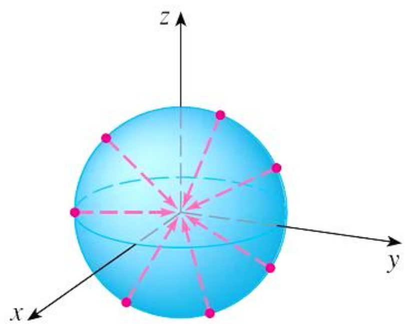


Orientação positiva

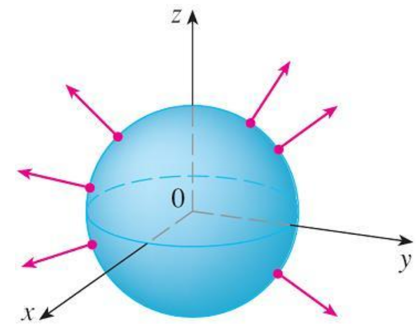
Figura 8

Superfícies Orientadas

A orientação oposta (para dentro) poderia ser obtida (veja a Figura 9) se tivéssemos trocado a ordem dos parâmetros, porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.



Orientação negativa
Figura 9



Orientação positiva
Figura 8

Para uma **superfície fechada**, isto é, uma superfície que seja a fronteira de uma região sólida *E*, a convenção é que a **orientação positiva** é aquela para a qual os vetores normais *apontam para fora* de *E*, e os vetores normais que apontam para dentro correspondem à orientação negativa (veja as Figuras 8 e 9).

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Suponha que S é uma superfície orientada com vetor unitário normal $\mathbf{n}$, e imagine um fluido com densidade $\rho(x, y, z)$ e campo de velocidade $\mathbf{v}(x, y, z)$ que flui através de S. (Pense em S como uma superfície imaginária que não impede o fluxo de fluido, tal como uma rede de pesca por um fluxo). Em seguida, a taxa de fluxo (massa por unidade de tempo) por unidade de área é $\rho\mathbf{v}$.

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Se dividimos S em pequenos retalhos S_{ij}, como na Figura 10 (compare com a Figura 1).

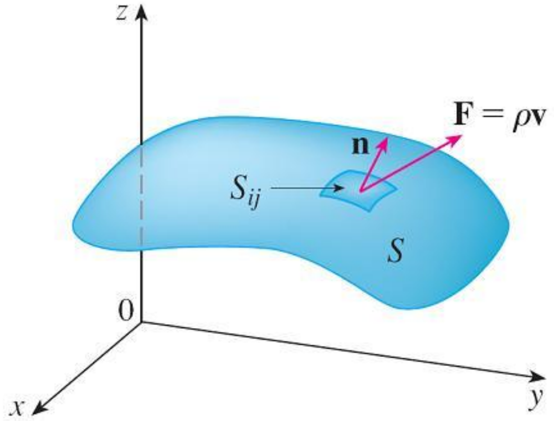


Figura 10

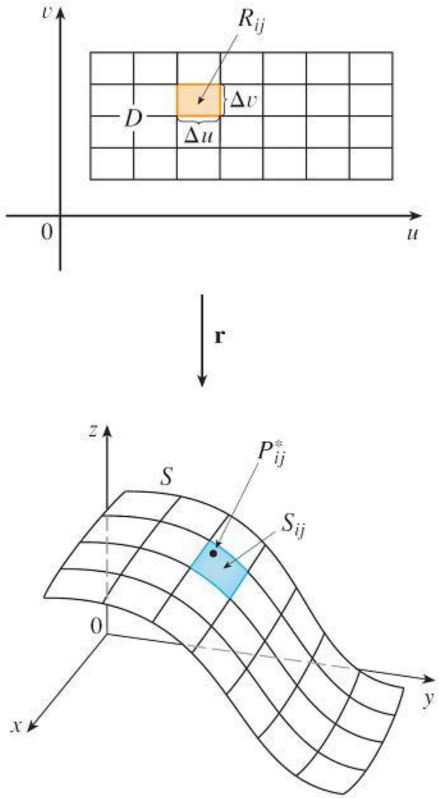


Figura 1

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Então S_{ij} é aproximadamente plana, de modo que podemos aproximar a massa de fluido que passa por S_{ij} na direção da normal **n** por unidade de tempo pela quantidade

$$(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A(S_{ij})$$

onde ρ, **v** e **n** são avaliados em algum ponto em S_{ij}. (Recorde-se de que o componente do vetor de $\rho\mathbf{v}$ na direção da unidade de vetor **n** é $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$).

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Somando essas quantidades e tomando o limite, obtemos, de acordo com a Definição 1, a integral da superfície da função $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre *S*:

$$\boxed{7} \qquad \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

e ela é interpretada fisicamente como a vazão através de *S*.

Se escrevermos $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, então **F** também é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e a integral da Equação 7 fica

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Uma integral da superfície dessa forma aparece frequentemente em física, mesmo quando **F** não é ρ**v**, e é denominada *integral de superfície* (ou *integral de fluxo*) de **F** em *S*.

$\boxed{8}$ **Definição** Se **F** for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário **n**, então a **superfície integral de F sobre** S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de **F** através de S.

Em palavras, a Definição 8 diz que a integral de superfície de um campo vetorial sobre *S* é igual à integral de superfície de sua componente normal sobre *S*.

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Se *S* é uma função vetorial dada por **r**(*u*, *v*), então **n** é dado pela Equação 6 da Definição 8 e, da Equação 2, temos

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde *D* é o domínio dos parâmetros. Então temos

9
$$\boxed{\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA}$$

Exemplo 4

Determine o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO: Como no Exemplo 1, utilizamos a representação parametrizada

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \le \phi \le \pi \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Então $$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\theta\,\mathbf{k}$$

e,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \text{sen}^2\,\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}^2\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Portanto,

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi \operatorname{sen}^2\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta$

e, pela Fórmula 9, o fluxo é

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi \cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi \operatorname{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi \cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= 0 + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{uma vez que } \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Se, por exemplo, o campo vetorial do Exemplo 4 é um campo de velocidade descrevendo o escoamento de um fluido de densidade 1, então a resposta $4\pi/3$ representa a vazão através da esfera unitária em unidade de massa por unidade de tempo.

No caso de uma superfície S dada por um gráfico $z = g(x, y)$, podemos considerar x e y como parâmetros e usar a Equação 3 para escrever

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Logo, a Fórmula 9 se torna

$$\boxed{10} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA$$

Esta fórmula pressupõe uma orientação ascendente *S*; para uma orientação descendente, multiplique por –1. Fórmulas semelhantes podem ser trabalhadas se *S* é dada por $y = h(x, z)$ ou $x = k(y, z)$.

Embora tenhamos exemplificado a integral de superfície de um campo de vetores com seu uso em mecânica dos fluidos, esse conceito também aparece em outras situações físicas.

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Por exemplo, se **E** é um campo elétrico, então a integral da superfície

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

chama-se a **fluxo elétrico** de **E** através da superfície *S*. Uma importante lei de eletrostática é a **Lei de Gauss**, que diz que a carga total englobada por uma superfície *S* é

$$\boxed{11} \qquad Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

onde ε_0 é uma constante (denominada permissividade no vácuo) que depende das unidades usadas (no sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$).

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

Portanto, se o campo vetorial **F** no Exemplo 4 representa um campo elétrico, podemos concluir que a carga envolvida por S é $Q = \frac{4}{3} \pi \varepsilon_0$.

Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K \nabla u$$

onde K é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância.

Integrais da Superfície de Campos Vetoriais

A taxa de transmissão de calor através da superfície *S* no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$