16

Cálculo Vetorial

16.4 Teorema de Green

Teorema de Green

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral da linha ao redor de uma curva fechada simples *C* e uma integral dupla sobre a região do plano *D* delimitada por *C*. (Veja a Figura 1. Assumimos que *D* é constituído por todos os pontos dentro de *C*, bem como todos os pontos de *C*.)

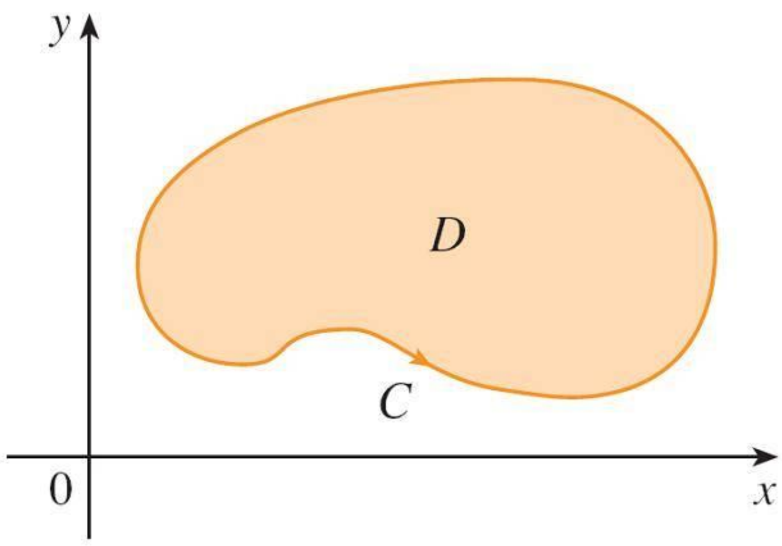


Figura 1

Teorema de Green

Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a **orientação positiva** de uma curva fechada simples *C* refere-se a ao *sentido anti-horário* de *C*, percorrido uma só vez. Assim, se *C* é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, então a região *D* está sempre do lado esquerdo quando $\mathbf{r}(t)$ percorre *C*. (Veja a Figura 2.)

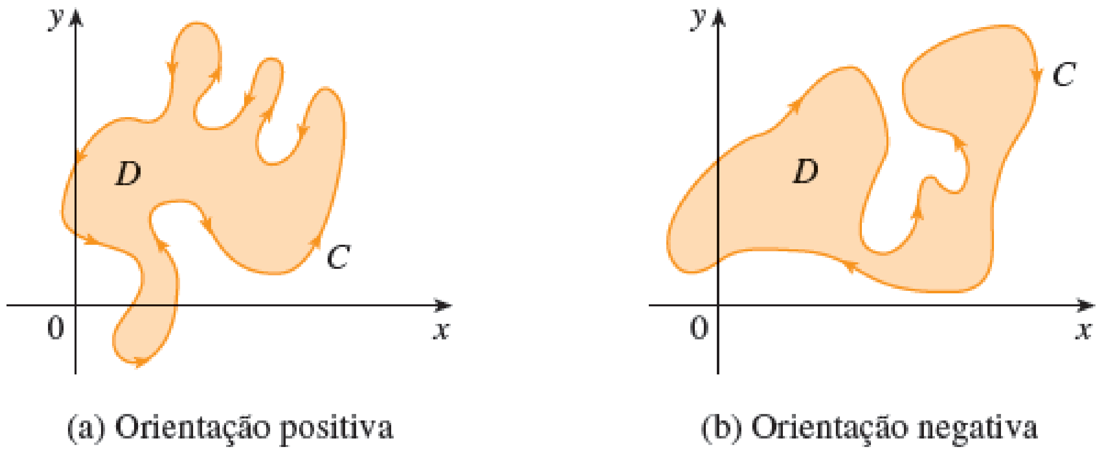


Figura 2

Teorema de Green

Teorema de Green Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C. Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplo 1

Calcule $\int_C x^4\, dx + xy\, dy$, onde C é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1), e de (0, 1) a (0, 0).

SOLUÇÃO: Apesar desta integral poder ser calculada pelos métodos usuais, isto envolveria o cálculo de três integrais separadas sobre os três lados do triângulo. Em vez disso, vamos usar o Teorema de Green. Observe que a região D englobada por C é simples e que C tem orientação positiva (veja a Figura 4).

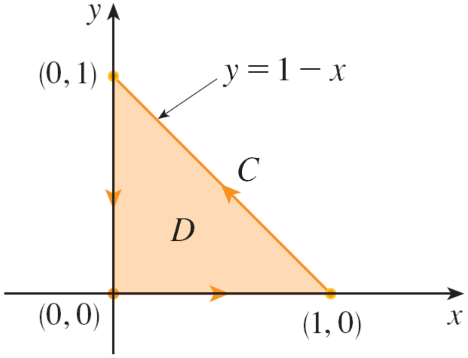


Figura 4

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Se tomarmos $P(x, y) = x^4$ e $Q(x, y) = xy$, então temos

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

Teorema de Green

No Exemplo 1, consideramos que a integral dupla era mais fácil de calcular que a integral de linha. Mas às vezes é mais simples calcular a integral de linha, e, nesses casos, usaremos o Teorema de Green na ordem inversa. Por exemplo, se sabemos que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre uma curva C, então o Teorema de Green fornece

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

não importando quais valores das funções P e Q em D.

Teorema de Green

Outra aplicação da direção inversa do Teorema de Green está no cálculo de áreas. Como a área de uma região *D* é $\iint_D 1\, dA$, desejamos escolher *P* e *Q* tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Existem várias possibilidades:

$P(x, y) = 0$ $\quad$ $P(x, y) = -y$ $\quad$ $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$

$Q(x, y) = x$ $\quad$ $Q(x, y) = 0$ $\quad$ $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$

Teorema de Green

Assim, o Teorema de Green dá as seguintes fórmulas para a área de *D*:

5 $$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

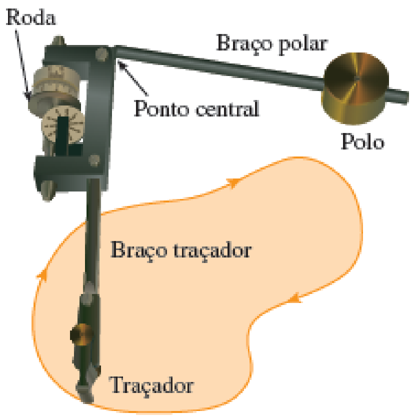
A fórmula 5 pode ser usada para explicar como planímetros trabalham. Um **planímetro** é um instrumento mecânico usado para medir a área de uma região, traçando a curva limite.

Teorema de Green

Esses dispositivos são úteis em todas as ciências: em biologia para medir a área de folhas ou asas, na medicina para medir o tamanho de secção transversal de órgãos ou tumores, em silvicultura, para estimar o tamanho de regiões florestais de fotografias.

Teorema de Green

A Figura 5 mostra o funcionamento de um planímetro polar: o polo é fixo e, como o traçador é movido ao longo da curva limite da região, a roda desliza parcialmente e parcialmente rola perpendicular ao braço do traçador. O planímetro mede a distância a que a gira e é proporcional à área da região fechada.



Um planímetro polar Keuffel e Esser

Figura 5

Versões Estendidas do Teorema de Green

Versões Estendidas do Teorema de Green

Apesar de termos demonstrado o Teorema de Green somente para o caso particular onde D é simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que D é a união finita de regiões simples. Por exemplo, se D é uma região na Figura 6, então podemos escrever $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 são ambas simples.

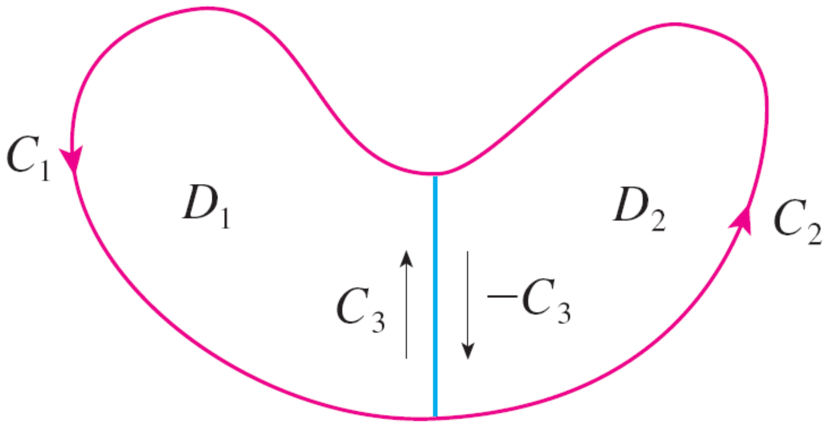


Figura 6

Versões Estendidas do Teorema de Green

A fronteira de D_1 é $C_1 \cup C_3$ e a fronteira de D_2 é $C_2 \cup (-C_3)$; portanto, aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 separadamente, obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Versões Estendidas do Teorema de Green

Se somarmos essas duas equações, as integrais de linha sobre C_3 e $-C_3$ se cancelam e obtemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que é o Teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$ uma vez que sua fronteira é $C = C_1 \cup C_2$.

O mesmo tipo de argumentação nos permite estabelecer o Teorema de Green para qualquer união finita de regiões simples que não sobrepostas (veja a Figura 7).

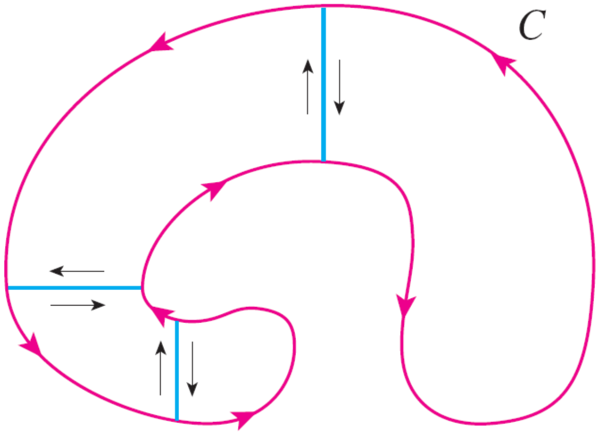


Figura 7

Exemplo 4

Calcule $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, onde *C* é o limite da região semianular *D* contida no semiplano superior entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUÇÃO: Observe que, apesar de *D* não ser simples, o eixo *y* divide em duas regiões simples (veja a Figura 8). Em coordenadas polares, podemos escrever

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

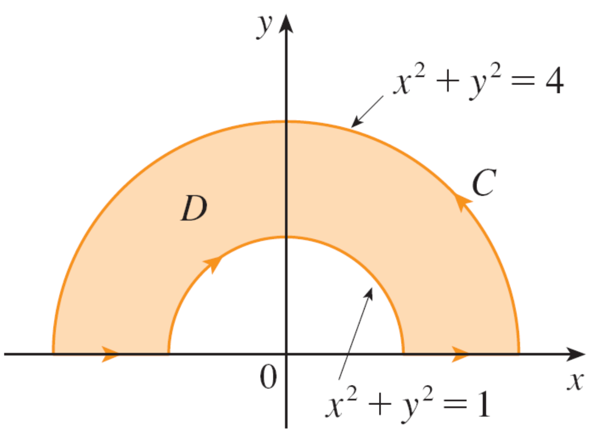


Figura 8

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Portanto, o Teorema de Green fornece

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\Big[\tfrac{1}{3}r^3\Big]_1^2 = \frac{14}{3}$$

Versões Estendidas do Teorema de Green

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas.

Observe que a fronteira *C* da região *D* na Figura 9 é constituída por duas curvas fechadas simples C_1 e C_2. Nós assumimos que estas curvas de contorno são orientadas de modo que a região *D* está sempre do lado esquerdo enquanto a curva *C* é percorrida. Assim, o sentido anti-horário é positivo para a curva exterior C_1 , mas no sentido horário para o interior da curva C_2.

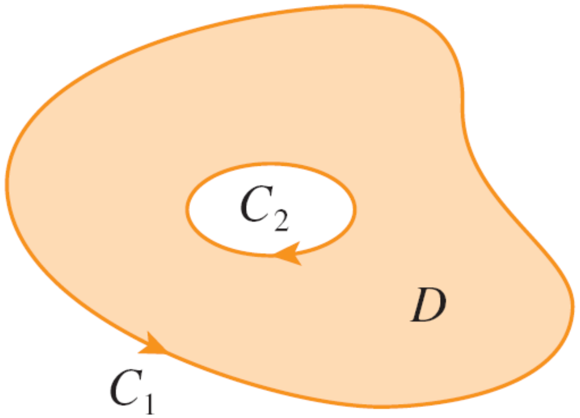


Figura 9

Versões Estendidas do Teorema de Green

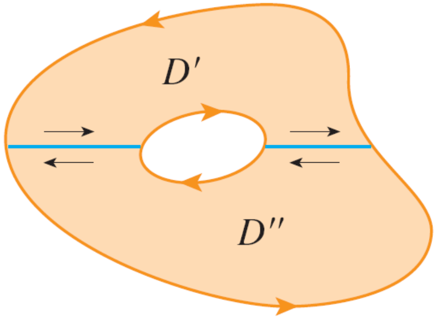


Figura 10

Se dividirmos D em duas regiões D' e D'', pela introdução das retas mostradas na Figura 10, e então aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das regiões D' e D'', obteremos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Versões Estendidas do Teorema de Green

Como as integrais de linha sobre a fronteira comum são em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

que é o Teorema de Green para a região *D*.