15

Integrais Múltiplas

15.2 Integrais Iteradas

Integrais Iteradas

Suponha que *f* seja uma função de duas variáveis que é integrável no retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Usaremos a notação $\int_c^d f(x, y)\, dy$ significando que *x* é mantido e $f(x, y)$ é integrada em relação a *y* de $y = c$ até $y = d$. Esse procedimento é chamado *integração parcial em relação a y*. (Observe a semelhança com a derivada parcial). Como $\int_c^d f(x, y)\, dy$ é um número que depende do valor de *x*, ele define uma função de *x*:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Integrais Iteradas

Se agora integrarmos a função *A* com relação à variável *x* de *x* = *a* a *x* = *b*, obteremos

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

A integral do lado direito da Equação 1 é chamada **integral iterada**. Em geral, os colchetes são omitidos. Assim

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

significa que primeiro integramos com relação a *y* de *c* a *d* e depois em relação a *x* de *a* a *b*.

Integrais Iteradas

Da mesma forma, a integral iterada

$$\boxed{3} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primeiro integramos com relação a x (fixando y) de $x = a$ a $x = b$ e em seguida integramos a função de y resultante com relação a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que em ambas as Equações, 2 e 3, trabalhamos *de dentro para fora*.

Exemplo 1

Calcule o valor das integrais iteradas

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy$

SOLUÇÃO:

(a) Olhando *x* como constante, obtemos

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Portanto, a função *A* da discussão precedente é dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ neste exemplo. Integramos agora essa função de *x* de 0 até 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{x^3}{2} \Big]_0^3 = \frac{27}{2}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) Aqui integraremos primeiro em relação a *x*:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y \, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$

Integrais Iteradas

Observe que no Exemplo 1 obtemos a mesma resposta se integramos primeiro em relação a y ou a x. Em geral acontece (veja o Teorema 4) de as duas integrais iteradas das Equações 2 e 3 serem sempre iguais, ou seja, a ordem da integração não é importante. (Isso é semelhante ao Teorema de Clairaut sobre as igualdades das derivadas parciais mistas.)

Integrais Iteradas

O seguinte teorema fornece um método prático para calcular uma integral dupla, expressando-a como uma integral iterada (em qualquer ordem).

4 **Teorema de Fubini** Se f for contínua no retângulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, então

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

De modo mais geral, esse resultado vale se supusermos que f seja limitada em R, f tenha descontinuidades apenas em um número finito de curvas lisas e que a integral iterada exista.

Integrais Iteradas

No caso especial em que $f(x, y)$ pode ser fatorado como o produto de uma função só de x por uma função só de y, a integral dupla de f pode ser escrita de forma particularmente simples. Para sermos específicos, suponha que $f(x, y) = g(x)h(y)$ e $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, o Teorema de Fubini nos dá

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx \right] dy$$

Integrais Iteradas

Na integral interna, *y* é uma constante, então *h*(*y*) é uma constante e podemos escrever

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)\,h(y)\,dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \right] dy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$$

já que $\int_a^b g(x)\,dx$ é uma constante. Portanto, nesse caso, a integral dupla de *f* pode ser escrita como o produto de duas integrais unidimensionais:

$$\boxed{5} \qquad \iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$