15 Integrais Múltiplas

15.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Em geometria plana, o sistema de coordenadas polares é usado para dar uma descrição conveniente de certas curvas e regiões. A Figura 1 nos permite relembrar a ligação entre coordenadas polares e cartesianas.

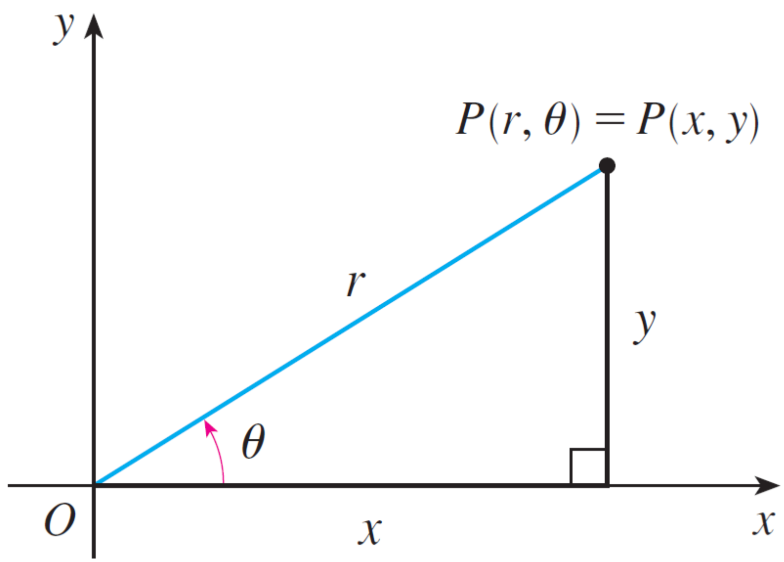


Figura 1

Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Se o ponto P tiver coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, da figura,

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

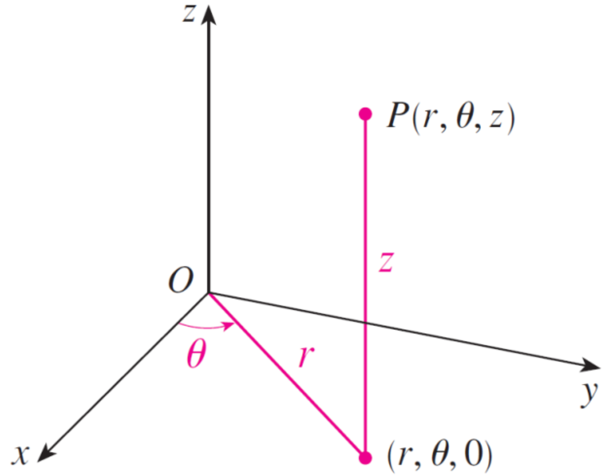
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Em três dimensões, há um sistema de coordenadas, chamado *coordenadas cilíndricas*, que é análogo às coordenadas polares e dá descrições convenientes de algumas superfícies e sólidos que ocorrem usualmente. Como veremos, algumas integrais triplas são muito mais fáceis de calcular em coordenadas cilíndricas.

Coordenadas Cilíndricas

Coordenadas Cilíndricas

No **sistema de coordenadas cilíndricas**, um ponto *P* no espaço tridimensional é representado pela triplo ordenada (r, θ, z) onde r e θ são as coordenadas polares da projeção de *P* no plano *xy* e *z* é a distância orientada do plano *xy* a *P*. (Veja a Figura 2.)



As coordenadas cilíndricas de um ponto *P*

Figura 2

Coordenadas Cilíndricas

Para convertermos de coordenadas cilíndricas para retangulares, usamos as equações

1
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z$$

enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos

2
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Exemplo 1

(a) Marque o ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ e encontre suas coordenadas retangulares.

(b) Encontre as coordenadas cilíndricas do ponto com coordenadas retangulares $(3, -3, -7)$.

SOLUÇÃO:

(a) O ponto com coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está marcado na Figura 3.

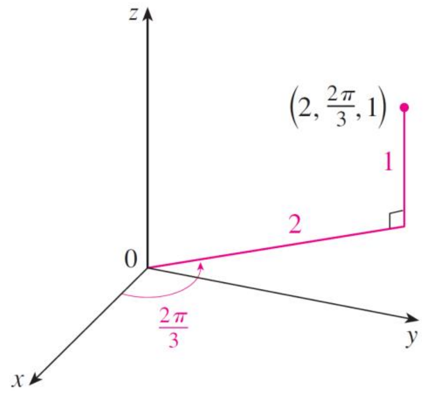


Figura 3

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Das Equações 1, suas coordenadas retangulares são

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Logo, o ponto é (–1, $\sqrt{3}$, 1) em coordenadas retangulares.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

(b) Das Equações 2 temos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{-3}{3} = -1 \qquad \text{logo} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Portanto, um conjunto de coordenadas cilíndricas é ($3\sqrt{2}$, $7\pi/4$, –7). Outro é ($3\sqrt{2}$, $-\pi/4$, –7). Como no caso das coordenadas polares, existem infinitas escolhas.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Suponha que *E* seja uma região do tipo 1, cuja projeção *D* no plano *xy* tenha uma representação conveniente em coordenadas polares (veja a Figura 6).

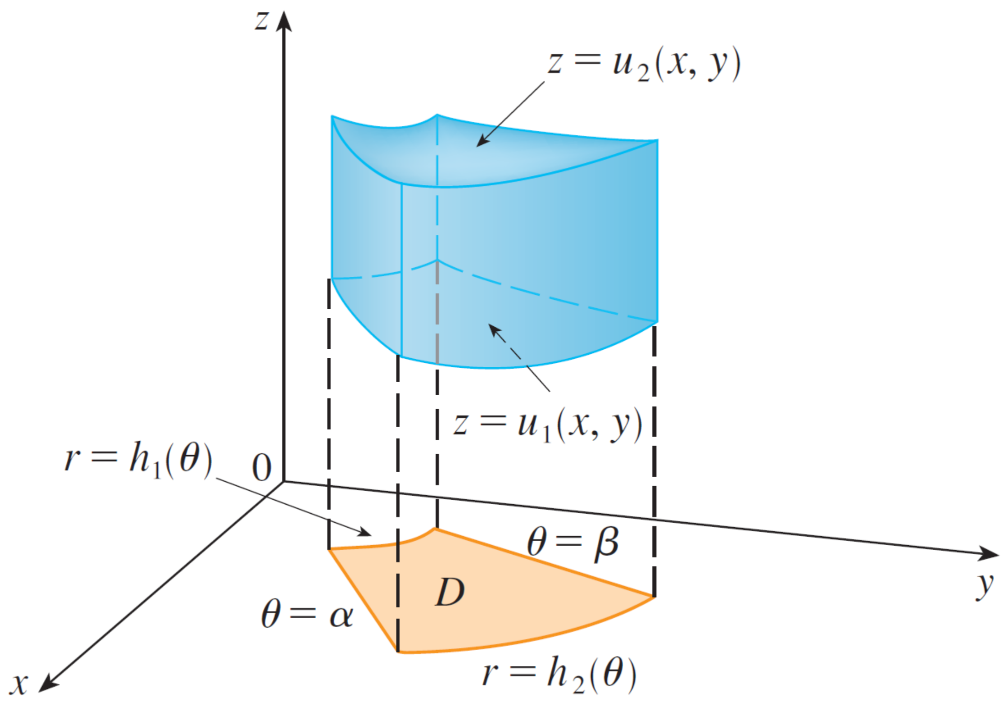


Figura 6

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Em particular, suponha que *f* seja contínua e

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Sabemos da equação que

$$\boxed{3} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

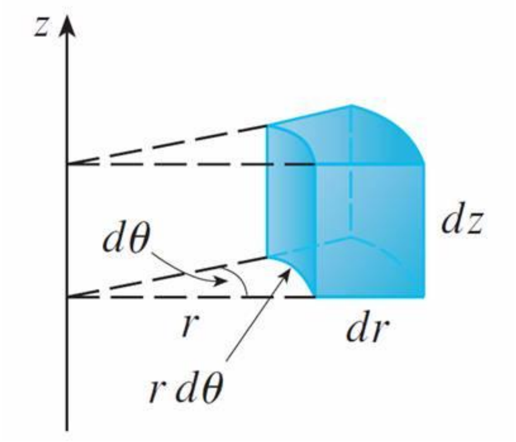
Mas também sabemos como calcular integrais duplas em coordenadas polares. De fato, obtemos

$$\boxed{4} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

A Fórmula 4 é a **fórmula para a integração tripla em coordenadas cilíndricas**. Ela nos diz que convertemos uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas escrevendo $x = r \cos \theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, deixando z como está, utilizando os limites apropriados de integração para z, r e θ, e trocando dV por $r\, dz\, dr\, d\theta$.

Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

(A Figura 7 mostra como lembrar disto).



Elemento de volume em coordenadas cilíndricas: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

Figura 7

É recomendável a utilização dessa fórmula quando E for uma região sólida cuja descrição é mais simples em coordenadas cilíndricas e, especialmente, quando a função $f(x, y, z)$ envolver a expressão $x^2 + y^2$.

Exemplo 3

Um sólido E está contido no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, abaixo do plano $z = 4$, e acima do paraboloide $z = 1 – x^2 – y^2$. (Veja a Figura 8.) A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

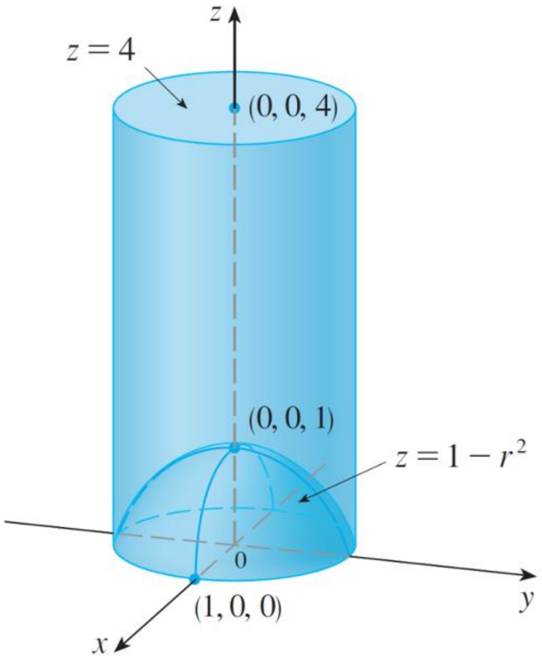


Figura 8

Exemplo 3 – *Solução*

Em coordenadas cilíndricas, o cilindro é $r = 1$ e o paraboloide é $z = 1 - r^2$ e podemos escrever

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1,\ 1 - r^2 \leq z \leq 4\}$$

Com a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância do eixo z, a função densidade é

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

onde K é a constante de proporcionalidade.

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Portanto, a massa de *E* é

$$m = \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta$$

$$= K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr$$

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$