Primeira Lista de Exercícios
Cálculo II - Engenharia de Produção
(extraída dos livros CÁLCULO - vol 2, James Stewart
CÁLCULO - vol II, Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis)

Funções Vetoriais

1) Determine o domínio de $r(t)$ e o valor de $r(t_0)$:

a) $r(t) =< t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} >$, $t_0 = 1$

b) $r(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j} + \sqrt{t-2}\mathbf{k}$, $t_0 = 3$

2) Esboce o gráfico da curva cuja equação é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

a) $r(t) =< \sin t, t >$

b) $r(t) =< t, \cos 2t, \sin 2t >$

c) $r(t) =< \sin t, 3, \cos t >$

d) $r(t) = 2\cos t\mathbf{i} - 3\sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

3) Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

a) $P(0,0,0)$, $Q(1,2,3)$

b) $P(1,-1,2)$, $Q(4,1,7)$

4) Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$ e use esse fato para esboçar a curva.

5) Em quais pontos a curva $r(t) = t\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ intercepta o parabolóide $z = x^2 + y^2$?

6) Utilize um recurso gráfico para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

a) $r(t) =< \cos t \sin 2t, \sin t \sin 2t, \cos 2t >$

b) $r(t) =< t, t\sin t, t\cos t >$

7) Utilize um recurso gráfico para traçar a curva de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = (1 + \cos 16t)\cos t \\ y = (1 + \cos 16t)\sin t \\ z = 1 + \cos 16t \end{cases}$$

Explique a aparência da curva mostrando que ela está em um cone.

8) Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1,4,0)$ e $(9,-8,28)$, mas não passa pelo ponto $(4,7,-6)$.

9) Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com o plano $z = 1 + y$.

10) Obtenha as coordenadas do ponto em que a reta $r(t) = (2+t)\mathbf{i} + (1-2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ intersecta o plano xz.

11) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada, determine $r'(t)$ e esboce o vetor posição $r(t)$ e o vetor tangente $r'(t)$ para o valor dado de t.

a) $r(t) = < t - 2, t^2 + 1 >$, $t = -1$

b) $r(t) = \sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j}$, $t = \pi/4$

c) $r(t) = e^t\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j}$, $t = 0$

12) Determine a derivada da função vetorial.

a) $r(t) = < t\sin t, t^2, t\cos 2t >$

b) $r(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\mathbf{k}$

c) $r(t) = e^{t^2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\mathbf{k}$

13) Determine o vetor tangente unitário $T(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

a) $r(t) = < 6t^5, 4t^3, 2t >$, $t = 1$

b) $r(t) = \cos t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2\sin 2t\mathbf{k}$, $t = 0$

14) Se $r(t) = < t, t^2, t^3 >$, encontre $r'(t)$, $T(1)$, $r''(t)$ e $r'(t) \times r''(t)$.

15) Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

a) $x = t^5$, $y = t^4$, $z = t^3$, $(1, 1, 1)$

b) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, $(1, 0, 1)$

16) Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

a) $x = t$, $y = e^{-t}$, $z = 2t - t^2$; $(0, 1, 0)$

b) $x = t\cos t$, $y = t$, $z = t\sin t$; $(-\pi, \pi, 0)$

17) Determine o comprimento da curva dada.

a) $r(t) = < 2\sin t, 5t, 2\cos t >$, $-10 \leq t \leq 10$

b) $r(t) = \sqrt{2}\ t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

c) $r(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

18) Seja C a curva de itersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

19) Reparametrize a curva $r(t) = 2t\mathbf{i} + (1 - 3t)\mathbf{j} + (5 + 4t)\mathbf{k}$ com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

20) Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3\sin t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

21) Obtenha a parametrização por comprimento de arco da reta $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4 + 2t$ que tenha a mesma orientação que a reta dada e o ponto de referência $(1, 3, 4)$. Use as equações paramétricas obtidas para determinar o ponto sobre a reta que esteja a 25 unidades do ponto de referência na direção do parâmetro crescente.

22) Determine os vetores tangente e normal unitários $T(t)$ e $N(t)$ e utilize a fórmula $k(t) = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$ para encontrar a curvatura.

a) $r(t) = < 2\sin t, 5t, 2\cos t >$

b) $r(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, t^2, 2t \right\rangle$

23) Utilize a fórmula $k(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$ para encontrar a curvatura.

a) $t^2\mathbf{i} + t\mathbf{k}$

b) $r(t) = 3t\mathbf{i} + 4\sin t\mathbf{j} + 4\cos t\mathbf{k}$

24) Encontre a curvatura de $r(t) = < t, t^2, t^3 >$ no ponto $(1, 1, 1)$.

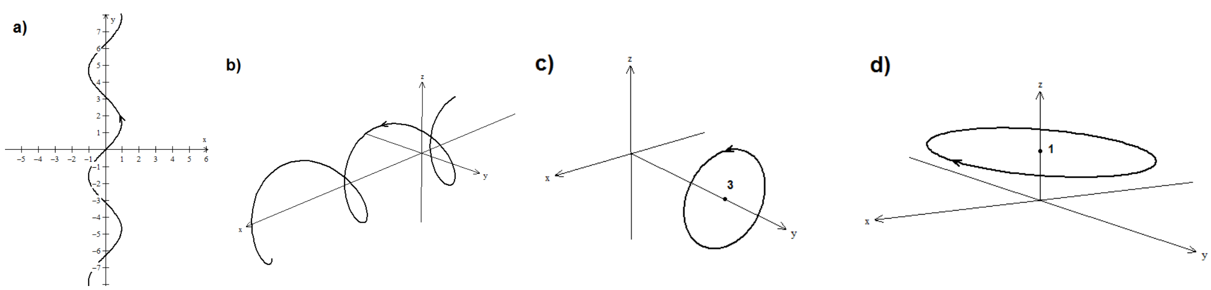
25) Utilize um recurso gráfico para traçar na mesma tela a curva $y = x^{-2}$ e sua função curvatura $k(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

26) Encontre os vetores T, N e B relativos à curva $r(t) = < t^2, \frac{2}{3}t^3, t >$ no ponto $(1, \frac{2}{3}, 1)$.

Respostas dos exercícios

1) (a) $[1, 5]$; $r(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ (b) $[2, +\infty)$; $r(3) = -\mathbf{i} - \ln 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

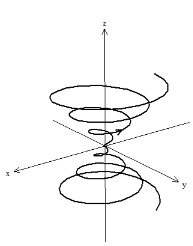
2)



3) (a) $r(t) = < t, 2t, 3t >$, $0 \leq t \leq 1$; $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1.$

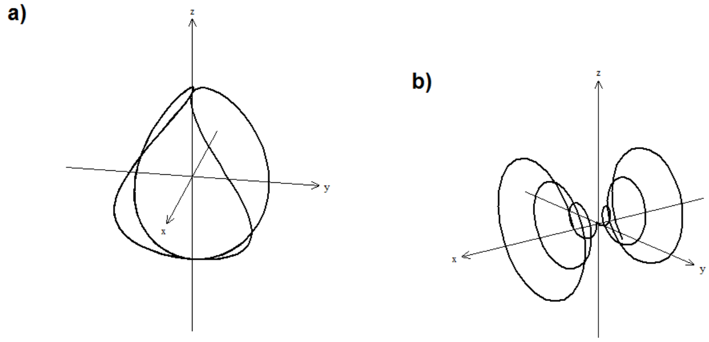
(b) $r(t) = < 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2 >$, $0 \leq t \leq 1$; $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 5t + 2 \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1.$

4)

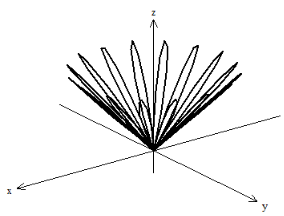


5) $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$

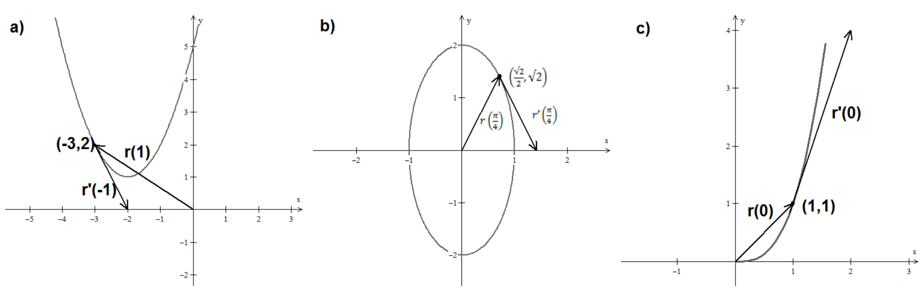
6)



7)



9) $r(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2-1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2+1)\mathbf{k}$
10) $(\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{2})$
11)



12) (a) $r'(t) =< t\cos t + \sin t, 2t, \cos 2t - 2t\sin 2t >$
(b) $r'(t) = 4e^{4t}\mathbf{k}$ (c) $r'(t) = 2te^{t^2}\mathbf{i} + \frac{3}{1+3t}\mathbf{k}$
13) (a) $< \frac{15}{\sqrt{262}}, \frac{6}{\sqrt{262}}, \frac{1}{\sqrt{262}} >$ (b) $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$
14) $< 1, 2t, 3t^2 >, < \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} >, < 0, 2, 6t >, < 6t^2, -6t, 2 >$
15) (a) $\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 1+4t \\ z = 1+3t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$
16) (a) $\begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = -\pi - t \\ y = \pi + t \\ z - \pi t \end{cases}$
17) (a) $20\sqrt{29}$ (b) $e - e^{-1}$ (c) $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$
18) 42

19) $r(t(s)) = \frac{2}{\sqrt{29}}s\mathbf{i} + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \frac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

20) $(3\sin 1, 4, 3\cos 1)$

21) $\begin{cases} x = 1 + \frac{s}{3} \\ y = 3 - \frac{2s}{3} \\ z = 4 + \frac{2s}{3} \end{cases}$, $\quad (\frac{28}{3}, -\frac{41}{3}, \frac{62}{3})$

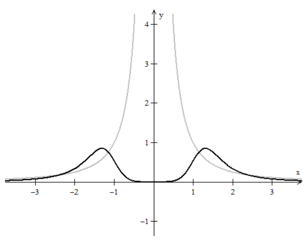
22) (a) $T(t) = \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}\cos t, \frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\sin t \right\rangle$, $N(t) = \langle -\sin t, 0, -\cos t\rangle$, $k(t) = \frac{2}{29}$

(b) $T(t) = \frac{<t^2,2t,2>}{t^2+2}$, $N(t) = \frac{<2t,2-t^2,-2t>}{t^2+2}$, $k(t) = \frac{2}{(t^2+2)^2}$

23) (a) $\frac{2}{(4t^2+1)^{3/2}}$ $\quad$ (b) $\frac{4}{25}$

24) $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

25)



26) $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$