16

Cálculo Vetorial

16.9 O Teorema do Divergente

O Teorema do Divergente

Reescrevemos o Teorema de Green na versão vetorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

onde *C* é a fronteira positivamente orientada da região do plano *D*. Se quisermos estender esse teorema para campos de vetores em $\mathbb{R}^3$, podemos fazer uma suposição de que

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

onde *S* é a superfície limite da região sólida *E*.

O Teorema do Divergente

A Equação 1 é verdadeira sob hipóteses apropriadas e é chamada Teorema do Divergente. Observe sua semelhança com os Teoremas de Green e de Stokes, pois ele relaciona a integral da derivada de uma função (div **F**, nesse caso) sobre uma região com a integral da função original **F** sobre a fronteira da região.

Enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Divergente para regiões *E* que são, simultaneamente, dos tipos 1, 2 e 3 e que chamamos de **regiões regiões sólidas simples**. (Por exemplo, as regiões delimitadas por elipsoides ou caixas retangulares são simples regiões sólidas.)

O Teorema do Divergente

A fronteira de *E* é uma superfície fechada e usaremos a convenção, de que a orientação positiva é para for a, ou seja, o vetor normal unitário **n** apontará para fora de *E*.

O Teorema do Divergente Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora). Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

Portanto, o Teorema do Divergente afirma que, sob as condições dadas, o fluxo de **F** pela fronteira de *E* é igual à integral tripla da divergência de **F** em *E*.

Exemplo 1

Determine o fluxo do campo vetorial **F**(x, y, z) = z **i** + y **j** + x **k** sobre a unidade esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUÇÃO: Primeiro calcularemos a divergente de **F**:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

A esfera unitária S é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Então, o Teorema do Divergente dá o fluxo como

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iiint_B 1 \, dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

O Teorema do Divergente

Vamos considerar a região E que está entre as superfícies fechadas S_1 e S_2, onde S_1 está dentro de S_2. Sejam $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ as normais apontando para for a de S_1 e S_2. Então, a fronteira de E é $S = S_1 \cup S_2$ e a sua normal $\mathbf{n}$ é dada por $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ em S_1 e $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ em S_2 (veja a Figura 3.)

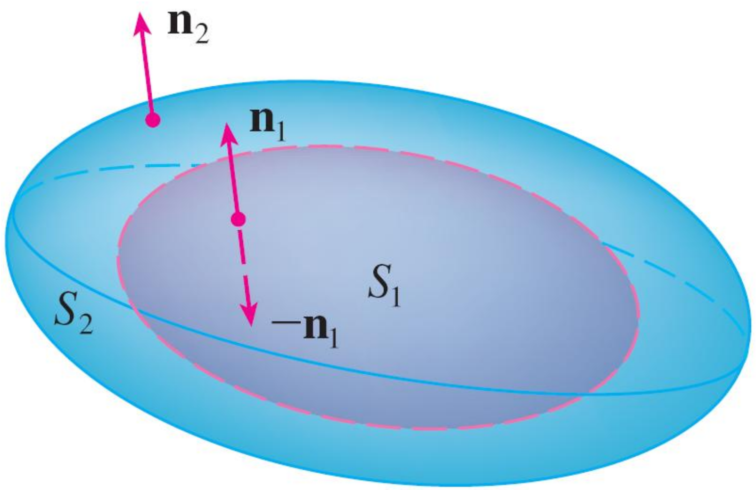

Figura 3

O Teorema do Divergente

Aplicando o Teorema do Divergente a *S*, obtemos

$$\boxed{7} \qquad \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS$$

$$= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Exemplo 3

Consideramos o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

onde a carga elétrica *Q* está localizada na origem e $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ é um vetor posição. Use a Teorema do Divergente para mostrar que o fluxo elétrico de **E** através de qualquer superfície fechada S_2 que inclui a origem é

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon Q$$

Exemplo 3 – *Solução*

A dificuldade é que não termos uma equação explícita para S_2 porque S_2 é *qualquer* superfície fechada envolvendo a origem. O exemplo mais simples de tal superfície seria uma esfera. Seja então S_1 uma pequena esfera de raio *a* e centrada à origem. Você pode verificar que div **E** = 0. Portanto, a Equação 7 dá

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{E} \operatorname{div} \mathbf{E} \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em **x** é **x**/|**x**|. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

uma vez que a equação de S_1 é |**x**| = *a*. Assim temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} \iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2} A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi \varepsilon Q$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Isso mostra que o fluxo elétrico de **E** é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss para uma única carga. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um líquido com densidade constante ρ. Então $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ é a taxa de vazão do fluido por unidade de área.

O Teorema do Divergente

Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com com centro em P_0 e raio muito pequeno a, então div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos em B_a uma vez que div $\mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \to 0$ e sugere que

$$\boxed{8} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

O Teorema do Divergente

A Equação 8 diz que div **F**(P_0) é a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume em P_0. (Esta é a razão para o nome *divergente.*) Se div **F**(P) > 0, o fluxo líquido é exteriormente perto de P e P é chamado uma **fonte**. Se div **F**(P) > 0, o escoamento total perto de P é para dentro e P e denominado **sorvedouro**.

O Teorema do Divergente

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1.

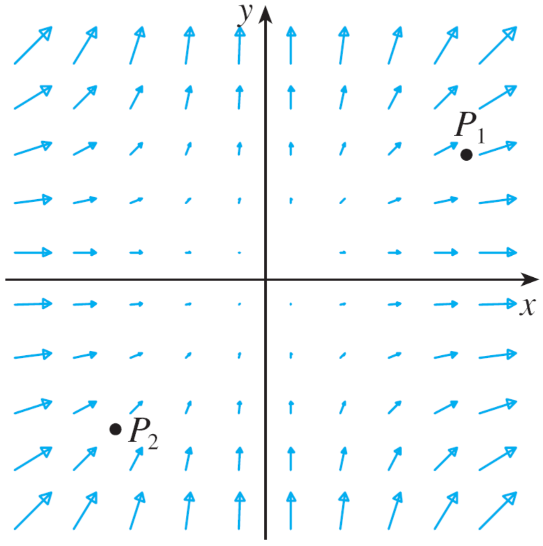

Figura 4

Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

O Teorema do Divergente

Então, o fluxo total é para for a perto de P_1, assim div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Uma vez que $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim, os pontos acima da linha $y = -x$ são fontes e os que estão abaixo são sorvedouros.