# 16 Cálculo Vetorial

# 16.2 Integrais de Linha

# Integrais de Linha

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, ao invés de integrarmos sobre um intervalo $[a, b]$, integraremos sobre uma curva $C$. Tais integrais são chamadas *integrais de linha,* embora "integrais de curva" seria melhor terminologia. Elas foram inventadas no começo do século XIX para resolver problemas que envolviam escoamento de fluidos, forças, eletricidade e magnetismo.

Começamos com uma curva plana $C$ dada pelas equações paramétricas

$$\boxed{1} \qquad x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leq t \leq b$$

# Integrais de Linha

ou, o que é equivalente, pela equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, e supomos que $C$ seja uma curva suave. [Isso significa que $\mathbf{r}'$ é contínua e $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.] Se dividirmos o intervalo do parâmetro $[a, b]$ em $n$ subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual tamanho e se fizermos $x_i = x(t_i)$ e $y_i = y(t_i)$, então os pontos correspondentes $P_i(x_i, y_i)$ dividem $C$ em $n$ subarcos de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. (veja a Figura 1).

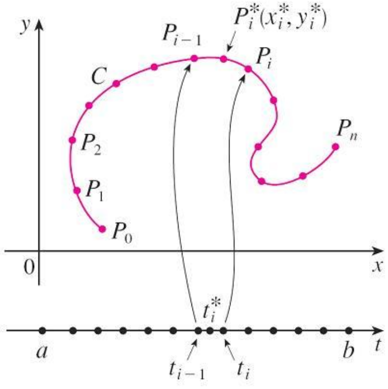



**Figura 1**

# Integrais de Linha

Escolhemos um ponto qualquer $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$, no *i*-ésimo subarco. (Isso corresponde a um ponto $t_i^*$ em $[t_{i-1}, t_i]$.) Agora, se $f$ for uma função de duas variáveis cujo domínio inclui a curva $C$, calculamos $f$ no ponto $(x_i^*, y_i^*)$, multiplicamos pelo comprimento $\Delta s_i$ do subarco e somamos

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

que é semelhante à soma de Riemann.

# Integrais de Linha

Em seguida, tomamos o limite dessa soma e fazemos a seguinte definição, por analogia com a integral unidimensional:

$\boxed{2}$ **Definição** Se $f$ é definida sobre uma curva lisa $C$ dada pelas Equações 1, então a **integral de linha de $f$ sobre $C$** é

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$$

se esse limite existir.

Verificamos que o comprimento da curva $C$ é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

# Integrais de Linha

Argumentação semelhante pode ser usada para mostrar que, se *f* é uma função contínua, então o limite na Definição 2 sempre existe e a fórmula seguinte pode ser empregada para calcular a integral de linha:

$$\boxed{3} \qquad \int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

O valor da integral de linha não depende da parametrização da curva, desde que a curva seja percorrida uma única vez quando *t* cresce de *a* para *b*.

# Integrais de Linha

Se $s(t)$ é o comprimento de $C$ entre $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(t)$, então

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Um modo de memorizar a Fórmula 3 é escrever tudo em termos do parâmetro *t*: Use a parametrização para exprimir *x* e *y* em termos de *t* e escreva *ds* como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

# Integrais de Linha

No caso especial em que $C$ é um segmento de reta unindo $(a, 0)$ e $(b, 0)$, usando $x$ como parâmetro, escrevemos as equações paramétricas de $C$ da seguinte forma: $x = x$, $y = 0$, $a \le x \le b$. A Fórmula 3 fica

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$$

e, nesse caso, a integral de linha se reduz a uma integral unidimensional.

Assim como para as integrais unidimensionais, podemos interpretar a integral de linha de uma função *positiva* como uma área.

# Integrais de Linha

De fato, se $f(x, y) \geq 0$, $\int_C f(x, y)\, ds$ representa a área da "cerca" ou "cortina" da Figura 2, cuja base é $C$ e cuja altura acima do ponto $(x, y)$ é $f(x, y)$.

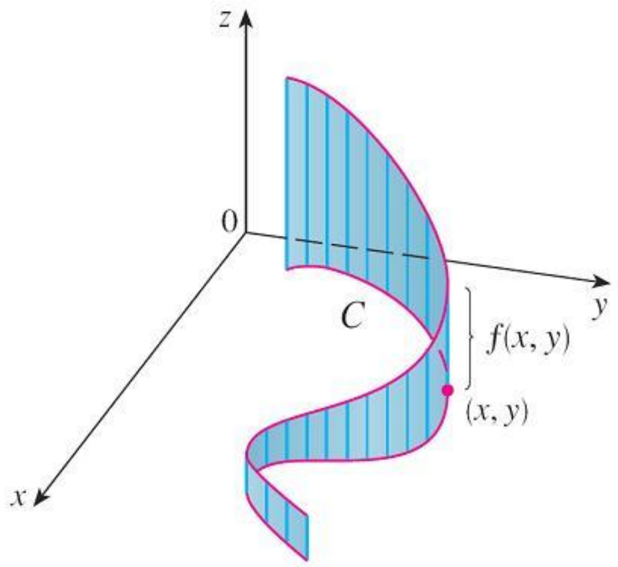



**Figura 2**

# Exemplo 1

Calcule $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, onde $C$ é a metade superior do círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO: Para utilizar a Fórmula 3, primeiro precisamos de equações paramétricas para representar $C$. Recorde-se de que o círculo unitário pode ser parametrizado por meio das equações

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

e a metade superior do círculo é descrita pelo intervalo do parâmetro $0 \leq t \leq \pi$ (veja a Figura 3).

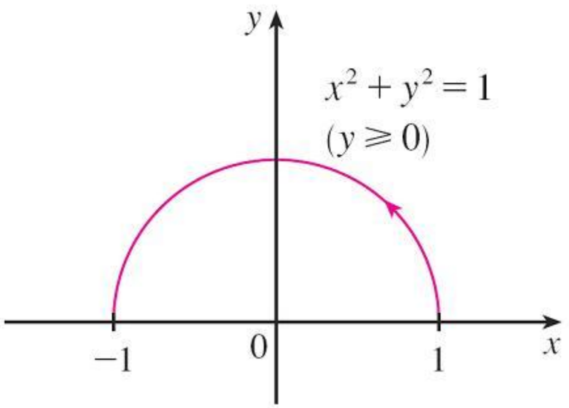



**Figura 3**

# Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Portanto, a Fórmula 3 dá

$$\int_C (2 + x^2y)\,ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

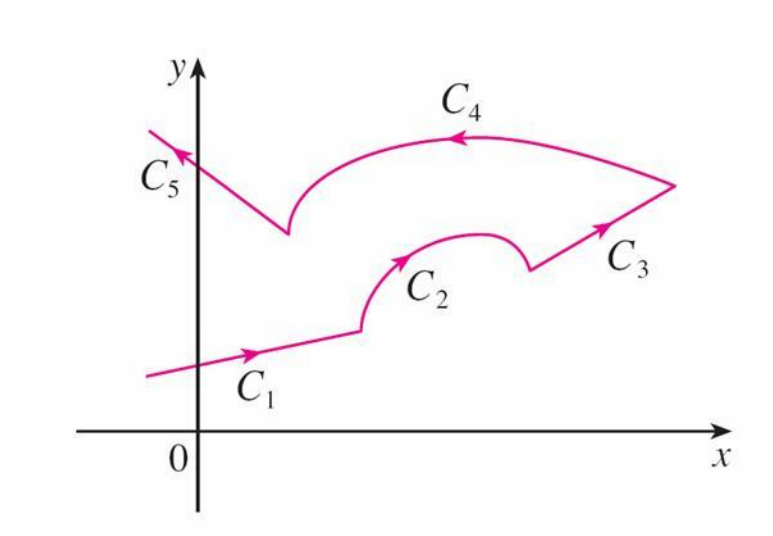
$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\,dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi$$

$$= 2\pi + \tfrac{2}{3}$$

# Integrais de Linha

Suponha agora que $C$ seja uma **curva suave por partes**; ou seja, $C$ é uma união de um número finito de curvas suaves $C_1$, $C_2$, …., $C_n$, onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de $C_{i+1}$ é o ponto final de $C_i$.




Curva suave por partes

**Figura 4**

# Integrais de Linha

Nesse caso, definimos a integral de *f* ao longo de *C* como a soma das integrais de *f* ao longo de cada parte suave de *C*:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

# Integrais de Linha

Qualquer interpretação física de uma integral de reta $\int_C f(x, y)\, ds$ depende da interpretação física da função *f*.

Suponhamos que $\rho(x, y)$ represente a densidade linear de um ponto de $(x, y)$ de um fio fino com a forma de uma curva *C*. Então, a massa da parte do fio a partir de $P_{i-1}$ até $P_i$ na Figura 1 é de cerca de $\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$ e assim a massa total do fio é de cerca de $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$.

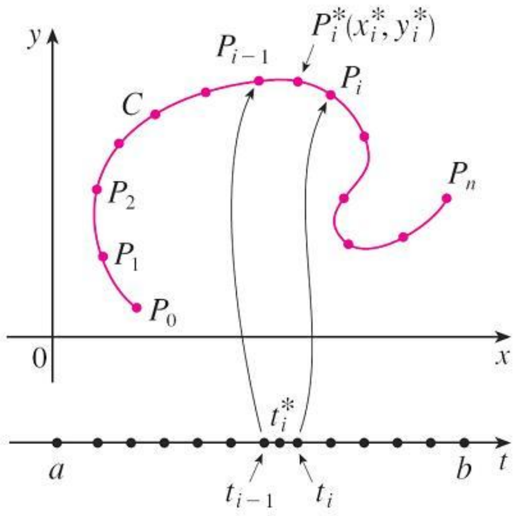



**Figura 1**

# Integrais de Linha

Tomando cada vez mais pontos sobre a curva, obtemos o valor da **massa** *m* do fio como o valor limite dessas aproximações:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

[Por exemplo, se $f(x, y) = 2 + x^2y$ representa a densidade de um fio semicircular, então a integral no Exemplo 1 representa a massa do fio.] O **centro de massa** do fio com função densidade $\rho$ encontra-se no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

**4** $$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\, \rho(x, y)\, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\, \rho(x, y)\, ds$$

# Integrais de Linha

Duas outras integrais de linha são obtidas trocando-se $\Delta s_i$ por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ou $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ na Definição 2. Elas são chamadas, respectivamente, **integrais de linha de *f* ao longo de *C* com relação a *x* e *y*:**

**5**
$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

**6**
$$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

# Integrais de Linha

Quando queremos distinguir a integral de linha original $\int_C f(x, y)\, ds$ das Equações 5 e 6, esta é chamada de **integral de linha com relação ao comprimento do arco**.

As fórmulas seguintes dizem que as integrais de linha com relação a $x$ e $y$ podem ser calculadas escrevendo-se tudo em termos de $t$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$.

**7**

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t)\, dt$$

# Integrais de Linha

Frequentemente acontece de as integrais de linha com relação a $x$ e $y$ ocorrerem em conjunto. Quando isso acontece, é costume abreviar escrevendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Quando estamos nos preparando para resolver uma integral de linha, às vezes o mais difícil é pensar na representação paramétrica da curva cuja descrição geométrica foi dada.

# Integrais de Linha

Em particular, frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, portanto, é útil lembrar que a representação vetorial do segmento de reta que inicia em $\mathbf{r}_0$ e termina em $\mathbf{r}_1$ é dada por

**8**

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1}$$

# Integrais de Linha

Em geral, dada a parametrização $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, esta determina-se uma **orientação** da curva $C$, com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro $t$ (veja a Figura 8, onde o ponto inicial $A$ corresponde ao valor do parâmetro $a$ e o ponto terminal $B$ corresponde a $t = b$.)

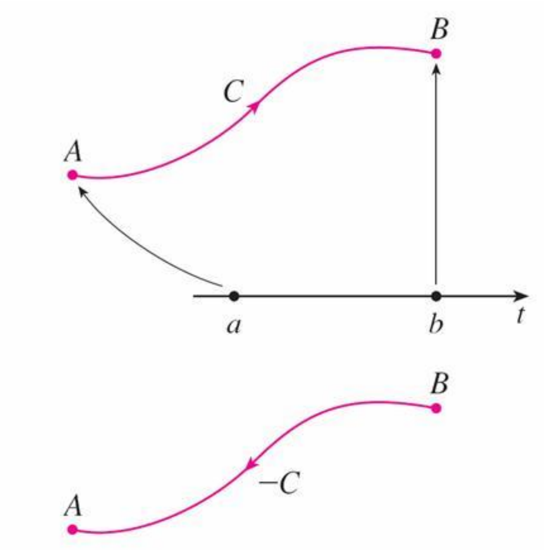



**Figura 8**

# Integrais de Linha

Se $-C$ denota a curva constituída pelos mesmos pontos que $C$, mas com orientação contrária (do ponto inicial $B$ para o ponto terminal $A$ na Figura 8), então temos

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Mas, se integrarmos em relação ao comprimento de arco, o valor da integral de linha *não* se altera ao revertermos a orientação da curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

Isso ocorre porque $\Delta s_i$ é sempre positivo, enquanto $\Delta x_i$ e $\Delta y_i$ mudam de sinal quando invertemos a orientação de $C$.

# Integrais de Linha no Espaço

# Integrais de Linha no Espaço

Suponhamos agora que *C* seja uma curva espacial suave dada pelas equações paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leq t \leq b$$

ou por uma equação vetorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Se *f* é uma função de três variáveis que é contínua em alguma região contendo *C*, então definimos a **integral de linha de *f* ao longo de *C*** (com relação ao comprimento de arco) de modo semelhante ao feito nas curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

# Integrais de Linha no Espaço

Calculamos essa integral utilizando uma fórmula análoga à Equação 3:

$$\boxed{9} \qquad \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que as integrais das Equações 3 e 9 podem ser escritas de modo mais compacto pela notação vetorial

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

Para o caso especial em que $f(x, y, z) = 1$, obtemos

$$\int_C ds = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt = L$$

onde $L$ é o comprimento da curva $C$.

# Integrais de Linha no Espaço

Também podemos definir integrais de linha de *C* em relação a *x*, *y* e *z*. Por exemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\, dt$$

Portanto, como para as integrais de linha no plano, podemos calcular integrais da forma

$$\boxed{10} \qquad \int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

escrevendo tudo (*x*, *y*, *z*, *dx*, *dy*, *dz*) em termos do parâmetro *t*.

# Exemplo 5

Calcule $\int_C y \text{ sen } z \, ds$, onde $C$ é a hélice circular dada pelas equações $x = \cos t$, $y = \text{sen } t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Veja a Figura 9.)

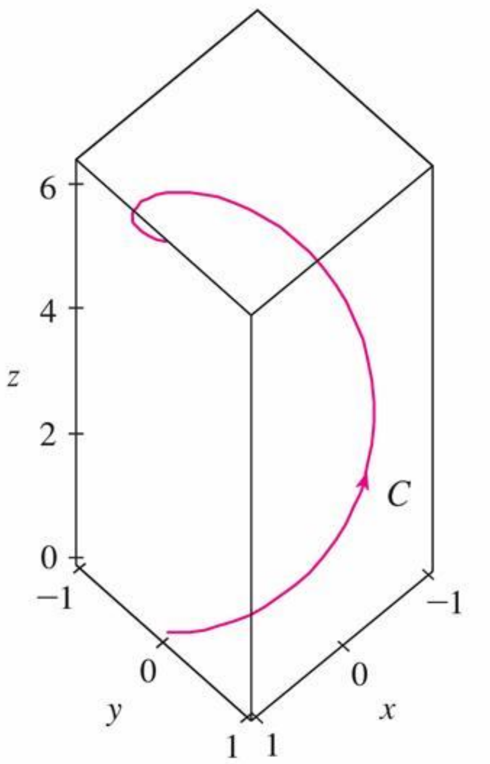



**Figura 9**

# Exemplo 5 – *Solução*

A Fórmula 9 nos dá

$$\int_C y \operatorname{sen} z \, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t) \, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi$$

Integrais de Linha de Campos Vetoriais

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Lembre-se de que o trabalho feito por uma força variável *f*(*x*) que move uma partícula de *a* até *b* ao longo do eixo *x* é dado por $W = \int_a^b f(x)\,dx.$ Vimos que o trabalho feito por uma força constante **F** para mover um objeto de um ponto *P* a outro ponto *Q* no espaço é *W* = **F** • **D**, onde **D** = $\overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que **F** = *P* **i** + *Q* **j** + *R* **k** seja um campo de força contínua em $\mathbb{R}^3$ (um campo de força em $\mathbb{R}^2$ pode ser visto como um caso especial onde *R* = 0 e *P* e *Q* dependem só de *x* e *y*.) Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva suave *C*.

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Dividimos $C$ em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos $\Delta s_i$ através da divisão de intervalos de parâmetros $[a, b]$ em subintervalos de igual largura. (Veja a Figura 1 para o caso bidimensional, ou a Figura 11, para o caso tridimensional.)

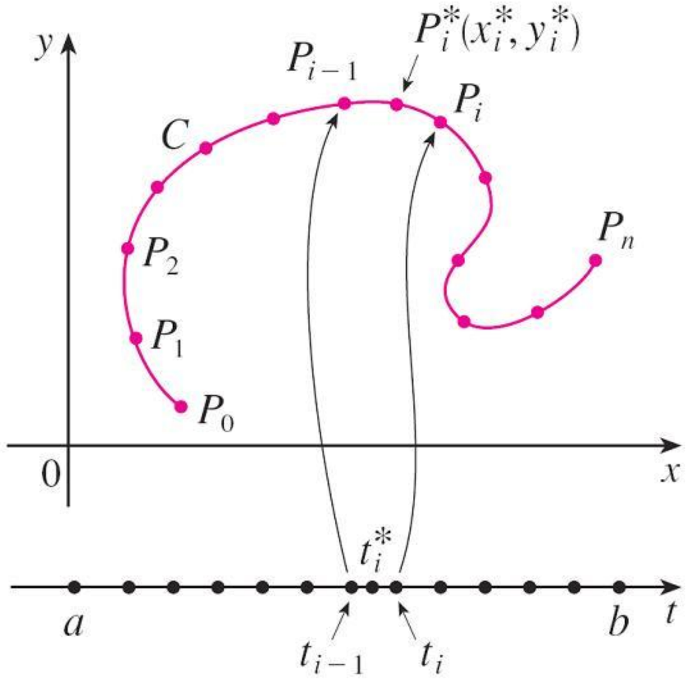



Figura 1

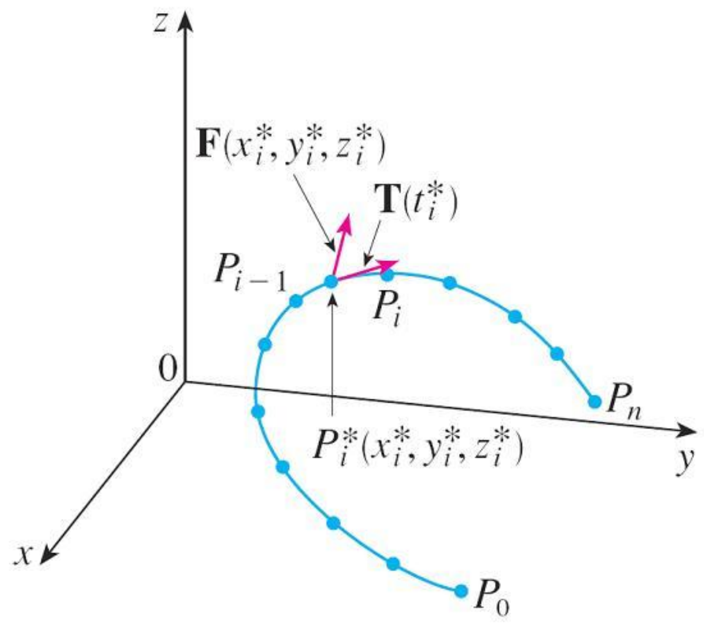



Figura 11

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Escolha um ponto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ no *i*-ésimo subarco correspondente ao valor do parâmetro $t_i^*$. Se $\Delta s_i$ é pequeno, o movimento da partícula de $P_{i-1}$ para $P_i$ na curva ocorre aproximadamente na direção de $\mathbf{T}(t_i^*)$, vetor tangente unitário a $P_i^*$. Então, o trabalho feito pela força **F** para mover a partícula de $P_{i-1}$ para $P_i$ é, aproximadamente

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i \, \mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)] \, \Delta s_i$$

e o trabalho total realizado para mover a partícula ao longo de *C* é, aproximadamente,

$$\boxed{11} \qquad \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)] \, \Delta s_i$$

onde $\mathbf{T}(x, y, z)$ é o vetor tangente unitário no ponto $(x, y, z)$ em *C*.

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Intuitivamente, vemos que estas aproximações devem se tornar melhor quando *n* torna-se maior. Portanto, definimos o **trabalho** *W* feito por um campo de força **F** como o limite da soma de Riemann dada por $\boxed{11}$, ou seja,

$$\boxed{12} \qquad W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

A Equação 12 nos diz que o *trabalho é a integral com relação ao comprimento de arco da componente tangencial da força.*

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Se a curva $C$ é dada pela equação vetorial

$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, então, $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, e, pela Equação 9, podemos reescrever a Equação 12 como

$$W = \int_a^b \left[ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e ocorre também em outras áreas da física.

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Portanto, definimos a integral de linha de *qualquer* campo vetorial contínuo

13 **Definição** Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva lisa $C$ dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Então, **a integral de linha de F ao longo de** $C$ é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Ao utilizar a Definição 13, tenha em mente que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ é apenas uma abreviação de $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, então podemos avaliar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ simplesmente colocando $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ na expressão para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Observe também que podemos formalmente escrever que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

# Exemplo 7

Determine o trabalho feito pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

SOLUÇÃO: Uma vez que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

# Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t)\, dt$$

$$= 2\, \frac{\cos^3 t}{3} \Big]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Finalmente, observamos a relação entre as integrais de linha de campos vetoriais e as integrais de linha de campos escalares. Suponha que o campo vetorial **F** em $\mathbb{R}^3$ seja dado na forma de componente, a equação **F** = $P$ **i** + $Q$ **j** + $R$ **k**. Usamos a Definição 13 para calcular a sua integral de linha de $C$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \big(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}\big)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\Big]\, dt$$

# Integrais de Linha de Campos Vetoriais

Mas essa última integral é exatamente a integral de linha de $\boxed{10}$. Portanto, temos

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{onde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}}$$

Por exemplo, a integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ poderia ser expressa como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$