16

Cálculo Vetorial

16.5 Rotacional e Divergente

Rotacional

Rotacional

Se **F** = *P* **i** + *Q* **j** + *R* **k** é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de *P*, *Q* e *R* existem, então a **rotacional** de **F** é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boxed{1} \qquad \text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Vamos reescrever a Equação 1 usando notação de operadores. Introduziremos o operador diferencial vetorial ∇ ("del") como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Rotacional

Quando ele opera sobre uma função escalar, produz o gradiente de *f* :

$$\nabla f = \mathbf{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Se pensarmos em ∇ como um vetor de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ e $\partial/\partial z$, podemos também considerar o produto vetorial formal de ∇ pelo campo vetorial **F** como segue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotacional

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

Assim, o modo mais fácil de lembrar a Definição 1 é pela expressão simbólica

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$$

Exemplo 1

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine rot $\mathbf{F}$.

SOLUÇÃO: Usando a Equação 2, temos

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k} \\ &= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k} \\ &= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Rotacional

Lembre-se de que o gradiente de uma função *f* de três variáveis é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$, de modo que podemos calcular seu rotacional. O próximo teorema diz que o rotacional do gradiente de um campo vetorial é **0**.

$\boxed{3}$ **Teorema** Se f é uma função de três variáveis que tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$$

Rotacional

Como um campo vetorial conservativo é fa forma $\mathbf{F} = \nabla f$, o Teorema 3 pode ser reescrito como segue:

Se $\mathbf{F}$ é conservativo, então rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

E assim obtemos um modo de verificar que um campo vetorial não é conservativo.

Rotacional

Em geral, a recíproca do Teorema 3 não é verdadeira, mas o próximo teorema afirma que, se **F** for definido em todo o espaço, a recíproca vale. (Mais especificamente, a recíproca vale se o domínio é simplesmente conexo, ou seja, "não apresenta furos".)

$\boxed{4}$ **Teorema** Se **F** for um campo vetorial definido sobre todo $\mathbb{R}^3$ cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, **F** será um campo vetorial conservativo.

Rotacional

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Outra ocorre quando **F** representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos. Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de rot $\mathbf{F}(x, y, z)$, e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1).

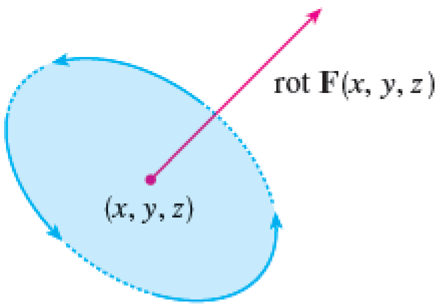

Figura 1

Rotacional

Se rot **F** = **0** no ponto *P*, então o fluido é isento de rotações em *P* e **F** é chamado **irrotacional** em *P*. Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou remoinho em *P*. Se rot **F** = **0**, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se rot **F** ≠ **0**, a roda com pás giraria em torno de seu eixo.

Divergente

Divergente

Se **F** = P **i** + Q **j** + R **k** é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ e $\partial R/\partial z$ existem, então o **divergente de F** é a função de três variáveis definida por

9

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que rot **F** é um campo vetorial, mas div **F** é um campo escalar. Em termos do operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, o divergente de **F** pode ser escrito simbolicamente como o produto escalar de ∇ e **F**:

10

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

Exemplo 4

Se $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine div **F**.

SOLUÇÃO: Pela definição de divergente (Equação 9 ou 10), temos

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

Divergente

Se **F** é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, então rot **F** também é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$. Como tal, podemos calcular seu divergente. O próximo teorema mostra que o resultado é 0.

$\boxed{11}$ **Teorema** Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0$$

Novamente, a razão para o nome *divergente* pode ser entendida no contexto da mecânica de fluidos. Se **F**(x, y, z) é a velocidade de um líquido (ou gás), então div **F**(x, y, z) representa a taxa de variação total (em relação ao tempo) da massa de líquido (ou gás) escoando do ponto (x, y, z) por unidade de volume.

Divergente

Em outras palavras, div **F**(x, y, z) mede a tendência de o fluido divergir do ponto (x, y, z). Se **F** = 0, então **F** é dito **incompressível**.

Outro operador diferencial aparece quando calculamos o divergente do gradiente de um campo vetorial ∇f. Se f é uma função de três variáveis, temos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

e essa expressão aparece tão frequentemente que vamos abreviá-la como $\nabla^2 f$. Esse operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

Divergente

é chamado **operador de Laplace** por sua relação com a **equação de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Podemos também aplicar o laplaciano ∇^2 a um campo vetorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

em termos de suas componentes:

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Os operadores divergente e rotacional nos permitem escrever o Teorema de Green em uma versão que será útil futuramente. Considerando uma região plana *D*, sua curva fronteira *C* e funções *P* e *Q* que satisfaçam as hipóteses do Teorema de Green. Em seguida, consideramos o campo vetorial **F** = *P* **i** + *Q* **j**. A sua integral da linha é

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

e, considerando **F** como um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ com terceira componente 0, temos

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Portanto,

$$(\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

12 $$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

A Equação 12 expressa a integral de linha da componente tangencial de **F** ao longo de *C* como uma integral dupla do componente vertical rotacional **F** sobre a região *D* delimitada por *C*. Vamos deduzir, agora, uma fórmula semelhante. envolvendo o componente *normal* de **F**.

Se *C* é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leq t \leq b$$

então o vetor tangente unitário é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Você pode verificar que o vetor normal unitário externo a *C* é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2.)

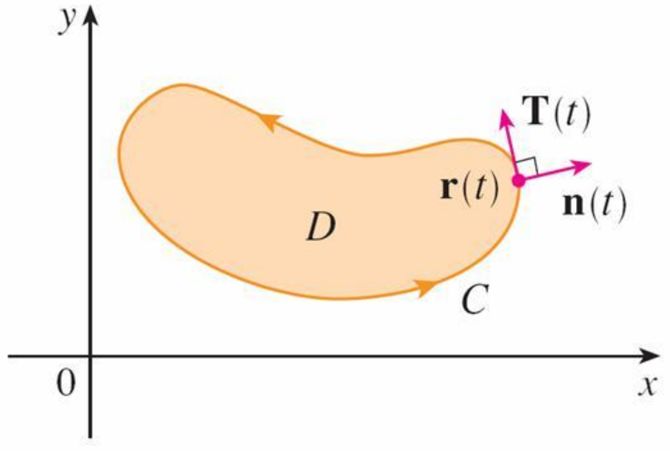

Figura 2

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Então, da equação temos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\,|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$= \int_C P\, dy - Q\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA$$

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é o divergente de **F**.

Formas Vetoriais do Teorema de Green

Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

$$\boxed{13} \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de **F** ao long de *C* é igual à integral dupla do divergente de **F** na região *D* delimitada por *C*.