UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ	**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO** **UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ** **CAMPUS APUCARANA**

Lista de Exercícios - Cálculo II – Engenharia Química - Profª Adriana Camila
(extraída do livro CÁLCULO - vol 2, James Stewart)

Integrais Triplas e Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas

1) Calcule a integral iterada.

a) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz \; dydxdz$ b) $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y \; dxdzdy$

c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x+y+z) \; dzdxdy$

2) Calcule a integral tripla.

a) $\int\int\int_E 2x \; dV$, onde $E = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le z \le y\}$

b) $\int\int\int_E yz\cos(x^5) \; dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, e $x = 1$.

c) $\int\int\int_E x^2 e^y \; dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

d) $\int\int\int_T x^2 \; dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

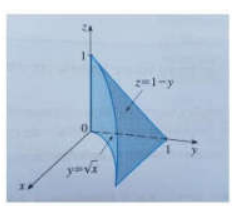
e) $\int\int\int_E x \; dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$.

3) Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

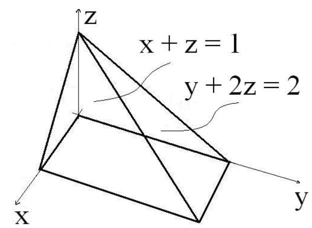
a) O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

b) O sólido delimitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.

4) A figura mostra a região de integração da integral $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z) \; dzdydx$ Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



5) Encontre o volume da região do primeiro octante limitada pelos planos coordenados e pelos planos $x + z = 1$, $y + 2z = 2$.



6) Utilize coordenadas cilíndricas.

a) Calcule $\int\int\int_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2+y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

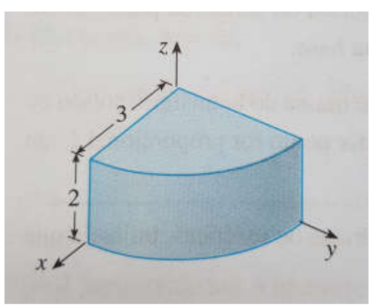
b) Calcule $\int\int\int_E y\, dV$, onde E é o sólido que está entre os cilindros $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do plano $z = x + 2$.

c) Calcule $\int\int\int_E x^2\, dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plno $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

d) Ache o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2+y^2$ e $z = 36-3x^2-3y^2$.

7) Calcule a integral $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\; dzdxdy$ transformando para coordenadas cilíndricas.

8) Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas sobre o sólido mostrado.



9) Utilize coordenadas esféricas.

a) Calcule $\int\int\int_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

b) Calcule $\int\int\int_E z\, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante.

c) Calcule $\int\int\int_E x^2\, dV$, onde E é limitado pelo plano xz e pelos hemisférios $y = \sqrt{9-x^2-z^2}$ e $y = \sqrt{16-x^2-z^2}$.

d) Encontre o volume da parte da bola $\rho \le a$ que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

e) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.

10) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\; dzdydx$ transformando para coordenadas esféricas.

11) Utilize a transformação dada para calcular a integral.

a) $\int\int_R (x-3y)\; dA$, onde R é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$; $x = 2u+v$, $y = u+2v$.

b) $\int\int_R x^2\; dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2+4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$.

c) $\int\int_R xy\; dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$.

12) Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

a) $$\int\int_R \frac{x-2y}{3x-y}\; dA,$$
onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x-2y = 0$, $x-2y = 4$, $3x-y = 1$ e $3x-y = 8$.

b) $$\int\int_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right)\; dA,$$
onde R é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,1)$.

RESPOSTAS:

1) a) 1   b) $\frac{1}{3}(e^3-1)$ c) $-\frac{1}{3}$

2) a) 4   b) $\frac{65}{28}$ c) $\frac{8}{3e}$ d) $\frac{1}{60}$ e) $\frac{16\pi}{3}$

3) a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{8}{15}$

4)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\; dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x,y,z)\; dzdxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\; dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\; dxdzdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\; dydzdx \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\; dydxdz
\end{aligned}$$

5) $\frac{2}{3}$

6) a) 384π b) 0 c) $\frac{2\pi}{5}$ d) 162π

7) 0

8) $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\ rdzdrd\theta$

9) a) $\frac{312500\pi}{7}$ b) $\frac{15\pi}{16}$ c) $\frac{1562\pi}{15}$ d) $(\sqrt{3}-1)\frac{\pi a^3}{3}$ e) 10π

10) $\frac{4\sqrt{2}-5}{15}$

11) a) -3 b) 6π c) $2\ln 3$

12) a) $\frac{8}{5}\ln 8$ b) $\frac{3}{2}\sin 1$