15 Integrais Múltiplas

15.7 Integrais Triplas

Integrais Triplas

Assim como definimos integrais unidimensionais para funções de uma única variável e duplas para funções de duas variáveis, vamos definir integrais triplas para funções de três variáveis. Inicialmente, trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular:

$$\boxed{1} \qquad B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

O primeiro passo é dividir B em subcaixas. Fazemos isso dividindo o intervalo $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx, dividindo $[c, d]$ em m subintervalos de comprimento Δy, e dividindo $[r, s]$ em n subintervalos de comprimento Δz.

Integrais Triplas

Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa *B* em *lmn* subcaixas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

como mostrado na Figura 1. Cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$.

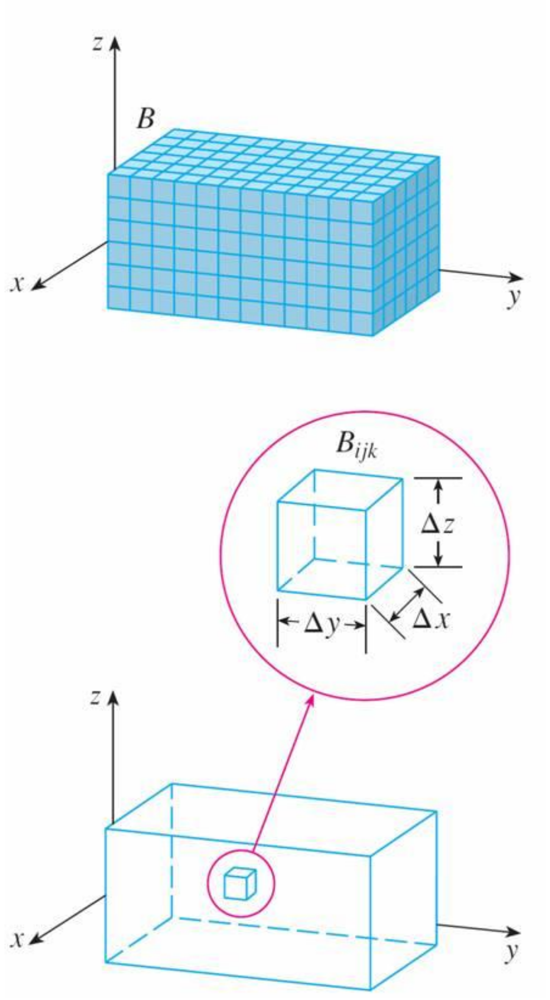


Figura 1

Integrais Triplas

Assim formamos a **soma tripla de Riemann**

$$\boxed{2} \qquad \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

onde o ponto de amostragem $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk}. Por analogia com a definição da integral dupla, definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann em $\boxed{2}$.

$\boxed{3}$ **Definição** A integral tripla de f na caixa B é

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,\, m,\, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

se esse limite existir.

Integrais Triplas

Novamente, a integral tripla sempre existe se *f* for contínua. Escolhemos o ponto amostragem como qualquer ponto de cada subcaixa, mas, se escolhermos o ponto (x_i, y_j, z_k) obteremos uma expressão com aparência menos complicada para a integral tripla:

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

Integrais Triplas

Assim como para as integrais duplas, o método prático para calcular uma integral tripla consiste em expressá-la como uma integral iterada, como segue.

$\boxed{4}$ **Teorema de Fubini para as Integrais Triplas** Se f é contínua em uma caixa retangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

A integral iterada do lado direito do Teorema de Fubini indica que primeiro integramos em relação a *x* (mantendo *y* e *z* fixados); em seguida integramos em relação ao *y* (mantendo *z* fixado) e, finalmente, em relação a *z*.

Integrais Triplas

Existem cinco outras ordens possíveis de integração, todas fornecendo o mesmo resultado. Por exemplo, se primeiro integrarmos em relação a *y*, então em relação a *z* e depois a *x*, teremos

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Exemplo 1

Calcule a integral tripla $\iiint_B xyz^2 \, dV$, onde B é a caixa retangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$$

SOLUÇÃO: Podemos usar qualquer uma das seis possíveis ordens de integração. Se escolhermos integrar primeiro em relação a x, depois em relação a y e então em relação a z, obteremos

$$\iiint_B xyz^2 \, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \, dz$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4} \Big]_0^3 = \frac{27}{4}$$

Integrais Triplas

Agora definiremos a **integral tripla sobre uma região limitada geral *E*** no espaço tridimensional (um sólido) pelo mesmo método usado para as integrais duplas.
Envolveremos *E* por uma caixa *B* do tipo dado pela Equação 1. Em seguida, definiremos uma função *F* de modo que ela coincida com *f* em *E* e seja 0 para pontos de *B* fora de *E*. Por definição,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

Essa integral existe se *f* for contínua e se o limite de *E* for "razoavelmente liso".

Integrais Triplas

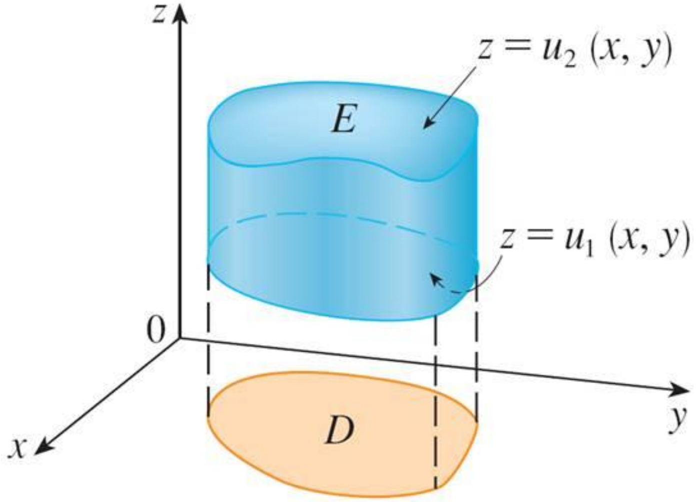
A integral tripla tem essencialmente as mesmas propriedades da integral dupla.

Vamos nos restringir às funções contínuas *f* e a certos tipos de regiões. Uma região sólida *E* é dita do **tipo I** se estiver contida entre os gráficos de duas funções contínuas de *x* e *y*, ou seja,

$$\boxed{5} \qquad E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

Integrais Triplas

onde *D* é a projeção de *E* sobre o plano *xy*, como mostrado na Figura 2.



Uma região sólida do tipo 1

Figura 2

Integrais Triplas

Observe que o limite superior do sólido *E* é a superfície de equação $z = u_2(x, y)$, enquanto o limite inferior é a superfície $z = u_1(x, y)$.

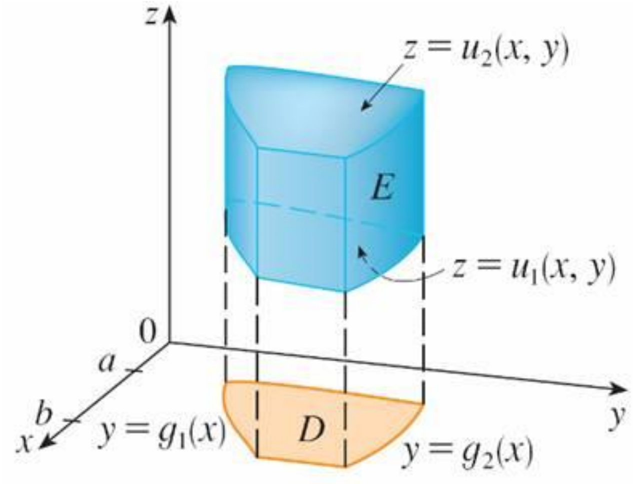
Pelos mesmos argumentos, podemos mostrar que, se *E* é uma região de tipo 1 dada pela Equação 5, então

$$\boxed{6} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

O significado da integral de dentro do lado direito da Equação 6 é que *x* e *y* são mantidos fixos e, assim, $u_1(x, y)$ e $u_2(x, y)$ são vistas como constantes, enquanto $f(x, y, z)$ é integrada em relação a *z*.

Integrais Triplas

Em particular, se a projeção *D* de *E* no plano *xy* é uma região plana de tipo I (como na Figura 3), então



Uma região sólida do tipo 1 na qual a projeção *D* é uma região plana de tipo I

Figura 3

Integrais Triplas

Em particular, se a projeção *D* de *E* sobre o plano *xy* é uma região plana de tipo I (como na Figura 3), então

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 se torna

$$\boxed{7} \qquad \boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx}$$

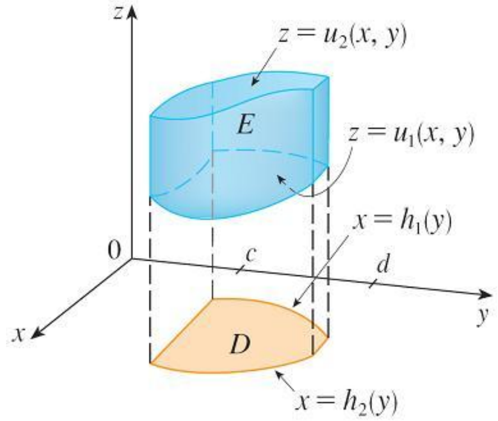
Integrais Triplas

Se, por outro lado, D é uma região plana do tipo II (como na Figura 4), então

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

e a Equação 6 se torna

8
$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$



Uma região sólida de tipo 1 com uma projeção de tipo II

Figura 4

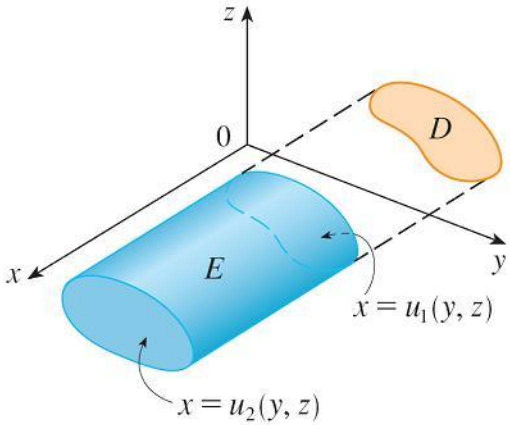
Integrais Triplas

Uma região sólida E é de **tipo 2** se for da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \le x \le u_2(y, z)\}$$

onde, desta vez, D é a projeção de E no plano yz (veja a Figura 7).

A superfície de trás é $x = u_1(y, z)$ e a superfície da frente é $x = u_2(y, z)$. Assim, temos



Uma região de tipo 2

Figura 7

10 $$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\, dx \right] dA$$

Integrais Triplas

Finalmente, uma região do **tipo 3** é da forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

onde D é a projeção de E no plano xz, $y = u_1(x, z)$ é a superfície da esquerda e $y = u_2(x, z)$ é a superfície da direita (veja a Figura 8).

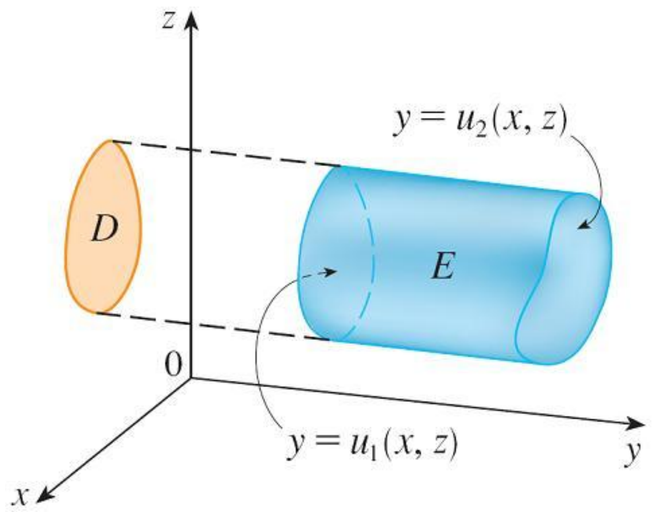


Figura 8

Integrais Triplas

Para esse tipo de região, temos

$$\boxed{11} \qquad \iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\, dy \right] dA$$

Em cada uma das Equações, 10 e 11, podem existir duas possíveis expressões para a integral, dependendo de *D* ser uma região plana do tipo I ou II (e correspondendo às Equações 7 e 8).

Aplicações de Integrais Triplas

Aplicações de Integrais Triplas

Lembre-se de que, se $f(x) \geq 0$, então a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b, e se $f(x, y) \geq 0$, então a integral dupla $\iint_D f(x, y)\,dA$ representa o volume sob a superfície $z = f(x, y)$ acima de D. A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$, onde $f(x, y, z) \geq 0$, não é muito útil, porque seria um "hipervolume" de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o *domínio* da função f; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Apesar disso, a integral tripla $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ pode ser interpretada de forma diversa em diferentes situações físicas, dependendo das interpretações físicas de x, y, z e $f(x, y, z)$.

Aplicações de Integrais Triplas

Vamos começar com o caso especial onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E. Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E:

12 $$\boxed{V(E) = \iiint_E dV}$$

Por exemplo, você pode ver isso no caso de uma região do tipo 1 colocando $f(x, y, z) = 1$ na Fórmula 6:

$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\, dA$$

sabemos que isso representa o volume que está entre as superfícies $z = u_1(x, y)$ e $z = u_2(x, y)$.

Exemplo 5

Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro T limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

SOLUÇÃO: O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy são mostrados nas Figuras 14 e 15.

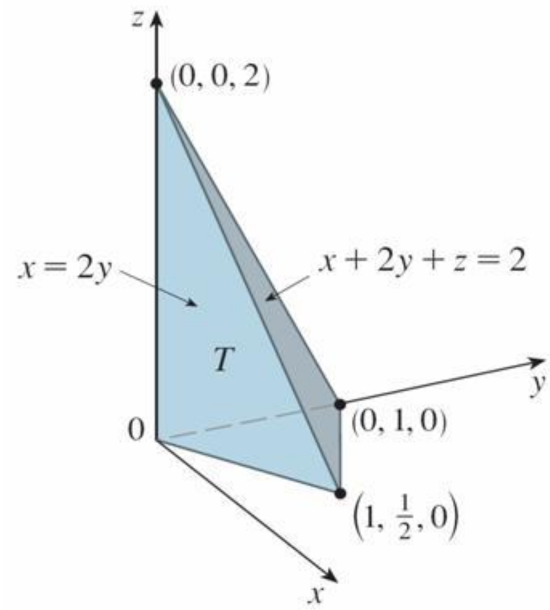


Figura 14

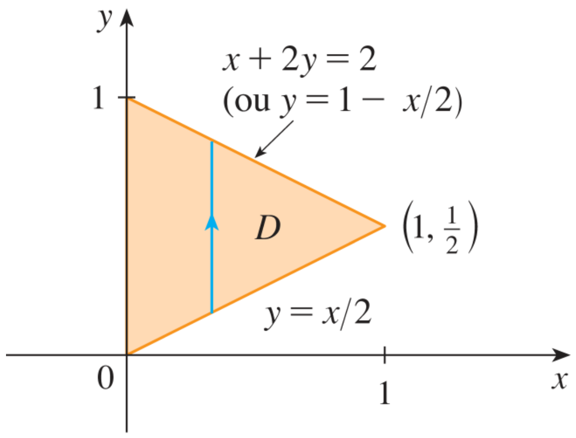


Figura 15

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

O limite inferior de T é o plano $z = 0$ e o limite superior é o plano $x + 2y + z = 2$, isto é, $z = 2 - x - 2y$.

Portanto, temos

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx \;=\; \frac{1}{3}$$

(Observe que não é necessário usar as integrais triplas para calcular volumes. As integrais triplas simplesmente fornecem um método alternativo para descrever os cálculos.)

Aplicações de Integrais Triplas

Todas as aplicações de integrais duplas podem ser imediatamente estendidas para as integrais triplas. Por exemplo, se a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume, em qualquer ponto (x, y, z), então sua **massa** é

13 $$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

e seus **momentos** em relação aos três planos de coordenadas são

14 $$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho(x, y, z)\, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\,\rho(x, y, z)\, dV$$

Aplicações de Integrais Triplas

O **centro de massa** está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\boxed{15} \qquad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Se a densidade é constante, o centro de massa do sólido é chamado **centroide** de *E*. Os **momentos de inércia** em relação aos três eixos coordenados são

$$\boxed{16} \qquad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,dV$$

Aplicações de Integrais Triplas

A carga **elétrica total** sobre um objeto sólido ocupando a região E e tendo uma densidade de carga $\sigma(x, y, z)$ é

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

Se tivermos três variáveis aleatórias X, Y e Z, sua **função densidade conjunta** é uma função das três variáveis, de forma que a probabilidade de (X, Y, Z) estar em E é

$$P\big((X, Y, Z) \in E\big) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

Aplicações de Integrais Triplas

Em particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d,\ r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

A função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = 1$$