

# EDCO3A

# ESTRUTURAS DE DADOS 1

Aula 06 - Árvores AVL

Profa Tamara Angélica Baldo

# Licença

Este trabalho está licenciado com uma Licença CC BY-NC-ND 4.0:



maiores informações:

[https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt\\_BR](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR)

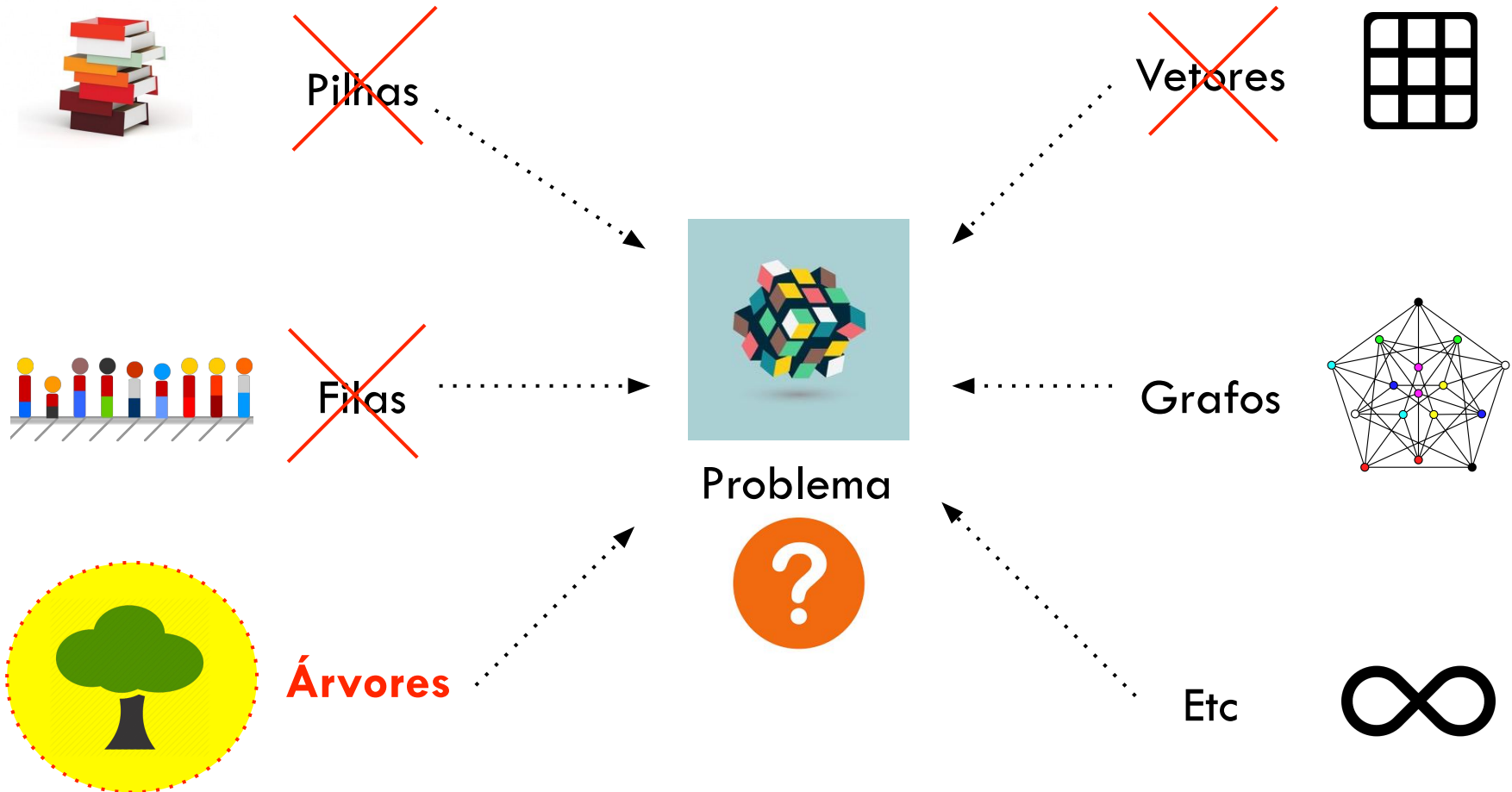
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas
- 4 Referências

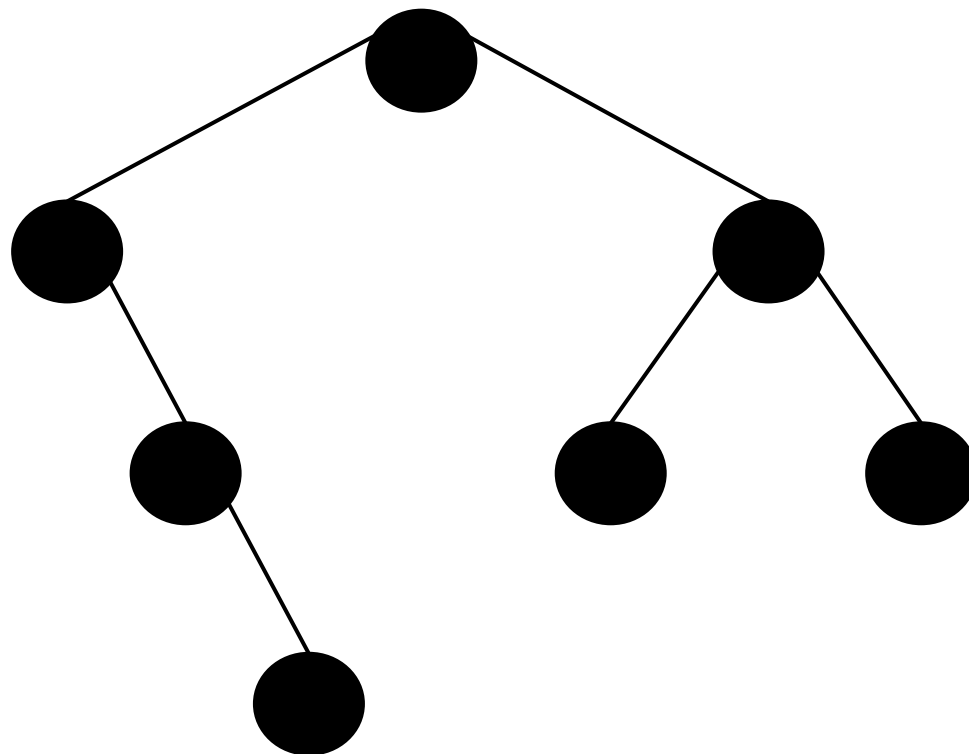
# Roteiro

- 1** Introdução
- 2** Árvores  
AVLs
- 3** Inserção em  
AVLs
  - A** Rotações simples
  - B** Rotações duplas
- 4** Referências

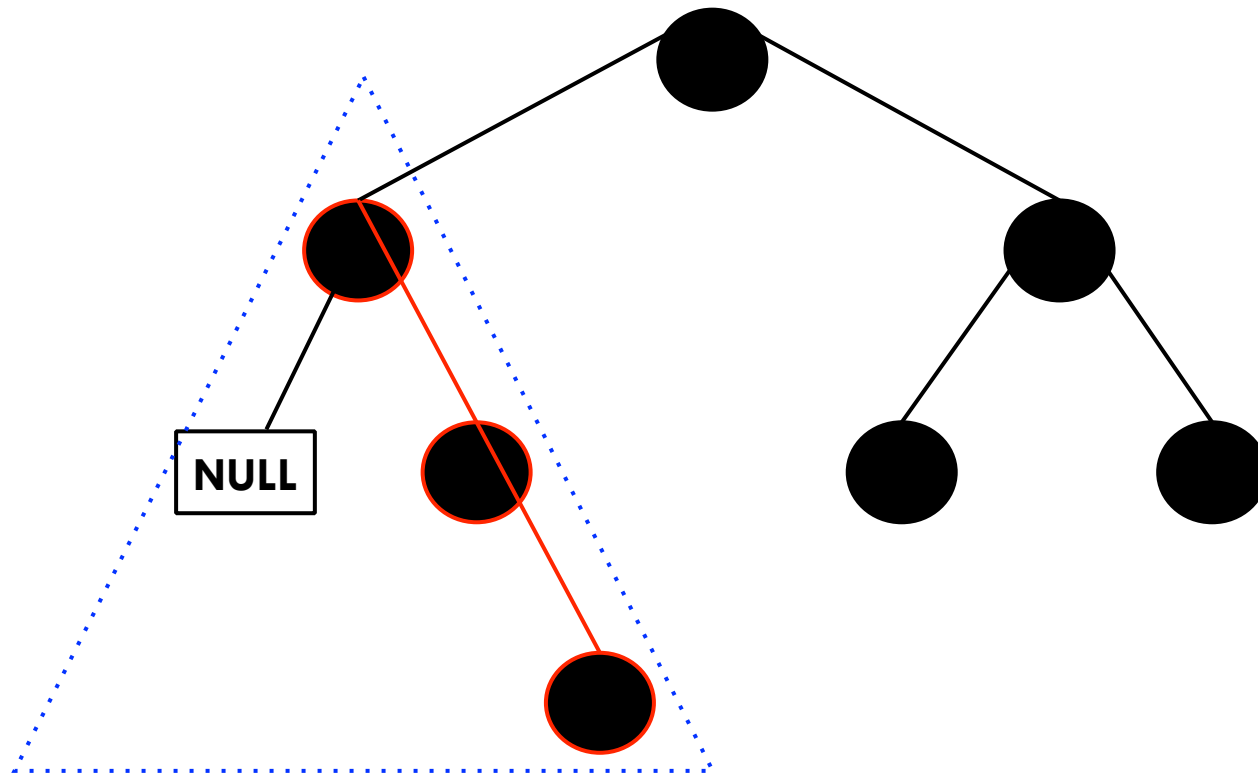
# Introdução



# Introdução

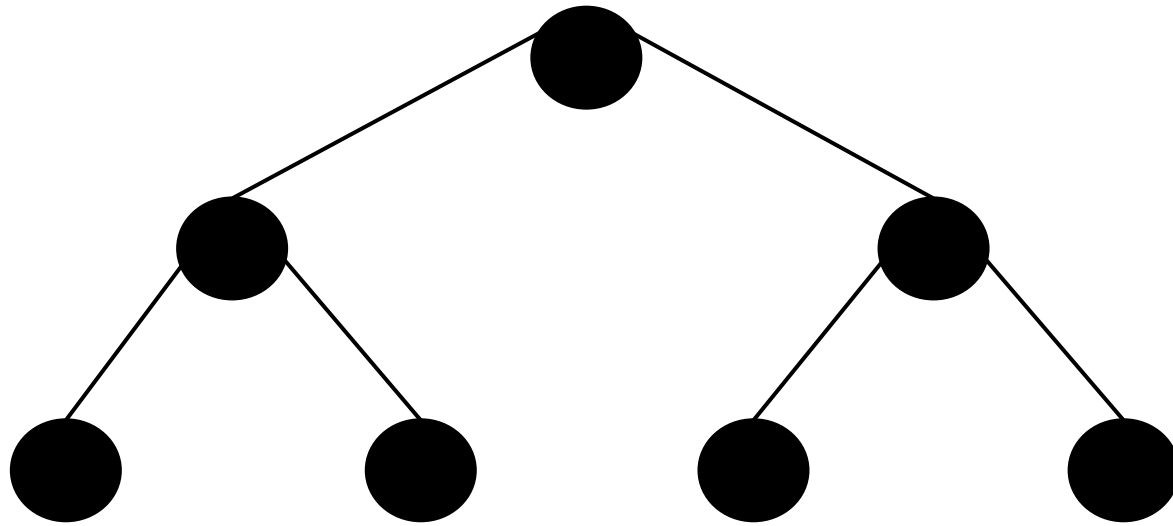


# Introdução



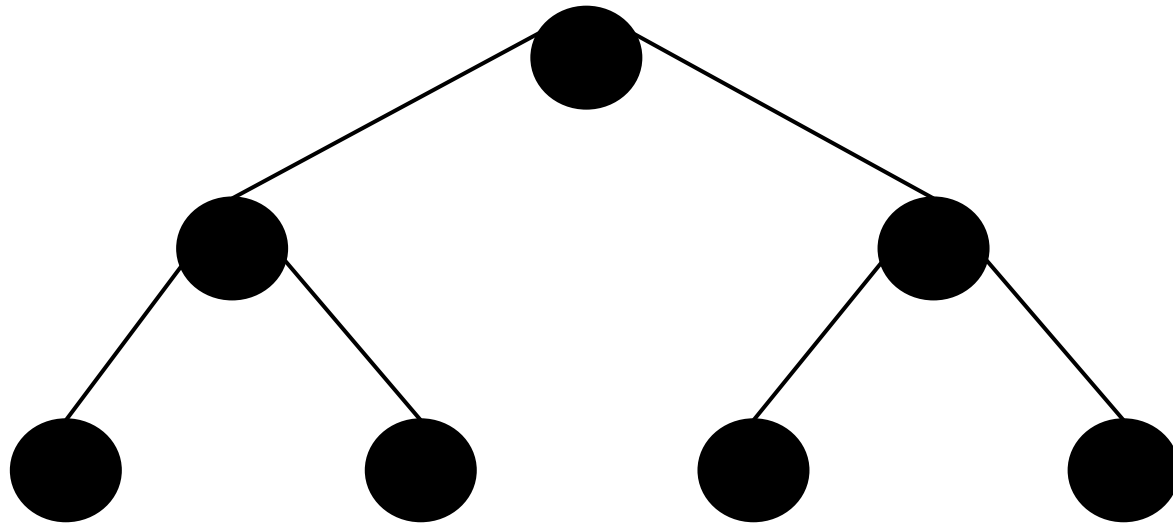
**Desbalanceamento**

# Introdução



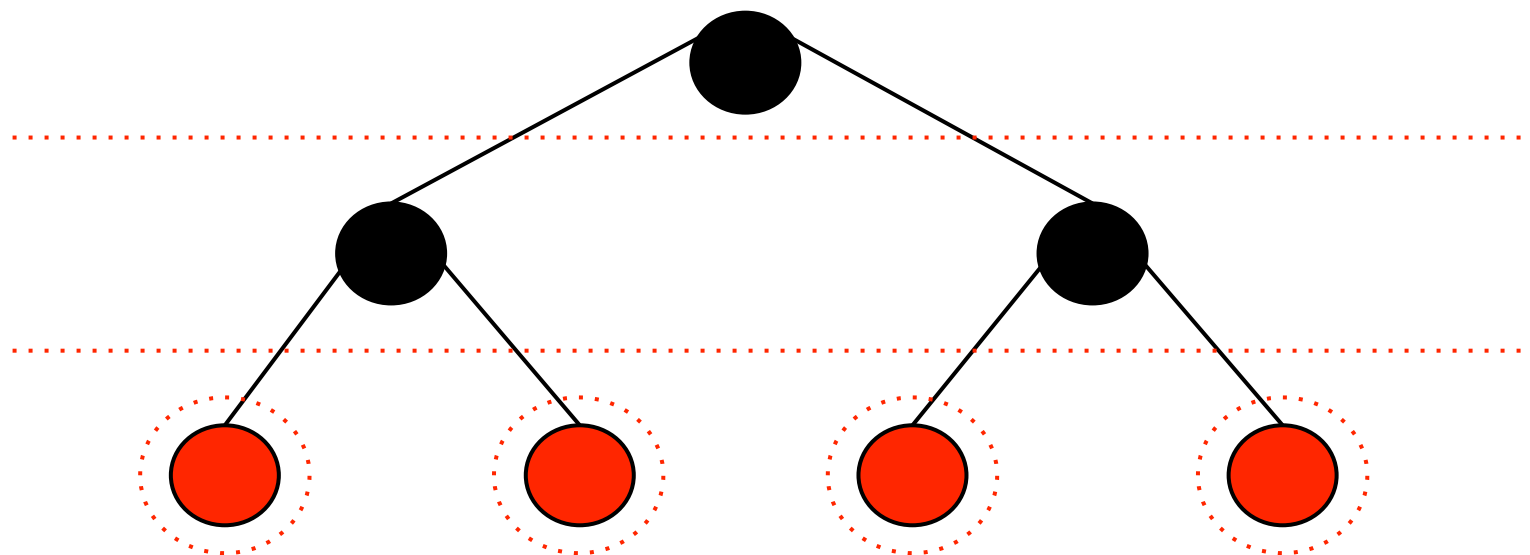


# Introdução



**Árvore balanceada**  
(elementos distribuídos homogeneamente)

# Introdução



## Árvore balanceada

(elementos distribuídos homogeneamente)

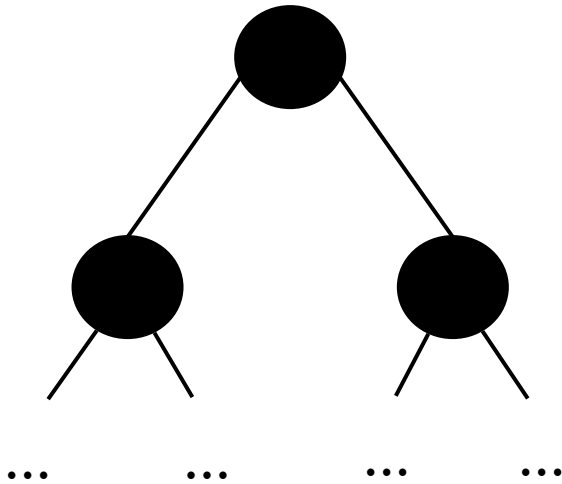
Folhas em no máximo 2 níveis distintos

# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas
- 4 Referências

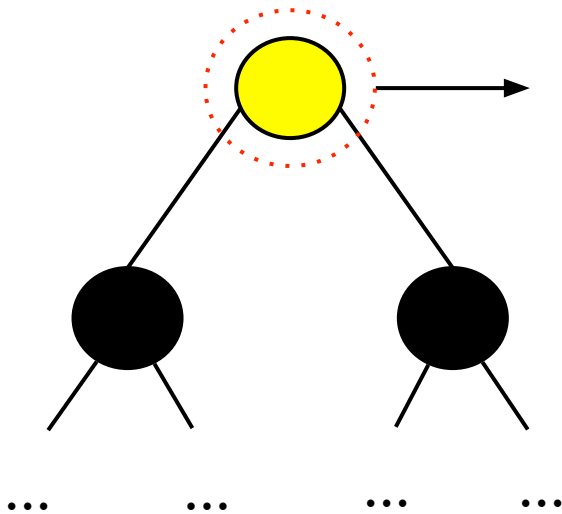
# Árvores AVLs

**AVL** = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)



# Árvores AVLs

**AVL** = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)

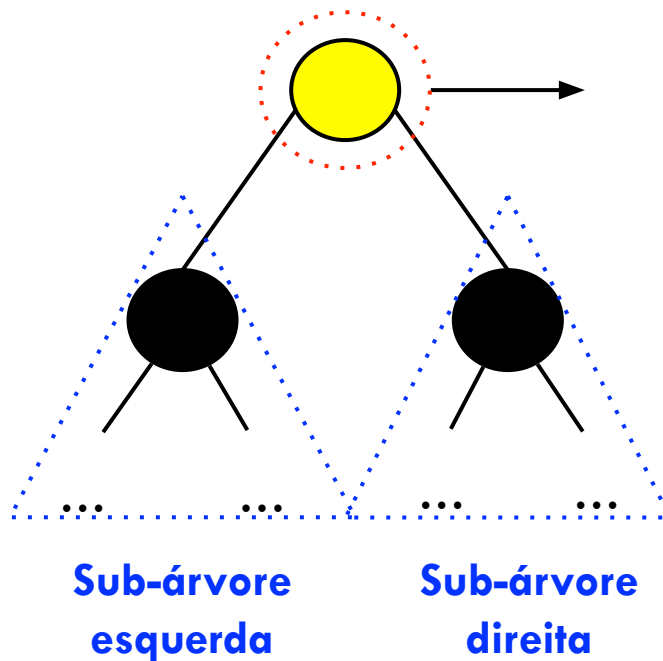


**Fator de balanceamento**

$$bF = hD - hE$$

# Árvores AVLs

**AVL** = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)

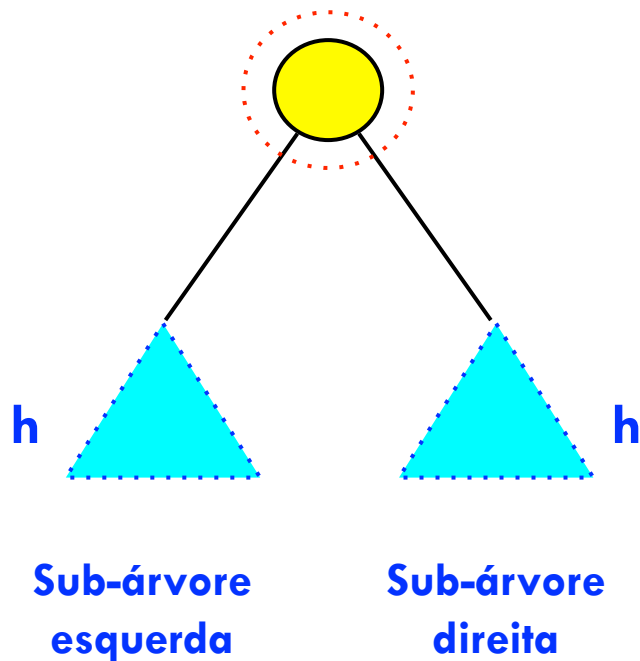


**Fator de balanceamento**

$$bF = hD - hE$$

# Árvores AVLs

## a) Sub-árvores de mesma altura ( $bF = 0$ )



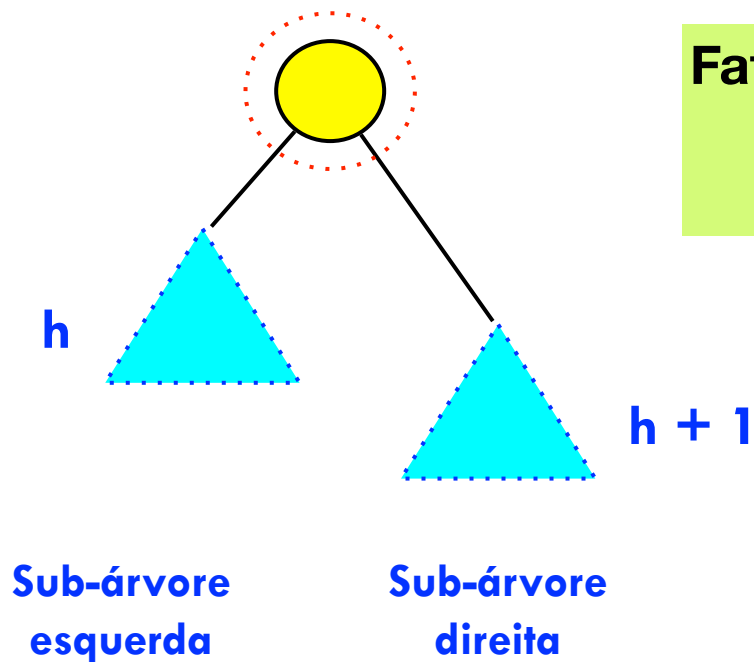
### Fator de balanceamento

$$bF = h - h$$

$$bF = 0$$

# Árvores AVLs

**b) Sub-árvore da direita é maior ( $bF = +1$ )**



**Fator de balanceamento**

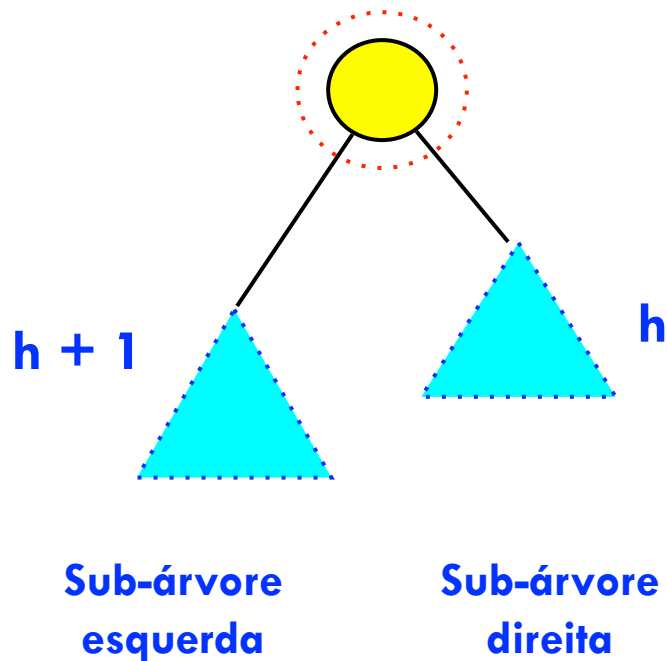
$$bF = (h+1) - h$$

$$bF = +1$$



# Árvores AVLs

c) Sub-árvore da esquerda é maior ( $bF = -1$ )

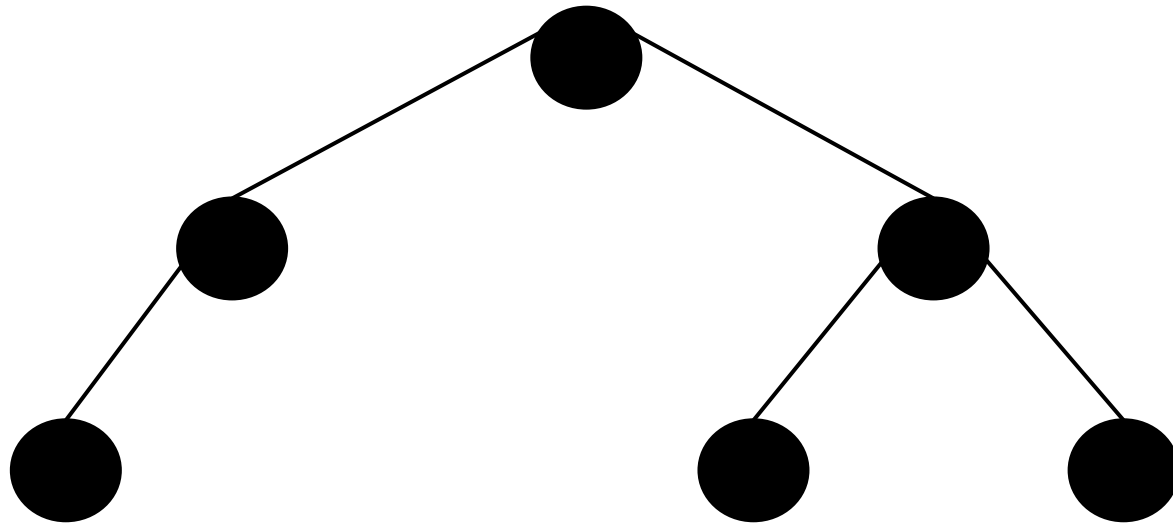


**Fator de balanceamento**

$$bF = h - (h + 1)$$

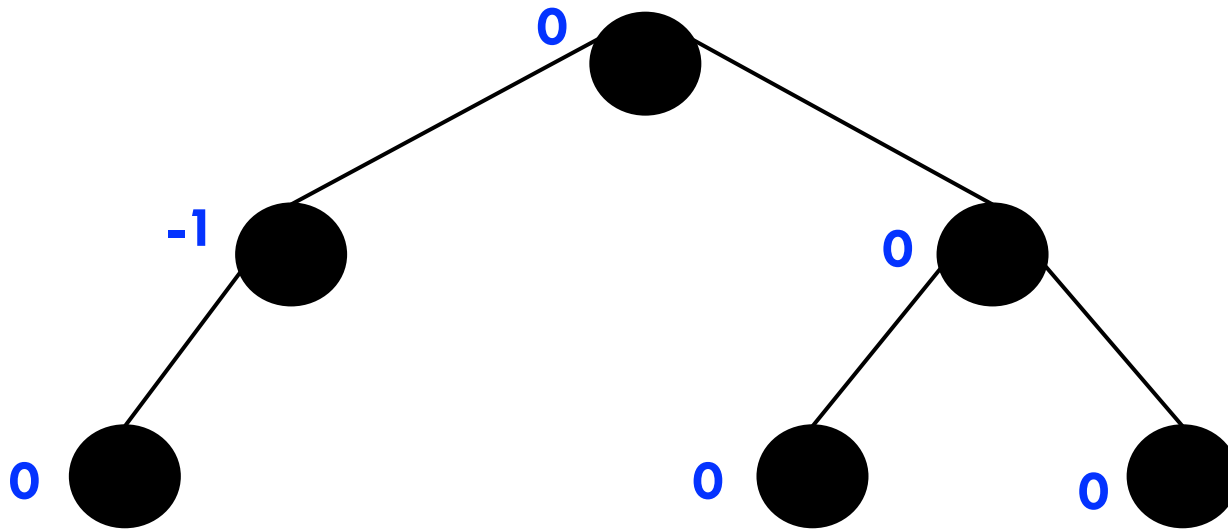
$$bF = -1$$

# Árvores AVLs



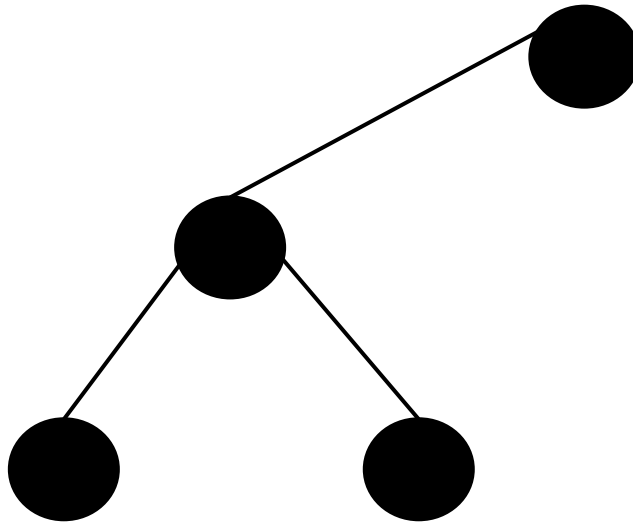
**Todos os nós possuem fator de balanceamento  $\{-1,0,+1\}$**

# Árvores AVLs



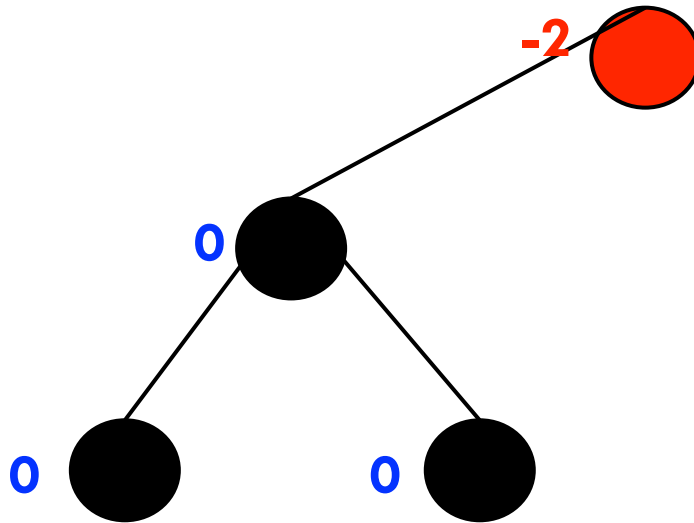
Todos os nós possuem fator de balanceamento  $\{-1, 0, +1\}$

# Árvores AVLs



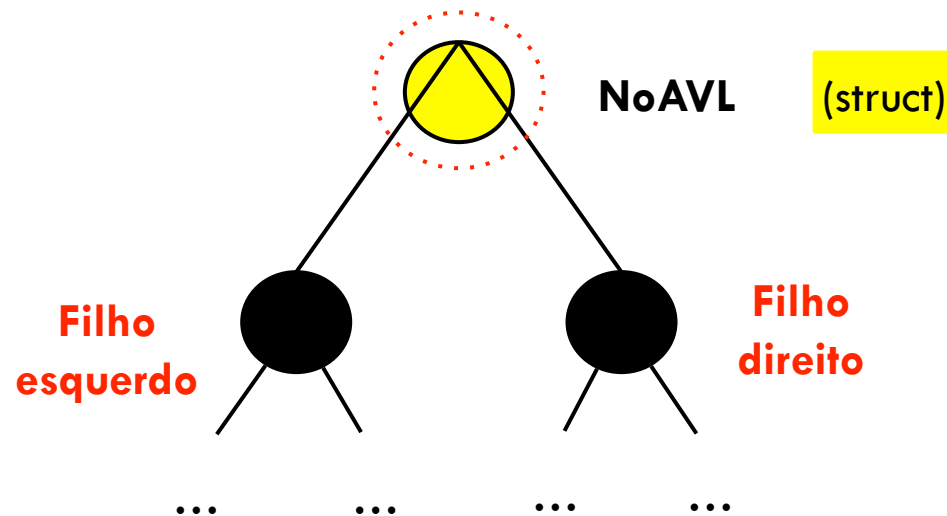
Se ( algum fator  $> +1$  ou  $< -1$  ) :  
**Desbalanceamento**

# Árvores AVLs



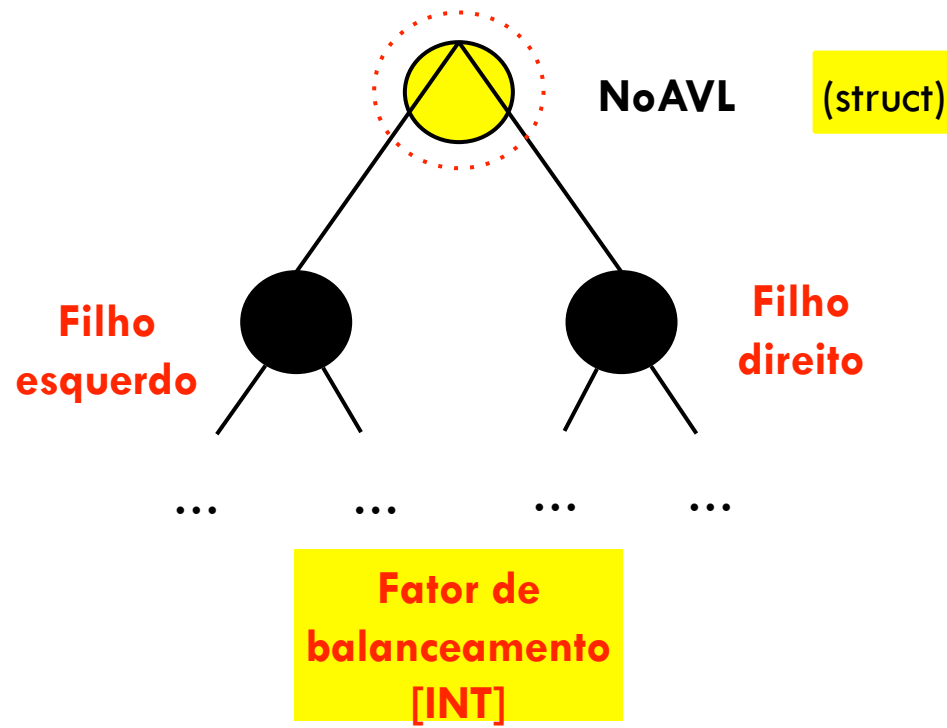
Se ( algum fator  $> +1$  ou  $< -1$  ) :  
**Desbalanceamento**

# Árvores AVLs



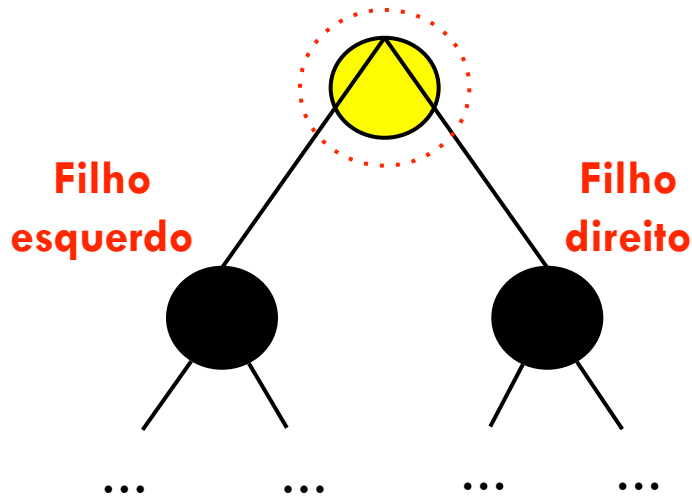
# Árvores AVLs

Sentido  
verificação



# Árvores AVLs

NoAVL



**Fator de  
balanceamento  
[INT]**

**NoAVL**

1. **inteiro** chave
2. NoAVL\* filho à direita
3. NoAVL\* filho à esquerda
4. NoAVL\* pai [opcional]
5. **inteiro** fatorBalanceamento



# Exercício 01

- Implementar Tipos Abstratos necessários para Árvores AVL

# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas
- 4 Referências

# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}

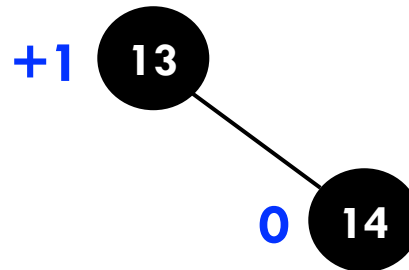
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}

0 13

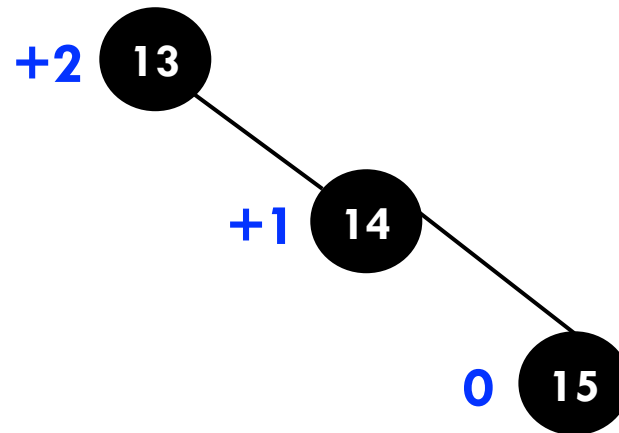
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}

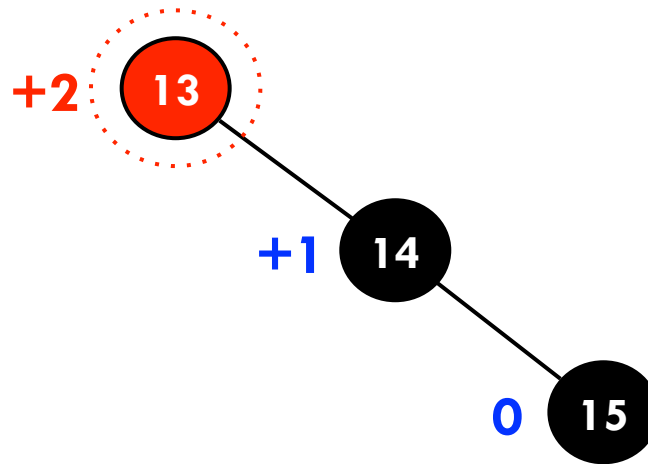


# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



# Inserções em AVL



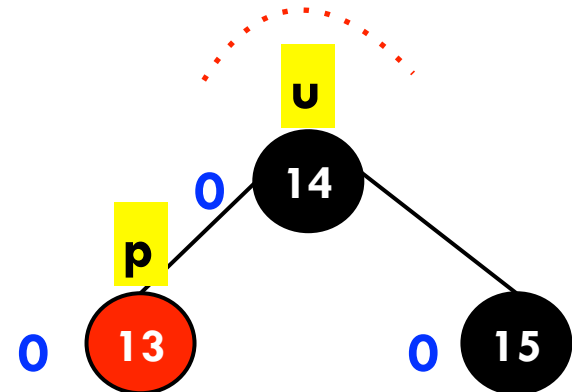
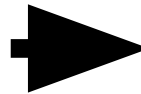
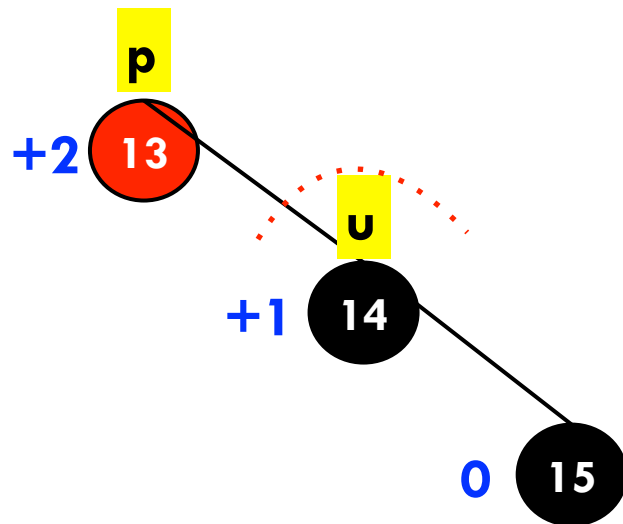
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas
- 4 Referências



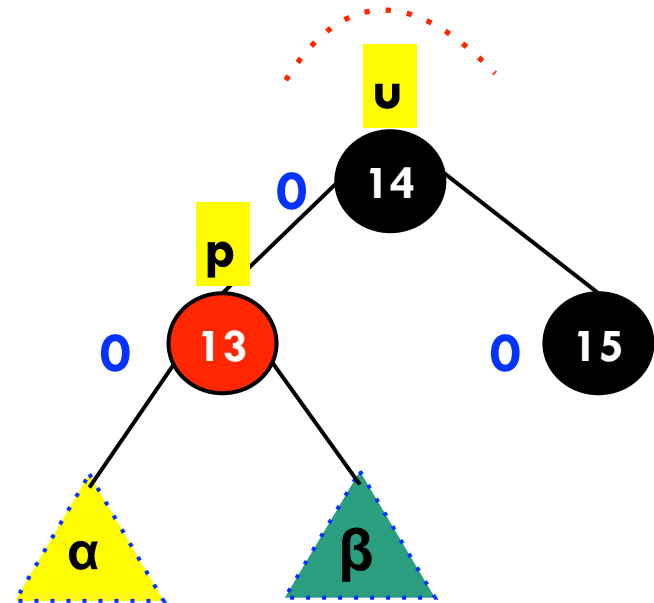
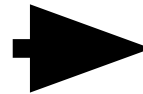
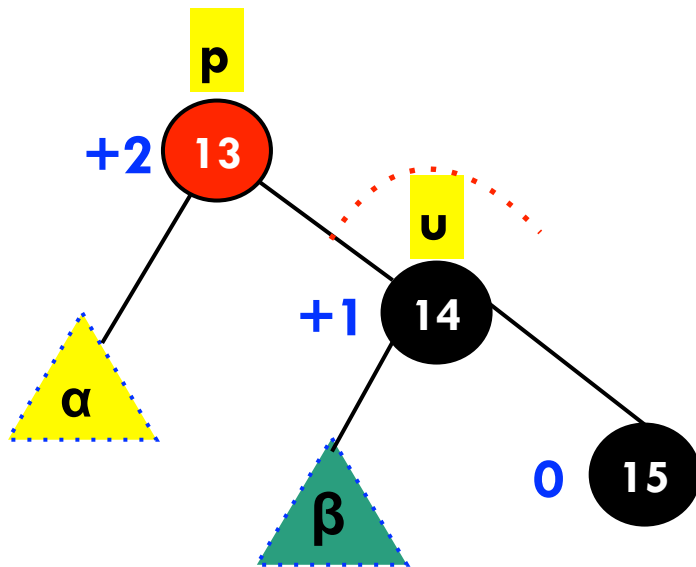
# Inserções em AVL

## 1) Rotação simples p esquerda

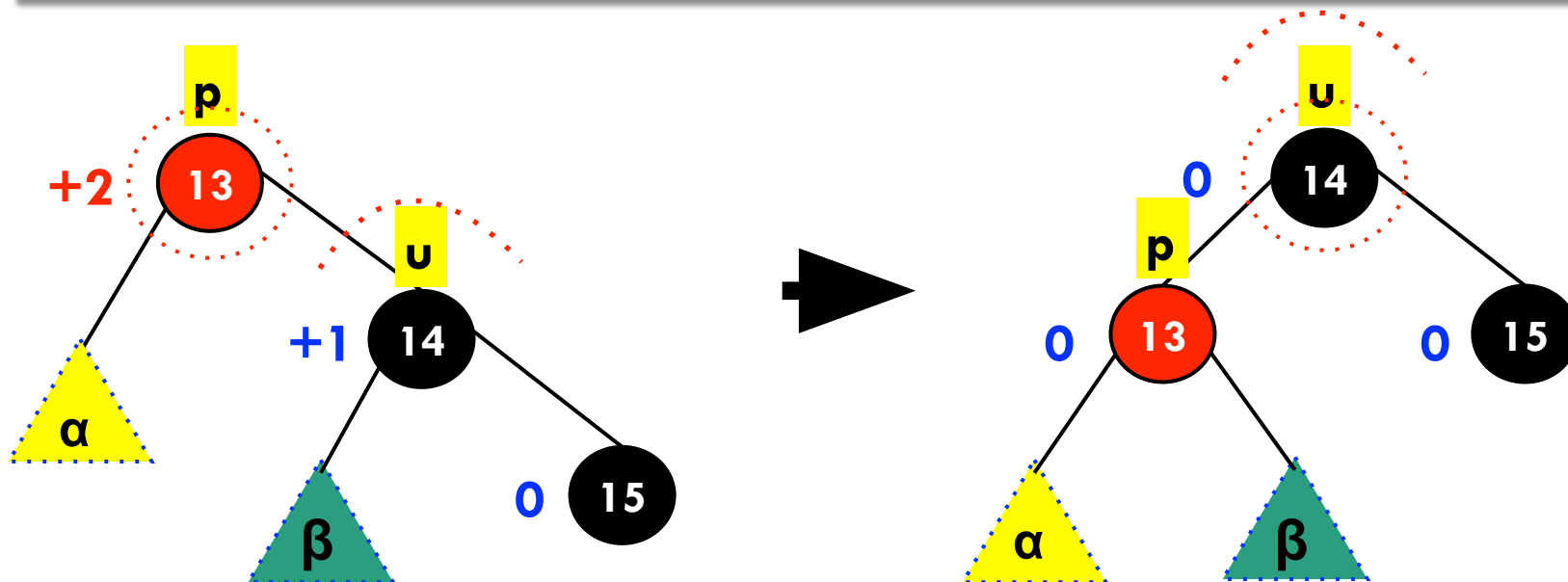


# Inserções em AVL

## 1) Rotação simples p esquerda



# Inserções em AVL

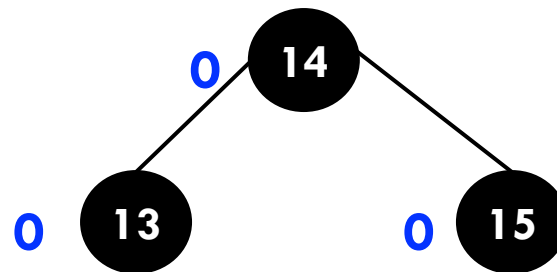


## Rotação simples p esquerda

1.  $u = p \rightarrow \text{direita}$
2.  $p \rightarrow \text{direita} = u \rightarrow \text{esquerda}$
3.  $u \rightarrow \text{esquerda} = p$
4.  $p \rightarrow \text{balance} = 0$
5.  $p = u$

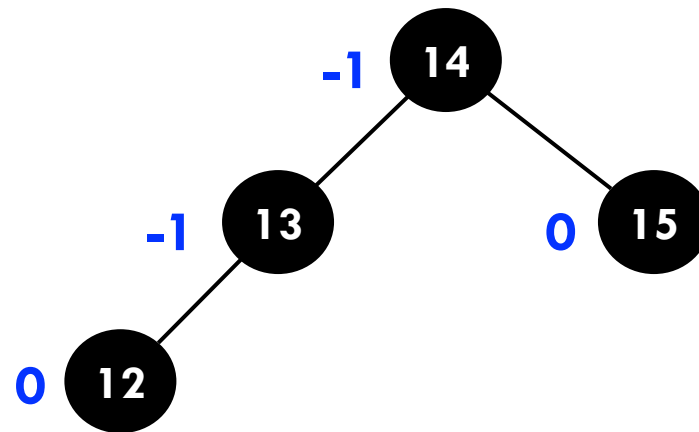
# Inserções em AVL

Sequência = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



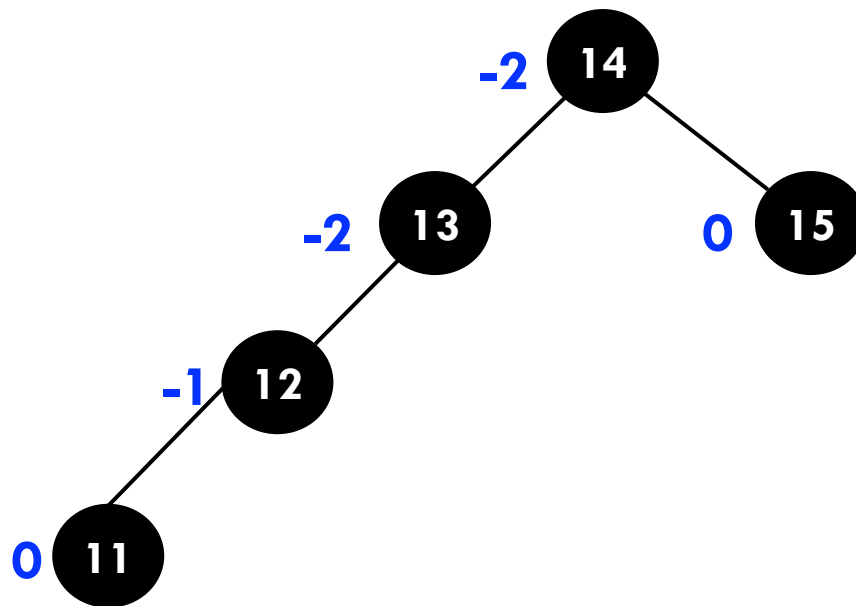
# Inserções em AVL

Sequência = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



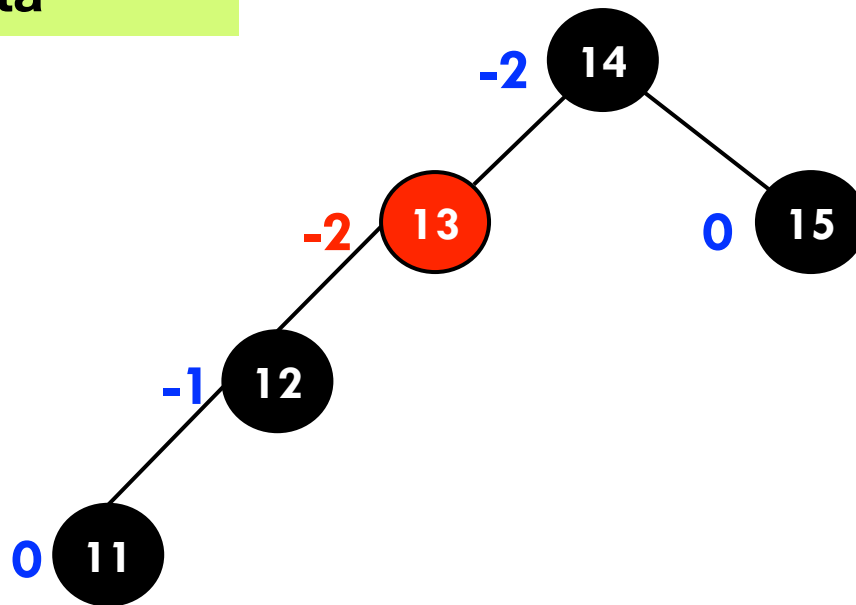
# Inserções em AVL

Sequência = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



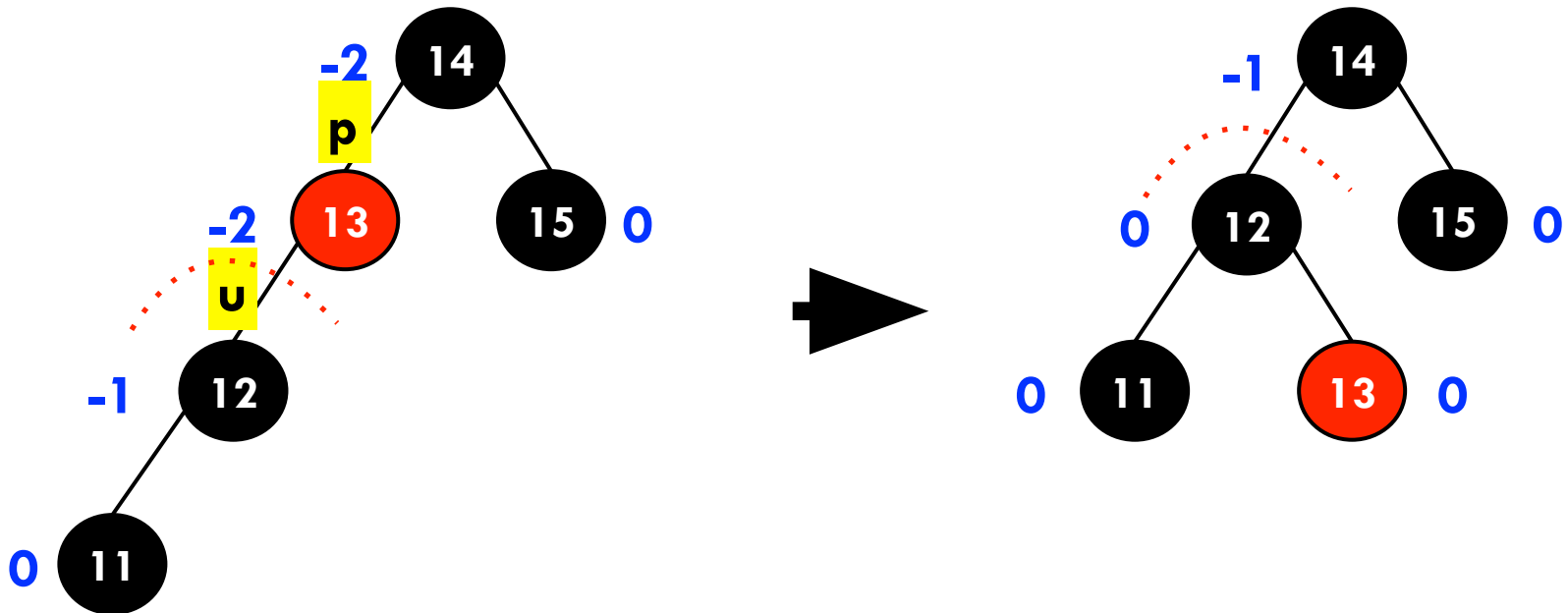
# Inserções em AVL

## 2) Rotação simples p direita



# Inserções em AVL

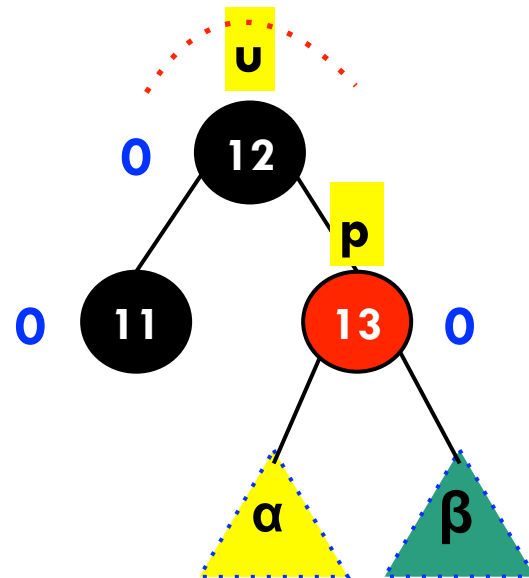
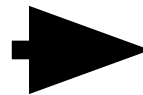
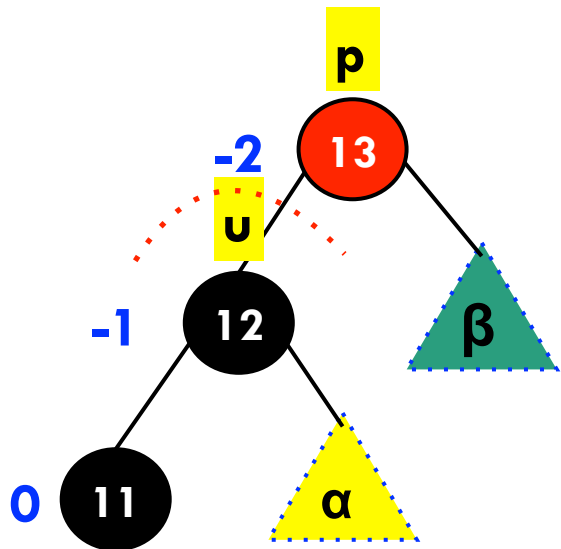
## 2) Rotação simples p direita





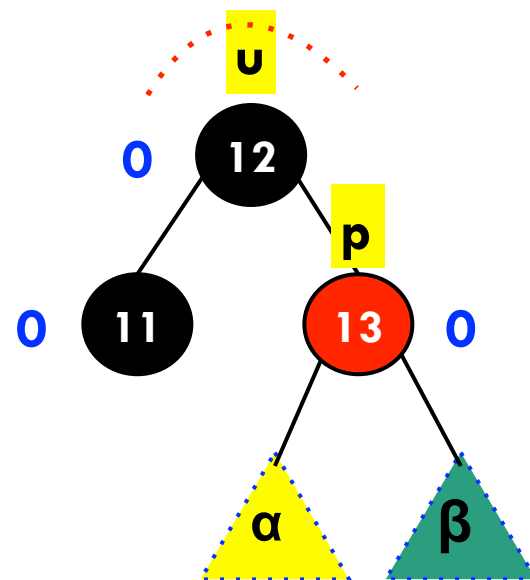
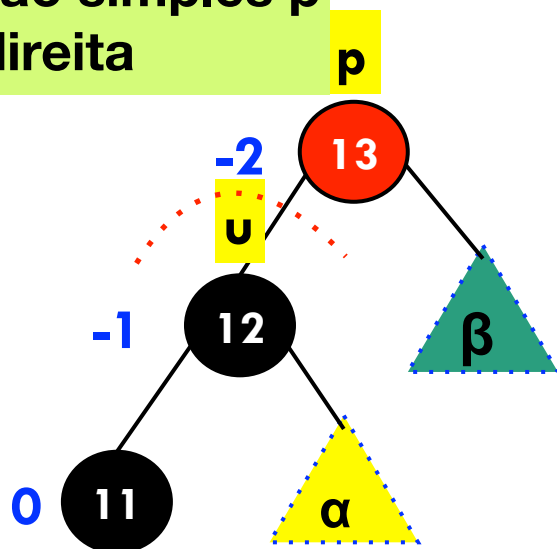
# Inserções em AVL

## 2) Rotação simples p direita



# Inserções em AVL

## 2) Rotação simples p direita

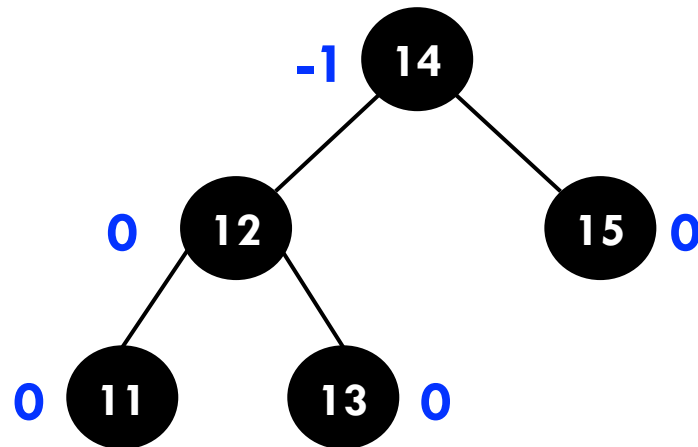


### Rotação simples p direita

1. `u = p->esquerda`
2. `p->esquerda = u->direita`
3. `u->direita = p`
4. `p->balance = 0`
5. `p = u`

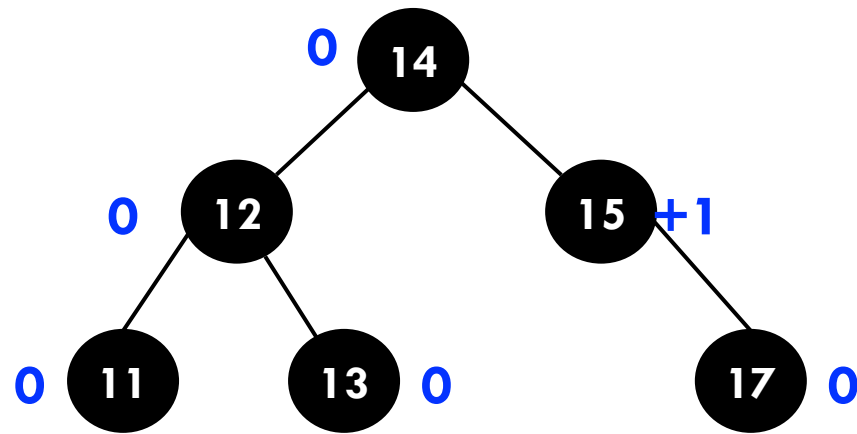
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



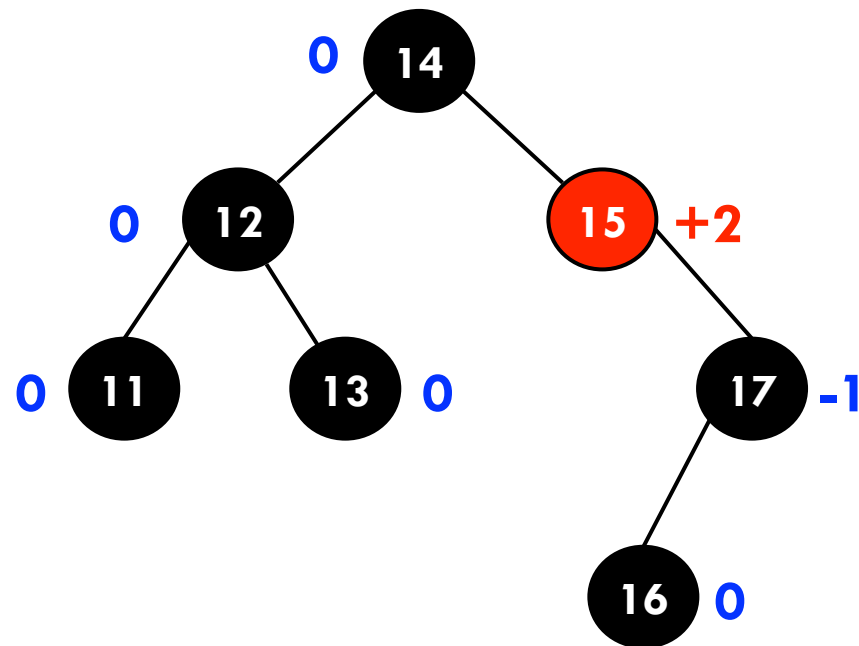
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}

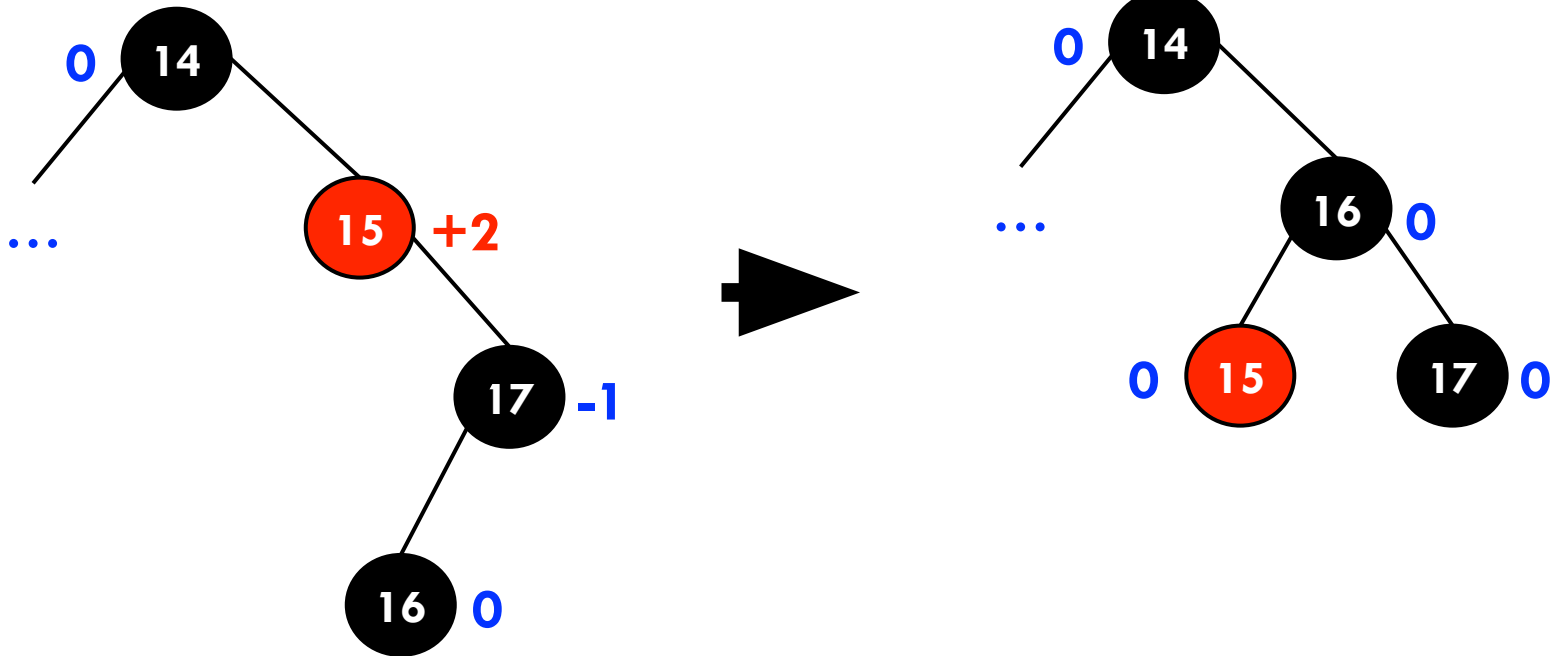


# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas**
- 4 Referências

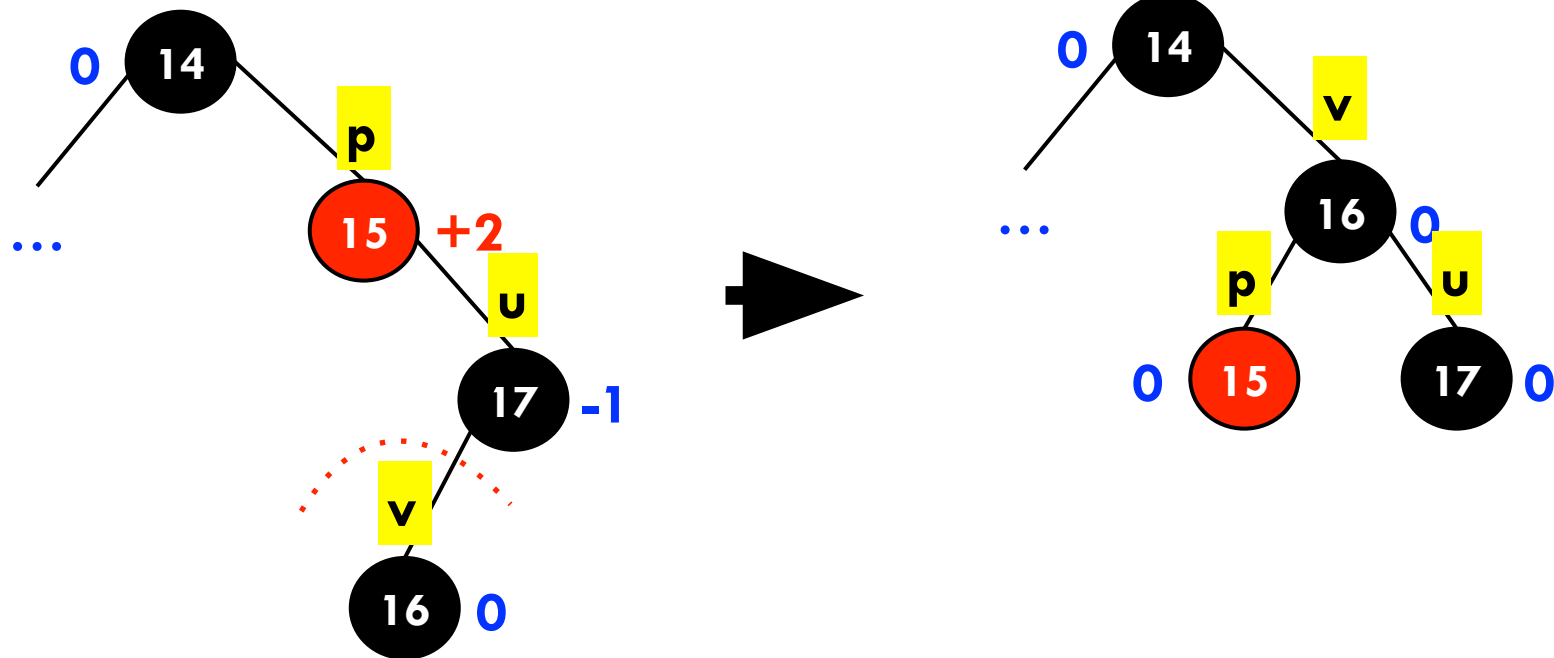
# Inserções em AVL

## 3) Rotação dupla p esquerda



# Inserções em AVL

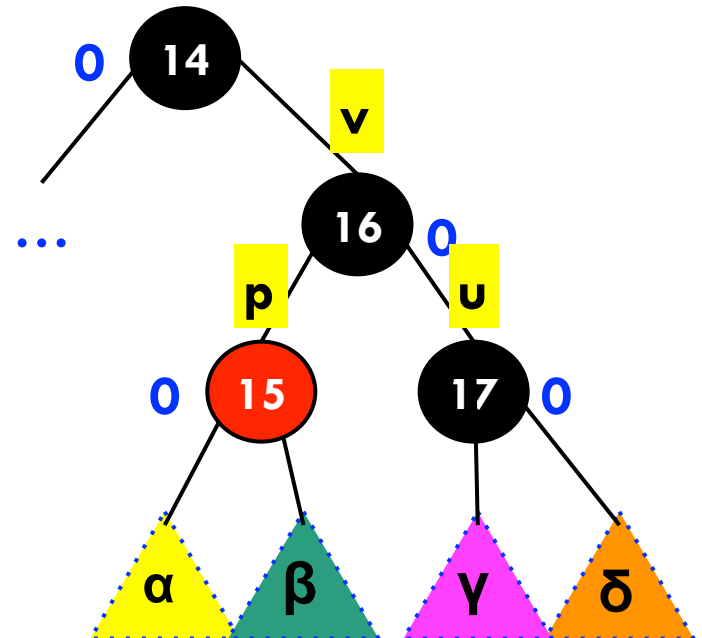
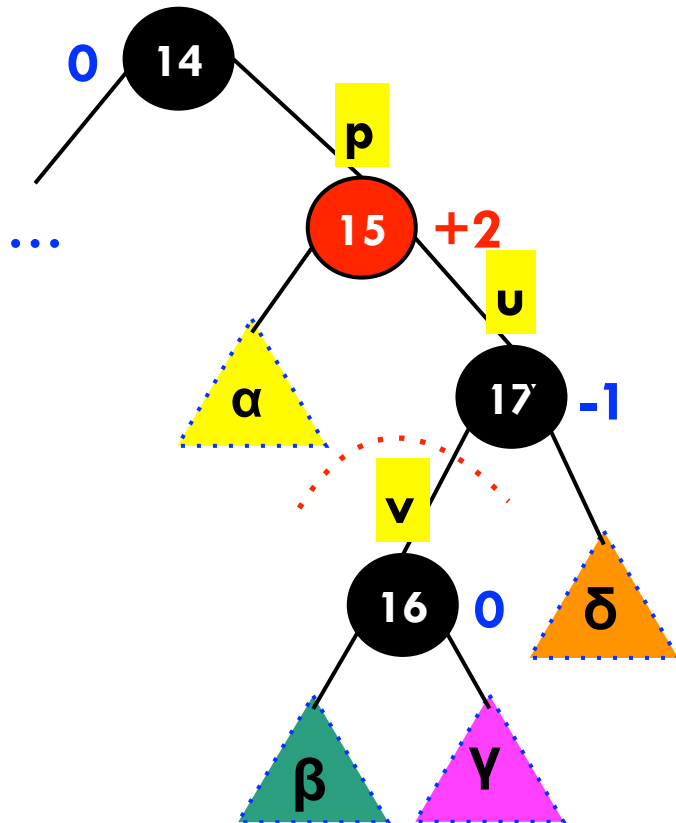
## 3) Rotação dupla p esquerda



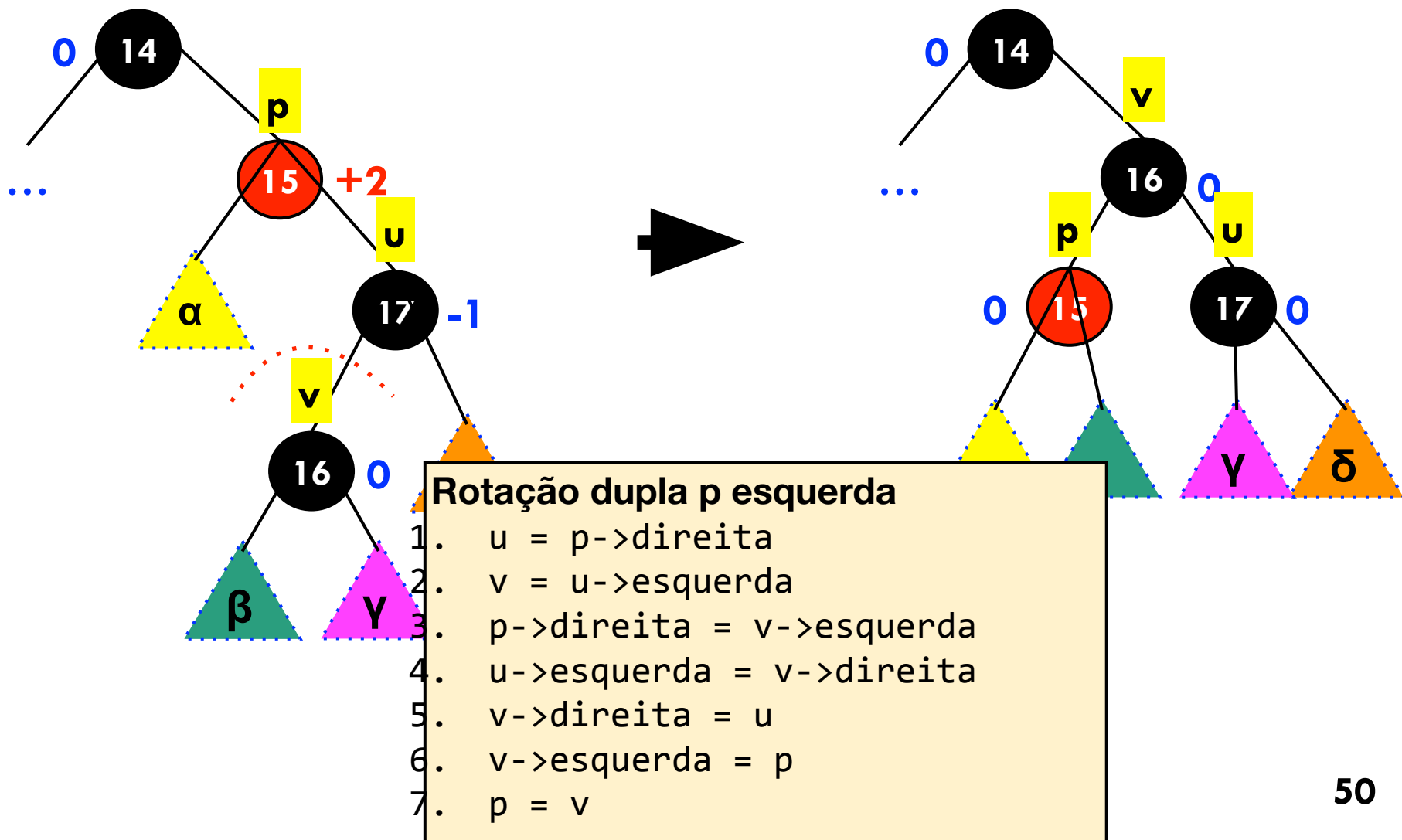


# Inserções em AVL

## 3) Rotação dupla p esquerda

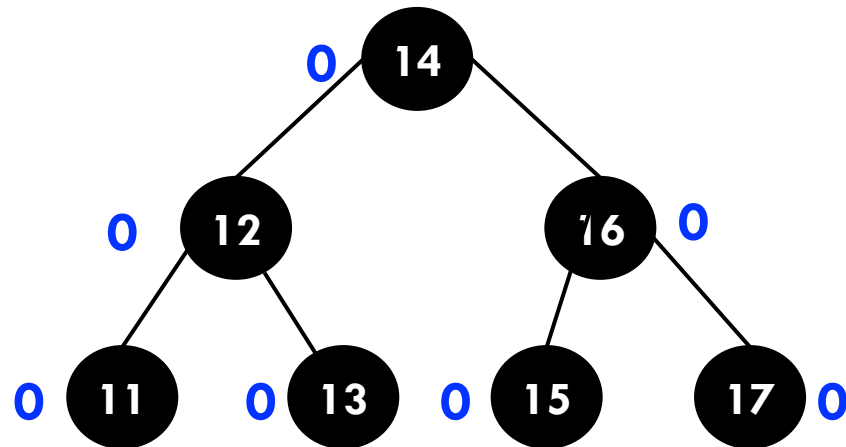


# Inserções em AVL



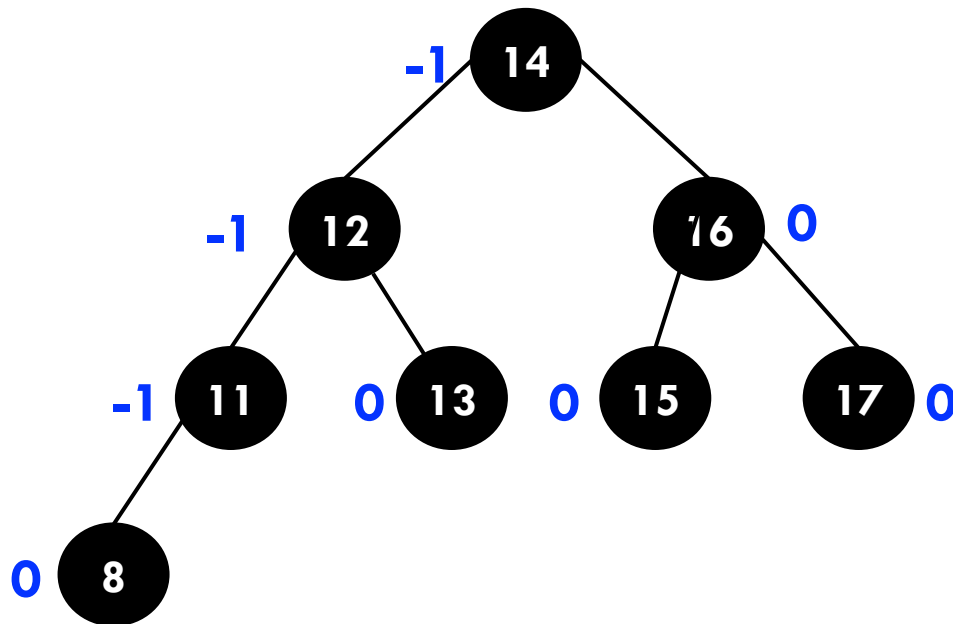
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



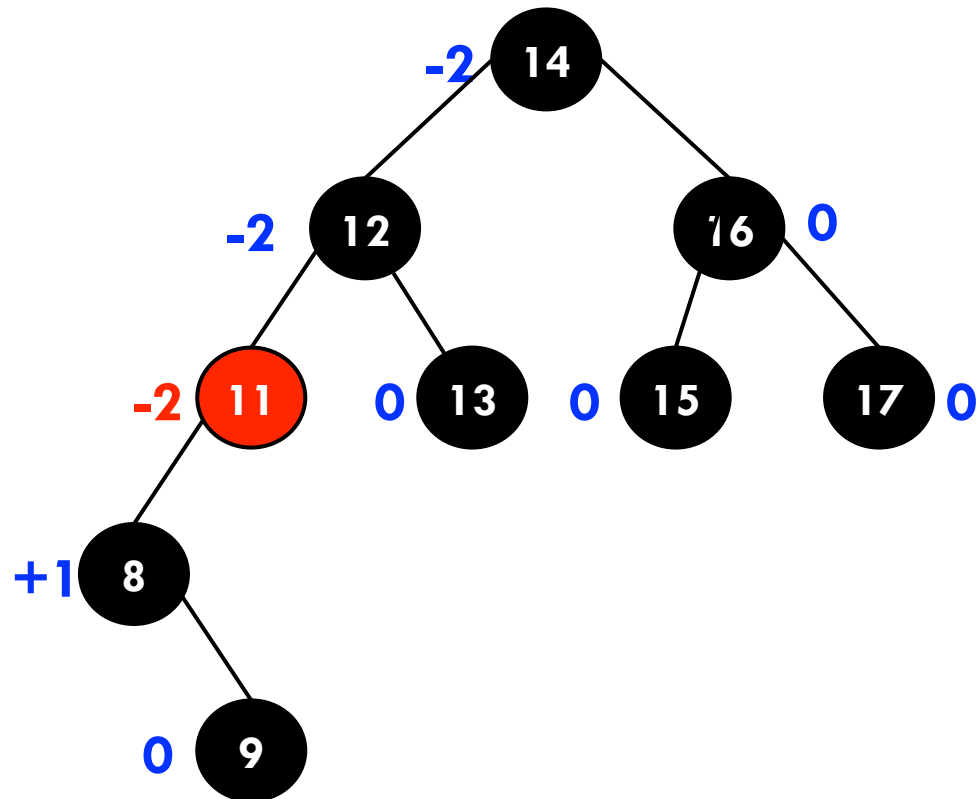
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



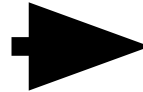
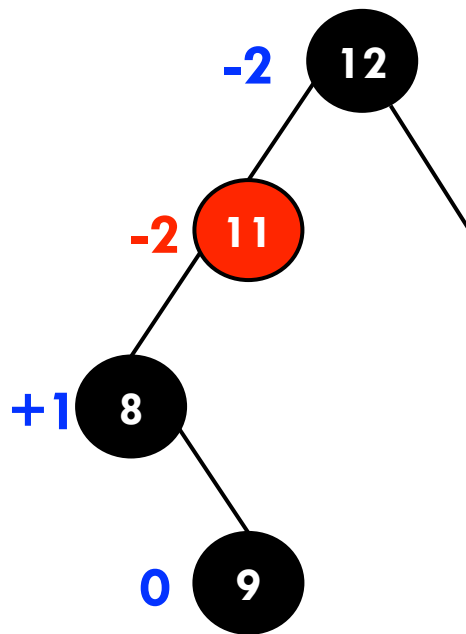
# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1}



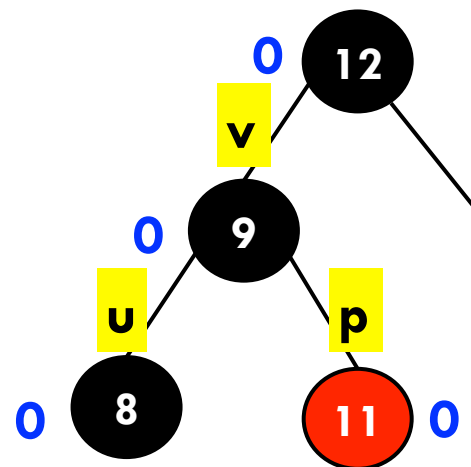
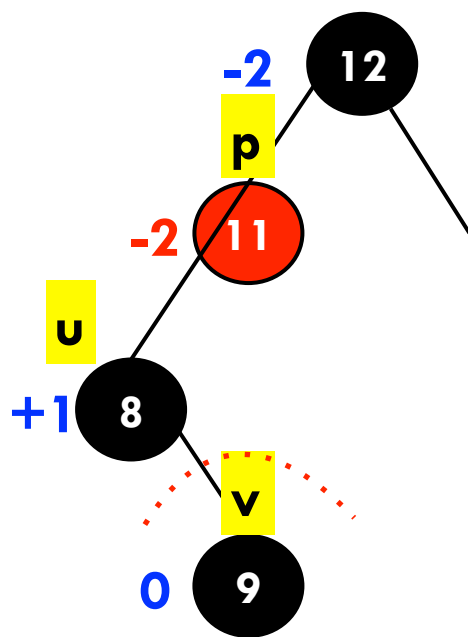
# Inserções em AVL

## 4) Rotação dupla p direita



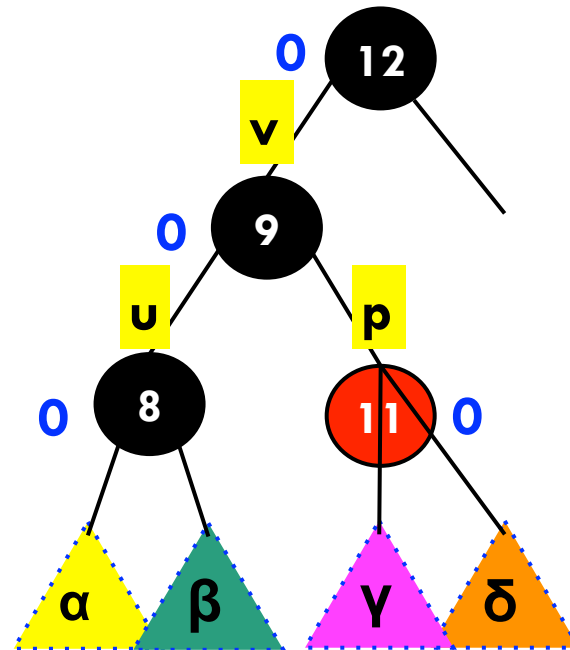
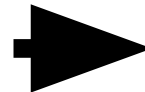
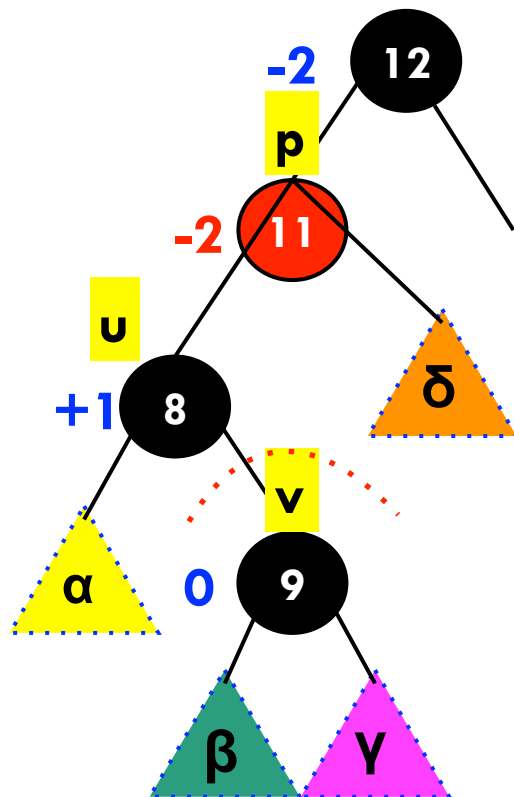
# Inserções em AVL

## 4) Rotação dupla p direita



# Inserções em AVL

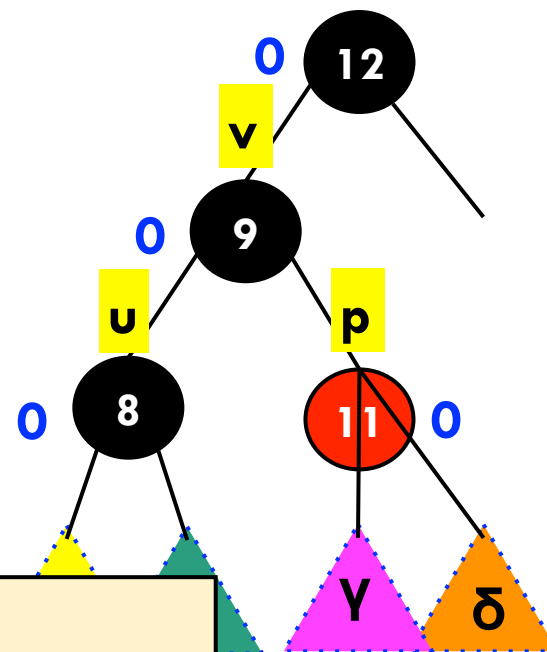
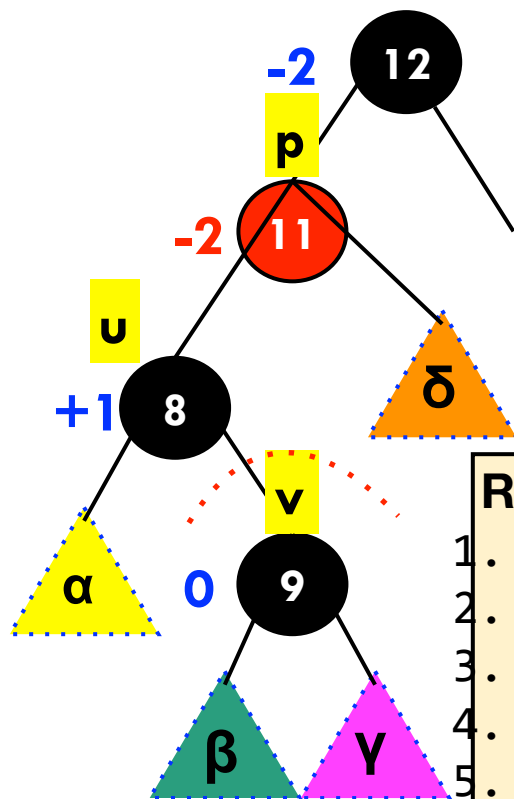
## 4) Rotação dupla p direita





# Inserções em AVL

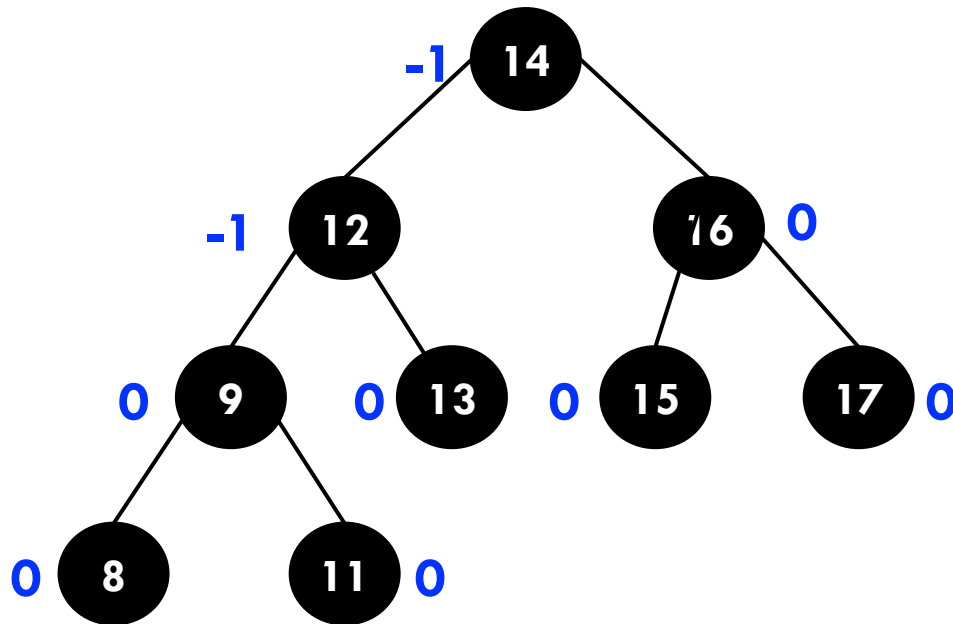
## 4) Rotação dupla p direita



### Rotação dupla p direita

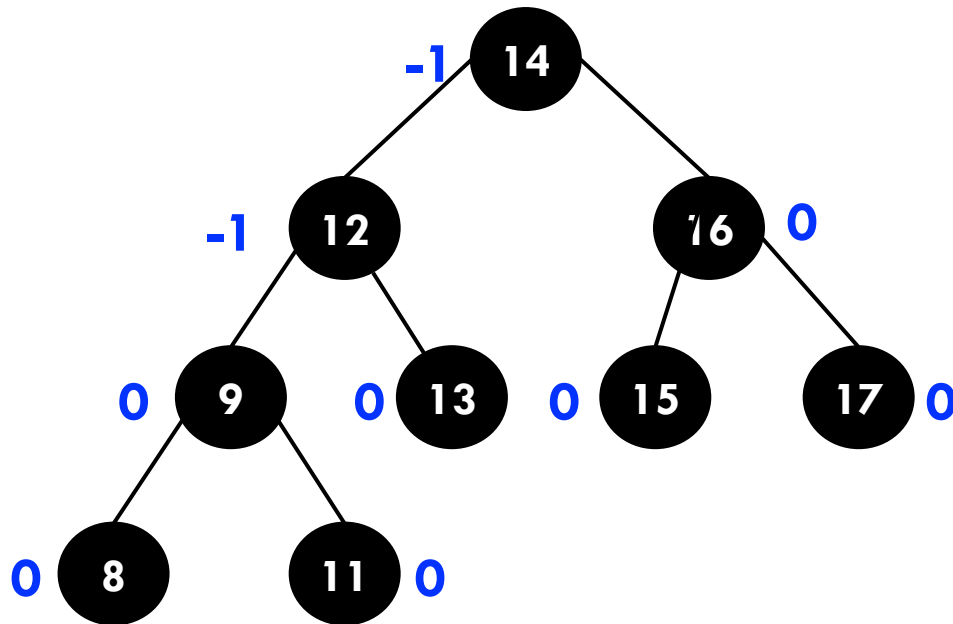
1.  $u = p \rightarrow \text{esquerda}$
2.  $v = u \rightarrow \text{direita}$
3.  $p \rightarrow \text{esquerda} = v \rightarrow \text{direita}$
4.  $u \rightarrow \text{direita} = v \rightarrow \text{esquerda}$
5.  $v \rightarrow \text{direita} = p$
6.  $v \rightarrow \text{esquerda} = u$
7.  $p = v$

# Inserções em AVL



# Inserções em AVL

Sequencia = {13, 14, 15, 12, 11, 17, 16, 8, 9, 1 ?}



# Exercício 02

- Desenhe os passos de inserção para árvores AVLs em cada uma das seguintes sequências de números. Lembre-se de indicar as todas rotações realizadas:
  - a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - b) 50, 25, 10, 5, 7, 3, 30, 20, 8, 15
  - c) 5 40 35 41 79 42 36 18 50 12

## Exercício 03

- Descreva em pseudocódigo um algoritmo para inserção em árvores AVL

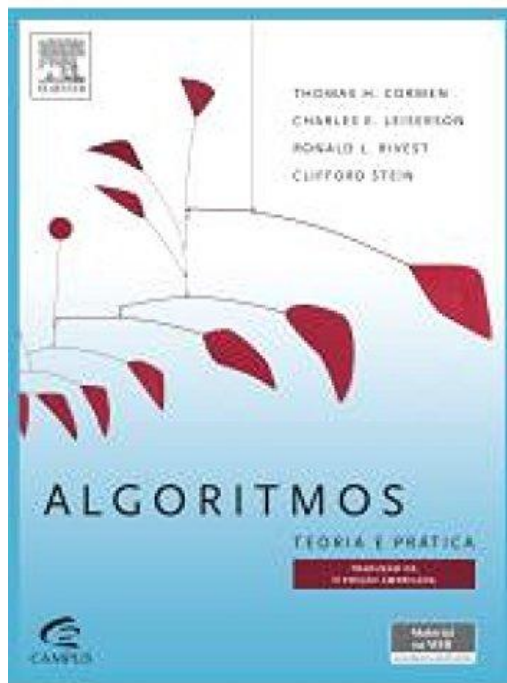
# Exercício 04

- Implemente o algoritmo para inserção em árvores AVL. Se necessário, implemente funções adicionais para auxiliar no processo.

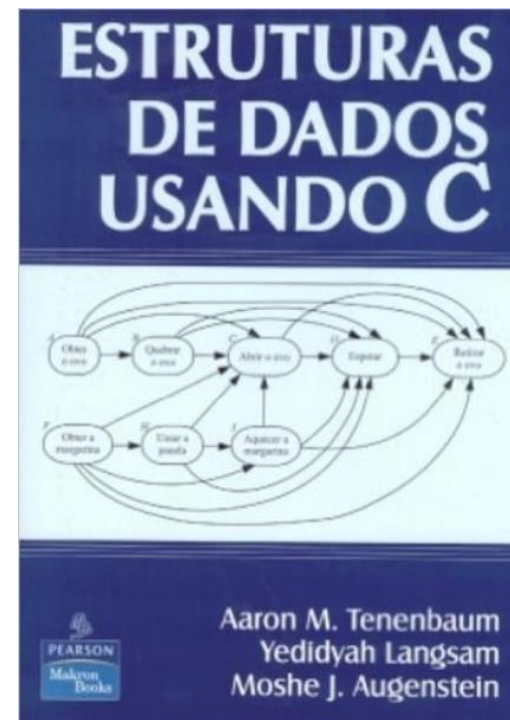
# Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores  
AVLs
- 3 Inserção em  
AVLs
  - A Rotações simples
  - B Rotações duplas
- 4 Referências

# Referências sugeridas



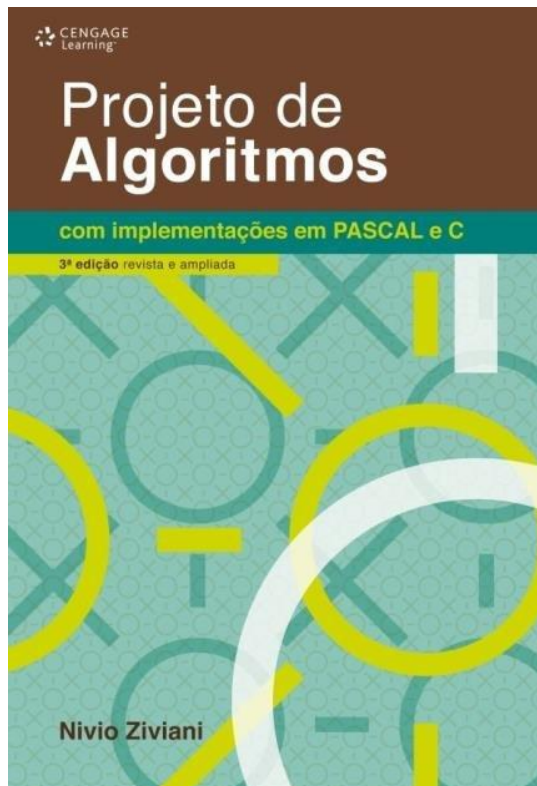
[Cormen et al, 2018]



[Tenenbaum et al, 1995]



# Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]



[Drozdek, 2017]



Perguntas?