

Aula 10: Autômato com Pilha

Prof. Lucio A. Rocha

Engenharia de Computação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR
Campus Apucarana, Brasil

2º semestre / 2023

Sumário

1 Autômato com Pilha

Seção 1

Autômato com Pilha

Autômato com Pilha

- Autômato com Pilha (AP): pertence à linguagens do Tipo 2.
- Reconhece palavras de uma GLC.
- AP é semelhante a um AFD, porém inclui uma pilha como memória auxiliar.
- Para toda GLC existe um AP que reconhece $L(G)$.
- Pilha independente da palavra de entrada.

Autômato com Pilha

- AP é não-determinístico: dada uma descrição instantânea da pilha, pode haver transição para um ou mais estados alcançáveis.
- A presença da palavra vazia ε nas transições também permite o não-determinismo.
- A pilha é suficiente como memória: não é necessário estados para memorizar informações passadas.

Autômato com Pilha

- O AP pode inserir (gravar) símbolos ou remover (ler) símbolos do topo da pilha.
- A pilha é uma lista do tipo FILO (First-Input, Last-Output).

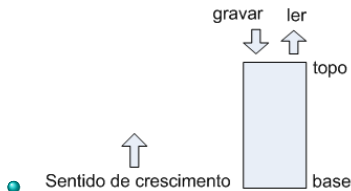


Figura: Pilha.

Autômato com Pilha

- Def.: Autômato com Pilha (AP, ou Pushdown Automata):

- $AP = (\Sigma, Q, V, \delta, q_0, F)$

- Σ : é o alfabeto de entrada.
 - Q : é o conjunto de estados.
 - V : é o alfabeto da pilha (inclui \$).
 - δ : Função de transição:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^{Q \times V^*}$$

- q_0 : é o estado inicial, $q_0 \in Q$
 - F : é o conjunto de estados finais, $F \subseteq Q$.

Autômato com Pilha

- $L_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

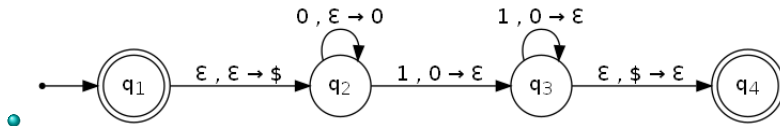


Figura: AP que reconhece palavras da linguagem L_1 .

Autômato com Pilha

- $\varepsilon, \varepsilon \rightarrow \$$: independente da entrada, independente do símbolo do topo da pilha, escreva (ação) \$ na pilha.
- $0, \varepsilon \rightarrow 0$: para o símbolo 0 da entrada, independente do símbolo do topo da pilha, escreva (ação) 0 na pilha.
- $1, 0 \rightarrow \varepsilon$: para o símbolo 1 da entrada, dado o símbolo 0 no topo da pilha, remova (ação) o símbolo do topo da pilha.
- $\varepsilon, \$ \rightarrow \varepsilon$: independente do símbolo de entrada, dado o símbolo \$ no topo da pilha, remova (ação) o símbolo do topo da pilha.

Autômato com Pilha

- Seja a palavra $w = 0011$. A derivação é como segue:

$$\begin{aligned}
 &\bullet \delta^*({q_1}, 0011 \mid P = \{\}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon), 0011 \mid P = \{\}) = \\
 &\quad \delta^*({q_2}, 0011 \mid P = \{\$ \}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_2, 0, \varepsilon), 011 \mid P = \{\$ \}) = \\
 &\quad \delta^*({q_2}, 011 \mid P = \{0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_2, 0, \varepsilon), 11 \mid P = \{0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*({q_2}, 11 \mid P = \{0, 0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_2, 1, 0), 1 \mid P = \{0, 0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*({q_3}, 1 \mid P = \{0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_3, 1, 0), \varepsilon \mid P = \{0, \$ \}) = \\
 &\quad \delta^*({q_3}, \varepsilon \mid P = \{\$ \}) = \\
 &\quad \delta^*(\delta(q_3, \varepsilon, \$), \varepsilon \mid P = \{\$ \}) = \\
 &\quad \delta^*({q_4}, \varepsilon \mid P = \{\}).
 \end{aligned}$$

- $q_4 \in F$, w lida por completo e $P = \{\}$. Então $w \in L_1$.

Autômato com Pilha

- $a, b \rightarrow c$: dado o símbolo a de entrada, substitua o símbolo b do topo da pilha por c .
- a, b e/ou c podem ser ε :
 - Se $a = \varepsilon$: AP pode fazer a transição sem ler a entrada.
 - Se $b = \varepsilon$: AP pode fazer a transição sem ler e sem desempilhar qualquer símbolo do topo da pilha.
 - Se $c = \varepsilon$: AP não insere nenhum símbolo na pilha.

Autômato com Pilha

- A descrição formal do AP não possui um mecanismo para testar se a pilha está vazia.
- O símbolo \$ é inserido para indicar o início e, após execuções de leitura/escrita de símbolos na pilha, o símbolo \$ é removido, para indicar o fim da pilha.

Autômato com Pilha

- $L_2 = \{ww^r \mid w \in \{0,1\}^*\}$

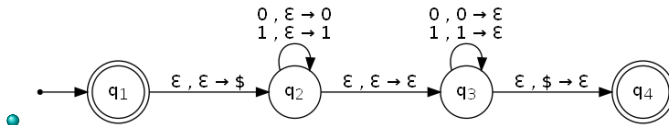


Figura: AP que reconhece palavras da linguagem L_2 .

Autômato com Pilha

- Seja a palavra $w = 0110$. A derivação é como segue:
- $$\begin{aligned} \delta^*({q_1}, |P = \{\}, 0110) &= \delta^*(\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) | P = \{\}, 0110) = \\ \delta^*({q_2} | P = \{\$, \}, 0110) &= \delta^*(\delta(q_2, 0, \$) | P = \{\$, \}, 110) = \\ \delta^*({q_2, q_3} | P = \{0, \$\}, 110) &= \delta^*(\delta(q_2, 1, 0) \cup \delta(q_3, 1, 0) | P = \{0, \$\}, 10) = \\ \delta^*({q_2, q_3} | P = \{1, 0, \$\} \cup \emptyset, 10) &= \delta^*(\delta(q_2, 1, 1) \cup \delta(q_3, 1, 1) | P = \\ \{1, 0, \$\}, 0) &= \\ \delta^*({q_2, q_3} | P = \{1, 1, 0, \$\} \cup \{q_3\} | P = \{0, \$\}, 0) &= \\ \delta^*(\delta(q_2, 0, 1) \cup \delta(q_3, 0, 1) | P = \{1, 1, 0, \$\} \cup \delta(q_3, 0, 0) | P = \{0, \$\}, \varepsilon) &= \\ \delta^*({q_2, q_3} \cup \emptyset | P = \{0, 1, 1, 0, \$\} \cup \{q_3\} | P = \{\$, \}, \varepsilon) &= \\ \delta^*(\delta(q_2, \varepsilon, 0) \cup \delta(q_3, \varepsilon, 0) \cup \delta(q_3, \varepsilon, \$) | P = \{\$, \}, \varepsilon) &= \\ \delta^*({q_3} | P = \{0, 1, 1, 0, \$\} \cup \emptyset \cup \{q_4\} | P = \{\}, \varepsilon) &= \\ \delta^*({q_4}, \varepsilon) &= \delta(q_4, \varepsilon) = q_4 \end{aligned}$$
- $q_4 \in F, P = \{\}$ e w lida por completo. Então, w é reconhecida.

Autômato com Pilha

- Revisão:

Linguagem	Reconhecedor	Gerador
Tipo 3	AFD ou AFN	Expressão Regular (ER)
Tipo 2	Autômato com Pilha (AP)	GLC

- Linguagem Regular é reconhecida por um autômato sem pilha.