Aula 1: Introdução

Prof. Lucio A. Rocha

Engenharia de Computação,
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR
Câmpus Apucarana, Brasil

2º semestre / 2023

Sumário

Seção 1

Introdução

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjuntos:
  - Um conjunto é uma coleção de elementos.
  - A ordem dos elementos não é considerada.
  - A repetição dos elementos não é considerada.
- Operações:
  - $\in, \notin$: indicam se o elemento pertence ou não ao conjunto.
  - $\subset, \not\subset$: indicam se o conjunto é ou não subconjunto do conjunto.

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjunto é uma coleção, sem repetição e sem ordenação de elementos.
- Elemento é um item unitário do conjunto (letra, símbolo, número, etc.).

Introdução e Conceitos Básicos

- Relações sobre Conjuntos:
  - Pertinência:
    $A = \{2, 3\}$
    $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
    $2 \in A$
    $5 \notin A$
  - Continência e subconjunto:
    $A \subseteq B$
    $B \supseteq A$
  - A é subconjunto de B.

Introdução e Conceitos Básicos

- Se $A \subseteq B$, mas existe $b \in B \mid b \notin A$, então A está contido parcialmente em B, ou A é subconjunto próprio de B.
- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C = \{5\}$

- $A \subset B$
- $B \supset A$

- $C \not\subseteq A$
- $A \not\supseteq C$

Introdução e Conceitos Básicos

- Igualdade de conjuntos.
  - $A = B$ se, se somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
- Conjunto vazio: é um conjunto sem elementos.
- Ex.: $A = \{\} = \emptyset$

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjuntos:
  - Números Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$
  - Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
  - Números Racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
    - Ex.: $\mathbb{Q} = \{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, ...\}$
  - Números Irracionais: números decimais não exatos, infinitos e não-periódicos
    - Ex.: 3,1415...; 2,34521...
  - Números Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjuntos:

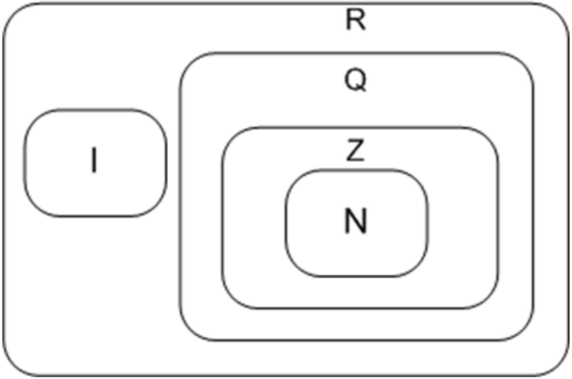

Figura: Conjuntos.

Introdução e Conceitos Básicos

- Operações sobre Conjuntos:
  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
  $B = \{3, 4, 5\}$
  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- União: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Intercessão: $A \cap B = \{3, 4\}$
- Diferença: $A - B = \{1, 2\}$
  $B - A = \{5\}$
- Complemento (com relação ao conjunto universo 'U')
  $\overline{A} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}$
  $\overline{A} = \{5\}$
  $\overline{B} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin B\}$
  $\overline{B} = \{1, 2\}$

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjunto das Partes:
  $B = \{3, 4, 5\}$
  $P(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$
  $P = 2^N$

- O conjunto vazio está presente em todo conjunto.

Introdução e Conceitos Básicos

- Conjunto das Partes:
  $A = \{1, 2, 3\}$
  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
  $|P(A)| = 2^3$

Introdução e Conceitos Básicos

- Produto Cartesiano:
  $A = \{1, 2, 3\}$
  $B = \{3, 4, 5\}$
  $C = \{6, 7\}$
  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

  $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5),$
  $(2, 3), (2, 4), (2, 5),$
  $(3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$
- Conjuntos disjuntos: $A \cap C = \emptyset$

Introdução e Conceitos Básicos

- Denotação: é a definição de um conjunto.
  - $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$
    - $A = \{2, 4, 6, ...\}$
  - $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é ímpar}\}$
    - $B = \{..., -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$
  - $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$
    - $C = \{1, 2, 3\}$
  - $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$
    - $D = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Introdução e Conceitos Básicos

- Propriedades sobre os conjuntos.
  - Idempotência:
    - $A \cup A = A$
    - $A \cap A = A$
  - Comutativa:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Associativa:
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Distributiva:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Introdução e Conceitos Básicos

- Duplo complemento:
  - $\overline{\overline{A}} = A$
- Lei DeMorgan:
  - $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Conjunto Universo e Conjunto Vazio:
  - $A \cup \overline{A} = U$
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- Elemento Neutro:
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap U = A$

Introdução e Conceitos Básicos

- Relação entre Conjuntos
  - Suponha A e B conjuntos. Uma relação binária (R) de A em B é um subconjunto do produto cartesiano AxB, i.e.,

    $R \subseteq AxB$

    A: é o domínio (origem) em R
    B: é o codomínio (destino) em R
    R: é o subconjunto de pares de elementos de A e B.

  - É o mesmo que: $R : A \rightarrow B$, tal que $(a, b) \in R = aRb$

Introdução e Conceitos Básicos

- Endorrelação
  - Suponha A um conjunto, tal que $R : A \to A$, (i.e., par com origem e destino no mesmo conjunto) é uma endorrelação.

    $R : A \to A = (A, R)$

Introdução e Conceitos Básicos

- Propriedades da Endorrelação: (Nota: nem toda endorrelação apresenta todas essas propriedades).
- Seja $R : A \rightarrow A$
  - Relação Conexa: $\forall a, b \in A, vale\ que\ (a, b) \in R$ ou $(b, a) \in R$ ou $a = b$
  - Relação Reflexiva: $\forall a \in A, vale\ que\ (a, a) \in R$
  - Relação Simétrica: $\forall a, b \in A$, caso $(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
  - Relação Antissimétrica:
    $\forall a, b \in A$, caso $(a, b) \in R$ E $(b, a) \in R$ então $a = b$
    - Antissimetria: indicação de que não é possível inverter a ordem dos elementos, exceto quando são iguais.
  - Relação transitiva:
    $\forall a, b, c \in A$, caso $(a, b) \in R$ E $(b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

Introdução e Conceitos Básicos

- Fecho de uma Relação:
- Seja $R : A \rightarrow A$ uma endorrelação e P o seu conjunto de propriedades.
  - Então o fecho de R em relação a P é a menor endorrelação em A que contém R e que satisfaz as propriedades de P.

    $FECHO\_P(R)$

  - Ou seja, para qualquer conjunto de propriedades considerado em $R : A \rightarrow A$, a relação será sempre subconjunto do seu fecho:

    $R \subseteq FECHO\_P(R)$

Introdução e Conceitos Básicos

- Fecho Transitivo (R^+):
  - Se $(a, b) \in R$ então $(a, b) \in R^+$
  - Se $(a, b) \in R^+$ e $(b, c) \in R^+$ então $(a, c) \in R^+$
  - Os únicos elementos de R^+ são os construídos como acima.
- Fecho transitivo e reflexivo:
  - $R^* = R^+ \cup \{(a, a) | a \in A\}$

Introdução e Conceitos Básicos

- Exemplo: um grafo é uma endorrelação (combinação de elementos do mesmo conjunto). Também, o fecho transitivo e reflexivo respeitam as propriedades da endorrelação.
- Fecho transitivo: é o conjunto mínimo de caminhos entre 2 nós.
- G: conjunto de arestas orientadas.
- V: vértices.
  - $G = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,5)\}$
  - $V = \{1,2,3,4,5\}$
- Fecho transitivo:
  - $A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
- Fecho reflexivo:
  - $B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
- Fecho transitivo e reflexivo:
  - $A^* = A \cup B = \{(1,2),(1,3),(1,4),$
    $(1,5),(2,3),(2,4),(3,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

Introdução e Conceitos Básicos

- Função Parcial
  - Uma função parcial é uma relação $f \subseteq AxB$ tal que:
    se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$, então $b = c$
- Ou seja, uma função parcial é uma relação na qual cada elemento do Domínio está relacionado a um <u>único</u> elemento do Codomínio.
- A função parcial é denotada por:
  $f : A \rightarrow B$
  $(a, b) \in f \ \rightarrow f(a) = b \mid a \in A$ e $b \in B$

Introdução e Conceitos Básicos

- Imagem
  - Seja $f: A \to B$ uma função parcial. Então:
    1. Se, para $a \in A$, existe $b \in B \mid f(a) = b$, ou seja, f está definida para a, e b é a imagem de a.
    2. O conjunto imagem de f, denotado por $f(a)$ ou $Img(f)$ é tal que:

$$f(a) = Img(f) = \{b \in B \mid \text{ existe } a \in A \mid f(a) = b\}$$

Introdução e Conceitos Básicos

- Composição de Funções Parciais
  - Sejam
    $f : A \to B$ e
    $g : B \to C$ funções parciais.
    A composição de f e g é a função $g \circ f : A \to C \mid \forall a \in A$:
    - $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, se
      $f(a)$ e
      $g(f(a))$ são definidas.
    - Caso contrário, $(g \circ f)(a)$ é indefinida.

Introdução e Conceitos Básicos

- Função Total
  - Função total (ou função), é um tipo de função parcial.
  - Def.: Função é uma função parcial, tal que:
    $\forall a \in A \ \exists \ b \in B \mid f(a) = b$

Introdução e Conceitos Básicos

- Tipos de função:
  - $f : A \to B$ é injetora se, $\forall b \in B$, $\exists$ no máximo um $a \in A \mid f(a) = b$
  - $f : A \to B$ é sobrejetora se, $\forall b \in B$, $\exists$ no mínimo um $a \in A \mid f(a) = b$
  - $f : A \to B$ é bijetora se f é injetora e sobrejetora.
- Função injetora: se $\forall b \in B$ do codomínio é imagem de no máximo um elemento do domínio.
- Função sobrejetora: se $\forall b \in B$ do codomínio é imagem de no mínimo um elemento do domínio.

Introdução e Conceitos Básicos

- Noções de Lógica:
  - Lógica Booleana: distinguir sentenças em Verdadeiro (True) ou Falso (False).
  - Proposição: construição lógica que se pode atribuir Verdadeiro ou Falso.
    - p(x): é uma proposição sobre $x \in U \mid U$ é o conjunto universo das proposições consideradas.
    - Toda proposição de p sobre U induz uma partição:
      $A = \{x \mid p(x)V\}$ = conjunto verdade
      $B = \{x \mid p(x)F\}$ = conjunto falsidade

Introdução e Conceitos Básicos

- Tautologia:
  - Seja p uma proposição sobre U. Então:
    - p: é uma tautologia se $p(x) = V$ para $\forall x \in U$
    - p: é uma contradição se $p(x) = F$ para $\forall x \in U$

Introdução e Conceitos Básicos

- Operadores Lógicos:
  - $\neg P$
  - $P \wedge Q$ (Conjunção)
  - $P \vee Q$ (Disjunção)
  - $P \rightarrow Q$ (Condição)
- Fórmula Lógica: é um conjunto de proposições conectadas por operadores lógicos.