《 数理统计 》测试卷

一、 填空题

1．设随机变量 $X \sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ ____0.2____.

2．设随机变量 (X,Y) 的概率密度为： $f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & others \end{cases}$，则随机变量 $Z=XY$ 的概率密度为 $f_Z(z)=$ $\underline{f_Z(z)=\begin{cases} e^{-z}, & z>0 \\ 0, & others \end{cases}}$.

3．设 X_1,X_2,X_3, X_4,X_5 是总体 $X\sim N(0,1)$ 的样本，为使 $Y=\dfrac{c(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}\sim t(3)$，则常数 $c=\underline{\sqrt{3/2}}$.

4．设 X 、Y 是两个随机变量，且 $D(X)=1, D(Y)=4, \mathrm{cov}(X,Y)=1$，记 $X_1=X-2Y$，$X_2=2X-Y$，则 X_1 与 X_2 的相关系数 $=\underline{\dfrac{5\sqrt{13}}{26}}$.

5．设某产品质量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今从中随机抽取 **9** 个样本，测定样本均值 $\bar{x}=20.30$，样本方差 $s^2=0.0325$，则在置信度 95% 下，参数 μ 的置信区间（计算结果保留 2 位小数）为 **_（20.16, 20.44）_**.

二、设二维连续型随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} Ax^2y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$

（1）求常数 A； **（2）**求概率 $P\{X+2Y\le 1\}$；**（3）X** 与 **Y** 是否独立？

解 （1） 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\,dx = A\int_0^1 x^2dx\int_0^1 ydy = \frac{1}{6}A$， $\therefore$ $A=6$

（2） $P\{X+2Y\le 1\}=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} 6x^2 y dy=\frac{3}{4}\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)dx=\frac{1}{40}$

（3） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}0 & x\le 0 或 x\ge 1\\ \int_0^1 6x^2 y dy=3x^2, & 0<x<1\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}0 & ,\quad y\le 0 \; or \; y>1\\ \int_0^1 6x^2 y dx=2y & 0<y<1\end{cases}$$

即 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 **X** 与 **Y** 独立

三、设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta\cdot x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & others\end{cases}$ $(\theta>0)$，

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$；　　　　（2）求 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

解 （1） $\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)dx=\int_0^1 \theta\cdot x^{\theta-1}dx=\frac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}\Rightarrow \hat{\theta}_1=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$，

（2） $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$， $0<x_i<1$，

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i ,\quad \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

解得 $\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，因此 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

四、 将一颗骰子掷 **600** 次，所得数据如下表所示：

点数 ***i***	1	2	3	4	5	6
出现次数 f_i	85	75	90	115	110	125

问：这颗骰子是否均匀、对称？（显著性水平 $\alpha=0.05$）.

解 由题意，要检验假设

$$H_0: P_i = P\{X=k\} = \frac{1}{6},\ \ k=1,2,\cdots,6$$

检验统计量： $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i}$ ，

拒绝域： $W = \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)\} = \{\chi^2 \ge \chi^2_{0.95}(5)\} = \{\chi^2 \ge 11.071\}$

列表计算如下

$X=i$	f_i	p_i	np_i	$f-np_i$	$\frac{(f-np_i)^2}{np_i}$
1	**85**	1/6	**100**	−15	**2.25**
2	**75**	1/6	**100**	−25	**6.25**
3	**90**	1/6	**100**	−10	**1.00**
4	**115**	1/6	**100**	**15**	**2.25**
5	**110**	1/6	**100**	**10**	**1.00**
6	**125**	1/6	**100**	**25**	**6.25**
$\sum$					**19**

$\chi^2 = 19 > 11.071$， $\chi^2 \in W$ ，**拒绝原假设，即认为这颗骰子不是均匀、对称的。**

四、在 1500--1931 的 432 年间，世界上每年爆发战争的次数 X 可以看做是一个随机变量，据历史资料统计，这 432 年间共爆发了 299 战争，具体数据见下表

战争次数 X	0	1	2	3	4
发生 X 次战争的年数	223	142	48	15	4

根据上述数据，问每年爆发战争的次数 X 是否服从泊松分布（$\alpha = 0.05$）？

解 设统计假设为 H_0：X 服从参数为 λ 的泊松分布，即

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}, k=0,1,2,\cdots$$

此时，检验统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(K-r-1),$$

拒绝域为：

$$W=\{\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(K-r-1)\},$$

其中 r 为总体分布中待估参数的个数.

因总体分布中含有 1 个未知参数 λ，应先估计参数 λ. 由极大似然估计法得参数 λ 的极大似然估计值为：$\hat{\lambda}=\bar{x}=0.69$.

按参数为 $\hat{\lambda}=0.69$ 的泊松分布，计算事件 $\{X=k\}$ 的概率 p_k，得

战争次数 X	f_k	p_k	np_k	f_k-np_k	（f_k-np_k）^{2}/ np_k
0	223	0. 58	216. 7	6. 3	0. 183
1	142	0. 31	149. 5	-7. 5	0. 376
2	48	0. 18	51. 6	-3. 6	0. 251
3	15	0. 01	12. 0	14. 16	1. 623
4	4	0. 02	2. 16		
$\sum$	432				2. 433

将 np_k<4 的组予以相邻合并，即将发生次数 3 次及 4 次战争的组合并为一组，计算得上表.

又查表得 $\chi_{0.95}^2(2)=5.991$，故拒绝域为：

$$W=\{\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(K-r-1)\}=\{\chi^2 \geq 5.991\},$$

而检验统计量的值为

$$\chi^2=2.443<5.991，即\ \chi^2 \notin W.$$

从而接受原假设，即认为每年爆发战争的次数 X 是否服从参数为 0. 69 的泊松分布.

五、 炼铝厂测得所产铸模用的硬度 x 与抗张强度 y 的数据如下表所示：

铝的硬度 x	51	53	60	64	68	70	71	72	83	84
抗张强度 y	283	293	290	286	288	340	348	354	324	343

（1） 试建立 y 关于 x 的线性回归方程，并求误差方差的估计 $\hat{\sigma}^2$；

（2） 试用 F 检验法检验回归方程的显著性（取 $\alpha=0.05$）。

解（1）首先计算样本均值：$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=67.6,\ \bar{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=314.9$，

再计算离差平方和：$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=1102.4,\ l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=2077.6$

回归系数 $\hat{\beta}_1=l_{xy}/l_{xx}\approx 1.8846,\ \hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}\approx 187.5$

从而得到回归方程 $\hat{y}=187.5+1.8846x$

又 $l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=7802.9$，$S_E^2=S_T^2-S_R^2=l_{yy}-\hat{\beta}_1 l_{xy}=3887.5$，

$$\hat{\sigma}^2=\frac{S_E^2}{n-2}=\frac{3887.5}{8}=485.94$$

（2）用 F 检验法，取显著水平 $\alpha=0.05$，检验统计量 $F=\frac{\hat{\beta}^2 l_{xx}}{\hat{\sigma}^2}$

拒绝域 $K_0=\{F>F_{1-\alpha}(1,n-2)\}=\{F>F_{0.95}(1,8)=5.32\}$，

而 $f=8.057>5.32$，

故拒绝 H_0，即认为回归方程显著。

二、 长征系列某一类火箭用 A_1、A_2、A_3、A_4 这 4 种燃料，B_1、B_2、B_3 这 3 种推进器做射程试验。每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭 2 次，得射程数据如下表所列：

推进器 \ 燃料	B_1	B_2	B_3
A_1	**52.6，58.3**	**41.2，56.3**	**60.8，65.2**
A_2	**49.1，42.8**	**50.5，54.1**	**51.6，48.6**
A_3	**58.3，60.3**	**73.2，70.8**	**40.7，39.3**
A_4	**75.8，71.6**	**58.2，52.3**	**48.7，42.3**

试问推进器和燃料及两者的交互作用对射程有无显著的影响？（显著性水平 $\alpha=0.05$）.

解 本题中视燃料为因素 A，推进器为因素 B，则

$$r=4,\ s=3,\ t=2,\ \overline{X}_{ij\bullet}=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}(i=1,2,\cdots,r,\ j=1,2,\cdots,s)$$

$$\overline{X}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{st}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}(i=1,2,\cdots,r),\ \overline{X}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{rt}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}(j=1,2,\cdots,s)\ ,$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X^2_{ijk}-rst\overline{X}^2=2600.96\ ,\quad S_A=st\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_{i\bullet\bullet}-\overline{X})^2=273.76$$

$$S_B=st\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X})^2=366.82,\ S_{A\times B}=t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\overline{X}_{ij\bullet}-\overline{X}_{\bullet j\bullet}-\overline{X}_{i\bullet\bullet}+\overline{X})^2=1737.06$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B}=223.32$$

查表得 $F_{0.95}(3,12)=3.49,\ \ F_{0.95}(2,12)=3.89,\ \ F_{0.95}(6,12)=3.00$，

方差分析表：

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值	F 临界值
因素 A（燃料）	273.755	3	91.252	4.903	3.490
因素 B（推进器）	366.823	2	183.412	9.856	3.885
交互作用 $A\times B$	1737.06	6	289.510	15.557	2.996
误差	223.32	12	18.610		
总计	2600.958	23			

由于 $$F_A=\frac{S_A/(r-1)}{Se/(rs(t-1))}=4.90>F_{0.95}(3,12)=3.49\ ,$$

$$F_B=\frac{S_B/(s-1)}{Se/(rs(t-1))}=9.86>F_{0.95}(2,12)=3.89\ ,$$

$$F_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}/((r-1)(s-1))}{Se/(rs(t-1))}=15.56>F_{0.95}(6,12)=3.00$$

因此，不同燃料下的射程有显著影响，不同推进器下的射程有显著影响，推进器与温燃料之间的交互作用效应是显著的。

三、（本题 **12** 分）某试验被考察的因素有三个：A，B，C，每个因素有三个水平，不考虑交互作用，选用正交表 $L_9(3^4)$ 安排试验，试验结果如下

列号 / 试验号	1 A	2 B	3 C	4 空列	指标值
1	1	1	1	1	42
2	1	2	2	2	65

3	**1**	**3**	**3**	**3**	**49**
4	**2**	**1**	**2**	**3**	**64**
5	**2**	**2**	**3**	**1**	**60**
6	**2**	**3**	**1**	**2**	**53**
7	**3**	**1**	**3**	**2**	**68**
8	**3**	**2**	**1**	**3**	**73**
9	**3**	**3**	**2**	**1**	**75**

（1）试进行极差分析，给出满意的水平搭配（选望大指标）；

（2）试进行方差分析，并给出方差分析表$(\alpha=0.05)$；

（3）对以上两钟分析结果进行比较.

解 由已知， $p=9, n=3, r=\dfrac{p}{n}=3, R_j=\max\limits_i T_{ij}-\min\limits_i T_{ij}, T=\sum\limits_i T_{ij}, S_j=\dfrac{1}{r}\sum\limits_{i=1}^{3}T_{ij}^2-\dfrac{T^2}{p}$

经计算得下表

	A	B	C	空列
T_{1j}	156	174	168	177
T_{2j}	177	198	204	186
T_{3j}	216	177	177	186
R_j	60	24	36	9
S_j	618	114	234	18

（1）极差分析：

$$\text{主}\rightarrow\text{次}$$
$$A\quad C\quad B$$

较好的因素水平搭配为 $A_3C_2B_2$

（2）方差分析表：

方差来源	平方和 S_j	自由度 f_j	S_j/f_j	$F_j=\dfrac{S_j/f_j}{S_e/f_e}$	显著性
A	618	2	309	34.3	*
B	114	2	57	6.33	不显著
C	234	2	117	13	*
e	18	2	9		

查表得 $F_{0.9}(2,2)=9.0$， $F_{0.95}(2,2)=19$， $F_{0.99}(2,2)=99$，因此因素 A, C 作用显著，而因素 B 作用不显著。

（3） 对比极差分析与方差分析的结果是一致的。