Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 7

29 de septiembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

Relación Binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados que establece una conexión o asociación entre elementos de dos conjuntos distintos.

R es una relación binaria entre A y B si $R \subseteq A \times B$.

Propiedades de una Relación Binaria

Refleja

Una relación R es refleja si para todo elemento x en el conjunto, el par (x, x) está en R.

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irrefleja

Una relación R es irrefleja si ningún par (x, x) está en R para cualquier x en el conjunto.

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Simétrica

Una relación R es simétrica si para cada par (x, y) en R, también está presente el par (y, x).

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

Antisimétrica

Una relación R es antisimétrica si para cualquier par (x, y) en R, si $x \neq y$, entonces el par (y, x) no está en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge x \neq y \rightarrow (y, x) \notin R$$

Transitiva

Una relación R es transitiva si para cada par (x, y) y (y, z) en R, el par (x, z) también está en R.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

Conexidad

Una relación R es conexa si para cada par de elementos x,y podemos encontar a (x, y) en R, o a (y, x) en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$$

Relación de Equivalencia

Una relación de equivalencia es una relación binaria que cumple **reflexividad**, **simetría** y **transitividad**.

A la relación se le denota como $x \sim y$.

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial, y sean $S \subseteq A, x \in A$.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior. Análogamente se define el supremo de un conjunto.

Ejercicio 1 | Relación de equivalencia

Muestre que la relación en $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \sim (x, y)$ si y solo si

$$|\langle (a, b), (x, y) \rangle| = \|(a, b)\| \|(x, y)\|$$

es una relación de equivalencia.
Nota: $\langle (a, b), (x, y) \rangle$ corresponde al producto punto de (a, b) y (x, y) en $\mathbb{R}^2$ y $\|(a, b)\|$ corresponde a la norma euclideana de (a, b) en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2 | (I2-2019)

Diremos que una relacion R sobre un conjunto A es circular si

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow zRx)$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia si y sólo si es refleja y circular.

Ejercicio 3 | Ordenes parciales

Sea A un conjunto no vacío cualquiera. Considere el conjunto:

$$R = \{R \subseteq A \times A\}$$

En otras palabras, R es el conjunto de todas las relaciones binarias en A. Ahora considere la siguiente relación $\preceq \subseteq R \times R$: para todo $R, S \in R$, se tiene que $R \preceq S$ si, y solo si, existe $T \in R$ tal que $R \circ T = S$.

1. ¿Es $(R, \preceq)$ un orden parcial? Demuestre su afirmación.

2. ¿Es $\preceq$ una relación conexa? Demuestre su afirmación.

Ejercicio 4 | Elemento mínimo

Encuentre los elementos mínimos de los siguientes conjuntos ordenados:

1. $(S_1, \preceq_1)$, donde S_1 es el conjunto de números naturales, y $a \preceq_1 b$ si a es menor o igual que b.
2. $(S_2, \preceq_2)$, donde S_2 es el conjunto de pares ordenados de números naturales, y $(a, b) \preceq_3 (c, d)$ si a es menor o igual que c y b es menor o igual que d.
3. $(S_3, \preceq_3)$, donde S_3 es el conjunto de los números enteros positivos, y $a \preceq_3 b$ si a es divisor de b.
4. $(S_4, \preceq_4)$, donde S_4 es el conjunto de pares ordenados de números enteros positivos, y $(a, b) \preceq_4 (c, d)$ si a divide a c y b divide a d.
5. $(S_5, \preceq_5)$, donde S_5 es el conjunto de pares ordenados $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{\not\vDash} \mid 1 \leq a^2 + b^2\}$, y $(x_1, y_1) \preceq_5 (x_2, y_2)$ si $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

Ejercicio 5 | Máximo y mínimo

Se define el MEX (Minimum Excluded Value) de un conjunto S en un orden total $(A, \preceq)$ como el menor elemento en A que no pertenece a S. Formalmente, el MEX de S se define como:

$$\text{MEX}(S) = \text{mín}\{a \in A \mid a \notin S\}$$

1. Demuestra que el MEX de la unión de dos conjuntos A y B es "mayor o igual.ªl máximo entre el MEX de A y el MEX de B. Es decir, demuestra que:

   $$\text{máx}(\text{MEX}(A), \text{MEX}(B)) \preceq \text{MEX}(A \cup B)$$

   Y dé un ejemplo donde $\text{máx}(\text{MEX}(A), \text{MEX}(B)) \neq \text{MEX}(A \cup B)$.

2. Demuestra que el MEX de la intersección de dos conjuntos A y B es menor o igual al mínimo entre el MEX de A y el MEX de B. En otras palabras, demuestra que:

   $$\text{mín}(\text{MEX}(A), \text{MEX}(B)) = \text{MEX}(A \cap B)$$