

Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

13 de septiembre de 2023

Objetivos

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
- 3 Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

- ① Objetivos
- ② Introducción
- ③ Definiciones básicas
- ④ Relaciones binarias

Introducción

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de distintos dominios.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

Nºalumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde \mathcal{U} es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Definiciones básicas

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

(\Rightarrow) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Para facilitar la demostración veremos dos casos:

- 1 $a = b$: En este caso $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\{\{a\}, \{a\}\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\{\{a\}\}$. Luego, tenemos que $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Definiciones básicas

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

(\Rightarrow)

- ② $a \neq b$: Como $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, y luego por axioma de extensión $\{a, b\} = \{a, d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Definiciones básicas

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

(\Leftarrow) Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. \square

Definiciones básicas

Ejercicio

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a, b) = \{a, \{b\}\}$$

¿Se cumple la propiedad anterior?

R: No. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (\{x\}, y) = \{\{x\}, \{y\}\} \\ (c, d) &= (\{y\}, x) = \{\{y\}, \{x\}\}\end{aligned}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Definiciones básicas

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuádruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una **n -tupla** como:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Definiciones básicas

Definición

Dados dos conjuntos A y B , definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos A_1, \dots, A_n , definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejercicio

Defina el producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

Respuesta: $A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$

Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos A_1, \dots, A_n , diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{sum}(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \quad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que *sum* es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

Definiciones básicas

La *aridad* de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación n -aria.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

Nºalumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B , diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B .

Ejercicio

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B ?

Respuesta: Hay tantas como el tamaño del conjunto potencia de $A \times B$. Si A y B son finitos y de tamaño m y n respectivamente, entonces hay $2^{m \cdot n}$ relaciones binarias posibles.

Relaciones binarias

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A , diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de “potencia”:

$$A \times \underbrace{(n-2 \text{ veces})}_{\dots} \times A = A^n$$

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$< \subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in < \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1, 3) \in < \quad (10, 4) \notin < \quad (7, 7) \notin <$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: $\{ (3, 17) \in < ?$

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a, b) \in R$
- $R(a, b)$
- aRb
 - Si no están relacionados, podemos escribir $a \not R b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \not< 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación *infija*.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo $=$ ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo $=$ usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

13 de septiembre de 2023