Lógica de predicados

Clase 7

IIC 1253

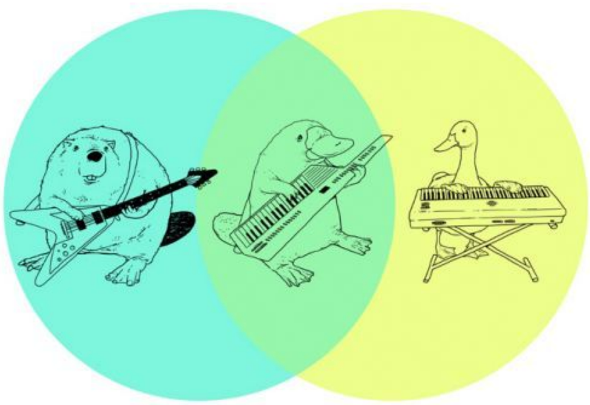
Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Primer Acto: Fundamentos

Inducción y lógica

Playlist Primer Acto



Playlist del curso: DiscretiWawos

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

El problema de consecuencia lógica

El siguiente es un caso de **consecuencia lógica**

Todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos modelarlo/explicarlo con lógica proposicional?

Necesitamos más poder...

¿Qué le falta a la lógica proposicional?

- Objetos de un cierto conjunto
- Predicados sobre objetos
- Cuantificadores: **para todo** y **existe**

Estudiaremos una nueva lógica con estos elementos

Esta lógica nos permitirá expresar **estructuras** complejas

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado
- Comprender sintaxis de predicados compuestos
- Comprender semántica de la lógica de predicados
- Identificar equivalencia lógica en predicados

Outline

Predicados

Ejemplos (versión 1.0)

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

- x es par
- $x \leq y$
- $x \triangle y$ (¿qué diablos es $\triangle$?)
- $x \triangleleft y = z$ (¿qué diablos es $\triangleleft$?)

No admiten valor de verdad hasta ser **evaluados** e **interpretados**

Predicados

Ejemplos (versión 2.0)

Las siguientes son proposiciones

- 2 es par
- $2 \leq 4$
- `'h'` $\triangle$ `'hola'` (cuando $\triangle$ se interpreta como “es substring de”)
- $4 \triangleleft 1 = 41$ (cuando $\triangleleft$ se interpreta como suma de naturales)

El valor de verdad depende de:
un **dominio** y la **interpretación de los símbolos**

Predicados

Definición

Un **predicado** $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicados

Definición

Para un predicado $P(x)$ y un valor a, la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

Ejemplos

$$P(x) := x \text{ es par} \quad R(x) := x \text{ es primo} \quad M(x) := x \text{ es mortal}$$

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

Predicados

Definición

Un **predicado** n-ario $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

Definición

Para un predicado n-ario $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

$O(x, y)$	$:= x \leq y$	sobre $\mathbb{N}$
$S(x, y, z)$	$:= x + y = z$	sobre $\mathbb{Q}$
$Padre(x)$	$:= x$ es padre de y	sobre el conjunto de todas las personas

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ diremos que $x_1, ..., x_n$ son **variables libres** de P.
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación.

Sintaxis de predicados

Definición

Un predicado es **compuesto** si es

1. un predicado
2. la negación ($\neg$) de un predicado compuesto
3. conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**

Observemos que hasta aquí,
la sintaxis es análoga al caso de fórmulas proposicionales

Valuaciones

Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

$P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$
- $P'(4) = 0$

Cuantificador universal

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el **cuantificador universal**

$$P'(y_1, ..., y_n) = \forall x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada e $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x(O(x, y)) \quad \cdots \quad O'(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \forall y(O(x, y)) \quad \cdots \quad O''(0) = \forall y(O(0, y))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P'_0 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

Cuantificador existencial

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el **cuantificador existencial**

$$P'(y_1, ..., y_n) = \exists x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada y $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x(O(x, y)) \quad \cdots \quad O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y)) \quad \cdots \quad O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \land O(z, y) \land x \neq z \land y \neq z) \quad \cdots \quad O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Es posible combinar cuantificadores

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(x, y)))$

Sintaxis de predicados (v 2.0)

(re)Definición

Decimos que un predicado es **compuesto** (o también **fórmula**) si es:

1. un predicado básico,
2. negación ($\neg$) de un predicado compuesto
3. conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$), bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
4. la cuantificación universal ($\forall$) o existencial ($\exists$) de un predicado compuesto.

(re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Outline

Interpretaciones

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del **dominio** y la **interpretación** del símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, ..., x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, ..., x_n)$ es el predicado sobre D.

Definición

Sean $P_1, ..., P_m$ símbolos de predicados.
Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $P_1, ..., P_m$ está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i.

Interpretaciones

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc} \mathcal{I}_1(\mathit{dom}) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(\mathit{dom}) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \vDash \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \nvDash \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **no satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \nvDash \varphi(a_1, .., a_n)$$

Observe que el símbolo $\vDash$ en predicados indica satisfacibilidad

Outline

Equivalencia lógica

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $\psi(x_1, ..., x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, .., a_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \vDash \psi(a_1, .., a_n)$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres) equivalentes, entonces para toda interpretación $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \vDash \psi$$

Equivalencia lógica

Observación

Todas las equivalencias de lógica proposicional son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas φ, ψ y θ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad:** $\varphi \land \psi \equiv \psi \land \varphi$
2. **Asociatividad:** $\varphi \land (\psi \land \theta) \equiv (\varphi \land \psi) \land \theta$
3. **Idempotencia:** $\varphi \land \varphi \equiv \varphi$
4. **Doble negación:** $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
5. **Distributividad:** $\varphi \land (\psi \lor \theta) \equiv (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \theta)$
6. **De Morgan:** $\neg(\varphi \land \psi) \equiv \neg\varphi \lor \neg\psi$
7. ...

¿Hay más equivalencias en predicados?

Equivalencia lógica

Ejemplos

Las siguientes fórmulas también son lógicamente equivalentes:

1. $\forall x(P(x) \to R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$

2. $\forall x(P(x)) \to \exists y(R(y)) \equiv \neg \exists y(R(y)) \to \neg \forall x(P(x))$

Equivalencia lógica

Tenemos nuevas equivalencias además de las ya mencionadas:

Teorema

Sea $\varphi(x), \psi(x)$ fórmulas con x su variable libre. Entonces:

$$\neg\forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg\varphi(x))$$
$$\neg\exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg\varphi(x))$$
$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

¿Qué nos dicen estos teoremas?

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre los teoremas.

Equivalencia lógica

Ejercicio

¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

- $\forall x(\exists y(\varphi(x, y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(\varphi(x, y)))$ ✗
- $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \forall x(\varphi(x)) \vee \forall x(\psi(x))$ ✗
- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))$ ✗

Para probar no-equivalencia basta con proporcionar una interpretación que satisface solo a una de las fórmulas comparadas

Consecuencia lógica

Las siguientes definiciones nos ayudan a extender el concepto de consecuencia lógica.

Definición

Para un conjunto Σ de fórmulas, decimos que $\mathcal{I}$ **satisface** Σ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ si:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ para toda } \varphi \in \Sigma$$

Notación: $\mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$

Consecuencia lógica

Definición

Una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \vDash \varphi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \vDash \Sigma(a_1, ..., a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, ..., a_n)$$

Consecuencia lógica

Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \land \forall x(\psi(x))\} \vDash \forall x(\varphi(x) \land \psi(x))$ ✓
- $\{\exists x(\varphi(x)) \land \exists x(\psi(x))\} \vDash \exists x(\varphi(x) \land \psi(x))$ ✗
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \vDash \exists x(\varphi(x))$ ✓
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x, y)))\} \vDash \exists x(\forall y(\varphi(x, y)))$ ✗

¿Existe algún algoritmo que nos permita resolver este problema?
¿Qué tal nuestro sistema deductivo de lógica proposicional?

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

1. Especificación universal:

$$\frac{\forall x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. Generalización universal:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para un } a \text{ arbitrario}}{\forall x(\varphi(x))}$$

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

3. Especificación existencial:

$$\frac{\exists x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. Generalización existencial:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x(\varphi(x))}$$

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todas las personas son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es persona.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $P(x) := x$ es persona
- $M(x) := x$ es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \forall x(P(x) \rightarrow M(x)) \\ P(s) \\ \hline M(s) \end{array}$$

Consecuencia lógica

Ejercicio

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(P(x) \rightarrow M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg P(x) \vee M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg P(x) \vee M(x)), P(s), \neg M(s)\}$:

(1)	$\forall x(\neg P(x) \vee M(x))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg P(s) \vee M(s)$	especificación universal de (1)
(3)	$P(s)$	$\in \Sigma$
(4)	$M(s)$	resolución de (2), (3)
(5)	$\neg M(s)$	$\in \Sigma$
(6)	$\square$	resolución de (4), (5)

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado
- Comprender sintaxis de predicados compuestos
- Comprender semántica de la lógica de predicados
- Identificar equivalencia lógica en predicados