Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2017

PAUTA INTERROGACION 1

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Para esta demostracion, existen al menos 2 caminos, a continuacion explicamos 2 de estos:

- Una forma sería decir que existe ϕ tal que está en DNF (toda fórmula proposicional puede ser escrita como DNF) y además que $\phi \equiv \neg\varphi$. Entonces ϕ se ve de la siguiente forma:

$$\phi \equiv \bigvee_{\sigma:\varphi(\sigma)=1} \left(\bigwedge_{x:\sigma(x)=1} (x) \wedge \bigwedge_{x:\sigma(x)=1} (\neg x) \right)$$

  Ahora, si negamos ϕ, obtenemos la doble negacion de φ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \neg\varphi \\ \neg(\phi) &\equiv \neg(\neg\varphi) \\ \neg(\phi) &\equiv \varphi \end{aligned}$$

  A partir de esto, podemos desarrollar la fórmula $\neg\phi$ y obtener φ como una fórmula en CNF.
  Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

  - `2 ptos` por notar que existe una fórmula ϕ en DNF equivalente a $\neg\varphi$.
  - `2 ptos` por explicar la estructura de ϕ.
  - `2 ptos` por desarrollar y demostrar que $\neg\phi$ se puede escribir en CNF.

- Otro posible camino es por construcción desde la tabla de verdad: Dada fórmula ϕ, si ϕ es una tautología, entonces es posible expresarse como $\phi \equiv p \vee \neg p$, con p siendo alguna variable en ϕ y claramente $p \vee \neg p$ esta en CNF. En caso contrario, deben existir valuaciones tal que $\phi(\vec{v}) = 0$, que se representan como filas en su tabla de verdad de ϕ. Si nos enfocamos en una de estas filas f, es posible contruir una conjunción de las variables en ϕ tal que solo esa fila la satisface (si en f una varible p tiene un 0, luego se agrega $\neg p$, si tiene un 1, se agrega p, se toma la conjunción de todos estos literales, llamemosla ϕ_f). Como $\vec{v}$ es la unica valuación que satisface ϕ_f, entonces toda otra valuacion debe satisfacer $\neg\phi_f$. Como ϕ_f es una conjuncion de literales, $\neg\phi_f$ puede expresarse como una disjuncion de literales utilizando De Morgan. Si tomamos entonces para todas las filas de la tabla de verdad de ϕ tal que terminan en un 0, contruimos ϕ' como la conjunción de cada $\neg\phi_f$. La anterior esta en CNF si extresamos cada $\neg\phi_f$ como una disyunción. Hay que demostrar entonces que $\phi \equiv \phi'$, o equivalentemente: $\phi \vDash \phi' \wedge \phi' \vDash \phi$. La idea esta en que dada una valuación $\vec{v}$ tal que $\phi(\vec{v}) = 1$, entonces esta no corresponde a ninguna fila en la tabla de verdad con un 0, luego $\vec{v}$ debe hacer verdadero cada $\neg\phi_f$, y en particular, a su conjunción ϕ'. Caso contrarior, dada una valuación $\vec{v}$ que satisface ϕ', luego $\vec{v}$ satisface cada $\neg\phi_f$, luego $\vec{v}$ no puede ser, para cada f, la valuacion que corresponde a esa fila, luego $\vec{v}$ no corresponde a ninguna valuación que hace a ϕ falso, luego $\phi(\vec{v}) = 1$. (Lo anterior tambien puede demostrarse por contrapositivo). Demostrando entonces lo pedido.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- `2 ptos` por la construcción de cada $\neg\phi_f$ a partir de cada fila de la tabla de ϕ.
- `2 ptos` por la construcción de ϕ' a partir de la tabla de ϕ completa.
- `2 ptos` por demostrar la equivalencia de ϕ y ϕ'

Pregunta 2

Pregunta 2.1

La solución consistía a grandes rasgos en notar que la fórmula buscaba decir que para cada número primo existe otro número primo mayor. Por otra parte, había que ser capaz de concluir que esto es verdadero ya que existen infinitos primos dentro de los naturales.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- `1.5 ptos` por notar qué significa la fórmula explicando brevemente cómo se llega a eso, ya sea operador por operador o evaluando la fórmula.
- `0.5 ptos` por decir que es verdadera y explicar por qué. No era necesario demostrar.

Pregunta 2.2

La solución consistía a grandes rasgos en *definir las constantes necesarias para esta fórmula* de forma correcta y con el lenguaje matemático adecuado. Una vez hecho esto, escribir una formula con lenguaje matemático correcto que describiese la siguiente situación:
Para todo x e y, x distinto de y, ambos números primos, y ambos distintos del 2 y 3, **ENTONCES** existe un z entre x e y que no es primo.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- `2 ptos` Por definir las constantes *necesarias* para la fórmula construida. Cabe notar que distintas fórmulas necesitaban más o menos constantes, por lo que algunas personas podrían tener todo el puntaje en este ítem solo definiendo el 2, mientras que otras requieren definir desde el 0 hasta el 3.
- `2 ptos` Por escribir la fórmula con lenguaje matemático correcto y sin abuso de notación. Para este ítem era posible asumir la existencia de las constantes y obtener todo el puntaje, siempre y cuando eso no los llevase a escribir de mala forma la fórmula.

Pregunta 3

La solución consistía en crear una serie de formulas que se pueden dar de las siguientes dos formas:
1) Crear dos variables proposicionales, una que estableciera la relación de gusto de una niña a un niño y la otra la de emparejamiento:

g_{ij}: A la niña i le gusta el niño j
e_{ij}: La niña i está emparejada con el niña j y viceversa

Luego establecer fórmulas que digan que todos están emparejados y cada uno con solo una persona, es decir, que haya una biyección a traves del emparejamiento entre el conjunto de niñas y el de niños.

Hacer la formula que relaciona al conjunto L con este conjunto de fórmulas a través de la definición de la variable de gusto desde el conjunto L.

Finalmente hacer la fórmula que establece el emparejamiento perfecto, en la cual se dice que para que exista una pareja se necesita que haya una relación de gusto en esa pareja.

2)Otra forma es solo definir la variable de emparejamiento, establecer la biyección de emparejamiento entre los conjuntos y finalemnte establecer en una sola fórmula el emparejamiento perfecto y la variable gusto directamente desde el conjunto L.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

Forma 1)

- **(1 punto)** Por tener las variables proposicionales.
- **(2 puntos)** Por establecer la biyeccion de emparejamiento.
- **(1 punto)** Por relacionar la variable gusto con el conjunto L.
- **(2 puntos)** Por establecer el emparejamiento perfecto.

Forma 2)

- **(0.5 punto)** Por tener la variable proposicional.
- **(2 puntos)** Por establecer la biyección de emparejamiento.
- **(3.5 puntos)** Por establecer el emparejamiento perfecto. Si está mala, pero todo el resto bueno, es 1 punto.

Pregunta 4

Pregunta 4.1

La solución consistía en darse dos valuaciones v, v' tales que $v \leq v'$ y hacer lo siguiente:

- Si $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v) = 0$ mostrar que $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v') \geq (\phi_1 \wedge \phi_2)(v)$.
- Si $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v) = 1$ mostrar que $(\phi_1 \wedge \phi_2)(v') = 1$
- Si $(\phi_1 \vee \phi_2)(v) = 0$ mostrar que $(\phi_1 \vee \phi_2)(v') \geq (\phi_1 \vee \phi_2)(v)$.
- Si $(\phi_1 \vee \phi_2)(v) = 1$ mostrar que $(\phi_1 \vee \phi_2)(v') = 1$

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por cada uno de los casos anteriores.

Pregunta 4.2

La idea era hacer la construcción de una $\{\vee, \wedge\}$-fórmula ϕ' tal que sea lógicamente equivalente a una fórmula ϕ monótona.

La construcción es:

$$\phi' := \bigvee_{\sigma:\phi(\sigma)=1} (\bigwedge_{x:\sigma(x)=1} x)$$

Teniendo en consideración los siguientes casos especiales:
Si $\forall x.\sigma(x) = 0 \land \phi(\sigma) = 1 \Rightarrow \phi' := 1$ Es decir, si ϕ es una tautología.
Si $\phi \equiv 0 \Rightarrow \phi' := 0$

Luego había que demostrar que $\phi \equiv \phi'$ para lo cual la intuición es la siguiente:

La dirección $\Rightarrow$ es directa de la construcción, basta con suponer $\phi(\sigma) = 1$ y luego mostrar por qué $\phi'(\sigma) = 1$.

Para la otra dirección ($\Leftarrow$) la idea era entonces suponer $\phi'(\sigma) = 1$ y llegar a $\phi(\sigma) = 1$ pensando en que dada la construcción, se tiene que $\phi' = \bigvee_{i=1}^{m} C_i$ y que por lo tanto debe cumplirse que $\exists i.C_i(\sigma) = 1$. De aquí la idea era pensar en cómo había sido construida esta cláusula y qué información nos da sobre la fórmula original ϕ.

- **(1.75 puntos)** Por construcción de ϕ' en el caso general.
- **(0.25 puntos)** Por los casos especiales de la construcción.
- **(2 puntos)** Por la demostrar $\phi \equiv \phi'$ (**1 punto** cada dirección de la demostración).