Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 9

20 de septiembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

- **Conjuntos finitos**

  Diremos que un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx n$, es decir si existe una función biyectiva $f : A \to \{0, ..., n-1\}$

  Teorema Si A es un conjunto finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- **Funciones**

  Teorema (Schröder-Bernstein) $A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

  Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

- **Equinumerosidad** Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

- **Numerabilidad** Un conjunto A es enumerable si y sólo si $|A| = |\mathbb{N}|$, de manera equivalente diremos que A es enumerable si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ tal que todos los elementos de A aparecen en la sucesión una única vez cada uno.

  Teorema (Cantor) El intervalo real $(0, 1) \subseteq R$ es infinito pero no enumerable. Esto se demuestra a partir del argumento de la diagonalización de Cantor.

- **Conclusiones finales**

  $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$

Ejercicio 1

Utilice el principio del palomar para demostrar lo siguiente:

En cualquier espectáculo del Teatro Campos Elíseos de Bilbao, que esté lleno, existen dos personas del público tales que su primera y su última letra son iguales (como por ejemplo, Aitor y Amador, o Sorkunde y Salomé).

Observación: El aforo del Teatro Campos Elíseos de Bilbao es de 800 personas.

Solución:

El aforo del Teatro Campos Elíseos es de 800 personas, que van a ser nuestras palomas, mientras que los pares formados por la primera y última letra de un nombre (en los ejemplos anteriores (a,r), de Aitor y Amador, y (s,e), de Sorkunde y Salomé), nuestros palomares. Puesto que hay 27 letras en el alfabeto, entonces hay 27 x 27 = 729 pares de letras posibles, desde la (a,a) hasta la (z,z). Como hay más palomas (personas) que palomares (pares de letras), entonces al menos dos personas deberán compartir la primera y la última letra de su nombre.

Ejercicio 2

a) Sea $S = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que $S \times S \approx S$.

Solución: a) Para demostrar equinumerosidad utilizaremos el teorema de Schröder-Bernstein. Por lo cual buscamos crear dos funciones inyectivas

$$f : S \to S \times S$$

$$g : S \times S \to S$$

Para la función f podemos tomar $f(x) = (x, x)$ la cual es inyectiva pues si $f(x) = f(y) \to (x, x) = (y, y)$ lo cual se cumple si y solo si $x = y$.
Para g consideremos el par $(x, y) \in (0, 1)^2$. Sabemos que podemos escribir x e y como,

$$x = 0, x_0x_1x_2... \quad y = 0, y_0y_1y_2... \qquad \text{donde } x_i, y_j \in \{0, ..., 9\} \text{ y } i, j \in \mathbb{N}$$

Luego, se define $g : S \times S \to S$ como

$$g(x, y) = 0, d_0d_1d_2...$$

donde

$$d_i = \begin{cases} x_{i/2} & \text{si } i \text{ es par} \\ y_{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente falta mostrar que g es inyectiva, consideremos $(x, y), (w, z) \in S^2$ tales que $g(x, y) = g(w, z)$. Luego, considerando a x, y, w, z como,

$$x = 0, x_0x_1x_2... \quad y = 0, y_0y_1y_2... \quad w = 0, w_0w_1w_2 \quad z = 0, z_0z_1z_2$$

donde $\forall i \in \mathbb{N}$ $x_i, y_i, w_i, z_i \in \{0, ..., 9\}$. Luego, aplicando la definición de g,

$$g(x, y) = 0, x_0y_0x_1y_1... \quad g(w, z) = w_0z_0w_1z_1...$$

por lo cual como $g(x, y) = g(w, z)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}(x_n = w_n \wedge y_n = z_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}(x_n = w_n) \wedge \forall n \in \mathbb{N}(y_n = z_n)$$

$$(x = w) \wedge (y = z)$$

por lo tanto, $(x, y) = (w, z)$

Ejercicio 3

Considere un punto en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que parte en $(0, 0)$. Una trayectoria del punto en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una secuencia $(i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(i_0, j_0) = (0, 0)$ y para todo $k \geq 0$ se cumple que $|i_k - i_{k+1}| + |j_k - j_{k+1}| = 1$. En otras palabras, la trayectoria del punto cambia en exactamente una coordenada +1 o -1 .

Demuestre que el conjunto de todas las posibles trayectorias del punto son no-numerables.

Solución:

Procedamos por contradicción y supongamos que este conjunto es numerable. Entonces podemos escribirlo en una secuencia ordenada. Vamos a escribirlo como:

$$
\begin{aligned}
t_1 &= (i_0^1, j_0^1), (i_1^1, j_1^1), \ldots, (i_n^1, j_n^1) \ldots \\
t_2 &= (i_0^2, j_0^2), (i_1^2, j_1^2), \ldots, (i_n^2, j_n^2) \ldots \\
&\vdots \\
t_k &= (i_0^k, j_0^k), (i_1^k, j_1^k), \ldots, (i_n^k, j_n^k) \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ahora definiremos una trayectoria que no está en esta secuencia. Construiremos t' de la siguiente forma. Primero $t'_0 = (0, 0)$. Luego para todo $k >= 1$;

- $t'_k = t'_{(k-1)} + (1, 0)$ si $i'_{(k-1)} >= i_k^k$, si no
- $t'_k = t'_{(k-1)} + (0, 1)$ si $j'_{(k-1)} >= j_k^k$, si no
- $t'_k = t'_{(k-1)} + (-1, 0)$ si $i'_{(k-1)} < i_k^k$, si no
- $t'_k = t'_{(k-1)} + (0, -1)$ si $j'_{(k-1)} < j_k^k$

Donde t'_k es el punto k-ésimo de la trayectoria t'.

Entiéndase esto de manera secuencial y excluyente, o sea como un `elif` de python.

Ahora es claro que todo $k \geq 1$ se tiene que $t'_k \neq (i_k^k, j_k^k)$. Ya que la transición desde el punto $k-1$-ésimo al k-ésimo de t' nos estamos alejando del punto (i_k^k, j_k^k).

Como hemos encontrado una trayectoria que no está en la numeración que habíamos dicho que debía existir dada la numerabildiad. Por lo tanto el conjunto definido no es numerable.

Nota: definimos desde t_1 por comodidad de índices al momento de la caracterización t'. De hecho la *diagonal* es desde el punto (i_1^1, j_1^1) debido a que toda trayectoria parte desde $(0, 0)$. Igualmente haber numerado desde t_0 es análogo pero deja la demostración más engorrosa.

Ejercicio 4: Propuesto

Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de N es numerable.

Solución:

Se puede idear la siguiente lista para todos los elementos del conjunto definido como "todos los subconjuntos finitos de N"

La lista es la siguiente

- $\{0\}$
- $\{1\}$
- $\{0, 1\}$
- $\{2\}$
- $\{0, 2\}$
- $\{3\}$
- $\{0, 3\}$
- $\{1, 2\}$
- $\{1, 2, 0\}$
- $\ldots$

Es decir, los elementos se van ordenando según el valor que se obtiene al sumar todos los elementos del conjunto. Primero los elementos que suman cero, luego uno, luego dos, y así sucesivamente.

En primer lugar, se puede observar que ningún elemento se repite debido a que están ordenados por niveles. Cuando aparece un elemento en una sección, no vuelve a aparecer más adelante en la lista.

En segundo lugar, se puede observar que todos los elementos del conjunto pertenecen a la lista. Debido a que los conjuntos son finitos, siempre obtendremos un número al sumar todos sus elementos.

Debido a que todos los elementos del conjunto aparecen en la lista una sola vez, se puede concluir que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de N es un conjunto numerable.