Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

# Ayudantía 13

17 de noviembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

## Resumen

### Árboles

- **Árbol:** Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino entre ellos. También existen defienciones equivalentes tales como:
  - Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si es conexo y acíclico.
  - Un grafo $T = (V, E)$ es un árbol si y solo si es conexo y todas sus aristas son de corte.
  - Un grafo $T = (V, E)$ con $n$ vértices es un árbol si y solo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

  A partir de esto,
  - Llamaremos a uno de los vértices $r \in V$ como la raíz del árbol y a los vértices de grado menor o igual a 1 hojas.
- **Bosque:** Un grafo $T = (V, E)$ es un bosque si para cada par de vértices $x, y \in V$ si existe un camino entre ellos, este es único.
- **Teorema:** Todo árbol es un grafo bipartito.
- **Teorema:** Si $T$ es un árbol y $v$ es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ es un árbol.
- Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz $r$ y $x$ un vértice cualquiera. Luego,
  - La profundidad de $x$ es el largo del camino que lo une con $r$ ($r$ tiene profundidad 0).
  - La altura o profundidad del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
  - Los ancestros de $x$ corresponden a los vértices que aparecen en el camino entre él y r ($x$ es ancestro de sí mismo).
  - El padre de $x$ es su ancestro (propio) con mayor profundidad. Se dice que $x$ es hijo de su padre.
  - Dos vértices $x$ e $y$ con el mismo padre son hermanos.
- **Arbol Binario:** Un árbol con raíz se dice binario si todo vértice tiene grado a lo más 3 o equivalentemente si todo vértice tiene a lo más dos hijos.

### Teoría de números

- **Relación divide a:** La relación divide a denotada por $|$ sobre $\mathbb{Z}$ sin 0 es tal que $a|b$ si y solo si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$.
- **Relación módulo n:** La relación módulo n denotada por $\equiv_n$ sobre $\mathbb{Z}$ es tal que $a \equiv_n b$ si y solo si $n|(b-a)$. Esta relación es de equivalencia.
- **Teorema:**
$$a \equiv_n b \iff a \mod n = b \mod n$$
- **Operación módulo n:** La operación módulo n entrega el resto de la división por $n$, se denota por $a \mod n$.
- **Máximo común divisor:** Dados $a$ y $b$ diremos que su máximo común divisor denotado como $MCD(a,b)$ es el máximo natural $n$ tal que $n|a$ y $n|b$.
- **Teorema:** Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que
$$MCD(a,b) = s \cdot a + t \cdot b$$
.
- $b$ es inverso de $a$ en módulo $n$ si $a \cdot b \equiv_n 1$

## Ejercicio 1 | Teoría de números

Demuestre que si a es un número impar, entonces $a^2 \equiv 1(\text{mod}8)$.

## Ejercicio 2 | Teoría de números

Considere el sistema
$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

Demuestre que el sistema tiene solución si y solo si $\text{MCD}(m_1, m_2) \mid (a_1 - a_2)$.

## Ejercicio 3 | Árboles

1. (Existencia de hojas) Sea $T$ un árbol con al menos dos vértices. Demuestre que $T$ tiene al menos dos *hojas*.
2. (Árbol generador) Todo grafo conexo $G$ tiene un árbol $T$ que usa todos sus vértices.