Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

16 de agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 19:59:59 del 23 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

(a) Demuestre que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

(b) Considere la secuencia de naturales $s_0, s_1, s_2, \ldots$ definida por la siguiente recurrencia:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 4, \quad s_k = 6s_{k-1} - 5s_{k-2} \quad \text{para todo natural } k \geq 2.$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $s_n = 5^n - 1$.

Problema 2

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $| * | : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $| \bullet | = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$.

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + \max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$