Árboles

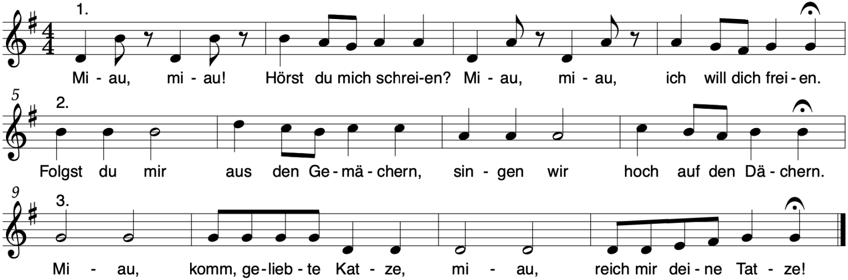
Clase 22

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Miau aus Frankreich



Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

Tercer Acto: Aplicaciones

Algoritmos, grafos y números

Playlist Tercer Acto

DiscretiWawos #3

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **ciclo Euleriano** en un (multi)grafo G es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices de G.

- Es un ciclo, por lo tanto no puede repetir aristas.
- Pueden repetirse vértices.
- Diremos que G es un **grafo Euleriano** si contiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Rightarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos y Euleriano.
Por demostrar: G es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Como G es Euleriano, tiene un ciclo C que contiene a todas las aristas y vértices. Se deduce directamente que G es conexo, pues dentro de C se pueden encontrar caminos entre todos los pares de vértices de G.

Ciclos y caminos Eulerianos

Ahora, supongamos que C empieza y termina en un vértice particular v. C necesita una arista para “salir” inicialmente y otra para “llegar” finalmente a v, y cada vez que v aparezca nuevamente en C, necesita dos aristas distintas más para entrar y salir:

Figure: Un vértice v particular del ciclo Euleriano C y sus aristas incidentes. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Esto implica que $\delta(v)$ es necesariamente par, pues todas las aristas que lo inciden deben aparecer en C una vez cada una. El ciclo C se puede representar comenzando y terminando en cualquier vértice de G, y entonces por el mismo argumento, todos los vértices tienen grado par.

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos conexo y tal que todos sus vértices tienen grado par. Por demostrar: G es tiene un ciclo Euleriano. Se hará por inducción en la cantidad de aristas de G.

BI: Queremos tomar el grafo con el menor número de aristas que sea conexo y cuyos vértices tengan todos grado par. Si nos fijamos en el número de vértices, tenemos que el único grafo con un vértice que cumple con todas las condiciones es un vértice solo, el cual tiene un ciclo Euleriano compuesto por él mismo. El grafo más pequeño con más de un vértice que cumple con las condiciones es un grafo con dos vértices y dos aristas, el cual claramente tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

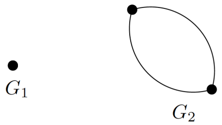


Figure: Los grafos más pequeños conexos tales que sus vértices tienen grado par. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

- **BI:** Notemos además que cualquier grafo conexo con dos vértices de grado par tendrá un ciclo Euleriano.
- **HI:** Supongamos que cualquier grafo conexo con vértices de grado par y que tiene menos de n aristas tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

TI: Sea G un (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen grado par y con exactamente n aristas.
Por demostrar: G tiene un ciclo Euleriano.

En la BI ya demostramos la propiedad para grafos con 1 o 2 vértices, por lo que podemos asumir que G tiene al menos 3 vértices. Como G es conexo y tiene al menos 3 vértices, debe existir un camino de largo 2 con aristas e_1, e_2 y que contiene 3 vértices v_1, v_2, v_3:

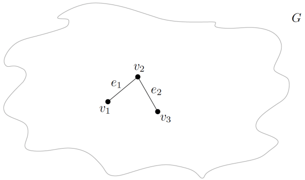


Figure: Camino de largo 2 en un grafo con al menos 3 vértices. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

TI: Creamos un nuevo grafo G' sacando e_1 y e_2 y agregando una nueva arista e entre v_1 y v_3:

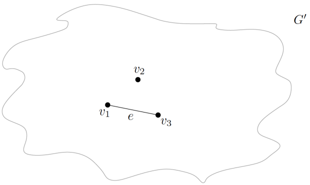


Figure: Creación de G' a partir de la eliminación de e_1 y e_2 y la inserción de e. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Notemos que G' tiene estrictamente menos aristas que G. Por otro lado, sólo v_1, v_2, v_3 pudieron ver afectados sus grados: v_1 y v_3 mantienen su grado en G', y v_2 lo redujo en 2, por lo que todos los vértices de G' tienen grado par. Sólo nos falta que G' sea conexo para aplicar la HI.

Ciclos y caminos Eulerianos

Nos pondremos entonces en dos casos:

1. G' es conexo: en este caso G' cumple con la HI, y por lo tanto tiene un ciclo Euleriano C'. Como C' contiene a todas las aristas de G', se cumple que $C' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$. Si reemplazamos de vuelta e_1 y e_2, obtenemos un ciclo $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots)$, el cual es un ciclo Euleriano en G.

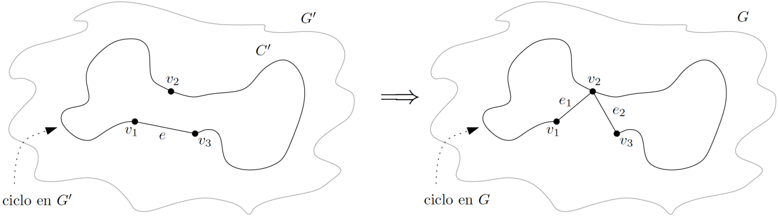


Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir de uno para G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

2. G' no es conexo: como G es conexo, G' tiene dos componentes conexas: una contiene a v_2 y la otra a v_1 y v_3. A cada una de estas podemos aplicarle la HI: existe un ciclo C' que empieza y termina en v_2 que contiene a todos los vértices y aristas de la primera componente: $C' = (v_2, \ldots, v_2)$; y existe otro ciclo C'' que contiene a todas las aristas de la otra componente: $C'' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$.

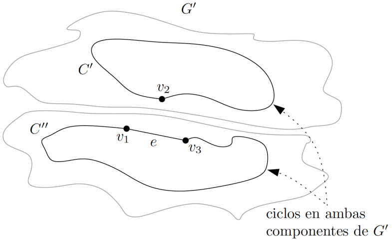


Figure: Ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

Creamos un ciclo Euleriano para G "insertando" C' en C'' entre v_1 y v_3 añadiendo de vuelta e_1 y e_2: $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_2, e_2, e_3, \ldots)$:

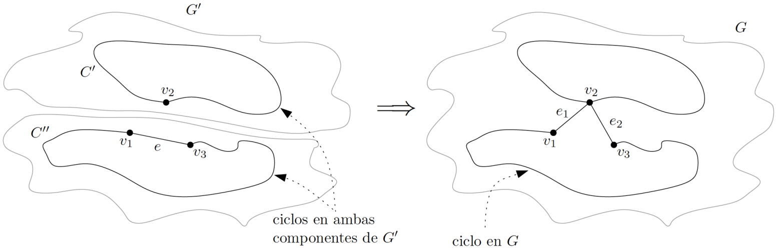


Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir los ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Entonces, por inducción se concluye que cualquier (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen todos grado par es Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **camino Euleriano** en un (multi)grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Rightarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v: $P = (u, \dots, v)$. Por demostrar: G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

En primer lugar, como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. En segundo lugar, si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e: $C = (u, \dots, v, e, u)$. Por el teorema anterior, todos los vértices en G' tienen grado par, por lo que en G los únicos vértices con grado impar eran u y v (pues ambos tenían una arista incidente menos). Por lo tanto, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar u y v. Por demostrar: G tiene un camino Euleriano.

Si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, y por el teorema anterior, G' tiene un ciclo Euleriano $C = (u, \ldots, v, e, u)$. Si a este ciclo le sacamos e, obtenemos un camino Euleriano $P = (u, \ldots, v)$ en G.

Ciclos Hamiltonianos

Considere los siguientes grafos:

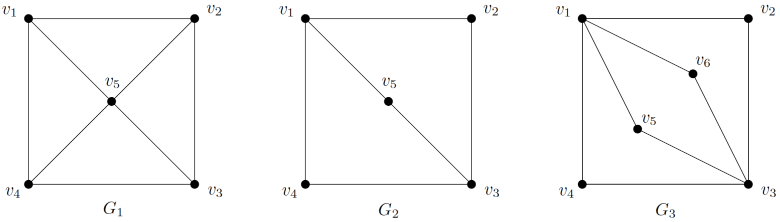


Figure: Fuente: Apuntes Jorge Pérez.

¿Es posible encontrar, en alguno de ellos, un ciclo que contenga a todos los vértices una sola vez cada uno (excepto por el inicial y final)?

<u>R:</u> G_1 tiene un ciclo de tales características: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$.
G_2 ni G_3 tienen tal ciclo.

Ciclos Hamiltonianos

Definición

Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo G es un ciclo en G que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

- Diremos que G es un **grafo Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.
- ¿Hay alguna relación entre grafos Eulerianos y Hamiltonianos?
  - No: G_1 es Hamiltoniano pero no Euleriano; G_2 no es Hamiltoniano ni Euleriano; y G_3 es Euleriano pero no Hamiltoniano.
- ¿Existe alguna propiedad simple para chequear si un grafo es Hamiltoniano?
- ¿Qué tan difícil es determinarlo?

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones de árbol y demostrar que son equivalentes
- Conocer elementos esenciales de un árbol
- Demostrar propiedades que relacionan elementos de un árbol

Outline

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino entre ellos.

Por lo tanto, siempre es *conexo*. Si relajamos esta condición:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **bosque** si para cada par de vértices $x, y \in V$, si existe un camino entre ellos, este es único.

Un bosque se ve como un conjunto de árboles.

Árboles

En general hablaremos de árboles **con raíz**.

- Distinguimos uno de los vértices $r \in V$, al que llamaremos la **raíz** del árbol.
- Los vértices de grado menor o igual a 1 se llaman **hojas**.
- Los dibujamos con la raíz arriba y los demás vértices hacia abajo.

Árboles

Hay muchas definiciones equivalentes para los árboles:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y acíclico.

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y todas sus aristas son de corte.

Ejercicio

Demuestre las definiciones anteriores.

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y acíclico.

Demostración:

($\Rightarrow$) Primero si T es un árbol es por definición conexo, nos falta demostrar entonces que un árbol no puede tener ciclos. Supongamos que T tuviese un ciclo, y sea C un ciclo en T que pasa por los vértices u y v. Supongamos que C parte (y termina) en u, entonces C es de la forma $(u, ..., v, ..., u)$, por lo que se puede dividir en dos porciones, una para ir de u a v, digamos p_1, y otra (distinta ya que un ciclo no repite aristas) para ir de v a u, digamos p_2. Resulta entonces que p_1 y p_2 son dos caminos distintos entre u y v en T, lo que contradice el hecho de que T es un árbol. Finalmente T no puede tener ciclos.

($\Leftarrow$) Como T es conexo, para cada par de vértices existe un camino que los une. Falta demostrar que ese camino es único. Supongamos entonces que T no tiene ciclos pero que sin embargo existe un par de vértices con dos caminos distintos uniéndolos en T. Sean u y v estos vértices y sean p_1 y p_2 los dos caminos distintos en T que unen a u con v. Dado que estos caminos son distintos entonces ambos tienen al menos tres vértices.
Sea x el vértice anterior al primer vértice que diferencia a p_1 y p_2 (note que x está en p_1 y en p_2). Sea y el vértice siguiente a x que pertenece simultáneamente a p_1 y p_2. El camino entre x e y a través de p_1 junto con el camino entre x e y a través de p_2 forman un ciclo en T lo que contradice nuestra hipótesis de que T no tiene ciclos. Finalmente no pueden existir dos caminos distintos entre u y v, de donde concluimos que para todo par de vértices en T existe un único camino que los une y por lo tanto T es un árbol.

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y todas sus aristas son de corte.

Demostración:

En la sección anterior demostramos que una arista es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en el grafo. Ahora, T es un árbol si y sólo si T es conexo y no tiene ningún ciclo, si y sólo si todas sus aristas cumplen con la propiedad de no pertenecer a un ciclo, si y sólo si, todas sus aristas son de corte.

Árboles

Vimos que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de largo impar.
De esto se deduce inmediatamente que:

Teorema

Todo árbol es un grafo bipartito.

Árboles

La siguiente propiedad nos permitirá hacer demostraciones por inducción sobre los árboles:

Teorema

Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ (el grafo que resulta de quitar el vértice y sus aristas incidentes) es un árbol.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Árboles

Teorema

Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ es un árbol.

Demostración:

Para demostrar que el grafo $T - v$ es un árbol debemos comprobar que para cualquier par de vértices en $T - v$, existe un único camino que los une. Sea u y w dos vértices en T distintos de v, y sea la secuencia $P = (u, u_1, u_2, ..., u_n, w)$ el único camino en T que une a u con w. Es claro que el vértice v no aparece en P ya que todos los vértices de P (excepto u y w) deben tener grado al menos 2, luego si eliminamos v de T no afecta al camino entre u y w, luego el camino $P = (u, u_1, u_2, ..., u_n, w)$ entre u y w también existe en $T - v$. Como la demostración la hicimos en general para un par de vértices cualquiera, en $T - v$ existe un único camino entre todo par de vértices y por lo tanto $T - v$ también es un árbol.

Árboles

Ahora podemos establecer una última definición muy simple de un árbol:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un **árbol** si y sólo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Ejercicio

Demuestre que la definición anterior es equivalente a las demás.

Podemos determinar si un grafo conexo es o no un árbol.

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un **árbol** si y sólo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si T es un árbol con n vértices, entonces claramente es conexo, falta mostrar que tiene exactamente $n - 1$ aristas, lo haremos por inducción en n.

BI: Si $n = 1$ tenemos un árbol con sólo un vértice y sin aristas, por lo que se cumple la propiedad: $|E| = 0 = 1 - 1 = n - 1$.

HI: Supongamos que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

TI: Sea ahora T un árbol con $n + 1$ vértices, queremos demostrar que T tiene exactamente $(n + 1) - 1 = n$ aristas. Centrémonos en una hoja v cualquiera. Por el lema anterior $T - v$ también es un árbol y tiene exactamente n vértices por lo que se aplica la HI, luego $T - v$ tiene exactamente $n - 1$ aristas. Dado que v es una hoja, v tiene grado 1 en T y por lo tanto T tiene exactamente una arista más que $T - v$, o sea T tiene exactamente n aristas, por lo que se cumple la propiedad.

Árboles

($\Leftarrow$) En la sección anterior demostramos que un grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n-k$ componentes conexas. Si T es un grafo conexo con n vértices y exactamente $n-1$ aristas y tomamos una arista e cualquiera de T, entonces dado que $T-e$ tiene $n-2$ aristas, por el teorema mencionado, $T-e$ tiene al menos dos componentes conexas y por lo tanto e es una arista de corte. Dado que elegimos e como una arista cualquiera, T cumple con que todas sus aristas son de corte y por lo tanto T es un árbol.

Outline

Árboles

Las siguientes definiciones se usan mucho en aplicaciones de los árboles en computación.

Definición

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r y x un vértice cualquiera.

- La **profundidad** de x es el largo del camino que lo une con r (r tiene profundidad 0).
- La **altura** o **profundidad** del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
- Los **ancestros** de x son los vértices que aparecen en el camino entre él y r. Note que x es ancestro de sí mismo.
- El **padre** de x es su ancestro (propio) de mayor profundidad. Diremos que x es **hijo** de su padre.
- Dos vértices x e y con el mismo padre son **hermanos**.

Árboles binarios

Definición

Un árbol con raíz se dice **binario** si todo vértice tiene grado a lo más 3; o equivalentemente, si todo vértice tiene a lo más dos hijos.

Podemos distinguir entre hijos izquierdos y derechos

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Árboles binarios

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Demostración:

Por inducción en la cantidad de vértices del árbol binario.

BI: El caso base es un árbol compuesto por sólo un vértice, la raíz. Un árbol de estas características tiene sólo una hoja y ningún vértice con dos hijos, luego cumple la propiedad.

HI: Supongamos que un árbol binario con n vértices tiene una hoja más que vértices con dos hijos.

TI: Sea T un árbol binario con $n+1$ vértices. Sea v una hoja de T, sabemos que $T - v$ es también un árbol binario y tiene exactamente n vértices por lo que $T - v$ cumple con HI, o sea tiene una hoja más que vértices con dos hijos. Supongamos que $T - v$ tiene k vértices con dos hijos entonces por HI tiene $k+1$ hojas. Lo que podamos decir dependerá de si v tenía o no un hermano.

- Si v tiene un hermano en T, entonces el padre de$V$ es un vérticee con dos hijos en T. Ahora, en el árbol $T - v$, el vértice que era padre de v tiene sólo un hijo. Lo anterior quiere decir que T tiene exactamente un vértice más con dos hijos que $T - v$, o sea que T tiene exactamente $k + 1$ vértices con dos hijos. Ahora también ocurre que T tiene exactamente una hoja más que $T - v$, o sea que T tiene $k + 2$ hojas. Hemos concluido que T tiene $k + 2$ hojas y $k + 1$ vértices con dos hijos y por lo tanto cumple con la propiedad.
- Si v no tiene hermano, entonces el vértice padre de v en T se convierte en una hoja en el árbol $T - v$, lo que quiere decir que$T$ y $T - v$ tienen exactamente la misma cantidad de hojas, $k + 1$. El único vértice que ve afectado su cantidad de hijos en $T - v$ es el padre de v, este tiene exactamente un hijo en T y 0 hijos en $T - v$ por lo que la cantidad de vértices con dos hijos en T es también la misma que en $T - v$ e igual a k. Hemos concluido que T tiene $k + 1$ hojas y k vértices con dos hijos y por lo tanto cumple con la propiedad.

Árboles binarios

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

La ANFP está organizando la Copa Chile 2022. Si este año participan n equipos, ¿cuántos partidos se jugarán?

Respuesta: $n - 1$

Árboles binarios

Finalmente, podemos tomar una clase de árboles binarios que se usan mucho para establecer cotas para las aplicaciones de ellos.

Definición

Un **árbol binario completo** es un árbol binario tal que:

1. Todas las hojas están a la misma profundidad.
2. Todos los vértices que no son hojas tienen exactamente dos hijos.

Árboles binarios

Teorema

1. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente 2^H hojas.
2. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente $2^{H+1} - 1$ vértices.
3. Si H es la altura de un árbol binario completo con n vértices, entonces $H \leq \log_2(n)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema anterior.

Árboles binarios

Teorema

Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente 2^H hojas.

Demostración:
Sea $T = (V, E)$ un árbol binario completo, demostraremos la propiedad por inducción en la altura H.

BI: Si $H = 0$ entonces T corresponde un vértice sin aristas. Luego la cantidad de hojas es igual a $1 = 2^0 = 2^H$.

HI: Suponemos que todo árbol de altura H tiene 2^H hojas.

TI: Sea T un árbol de altura $H + 1$ y raíz r. Si eliminamos r del árbol junto con sus aristas incidentes obtenemos un bosque de 2 árboles binarios completos de altura H. Luego, podemos aplicar la HI, con lo que cada árbol en $T - r$ tiene 2^H hojas. Es claro que la cantidad de hojas de T es igual a la suma de todas las hojas de los arboles inducidos al remover r. Con lo que T tendrá una cantidad de hojas igual a $2^H + 2^H = 2 \cdot 2^H = 2^{H+1}$.

Árboles binarios

Teorema

Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente $2^{H+1} - 1$ vértices.

Demostración:
Sea T un árbol binario completo con altura H. Por el teorema anterior T debe tener 2^H hojas. Luego, por el otro teorema anterior sabemos que debe tener $2^H - 1$ vértices con exactamente 2 hijos. Dado que todo vértice en un árbol binario es hoja o tiene 2 hijos, concluimos que T debe tener $2^H + (2^H - 1) = 2 \cdot 2^H - 1 = 2^{H+1} - 1$ vértices.

Árboles binarios

Teorema

Si H es la altura de un árbol binario completo con n vértices, entonces $H \leq \log_2(n)$.

Demostración:

Sea T un árbol binario completo con n vértices y altura H. Sabemos que la cantidad de hojas (2^H) tiene que ser menor o igual a la cantidad total de vértices (n).

$$2^H \leq n \Rightarrow H \leq \log_2(n)$$

Outline

Objetivos de la clase

- Conocer definiciones de árbol y demostrar que son equivalentes
- Conocer elementos esenciales de un árbol
- Demostrar propiedades que relacionan elementos de un árbol