Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

7 de Octubre

Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Problemas

Pregunta 1

En clases se vio que una posible definición de un par ordenado es la siguiente:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

a) Demuestre que $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

b) Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a, b) = \{a, \{b\}\}$$

Demuestre que con esta definición no necesariamente se cumple la propiedad enunciada en a).

Solución

a) ($\Rightarrow$) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Supondremos entonces que $(a, b) = (c, d)$, y demostraremos que $a = c \wedge b = d$.
Por definición de par ordenado, tenemos que $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

- $a = b$: En este caso $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, a\}\big\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\big\{\{a\}, \{a\}\big\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\big\{\{a\}\big\}$. Luego, tenemos que $\big\{\{a\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$, y luego $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Ocupando el mismo razonamiento anterior sobre el conjunto $\big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$, obtenemos que $\big\{\{c\}, \{c, d\}\big\} = \{\{c\}\}$. Por lo tanto, nuestra igualdad inicial se reduce a $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, y entonces aplicando el axioma de extensión dos veces obtenemos que necesariamente $a = c$. Como $a = b$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.
- $a \neq b$: Como $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cardinalidad), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, d\}\big\}$, y luego por axioma de extensión $\{a, b\} = \{a, d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

($\Leftarrow$) Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Pauta

- 1.5 pts. por implicancia derecha($\Rightarrow$)
- 1.5 pts. por implicancia izquierda($\Leftarrow$)

b) Construiremos un contraejemplo para mostrar que con esta definición alternativa puede ocurrir que $(a, b) = (c, d)$, pero $a \neq c \vee b \neq d$. Dados dos conjuntos $x \neq y$, tomemos

$$a = \{x\},\ b = y,\ c = \{y\},\ d = x.$$

Notemos que es directo que $b \neq d$, y por axioma de extensión también se cumple que $a \neq c$. Con estas definiciones para a, b, c y d, los pares ordenados serían los siguientes:

$$(a, b) = (\{x\}, y) = \{\{x\}, \{y\}\}$$
$$(c, d) = (\{y\}, x) = \{\{y\}, \{x\}\}$$

Por axioma de extensión, es claro que $(a, b) = (c, d)$. Sin embargo, $a \neq c$ y $b \neq d$, con lo que queda demostrado que con esta definición alternativa no necesariamente se cumple la propiedad enunciada en a).$\square$

Pauta

- 3 pts. por construir y explicar el contraejemplo

Pregunta 2

Dados un conjunto A y una relación $\lesssim$ sobre A, diremos que el par $(A, \lesssim)$ es un *preorden* si $\lesssim$ es una relación refleja y transitiva.
Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ como

$$A \rightsquigarrow B \leftrightarrow inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B),$$

donde $inf(\cdot)$ y $sup(\cdot)$ son el ínfimo y el supremo de un conjunto respectivamente.

a) Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ es un preorden.

b) Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.

c) Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

Solución

a) **PD:** $\rightsquigarrow$ es **refleja** y **transitiva** en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

I.- Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como A es finito entonces $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup(A) = n_1$. De la misma manera $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf(A) = n_2$. Por lo tanto podemos decir que $\sup(A) = \sup(A) \wedge \inf(A) = \inf(A) \implies A \rightsquigarrow A$. Luego, $\rightsquigarrow$ es refleja.

II.- Sea $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tales que $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow C$. Entonces

$$\sup(A) \leq \sup(B) \wedge \inf(A) \leq \inf(B) \qquad \sup(B) \leq \sup(C) \wedge \inf(B) \leq \inf(C)$$

Por la transitividad de "$\leq$", $\sup(A) \leq \sup(C) \wedge \inf(A) \leq \inf(C) \implies A \rightsquigarrow C$. Se concluye que $\rightsquigarrow$ es transitiva.

Por (I) y (II) implica que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rightsquigarrow)$ es un pre orden.

Pauta

- 1 pts. por demostrar que la relación es refleja
- 1 pts. por demostrar que la relación es transitiva

b) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3\}$. Claramente se tiene que

$$\text{ínf}(A) = \text{ínf}(B) = 1 \wedge \sup(A) = \sup(B) = 3$$

. Por lo tanto $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$. Sin embargo, $A \neq B$ ya que $2 \notin B$. Por axioma de extensión podemos asegurar que A es distinto a B.

Pauta

- 2 pts. por construir un contraejemplo y explicarlo

c) Sea $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Como ya se demostró en (1) $\rightsquigarrow$ es refleja y transitiva.

PD: $\rightsquigarrow$ es **antisimétrica** en S.

Para que se cumpla $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$ necesariamente $\sup(A) = \sup(B) \wedge \text{ínf}(A) = \text{ínf}(B)$ por la antisimetría de $\leq$.

Ahora, supongamos que existen $A, B \in \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ tales que $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$ pero $A \neq B$. Luego, $\sup(A) = \sup(B) \wedge \text{ínf}(A) = \text{ínf}(B)$. Pero los únicos casos en que pasa eso son:

$$\begin{gathered} A = B = \{1\} \\ A = B = \{2\} \quad \star \\ A = B = \{1, 2\} \end{gathered}$$

Por lo tanto, $\rightsquigarrow$ es necesariamente antisemétrica, por lo tanto un orden parcial sobre S.

$\star$Un argumento de conteo es válido para demostrar que no hay más combinaciones sobre S que cumplen $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$.

Pauta

- 1 pts. por definir el subconjunto S
- 1 pts. por demostrar que la relación es un orden parcial

Pregunta 3

Dados dos números $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, se define la relación $\backsim \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ como:

$$q_1 \backsim q_2 \text{ si y solo si } q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}.$$

a) Demuestre que $\backsim$ es una relación de equivalencia.

b) Demuestre que $\mathbb{Q}/_{\backsim}$ es enumerable mediante el método de la lista infinita.

Solución

a) Para demostrar que $\backsim$ es una relación de equivalencia se debe demostrar que es refleja, simétrica y transitiva.

$\backsim$ es refleja Por demostrar que $\forall q \in \mathbb{Q}, q \backsim q$.

Debemos demostrar que $\forall q \in \mathbb{Q}, q - q \in \mathbb{Z}$, pero sabemos que $q - q = 0 \in \mathbb{Z}$, para cualquier q, por lo que $\backsim$ es refleja.

$\backsim$ es simétrica Por demostrar que $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 \backsim q_2 \rightarrow q_2 \backsim q_1$.

En caso de que q_1 y q_2 sean iguales, se cumple la propiedad ya que hemos demostrado que es refleja. En caso contrario, suponemos $q_1 \backsim q_2$, es decir, $q_1 - q_2 = k \in \mathbb{Z}$, debemos demostar que $q_2 - q_1 \in \mathbb{Z}$, pero sabemos que $q_2 - q_1 = -k = k \times -1 \in \mathbb{Z}$, ya que $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la multiplicación. Luego $\backsim$ es simétrica.

$\backsim$ es transitiva Por demostrar que $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}, q_1 \backsim q_2 \wedge q_2 \backsim q_3 \rightarrow q_1 \backsim q_3$.

En caso de que el antecedente sea falso, la propiedad se cumple, en caso contrario sabemos que $q_1 - q_2 = k$ y que $q_2 - q_3 = l$, con $k, l \in \mathbb{Z}$, debemos demostrar que $q_1 - q_3 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
q_1 - q_2 &= k \\
q_1 &= k + q_2 \\
q_2 - q_3 &= l \\
-q_3 &= l - q_2 \\
q_1 - q_3 &= k + q_2 + l - q_2 \\
q_1 - q_3 &= k + l
\end{aligned}$$

Luego $k + l \in \mathbb{Z}$, ya que $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la suma.

Por lo tanto, $\backsim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Pauta

- 1 pts. por demostrar que la relación es refleja
- 1 pts. por demostrar que la relación es simétrica
- 1 pts. por demostrar que la relación es transitiva

b) Notemos que las clases de equivalencia $[q]_\backsim$ representan copias de $\mathbb{Z}$ centradas en q. Por ejemplo, consideremos la clase de equivalencia de $q = 0{,}5$:

$$... - 2{,}5 \to -1{,}5 \to -0,5 \to 0{,}5 \to 1{,}5 \to 2{,}5...$$

Podemos representar la partición inducida de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q}/_\backsim = \{[q]_\backsim |\ 0 \leq q < 1 \wedge q \in \mathbb{Q}\}$$

Por lo tanto, tomando como representante a cada q, podemos enumerar $\mathbb{Q}/_\backsim$ de forma análoga como se hizo con $\mathbb{Q}$. Esto es

1. Generar la matriz de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. Iterar sobre ella utilizando diagonales
3. Verificar en cada celda (i, j) que su elemento represente una fracción irreducible de la forma $\frac{i}{j}$ y que $0 \leq \frac{i}{j} < 1$
4. Si $\frac{i}{j}$ cumple lo anterior, se imprime en la lista

Pauta

- 1 pts. por encontrar y explicar el conjunto cuociente
- 2 pts. por enumerar los elementos

Pregunta 4

a) Demuestre que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ no es enumerable.

b) Demuestre que $\mathbb{R}\backslash A$ no es enumerable, con $A \subseteq \mathbb{R}$ enumerable.
Ayuda: Suponga que existe un conjunto enumerable $S \subseteq \mathbb{R}\backslash A$.

Nota: en ambos casos **debe** explicitar una función biyectiva entre $\mathbb{R}$ y el conjunto, demostrando que efectivamente es biyectiva.

Solución

a) Consideremos la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{N} \\ x+1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ahora debemos demostrar que f es una biyección, para esto basta con probar que es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Inyectiva. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Si y es natural, entonces x_1 y x_2 son naturales. Luego se tiene que $x_1 + 1 = f(x_1) = y = f(x_2) = x_2 + 1 \to x_1 = x_2$ Si y no es natural, entonces x_1 y x_2 tampoco lo son. Luego se tiene que $x_1 = f(x_1) = y = f(x_2) = x_2$.

Sobreyectiva. Basta con encontrar la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & y \notin \mathbb{N} \\ y-1 & y \in \mathbb{N}/\{0\} \end{cases}$$

Pauta

- 1 pts. por encontrar la biyección
- 1 pts. por demostrar que es inyectiva
- 1 pts. por demostrar que es sobreyectiva
- Si el alumno encuentra una función que no es biyección, las demostraciones de inyectividad y sobreyectividad tendrán 0.5 pts.

b) Consideremos un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}/A$ numerable arbitrario. Luego, como A y S son numerables, es posible enlistarlos de la siguiente forma

$$A = \{a_0, a_1, ..., a_i, ...\}$$
$$S = \{s_0, s_1, ..., s_i, ...\}$$

Ahora, podemos definir la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/A$ biyectiva

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin A \cup S \\ s_{2i} & x = a_i \in A \\ s_{2i+1} & x = s_i \in S \end{cases}$$

Ahora debemos demostrar que f es una biyección, para esto basta con probar que es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Inyectiva. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Si $y \notin A \cup S$, entonces $x_1, x_2 \notin A \cup S$. Luego se tiene que $x_1 = f(x_1) = y = f(x_2) = x_2$. Si $y \in A \cup S$, entonces tenemos dos casos. Si $y \in S$ con índice par, entonces $s^1_{2k} = f(x_1) = y = f(x_2) = s^2_{2k} \to x_1 = x_2$ con $k \in \mathbb{N}$. Si $y \in S$ con índice impar, entonces $s^1_{2k+1} = f(x_1) = y = f(x_2) = s^2_{2k+1} \to x_1 = x_2$ con $k \in \mathbb{N}$.

Sobreyectiva. Basta con encontrar la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R}/A \to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} a_i & y = s_{2i} \in S \\ s_i & y = s_{2i+1} \in S \\ y & y \notin S \end{cases}$$

Pauta

- 1 pts. por encontrar la biyección
- 1 pts. por demostrar que es inyectiva
- 1 pts. por demostrar que es sobreyectiva
- Si el alumno encuentra una función que no es biyección, las demostraciones de inyectividad y sobreyectividad tendrán 0.5 pts.