Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

16 de agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 19:59:59 del 23 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

(a) Demuestre que para todo natural $n \geq 1$ se cumple que

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

(b) Considere la secuencia de naturales $s_0, s_1, s_2, \ldots$ definida por la siguiente recurrencia:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 4, \quad s_k = 6s_{k-1} - 5s_{k-2} \quad \text{para todo natural } k \geq 2.$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $s_n = 5^n - 1$.

Solución

a) Demostraremos usando el principio de inducción simple.

BI: Tomando $n = 1$:

$$2! = (2!)^1 = ((1+1)!)^1$$

HI: Suponemos que $2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n$ para algún $n \geq 1$.

TI: Demostraremos que $n+1$ cumple la propiedad; es decir, que

$$2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \cdot (2(n+1))! \geq (((n+1)+1)!)^{n+1}$$

Por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! &\geq ((n+1)!)^n \qquad \text{(Multiplicamos por } (2(n+1))!\text{)} \\
2! \cdot 4! \cdot 6! \cdots (2n)! \cdot (2(n+1))! &\geq ((n+1)!)^n \cdot (2(n+1))! \\
&\geq ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \\
&\geq ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)(2n+1)(2n) \cdots (n+3)(n+2)! \\
&\geq ((n+1)!)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} (n+2+k) \right) \cdot (n+2)! \\
&\geq ((n+1)!)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} (n+2) \right) \cdot (n+2)! \\
&\geq ((n+1)!)^n \cdot (n+2)^n \cdot (n+2)! \\
&\geq ((n+2)(n+1)!)^n \cdot (n+2)! \\
&\geq ((n+2)!)^n \cdot (n+2)! \\
&\geq ((n+2)!)^{n+1} \\
&\geq (((n+1)+1)!)^{n+1}
\end{aligned}$$

Concluimos que por el principio de inducción simple, la propiedad debe ser cierta para todo natural $n \geq 1$.

b) Demostraremos usando el principio de inducción fuerte.

BI: Dado que la recurrencia tiene dos casos no recursivos, debemos demostrar ambos. Tomando $n = 0$:

$$s_0 = 0 = 1 - 1 = 5^0 - 1$$

Tomando $n = 1$:

$$s_1 = 4 = 5 - 1 = 5^1 - 1$$

HI: Suponemos que para todo $k < n$ se cumple que $s_k = 5^k - 1$, con $n \geq 2$.

TI: Demostraremos que $s_n = 5^n - 1$. Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= 5^{n-1} - 1 && \text{(Multiplicamos por 6)} \\ 6s_{n-1} &= 6 \cdot (5^{n-1} - 1) \\ 6s_{n-1} &= (5+1)5^{n-1} - 6 \\ 6s_{n-1} &= 5 \cdot 5^{n-1} + 5^{n-1} - 6 \\ 6s_{n-1} &= 5^n + 5^{n-1} - 6 && (1) \end{aligned}$$

Más aún, por hipótesis de inducción también sabemos que

$$\begin{aligned} s_{n-2} &= 5^{n-2} - 1 && \text{(Multiplicamos por } -5\text{)} \\ -5s_{n-2} &= -5 \cdot (5^{n-2} - 1) \\ -5s_{n-2} &= -5 \cdot 5^{n-2} + 5 \\ -5s_{n-2} &= -5^{n-1} + 5 && (2) \end{aligned}$$

Y ahora sumando (1) y (2):

$$\begin{aligned} 6s_{n-1} - 5s_{n-2} &= 5^n + 5^{n-1} - 6 - 5^{n-1} + 5 \\ s_n &= 5^n - 1 \end{aligned}$$

Concluimos que por el principio de inducción fuerte, la propiedad debe ser cierta para todo natural.

Pauta (6 pts.)

En ambas subpreguntas:

- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 2.0 pts. por tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $| * | : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $| \bullet | = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$.

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + \text{máx}\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$

Solución

Definimos la siguiente propiedad P:

$$P(t) : |t| \leq 2^{h(t)+1} - 1, \text{ con } t \in S.$$

Demostraremos usando el principio de inducción estructural que $P(t)$ es cierta para todo $t \in S$.

BI: El caso base es $\bullet$. Por definición de tamaño y altura:

$$| \bullet | = 1, \quad h(\bullet) = 0$$

y entonces

$$| \bullet | = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{h(\bullet)+1} - 1 \leq 2^{h(\bullet)+1} - 1$$

Por lo tanto, $P(\bullet)$ es verdadera.

HI: Sean $t_1, t_2 \in S$ tales que $P(t_1)$ y $P(t_2)$ son verdaderas.

TI: Sea $t = \bullet(t_1, t_2) \in S$. Debemos demostrar que $P(t)$ es cierta.

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$|t_1| \leq 2^{h(t_1)+1} - 1 \tag{1}$$
$$|t_2| \leq 2^{h(t_2)+1} - 1 \tag{2}$$

Sumamos (1) y (2):

$$\begin{aligned}
|t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 + 2^{h(t_2)+1} - 1 && \text{(Sumamos 1)}\\
1 + |t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 + 2^{h(t_2)+1} - 1 + 1 && \text{(Definición de largo)}\\
|t| &\leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 &&\\
|t| &\leq 2^{max\{h(t_1),h(t_2)\}+1} + 2^{max\{h(t_1),h(t_2)\}+1} - 1 &&\\
|t| &\leq 2 \cdot 2^{max\{h(t_1),h(t_2)\}+1} - 1 && \text{(Definición de altura)}\\
|t| &\leq 2 \cdot 2^{h(t)} - 1 &&\\
|t| &\leq 2^{h(t)+1} - 1 &&
\end{aligned}$$

y luego $P(t)$ es cierta con $t = \bullet(t_1, t_2) \in S$.

En conclusión, por principio de inducción estructural, queda demostrado que para todo árbol binario $t \in S$, se cumple $P(t)$.

Pauta (6 pts.)

- 2 puntos por caso base.
- 1 punto por especificar dos árboles en la hipótesis inductiva.
- 1 punto por tesis inductiva.
- 1 punto por uso de las fórmulas entregadas.
- 1 punto por concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.