PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA TAREA 4

Pregunta 1

Sean $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ dos funciones cualquiera desde los conjuntos A a B y B a C respectivamente, con A, B y C distintos de vacío.

Pregunta 1.a

Demuestre que si $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva, entonces existe $i\ in\{1, 2\}$ tal que f_i es sobreyectiva.

Solución:

Suponga que $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva. Demostraremos que f_2 es siempre sobreyectiva. Por definición, debemos probar que para todo $c \in C$, existe $b \in B$ tal que $f(b) = c$.

Consideramos un $c \in C$ cualquiera. Como $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva y $c \in C$ entonces existe $a \in A$ tal que $f_1 \circ f_2(a) = c$. Por definición de la composición de funciones, sabemos que existe $b \in B$ tal que:

$$f_1(a) = b \quad \text{y} \quad f_2(b) = c.$$

Por lo tanto, $f_2(b) = c$ para algún $b \in B$. De esto podemos concluir que f_2 es sobreyectiva.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por todo correcto.

(**3 Puntos**) Por presentar errores menores en la demostración.

(**2 Puntos**) Por notar que f_2 es la función sobreyectiva y dar breve argumento de demostración.

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 1.b

Demuestre que si $f_1 \circ f_2$ es inyectiva, entonces existe $i \in\ 1, 2\}$ tal que f_i es inyectiva.

Solución:

Suponga que $f_1 \circ f_2$ es inyectiva. Probaremos que f_1 es siempre inyectiva, esto es, que para todo $a_1, a_2 \in A$, si $f_1(a_1) = f_1(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$.

Sea $a_1, a_2 \in A$ tal que $f_1(a_1) = f_1(a_2)$. Demostraremos entonces que $a_1 = a_2$. Como $f_1(a_1) = f_1(a_2)$, entonces deducimos que $f_1 \circ f_2(a_1) = f_1 \circ f_2(a_2)$ aplicando f_2 en ambos lados de la igualdad. Luego, como $f_1 \circ f_2$ es inyectiva y $f_1 \circ f_2(a_1) = f_1 \circ f_2(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$ por la definición de inyectividad, que es lo que queríamos demostrar.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por todo correcto.

(**3 Puntos**) Por presentar errores menores en la demostración.

(**2 Puntos**) Por notar que f_1 es la función inyectiva y dar breve argumento de demostración.

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2

Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $A \subseteq \{0, ..., n\}$, decimos que A es un emphintervalo en $\{0, ..., n\}$ si existen $a, b \in A$ tal que:

$$A = \{c \in \{0, ..., n\} \mid a \leq c \leq b\}$$

y lo denotamos por $[a, b]$. Por otro lado, para $a, b \in \{0, ..., n\}$ definimos el *intervalo absoluto* entre a y b como

$$[\![a, b]\!] := [\text{mín}(\{a, b\}), \text{máx}(\{a, b\})].$$

Sea $S \subseteq \{0, ..., n\}$ un conjunto distinto de vacío. Considere la relación $\sim_S \subseteq \{0, ..., n\} \times \ 0, ..., n\}$ tal que para todo $a, b \in \{0, ..., n\}$, $a \sim_S b$ si, y solo si,

$$[\![a, b]\!] \cap S \neq \varnothing \to [\![a, b]\!] \subseteq S.$$

Por ejemplo, tomando $n = 20$, para $S = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 15\}$ se cumple que $7 \ sim_S 5$ y $12 \sim_S 13$ pero $3 \not\sim_S 1$.

Pregunta 2.a

Para todo $S \subseteq \{0, ..., n\}$, $\sim_S$ es una relación de equivalencia sobre $\{0, ..., n\}$.

Solución:

Sea $S \subseteq \{0, \ldots, n\}$. Primero, note que se cumple la siguiente equivalencia lógica respecto a la definición de la relación $\sim_S$:

$$[\![a, b]\!] \cap S \neq \phi \to [\![a, b]\!] \subseteq S \quad \equiv \quad [\![a, b]\!] \cap S = \varnothing \ \vee \ [\![a, b]\!] \subseteq S \tag{1}$$

Esto resulta útil para visualizar que $a \sim_S b$ ssi se cumple alguna de las afirmaciones de la disyunción del lado derecho de (1). Dado eso, en general se analizarán esos dos casos.

Se procede entonces a demostrar que $\sim_S$ es relación de equivalencia:

1. $\sim_S$ es refleja

   Sea $a \in \{0, \ldots, n\}$, consideremos dos posibles casos:

   - Si $a \in S$ entonces $[\![a, a]\!] = [a, a] = \{a\} \subseteq S$, por lo que $a \sim_S a$.
   - Si $a \notin S$ entonces $[\![a, a]\!] = \{a\} \cap S = \phi$, por lo que $a \sim_S a$.

2. $\sim_S$ es simétrica

   Sean $a, b \in \{0, ..., n\}$ tal que $a \sim_S b$. En base a (1) existen dos casos:

   - Si $[\![a, b]\!] \subseteq S$ entonces tenemos por la definición de intervalo absoluto que $[\![b, a]\!] = [\![a, b]\!] \subseteq S$. Por lo tanto $b \sim_S a$
   - Si $[\![a, b]\!] \cap S = \varnothing$ luego nuevamente por el hecho de que $[\![b, a]\!] = [\![a, b]\!]$ se cumplirá también que $[\![b, a]\!] \cap S = \varnothing$. Por lo tanto $b \sim_S a$.

3. $\sim_S$ es transitiva

   Considere ahora $a, b, c \in \{0, ..., n\}$ tal que $a \sim_S b$ y $b \sim_S c$. Queremos demostrar que $a \sim_S c$. Por (1) tendremos ahora 4 casos posibles:

   - $([\![a, b]\!] \cap S = \varnothing \ \wedge \ [\![b, c]\!] \subseteq S) \quad \vee \quad ([\![a, b]\!] \subseteq S \ \wedge \ [\![b, c]\!] \cap S = \varnothing)$

     Estos dos casos no resultan ser relevantes ya que es fácil ver que se tiene la contradicción $b \in S \wedge b \notin S$. Por lo que no pueden ocurrir.

- $([\![a,b]\!] \cap S = \varnothing \;\wedge\; [\![b,c]\!] \cap S = \varnothing) \quad \vee \quad ([\![a,b]\!] \subseteq S \;\wedge\; [\![b,c]\!] \subseteq S)$

  Estos casos son similares. Por lo que, sin pérdida de generalidad, asuma que $a \leq b$. Esto genera 3 sub-casos.
  - Si $a \leq c \leq b$ luego $\quad [\![a,c]\!] = [a,c] \subseteq [a,b] = [\![a,b]\!]$
  - Si $c < a \leq b$ luego $\quad [\![a,c]\!] = [c,a] \subseteq [c,b] = [\![b,c]\!]$
  - Si $a \leq b < c$ luego $\quad [\![a,c]\!] = [a,b] \cup [b,c] = [\![a,b]\!] \cup [\![b,c]\!]$

  Nótese que en todos los casos se cumple que

  $$[\![a,c]\!] \subseteq [\![a,b]\!] \cup [\![b,c]\!], \tag{2}$$

  y además, debido al caso en que estamos, se tiene que

  $$([\![a,b]\!] \cup [\![b,c]\!]) \cap S = \varnothing \quad \vee \quad ([\![a,b]\!] \cup [\![b,c]\!]) \subseteq S. \tag{3}$$

  Por lo tanto, usando (2) y (3) junto a propiedades básicas de teoría de conjuntos, concluímos que

  $$[\![a,c]\!] \cap S = \varnothing \quad \vee \quad [\![a,c]\!] \subseteq S$$

  Y así $a \sim_S c$.

Ya que $\sim_S$ es refleja, simétrica y transitiva, queda demostrado que $\sim_S$ es una relación de equivalencia.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por todo correcto.

(**3 Puntos**) Por solo demostrar que $\sim_S$ es transitiva o bien presentar errores menores en la demostración completa.

(**2 Puntos**) Por demostrar solo que $\sim_S$ es simétrica y refleja correctamente.

(**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.b

Para todo $S \subseteq \{0, ..., n\}$ y $c \in \{0, ..., n\}$, la clase de equivalencia $[c]_{\sim_S}$ es un intervalo en $\{0, ..., n\}$.

Solución:

Sea $S \subseteq \{0, \ldots, n\}$ y $c \in \{0, \ldots, n\}$ un elemento cualquiera. Considere $E = [c]_{\sim_S}$ la clase de equivalencia de c según $\sim_S$ (olvídese de c, lo que nos interesa realmente es una clase de equivalencia $E \in \{0, \ldots, n\}/\sim_S$ cualquiera).

Sean $a, b \in E$ tal que $a \leq b$. Se demostrará que el intervalo $[a,b]$ siempre está contenido en E. Por contradicción, asuma que $[a,b] \nsubseteq E$. Esto quiere decir que

$$\exists x \in [a,b].\ x \notin E. \tag{4}$$

Es claro que $a \sim_S b$ ya que a y b pertenecen a la misma clase de equivalencia. Luego, por definición de la relación $\sim_S$, se que

$$[a,b] \cap S = \varnothing \;\vee\; [a,b] \subseteq S. \tag{5}$$

Sin embargo, notar que

$$[a,x] \cup [x,b] = [a,b]$$

Por lo que $[a,x] \subseteq [a,b]$. Entonces, debido a (5), ocurre que:

- Si $[a,b] \cap S = \varnothing$, entonces $[a,x] \cap S = \varnothing$.
- Si $[a,b] \subseteq S$ entonces $[a,x] \subseteq S$

Es decir, $[a,x] \cap S = \varnothing \vee [a,x] \subseteq S$ se cumple, por lo que $a \sim_s x$, pero eso implicaría necesariamente que $x \in E$ lo que contradice a lo estipulado en (4).

Entonces $\forall a, b \in E$ tal que $a \leq b$, se cumple que $[a,b] \subseteq E$. En particular, tomando $a = \text{mín}\, E$ y $b = \text{máx}\, E$, se tiene

$$E = [\text{mín}\, E, \text{máx}\, E]$$

ya que siempre es cierto que $E \subseteq [\text{mín}\, E, \text{máx}\, E]$ por la definición de mínimo, máximo e intervalo.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por todo correcto.

(**3 Puntos**) Por presentar errores menores en la demostración.

(**2 Puntos**) Por presentar errores mayores en la demostración.

(**0 Puntos**) En otro caso.