



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E
IGNACIO VERGARA

Ayudantía 14

1 de diciembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Buggedo - N. Alvarado- B. Barías

Ejercicio 1 | Lógica

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es redundante si existe una fórmula α tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ , es consecuencia lógica del conjunto resultante. Además, decimos que Σ es redundante de a pares si existen α y $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$.

- a) Demuestre que si existen α y $\beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y con $\alpha \equiv \beta$, entonces el conjunto es redundante.
- b) ¿Es cierta la siguiente afirmación? Demuestre.

Si Σ es redundante, entonces es redundante de a pares.

Ejercicio 2 | Teoría de Conjuntos

Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si

$$\forall x \in A \exists r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subseteq A \text{ donde } B_r(x) := \{y \in X : |x - y| < r\}$$

Demuestre que para todo $r > 0$, $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $B_r(x)$ es abierto.

Hint: Utilizar que $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3 | Algoritmos

Considere el siguiente algoritmo A para analizar en esta pregunta:

Algorithm 1: ExistsPath

Data: Un grafo dirigido $G = (V, E)$ y nodos $u, v \in V$.

Result: 1 si existe un camino entre u y v , 0 en caso contrario.

```
1  $i = 1$ ;  
2  $M = E$ ;  
3 while  $i \leq |V|$  do  
4   if  $(u, v) \in M$  then  
5     return return 1;  
6   else  
7      $M = M \circ E$ ;  
8      $i = i + 1$ ;  
9 return 0;
```

Utilice la función de tamaño de input $|((V, E), u, v)| = |V| = n$. Además, considere que el costo computacional para la línea 7 (esto es, computar $M \circ E$) es $\Theta(n^3)$ y para todas las demás líneas el costo es constante. Encuentre una función f tal que peor-caso $A(n) \in \Theta(f(n))$ y una función g tal que mejor-caso $A(n) \in \Theta(g(n))$. Demuestre ambos resultados.

Ejercicio 4 | Grafos

Sea G un grafo. Definimos el diámetro de G como el más largo de los caminos más cortos entre dos vértices de G .

Demuestre que no puede ser que G y \bar{G} tengan ambos diámetro mayor que 3.