Examen

6 de diciembre de 2022

Profesores: Fernando Suárez - Sebastián Bugedo - Nicolás Alvarado

Instrucciones

- La duración del examen es de 2:30 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Las preguntas del examen están etiquetadas como materia nueva o materia antigua.
- Todas **las preguntas de materia nueva son obligatorias**.
- De las preguntas de materia antigua, **debe responder 2**.
  - Debe entregar sólo las preguntas seleccionadas de materia antigua y todas las de materia nueva.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Materia antigua

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula α tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.
Además, decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{a\} \models \beta$.

a) Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

b) ¿Es cierta la siguiente afirmación? Demuestre.

Si Σ es redundante, entonces es redundante de a pares.

Solución

a) Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera y sean $\alpha, \beta \in \Sigma$ tales que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, mostraremos que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$.

Sea σ una valuación cualquiera tal que $\sigma(\Sigma \setminus \{\alpha\}) = 1$. Como $\beta \in \Sigma$, $\sigma(\beta) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$, sabemos que $\sigma(\alpha) = 1$. Por lo tanto $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$ y concluimos el conjunto Σ es redundante.

b) Proporcionamos un contraejemplo para argumentar que la afirmación es falsa. Definimos $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Probaremos que este conjunto es redundante, pero no es redundante de a pares, para lo cual consideramos la tabla de verdad de las fórmulas involucradas

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Para mostrar que es redundante, consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$. Vemos de la cuarta fila de la tabla, que la única valuación que satisface $\Sigma \setminus \{\alpha\}$ también satisface a α.

Para mostrar que Σ no es redundante de a pares, debemos comprobar tomando fórmulas $\alpha, \beta \in \Sigma$ que no hay consecuencias lógicas $\{\alpha\} \models \beta$.

- $\{p\} \models p \leftrightarrow q$ no se cumple (fila 2)
- $\{p\} \models q$ no se cumple (fila 2)
- $\{p \leftrightarrow q\} \models p$ no se cumple (fila 1)
- $\{p \leftrightarrow q\} \models q$ no se cumple (fila 1)
- $\{q\} \models p$ no se cumple (fila 3)
- $\{q\} \models p \leftrightarrow q$ no se cumple (fila 3)

Pauta (6 pts.)

a) 3pts.

b)
- 1pt. por mencionar falsedad de la afirmación.
- 2pts. por dar un contraejemplo correcto y argumentar.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Materia antigua

a) Sean A, B y C conjuntos, demuestre que $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$.

b) Sean R y S relaciones de equivalencia sobre un conjunto A. Demuestre que $R \cap S$ es una relación de equivalencia sobre A.

Solución

a) ($\subseteq$) Sea $a \in A\backslash(B \cup C)$. Debemos demostrar que $a \in (A\backslash B)\backslash C$.

$$\begin{aligned}
a \in A\backslash(B \cup C) &\Rightarrow a \in A \wedge a \notin (B \cup C) && \text{(def diferencia)}\\
&\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) && \text{(def. unión y De Morgan)}\\
&\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C && \text{(asociatividad)}\\
&\Rightarrow a \in (A\backslash B)\backslash C && \text{(def. diferencia)}
\end{aligned} \tag{1}$$

Concluimos que $A\backslash(B \cup C) \subseteq (A\backslash B)\backslash C$

($\supseteq$) Sea $a \in (A\backslash B)\backslash C$. Debemos demostrar que $a \in A\backslash(B \cup C)$.

$$\begin{aligned}
a \in (A\backslash B)\backslash C &\Rightarrow a \in (A\backslash B) \wedge a \notin C && \text{(def diferencia)}\\
&\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C && \text{(def diferencia)}\\
&\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) && \text{(Asociatividad)}\\
&\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \cup C) && \text{(def union y De Morgan)}\\
&\Rightarrow a \in A\backslash(B \cup C) && \text{(def diferencia)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Concluimos que $(A\backslash B)\backslash C \subseteq A\backslash(B \cup C)$. Y por lo tanto $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B)\backslash C$.

b) Sean R y S relaciones de equivalencia en un conjunto A. Mostraremos que $R \cap S$ es de equivalencia.

- **Refleja:** Dado $a \in A$ se tiene que si $(a, a) \in R$ y que $(a, a) \in S$. Luego, por deifnición de intersección tenemos que $(a, a) \in R \cap S$. Como a es arbitrario se cumple para todo elemento de A y concluimos que $R \cap S$ es refleja.
- **Simétrica:** Suponemos que $(a, b) \in R \cap S$. Por definición de interescción, sabemos que $(a, b) \in R$ y $(a, b) \in S$. Luego, como R y S son simétricas, se tiene que $(b, a) \in R$ y $(b, a) \in S$. Finalmente, por definición de interescción obtenemos que $(b, a) \in R \cap S$, concluimos que $R \cap S$ es simétrica.
- **Transitiva:** Suponemos que $(a, b) \in R \cap S$ y $(b, c) \in R \cap S$. Por definición de interescción, sabemos que $(a, b) \in R$ y $(a, b) \in S$, y que $(b, c) \in R$ y $(b, c) \in S$. Como R y S son transitivas, obtenemos que $(a, c) \in R$ y $(a, c) \in S$. Por definición de interescción conclumos que $(a, c) \in R \cap S$ y por ende que $R \cap S$ es transitiva

Pauta (6 pts.)

a) 1.5 ptos por cada dirección.

b) 1 pto por cada propiedad.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 - Materia antigua

a) Sea F_n la sucesión de Fibonacci, definida por

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Demuestre que $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

b) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$, demuestre que $[a, b] \approx [c, d]$[1].

Solución

a) Demostraremos por inducción simple sobre n.

- Caso base. Para $n = 1$

$$F_0 F_2 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$$

- Hipótesis inductiva. Suponemos

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

- Tesis inductiva. Buscamos demostrar que

$$F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

Usando la definición recursiva de F_{n+2} en el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned} F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n \cdot (F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 \\ &= F_n \cdot F_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1} \cdot (F_n - F_{n+1}) + F_n^2 \end{aligned}$$

Como $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$

$$\begin{aligned} F_{n+1} \cdot (F_n - F_{n+1}) + F_n^2 &= -F_{n+1} \cdot F_{n-1} + F_n^2 \\ &= -(F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

b) Definimos la función $f : [a, b] \to [c, d]$ dada por la recta

$$f(x) = \frac{d - c}{b - a}(x - a) + c$$

Probaremos que es biyectiva.

[1]Si utiliza una función biyectiva, debe demostrar que su función cumple con las propiedades necesarias para ser una biyección.

- Inyectividad. Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Por definición de f

$$\frac{d-c}{b-a}(x_1 - a) + c = \frac{d-c}{b-a}(x_2 - a) + c$$

de donde se deduce que $x_1 = x_2$.

- Sobreyectividad. Sea $y \in [c,d]$. Es decir,

$$\begin{array}{lcl} c \leq & y & \leq d \\ 0 \leq & y - c & \leq d - c \\ 0 \leq & (b-a)(y-c) & \leq (b-a)(d-c) \\ 0 \leq & \frac{b-a}{d-c}(y-c) & \leq b - a \\ a \leq & \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a & \leq b \end{array}$$

Por lo tanto, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts caso base.
- 0.5 pts por HI.
- 2 pts por TI.

b)
- 2 ptos por entregar función.
- 1 pto por demostrar o argumentar por qué es biyectiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 - Materia antigua

a) Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funciones crecientes tales que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Demuestre que $\log(f(n)) \in \mathcal{O}(\log(g(n)))$.

b) Demuestre que en todo grafo deben existir al menos dos vértices con el mismo grado.

Solución

a) Sea $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$. Entonces existen c, k reales tal que $f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq k$. Entonces, como f, g y log son funciones crecientes, se tiene que

$$\log(f(n)) \leq \log c + \log(g(n))$$

para todo $n \geq k$. En particular, existe algún ℓ tal que $\ell \geq k$ y $\log c \leq \log(g(n))$. De esta forma, tenemos que $\log(f(n)) \leq 2\log(g(n))$ para todo $n \geq \ell$, lo que implica que $\log(f(n)) \in \mathcal{O}(\log(g(n)))$.

b) Consideremos el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, n\}$. Sabemos que $\forall v \in V\colon 0 \leq \delta_G(v) \leq n-1$. Por contradicción, supongamos que todos las vértices del grupo tienen un grado distinto dentro del grafo. Esto implica que los grados de todos lo vértices son distintos. En particular, debe existir un vértice u con $\delta_G(u) = 0$ (no tiene vecinos) y otro v con $\delta_G(v) = n-1$ (vecinos de todos los vértices), pero esto significa que v es vecino de u, lo que contradice que u no tiene vecinos.

Pauta (6 pts.)

a) 3 ptos.

b) 3 ptos.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 5 - Materia nueva (obligatoria)

Considere el sistema

$$
\begin{aligned}
x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\
x &\equiv a_2 \pmod{m_2}
\end{aligned}
$$

Demuestre que el sistema tiene solución si y solo si $\mathrm{MCD}(m_1, m_2) | (a_1 - a_2)$.

Solución

($\Rightarrow$) Sea d =MCD(m_1, m_2). Si el sistema tiene solución, entonces existe $x^* \in \mathbb{Z}$ tal que $x^* = a_1 + m_1 k_1 = a_2 + m_2 k_2$ para algunos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. De lo anterior, tenemos que $a_1 - a_2 = m_2 k_1 - m_1 k_2$. Finalmente, como d divide a m_1 y a m_2 (por ser el máximo comúh divisor entre ambos) obtenemos que $\mathrm{MCD}(m_1, m_2) | (a_1 - a_2)$.

($\Leftarrow$) Suponemos $d | (a_1 - a_2)$, en otras palabras, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a_1 - a_2 = dk$. Utilizando el algoritmo extendido de Euclides, sabemos que existen enteros s, t tales que $d = sm_1 + tm_2$. Si juntamos lo anterior obtenemos $a_1 - a_2 = dk = (sm_1 + tm_2)k$. Luego podemos obtener $a_1 + (-sk)m_1 = a_2 + (tk)m_2$, lo que significa que existe un entero z tal que $z \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ m_1)$ y $z \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ m_2)$.

Pauta (6 pts.)

a) 4 ptos por ($\Rightarrow$).

b) 2 ptos por ($\Leftarrow$).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 6 - Materia nueva (obligatoria)

Considere el siguiente problema:

$$\text{SAT-3CNF} = \{\varphi \mid \varphi \in L(P) \text{ en 3-CNF satisfacible.}\}$$

En otras palabras, las instancias $I_{\text{SAT-3CNF}}$ son todas las fórmulas de la lógica proposicional en 3-CNF y el lenguaje $L_{\text{SAT-3CNF}}$ son todas las fórmulas en 3-CNF que tienen por lo menos una valuación que las satisfacen. Demuestre que SAT-CNF $\propto$ SAT-3CNF [2].

Solución

La reducción la haremos desde SAT-CNF. Dado un conjunto $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas, construiremos un nuevo conjunto C' de cláusulas de tamaño 3 tal que C sea satisfacible si y sólo si C' sea satisfacible. Sea $c_i \in C$ definida por los literales $\{l_1, \dots, l_k\}$. El procedimiento dependerá del tamaño de la cláusula:

- $k = 1$.

  En este caso $c_i = \{l_1\}$. Agregamos variables adicionales $\{x_1, x_2\}$ y construimos las siguientes cláusulas: $C'_i = \{\{l_1, x_1, x_2\}, \{l_1, \bar{x_1}, x_2\}, \{l_1, x_1, \bar{x_2}\}, \{l_1, \bar{x_1}, \bar{x_2}\}\}$.

- $k = 2$.

  En este caso $c_i = \{l_1, l_2\}$. Agregamos una variable adicional x_1 y construimos las siguientes cláusula: $C'_i = \{\{l_1, l_2, x_1\}, \{l_1, l_2, \bar{x_1}\}\}$.

- $k = 3$.

  En este caso $c_i = \{l_1, l_2, l_3\}$ ya está en 3CNF y no la alteramos. Luego $C'_i = \{c_i\}$.

- $k > 3$.

  En este caso $c_i = \{l_1, \dots, l_k\}$. Agregamos $k - 3$ variables adicionales $\{x_1, \dots, x_{k-3}\}$ y construimos cláusulas

$$C'_i = \{\{l_1, l_2, x_1\}, \{\bar{x_1}, l_3, x_2\}, \{\bar{x_2}, l_4, x_3\}, \dots, \{\bar{x_{k-3}}, l_{k-1}, l_k\}\}$$

Finalmente tomamos $C' = \bigcup C'_i$. Además, notemos que la construcción propuesta toma tiempo polinomial acotado por $n \cdot m$. Por otro lado, es posible demostrar que la reducción es correcta.

($\Rightarrow$) Sea C satisfacible. Construiremos una valuación que satisface a todas las cláusulas de C'. Para esto usamos la misma valuación σ que satisface C pero la extendemos para las variables auxiliares. Cuando $k \in \{1, 2, 3\}$, podemos asignar valores de verdad arbitrarios. En el caso en que $k > 3$, sabemos que existe un $l_j \in \{l_1, \dots, l_k\}$ tal que

[2] Debe demostrar que su reducción es correcta.

$\sigma(l_j) = 1$. Si $j = 1$ o $j = 2$, entonces la valuación debe hacer 0 a todas las variables auxiliares. Si $j = k-1$ o $j = k$, entonces la valuación debe hacer 1 a todas las variables auxiliares. Si $k \in \{3, \ldots, k-2\}$, entonces la valuación debe hacer 1 a todo x_p con $p < j - 1$ y 0 al resto.

($\Leftarrow$) Por contrapositivo, suponemos que C no es satisfacible. Luego, existe por lo menos un c_i que no es satisfacible y todos sus l_i son 0. Entonces, por construcción todo C_i' es falso en el caso en que los l_i son 0, y por lo tanto C' no es satisfacible.

Pauta (6 pts.)

- 1 pto. por caso $k = 1$.
- 1 pto. por caso $k = 2$.
- 1 pto. por caso $k = 3$.
- 1 pto. por caso $k > 3$.
- 1 pto. por ($\Rightarrow$)
- 1 pto. por ($\Leftarrow$)

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.