Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 5

15 de septiembre

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de obejtos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si
$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$
- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de A (relativo a $\mathcal{U}$) es
$$A^c = \mathcal{U} \backslash A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B$, $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$. $X = \emptyset$.

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$
Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como
$$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

$$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Leyes

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$
2. Elemento neutro:
   $A \cup \emptyset = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$
3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
7. Leyes de De Morgan:
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. Elemento inverso:
   $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \emptyset$
9. Dominación:
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \emptyset = \emptyset$

Ejercicio 1 — Conjuntos nociones básicas

Sean A, B, C y D conjuntos. Para las siguientes afirmaciones, demuestre o de un contra-ejemplo.

a) (A \B) ∪ (B \A) = (A ∪ B) \(A ∩ B)

b) (A ∪ B) x (C ∪ D) = (A × C) ∪ (B × D)

Solución:

a) Verdadero
Para demostrar que esta afirmación es verdadera, hay que demostrar que
(A \B) ∪ (B \A) ⊆ (A ∪ B) \(A ∩ B)
y que
(A ∪ B) \(A ∩ B) ⊆ (A \B) ∪ (B \A)

Para la primera parte de la demostración, tenemos lo siguiente
Si x ∈ (A \B) ∪ (B \A) →
(x ∈ A ∧ x ∉ B) ∨ (x ∈ B ∧ x ∉ A) → (por definición)
(x ∈ A ∨ x ∈ B) ∧ (x ∈ A ∨ x ∉ A) ∧ (x ∉ B ∨ x ∈ B) ∧ (x ∉ B ∨ x ∉ A) → (por distribución)
(x ∈ A ∨ x ∈ B) ∧ (x ∉ B ∨ x ∉ A) → (por tautología)
(x ∈ (A ∨ B)) ∧ ¬(x ∈ (B ∧ A)) → (agrupando términos y por de morgan)
x ∈ (A ∪ B) \(A ∩ B) → (por definición)

Por lo tanto se concluye que si x pertenece a (A \B) ∪ (B \A) entonces x pertenece a (A ∪ B) \(A ∩ B)
Por lo que
(A \B) ∪ (B \A) ⊆ (A ∪ B) \(A ∩ B)

Para la segunda parte de la demostración, tenemos lo siguiente
Si x ∈ (A ∪ B) \(A ∩ B)→
(x ∈ A ∨ x ∈ B) ∧ ¬(x ∈ B ∧ x ∈ A) → (por definición)
(x ∈ A ∨ x ∈ B) ∧ (x ∉ B ∨ x ∉ A) → (por de morgan)
(x ∈ A ∧ x ∉ B) ∨ (x ∈ A ∧ x ∉ A) ∨ (x ∈ B ∧ x ∉ B) ∨ (x ∈ B ∧ x ∉ A) → (por distribución)
(x ∈ A ∧ x ∉ B) ∨ (x ∈ B ∧ x ∉ A) → (por contradicción)
x ∈ (A \B) ∪ (B \A)→ (por definición)
Por lo tanto se concluye que si x pertenece a (A ∪ B) \(A ∩ B) entonces x pertenece a (A \B) ∪ (B \A)
Por lo que
(A ∪ B) \(A ∩ B) ⊆ (A \B) ∪ (B \A)

Por lo tanto, como sabemos que
(A \B) ∪ (B \A) ⊆ (A ∪ B) \(A ∩ B)
y que
(A ∪ B) \(A ∩ B) ⊆ (A \B) ∪ (B \A)

Hemos demostrado que (A \B) ∪ (B \A) = (A ∪ B) \(A ∩ B)

b) Falso
Para demostrar que esta afirmación es falsa, encontraremos un contraejemplo.
Sea A = {1,2} B = {3}, C ={4,6} y D = {7}
(A ∪ B) x (C ∪ D) = {(1,4), (1,6), (1,7), (2,4), (2,6), (2,7), (3,4), (3,6), (3,7)}
Luego,
(A × C) ∪ (B × D) = { (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,7)}
Se puede observar que estos dos conjuntos son distintos. Por ejemplo, (1,7) pertenece al primer conjunto y no al segundo.

Ejercicio 2 — Conjuntos

Dada una secuencia de N de conjuntos $A_1, A_2, \ldots A_N$, defina la secuencia $B_1 = A_1$ y $B_i = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$ para $i = 2, 3, \ldots, N$. Pruebe que:

I) $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall i \neq j,$ con $i, j \leq N$.

II) $\cup_{i=1}^N B_i = \cup_{i=1}^N A_i$.

Solución:

I) Sin pérdida de generalidad podemos decir que $i < j$.

Luego cualquier elemento b tal que $b \in B_i$ implica que $b \in A_i$ ya que A_i está dentro de la conjunción que define a B_i. Ahora supongamos que $b \in B_j$, entonces por el mismo argumento anterior $b \in A_i^c$.

Pero llegamos a que $b \in A_i$ y $b \in A_i^c$, lo cual es contradictorio. Así, todo elemento que pertenece a B_i no pertenece a B_j, por lo que $B_i \cap B_j = \emptyset$.

II) Llamaremos $A = \cup_{i=1}^N A_i$ y $B = \cup_{i=1}^N B_i$. Demostraremos lo pedido por doble contención.

Primero $B \subseteq A$. Sea $b \in B$, luego por principio del buen orden existe i minimal tal que $b \in B_i$. Como $B_i = \left(\cap_{j=1}^{i-1} A_j^c\right) \cap A_i$ entonces $b \in A_i$. Así, $b \in A$.

Ahora demostraremos $A \subseteq B$. Por principio del buen orden existe i minimal tal que $a \in A_i$. Luego nos gustaría que $a \in B_i = \left(\cap_{j=1}^{i-1} A_j^c\right) \cap A_i$. Supongamos que no, entonces necesariamente $a \notin \cap_{j=1}^{i-1} A_j^c$ pero por Ley De Morgan esto implica que $a \in \cup_{j=1}^{i-1} A_j$ pero esto quiere decir que existe un $j < i$ tal que $a \in A_j$, lo cual es contradictorio ya que habíamos establecido que i era el menor que cumplía dicha propiedad. Así $a \in B_i$, por lo que $a \in B$.

Como demostramos que $B \subseteq A$ y $A \subseteq B$ entonces $A = B$.

Ejercicio 3 — Conjuntos

Sea $\Omega \neq \emptyset$, diremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un sigma-álgebra sobre Ω si,

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Si $B \in \mathcal{F}$, entonces $B^c \in \mathcal{F}$
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$

a) Dé un ejemplo de un sigma álgebra, si es necesario especificar Ω.

b) Suponga que $\mathcal{F}$ es un sigma álgebra sobre Ω. Considerando $A \subseteq \Omega$, demuestre que

$$\mathcal{F}_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$$

es un sigma álgebra sobre A.

Solución:

a) Para cualquier Ω basta con tomar $\mathcal{F} = 2^\Omega$ o $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$.

Sea $\Omega = \{0, 1, 2\}$, luego podemos definir $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, \Omega\}$.

b) Se debe verificar cada propiedad del sigma álgebra,

- P.D: $A \in \mathcal{F}_A$

  Sabemos que $\Omega \in \mathcal{F}$, luego como $\Omega \cap A = A$ se tiene (por definición de $\mathcal{F}_A$) que $A \in \mathcal{F}_A$.

- P.D: Si $B \in \mathcal{F}_A$, entonces $B^c \in \mathcal{F}_A$ (considerando el complemento con respecto a A)

  Supongamos que $B \in \mathcal{F}_A$, luego (por definicion de $\mathcal{F}_A$) existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $B = C \cap A$. $\mathcal{F}$ es un sigma álgebra sobre Ω, por lo cual $C^c \in \mathcal{F}$, luego $C^c \cap A \in \mathcal{F}_A$, i.e, $B^c \in \mathcal{F}_A$ (con B^c el complemento de B con respecto a A, $B^c = C^c \cap A$).

- P.D: Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_A$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}_A$

  Supongamos que existe $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_A$, luego (por definición de $\mathcal{F}_A$) existe $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $B_n = C_n \cap A \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F}$ es un sigma álgebra sobre Ω, por lo cual $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{F}$ luego $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \cap A \in \mathcal{F}_A$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(C_n \cap A) \in \mathcal{F}_A$, y como $B_n = C_n \cap A \ \forall n \in \mathbb{N}$ obtenemos finalmente que, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n) \in \mathcal{F}_A$.