Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA TAREA 1

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Para demostrar que el conjunto $\{\star, \wedge\}$ es funcionalmente completo una posibilidad consiste en:

1. Debemos definir la negación, para lo cuál se puede definir como:

$$\neg p \equiv p \star p$$

y verificar/argumentar que las tablas de verdad son equivalentes.

2. Debemos definir la disyunción, lo cual se puede hacer con equivalencias lógicas usando la Ley de Morgan con la conjunción y la negación (previamente demostrada):

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv p \vee q$$

3. Finalmente se puede concluir con lo anterior y por Teorema de DNF o de CNF que el conjunto $\{\star, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

- (**4 Puntos**) Demostración correcta y clara.
- (**3 Puntos**) Demostración con pequeños errores u omisiones.
- (**0 Puntos**) En otros casos.

Pregunta 1.2

Nos piden demostrar que el conjunto $\{\vee, \wedge\}$ no es funcionalmente completo, lo cual haremos por contradicción. Supongamos que existe una fórmula proposicional $\varphi(p)$ que solo usa conectivos lógicos del conjunto $\{\vee, \wedge\}$, tal que $\varphi(p) \equiv \neg p$. Además, sabemos que:

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

Por lo tanto, podemos reemplazar iterativamente en $\varphi(p)$ según las equivalencias mencionadas anteriormente y concluir que $\varphi(p) \equiv p$, lo cual es una contradicción con lo que habíamos planteado, por lo que se concluye que $\{\vee, \wedge\}$ no es funcionalmente completo.

Otra alternativa (máximo 3 puntos). Sabemos que:

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

$$1 \lor 1 \equiv 1$$

Entonces en el caso de que todos los valores de las variables en una fila en una tabla de verdad sean 1, esa fila nunca podrá tomar el valor 0, por lo que nunca se podrían construir tablas de verdad a partir de $\{\lor, \land\}$ que tengan dicha fila con valor 0. Análogamente, si todos los valores de variables en una tabla de verdad son 0, esa fila nunca podrá tomar el valor 1, por lo que $\{\lor, \land\}$ no podría ser funcionalmente completo.

- (**4 Puntos**) Demostración correcta y clara.
- (**3 Puntos**) Demostración con pequeños errores u omisiones.
- (**0 Puntos**) En otros casos.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Una fórmula condicional es la siguiente:

$$\alpha_0 : p \to q$$

Si $p = 1$ y $q = 1$, entonces $\alpha_0(1, 1) = 1$ y tenemos una valuación que hace verdadera a α_0. Un caso general de la fórmula condicional se puede ver como la siguiente implicación:

$$\alpha : \alpha_1 \to \alpha_2$$

donde α_1 y α_2 son fórmulas condicionales. Sea $\bar{v} = 1, ..., 1$ que hace verdadera cada variable proposicional. Recuersivamente podemos ver que cada sub-fórmula se hacen verdaderas con la valuación $\bar{v}$, entonces la fórmula completa α se hará verdadera.

Pregunta 2.2

Tomamos un caso general de la fórmula condicional cíclica y simple:

$$\alpha : p \to \alpha'$$

Donde la última variable de α' es p, y todas las demás son distintas. Sea $\bar{v}$ una valuación cualquiera y demostraremos que $\alpha(\bar{v}) = 1$. Analizamos dos casos posibles:

Caso 1: Si $p = 0$ en $\bar{v}$, $\alpha(\bar{v})$ será 1, por definición de la implicancia.

Caso 2: Si $p = 1$ en $\bar{v}$, tenemos que α' se ve de la forma $\alpha' := \alpha'_1 \to \alpha_1$ para dos formulas α'_1 y α_1 donde p aparece al final de α_1. De esta forma podemos seguir recursivamente:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 & := & \alpha'_2 \to \alpha_2 \\
\alpha_2 & := & \alpha'_3 \to \alpha_3 \\
& \vdots & \\
\alpha_{n-1} & := & \alpha'_n \to p
\end{array}$$

Donde $\alpha'_1, ..., \alpha'_n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ son fórmulas condicionales cualquiera. Ahora hacemos el siguiente análisis como $\alpha_{n-1} := \alpha'_n \to p$, con $p = 1$ tenemos que $\alpha_{n-1}(\bar{v}) = 1$. Después como $\alpha_{n-2} := \alpha'_{n-1} \to \alpha_{n-1}$, con $\alpha_{n-1}(\bar{v}) = 1$ tenemos que $\alpha_{n-2}(\bar{v}) = 1$. Lo que continua sucesivamente hasta llegar a $\alpha' := \alpha'_1 \to \alpha_1$, con $\alpha_1(\bar{v}) = 1$ lo que implica que $\alpha'(\bar{v}) = 1$. Finalmente $\alpha(\bar{v}) = 1$.

Como en ambos casos se tiene que $\alpha(\bar{v}) = 1$, entonces concluimos α es una tautología.

Pregunta 2.3

Análogo a la pregunta anterior, tomamos un caso general de la fórmula condicional cíclica α y como en este caso α no es simple entonces tendrá la forma: $\alpha = \beta' \to \alpha'$. Demostraremos que existe una valuación $\bar{v}$ tal que $\alpha(\bar{v}) = 0$, o sea no es una tautología. Como α es cíclica, comienza y termina con una variable p que llamaremos p_0, y todas las variables restantes $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ son distintas. Similar a la pregunta anterior, tendremos que β' tendrán la forma:

$$\beta' := \beta_1 \to \beta_1'$$

$$\beta_1' := \beta_2 \to \beta_2'$$

$$\vdots$$

$$\beta_{n-1} := p_0 \to \beta_n$$

para algún largo n. Para la subformula α' también podremos ver que tendrá la forma recursiva:

$$\alpha' := \alpha_1' \to \alpha_1$$

$$\alpha_1 := \alpha_2' \to \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m-1} := \alpha_m' \to p_0$$

para algún largo m. Ahora tomamos la valuación $(\bar{v})$ donde p_0 es falso $(p_0 = 0)$ y para todos los p_i restantes son verdaderos $(p_i = 1)$. Demostraremos que $\alpha(\bar{v}) = 0$.

Por un lado, $\beta'(\bar{v})$ será verdadera ya que $p_0 = 0$ hará verdadera a β_{n-1}. Ahora solamente quedan $p_i = 1$ en la valuación, y como se demuestra en la pregunta 2.1, toda fórmula condicional se hace verdadera solo con verdaderos, quedando verdadero el lado izquierdo de la implicancia completa.

Por el otro lado, tenemos $\alpha_{m-1} := \alpha_m' \to p_0$ al final de α', y por la misma razón anterior, con solo 1s en la valuación a excepción de p_0, se producirá un $1 \to 0$ lo que hará α_{m-1} falsa, y así sucesivamente hacia arriba. Con esto se tendrá que $\alpha'(\bar{v})$ será falsa, y la implicancia completa será falsa, demostrando así que toda fórmula condicional cíclica no simple, no es tautología.

Puntaje de todas las preguntas

Dado lo anterior, para cada una de las 3 secciones el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.