Matemáticas Discretas

Teoría de conjuntos

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de septiembre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
2. Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
3. Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

Introducción

- Hasta ahora hemos usado conjuntos de una manera intuitiva pero razonable.

- Vamos a estudiar la teoría de conjuntos desde un punto de vista **axiomático**.

- Esta teoría se considera la base de las matemáticas.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Conjunto?
- ¿Elemento?
- ¿Pertenencia?

Introducción

Ejemplos

$x \in A$

- x pertenece a A.
- x es un elemento de A.

$1 \in \mathbb{N}$

- 1 pertenece a los naturales.

$2 \in \{1, 2\} \in \left\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \right\}$

- 2 es un elemento de $\{1, 2\}$, el que a su vez es un elemento de $\left\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \right\}$.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Bien definida?
- Enunciaremos algunos *axiomas* con los que definiremos formalmente la teoría de conjuntos.
  - O al menos lo intentaremos...

Axiomas

Queremos saber cuándo dos conjuntos son iguales. Necesitamos la siguiente definición:

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x (x \in A \to x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplos

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ ¿$\{1, 2\} \subseteq \big\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \big\}$?

Axiomas

Definición

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

Y si ahora aplicamos la definición de subconjunto y equivalencias lógicas:

$$\begin{aligned}
A = B &\leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B) \land \forall x (x \in B \to x \in A) \\
A = B &\leftrightarrow \forall x ((x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A)) \\
A = B &\leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)
\end{aligned}$$

Axiomas

Definición equivalente

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Este es el **Axioma de extensión**. ¿Por qué?

- Nos dice que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.
- Es decir, un conjunto queda completamente definido por los elementos que contiene.
- Esto constituye la definición fundamental de un conjunto como una colección abstracta de objetos.

Axiomas

En conclusión, lo único que define a un conjunto son los elementos que contiene.

Observación

$\{x, x\} = \{x\}$

- Los conjuntos no pueden tener elementos repetidos (o al menos no tiene sentido que los tengan).

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Notación: $A \subsetneq B$.

¿Qué significa que $A \neq B$?

$$\begin{array}{rcl} A = B & \leftrightarrow & A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\ A \neq B & \leftrightarrow & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{array}$$

¿Y que $B \nsubseteq A$?

$$\begin{array}{rcccl} B \subseteq A & \leftrightarrow & \forall x (x \in B \rightarrow x \in A) & \leftrightarrow & \forall x (x \notin B \vee x \in A) \\ B \nsubseteq A & \leftrightarrow & \neg \forall x (x \notin B \vee x \in A) & \leftrightarrow & \exists x (x \in B \wedge x \notin A) \end{array}$$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B, \text{ o alternativamente, } A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A.$$

Notación: $A \subsetneq B$.

Corolario

$B \not\subseteq A$ si y sólo si $\exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones "primitivas" intuitivas.

- Podemos establecer puntos de partida más formales.
- ¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$.

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por $\varnothing$ o $\{\}$.

Axiomas

Algunas propiedades importantes del conjunto vacío:

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Ejercicio

Demuestre los teoremas.

Axiomas

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Demostración: Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \to x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$. $\square$

Axiomas

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Demostración: Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \rightarrow A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos A y B vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que A y B son conjuntos, tenemos que $A \subseteq B$, ya que estamos suponiendo que A es vacío. Recíprocamente, se tiene que $B \subseteq A$. Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que $A = B$. $\square$

Axiomas

¿Como podemos definir un conjunto?

- Por extensión (listando sus elementos):

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Podemos hacer algo más *comprensivo*:

$$\mathbb{Z}_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

- De hecho, lo necesitamos. ¿Por qué?

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación: A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Ejercicio

Defina el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

Respuesta: $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Ejemplo

$\varphi_1(x)$: x es un conjunto con más de 3 elementos
$\varphi_2(x)$: x es un conjunto con una cantidad finita de elementos
$\varphi_3(x)$: x es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos
$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos
$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

Axiomas

Siguiendo con el ejemplo:

Ejemplo

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos.

Dado que $\mathcal{A}_1$ es un conjunto que tiene conjuntos adentro, ¿es $\mathcal{A}_1$ un elemento de sí mismo? ¿$\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$?

- En $\mathcal{A}_1$ están todos los conjuntos con más de 3 elementos.
- ¡Son muchos! Definitivamente más de 3...
- Entonces, $\mathcal{A}_1$ tiene más de 3 elementos.
- Luego, $\mathcal{A}_1$ cumple φ_1.
- Concluimos que $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$.

Axiomas

Ejemplo

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

¿$\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$? No.

Ejemplo

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

¿$\mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}_3$? Sí.

Axiomas

Luego de toda esta discusión, tiene sentido preguntarse si un conjunto pertenece a sí mismo. Tomemos la siguiente propiedad:

$$\varphi(x) \leftrightarrow x \notin x$$

La propiedad φ la cumplen todos los conjuntos que **no** pertenecen a sí mismos. Por ejemplo, $\mathcal{A}_2$ cumple φ, mientras que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_3$ no.

¿Qué más podemos hacer? ¡Ocupar el axioma de abstracción!

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA! Esta es la **paradoja de Russell**.

Axiomas

No nos sirve el axioma de abstracción :(

- Es demasiado permisivo.

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "sano", entonces $A = \{x \mid x \in C \land \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "sano"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto A se obtiene *separando* de C los elementos que cumplen la propiedad φ.

Axiomas

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto "universal sano" que llamaremos $\mathcal{U}$.
- Entonces, cuando escribamos $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$.
- Típicamente el conjunto $\mathcal{U}$ se deduce del contexto.

Operaciones

A partir de conjuntos dados, es posible crear nuevos conjuntos aplicando operaciones entre ellos.

Sean A y B conjuntos. Definimos las siguientes operaciones elementales, que tienen como resultado un conjunto:

Unión

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
El conjunto de los elementos que están en A o B.

Intersección

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
El conjunto de los elementos que están en A y en B.

Operaciones

Diferencia

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Conjunto potencia

$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$
El conjunto de todos los subconjuntos de A.

Algunas observaciones:

- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \delta(0) = \delta(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \delta(1) = \delta\left(\{\varnothing\}\right) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \delta(2) = \delta\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\ldots$, $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de $\mathbb{N}$:

Definición

El conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$, es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a $\varnothing$, 1 a $\delta(\varnothing)$, y así sucesivamente.

Mostramos entonces que la simple existencia del conjunto vacío basta para crear a todos los naturales, partiendo de llamar 0 a $\varnothing$ y usando el operador sucesor δ para crear los siguientes de manera inductiva.

Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

Suma de dos números naturales:

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

$$\begin{aligned}
sum(3,4) &= sum(3,\delta(3)) \\
&= \delta(sum(3,3)) \\
&= \delta(sum(3,\delta(2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,\delta(1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,\delta(0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(sum(3,0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(4))) \\
&= \delta(\delta(5)) \\
&= \delta(6) \\
&= 7
\end{aligned}$$

Ejercicio

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $mult(3, 2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Definición

Multiplicación de dos números naturales

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$
\begin{array}{rcl}
mult(3,2) & = & mult(3, \delta(1)) \\
 & = & sum(3, mult(3,1)) \\
 & = & sum(3, mult(3, \delta(0))) \\
 & = & sum(3, sum(3, mult(3,0))) \\
 & = & sum(3, sum(3,0)) \\
 & = & sum(3,3) \\
 & \vdots & \\
 & = & 6
\end{array}
$$

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Demostración: Debemos demostrar que

$$sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c:

BI: $sum(sum(a,b),0) = sum(a,b) = sum(a,sum(b,0))$.

HI: Supongamos que se cumple que $sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$ para un natural c.

TI: Por demostrar: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = sum(a,sum(b,\delta(c)))$.
Desarrollamos el lado izquierdo: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = \delta(sum(sum(a,b),c)) \overset{HI}{=} \delta(sum(a,sum(b,c))) = sum(a,\delta(sum(b,c))) = sum(a,sum(b,\delta(c)))_{\square}$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de $\mathcal{U}$), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Leyes

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Leyes

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}$.

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S}$ se cumple que $x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.
Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Matemáticas Discretas

Teoría de conjuntos

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de septiembre de 2023