Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA TAREA 4

Pregunta 1

Pregunta 1.1

El objetivo era demostrar la existencia de la clausura simétrica, para lo cual vamos a ver que $R^S = R \cup R^{-1}$. Para probar que R^S es efectivamente la clausura simétrica, debemos comprobar lo siguiente:

- $R \subseteq R^S$. Claramente cierto dado que $R \subseteq R \cup R^{-1}$.
- R^S es simétrica. Suponemos que $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R^{-1}$ y por lo tanto, $R^S = R \cup R^{-1}$ es simétrica. De igual manera, podemos suponer que $(a, b) \in R^{-1}$ y entonces $(b, a) \in R$, concluyendo lo mismo.
- Para cualquier otra R' simétrica tal que $R \subseteq R'$, se cumple que $R^S \subseteq R'$. Tomamos $(a, b) \in R^S$, entonces hay dos casos:
  1. $(a, b) \in R$, entonces $(a, b) \in R'$ dado que $R \subseteq R'$.
  2. $(a, b) \in R^{-1}$, entonces $(b, a) \in R$ y como R' es simétrica, se cumple que $(a, b) \in R'$.

  Por lo tanto, $R^S \subseteq R'$.

El puntaje fue otorgado de la siguiente manera:

- **(4 puntos)** Demuestra las 3 características de la clausura simétrica, de manera clara y precisa.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones en alguna de las características.
- **(0 puntos)** Otros casos.

Pregunta 1.2

En esta pregunta, había que mostrar que la clausura conexa R^C no siempre existe. Una manera directa de mostrar esto, es creando un contraejemplo. Se propone el siguiente:

$$R = \{(a, a), (b, b)\}$$

Y se definen:

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$$
$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (b, a)\}$$

Es fácil ver que $R \subseteq R_1$ y $R \subseteq R_2$ y que R_1 y R_2 son conexas. La idea entonces era notar que no puede existir la clausura conexa pues esta debería estar contenida tanto en R_1 como en R_2, lo cual llevará a una contradicción.

- **(4 puntos)** El contraejemplo es correcto y la explicación es clara
- **(3 puntos)** El contraejemplo es correcto o tiene errores menores y/o la explicación no es clara.
- **(0 puntos)** Otros casos.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

- **Refleja:** Supongamos una secuencia $s \in S$, debemos demostrar que $(s, s) \in R$. Aplicando la función $f(x) = x$ a una secuencia $s = a_0a_1...$, obtenemos que $f(s) = f(a_0)f(a_1)... = a_0a_1... = s$, por lo que $(s, s) \in R$, es decir, R es refleja.
- **Transitiva:** Supongamos que $(s, s') \wedge (s', s'') \in R$, debemos demostrar que $(s, s'') \in R$. Como $(s, s') \in R$, entonces existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $f(s) = s'$. Además como $(s', s'') \in R$, entonces existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $g(s') = s''$. Finalmente como $f(s) = s'$, entonces $g(f(s)) = s''$, por lo tanto $(s, s'') \in R$ y R es transitiva.
- **No simétrica:** Por contraejemplo, supongamos que $(s, s') \in R$ bajo la función $f(x) = 0$, es decir, $f(s) = 0000000... = s'$, sin embargo, no existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(s') = s$, por lo tanto $(s', s) \notin R$, lo que implica que R no es simétrica.

El puntaje fue otorgado de la siguiente manera:

- (**4 Puntos**) Los tres puntos demostrados correctamente.
- (**3 Puntos**) Dos de los tres puntos demostrados correctamente.
- (**0 Puntos**) En otros casos.

Pregunta 2.2

Para que R^* sea orden de equivalencia debemos demostrar que es refleja, simétrica y transitiva.

1. **Refleja:** Supongamos una secuencia $s \in S$, debemos demostrar que $(s, s) \in R^*$. Sabemos que R es refleja, por lo que $(s, s) \in R$, luego, por definición de relación inversa, $(s, s) \in R^{-1}$, por lo tanto $(s, s) \in R^*$ y R^* es refleja.
2. **Transitiva:** Supongamos que $(s, s') \wedge (s', s'') \in R^*$, debemos demostrar que $(s, s'') \in R^*$. Como $(s, s') \in R^*$, entonces $(s, s') \wedge (s', s'') \in R$, por lo que $(s', s) \wedge (s'', s') \in R^{-1}$. Además $(s, s') \wedge (s', s'') \in R^{-1}$, por lo que $(s', s) \wedge (s'', s') \in R$. Luego, por transitividad de R, $(s, s'') \wedge (s'', s) \in R$ y por inversa $(s, s'') \in R^{-1}$, por lo tanto $(s, s'') \in R^*$ y R^* es transitiva.
3. **Simétrica:** Supongamos $(s, s') \in R^*$, debemos demostrar que $(s', s) \in R^*$. Como $(s, s') \in R^*$, entonces $(s, s') \in R$, lo que significa que $(s', s) \in R^{-1}$. Además $(s, s') \in R^{-1}$, por lo que $(s', s) \in R$. Por lo anterior, $(s', s) \in R^*$ y R^* es simétrica.

Por último, para explicar las clases de equivalencia de R^* una posible explicación es la siguiente: para un $s = a_0, a_1, \ldots$ cualquiera, considere la relación sobre R_s sobre los naturales tal que $(i, j) \in R_s$ si, y solo si, $a_i = a_j$. Entonces la clase de equivalencia de s según R^* corresponde a todos los s' tal que $R_s = R_{s'}$. En otras palabras, todas las secuencias que coinciden en la igualdad de los valores en los mismos puntos.

El puntaje fue otorgado de la siguiente manera:

- (**4 Puntos**) Los cuatro puntos demostrados correctamente.
- (**3 Puntos**) Tres de los cuatro puntos demostrados correctamente.
- (**0 Puntos**) En otros casos

Pregunta 2.3

Para demostrar que $\mathcal{R}$ es orden parcial debemos demostrar que es refleja, antisimétrica y transitiva.

1. **Refleja:** Supongamos una clase de equivalencia $C \in \mathcal{R}$. Sabemos que como es clase de equivalencia no es vacía, por lo tanto $\exists s \in C$. Luego, como R es refleja, entonces $(s, s) \in R$, por lo que $(C, C) \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es refleja.

2. **Transitiva:** Supongamos $(C_1, C_2) \wedge (C_2, C_3) \in \mathcal{R}$, debemos demostrar que $(C_1, C_3) \in \mathcal{R}$. Por lo anterior $\exists s_1 \in C_1 \wedge \exists s_2 \in C_2$ tales que $(s_1, s_2) \in R$ y también $\exists s_2' \in C_2 \wedge \exists s_2 \in C_2$ tales que $(s_1, s_2) \wedge (s_2', s_3) \in R$. Luego, como $(s_2, s_2') \in C_2$, entonces $(s_2, s_2') \in R^*$, por lo que $(s_2, s_2') \in R$. Finalmente como $(s_1, s_2) \wedge (s_2, s_2') \wedge (s_2', s_3) \in R$, por transitividad de R, $(s_1, s_3) \in R$, lo que significa que $(C_1, C_3) \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es transitiva.

3. **Antisimétrica:** Supongamos $(C_1, C_2) \in \mathcal{R}$ y $(C_2, C_1) \in \mathcal{R}$, debemos demostrar que $C_1 = C_2$. Por lo anterior $\exists s_1 \in C_1 \wedge \exists s_2 \in C_2$ tales que $(s_1, s_2) \in R$ y también $\exists s_2' \in C_2 \wedge \exists s_1' \in C_1$ tales que $(s_1, s_2) \wedge (s_2', s_1') \in R$. Luego, como $(s_2, s_2') \in C_2$, entonces $(s_2, s_2') \in R^*$, por lo que $(s_2, s_2') \in R$. Finalmente como $(s_1, s_2) \wedge (s_2, s_2') \wedge (s_2', s_1) \in R$, por transitividad de R, $(s_1, s_1') \in R$, lo que significa que $C_1 = C_2$ y $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

El puntaje fue otorgado de la siguiente manera:

- (**4 Puntos**) Los tres puntos demostrados correctamente.
- (**3 Puntos**) Dos de los tres puntos demostrados correctamente.
- (**0 Puntos**) En otros casos