Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2017

PAUTA EXAMEN

Pregunta 1

La solución consistía en hacer inducción sobre el número de nodos del grafo.

El caso base, es para un grafo con solo un nodo, el cuál tiene grado máximo 0 (hay 0 aristas) por lo tanto debemos demostrar que sea (0+1)-coloreable. Claramente, necesitamos un solo color, por lo tanto se cumple.

Para el paso inductivo, asumimos un grafo $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y que su grado es k. Luego, si sacamos un nodo v y sus aristas incidentes tal que nos quede un grafo G' con $|G'| < n$, por hipótesis de inducción sabremos que es (k+1)-coloreable (el grado no puede aumentar al sacar el nodo, por lo que sigue siendo menor o igual a k). Entonces, si agregamos el nodo v devuelta al grafo con sus aristas incidentes, podemos darnos cuenta que el nodo puede tener desde 0 hasta k vecinos. En caso de que tenga k vecinos, existirá un color que no esté entre esos k vecinos (pues tenemos k+1 colores), por lo que podemos pintarlo de ese color. En caso contrario, siempre habrá un color disponible para pintar a v que no sea de sus colores vecinos. Se debe definir la nueva coloración y demostrar por qué es una k+1 coloración de G.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por plantear bien la inducción.
- **(1 puntos)** Por caso base.
- **(1 punto)** Por correcto uso de hipótesis de inducción.
- **(2 puntos)** Por construcción de una nueva coloración.
- **(1 puntos)** Por demostrar que es una coloración válida.

Pregunta 2

Pregunta 1.1

La solución consistía en primero que todo en demostrar a cada lado de la implicancia:

Dirección derecha: v es de corte $\rightarrow$ existen u_1, u_2 tal que todo camino entre ellos pasa por v:
Dos formas muy claras de demostrar esta implicancia es usando las técnicas de contradicción o contrapositivo. Dicho lo anterior, lo priméramente importante era tomar dos vértices de componentes conexas distintas en $G - v$ para luego demostrar adecuadamente que con esos específicos vértices todos los caminos pasan por v.

Dirección izquierda: existen u_1, u_2 tal que todo camino entre ellos pasa por $v \rightarrow v$ es de corte:

Esta demostración era casi trivial hacerla de forma directa, pero usando contradicción también se lograba una demostración clara y adecuada.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.75 puntos)** Por establecer dos vertices pertenecientes a componentes conexas distintas.
- **(0.75 puntos)** Por continuar la demostración hacia la derecha de forma clara, ordenada y lógica.
- **(1.5 puntos)** Por tener una demostracion hacia la izquierda adecuada, ordenada y clara.

Pregunta 2.2

La solución podía tener varias formas, pero habían dos claras, que son usando inducción fuerte sobre la cantidad de vertices e inducción fuerte sobre la cantidad de aristas. Usando esta forma, el desarrollo se resume de la siguiente manera:

Primero el caso base, el cual se demostraba para $n = 2$, en caso de los vertices o $n = 1$ en caso de aristas. Este paso merecía una breve explicación de por que funcionaba.

Ahora se explicará para la inducción sobre los vértices, entendiendo que sobre las aristas el procedimiento es similar o casi igual.

Tenemos como hipótesis de inducción lo siguiente: Para todo $n < m$, con n como la cantidad de vertices de un grafo conexo y para todas sus combinaciones posibles de aristas dado esa cantidad de vértices, se cumple con que ese grafo tiene a lo menos dos vértines que no son de corte.
Entonces para el caso en que tengamos un grafo con m vertices, debemos demostrar para todas sus combinaciones de aristas que cumple con tener dos vertices que no son de corte.

A este grafo, que llamaremos G, con m vértices es posible quitarle un vertice cualquiera v. v puede ser de corte o no, es decir, tenemos dos casos a tratar.

1) Si v es de corte, entonces $G - v$ será un grafo disconexo con dos o más componentes conexas, las cuales cumplen con la hipotesis de inducción. Luego había que demostrar por que si al re-incluir v al grafo, se conservaban al menos dos vértices no de corte provenientes de las componentes conexas anteriores.

2) Si v no es de corte, entonces $G - v$ será conexo y cumplirá con la hipótesis. Por lo tanto al re-incluir v al grafo, había que notar que el mismo v no se de corte y había que demostrar por que se conserva al menos un vértice no de corte proveniente de $G - v$.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por tener el caso base con una breve explicación.
- **(1 punto)** Por demostrar el caso en que v no es de corte y por tanto $G - v$ es conexo.
- **(1 punto)** Por demostrar el caso en que v si es de corte y por tanto $G - v$ es disconexo.

  Nota: Demostrar desde la hipotesis y solo usar el caso en que $G - v$ es conexo no es lógicamente incorrecto, pero se corre el riesgo de no cubrir todos los casos que existen para un grafo con un vertice más al de la hipotesis y por tanto la demostración no es adecuada, ya que solo demuestra para una porción de todos los grafos que existen. En este caso solo se asignó puntaje por el caso en que v no es de corte. Esto sería por inducción simple.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

La solución consistía en que como ϕ y ψ no tienen variables en común, $\phi \models \psi$ y ϕ es satisfacible, luego existe valuación u tal que para toda valuacion v tenemos que

$$\phi(u, v) = \phi(u) = 1 \rightarrow \psi(u, v) = \psi(v) = 1 \ \forall \ v.$$

Por lo que ψ debe ser una tautología. El puntaje fue, a grandes rasgos (y siempre apuntando a lo correcto):

- **(1 punto)** Por usar que no tienen variables en común y combinar valuaciones.
- **(1 puntos)** Usar la implicancia lógica.
- **(1 punto)** Concluir de manera correcta.

Pregunta 3.2

La solución consistía en escribir en lógica de predicados las condiciones para que A y B fueran una partición de U.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por establecer que A y B son distintos de vacío.
- **(1 punto)** Por establecer que $A \cup B = U$.
- **(1 punto)** Por establecer $A \cap B = \emptyset$.

Pregunta 4

Pregunta 4.1

La solución consistía en demostrar que la nueva relación definida R^s era refleja, simetrica y transitiva, dado que la relación R original es refleja y transitiva. Refleja se cumplea gracias a que R en si es refleja, luego por definición de R^s, como $(a, a) \in R \wedge (a, a) \in R$, $(a, a) \in R^s$ para todo $a \in A$. Para simetría, si $(a, b) \in R^s$, la definición de R^s nos asegura que $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$. y por lo tanto $(b, a) \in R \wedge (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R^s$. Importante notar que demostrar simetría comienza suponiendo la pertenencia de la tupla (a, b) en R^s y **no** en R, la pertenencia en R es consecuencia de lo anterior. Finalmente para transitividad, si $(a, b) \in R^s$ y $(b, c) \in R^s$, luego $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (c, b) \in R$. Gracias a que R es transitiva: $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$ y $(c, b) \in R \wedge (b, a) \in R \rightarrow (c, a) \in R$. Entonces, $(a, c) \in R^s$. De la misma manera, recordar que para demostrar transitividad uno comienza suponiendo la pertenecia de las tuplas (a, b) y (b, c) en R^s, **no** en R. La pertenencia en R es consecuencia de lo anterior.
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por demostrar R^s es refleja.
- **(1 punto)** Por demostrar R^s es simetrica.
- **(1 punto)** Por demostrar R^s es transitiva.

Pregunta 4.2

La solución consistía a grandes rasgos en describir una forma de enumerar el conjunto de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y mostrar por que es correcta. La forma más directa era describiendo un listado del conjunto que asegurara la aparición de cada subconjunto. Una forma es enumerando según el número máximo que aparece en el subconjunto. Primero el conjunto vació, luego todos aquellos subconjuntos cuyo máximo numero es 0, luego 1, etc ... Esto nos asegura que cada subconjunto eventualmente es enumerado ya que cada capa tiene una cantidad finita de miembros (la cantidad de subconjuntos con máximo miembro k es finita). El orden en el cual enumerar en cada capa es irrelevante y puede ser arbitraria. La enumeración es correcta porque cada subconjunto finito tiene un miembro máximo y solo uno, de modo que solo se enumerara en una de las capaz una única vez. Ahora bien, también es posible resolver la pregunta describiendo una biyección válida con $\mathbb{N}$ o mediante el teorema CBS y describiendo una función inyectiva desde $\mathbb{N}$ al conjunto de subconjuntos finitos y otra en el sentido contrario.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(2 punto)** Por describir una forma de enumerar el conjunto de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Ya sea mediante una enumeracion (listado), biyeccion con $\mathbb{N}$ o 2 inyecciones y utilizar el teorema CBS.
- **(1 puntos)** Por demostrar que el metodo utilizado es correcto. En caso de describir una enumeracion, mostrar que cada subconjunto finito aparece eventualmente en alguna posicion de la lista. En el caso de describir un biyeccion demostrar que es inyectiva y sobreyectiva. En el caso de 2 inyecciones mostrar por que son inyectivas.

Errores comunes fueron no demostrar la correctitud de la opcion tomada, y describir una forma de listar con capas infinitas. Por ejemplo, si deseo enumerar segun la cardinalidad de los subconjuntos, llego al problema que nunca termino de listar los subconjuntos de largo 1, por que son infinitos, y no es posible determinar en que posicion de la lista listare el conjunto $\{0, 1\}$.

Pregunta 5

Pregunta 5.1

La solución consistía a grandes rasgos en utilizar la definición inductiva del grafo para probar que cualquier nodo es alcanzable desde cualquier otro a través de un camino de largo a lo más n (donde n es la dimensión del hipercubo representado en el grafo, o equivalentemente S_n). Por lo tanto, deseamos demostrar que para todo n:

$$P(n) \ := \ \forall u, v \in V_n.\ dist(u, v) \leq n$$

donde $dist(u, v)$ es el largo del camino más corto desde u a v. El caso base es trivial y se debía demostrar directamente desde el grafo S_1. Para el paso inductivo, sean $u = (a, u')$ y $v = (b, v')$ dos vértices en S_n con $a, b \in \{0, 1\}$ y $u, v \in V_{n-1}$. Por hipótesis de inducción sabemos que $dist(u', v') \leq n - 1$. Entonces existe un camino $\pi := u_0, \ldots, u_k$ de largo $k \leq n - 1$ con $u_0 = u'$ y $u_k = v'$. Por casos tenemos que:

- Si $a = b$, entonces $\pi' := (a, u_0), \ldots, (a, u_k)$ es un camino de largo $\leq n - 1$ en S_n.
- Si $a \neq b$, entonces $\pi' := (a, u_0), (b, u_o), \ldots, (b, u_k)$ es un camino de largo $\leq n$ en S_n.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por plantear correctamente la inducción y probar el caso base.
- **(1 punto)** Por interpretar y utilizar correctamente la hipótesis de inducción para argumentar la existencia de un camino.
- **(1 punto)** Por demostrar para todos los casos que se puede encontrar un camino de largo a lo más n para un grafo S_n.

Pregunta 5.2

La solución consistía a grandes rasgos en encontrar un c^* que satisfaciera la condición y además probar su correctitud.Una posibilidad es $c^* = max\{c, max\{\frac{f(m)}{g(m)}\} \mid 0 \leq m \leq n_0\}\}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Aquí es necesario considerar dos casos:

- Si $n \geq n_0$, entonces $f(n) \leq c \cdot g(n) \leq c^* \cdot g(n)$.
- Si $n < n_0$, entonces $c^* \cdot g(n) \geq \frac{f(n)}{g(n)} \cdot g(n) = f(n)$ o de otra manera, $f(n) = \frac{f(n) \cdot g(n)}{g(n)} \leq c^* \cdot g(n)$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por usar la definición de notación O para construir un c^* que sea razonable/buen candidato.
- **(1 punto)** Por construir un c^* que cumpla con lo pedido.
- **(1 punto)** Por justificar por qué el c^* elegido es correcto/funciona en todos los casos.