PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E IGNACIO VERGARA

# Ayudantía 9

20 de septiembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

**Resumen**

- **Conjuntos finitos**

  Diremos que un conjunto $A$ es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx n$, es decir si existe una función biyectiva $f : A \to \{0, ..., n-1\}$

  **Teorema** Si $A$ es un conjunto finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- **Funciones**

  **Teorema (Schröder-Bernstein)** $A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

  **Principio del palomar** Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$ , pero $f(x) = f(y)$.

- **Equinumerosidad** Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

- **Numerabilidad** Un conjunto $A$ es enumerable si y sólo si $|A| = |\mathbb{N}|$, de manera equivalente diremos que $A$ es enumerable si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ tal que todos los elementos de A aparecen en la sucesión una única vez cada uno.

  **Teorema (Cantor)** El intervalo real $(0, 1) \subseteq R$ es infinito pero no enumerable. Esto se demuestra a partir del argumento de la diagonalización de Cantor.

- **Conclusiones finales**

  $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \dots$

## Ejercicio 1

Utilice el principio del palomar para demostrar lo siguiente En cualquier espectáculo del Teatro Campos Elíseos de Bilbao (con capacidad para 800 personas), que esté lleno, existen dos personas del público tales que su primera y su última letra son iguales (como por ejemplo, Aitor y Amador, o Sorkunde y Salomé).

## Ejercicio 2

a) Sea $S = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que $S \times S \approx S$.

## Ejercicio 3

Considere un punto en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que parte en $(0, 0)$. Una trayectoria del punto en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una secuencia $(i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(i_0, j_0) = (0, 0)$ y para todo $k \geq 0$ se cumple que $|i_k - i_{k+1}| + |j_k - j_{k+1}| = 1$. En otras palabras, la trayectoria del punto cambia en exactamente una coordenada +1 o -1 .

Demuestre que el conjunto de todas las posibles trayectorias del punto son no-numerables.

## Ejercicio 4: Propuesto

Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de N es numerable.