Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

23 de Septiembre de 2022
Profesores: Nicolás Alvarado - Sebastián Bugedo - Fernando Suárez

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Relaciones de equivalencia

Sea $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, demuestre que $A/\!\sim$ es una partición de A.

Solución

Debemos demostrar que $A/\!\sim\, = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A. Para esto demostraremos las tres propiedades que debe cumplir según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\!\sim,\ X \neq \varnothing$: En clases vimos que toda relación de equivalencia es refleja y por ende que $\forall x \in A$, $x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\!\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.

2. $\bigcup A/\!\sim\, = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.

    - $\bigcup A/\!\sim\, \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\!\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
    - $A \subseteq \bigcup A/\!\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\!\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\!\sim$.

3. $\forall X, Y \in A/\!\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: Todos los conjuntos en $A/\!\sim$ son clases de equivalencia, y por el teorema visto en clases, sabemos que dos clases de equivalencia distintas deben tener intersección vacía.

Pauta (6 pts.)

- 1.0 pts por demostrar 1).
- 2.0 pts por cada dirección de 2).
- 1.0 pts por 3).

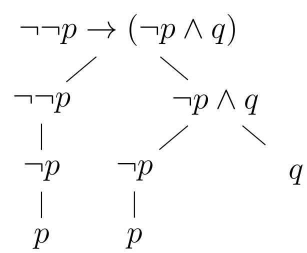
Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Inducción

Dada una fórmula φ en lógica en lógica proposicional. La lista de sub-fórmulas de φ se define como la lista de strings (posiblemente repetidos) ψ tal que: ψ es una fórmula y ψ es un substring de φ.
Por ejemplo, la siguiente es la lista de subfórmulas de $\neg\neg p \to (\neg p \land q)$:

$$\begin{array}{l} \neg\neg p \to (\neg p \land q) \\ \neg\neg p \\ \neg p \\ p \\ \neg p \land q \\ \neg p \\ p \\ q \end{array}$$

Definimos el árbol de parseo de una fórmula φ como un grafo tal que en sus nodos se ubican las subfórmulas de φ, empezando por φ en la raíz hasta llegar a las proposiciones atómicas en las hojas del árbol.
Por ejemplo, el siguiente es el árbol de parseo de $\neg\neg p \to (\neg p \land q)$



Finalmente, definimos la profundidad de φ como la máxima distancia entre la raíz del árbol y sus hojas. Es decir, la máxima cantidad de aristas para llegar desde la fórmula φ hasta la proposición más lejana. Por ejemplo, la profundidad de $\neg\neg p \to (\neg p \land q)$ es 3.

a) **(1 pts)** Defina la función inductiva $\textsc{nsf}(\varphi)$ que retorna la cantidad de elementos en la lista de subfórmulas de φ.

b) **(1 pts)** Defina la función inductiva $\textsc{prof}(\varphi)$ que retorna la profundidad de φ.

c) **(4 pts)** Demuestre que para todo $\varphi \in L(P)$ se cumple que

$$\textsc{nsf}(\varphi) \leq 2^{\textsc{prof}(\varphi)+1} - 1$$

Solución

a) Definimos el operador $\textsc{nsf}() : L(P) \to \mathbb{N}$ inductivamente como:

1. $\textsc{nsf}(p) = 1$, con $p \in P$.
2. $\textsc{nsf}(\neg\varphi) = \textsc{nsf}(\varphi) + 1$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $\textsc{nsf}(\varphi * \psi) = \textsc{nsf}(\varphi) + \textsc{nsf}(\psi) + 1$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

b) Definimos el operador $\textsc{prof}() : L(P) \to \mathbb{N}$ inductivamente como:

1. $\textsc{prof}(p) = 0$, con $p \in P$.
2. $\textsc{prof}(\neg\varphi) = 1 + \textsc{prof}(\varphi)$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $\textsc{prof}(\varphi * \psi) = 1 + \text{máx}(\textsc{prof}(\varphi), \textsc{prof}(\psi))$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

c) Por inducción estructural sobre $\varphi \in L(P)$:

BI: Si $\varphi = p$ con $p \in P$, tenemos que $\textsc{nsf}(\varphi) = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{\textsc{prof}(\varphi)+1} - 1$

HI: Sea $\alpha, \beta \in L(P)$ tales que

$$\textsc{nsf}(\alpha) \leq 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1$$
$$\textsc{nsf}(\beta) \leq 2^{\textsc{prof}(\beta)+1} - 1$$

TI: Mostraremos los pasos inductivos correspondientes a la negación y a los conectivos binarios por separado:

- Si $\varphi = \neg\alpha$, debemos mostrar que $\textsc{nsf}(\neg\alpha) \leq 2^{\textsc{prof}(\neg\alpha)+1} - 1$

  Por definición de $\textsc{nsf}()$ tenemos

$$\begin{aligned}
\textsc{nsf}(\neg\alpha) &= 1 + \textsc{nsf}(\alpha) \\
&\leq 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 && \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&\leq 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 && \text{(sumamos } 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1\text{)} \\
&\leq 2 \cdot 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 \\
&\leq 2^{(\textsc{prof}(\alpha)+1)+1} - 1 \\
&\leq 2^{\textsc{prof}(\neg\alpha)+1} - 1 && \text{(por definición de } \textsc{prof}()\text{)}
\end{aligned}$$

- Si $\varphi = \alpha * \beta$, con $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, debemos mostrar que

$$\textsc{nsf}(\alpha * \beta) \leq 2^{\textsc{prof}(\alpha*\beta)+1} - 1$$

  Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $\textsc{prof}(\alpha) > \textsc{prof}(\beta)$[1]. Luego, por definición de $\textsc{nsf}()$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\textsc{nsf}(\alpha * \beta) &= 1 + \textsc{nsf}(\alpha) + \textsc{nsf}(\beta) \\
&\leq 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 + 2^{\textsc{prof}(\beta)+1} - 1 && \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&\leq 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 + 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 && \text{por } \textsc{prof}(\alpha) > \textsc{prof}(\beta)) \\
&\leq 2 \cdot 2^{\textsc{prof}(\alpha)+1} - 1 \\
&\leq 2^{(\textsc{prof}(\alpha)+1)+1} - 1 \\
&\leq 2^{(\text{máx}(\textsc{prof}(\alpha),\textsc{prof}(\beta))+1)+1} - 1 \\
&\leq 2^{\textsc{prof}(\alpha*\beta)+1} - 1 && \text{(por definición de } \textsc{prof}())
\end{aligned}
$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.2 pts por caso base.
- 0.4 pts por paso inductivo negación.
- 0.4 pts por paso inductivo conectivos binarios.

b)
- 0.2 pts por caso base.
- 0.4 pts por paso inductivo negación.
- 0.4 pts por paso inductivo conectivos binarios.

c)
- 0.5 pts por caso base.
- 0.5 pts por hipótesis de inducción.
- 1.5 pts por paso inductivo negación.
- 1.5 pts por paso inductivo conectivos binarios.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

[1] La demostración funciona de igual manera si $\textsc{prof}(\beta) > \textsc{prof}(\alpha)$

Pregunta 3 - Lógica

a) Considere el conectivo unario ∇:

p	∇p
0	0
1	0

Demuestre que $\{\rightarrow, \nabla\}$ es funcionalmente completo.

b) Demuestre que el siguiente razonamiento es correcto.

Los gatos que están sucios, nadie los lame.

Los gatos que se lamen a si mismos y no están sucios, son siempre persas.

Hay un gato que se lame a si mismo.

Por lo tanto, hay un gato persa.

Solución

a) En primer lugar, observemos que podemos construir la tabla de verdad de la negación sólo utilizando $\neg$ y ∇ de la siguiente manera:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow \nabla\varphi$
0	1	1
1	0	0

con $\varphi \in L(P)$. Como sus tablas de verdad son iguales, con esto concluimos que

$$\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \nabla\varphi(*)$$

Ahora demostraremos que $\{\rightarrow, \nabla\}$ es funcionalmente completo.

Como sabemos que $C = \{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y ∇. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\nabla, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

TI: Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C:

i) $\theta = (\varphi \to \psi) \overset{HI}{\equiv} (\varphi' \to \psi')$, y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

ii) $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi') \overset{*}{\equiv} (\varphi' \to \nabla\varphi')$, y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Por inducción estructural, concluimos que cualquier fórmula construida utilizando los conectivos de C es equivalente a otra que sólo utiliza conectivos de C', y por ende, C' es funcionalmente completo.

b) Definimos primero los siguientes predicados:

$S(x)$: x está sucio. $P(x)$: x es persa. $L(x, y)$: y lame a x.

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} \forall x(S(x) \to \forall y(\neg(L(x,y)))) & (\varphi_1) \\ \forall x((L(x,x) \wedge \neg S(x)) \to P(x)) & (\varphi_2) \\ \exists x L(x,x) & (\varphi_3) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\exists x P(x) \quad (\psi)} \end{array}$$

Podemos reescribir las fórmulas como un conjunto de cláusulas aplicando la regla de implicancia y De Morgan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} \forall x \forall y(\neg S(x) \vee \neg L(x,y)) & (\varphi_1) \\ \forall x(\neg L(x,x) \vee S(x) \vee P(x)) & (\varphi_2) \\ \exists x L(x,x) & (\varphi_3) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\exists x P(x) \quad (\psi)} \end{array}$$

Queremos demostrar entonces que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \psi$. Lo haremos demostrando que el conjunto $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\psi\}$ es inconsistente usando resolución.

(1)	$\exists x L(x,x)$	$\varphi_3 \in \Sigma$
(2)	$L(a,a)$	especificación existencial de (1)
(3)	$\forall x(\neg L(x,x) \vee S(x) \vee P(x))$	$\varphi_2 \in \Sigma$
(4)	$\neg L(a,a) \vee S(a) \vee P(a)$	especificación universal de (3)
(5)	$S(a) \vee P(a)$	resolución de (2) y (4)
(6)	$\forall x \forall y(\neg S(x) \vee \neg L(x,y))$	$\varphi_1 \in \Sigma$
(7)	$\neg S(a) \vee \neg L(a,a)$	especificación universal de (6)
(8)	$P(a) \vee \neg L(a,a)$	resolución de (5) y (7)
(9)	$P(a)$	resolución de (2) y (8)
(10)	$\forall x \neg P(x)$	$\neg\psi \in \Sigma$
(11)	$\neg P(a)$	especificación universal de (10)
(12)	$\square$	resolución de (9) y (11)

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts por caso base.
- 0.5 pts por hipótesis de inducción.
- 0.5 pts por paso inductivo conectivo binario.
- 1.5 pts por paso inductivo negación (incluye equivalencia lógica).

b)
- 0.5 pts por plantear predicados.
- 1.0 pts por plantear conjunto de fórmulas inconsistente.
- 1.5 por resolución.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 - Conjuntos

Sea A un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(A)$, decimos que $\mathcal{T}$ es una topología sobre A si cumple lo siguiente:

- $\varnothing, A \in \mathcal{T}$
- Si $S \subseteq \mathcal{T}$ entonces $\bigcup S \in \mathcal{T}$
- Si $X, Y \in \mathcal{T}$ entonces $X \cap Y \in \mathcal{T}$

a) **(1 pts)** De un ejemplo de una topología sobre $A = \mathbb{N}$.

b) **(5 pts)** Sea A un conjunto, considere la siguiente colección de conjuntos:

$$\mathcal{T} = \{X \subseteq A \mid X = \varnothing \text{ o } X^c \text{ tiene una cantidad finita de elementos}\}$$

Muestre que $\mathcal{T}$ es una topología sobre A[2].

Solución

a) Podemos elegir la topología $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{P}, \mathbb{I}, \mathbb{N}\}$, donde $\mathbb{P}, \mathbb{I}$ corresponden al conjunto de los números pares e impares respectivamente.

Notar que también se podían elegir topologías triviales como $\mathcal{P}(A)$ o $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$.

b) Mostraremos que $\mathcal{T}$ cumple las 4 propiedades necesarias para ser topología.

i) $\varnothing \in \mathcal{T}$ se cumple de manera trivial por la definición de $\mathcal{T}$.

[2] Puede considerar que A es un conjunto universal sano. Además, considere que la unión de conjuntos finitos resulta en un conjunto finito.

ii) $A \in \mathcal{T}$: Notemos que A es un conjunto universal sano y por lo tanto $A^c = \varnothing$, como el conjunto vacío no tiene elementos, cumple con tener una cantidad finita de ellos y por ende obtenemos que $A \in \mathcal{T}$.

iii) Sea $S \subseteq \mathcal{T}$ arbitrario, mostraremos que $\bigcup S \in \mathcal{T}$. Utilizando la notación alternativa $\bigcup S = \bigcup_{X \in S} X$, notemos que

$$\bigcup_{X \in S} X = \{x \mid \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in X\}$$

Aplicando complemento sobre la definición del conjunto obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{X \in S} X\right)^c &= \{x \mid \forall X \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \notin X\} \\ &= \bigcap_{X \in S} X^c\end{aligned}$$

Por definición de intersección, cualquier $X' \in S$ arbitrario es tal que:

$$\bigcap_{X \in S} X^c \subseteq X'^c$$

Como $X' \in \mathcal{T}$, X'^c tiene una cantidad finita de elementos. Luego $\bigcap_{X \in S} X^c$ también debe tener una cantidad finita de elementos (ya que es subconjunto de X'^c). Finalmente, como $\bigcap_{X \in S} X^c = \left(\bigcup_{X \in S} X\right)^c$ es finito, concluimos que $\bigcup_{X \in S} X \in \mathcal{T}$.

iv) Sean $X, Y \in \mathcal{T}$ arbitrarios, mostraremos que $X \cap Y \in \mathcal{T}$. Aplicando la ley de De Morgan:

$$(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$$

Dado que $X, Y \in \mathcal{T}$, se debe tener que X^c e Y^c tienen finitos elementos y por ende $X^c \cup Y^c$ también es finito. Como $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$ es finito concluímos que $X \cap Y \in \mathcal{T}$.

Pauta (6 pts.)

a) 1 pts. por dar ejemplo de topología en $\mathbb{N}$.

b)
- 0.5 pto por i)
- 1.0 pto por ii)
- 2.0 pto por iii)
- 1.5 pto por iv)

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.