PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2018

PAUTA INTERROGACION 1

Pregunta 1

Para esta demostración, se debe demostrar los dos lados de la implicancia.

Demostración ($\Rightarrow$). Suponga que $\Sigma \models \alpha$. Entonces debemos demostrar que para toda valuación v se cumple que $[\Sigma \cup \{\neg\alpha\}](v) = 0$. Para esto, tomamos una valuación cualquiera v y consideramos dos casos:

1. Si $\Sigma(v) = 0$, entonces $[\Sigma \cup \{\neg\alpha\}](v) = 0$.
2. Si $\Sigma(v) = 1$ entonces $\alpha(v) = 1$ por definición de consecuencia lógica. Luego, $[\neg\alpha](v) = 0$ y por lo tanto $[\Sigma \cup \{\neg\alpha\}](v) = 0$.

Demostración ($\Leftarrow$). Suponga que $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente. Entonces debemos demostrar que para toda valuación v, si $\Sigma(v) = 1$ entonces $\alpha(v) = 1$. Sea v una valuación cualquiera tal que $\Sigma(v) = 1$. Como $[\Sigma \cup \neg\{\alpha\}](v') = 0$ para toda valuación v' (incluyendo v), tendremos que $[\neg\alpha](v) = 0$ para cumplir con la inconsistencia del conjunto. Luego, $\alpha(v) = 1$, y entonces, tendremos que para toda valuación v tal que $\Sigma(v) = 1$, se cumplirá que $\alpha(v) = 1$. Esto es la definición de consecuencia lógica, por lo tanto $\Sigma \models \alpha$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- Demostración ($\Rightarrow$)
  - **(1 punto)** por el caso en que $\Sigma(v) = 0$.
  - **(2 puntos)** por el caso en que $\Sigma(v) = 1$.
- Demostración ($\Leftarrow$)
  - **(1 punto)** por tomar las valuaciones en que $\Sigma(v) = 1$.
  - **(2 puntos)** por concluir que $\alpha(v) = 1$ dada la inconsistencia del conjunto.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Como estas formulas no son lógicamente equivalentes, la solución consistía en entregar un contraejemplo, es decir, definir detalladamente una interpretación para la cual se cumple una de las formulas y la otra no. Por ejemplo, la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ cumple ser un contraejemplo para la pregunta:

- $\mathcal{I}(dom) \ := \ \mathbb{N}$
- $\mathcal{I}(S(x)) \ := \ x$ es primo
- $\mathcal{I}(R(x,y)) \ := \ x$ es igual a y

Luego, había que explicar por que la respuesta propuesta hacía verdadera una de las formulas y la otra no.

- **(2 puntos)** por definir correctamente la interpretación usada.
- **(1 punto)** por explicar el contraejemplo.

Pregunta 2.2

Como estas formulas si son lógicamente equivalentes, la solución consistía en demostrar la equivalencia. Una forma de hacer esto era usar equivalencias lógicas para transformar una de las formulas en la otra. Para esto, solo se podían asumir como verdaderas las 4 equivalencias vistas en clases, y cualquier otra debía ser demostrada. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\forall x.(\exists y.R(x,y)) \rightarrow S(x) &\equiv \forall x.(\neg\exists y.R(x,y)) \vee S(x) && (1)\\
&\equiv \forall x.(\forall y.\neg R(x,y)) \vee S(x) && (2)\\
&\equiv \forall x.\forall y.\neg R(x.y) \vee S(x) && (3)\\
&\equiv \forall x.\forall y.R(x,y) \rightarrow S(x) && (4)
\end{aligned}$$

Importante que para esta solución la equivalencia utilizada para llegar del paso 2 al paso 3 no fue vista en clases, por lo que debía ser demostrada (una demostración como las vistas en clases bastaba).

- **(1.5 puntos)** por usar equivalencias lógicas para llegar de una formula a la otra.
- **(1.5 puntos)** por demostrar las equivalencias lógicas usadas que no fueron vistas en clases.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

La idea general era construir las 2^n fórmulas a partir de las 2^n valuaciones que existen para las variables $p_1, \ldots, p_n$. Sea $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la i-ésima valuación de $p_1, \ldots, p_n$, una posible construcción de las fórmulas era:

$$\alpha_i = \bigvee_{j=1}^{i}((\bigwedge_{k:v_k^j=1} p_k) \wedge (\bigwedge_{k:v_k^j=0} \neg p_k))$$

Donde α_i será cierta para las primeras i valuaciones (o las primeras i filas de la tabla de verdad). Esta cadena es de largo 2^n ya que cada fórmula va considerando una nueva valuación v_i, por lo que tenemos tantas fórmulas como valuaciones. Se cumple que $\forall i \neq j.\ a_i \not\equiv a_j$, ya que si $i < j$, por la construcción de nuestras fórmulas, habrá una valuación que hace cierta a a_j y falsa a a_i. Finalmente, por las disyunciones de las fórmulas tenemos que $a_i \vDash a_{i+1}$ para todo i, ya que se cumple que $a_{i+1} = a_i \vee \beta$.

Dao lo anterior, la distribución de puntaje fue la siguiente:

- **(1.5 puntos)** Construcción de la cadena.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar que la cadena tiene largo 2^n.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar que se cumple $a_i \not\equiv a_j$ para todo $i \neq j$.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar que se cumple $a_i \vDash a_{i+1}$ para todo i.

Pregunta 3.2

Para demostrar esto hay que dar cuenta de dos cosas sobre una cadena de consecuencias lógicas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

1. Dado que $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$: para todo i y toda valuación v si $\alpha_i(v) = 1$, entonces $\alpha_j(v) = 1$ para todo $j \geq i$.
2. Dado que $\alpha_i \not\equiv \alpha_{i+1}$: para todo i, existe una valuación v tal que $\alpha_i(v) = 0$ y $\alpha_{i+1}(v) = 1$.

Dadas estas dos afirmaciones, sin perdida de generalidad podemos asumir que dada cualquier cadena de consecuencias lógicas de largo $2^n + 1$, el último elemento corresponderá a una tautología y el primero a una contradicción, en donde además para cada α_i existe solo una valuación v que cumple con la afirmación. Dicho esto, al intentar insertar un β en la cadena ocurrirá alguno de estos casos:

- Se intenta insertar antes de α_1: Dado que α_1 es una contradicción, toda fórmula β tal que $\beta \models 0$ será contradicción, siendo equivalentemente lógica a α_1.
- Se intenta insertar despues de un α_i, con $1 \leqslant i \leqslant 2^n$: Dado que para todo elemento en este intervalo cumple con (1) y con solo un caso de (2), cualquier formula β tal que $\alpha_i \models \beta$ será equivalentemente lógico a un α_k con $k \geqslant i$.
- Se intenta insertar despues de α_{2^n+1}: Dado que α_{2^n+1} es una tautología, toda formula β tal que $1 \models \beta$ será tautología, siendo equivalentemente lógica a α_{2^n+1}.

Queda entonces demostrado que no es posible agregar otro elemento a la cadena sin perder las propiedades de una cadena de consecuencias lógicas.

- **(1 punto)** por demostrar (1).
- **(1 punto)** por demostrar (2).
- **(1 punto)** por demostrar que dado (1) y (2), no existe cadena de consecuencias lógicas de largo mayor estricto a $2^n + 1$.

Pregunta 4

Para esta pregunta, se evaluó tomando como base las siguientes definiciones de variables y restricciones. Claramente, esta no es la única solución.

Para las variables, se consideran dos conjuntos de variables:

- Se define el conjunto de variables $m_{i,j}$ que representa la existencia de una muralla en la celda (i, j). Formalmente, se espera que $m_{i,j} = 1$ si, y solo si, $(i, j) \in L$.
- Se define el conjunto de variables $C_{i,j,t}$ que representa que al recorrer el laberinto en tiempos (avanzando de una celda a la vez) se tiene que en el tiempo t uno esta parado en la celda (i, j). Formalmente, se espera que $C_{i,j,t} = 1$ si, y solo si, estoy parado en (i, j) en el tiempo t. Aqui el tiempo t esta acotado por $m \cdot n$ dado que en el peor caso tendrá que pasar por todas las celdas.

Dada las variables anteriores, la solución al laberinto se representa en lógica proposicional de la siguiente forma.

1. Definir las murallas:
$$\phi_1 = \bigwedge_{(i,j)\in L} m_{i,j} \wedge \bigwedge_{(i,j)\notin L} \neg m_{i,j}.$$
2. Definir que en $t = 1$ parto en la celda inicial:
$$\phi_2 = C_{1,1,1}.$$

3. En cada tiempo t estoy en una sola posición:

$$\phi_3 = \bigwedge_{t=1}^{mn} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} C_{i,j,t} \rightarrow \bigwedge_{i' \neq i} \bigwedge_{j' \neq j} \neg C_{i',j',t}.$$

4. En cada tiempo t tengo que estar en al menos una posición:

$$\phi_{3,1} = \bigwedge_{t=1}^{mn} (\bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} C_{i,j,t}).$$

5. Durante el recorrido, no puedo atravesar murallas:

$$\phi_4 = \bigwedge_{t=1}^{mn} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} m_{i,j} \rightarrow \neg C_{i,j,t}.$$

6. En algún momento del recorrido llego a la celda (n, m):

$$\phi_5 = \bigvee_{t=1}^{mn} C_{n,m,t}.$$

7. Del tiempo t al tiempo $t+1$ me puedo mover en las cuatro direcciones (derecha, izquierda, arriba, abajo) o me puedo quedar en la misma celda.

$$\phi_6 = \bigwedge_{t=1}^{mn-1} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} C_{i,j,t} \rightarrow \left(C_{i+1,j,t+1} \vee C_{i-1,j,t+1} \vee C_{i,j+1,t+1} \vee C_{i,j-1,t+1} \vee C_{i,j,t+1}\right).$$

Es importante destacar que en esta solución no se consideraron los casos bordes como que $i = 1$ o $i = n$ (lo mismo para j). Esto se podía solucionar facilmente colocando murallas adicionales en las posiciones $i = 0$ y $i = n+1$. De todas formas, los casos bordes no fueron considerados en la corrección, concentrando el puntaje en las ideas principales de la pregunta.

Por último, se definía la formula proposicional $\phi_{total} = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_{3,1} \wedge \phi_4 \wedge \phi_5 \wedge \phi_6$. Por construcción, es fácil ver que ϕ_{total} es satisfacible si, y solo si, la instancia del problema del laberinto tiene una solución.

Dado lo anterior, el puntaje asignado fue el siguiente:

- (**1 punto**) Por definir variables correctamente.
- (**0.5 puntos**) Definir las murallas.
- (**0.5 puntos**) Definir que en $t = 1$ parto en la celda inicial.
- (**1 punto**) En cada tiempo t estoy en una sola posición.
- (**0.5 puntos**) En cada tiempo t tengo que estar en al menos una posición.
- (**1 punto**) Durante el recorrido, no puedo atravesar murallas.
- (**0.5 puntos**) Al final del recorrido, llego a (n, m).
- (**1 punto**) Del tiempo t al tiempo me puedo mover en las cuatro direcciones o me puedo quedar en la misma celda.