Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

28 de septiembre de 2017
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1

Sea A un conjunto. Demuestre que A es menos numeroso que su conjunto potencia.

Solución

Lo primero es ver que existe una función inyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$, por ejemplo $f(a) = \{a\}$ es una función inyectiva, de donde concluímos que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Debemos mostrar que $A \not\approx \mathcal{P}(A)$, lo haremos por contradicción. Supongamos que existe $f : A \to \mathcal{P}(A)$ biyectiva. La función f es tal que a cada elemento $a \in A$ le asigna un subconjunto $X \subseteq A$. Luego podemos definir el siguiente conjunto:

$$D = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

o sea, D es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a su imagen, notar que $D \subseteq A$. Dado que f es biyectiva (y por ende sobreyectiva) y $D \in \mathcal{P}(A)$, entonces necesariamente debe existir un $b \in A$ tal que $f(b) = D$. Tenemos dos casos:

1. Si $b \in f(b) \Rightarrow b \notin D \Rightarrow f(b) \neq D$ ya que $f(b)$ contiene a b y D no.
2. Si $b \notin f(b) \Rightarrow b \in D \Rightarrow f(b) \neq D$ ya que D contiene a b y $f(b)$ no.

Dado que en ambos casos llegamos a una contradicción, concluímos que no puede existir f biyectiva por lo que $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

Pauta

- 1 pts. Función inyectiva.
- 2 pts. Diagonal negada
- 2 pts. Contradicción
- 1 pts. Conclusión.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2

Sean A, B, C y D conjuntos, y sea $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots\}$ una colección enumerable de conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades:

a) $A \subseteq B \land C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

c) $\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \times B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \times B)$

Solución

a) Supongamos que $A \subseteq B$, $C \subseteq D$ y sea $(x, y) \in A \times C$ arbitrario, luego tenemos

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times C &\Rightarrow x \in A \land y \in C && \text{(def. de producto cruz)}\\
&\Rightarrow x \in B \land y \in C && \text{(por } A \subseteq B\text{)}\\
&\Rightarrow x \in B \land y \in D && \text{(por } C \subseteq D\text{)}\\
&\Rightarrow (x,y) \in B \times D && \text{(def. de producto cartesiano)}
\end{aligned}$$

Finalmente, como (x, y) es arbitrario se cumple que $A \times C \subseteq B \times D$.

b) Por demostrar:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \times C &= \{(x,y) \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \{(x,y) \mid (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)\} && \text{(distributividad de } \wedge\text{)}\\
&= \{(x,y) \mid ((x,y) \in A \times C) \vee ((x,y) \in B \times C)\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \{(x,y) \mid (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)\} && \text{(def. de unión)}\\
&= (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) \times B &= \{(x,y) \mid x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \wedge y \in B\} && \text{(def. de producto cartesiano)}\\
&= \{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i) \wedge y \in B\} && \text{(def. de intersección generalizada)}\\
&= \{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i) \wedge \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (y \in B)\} && \text{(idempotencia)}\\
&= \{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i \wedge y \in B)\} && \text{(conmutatividad y asociatividad)}\\
&= \{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} ((x,y) \in A_i \times B)\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \{(x,y) \mid (x,y) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \times B)\} && \text{(def. de intersección)}\\
&= \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \times B)
\end{aligned}
$$

Pauta

- 2 pts. pregunta a).
- 2 pts. pregunta b).
- 2 pts. pregunta c).
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 3

Un alumno de matemáticas discretas se encuentra viajando por la carretera, cuando decide detenerse por la noche en un hotel. Sin embargo, para sorpresa del alumno, el hotel cuenta con infinitas habitaciones individuales y se encuentra totalmente copado.

a) [1 pto.] ¿Cómo puede reasignar al alumno y a todos los huéspedes de manera de no dejar a nadie fuera del hotel?

b) [1 pto.] Suponga que llegan n personas más. ¿Cómo se puede reasignar a las n personas y a todos los huéspedes de manera de no dejar a nadie fuera del hotel?

c) [1.5 ptos.] Suponga que llega un bus con una cantidad infinita (pero numerable) de personas. ¿Cómo se puede reasignar a las personas del bus y a todos los huéspedes de manera de no dejar a nadie fuera del hotel?

d) [2.5 ptos.] Suponga que llega una cantidad infinita (pero numerable) de buses con una cantidad infinita (pero numerable) de personas cada uno. ¿Cómo se puede reasignar a las todas personas de todos los buses más los huéspedes de manera de no dejar a nadie fuera del hotel?

Modele y justifique utilizando funciones.

Solución

a) Para asignar una habitación al alumno, se puede hacer que cada huésped se cambie a la habitación siguiente. Entonces el huésped de la habitación 1 se movería a la segunda habitación, el de la 2 se mueve a la 3 y así sucesivamente.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es el alumno.} \\ k+1 & \text{si } x \text{ es el huésped de la habitación } k. \end{cases}$$

De esta manera, la primera habitación quedara desocupada y la podrá utilizar el alumno.

b) Para reasignar a las n personas, les pedimos a todos los huéspedes que se muevan a la $n + k$ habitación, donde k es su habitación actual.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x \text{ es el visitante } k. \\ k+n & \text{si } x \text{ es el huésped de la habitación } k. \end{cases}$$

De esta forma, las primeras n habitaciones quedarán desocupadas para que puedan ser alojadas por los nuevos huéspedes.

c) Ahora se tiene que llegan infinitas personas. Para asignarles una habitación, se pide a los huéspedes que vayan a la habitación $2k$, de esta manera quedarán desocupadas todas las habitaciones impares. Como el conjunto de los números impares es infinito numerable, las infinitas personas tendrán donde hospedarse.

$$f(x) = \begin{cases} 2k+1 & \text{si } x \text{ es el visitante } k. \\ 2k & \text{si } x \text{ es el huésped de la habitación } k. \end{cases}$$

d) Finalmente, debemos acomodar infinitos buses de infinitos huéspedes. Para esto utilizaremos el hecho de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sea enumerable. Consideremos el siguiente conjunto:

$$A = \{(i, j) \mid \text{la persona } i \text{ del bus } j)\}$$

En primer lugar notemos que $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por lo que podemos utilizar cualquier función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva para enumerarlo[1].

Luego, para asignar las habitaciones se pide a los huéspedes que vayan a la habitación $2k$, de esta manera quedarán desocupadas todas las habitaciones impares. Para luego enviar a los pasajeros del bus a las habitaciones impares restantes, formalmente:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot g(i,j) + 1 & \text{si } x \text{ es el pasajero } i \text{ del bus } j. \\ 2k & \text{si } x \text{ es el huésped de la habitación } k. \end{cases}$$

Notar que todas las funciones mencionadas son inyectivas, por lo que no se da el caso en que dos personas son asignadas a la misma habitación.

Pauta

- 0.8 pts. función pregunta a).
- 0.8 pts. función pregunta b)
- 1.3 pts. función pregunta c).
- 2.3 pts. función pregunta d).
- 0.8 pts. por argumentar que las funciones son inyectivas.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 4

Sea A un conjunto finito. Definimos el conjunto $\mathcal{F}_A = \{f \mid f : A \to A\}$. Es decir, $\mathcal{F}_A$ es el conjunto de todas las funciones de A en A.

a) Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_A$ como:

$$f_1 \rightsquigarrow f_2 \text{ si y sólo si existe } f \in \mathcal{F}_A \text{ tal que } f(f_1(x)) = f_2(x), \text{ para todo } x \in A.$$

Demuestre que $\rightsquigarrow$ es refleja y transitiva[2].

b) Definimos la relación $\sim \subseteq \mathcal{F}_A \times \mathcal{F}_A$ como: $f_1 \sim f_2$ si y sólo si $f_1 \rightsquigarrow f_2$ y $f_2 \rightsquigarrow f_1$.

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

c) Definimos la relación $\preceq \subseteq \mathcal{F}_A/\!\sim \times \mathcal{F}_A/\!\sim$ como: $[f_1] \preceq [f_2]$ si y sólo si $f_1 \rightsquigarrow f_2$.

Demuestre que $\preceq$ es una relación de orden parcial.

[1] Por ejemplo podríamos utilizar la función vista en clases que recorre con diagonales la matriz infinita de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

[2] Esto es conocido como un *preorden*.

d) ¿Qué representa la relación $\rightsquigarrow$? ¿Qué representan las clases de equivalencia de la relación $\sim$? ¿Cuáles son el mínimo y el máximo bajo la relación $\preceq$?

Solución

a)
- Refleja: Sea $f \in F_a$ y $g(x) = x \Rightarrow g(f(x)) = f(x) \Rightarrow f \rightsquigarrow f$.
- Transitiva: Suponemos $f_1 \rightsquigarrow f_2$ y $f_2 \rightsquigarrow f_3$. Tenemos que existen $f', f'' \in F_a$ tales que $f'(f_1(x)) = f_2(x)$ y $f''(f_2(x)) = f_3(x)$. Si componemos las funciones obtenemos $f''(f'(f_1(x))) = f_3(x) \Rightarrow f'' \circ f'(f_1(x))) = f_3(x) \Rightarrow f_1 \rightsquigarrow f_3$.

b)
- Refleja: Por (a), tenemos que $f \rightsquigarrow f \Rightarrow f \sim f$
- Simétrica: Suponemos $f \sim g \Rightarrow f \rightsquigarrow g$ y $g \rightsquigarrow f \Rightarrow g \rightsquigarrow f$ y $f \rightsquigarrow g \Rightarrow g \sim f$
- Transitiva: Suponemos $f_1 \sim f_2$ y $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \rightsquigarrow f_2$, $f_2 \rightsquigarrow f_1$, $f_2 \rightsquigarrow f_3$ y $f_3 \rightsquigarrow f_2$. Luego por (a) tenemos que $f_1 \rightsquigarrow f_3$ y que $f_3 \rightsquigarrow f_1 \Rightarrow f_1 \sim f_3$.

c)
- Refleja: Por (a) $f \rightsquigarrow f \Rightarrow f \preceq f$
- Antisimétrica: Suponemos $[f_1] \preceq [f_2]$ y $[f_2] \preceq [f_1] \Rightarrow f_1 \rightsquigarrow f_2$ y $f_2 \rightsquigarrow f_1 \Rightarrow f_1 \sim f_2$ y como $\sim$ es de equivalencia tenemos que $[f_1] = [f_2]$.
- Transitiva: Suponemos $[f_1] \preceq [f_2]$ y $[f_2] \preceq [f_3] \Rightarrow f_1 \rightsquigarrow f_2$ y $f_2 \rightsquigarrow f_3 \Rightarrow$ por (a) $f_1 \rightsquigarrow f_3 \Rightarrow [f_1] \preceq [f_3]$.

d) $\rightsquigarrow$ relaciona dos funciones f_1 y f_2 tal que $|Im(f_2)| \leq |Im(f_1)|$. Y las clases de equivalencia de $\sim$ relaciona f_1 y f_2 tal que $|Im(f_2)| = |Im(f_1)|$. El mínimo de $\preceq$ son las funciones sobreyectivas. Y el máximo son las funciones contantes, las que llegan a un sólo elemento de la imagen.

Pauta

- 1.5 pts. por cada item.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.