PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Interrogación 2

26 de octrube de 2022
Profesores: Fernando Suárez - Sebastián Bugedo - Nicolás Alvarado

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Grafos (vista en clases)

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

Solución

Sea $G(V, E)$ con $|V| = 6$, buscamos demostrar que G tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema visto en clases, esto es equivalente a mostrar que G tiene un clique o que $\overline{G}$ lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni G ni $\overline{G}$ tiene el clique. Sea $v \in V$ tenemos 2 casos:

- v **tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean $x, y, z \in V$ los vecinos de v tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$. Una observación importante es que no pueden existir aristas entre x, y, z dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego, x, y, z forman un conjunto independiente en G y por el teorema visto en clases estos vértices mismos forman un clique en $\overline{G}$.

- v **tiene menos de 3 vecinos:** En este caso v no es adyacente con por lo menos 3 vertices de G. Sean x, y, z estos vértices tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$. Luego, x, y, z son vecinos de v en $\overline{G}$ y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que x, y, z forman un clique de tamaño 3 en G.

Como en ambos casos llegamos a que G o $\overline{G}$ cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende G debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

Pauta (6 pts.)

- 3 puntos por cada caso.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Relaciones de Orden

Sean $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$ dos órdenes parciales. Definimos la relación $\preceq$ sobre $A \times B$ como:

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \text{ si y sólo si (i) } a_1 \neq a_2 \text{ y } a_1 \preceq_A a_2 \textbf{ , o}$$
$$\text{(ii) } a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2$$

Demuestre que $\preceq$ es una relación de orden parcial.

Solución

Debemos demostrar que $\preceq$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

- **Refleja:** Sea $(a, b) \in A \times B$ un par ordenado cualquiera. Como sabemos que $\preceq_B$ es un orden parcial, también debe ser refleja y por ende $b \preceq_B b$. Además, es claro que $a = a$ y con esto se cumplen ambas condiciones de (ii), y en consecuencia $(a, b) \preceq (a, b)$.

- **Antisimétrica:** Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos pares ordenados tales que

  $$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \text{ y } (a_2, b_2) \preceq (a_1, b_1)$$

  Debemos demostrar que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.

  Notemos que la condición (i) no se puede cumplir para ninguna de las relaciones, ya que por un lado tendríamos que $a_1 \neq a_2$ y $a_1 \preceq_A a_2$. Por otro lado, tendríamos que $a_2 \neq a_1$ y $a_2 \preceq_A a_1$. Y como $\preceq_A$ es un orden y en consecuencia antisimétrica tendríamos que $a_1 = a_2$, lo que sería una contradicción.

  Luego, el único caso posible es que ambas relaciones cumplan (ii). De acá obtenemos que

  $$a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2 \text{ y } b_2 \preceq_B b_1$$

Y como $\preceq_B$ es antisimétrica obtenemos que $b_1 = b_2$. De esto concluimos que

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

.

- **Transitiva:** Sean (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3) pares ordenados tales que

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \text{ y } (a_2, b_2) \preceq (a_3, b_3)$$

Debemos demostrar que $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$. Tenemos 4 casos:

1. Si ambas relaciones cumplen (i), tendremos que

$$a_1 \neq a_2 \text{ y } a_2 \neq a_3 \text{ y } a_1 \preceq_A a_2 \text{ y } a_2 \preceq_A a_3$$

Como $\preceq_A$ es un orden y por ende transitiva, obtenemos que $a_1 \preceq_A a_3$. Ahora demostraremos que $a_1 \neq a_3$. Por contradicción, si $a_1 = a_3$ podemos reemplazar esto en $a_2 \preceq_A a_3$ y obtener $a_2 \preceq_A a_1$. Como sabemos que $a_1 \preceq_A a_2$, por antisimetría de $\preceq_A$ tendríamos que $a_1 = a_2$, lo que contradice el hecho de que $a_1 \neq a_2$. Luego, como $a_1 \neq a_3$ y $a_1 \preceq_A a_3$ se cumple que $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$.

2. Si ambas relaciones cumplen (ii) tenemos que

$$a_1 = a_2 \text{ y } a_2 = a_3 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2 \text{ y } b_2 \preceq_B b_3$$

Por transitividad de la igualdad, y por transitividad de $\preceq_B$ obtenemos que $a_1 = a_3$ y $b_1 \preceq_B b_2$ y por ende que $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$.

3. Si la primera relación cumple (i) y la segunda cumple (ii), tendríamos que

$$a_1 \neq a_2 \text{ y } a_2 = a_3 \text{ y } a_1 \preceq_A a_2 \text{ y } b_2 \preceq_B b_3$$

Como $a_2 = a_3$, podemos reemplazar a_3 en $a_1 \neq a_2$ y $a_1 \preceq_A a_2$. De esto obtenemos $a_1 \neq a_3$ y $a_1 \preceq_A a_3$, es decir, la propiedad (i). Concluimos que $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$.

4. Si la primera relación cumple (ii) y la segunda cumple (i), tendríamos que

$$a_1 = a_2 \text{ y } a_2 \neq a_3 \text{ y } b_1 \preceq_B b_2 \text{ y } a_2 \preceq_A a_3$$

Como $a_1 = a_2$, podemos reemplazar a_1 en $a_2 \neq a_3$ y $a_2 \preceq_A a_3$. De esto obtenemos $a_1 \neq a_3$ y $a_1 \preceq_A a_3$, es decir, la propiedad (i). Concluimos que $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$.

Como en los 4 casos llegamos a $(a_1, b_1) \preceq (a_3, b_3)$ concluimos que $\preceq$ es transitiva.

Pauta (6 pts.)

- 1 punto por refleja.
- 2 puntos por simétrica.
- 3 puntos por transitiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 - Funciones y Cardinalidad

a) Demuestre que si A, B son conjuntos enumerables tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cup B$ es enumerable[1].

b) Sea $\{0,1\}^\omega$ el conjunto de los strings infinitos de la forma $a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots$, donde cada a_i es 0 o 1. Demuestre que $\{0,1\}^\omega$ no es enumerable.

Solución

a) Mostraremos 2 soluciones alternativas[2].

Solución Alternativa 1

Como A y B conjuntos enumerables podemos enumerarlos en una lista infinita con indices naturales tal que todos los elementos de A y B aparecen una única vez cada uno.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

Luego, podemos enumerar los elementos intercalandolos entre ellos

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots\}$$

Para que la enumeración funcione, todos los elementos de $A \cup B$ deben aparecer una única vez cada uno. Esto es evidente ya que como A y B son enumerables todos sus elementos aparecen exactamente una vez en sus listas respectivas. Además, como $A \cap B = \varnothing$, no comparten elementos y por ende no se generan repeticiones en la lista.

Solución Alternativa 2

Como A y B conjuntos enumerables existen dos funciones $f : \mathbb{N} \to A$ y $g : \mathbb{N} \to B$ biyectivas. Luego, podemos definir la siguiente función biyectiva $h : \mathbb{N} \to A \cup B$

$$h(x) = \begin{cases} f(\frac{x+1}{2}) & x \text{ es impar} \\ g(\frac{x}{2}) & x \text{ es par} \end{cases}$$

Notemos que h debe ser inyectiva, ya que f y g son inyectivas, y como $A \cap B = \varnothing$ (no comparten elementos) no se generan colisiones en el recorrido. Además, h debe ser sobre ya que tanto f y g son sobre, y reciben todo el dominio de los naturales en h.

---

[1] En caso de utilizar una biyección (o enumeración infinita), debe argumentar por qué su propuesta corresponde efectivamente a una biyección.

[2] Podrían haber más soluciones posibles, por ejemplo utilizar el teorema de Schröder-Bernstein.

b) Por contradicción, supongamos que $\{0,1\}^\omega$ es enumerable. Entonces existe una lista infinita de $\{0,1\}^\omega$:

$$w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots$$

donde cada string en $\{0,1\}^\omega$ aparece exactamente una vez.

Notemos que cada w_i es una palabra de la forma

$$w_i = a_{i0}a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots, \text{ con } a_{ij} \in \{0,1\}$$

Strings	Representación por caracteres					
w_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	$\cdots$
w_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\cdots$
w_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\cdots$
w_3	a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\cdots$
w_4	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para cada $i \geq 0$, definimos $a_i = \begin{cases} 1 & a_{ii} = 0 \\ 0 & a_{ii} = 1 \end{cases}$

Sea ahora el string $w^* = a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$ ¿Aparece w^* en la lista?

- ¿$w^* = w_0$? No, porque difieren en el primer caracter.
- ¿$w^* = w_1$? No, porque difieren en el segundo caracter.
- $\ldots$
- ¿$w^* = w_i$? No, porque el i-ésimo caracter de w^* es distinto al de w_i:

$$a_i \neq a_{ii}$$

Por lo tanto, w^* no aparece en la lista $\rightarrow\leftarrow$

Como $\{0,1\}^\omega$ no puede ponerse en una lista, no es enumerable.

Pauta (6 pts.)

a)
- 2 ptos por encontrar la enumeración o biyección.
- 1 pto por argumentar por qué es una biyección o una enumeración correcta.

b)
- 2 ptos por dar una diagonalización válida.
- 1 pto por argumentar por qué es correcta.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 - Análisis de Algoritmos

(a) Resuelva la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

(b) Considere una versión modificada del algoritmo `MergeSort` visto en clases. El algoritmo `TripleMergeSort` opera dividiendo la lista original de tamaño n en tres sublistas de tamaños similares. Además, se utiliza el algoritmo `TripleCombinar` que toma 3 listas ordenadas y las combina en una lista ordenada de n elementos, efectuando para ello $n-1$ comparaciones de elementos en el peor caso.

Determine la complejidad `TripleMergeSort` en el peor caso.

```
TripleMergeSort (A, n):
    if n ≤ 1 :
        return A
    else:
        p = ⌊n/3⌋
        q = ⌊2n/3⌋
        A1 = TripleMergeSort(A[0, . . . , p − 1], p)
        A2 = TripleMergeSort(A[p, . . . , q − 1], q − p)
        A3 = TripleMergeSort(A[q, . . . , n − 1], n − q)
        return TripleCombinar(A1, A2, A3)
```

Solución

a) Vamos a expandir el caso recursivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= (T(n-2) + n - 1) + n \\ &= T(n-2) + n + (n-1) \\ &= (T(n-3) + n - 2) + n + (n-1) \\ &= T(n-3) + n + (n-1) + (n-2) \\ &\vdots \\ &= T(n-i) + \sum_{k=1}^{i} (n - k + 1) \end{aligned}$$

Tomamos $i = n - 1$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (n - k + 1) \\
&= T(1) + \sum_{k=1}^{n-1} n - \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 1 + n \cdot (n-1) - \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n - 1 \\
&= n^2 - n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n \\
&= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

b) Como vimos antes, el peor caso es que `TripleCombinar` tenga que ejecutar $n - 1$ comparaciones, a la que sumamos la comparación que se hace para verificar el tamaño de la lista. Entonces, la ecuación de recurrencia para TripleMergeSort es:

$$
T(n) = \begin{cases} 1 & n < 2 \\ 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{3} \rceil) + n & n \geq 2 \end{cases}
$$

Aplicamos el teorema maestro:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 2, a_2 = 1, b = 3, c = 1, d = 1, c_0 = 1 \\
&a_1 + a_2 = 3, b^d = 3^1 = 3 \rightarrow \text{Entramos en el segundo caso: } a_1 + a_2 = b^d
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $T(n) \in \Theta(n \cdot \log(n))$.

Pauta (6 pts.)

a
- 2 puntos por expandir y reemplazar.
- 1 punto por llegar al resultado correcto.

b)
- 1.5 puntos por entregar $T(n)$ correcto.
- 1.5 puntos por aplicar bien el teorema maestro.

.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.