Relaciones de equivalencia

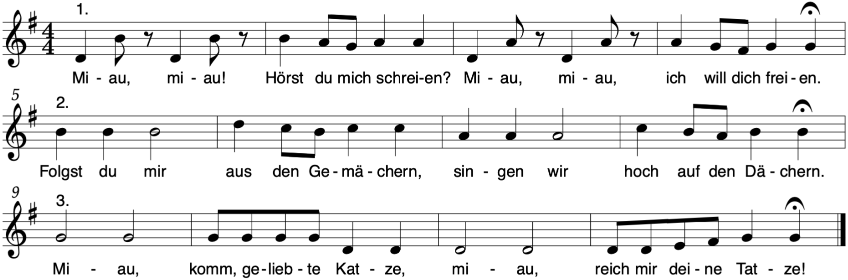
Clase 11

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Miau aus Frankreich



Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

Segundo Acto: Relaciones

Conjuntos, relaciones y funciones

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que *sum* es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B.

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B?

Ejemplo

La relación *divide a*, denotada por $|$, sobre los naturales sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a:

$$a|b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = ka.$$

$$3|9 \qquad 18|72 \qquad 7\nmid 9$$

Ejemplo

La relación *equivalencia módulo n*, denotada por $\equiv_n$, sobre los naturales, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $|a-b|$ es múltiplo de n:

$$a \equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a-b| = kn.$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4$$

De ahora en adelante trabajaremos con relaciones binarias sobre un conjunto, a las que nos referiremos simplemente como relaciones.

Objetivos de la clase

- Conocer ejemplos de relaciones binarias
- Conocer tipos de relaciones según sus propiedades
- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente

Outline

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Refleja** si para cada $a \in A$ se tiene que $R(a, a)$.
- **Irrefleja** si para cada $a \in A$ no se tiene que $R(a, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto que $R(b, a)$.
- **Antisimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Transitiva** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa** si para cada $a, b \in A$, se tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Ejercicios

1. Demuestre que la relación $\mid$ es refleja, antisimétrica y transitiva.
2. Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Propiedades de las relaciones

Ejercicio

Demuestre que la relación $\mid$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Reflexividad: Propuesto (★).

Antisimetría: Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$. Si $a|b$, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = k_1 \cdot a$. Similarmente, si $b|a$ sabemos que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a = k_2 \cdot b$. Reemplazando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $b = k_1 \cdot k_2 \cdot b$. Como la relación $\mid$ está definida sobre los naturales sin el 0, podemos dividir por b y obtenemos que $1 = k_1 \cdot k_2$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, necesariamente se debe cumplir que $k_1 = k_2 = 1$, y aplicando esta igualdad en $b = k_1 \cdot a$, obtenemos que $b = a$.

Propiedades de las relaciones

Ejercicio

Demuestre que la relación $\mid$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

<ins>Transitividad:</ins> Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$. Aplicando la definición, sabemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 \cdot a$ y $c = k_2 \cdot b$. Aplicando la primera igualdad en la segunda, obtenemos que $c = k_2 \cdot k_1 \cdot a$, y por lo tanto existe $k_3 = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c = k_3 \cdot a$, de donde concluimos que $a|c$. $\square$

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Propiedades de las relaciones

Demostración

<u>Reflexividad:</u> Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n x$. Por definición, debemos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x| = k \cdot n$. Como $x - x = 0$ para todo natural, podemos tomar $k = 0$ y luego se cumple la igualdad anterior, con lo que mostramos que $x \equiv_n x$.

<u>Simetría:</u> Debemos demostrar que si $x \equiv_n y$, entonces $y \equiv_n x$. Por definición, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| = k \cdot n$. Como $|x - y| = |y - x|$, tenemos que $|y - x| = k \cdot n$, y luego por definición de equivalencia módulo n, se cumple que $y \equiv_n x$.

Propiedades de las relaciones

Demostración

<u>Transitividad:</u> Dados x, y, z tales que $x \equiv_n y$ e $y \equiv_n z$, debemos demostrar que $x \equiv_n z$. Usando la definición, esto es equivalente a demostrar que si $|x - y| = k_1 \cdot n$ y $|y - z| = k_2 \cdot n$, entonces $|x - z| = k \cdot n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Asumiremos que $x \neq y \neq z$ (el resultado es trivial de otra manera). Supongamos ahora que $x - y > 0$ e $y - z > 0$ (los demás casos son análogos). Entonces, podemos escribir

$$x - y = k_1 \cdot n$$
$$y - z = k_2 \cdot n$$

y sumando ambas igualdades, obtenemos que $x - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n$. Notemos que $x - z > 0$ también. Por lo tanto, si tomamos $k = k_1 + k_2$, tenemos que $|x - z| = k \cdot n$, concluyendo entonces que $x \equiv_n z$. □

Outline

Relaciones de equivalencia

Las propiedades de las relaciones se pueden usar para definir tipos de relaciones. Un tipo muy importante es el siguiente:

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejercicio

Demuestre que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)^2$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall\sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

Demostración: Debemos demostrar que la equivalencia lógica es refleja, simétrica y transitiva.

Reflexividad: Debemos demostrar que para toda fórmula $\varphi \in L(P)$, se cumple que $\varphi \equiv \varphi$. Si tomamos cualquier valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición obtenemos que $\varphi \equiv \varphi$.

Relaciones de equivalencia

<u>Simetría:</u> Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa[1], tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

<u>Transitividad:</u> Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$ y $\psi \equiv \theta$, entonces $\varphi \equiv \theta$. Por definición, tenemos que para todo σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ y $\sigma(\psi) = \sigma(\theta)$. Aplicando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $\sigma(\varphi) = \sigma(\theta)$, y luego por definición concluimos que $\varphi \equiv \theta$. $\square$

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$. La **clase de equivalencia** de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

Si la relación se entiende del contexto, sólo escribiremos $[x]$.

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

R: Cada clase de equivalencia contendrá a todas las fórmulas que son lógicamente equivalentes entre sí. Las fórmulas que son lógicamente equivalentes tienen la misma tabla de verdad, por lo que podemos pensar que cada clase de equivalencia representa a una posible tabla de verdad. Por lo tanto, si tenemos un conjunto P de variables proposicionales de tamaño n, la cantidad de clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia lógica es 2^{2^n}.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Teorema

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.

<u>Demostración:</u> Como $\sim$ es una relación de equivalencia, es refleja. Por lo tanto, $\forall x \in A, x \sim x$. Luego, por definición de una clase de equivalencia, tenemos que $\forall x \in A, x \in [x]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

$(\Rightarrow)$: Suponiendo que $x \sim y$, debemos demostrar que $[x] = [y]$. Esto significa que debemos demostrar que $[x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$:

a Por demostrar que $[x] \subseteq [y]$. Por definición, $[x] = \{z \mid x \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es simétrica, y luego $y \sim x$. Ahora, también es cierto que $\sim$ es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [x], y \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [x], z \in [y]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

b Por demostrar que $[y] \subseteq [x]$. Por definición, $[y] = \{z \mid y \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [y], x \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [y], z \in [x]$.

$(\Leftarrow)$: Suponiendo que $[x] = [y]$, debemos demostrar que $x \sim y$. Sea $z \in [x]$. Por definición de clases de equivalencia: $x \sim z$ (1). Como $[x] = [y]$, sabemos que $z \in [y]$, y por lo tanto $y \sim z$, y por simetría $z \sim y$ (2). Finalmente, por transitividad entre (1) y (2), concluimos que $x \sim y$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Por contrapositivo, supongamos que $[x] \neq [y]$. Como la intersección de ambas clases de equivalencia no es vacía, existe z tal que $z \in [x]$ y $z \in [y]$. Aplicando la definición de clase de equivalencia, tenemos que $x \sim z$ (1) e $y \sim z$, y por simetría se cumple que $z \sim y$ (2). Por transitividad entre (1) y (2) se tiene que $x \sim y$, y por la parte 2 del teorema se cumple que $[x] = [y]$. Por lo tanto, queda demostrado el resultado.

Outline

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El **conjunto cuociente** de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim \; = \{[x] \mid x \in A\}$$

Ejercicio

Determine $\mathbb{N}/\equiv_4$.

$\mathbb{N}/\equiv_4 \; = \{[0], [1], [2], [3]\}$

Relaciones de equivalencia

Definición

El **índice** de una relación de equivalencia es la cantidad de clases de equivalencia que induce. Es decir, la cantidad de elementos de su conjunto cuociente.

Ejercicio

¿Cuál es el índice de $\equiv_4$?

Como $\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}$, el índice de $\equiv_4$ es 4.

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto cualquiera, y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de A ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$). Diremos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si cumple que:

1. $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$.

Ejercicio

Dé ejemplos de particiones de $\mathbb{N}$.

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración: Debemos demostrar que $A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A. Para esto demostraremos las tres propiedades que debe cumplir según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\sim,\ X \neq \varnothing$: por teorema anterior, sabemos que $\forall x \in A,\ x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\!\sim$ es una partición de A.

2. $\bigcup A/\!\sim\, = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
   - $\bigcup A/\!\sim\, \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\!\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
   - $A \subseteq \bigcup A/\!\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\!\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\!\sim$.
3. $\forall X, Y \in A/\!\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: Todos los conjuntos en $A/\!\sim$ son clases de equivalencia, y por lo tanto por teorema anterior esta propiedad se cumple.

Algo muy interesante es que lo inverso también se cumple:

Teorema

Si $\mathcal{S}$ es una partición cualquiera de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A.

Un elemento x estará relacionado con y si ambos pertenecen al mismo conjunto de la partición.

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.

Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

Outline

Objetivos de la clase

- Conocer ejemplos de relaciones binarias
- Conocer tipos de relaciones según sus propiedades
- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente