Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Sea $R \subset A \times A$ antisimétrica y $a, b \in A$ arbitrarios tales que $(a, b) \in R \cap R^{-1}$.
PD: $(a, b) \in I_A$, o equivalentemente, $a = b$.
Como $(a, b) \in R \cap R^{-1}$, luego $(a, b) \in R$ y $(a, b) \in R^{-1}$. Como $(a, b) \in R^{-1}$, se tiene que $(b, a) \in R$ por definición de R^{-1}. Finalmente, usamos que R es antisimétrica: si $((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$ entonces $a = b$. Así, $(a, b) \in I_A$ y $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por comenzar la demostración considerando (a, b) arbitrario en $R \cap R^{-1}$ y mencionar que se desea demostrar que está en I_A.
- **(0.5 puntos)** Por usar la definición de intersección de $R \cap R^{-1}$.
- **(1 punto)** Por usar la definición de R^{-1}.
- **(1 punto)** Por usar la definición de antisimetría.

Pregunta 1.2

Sea $R \subset A \times A$ tal que $R \circ R \subset R$ y sean $a, b, c \in A$ arbitrarios tales que $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ (si no existen a, b, c que lo cumplan, el resultado es trivial).
PD: $(a, c) \in R$.
Como $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$, entonces por definición de $R \circ R$, $(a, c) \in R \circ R$. Pero como $R \circ R \subset R$, entonces $(a, c) \in R$. Finalmente, R es transitiva.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por comenzar la demostración considerando $a, b, c \in A$ arbitrarios tales que $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$.
- **(1.5 puntos)** Por utilizar la definición de $R \circ R$.
- **(1 punto)** Por utilizar que $R \circ R \subset R$.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

La respuesta es verdadero.

PD: $\forall S \subseteq A$, $S \neq \emptyset$. S tiene un mínimo, entonces $\preceq$ es un orden total.

Sabemos por enunciado que $\preceq$ ya es un orden parcial, por lo tanto lo anterior es equivalente a demostrar que $\preceq$ es conexo.

Sean $a, b \in A$ y escogemos $S = \{a, b\}$. Como S tiene mínimo, pueden pasar dos cosas, que a sea menor que b o viceversa: $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Por lo tanto, $\preceq$ es conexo.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por indicar que es verdadero.
- **(1 punto)** Por identificar que se debe demostrar conexidad.
- **(1 punto)** Por definir un S cualquiera con mínimo.
- **(2 puntos)** Demostración de conexidad.
- **(1 punto)** Conclusión.

Pregunta 2.2

La respuesta es falso.

Basta tomar el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ como contraejemplo. El conjunto $\mathbb{Z}$ es un orden total y no tiene mínimo.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(3 puntos)** Por setting de contraejemplo.
- **(3 puntos)** Por demostrar que no tiene mínimo.

Pregunta 2.3

La respuesta es falso, esto es, es falso que para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces $|S| = 1$.

Un posible contra-ejemplo es el siguiente. Sea $A = \mathbb{N}$ y el orden parcial "divide a"$|$. Si definimos $S = \{2, 3\}$, vemos que tanto 2 como 3 son minimales y maximales al mismo tiempo, pero $|S| \neq 1$.

Otro posible contra-ejemplo es considerar el conjunto potencia $A = 2^{\mathbb{N}}$ tomando el subconjunto $S = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(2 puntos)** Plantear contraejemplo correcto.
- **(1 punto)** Identificar subconjunto S.
- **(2 puntos)** Demostrar relación.
- **(1 punto)** Conclusión.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

Sabemos que, por definición, $(R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$. Por demostrar que es refleja, simétrica y transitiva.

Refleja: $(a, a) \in (R \cup T)^t$ para todo a.

Como R y T son reflejas, entonces en particular $(a, a) \in R$. Por lo tanto, $(a, a) \in (R \cup T) \Rightarrow (a, a) \in \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i \Rightarrow (a, a) \in (R \cup T)^t$. Con esto tenemos que es refleja.

Simétrica: Si $(a, b) \in (R \cup T)^t$, entonces $(b, a) \in (R \cup T)^t$.

Si $(a, b) \in (R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$, entonces $(a, b) \in (R \cup T)^k$ para algún k. Por definición de $(R \cup T)^k$ (composición), sabemos que existen $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}$ tales que:

$$(a, a_1) \in (R \cup T),\ (a_1, a_2) \in (R \cup T),\ \ldots\ (a_{k-1}, b) \in (R \cup T)$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que $(a, a_1) \in A_1, ..., (a_{k-1}, b) \in A_k$, con $A_i = R$ o T (cada uno esta en uno de los 2 conjuntos). Como R, T son ambos simétricos, entonces cada A_i es simétrico para $i \in 1, ..., k$. Por lo tanto, tenemos que $(a_1, a) \in A_1, (a_2, a_1) \in A_2, ..., (b, a_{k-1}) \in A_k$, lo que implica que $(a_1, a) \in (R \cup T), ..., (b, a_{k-1}) \in (R \cup T)$. Por la definición de la composición $(b, a) \in (R \cup T)^k \Rightarrow (b, a) \in \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i \Rightarrow (b, a) \in (R \cup T)^t$. Con esto tenemos que es simétrica.

Transitiva: Por la definición de clausura transitiva vista en clases, esta es una relación transitiva. Con esto queda demostrado que la relacion clausura transitiva es una relación de equivalencia.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por demostrar que es refleja.
- **(1.5 puntos)** Por demostrar que es simétrica.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar que es transitiva.

Pregunta 3.2

Demostraremos que si S es relación de equivalencia con $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$ entonces $(R \cup T)^t \subseteq S$. Sea $(a, b) \in (R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$. Por lo tanto, existe algún k tal que $(a, b) \in (R \cup T)^k$ para algún k **(1)**. Por definición de $(R \cup T)^k$ (esto es, composición), existe $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}$ tales que: $(a, a_1) \in (R \cup T), (a_1, a_2) \in (R \cup T), ..., (a_{k-1}, b) \in (R \cup T)$ **(2)**. Ahora, como $R, T \subseteq S$ concluimos que $(R \cup T) \subseteq S$ lo que implica que $(a, a_1) \in S, ..., (a_{k-1}, b) \in S$ **(3)**. Como S es una relación de equivalencia, entonces en particular es transitiva y obtenemos que $(a, b) \in S$. Con esto demostramos que $(R \cup T)^t$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R y a T.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por usar la definición de clausura transitiva, y sacar la conclusión mencionada (hasta **(1)**).
- **(0.5 puntos)** Por usar la definición de composición (desde **(1)** hasta **(2)**).
- **(1 punto)** Por decir que los elementos que existen por la composición pertenecen a S (desde **(2)** hasta **(3)**).
- **(1 punto)** Por concluir correctamente usando transitividad (desde **(3)** en adelante).

Pregunta 4

Pregunta 4.1

En esta pregunta se pedía demostrar que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es sobreyectiva si, y solo si, f solo es ortogonal a h_0. Al ser una doble implicancia, requiere demostración hacia ambos lados. Una demostración posible es la siguiente:

($\Rightarrow$) Es fácil ver que toda función es ortogonal a h_0, por lo que solo demostraremos que si f es sobreyectiva, entonces $f \circ g = h_0$ implica que $g = h_0$.

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sobreyectiva. Supongamos que existe $g \neq h_0$ tal que $f \circ g = h_0$ **(1)**. Como $g \neq h_0$, tenemos que $\exists\, a \in \mathbb{N}.\ g(a) \neq 0$ **(2)**. Pero como $f \circ g = h_0$, tenemos que $\forall\, x \in \mathbb{N}.\ f \circ g(x) = 0$. Por lo tanto, $\forall\, x \in \mathbb{N}.\ f(x) \neq a$ (de lo contrario podríamos tener, para algún x, $f \circ g(x) = g(a) \neq 0$). Pero esto contradice la sobreyectividad de f. De aquí concluimos que si f es sobreyectiva y $f \circ g = h_0$, entonces $g = h_0$ **(3)**.

($\Leftarrow$) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ solo ortogonal a h_0. Si f no fuera sobreyectiva, entonces tendríamos que $\exists\, b \in \mathbb{N}.\ \forall\, x \in \mathbb{N}.\ f(x) \neq b$ **(1)**. Sea g' tal que $g'(b) = c$ y $\forall\, x \in \mathbb{N} \setminus \{b\}.\ g'(x) = 0$ **(2)**. Tendríamos también entonces que $f \circ g' = h_0$, pero $g' \neq h_0$ porque $g'(b) \neq 0$, lo que contradice que f sea solo ortogonal a h_0. Por lo tanto, f solo ortogonal a h_0 implica que f es sobreyectiva. **(3)**.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente. Cada dirección fue evaluada con 3 puntos (la pregunta tiene 6 puntos en total) y la distribución de cada dirección fue la siguiente:

- **(1 punto)** Por empezar la demostración correctamente (llegar hasta **(1)**).
- **(1 punto)** Por cruzar el paso crítico de la demostración, o desarrollar la demostración con errores menores (llegar hasta **(2)**).
- **(1 punto)** Por demostrar lo pedido correctamente (llegar hasta **(3)**).

Pregunta 4.2

En esta pregunta se pedía demostrar que si $\forall\, a, b \in \mathbb{N}.\ f(a+b) = f(a) + f(b)$, entonces $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva si, y solo si, $f(1) \neq 0$. Para hacer esto asumimos que $\forall\, a, b \in \mathbb{N}.\ f(a+b) = f(a) + f(b)$ y demostraremos la doble implicancia.

($\Rightarrow$) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva tal que $f(1) = 0$ **(1)**. Como $f(1) = f(1+0)$ tendríamos $f(1) = f(1) + f(0)$, es decir, $f(0) = 0$ **(2)**. Tendríamos, por lo tanto, $f(0) = f(1)$, que contradice la inyectividad de f. Por lo tanto, si f es inyectiva implica que $f(1) \neq 0$ **(3)**.

($\Leftarrow$) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(1) \neq 0$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$ **(1)**. Como $f(n) = f\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}\right)$, tenemos:

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}}\right) \\ &= \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{n \text{ veces}} \\ &= nf(1) \end{aligned}$$

Por el mismo argumento, $f(m) = mf(1)$ **(2)**. Como $f(1) \neq 0$, podemos dividir ambos términos para obtener

$$\frac{f(n)}{f(1)} = n \quad \text{y} \quad \frac{f(m)}{f(1)} = m$$

Luego como $n \neq m$, tenemos

$$\frac{f(n)}{f(1)} \neq \frac{f(m)}{f(1)}$$

Y por lo tanto, $f(n) \neq f(m)$. Como n y m eran números naturales cualesquiera, tenemos que $\forall\, x, y \in \mathbb{N}.\ x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$, es decir, f es inyectiva. Por lo tanto, $f(1) \neq 0$ implica que f es inyectiva **(3)**.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente. Cada dirección fue evaluada con 3 puntos (la pregunta tiene 6 puntos en total) y la distribución de cada dirección fue la siguiente:

- **(1 punto)** Por empezar la demostración correctamente (llegar hasta **(1)**).
- **(1 punto)** Por cruzar el paso crítico de la demostración, o desarrollar la demostración con errores menores (llegar hasta **(2)**).
- **(1 punto)** Por demostrar lo pedido correctamente (llegar hasta **(3)**).