PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

IIC1253 - Matemáticas Discretas
1° semestre 2014 - Prof. Gabriel Diéguez

Interrogación 1

Nombre: ________________________________ **N° alumno:** ________________

Parte A (10 %)

Instrucciones

- Marque sólo una alternativa.
- En las líneas siguientes a cada pregunta debe **justificar brevemente** su respuesta.
- Si no justifica o la justificación es incorrecta, no se considerará la alternativa que haya marcado.
- Cada pregunta vale 1.2 ptos.

1. Se tiene la siguiente definición inductiva de un conjunto A:

   A es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

   (1) $0 \in A$
   (2) Si $a \in A$, entonces $(a+1) \in A$ y $(a-1) \in A$.

   El conjunto A corresponde a:

   a) Los números naturales, $\mathbb{N}$.
   b) Los números enteros, $\mathbb{Z}$.
   c) Los números racionales, $\mathbb{Q}$.
   d) Los números reales, $\mathbb{R}$.

____

____

2. Sea $P = \{p, q\}$ y $L(P)$ el conjunto de fórmulas en lógica proposicional sobre las variables en P.

   ¿Cuál de las siguientes fórmulas en $L(P)$ es una tautología?

   a) $((p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
   b) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \neg q))$
   c) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
   d) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q))$

---

3. Suponga que P es un conjunto de variables proposicionales, y sea $L(P)$ el conjunto de todas las fórmulas proposicionales que se pueden construir usando las variables en P. Si P contiene n elementos,

   ¿Cuántas tablas de verdad distintas existen para $L(P)$?

   a) 2^{n-1}
   b) $2n$
   c) 2^n
   d) 2^{2^n}

---

4. Una relación binaria R es una relación de equivalencia si es:

   a) Refleja, simétrica y transitiva
   b) Refleja, antisimétrica y transitiva
   c) No refleja, simétrica y conexa
   d) No refleja, simétrica y no transitiva

---

5. Si A, B y C son conjuntos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

   a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
   b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
   c) $(A \cup B) \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)$
   d) $(A \cup B) \subseteq C \Leftrightarrow (A \subseteq C) \vee (B \subseteq C)$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

IIC1253 - Matemáticas Discretas
1° semestre 2014 - Prof. Gabriel Diéguez

Interrogación 1

Parte B (90 %)

- La nota de esta parte será el promedio de las notas de las 4 preguntas.
- Cada pregunta tiene un máximo de 6 ptos.
- Si no se indican puntajes, cada sub-pregunta tiene el mismo valor.

1. En esta pregunta debe justificar sus respuestas usando la noción de consecuencia lógica y el método de resolución.

   a) Considere las siguientes aseveraciones:

   $$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{“Si es de noche y no llueve, Daniela sale a pasear”} \\ \alpha_2 &= \text{“Si no es de noche, Daniela no sale a pasear”} \\ \varphi &= \text{“Todas las noches llueve”} \end{aligned}$$

   ¿Es correcto decir que φ se deduce de α_1 y α_2?

   b) ¿Qué pasa con el problema anterior si ahora tomamos las siguientes aseveraciones?

   $$\begin{aligned} \alpha_1 &= \text{“Si es de noche y no llueve, Daniela sale a pasear”} \\ \alpha_2 &= \text{“Si es de noche, Daniela no sale a pasear”} \\ \varphi &= \text{“Todas las noches llueve”} \end{aligned}$$

2. Sea EQ un conectivo ternario definido por la siguiente propiedad:

   $$\sigma(\text{EQ}(\varphi, \psi, \theta)) = 1 \text{ si y sólo si } 3 \cdot \sigma(\varphi) - 2 \cdot (\sigma(\psi) + \sigma(\theta)) \geq 0.$$

   a) [2 ptos.] Dado $P = \{p, q, r\}$, defina el conectivo $\text{EQ}(p, q, r)$ utilizando los conectivos $\neg, \vee$ y $\wedge$.

   b) [4 ptos.] Demuestre que $\{\text{EQ}\}$ no es funcionalmente completo.

3. *a*) [1,2 ptos.] Defina inductivamente el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, suponiendo que sólo conoce el axioma del conjunto vacío, la operación de unión de conjuntos y cómo hacer una definición inductiva.
   Hint: Defina un operador sucesor $\delta(n)$.

   b) [0,6 ptos.] Use la definición que hizo en *a*) para listar los números naturales hasta el 4.

   c) [0,6 ptos.] Defina la noción de "ser menor" a partir de su definición inductiva, de manera que capture la noción intuitiva usual. Es decir, debe dar una propiedad P tal que

   $$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \text{ es menor que } n \text{ si y sólo si se cumple } P.$$

   d) [1,2 ptos.] Demuestre usando inducción que el 0 es el menor natural a partir de la definición de "ser menor" que hizo en *c*).

   e) [1,2 ptos.] Defina inductivamente las funciones $sum : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $mult : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que reciben dos números naturales y retornan su suma y su multiplicación respectivamente.

   f) [1,2 ptos.] Muestre que $mult(2, 2) = 4$.

4. Sea R una relación sobre un conjunto A. Diremos que una relación S sobre A es la **clausura transitiva** de R si:

   - S contiene a R; vale decir, $R \subseteq S$.
   - S es transitiva.
   - S es mínima; vale decir, para toda relación transitiva T sobre A que contiene a R, se tiene que $S \subseteq T$.

   En esta pregunta usted construirá una fórmula en lógica proposicional φ tal que dadas dos relaciones R y S sobre un conjunto finito A, se cumpla que

   $$S \text{ es la clausura transitiva de } R \text{ si y sólo si } \varphi \text{ es satisfacible.}$$

   Suponga que A contiene n elementos. Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ considere variables proposicionales r_{ij} y s_{ij}, que indican que los elementos i y j están relacionados en R y S respectivamente. Utilice estas variables para las siguientes preguntas:

   a) [0,5 ptos.] Construya fórmulas φ_R y φ_S que representen a las relaciones.

   b) [0,5 ptos.] Construya una fórmula $\varphi_{\subseteq}$ que diga que S contiene a R.

   c) [0,5 ptos.] Construya una fórmula φ_T que diga que S es transitiva.

   d) [2,5 ptos.] Dados dos elementos $i, j \in A$, diremos que existe un camino de largo k entre i y j en R si existen elementos $p_1, \ldots, p_k \in A$ tales que $R(i, p_1) \wedge R(p_1, p_2) \wedge \ldots \wedge R(p_k, j)$. Construya una fórmula φ^R_{ijk} que dados $i, j \in A$ diga que existe un camino de largo k entre ellos en R. Para esto, use variables proposicionales C^{ij}_{ml}, que indicarán que en un camino entre i y j, el elemento m-ésimo del camino es $l \in A$.

   e) [1 pto.] Use las fórmulas definidas en el ejercicio anterior para construir una fórmula φ_{min} que diga que S es mínima.

   f) [1 pto.] Use φ_R, φ_S, $\varphi_{\subseteq}$, φ_T y φ_{min} (junto con otras fórmulas si es necesario) para construir la fórmula φ pedida.