Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA TAREA 6

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Demostremos que si $f \in o(g)$ entonces $f \in \mathcal{O}(g)$. Sea $f \in o(g)$. Sea $c' \in \mathbb{R}^+$ cualquiera. Entonces, existe un $n_0 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\forall\, n > n_0.\ f(n) < c'g(n) &\implies \forall\, n > n_0.\ f(n) < cg(n) \\
&\implies \exists\, c' \in \mathbb{R}^+.\ \exists\, n_0 > 0.\ \forall\, n > n_0.\ f(n) < c'g(n) \\
&\implies \exists\, c' \in \mathbb{R}^+.\ \exists\, n_0 > 0.\ \forall\, n > n_0.\ f(n) \leq c'g(n) \\
&\implies f \in \mathcal{O}(g)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in o(g) \implies f \in \mathcal{O}(g)$. Además, tenemos que $c' \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $\frac{1}{c'} \in \mathbb{R}^+$. Sea $k = c'$. Como c' era cualquier número real positivo, k también lo es, y tenemos

$$\forall\, k > 0.\ \exists\, n_0 > 0.\ \forall\, n > n_0.\ kf(n) < g(n) \tag{1}$$

Finalmente, sean $k > 0$ y $n^* > 0$ cualesquiera, y n_0 tal que $\forall\, n > n_0.\ kf(n) < g(n)$. Para n^* solo hay dos casos posibles.
Si $n^* \leq n_0$, entonces podemos tomar $n = n_0+1$, que es tal que $n > n_0$ y por (1) concluimos que $kf(n) < g(n)$.
Si, en cambio, $n^* > n_0$, entonces podemos tomar $n = n^* + 1$, que es tal que $n > n_0$ y nuevamente por (1) concluimos que $kf(n) < g(n)$.
En ambos casos tenemos que $n > n^*$ y $kf(n) < g(n)$. Como k y n^* eran números positivos cualesquiera, concluimos que

$$\forall\, k > 0.\ \forall\, n^* > 0.\ \exists\, n > n^*.\ kf(n) < g(n)$$

Es decir, $g \notin \mathcal{O}(f)$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.

Pregunta 1.2

Mostraremos un caso en que $f \in \mathcal{O}(g)$, $g \notin \mathcal{O}(f)$ pero $f \notin o(g)$. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ n & n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$g(n) = n$$

Es fácil ver que $f \in \mathcal{O}(g)$ pues $f(n) \leq g(n)$ para todo n natural. Además, $g \notin \mathcal{O}(g)$ ya que para todo $c > 0$ si $n > 0$ entonces $g(n) > 0$, y luego si $g(n) \leq cf(n)$, entonces $g(n+1) > cf(n+1)$ (ya que $f(n+1)$ sería igual a cero). Además, si tomamos $c = 1$, tenemos que para todo $n_0 > 0$ siempre existirá un $n > n_0$ que sea impar, en cual caso $g(n) = f(n)$ y luego $cg(n) \leq f(n)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} &\exists\, c > 0.\, \forall\, n_0 > 0.\, \exists\, n > n_0.\; cg(n) \leq f(n) \\ \equiv &\neg\, (\forall\, c > 0.\, \exists\, n_0 > 0.\, \forall\, n > n_0.\; f(n) < cg(n)) \end{aligned}$$

Es decir, $f \notin o(g)$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.