Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 2

25 de Agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica $\equiv$**

  Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

  1. Doble negación:
     $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  2. De Morgan:
     $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
     $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
  3. Conmutatividad:
     $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
     $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  4. Asociatividad:
     $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
     $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
  5. Distributividad:
     $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
     $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
  6. Idempotencia:
     $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
     $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  7. Absorción:
     $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
     $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
  8. Implicancia:
     $\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
  9. Doble implicancia:
     $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

  - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \rightarrow\}$

Ejercicio 1 — Tablas de verdad y DNF

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p,q,r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3p - 2(q+r) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la tabla de verdad de EQ

Solución

p	q	r	$EQ(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

b) Escriba una fórmula equivalente a $EQ(p,q,r)$ solamente usando los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Solución

Al analizar la tabla de verdad anterior se puede determinar una fórmula (ϕ) equivalente por DNF. Para ello se debe construir una fórmula compuesta por una disyunción de B_i´s tales que $B_i = (l_{i,1} \wedge ... \wedge l_{i,k_i})$ (con cada $l_{i,j}$ un literal) y $B_i = 1$ si y solo si $EQ(p,q,r) = 1$ en la valuación de la fila i. Obteniendo entonces,

$$\phi := B_1 \vee B_5 \vee B_6 \vee B_7$$

con

$$B_1 := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$B_5 := (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$B_6 := (p \wedge \neg q \wedge r)$$

$$B_7 := (p \wedge q \wedge \neg r)$$

Luego,

$$\phi(p,q,r) := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

.

Obteniendo así que, $\phi \equiv EQ(p,q,r)$ lo cual se puede observar en la siguiente tabla de verdad,

p	q	r	$EQ(p,q,r)$	$\phi(p,q,r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Ejercicio 2 — Tabla de verdad

Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

"Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

Solución:

Vamos a definir las siguientes proposiciones:

- P: "Superman es capaz"
- Q: "Superman desea prevenir el mal"
- R: "Superman es impotente"
- S: "Superman es malévolo"
- E: "Superman existe"
- M: "Superman previene el mal"

El enunciado se puede escribir formalmente como:

$$[(P \wedge Q \to M) \wedge (\neg P \to R) \wedge (\neg Q \to S) \wedge (E \to \neg(R \vee S)) \wedge (\neg M)] \to \neg E$$

Ahora nos piden demostrar que $\neg E$. Vamos a hacer un análisis de cada proposición de la conjunción de forma separada.

1. $(P \wedge Q \to M)$

P	Q	M	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to M$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

2. $(\neg P \to R)$

P	R	$\neg P$	$\neg P \to R$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

3. $(\neg Q \to S)$

Q	S	$\neg Q$	$\neg Q \to S$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	0

4. $(E \to \neg(R \vee S))$

E	R	S	$\neg(R \vee S)$	$E \to \neg(R \vee S)$
1	1	1	0	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

5. $(\neg M)$

M	$\neg M$
1	0
0	1

Llamemos

$$N = [(P \wedge Q \to M) \wedge (\neg P \to R) \wedge (\neg Q \to S) \wedge (E \to \neg(R \vee S)) \wedge (\neg M)]$$

Y notemos que para que $N \to \neg E$ sea verdad tendremos la siguiente tabla de verdad.

N	E	$\neg E$	$N \to \neg E$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

(los siguientes pasos están separados para fácilitar la lectura)

- Ahora notemos que el único caso que falla es cuando $N := 1$ y $E := 1$.
- Pero que $E := 1$ por la tabla 4. hace que necesariamente $R := 0$ y $S := 0$.
- Viendo la tabla 2., tendremos que $P := 1$. Viendo la tabla 3. también tendremos que $Q := 1$.
- Así viendo la tabla 1. y ocupando que $P := 1$, $Q := 1$ y $M := 0$ (por tabla 5.) tendremos que $(P \wedge Q \to M)$ es 0.
- Pero esto hace falso a N ya que una de sus conjunciones es 0.

Ejercicio 3 — Conectivos funcionalmente completos (I1- 2022)

El conectivo unario $\triangledown$ se define según:

p	$\triangledown p$
0	0
1	0

Demuestre que $\{\to, \triangledown\}$ es funcionalmente completo.

Solución:

En primer lugar, observemos que podemos construir la tabla de verdad de la negación sólo utilizando $\to$ y $\triangledown$ de la siguiente manera:

ϕ	$\neg\phi$	$\phi \to \triangledown\phi$
0	1	1
1	0	0

con $\phi \in L(P)$. Como sus tablas de verdad son iguales, con esto concluimos que

$$\neg\phi \equiv \phi \to \triangledown\phi (*)$$

Ahora demostraremos que $\{\to, \triangledown\}$ es funcionalmente completo.

Como sabemos que $C = \{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\triangledown$. Con esto, quedará demostrado que $C' = \{\triangledown, \to\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\phi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que ϕ y $\psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\phi \equiv \phi$‘ y $\psi \equiv \psi$‘, donde ϕ‘, ψ‘ sólo usan conectivos en C’.

TI: Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C:

i) $\theta = (\phi \to \psi) \equiv (\phi' \to \psi')$ y como ϕ' y ψ' sólo usan conectivos en C, θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C’.

ii) $\theta = \neg\phi \equiv \neg\phi' \equiv (\phi' \to \nabla\phi')$ y como ϕ' y ψ' sólo usan conectivosc en C, θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Por inducción estructural, concluimos que cualquier fórmula construida utilizando los conectivos de C es equivalente a otra que sólo utiliza conectivos de C', y por ende, C' es funcionalmente completo.

Ejercicio 4 — Equivalencia lógica

Demuestre que

$$(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \equiv p \wedge q$$

Utilizando las leyes de equivalencia vistas en clases.

Solución: Desarrollando el lado izquierdo de la equivalencia tenemos,

$$\equiv ((p \vee (p \to q)) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \text{ por De Morgan}$$

$$\equiv (p \vee \neg p \vee q)) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (\neg r \vee q) \text{ por equivalencia de la implicancia}$$

$$\equiv ((p \vee \neg p) \vee q)) \wedge ((\neg r \vee p) \wedge p) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \text{ por asociatividad}$$

$$\equiv ((\neg r \vee p) \wedge p) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \text{ por tautología}$$

$$\equiv ((\neg r \vee p) \wedge p) \wedge (q \vee (r \wedge \neg r)) \text{ por distributividad}$$

$$\equiv p \wedge (q \vee (r \wedge \neg r)) \text{ por absorción}$$

$$\equiv p \wedge q \text{ por contradicción}$$

Obteniendo entonces que,

$$(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \equiv p \wedge q$$