Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 7

Pregunta 1

Pregunta 1

Una posible solución esla siguiente: sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos por lo visto en clases que existe una representación para n dada por:

$$n = a_{k-1}2^{k-1} + a_{k-2}2^{k-2} + ... + 2a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
n \bmod 3 &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i\right) \bmod 3 && (1)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1} (a_i 2^i \bmod 3)\right) \bmod 3 \qquad \text{(propiedad de mod)} && (2)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1} ((a_i \bmod 3) \cdot (2^i \bmod 3) \bmod 3) \bmod 3\right) \bmod 3 \qquad \text{(propiedad de mod)} && (3)
\end{aligned}$$

Luego podemos ver que para $2^i \bmod 3$ hay dos casos:

$$\begin{aligned}
&\text{si } i = 2m \Rightarrow (2^2)^m \bmod 3 = (4 \bmod 3)^m \bmod 3 = 1\\
&\text{si } i = 2m+1 \Rightarrow 2^i \bmod 3 = 2^{2m} \cdot 2 \bmod 3\\
&\qquad = (\underbrace{(2^2 \bmod 3)^m}_{1} \cdot \underbrace{(2 \bmod 3)}_{(-1 \bmod 3)}) \bmod 3 \qquad (2 \bmod 3 = 2 = -1 \bmod 3)
\end{aligned}$$

Luego como $a_i < 3$, se tiene que $a_i \bmod 3 = a_i$, luego (3) queda:

$$n \bmod 3 = \left(\left(\sum_{i=2m} a_i\right) - \left(\sum_{i=2m+1} a_i\right)\right) \bmod 3$$

Luego si $\sum_{i=2m} a_i - \sum_{i=2m+1} a_i = 0$, entonces $n \bmod 3 = 0$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostración correcta y completa
- (**3 Puntos**) Por demostración correcta con errores menores
- (**0 Puntos**) Por demostración incorrecta o incompleta

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Demostraremos lo pedido por inducción sobre $i \in \mathbb{N}$. Por definición tanto de #nodes como de T_i, sabemos que

$$\#\text{nodes}(T_0) = 1 = 2^0$$

por lo que se cumple el caso base $i = 0$. Supongamos ahora que la afirmación es cierta para $i = k$, esto es, que

$$\#\text{nodes}(T_k) = 2^k.$$

Ahora debemos demostrar que $\#\text{nodes}(T_{k+1}) = 2^{k+1}$. Digamos que $T_k = \bullet(t_1, \ldots, t_m)$, que es solo denotar por $\{t_j\}_{j=1}^m$ a las "ramas" de T_k. Sabemos entonces que, por definición, T_{k+1} se construye de la forma

$$T_{k+1} = \bullet(T_k, t_1, \ldots, t_m)$$

y luego, también por definición,

$$\#\text{nodes}(T_{k+1}) = 1 + \#\text{nodes}(T_k) + \sum_{j=1}^{m} \#\text{nodes}(t_j)$$

pero $\#\text{nodes}(T_k) = 1 + \sum_{j=1}^m \#\text{nodes}(t_j)$ pues $T_k = \bullet(t_1, \ldots, t_m)$, por lo que

$$\begin{aligned}\#\text{nodes}(T_{k+1}) &= \#\text{nodes}(T_k) + \#\text{nodes}(T_k)\\ &= 2^k + 2^k\\ &= 2^{k+1}\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar. Por inducción, queda demostrado el enunciado.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar lo pedido.
- (**3 Puntos**) Por tener un error pequeño, pero notar la idea fundamental de la inducción.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.2

Demostraremos lo pedido por inducción sobre $i \in \mathbb{N}$. Dado que $T_0 = \bullet$, se cumple que

$$\text{depth}(T_0) = 0$$

que corresponde al caso base $i = 0$. Supongamos ahora que

$$\text{depth}(T_k) = k$$

y nuevamente denotemos a T_k como $T_k = \bullet(t_1, \ldots, t_m)$. Notemos que esto significa que

$$\text{depth}(T_k) - 1 = \text{máx}\{\text{depth}(t_1), \ldots, \text{depth}(t_m)\}.$$

Veamos ahora a T_{k+1}, que no es otra cosa que

$$T_{k+1} = \bullet(T_k, t_1, \ldots, t_m).$$

Entonces,

$$\text{depth}(T_{k+1}) = 1 + \text{máx}\{\text{depth}(T_k), \text{depth}(t_1), \ldots, \text{depth}(t_m)\}$$

pero como $\text{máx}\{a, b, c\} = \text{máx}\{a, \text{máx}\{b, c\}\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{depth}(T_{k+1}) &= 1 + \text{máx}\{\text{depth}(T_k), \text{depth}(t_1), \ldots, \text{depth}(T_m), \} \\
&= 1 + \text{máx}\{\text{depth}(T_k), \text{máx}\{\text{depth}(t_1), \ldots, \text{depth}(t_m)\}\} \\
&= 1 + \text{máx}\{\text{depth}(T_k), \text{depth}(T_k) - 1\} \\
&= 1 + \text{depth}(T_k) \\
&= 1 + k = k + 1
\end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar. Por inducción, queda demostrado el enunciado.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar lo pedido.
- (**3 Puntos**) Por tener un error pequeño, pero notar la idea fundamental de la inducción.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.3

Nuevamente hagamos inducción sobre i. El resultado es trivial para el caso base $i = 0$. Supongamos que se cumple para $i = m$. Ahora, para $i = m + 1$, tenemos que

$$T_{m+1} = \bullet(t_1, \ldots, t_k)$$

pero por definición, esto es también

$$T_{m+1} = \bullet(T_m, t'_1, \ldots, t'_{k-1}).$$

donde $T_m = \bullet(t'_1, \ldots, t'_{k-1})$. Como el enunciado se cumple para $i = m$, tenemos que, para $j' = 1, \ldots, k-1$,

$$t'_{j'} = T_{(k-1)-j'}$$

y además, notamos que las primeras dos identidades nos dicen que, para $j' = 1, \ldots, k-1$,

$$t'_{j'} = t_{j+1}.$$

Luego, para $j = 2, \ldots, k$,

$$t_j = t'_{j-1} = T_{(k-1)-(j-1)} = T_{k-j}.$$

Notemos que lo demostrado en **2.2** implica que si $T_m = (t'_1, \ldots, t'_{k-1})$, entonces necesariamente

$$\#\text{depth}(T_m) = m = 1 + \underset{j'=1,\ldots,k-1}{\text{máx}} \#\text{depth}(t'_{j'})$$

pero aplicando ese paso nuevamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\#\text{depth}(t'_1) &= 1 + \underset{j'=2,\ldots,k-1}{\text{máx}} \#\text{depth}(t'_{j'}) \\
&> \underset{j'=2,\ldots,k-1}{\text{máx}} \#\text{depth}(t'_{j'})
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\#\text{depth}(T_m) = m &= 1 + \#\text{depth}(t'_1) \\
&= 1 + \#\text{depth}(T_{(k-1)-1}) \\
&= k - 1
\end{aligned}$$

por lo que $m = k - 1$. Finalmente, usamos este hecho para notar que, si $j = 1$,

$$t_j = t_1 = T_m = T_{k-1} = T_{k-j}$$

que termina el paso inductivo. Por inducción, queda demostrado el enunciado.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar lo pedido.
- (**3 Puntos**) Por tener un error pequeño, pero notar la idea fundamental de la inducción.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.4

La demostración se sigue de lo anteriormente demostrado. Sea $i \in \mathbb{N}$ y $T_i = \bullet(t_1, \ldots, t_k)$. Sabemos que

$$\#\text{nodes}(T_i) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \#\text{nodes}(t_j)$$

pero por lo demostrado en **2.3**, esto se puede desarrollar según

$$\#\text{nodes}(T_i) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \#\text{nodes}(T_{k-j})$$

y por lo demostrado en **2.1**,

$$\#\text{nodes}(T_{k-j}) = 2^{k-j}.$$

Reemplazando en lo anterior,

$$\begin{aligned}
\#\text{nodes}(T_i) &= 1 + \sum_{j=1}^{k} \#\text{nodes}(T_{k-j}) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{k-j} \\
&= 2^k
\end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$\log_2\left(\#\text{nodes}(T_i)\right) = k$$

que era lo que queríamos demostrar.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar lo pedido correctamente.
- (**3 Puntos**) Por tener un descuido pequeño, pero teniendo una inducción correcta o notando que el resultado se sigue de lo ya demostrado.
- (**0 Puntos**) En otro caso.