Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

# PAUTA INTERROGACIÓN 1

## Pregunta 1

Sea

$$\beta(p_1,\dots,p_n) = \bigvee_{i\ :\ \alpha(v_1^i,\dots,v_n^i)} \left( \left( \bigwedge_{j\ :\ v_j^i=1} p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j\ :\ v_j^i=1} \neg p_j \right) \right)$$

Primero, era necesario identificar lo que se estaba demostrando, es decir, que si $\varphi(\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i))$ es 1, entonces $\beta(\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i))$ también es 1. **[1pt]**

Luego, si $\varphi$ es contradicción la proposición se vuelve trivialmente cierta, por lo que nos enfocamos en el caso donde $\varphi$ es satisfacible. Por lo tanto, sea $i$ una fila cualquiera de la tabla de verdad tal que $\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i)$ corresponde a su valuación y $\varphi(\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i)) = 1$. **[1pt]**

Por construcción de la formula $\beta$, sabemos que existe la claúsula $\beta_i$ en $\beta$ tal que

$$\beta_i(p_1,\dots,p_n) = \bigwedge_{j\ :\ v_j^i=1} p_j \wedge \bigwedge_{j\ :\ v_j^i=1} \neg p_j \quad \textbf{[1pt]}$$

Teniendo todo esto, se debía demostrar que por construcción de la formula, $\beta_i(\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i)) = 1$. **[2pt]**

Finalmente, se debía argumentar que como la formula original $\beta$ era una disyunción de claúsulas, si $\beta_i$ es verdadera entonces la formula completa también lo es, y como $\alpha(v_1^i,\dots,v_n^i)$ era una valuación cualquiera, entonces se cumple para todas las valuaciones y por lo tanto queda demostrado lo pedido. **[1pt]**

## Pregunta 2

Damos dos alternativas a la pregunta, pero pueden haber más formas de resolverla.

### Alternativa 1

a) $\varphi_0(x) := \forall y.\ O(x,y)$ **[2pt]**

b) Primero definimos el sucesor de la siguiente forma:

$$S(x,y) := O(x,y) \wedge \forall z.(O(x,z) \wedge O(z,y)) \rightarrow (E(x,z) \vee E(z,y)) \quad \textbf{[1pt]}$$

Por lo tanto la fórmula seria:

$$\varphi_2(x) := \forall y\ \forall z.\ (\varphi_0(z) \wedge S(z,y)) \rightarrow S(y,x) \quad \textbf{[1pt]}$$

c) Suponga que ya tenemos la formula $\varphi_{n-1}(x)$ para $n-1$ partiendo desde $\varphi_0(x)$. Entonces la formula para $n$ se define como:

$$\varphi_n(x) := \forall y\ (\varphi_{n-1}(y) \rightarrow S(x,y)) \quad \textbf{[2pt]}$$

**Alternativa 2**

a) $\varphi_0(x) := \forall y.\ O(x,y)$ **[2pt]**

b) Primero definimos para 1:

$$\varphi_1(x) := \neg\varphi_0(x) \wedge (\forall y.\ \neg\varphi_0(y) \to O(x,y)) \quad \textbf{[1pt]}$$

Luego la formula pedida es:

$$\varphi_2(x) := \neg\varphi_0(x) \wedge \neg\varphi_1(x) \wedge (\forall y.\ (\neg\varphi_0(y) \wedge \neg\varphi_1(y)) \to O(x,y)) \quad \textbf{[1pt]}$$

c) Suponga que ya tenemos las formulas $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ para 0, 1, ..., $n-1$, respectivamente. Entonces:

$$\varphi_n(x) := \bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i(x) \ \wedge\ \forall y.\ \big(\big(\bigwedge_{i=0}^{n-1} \neg\varphi_i(y)\big) \to O(x,y)\big) \quad \textbf{[2pt]}$$

# Pregunta 3

**(a)** $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \psi\} \vdash \varphi$ entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Esta afirmación es verdadera. La intuición es que, al quitar una fórmula, el conjunto de valuaciones que hacen verdadera a alguna de las fórmulas, disminuye.

Se procede entonces a la demostración. Sea $\Sigma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Supongamos que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ y tomemos una valuación $v$ tal que exista una fórmula $\varphi_i \in \Sigma$ tal que $\varphi_i(v) = 1$. Notar que en el caso de que no exista dicha valuación (es decir que $\Sigma$ esté compuesto solo de contradicciones), se cumple trivialmente la consecuencia lógica débil. [**1 pt**]

Por demostrar: $\varphi(v) = 1$. Como $\varphi_i \in \Sigma$, entonces $\varphi_i \in \Sigma \cup \{\psi\}$, de modo que existe $\varphi_j \in \Sigma \cup \{\psi\}$ tal que $\varphi_j(v) = 1$ (en particular, $\varphi_i = \varphi_j$) [**1 pt**]. Por lo tanto, como asumimos que $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$, se concluye que $\varphi(v) = 1$, con lo que concluye la demostración [**1 pt**] .

**(b)** $\Sigma \vdash \varphi$ si, y sólo si, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Esta afirmación es falsa: veamos que la implicancia de derecha a izquierda no se cumple con el siguiente contraejemplo. Tomamos $\Sigma = \{p, \neg p\}$ y $\varphi = p \wedge \neg p$ (de modo que $\neg\phi = \neg p \vee p$). Es claro que $\{p, \neg p, \neg p \vee p\}$ es insatisfacible, pero no se cumple que $\{p, \neg p\} \vdash p \wedge \neg p$ pues basta tomar la valuación $v$ tal que $p(v) = 1$ y $p \wedge \neg p(v) = 0$.

Los puntajes son otorgados de la siguiente manera en este item:

- Se muestra un contraejemplo y se explica brevemente por qué funciona [**3 pts.**]
- Se explica por qué la afirmación es falsa pero el contraejemplo que se muestra no es correcto [**2 pts.**]
- Se explica por qué la afirmación es falsa, sin embargo, no se presenta un contraejemplo [**1 pt.**]

# Pregunta 4

Tenemos las fórmulas:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &:= p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to \cdots \to (p_{n-1} \to p_n) \cdots)) \\
\beta_n &:= (\cdots((p_1 \to p_2) \to p_3) \to \cdots \to p_{n-1}) \to p_n \\
\gamma_n &:= (p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge (p_3 \to p_4) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \to p_n)
\end{aligned}
$$

A continuación se presenta una posible solución:

**1. ¿Para cuáles $n$ se cumple $\alpha_n \equiv \gamma_n$?**

Trivialmente si $n = 1$ o $n = 2$ tendremos que $\alpha_n \equiv \gamma_n$. Ahora, para $n \geq 3$ consideremos la valuación para $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\bar{v} := 1, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{\text{solo 1's}}$$

Definamos $\alpha := (p_2 \to (\cdots))$ tal que $\alpha_n := p_1 \to \alpha$. Como $p_2 = 0$ en $\bar{v}$ entonces $\alpha(\bar{v}) = 1$, y entonces $\alpha_n(\bar{v}) = 1$. Ahora, como $(p_1 \to p_2)(\bar{v}) = 0$ entonces necesariamente $\gamma_n(\bar{v}) = 0$. Esto implica que $\bar{v}$ es una valuación que hace cierta a una fórmula y no a la otra, por lo tanto, $\alpha_n \not\equiv \gamma_n$ para todo $n \geq 3$.

**2. ¿Para cuáles $n$ se cumple $\beta_n \equiv \gamma_n$?**

Nuevamente de manera trivial, con $n = 1$ y $n = 2$ se cumple que $\beta_n \equiv \gamma_n$. Ahora, para $n \geq 3$ consideremos la misma valuación $\bar{v}$ descrita anteriormente. La estructura de $\beta_n$ es tal que $\beta_n := \beta_{n-1} \to p_n$ para todo $n \geq 2$. Como $\beta_2(\bar{v}) = (p_1 \to p_2)(\bar{v}) = 0$ entonces $\beta_3(\bar{v}) = (\beta_2 \to p_3)(\bar{v}) = 1$, como $\beta_3(\bar{v}) = 1$ entonces $\beta_4(\bar{v}) = (\beta_3 \to p_4)(\bar{v}) = 1$ (ya que $p_4 = 1$ en $\bar{v}$), y así sucesivamente. Usando este argumento inductivo se deduce que $\beta_n(\bar{v}) = 1$.

Ya sabemos que $\gamma_n(\bar{v}) = 0$ por lo que $\bar{v}$ es una valuación que hace cierta a una fórmula y no a la otra, por lo tanto, $\beta_n \not\equiv \gamma_n$ para $n \geq 3$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado por cada ítem es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por decir el caso trivial y mencionar que se demostrará para $n \geq 3$.
- **(1.5 puntos)** Por encontrar una valuación $\bar{v}$ que hace cierta a una fórmula y falsa a otra.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que $\bar{v}$ hace cierta (o falsa) a $\alpha_n/\beta_n$.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que $\bar{v}$ hace falsa (o cierta) a $\gamma_n$.

Al ser 2 ítems con 3 puntos cada uno, el total de puntos de la pregunta es 6.