Matemáticas Discretas

Lógica de predicados

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

6 de septiembre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
2. Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

Introducción

Bueno y. . . ¿qué paso con este problema?

Problema

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Lo resolveremos a lo largo de esta clase.

Introducción

Imaginemos que sólo sabemos que la siguiente afirmación es verdadera:

Afirmación

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.

Ninguna de las reglas de lógica proposicional nos permiten concluir lo siguiente:

Conclusión

El número 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

Introducción

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.
16 es par.

Por lo tanto, 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

¿Qué le falta a nuestra lógica proposicional?

- Objetos (no sólo proposiciones)
- Predicados
- Cuantificadores: **para todo** ($\forall$) o **existe** ($\exists$)

Introducción

Esta lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales.
- Enteros, racionales, reales, etc.
- Grafos, árboles, palabras, matrices, etc.
- Estructuras en general.

Podemos definir propiedades como:

- Para todo número n, existe un m tal que $n \geq m$.
- Para todo par de vértices v_1 y v_2, si $(v_1, v_2) \in E$, entonces $(v_2, v_1) \in E$.

Predicados

Ejemplos

- x es par
- $x \leq y$
- $x + y = z$

¿Cuáles de estos ejemplos son **proposiciones**?
¡Ninguno!

Pero si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

- 2 es par, 3 es par, ...
- $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...
- $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Predicados

Definición

Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicados

Definición

Para un predicado $P(x)$ y un valor a, la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

Ejemplos

$P(x) :=$ x es par $\quad R(x) :=$ x es primo $\quad M(x) :=$ x es mortal

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

Predicados

Definición

Un predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

Definición

Para un predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$ y valores $a_1, ..., a_n$, la **valuación** $P(a_1, ..., a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, ..., a_n$.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos

$O(x,y) := x \leq y$, $S(x,y,z) := x+y=z$, $Padre(x,y) := x$ es padre de y

$O(x,y)$	$:= x \leq y$	sobre $\mathbb{N}$
$S(x,y,z)$	$:= x+y=z$	sobre $\mathbb{Q}$
$Padre(x,y)$	$:= x$ es padre de y	sobre el conjunto de todas las personas

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ diremos que $x_1, ..., x_n$ son **variables libres** de P.
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación.

Predicados compuestos

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado, o la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

$P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$
- $P'(4) = 0$

Cuantificador universal

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el cuantificador universal

$$P'(y_1, ..., y_n) = \forall x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada y $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x(O(x, y)) \quad \Rightarrow \quad O'(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \forall y(O(x, y)) \quad \Rightarrow \quad O''(0) = \forall y(O(0, y))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P_0' := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

Cuantificador existencial

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el cuantificador existencial

$$P'(y_1, ..., y_n) = \exists x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada y $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x(O(x, y)) \quad \Rightarrow \quad O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y)) \quad \Rightarrow \quad O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \wedge O(z, y) \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \quad \Rightarrow \quad O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Es posible combinar cuantificadores

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \to \exists y(O(x, y)))$

Predicados compuestos

(re)Definición

Decimos que un predicado es compuesto (o también **fórmula**) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$), bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuantificación universal ($\forall$) o existencial ($\exists$) de un predicado compuesto.

(re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Interpretaciones

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \overset{?}{\equiv} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del dominio y la **interpretación** del símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, ..., x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, ..., x_n)$ es el predicado sobre D.

Definición

Sean $P_1, ..., P_m$ símbolos de predicados.
Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $P_1, ..., P_m$ está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i.

Interpretaciones

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc}
\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} \\
\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\
\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0
\end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **no satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \not\models \varphi(a_1, .., a_n)$$

Equivalencia lógica

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $\psi(x_1, ..., x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, .., a_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi(a_1, .., a_n)$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres), entonces:

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi$$

Equivalencia lógica

Observación

Todas las equivalencias de lógica proposicional son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas φ, ψ y θ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad:** $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
2. **Asociatividad:** $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
3. **Idempotencia:** $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
4. **Doble negación:** $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
5. **Distributividad:** $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
6. **De Morgan:** $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
7. ...

Ejemplos

Las siguientes fórmulas también son lógicamente equivalentes:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$

2. $\forall x(P(x)) \rightarrow \exists y(R(y)) \equiv \neg\exists y(R(y)) \rightarrow \neg\forall x(P(x))$

Equivalencia lógica

Tenemos nuevas equivalencias además de las ya mencionadas:

Teorema

Sea $\varphi(x), \psi(x)$ fórmulas con x su variable libre. Entonces:

$$\neg\forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg\varphi(x))$$
$$\neg\exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg\varphi(x))$$
$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$
$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

¿Qué nos dicen estos teoremas?

Ejercicio

Demuestre los teoremas.

Equivalencia lógica

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \neg\forall x(\varphi(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \not\models \forall x(\varphi(x)) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x(\neg\varphi(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a), \text{ o} \\
& \quad \text{existe } b \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \psi(b) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \text{ o } \mathcal{I} \models \exists x(\psi(x)) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x)))
\end{aligned}
$$

Equivalencia lógica

Ejercicio

¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

- $\forall x(\exists y(\varphi(x,y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(\varphi(x,y)))$ $\times$
- $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \forall x(\varphi(x)) \vee \forall x(\psi(x))$ $\times$
- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))$ $\times$

Consecuencia lógica

Las siguientes definiciones nos ayudan a extender el concepto de consecuencia lógica.

Definición

Para un conjunto Σ de fórmulas, decimos que $\mathcal{I}$ satisface Σ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ si:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \text{ para toda } \varphi \in \Sigma$$

Notación: $\mathcal{I} \models \Sigma(a_1, ..., a_n)$

Consecuencia lógica

Definición

Una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, ..., a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \models \varphi(a_1, ..., a_n)$$

Consecuencia lógica

Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))\} \models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$✓
- $\{\exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))\} \models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$×
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \models \exists x(\varphi(x))$✓
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x, y)))\} \models \exists x(\forall y(\varphi(x, y)))$×

¿Existe algún algoritmo que nos permita resolver este problema? ¿Qué tal nuestro sistema deductivo de lógica proposicional?

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

1. Especificación universal:

$$\frac{\forall x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. Generalización universal:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para un } a \text{ arbitrario}}{\forall x(\varphi(x))}$$

Reglas de inferencia

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

3. Especificación existencial:

$$\frac{\exists x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. Generalización existencial:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x(\varphi(x))}$$

Reglas de inferencia

Ejemplos

- Por especificación universal, de $\mathbb{N} \vDash \forall x(x \geq 0)$ podemos deducir que $1 \geq 0$.
- Por especificación existencial, de $\mathbb{N} \vDash \exists x(x \geq 0)$, podemos deducir que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$.
- Sea $n \in \mathbb{N}$ un número arbitrario, por definición de los números naturales sabemos que $n \geq 0$, luego por generalización universal obtenemos que $\mathbb{N} \vDash \forall x(x \geq 0)$.
- Por generalización existencial, de $1 \geq 0$ podemos deducir que $\mathbb{N} \vDash \exists x(x \geq 0)$.

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todos los hombres son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es hombre.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Consecuencia lógica

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $H(x) :=$ x es hombre
- $M(x) :=$ x es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\ H(s) \\ \hline M(s) \end{array}$$

Consecuencia lógica

Ejercicio

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(H(x) \to M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg H(x) \lor M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg H(x) \lor M(x)), H(s), \neg M(s)\}$:

(1)	$\forall x(\neg H(x) \lor M(x))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg H(s) \lor M(s)$	especificación universal de (1)
(3)	$H(s)$	$\in \Sigma$
(4)	$M(s)$	resolución de $(2), (3)$
(5)	$\neg M(s)$	$\in \Sigma$
(6)	$\square$	resolución de $(4), (5)$

Resumen

- La lógica de predicados permite extender la lógica proposicional a estructuras más complejas.
- En general, esta lógica nos permite cuantificar elementos dentro de un dominio y establecer relaciones entre estos.
- A las "valuaciones" en lógica de predicados les llamamos interpretaciones, y se componen de un dominio más un conjunto de predicados.
- Es posible extender el método de resolución a la lógica de predicados, para esto se incluyen nuevas reglas de inferencia.

Preguntas abiertas

- ¿Existe un algoritmo eficiente que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?
- ¿Existe un algoritmo que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?

Matemáticas Discretas

Lógica de predicados

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

6 de septiembre de 2023