Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA TAREA 5

Pregunta 1

Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ dos funciones cualesquiera. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

Pregunta 1.a

Si $f(n) \in \Theta(g(n))$ entonces $\text{mín}\{f(n), g(n)\} \in \Theta(\text{máx}\ f(n), g(n)\})$.

Solución:

Definiendo $h(n) = min\{f(n), g(n)\}$ y $H(n) = max\{f(n), g(n)\}$
Como $f \in \mathcal{O}(g)$, existen constantes $c_1, c_2 \in R, n_o \in N$ tal que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\ \ \forall n \geq n_0 \tag{1}$$

Despejando de la parte derecha de la desigualdad

$$\frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n)\ \ \forall n \geq n_0 \tag{2}$$

Tenemos dos escenarios desde $n \geq n_0$:

1. Cuando $f(n) \leq g(n),\ h(n) = f(n) \wedge H(n) = g(n)$. Usando (1) y la condición de este caso:

$$c_1 * g(n) \leq f(n) \leq 1 * g(n)\ \ para\ n \geq n_0\ tq\ f(n) \leq 1 * g(n)$$

$$min\{c_1, \frac{1}{c_2}\}\, g(n) \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq 1 * g(n)$$

$$min\{c_1, \frac{1}{c_2}\}\, H(n) \leq c_1 g(n) \leq h(n) \leq 1 * H(n)$$

2. Cuando $g(n) < f(n),\ h(n) = g(n) \wedge H(n) = f(n)$ Con (2) queda:

$$\frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq 1 * f(n)\ \ para\ n \geq n_0\ tq\ f(n) > g(n)$$

$$min\{c_1, \frac{1}{c_2}\}\, f(n) \leq \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq 1 * f(n)$$

$$min\{c_1, \frac{1}{c_2}\}\, H(n) \leq \frac{1}{c_2} h(n) \leq g(n) \leq 1 * H(n)$$

Combinando ambos casos:

$$min\{c_1, \frac{1}{c_2}\}\, H(n) \leq h(n) \leq 1 * H(n) \;\; \forall n \geq n_0$$

$$c_1' H(n) \leq h(n) \leq c_2' H(n) \;\; \forall n \geq n_0$$

Con lo cual, $h(n) \in \mathcal{O}(H(n))$

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Punto**) La demostración es correcta

(**3 Punto**) Por diferenciar en dos casos, pero fallar en demostración o análisis de uno.

(**2 Punto**) Por plantear inecuación (1) y (2) correctamente

(**0 Punto**) En otro caso

Pregunta 1.b

Si $f(n) \in O(g(n))$ entonces $f(n)^{g(n)} \in O(g(n)^{f(n)})$.

<u>Solución:</u>

La afirmación anterior es falsa, se puede demostrar a través de un contraejemplo:

Sea $f(n) = 2$ y $g(n) = n$. De acuerdo a la jerarquía en notación $\mathcal{O}$ vista en clases se cumple que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)$.

Se debe demostrar ahora que $f(n)^{g(n)} \notin \mathcal{O}(g(n)^{f(n)})$:

Nuevamente si consideramos la jerarquía en notación $\mathcal{O}$ vista en clases, si $f(n)^{g(n)} = 2^n$ y $g(n)^{f(n)} = n^2$. Entonces no se cumple que $f(n)^{g(n)} \in \mathcal{O}(g(n)^{f(n)})$, lo que es equivalente a $f(n)^{g(n)} \notin \mathcal{O}(g(n)^{f(n)})$.

Por demostración a través de contraejemplo queda demostrado que la afirmación no se cumple para dos funciones arbitrarias.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Punto**) La demostración es correcta

(**3 Punto**) Se presenta un contraejemplo válido, se demuestra correctamente que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)$, pero no se demuestra correctamente que $f(n)^{g(n)} \notin \mathcal{O}(g(n)^{f(n)})$

(**2 Punto**) Se presenta un contraejemplo inválido, pero se demuestra correctamente que $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)$

(**0 Punto**) En otro caso

Pregunta 2

En clases se vio que, dado un alfabeto finito Σ, se puede definir recursivamente el conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$ como:

- $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$.
- $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.
- si $u \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot u \cdot a \in \ mathcal P_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.

Por otro lado, para una palabra $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in \Sigma^*$ se define su *palabra reversa* $w^R = a_n \cdots a_2 a_1$.

Pregunta 2.a

Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $w = w^R$.

Solución:

Se busca demostrar por inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in P_\Sigma$ entonces $w = w^R$
Usamos inducción estructural sobre P_Σ. Se definen $S[0] = \{\epsilon, a\}$ con $a \in P_\Sigma$ y $S[n]$ la enésima capa del conjunto P_Σ.

- Caso base.
  - Se tiene ϵ en la primera capa $S[0]$, caso en que se cumple claramente $\epsilon = \epsilon^R$.
  - Se tienen aquellas letras $a \in \Sigma$ en la primera capa $S[0]$, cumpliéndose también $a = a^R$.
- Hipótesis inductiva.

  Se define $w \in P_\Sigma$ perteneciente a la enésima capa $S[n]$, de modo que se cumple $w = w^R$.
- Caso inductivo.

  Ahora, sea $u \in P_\Sigma$ tal que $|u| \geq 2$ perteneciente a $S[n+1]$, entonces se tiene que $\exists a \in \Sigma$ tal que $u = a \cdot w \cdot a$ con $w \in P_\Sigma$. Ahora, $u^R = (a \cdot w \cdot a)^R = a \cdot w^R \cdot a = a \cdot w \cdot a = u$, quedando así demostrado que si $u \in P_\Sigma \to u = u^R$.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por concluir correctamente que $u = u^R$

(**3 Puntos**) Por definir u en base a $w \in P_\Sigma$, indicando que $w = w^R$

(**2 Puntos**) Por mencionar que se usa inducción estructural sobre P_Σ y desarrollar el caso base ϵ y a

(**0 Puntos**) En otro caso

Pregunta 2.b

Demuestre usando inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$, entonces $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Solución:

Se busca demostrar por inducción que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$ entonces se cumple $w \in P_\Sigma$ mediante inducción estructural sobre Σ^*.

- Caso base.

  Se considera ϵ que claramente cumple $\epsilon = \epsilon^R$, luego por definición del conjunto base de P_Σ se tiene que $\epsilon \in P_\Sigma$.

- Hipótesis inductiva.

  Se asume que para toda palabra u de largo menor a w, se tiene que si $u = u^R$ entonces se cumple $u \in P_\Sigma$.

- Caso inductivo.

  Ahora, dado $w \in \Sigma^*$, por la definición recursiva del conjunto se tiene que $w = u \cdot a$ para algún $u \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$ con $u = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$. Para demostrar que si $w = w^R$ entonces se cumple $w \in P_\Sigma$, se asume $w = w^R$ de modo que

  $$a_1 \cdot a_2 \dots a_n \cdot a = w = w^R = (a_1 \cdot a_2 \dots a_n \cdot a)^R = a \cdot a_n \dots a_2 \cdot a_1$$

  A partir de esto se deduce que $a = a_1$, con lo que se define $w' = a_2 \dots a_n$ y $w = a \cdot w' \cdot a$, y dado que $|w'| < w$ por hipótesis inductiva entonces $w' \in P_\Sigma$. Finalmente, por la definición recursiva de P_Σ, puesto que $w = a \cdot w' \cdot a$ y $w' \in P_\Sigma$, se cumple que $w \in P_\Sigma$, quedando así demostrada la implicancia.

Dado lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente:

(**4 Puntos**) Por concluir que w se puede escribir como $a \cdot w' \cdot a$ con $w' \in P_\Sigma$

(**3 Puntos**) Por plantear el caso inductivo definiendo $w = a_1 \dots a_n \cdot a$

(**2 Puntos**) Por plantear el caso base y la hipótesis inductiva sobre Σ^*

(**0 Puntos**) En otro caso