

Matemáticas Discretas

Inducción

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

16 de agosto de 2023

Objetivos

- 1 Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.

Contenidos

- ① Objetivos
- ② Preliminares
- ③ Principios de Inducción
- ④ Inducción Estructural
 - Definiciones inductivas
 - Inducción estructural

Lenguaje matemático

Asumiremos cierta familiaridad con elementos del lenguaje matemático.

- Algunos elementos los veremos más en profundidad en capítulos siguientes.

$x \in B$ x pertenece a B

$x \notin B$ x no pertenece a B

$\exists x$ Existe x

$\forall x$ Para todo x

$A \subseteq B$ A es subconjunto de B

$A \subsetneq B$ A es subconjunto propio de B

\dots y otros que puedan aparecer

Números naturales

¿Qué son los números naturales?

Definición

Los **números naturales**, denotados por \mathbb{N} , son los que sirven para contar los elementos de un conjunto.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

¡Los naturales empiezan en el cero!

¡Los naturales empiezan en el cero!

Inducción

- Veremos inducción como una “propiedad” de los números naturales.
 - Es *inherente* a su definición.
- Nos permitirá demostrar propiedades sobre los naturales.
- También nos permitirá definir objetos relacionados a ellos (funciones, relaciones, etc.).
- La inducción matemática se usa principalmente como técnica para demostraciones.

Principios de inducción

Existen distintas formulaciones para el Principio de Inducción.

- No necesitan demostración (de ahí el nombre “principio”).
- ... pues son inherentes a la definición de los números naturales (como ya dijimos).

Principio de Buen Orden

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.

$$A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A \text{ tal que } \forall y \in A, x \leq y$$

Principios de inducción

Principio de Buen Orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.

$$A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A \text{ tal que } \forall y \in A, x \leq y$$

- ¿Es cierto este principio para los números racionales?
- ¿Y para los reales?

R: No. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, el cual claramente cumple que $A \subseteq \mathbb{Q}$. Supongamos por contradicción que cumple el PBO, y sea entonces $q_0 \in A$ su menor elemento. Como $q_0 > 0$, es cierto que $q_0/2 \in A$ y que $0 < q_0/2 < q_0$, lo cual contradice que q_0 sea el menor elemento de A . La contradicción se deriva de nuestra suposición de que el PBO era cierto, por lo que no puede serlo. La misma demostración se aplica a \mathbb{R} .

Principios de inducción

Principio de Inducción Simple (PIS)

Sea A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que:

- 1 $0 \in A$
- 2 Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- La condición 1 se llama **base de inducción** (BI).
- La condición 2 se llama **paso inductivo**, donde la suposición de que $n \in A$ es la **hipótesis de inducción** (HI), y la demostración de que $n + 1 \in A$ es la **tesis de inducción** (TI).

Principios de inducción

Este principio nos sirve para demostrar propiedades sobre los naturales.

Ejercicio

Demuestre que el 0 es el menor número natural.

Demostración: Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$. Usaremos el PIS para demostrar que $A = \mathbb{N}$, con lo que estaremos demostrando que para todo elemento $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \geq 0$, y por lo tanto que 0 es el menor natural.

BI: Es claro que $0 \in A$, puesto que $0 \in \mathbb{N}$ y $0 \geq 0$.

HI: Supongamos que $n \in A$, y por lo tanto $n \geq 0$.

TI: Debemos demostrar que $n + 1 \in A$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $n \geq 0$, y por lo tanto $n + 1 \geq 1$. Concluimos que $n + 1 \geq 0$, y entonces $n + 1 \in A$.

Por PIS, se sigue que $A = \mathbb{N}$. \square

Principios de inducción

Existe una segunda formulación para el PIS que hace más simple su uso.

PIS (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que:

- 1 $P(0)$ es verdadero (0 cumple la propiedad P)
- 2 Si $P(n)$, entonces $P(n + 1)$ (cada vez que n cumple la propiedad, $n + 1$ también la cumple)

entonces todos los elementos de \mathbb{N} cumplen la propiedad P .

- Al igual que antes, la condición 1 se llama **base de inducción** (BI).
- ... y la condición 2 se llama **paso inductivo**, donde la suposición de que $P(n)$ es la **hipótesis de inducción** (HI), y la demostración de que $P(n + 1)$ es la **tesis de inducción** (TI).

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

BI: Tomando $n = 0$, tenemos que $\sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

HI: Suponemos que para n se cumple que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Principios de inducción

TI: Debemos demostrar que $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Por HI tenemos que $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Si sumamos $(n+1)$ a cada lado:

$$\sum_{i=0}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \square$$

Principios de inducción

¿Qué pasa con las propiedades que se cumplen para todos los números naturales, excepto una cantidad *finita* de ellos?

- Por ejemplo, desde algún punto en adelante.
- Podemos modificar el PIS para que la BI se inicie en otro número natural.
- Debemos modificar la demostración de la base a ese número.

Ejercicio

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple que

$$n! > 2^n$$

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple que

$$n! > 2^n$$

Demostración:

BI: En este caso la base se inicia en $n = 4$. Tenemos que $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$, por lo que la propiedad se cumple para 4.

HI: Supongamos que $n! > 2^n$.

TI: Queremos demostrar que $(n + 1)! > 2^{n+1}$. Por HI sabemos que $n! > 2^n$. Multiplicando por $(n + 1)$ a cada lado tenemos que $n! \cdot (n + 1) > 2^n \cdot (n + 1)$, y por definición de factorial entonces $(n + 1)! > 2^n \cdot (n + 1)$. Como la propiedad que queremos demostrar se inicia en $n = 4$, sabemos que necesariamente $(n + 1) > 4$, y luego $(n + 1)! > 2^n \cdot (n + 1) > 2^n \cdot 4 > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$, y por lo tanto $(n + 1)! > 2^{n+1}$ como queríamos demostrar. \square

Principios de inducción

PIS (tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que:

- 1 $P(n_0)$ es verdadero ($n_0 \in \mathbb{N}$ cumple la propiedad P)
- 2 Si $P(n)$, entonces $P(n+1)$ (cada vez que n cumple la propiedad, $n+1$ también la cumple)

entonces todos los elementos de \mathbb{N} a partir de n_0 cumplen la propiedad P .

¿Cómo justificamos este uso del PIS desde una base distinta de 0?

Principios de inducción

La sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, \dots, F_n, F_{n+1}, \dots$ que cumple la siguiente recurrencia:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- ¿Es suficiente la hipótesis de inducción?
- No nos basta saber que n cumple la propiedad para demostrar que $n + 1$ también la cumple.
- Al parecer necesitamos algo más potente...

Principios de inducción

Principio de inducción por curso de valores (PICV)

Sea A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- También es conocido como *Principio de inducción fuerte*.
- La hipótesis de inducción (HI) es la expresión $\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq A$.
- La tesis de inducción (TI) es la expresión $n \in A$.
- ...y la base?
 - ¿Qué pasa con $n = 0$?

Principios de inducción

PICV (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k < n, P(k) \text{ es verdadero} \Rightarrow P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces P es verdadero para todos los elementos de \mathbb{N} .

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

BI: Debemos usar dos casos base, dado que el paso recursivo de la definición de F_n usa dos casos anteriores. Para $n = 0$ tenemos que $F_0 = 0 < 1 = 2^0$, y para $n = 1$ tenemos que $F_1 = 1 < 2 = 2^1$.

HI: Supongamos que para todo $k < n$ se cumple que $F_k < 2^k$.

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

TI: Queremos demostrar que $F_n < 2^n$. Por HI:

$$F_{n-1} < 2^{n-1}$$

$$F_{n-2} < 2^{n-2}$$

Sumamos ambas ecuaciones:

$$F_{n-1} + F_{n-2} < 2^{n-1} + 2^{n-2}$$

$$\begin{aligned} F_n &< \frac{2^n}{2} + \frac{2^n}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2^n \\ &< 2^n \end{aligned}$$

Por PICV, se sigue que $F_n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que todo número natural $n \geq 2$ tiene un factor primo.

Demostración:

BI: $n = 2$ es primo, por lo que tiene un factor primo.

HI: Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.

TI: Debemos demostrar que n tiene un factor primo. Tenemos dos casos:

- n es primo: en este caso es claro que n tiene un factor primo (n).
- n es compuesto: sabemos que $n = k_1 \cdot k_2$, donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por HI sabemos que tiene un factor primo x , y por lo tanto x es factor primo de n . \square

Principios de inducción

Ejercicio

Demuestre que todo número natural ≥ 2 tiene un factor primo.

- En PICV, cuando no usamos la hipótesis para demostrar la tesis, tenemos un *caso base*.
- En este ejemplo son infinitos!

Principios de inducción

Teorema

Los 3 principios de inducción (PBO, PIS y PICV) son equivalentes.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Hint: Demuestre cada principio a partir de otro y muestre una “cadena cíclica”.

$$PBO \Rightarrow PIS \Rightarrow PICV \Rightarrow PBO$$

Principios de inducción

Demostraremos que $PBO \Rightarrow PIS$. El resto se dejan como ejercicios.

Demostración: Por contrapositivo, mostraremos que si el PIS no es cierto, entonces el PBO no es cierto. Supongamos que el PIS es falso; es decir, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple las reglas del PIS, pero $A \neq \mathbb{N}$. Sea entonces el conjunto $B = \mathbb{N} - A$, el cual cumple que $B \subseteq \mathbb{N}$ y $B \neq \emptyset$. Mostraremos que este conjunto no tiene menor elemento, y por lo tanto el PBO es falso. Por contradicción, supongamos que B sí tiene un menor elemento al que llamamos b . Como $0 \in A$, sabemos que $b \neq 0$, y luego $b - 1 \in \mathbb{N}$ y $b - 1 \in A$, pues $b - 1 \notin B$ pues es menor que b . Como supusimos que A cumple las reglas del PIS y sabemos que $b - 1 \in A$, por la segunda regla obtenemos que $b \in A$, lo que contradice el hecho de que b sea el menor elemento de B . \square

IMPORTANTE

- No se puede hacer la inducción “al revés”.
 - Suponer que la tesis es correcta, y mediante manipulación algebraica obtener la hipótesis.
- Esto siempre se considerará incorrecto!
- **No se puede partir una demostración desde lo que se quiere concluir.**
- Tener claro: lo que suponemos es la hipótesis, y a partir de ella demostramos la tesis.

Definiciones inductivas

- Los principios anteriores se aplican todos a los números naturales.
- Dijimos que esto se debe que son “inherentes” a ellos, pero qué significa esto?
- Observemos el PIS en su primera formulación:

Principio de Inducción Simple (PIS)

Sea A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que:

- ① $0 \in A$
- ② Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

- ¿Qué nos muestra el PIS?

Definiciones inductivas

- El PIS nos muestra que \mathbb{N} es un conjunto que se puede construir a partir de un elemento base y un operador.
 - En este caso, el elemento base es el 0 y el operador el “sucesor”.
- Esta construcción a partir de elementos base y operadores es lo que se conoce como una **definición inductiva**.
- Intuitivamente, en el caso de \mathbb{N} podemos obtener todo natural a partir de sumarle 1 a otro natural (excepto el 0).

Definiciones inductivas

Podemos modificar levemente el PIS para obtener una definición inductiva de \mathbb{N} :

Definición: \mathbb{N}

- ① $0 \in \mathbb{N}$
 - ② Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$
- ¿Es suficiente para definir a \mathbb{N} ?
 - ¿Hay otros conjuntos que cumplan con estas reglas?

Definiciones inductivas

Al definir un conjunto inductivamente, debemos establecer que **todos** sus elementos y **sólo ellos** se obtienen a partir de las reglas de la definición.

Definición: \mathbb{N}

\mathbb{N} es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

- 1 $0 \in \mathbb{N}$
- 2 Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Esta definición está estrechamente relacionada con los principios de inducción:

- La propiedad debe demostrarse para el 0 (elemento base y primera regla)
- y luego usando el operador (segunda regla).

Definiciones inductivas

- Esta noción de definición inductiva se puede usar para definir otros conjuntos.
- Podremos usar inducción para demostrar propiedades sobre tales conjuntos.
- Podremos definir nuevos objetos (funciones, operaciones, etc.) usando la definición inductiva del conjunto.

Ejemplo: números pares

- 1 El 0 es un número par.
- 2 Si n es número par, $n + 2$ es un número par.

Definiciones inductivas

Definición Inductiva

Para definir inductivamente un conjunto necesitamos:

- 1 Establecer que el conjunto es el menor que cumple las reglas.
- 2 Un conjunto (no necesariamente finito) de elementos base, que se supondrá que inicialmente pertenecen al conjunto que se quiere definir.
- 3 Un conjunto finito de reglas de construcción de nuevos elementos del conjunto a partir de elementos que ya están en él.

Definiciones inductivas

Veamos un ejemplo “computín”.

- Definiremos formalmente un concepto similar al de lista enlazada.
- Por simplicidad, supondremos que sólo contiene números naturales.

Ejemplo

$\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4$

\emptyset

$\emptyset \rightarrow 10 \rightarrow 6$

$\rightarrow 10 \rightarrow 6$

Definiciones inductivas

¿Cómo construimos una lista?

- Tomamos una lista y le agregamos un elemento al final.

¿Y la lista vacía?

- Será nuestro caso base.

Definición de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

El conjunto de las listas enlazadas sobre los naturales $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

- 1 $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
- 2 Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \rightarrow k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Definiciones inductivas

- En este caso la operación que ocupamos para construir listas es tomar una lista, agregar una flecha y un natural al final.
- La operación “agregar una flecha y un natural” es el equivalente a sumar 1 en el caso de \mathbb{N} .

Ejemplo

- Partimos con la lista vacía \emptyset .
- Ocupamos la operación para construir la lista $\rightarrow 4$.
- La ocupamos de nuevo y construimos la lista $\rightarrow 4 \rightarrow 10$.
- ...

Definiciones inductivas

La anterior definición nos permite definir propiedades, relaciones y funciones sobre las listas. Por ejemplo, podemos establecer cuándo dos listas son iguales:

$$L_1 \rightarrow k_1 = L_2 \rightarrow k_2 \text{ si y sólo si } L_1 = L_2 \text{ y } k_1 = k_2$$

o podemos definir propiedades como la siguiente:

$P(L) : L$ tiene el mismo número de flechas que de elementos.

¿Cómo demostramos que la propiedad es cierta sobre todas las listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$?

Inducción estructural

La inducción estructural es una variación de la inducción matemática que nos permite demostrar propiedades sobre conjuntos definidos inductivamente.

Principio de Inducción estructural

Sea A un conjunto definido inductivamente y P una propiedad sobre los elementos en A . Si se cumple que:

- 1 Todos los elementos base de A cumplen la propiedad P ,
- 2 Para cada regla de construcción, si la regla se aplica sobre elementos en A que cumplen la propiedad P , entonces los elementos producidos por la regla también cumplen la propiedad P

entonces todos los elementos en A cumplen la propiedad P .

OBS: El PIS es un caso particular de este principio.

Ejercicio

Demuestre que la propiedad P sobre las listas enlazadas:

$P(L) : L$ tiene el mismo número de flechas que de elementos.

es cierta para $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Inducción estructural

Demostración: usamos inducción estructural:

BI: El único caso base es la lista vacía \emptyset , la cual no tiene flechas ni elementos, y por lo tanto $P(\emptyset)$ es verdadera.

HI: Supongamos que una lista cualquiera L cumple $P(L)$, es decir, tiene exactamente la misma cantidad de flechas que de elementos.

TI: Debemos demostrar que $P(L \rightarrow k)$ es verdadero, es decir, que $L \rightarrow k$ tiene tantas flechas como elementos, con $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $L \rightarrow k$ tiene exactamente una flecha y un elemento más que L . Por HI, sabemos que L tiene la misma cantidad de flechas y de elementos, y por lo tanto $P(L \rightarrow k)$ es verdadera.

Por inducción estructural se sigue que todas las listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ tienen la misma cantidad de flechas que de elementos. \square

Inducción estructural

Podemos aprovechar la construcción inductiva de los conjuntos para definir operadores o funciones sobre sus elementos. Un ejemplo típico:

Factorial

- $0! = 1$
- $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$

Entonces:

- Se define el operador o función para el caso base.
- Se explicita cómo operar el siguiente elemento creado por inducción.

Ejercicios

- 1 Defina la función $|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la cantidad de elementos en ella (i.e. su largo).
- 2 Defina la función $sum : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la suma de sus elementos.
- 3 Defina la función $máx : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\}$ que recibe una lista como argumento y entrega su elemento máximo.
- 4 Defina la función $Head : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega su primer elemento.

Inducción estructural

Ejercicio

Defina la función $|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la cantidad de elementos en ella (i.e. su largo).

- ① $|\emptyset| = 0$
- ② $|L \rightarrow k| = |L| + 1$, con $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Defina la función $sum : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la suma de sus elementos.

- ① $sum(\emptyset) = 0$
- ② $sum(L \rightarrow k) = sum(L) + k$, con $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Inducción estructural

Ejercicio

Defina la función $máx : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\}$ que recibe una lista como argumento y entrega su elemento máximo.

- 1 $máx(\emptyset) = -1$
- 2 $máx(L \rightarrow k) = \begin{cases} máx(L) & máx(L) \geq k \\ k & k > máx(L) \end{cases}$, con $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Defina la función $Head : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega su primer elemento.

- 1 $Head(\rightarrow k) = k$, con $k \in \mathbb{N}$.
- 2 $Head(L \rightarrow k) = Head(L)$, con $L \neq \emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Inducción estructural

También podemos definir operadores sobre listas (funciones que reciben una lista y entregan otra).

Ejercicio

Defina el operador $Suf : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ (operador sufijo) que recibe una lista, y entrega la lista que resulta de sacarle el primer elemento.

- 1 $Suf(\rightarrow k) = \emptyset$, con $k \in \mathbb{N}$.
- 2 $Suf(L \rightarrow k) = Suf(L) \rightarrow k$, con $L \neq \emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Inducción estructural

Ahora que tenemos bastantes propiedades, funciones y operadores sobre las listas, podemos enunciar múltiples propiedades sobre ellas:

Teorema

Si L, L_1, L_2 son listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$, entonces las siguientes propiedades son ciertas:

- 1 $sum(L) \geq 0$.
- 2 $máx(L) \leq sum(L)$.
- 3 $sum(L) = Head(L) + sum(Suf(L))$.
- 4 Si $L_1, L_2 \neq \emptyset$, se cumple que $L_1 = L_2$ si y sólo si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$.

Ejercicio

Demuestre las propiedades usando inducción estructural.

Inducción estructural

Teorema

- 4 Si $L_1, L_2 \neq \emptyset$, se cumple que $L_1 = L_2$ si y sólo si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$.

Demostración: La dirección (\Rightarrow) es trivial. Demostraremos la otra dirección.

PD: Si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.

- **BI:** Sean $L_1 \Rightarrow k$ y $L_2 \Rightarrow j$ dos listas tales que $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$. Por definición de sum , tenemos que $sum(\rightarrow k) = sum(\rightarrow j)$, y luego $k = j$. Concluimos que $L_1 = L_2$.
- **HI:** Dadas dos listas L_1 y L_2 cualquiera, supongamos que si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.

OJO!!! NO sabemos si lo primero se cumple! Sólo sabemos que si se cumple, podemos aplicar la segunda parte.

Inducción estructural

- **TI:** Sean ahora dos listas $L_1 \rightarrow k$ y $L_2 \rightarrow j$. Queremos demostrar que si $Suf(L_1 \rightarrow k) = Suf(L_2 \rightarrow j)$ y $sum(L_1 \rightarrow k) = sum(L_2 \rightarrow j)$, entonces $L_1 \rightarrow k = L_2 \rightarrow j$.

Supongamos entonces que $Suf(L_1 \rightarrow k) = Suf(L_2 \rightarrow j)$ y $sum(L_1 \rightarrow k) = sum(L_2 \rightarrow j)$. Por definición de ambas funciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} Suf(L_1) \rightarrow k &= Suf(L_2) \rightarrow j \\ sum(L_1) + k &= sum(L_2) + j \end{aligned}$$

Por igualdad de listas, sabemos que necesariamente $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $k = j$. Usando este último resultado, obtenemos también que $sum(L_1) = sum(L_2)$. Luego, por HI tenemos que $L_1 = L_2$, y como $k = j$ concluimos que $L_1 \rightarrow k = L_2 \rightarrow j$. \square

Las otras demostraciones se dejan como ejercicio.

- La inducción es una técnica tanto de demostración como de definición de conjuntos y funciones.
- En particular, los números naturales son un conjunto definido de manera inductiva.
- Los 3 principios de inducción sobre los naturales son el PBO, el PIS y el PICV.
- Todos estos principios son equivalentes entre sí.
- El principio de inducción se puede generalizar a cualquier conjunto definido de manera inductiva, a esta técnica de demostración le llamamos inducción estructural.

Matemáticas Discretas

Inducción

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

16 de agosto de 2023