Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

30 de agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 19:59:59 del 6 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

1. Sean $P = \{p, q, r, s, t, v\}$ y $\varphi = \neg(p \to q) \vee ((r \vee s) \to (q \vee t)) \vee (\neg p \to \neg v)$ una fórmula en $L(P)$. Encuentre una fórmula ψ en CNF tal que $\varphi \equiv \psi$. Debe demostrar la equivalencia lógica.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $P = \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$ y $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} (p_i \leftrightarrow q_i)$ una fórmula en $L(P)$. Encuentre una fórmula ψ en DNF tal que $\varphi \equiv \psi$. Debe demostrar la equivalencia lógica.

Solución

Pauta (6 pts.)

a) Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\psi &\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(r \vee s) \vee (q \vee t)) \vee (p \vee \neg v) && (1)\\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge \neg s) \vee q \vee t \vee p \vee \neg v && (2)\\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee ((\neg r \vee q \vee t \vee p \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee q \vee t \vee p \vee \neg v)) && (3)\\
&\equiv (\neg r \vee p \vee q \vee t \vee \neg v) \wedge (\neg s \vee p \vee q \vee t \vee \neg v) && (4)
\end{aligned}$$

donde,

(1) $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

(2) De Morgan.

(3) Distribución.

(4) Distribución y absorción.

b) Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i=1}^{n} (p_i \leftrightarrow q_i) &\equiv \bigvee_{i=1}^{n} (p_i \to q_i) \wedge (q_i \to p_i)\\
&\equiv \bigvee_{i=1}^{n} (\neg p_i \vee q_i) \wedge (\neg q_i \vee p_i)\\
&\equiv \bigvee_{i=1}^{n} (\neg p_i \wedge \neg q_i) \vee \bigvee_{i=1}^{n} (q_i \wedge p_i)
\end{aligned}$$

donde se aplica directamente la definición de equivalencia, luego la propiedad de la implicancia y distribución.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

En ambos incisos:

(**1 punto**) por encontrar ψ, la fórmula equivalente con la estructura pedida.

(**2 puntos**) por demostrar equivalencia con pasos justificados correctamente.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

1. El conectivo ternario M es definido de la siguiente forma:

p	q	r	$M(p,q,r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

¿Es $\{M\}$ funcionalmente completo? Demuestre su respuesta.

2. Sean Σ_1 y Σ_2 conjuntos de fórmulas y α, β fórmulas en lógica proposicional. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera demuestre, y en caso de ser falsa dé un contraejemplo.

   a) Si $\Sigma_1 \cup \{\beta\} \models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \alpha$.

   b) Si $\Sigma_1 \models \alpha$ y $\Sigma_2 \models \beta$ entonces $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \models \alpha \wedge \beta$.

   c) Si $\Sigma_1 \not\models \alpha$ entonces $\Sigma_1 \models \neg\alpha$.

   d) $\Sigma_1 \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\Sigma_1 \cup \{\alpha\} \models \beta$.

Solución

Pauta (6 pts.)

2.1 $\{M\}$ no es funcionalmente completo. Demostraremos por inducción que si $P = \{p\}$, entonces se cumple que toda $\varphi \in L(p)$ creada con $\{M\}$ es equivalente a p o a $\neg p$, y por lo tanto, no podemos construir una tautología o una contradicción.

Antes de realizar la inducción, transformamos nuestro operador a una fórmula equivalente en DNF y simplificamos:

$$M(p,q,r) \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge (\neg r \vee \neg q))$$

Esta fórmula nos permitirá evaluar de forma más sencilla el operador $M(p,q,r)$.

Por demostrar: $\varphi \equiv p$ o $\varphi \equiv \neg p$.

B.I.

a) $M(p,p,p) = (p \wedge \neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge (\neg p \vee \neg p)) = \neg p$

b) $M(p,p,\neg p) = (p \wedge \neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge (p \vee \neg p)) = \neg p$

c) $M(p,\neg p,p) = (p \wedge p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge (\neg p \vee p)) = \neg p$

d) $M(p,\neg p,\neg p) = (p \wedge p \wedge p) \vee (\neg p \wedge (p \vee p)) = p$

e) $M(\neg p,p,p) = (\neg p \wedge \neg p \wedge \neg p) \vee (p \wedge (\neg p \vee \neg p)) = \neg p$

f) $M(\neg p,p,\neg p) = (\neg p \wedge \neg p \wedge p) \vee (p \wedge (p \vee \neg p)) = p$

g) $M(\neg p,\neg p,p) = (\neg p \wedge p \wedge \neg p) \vee (p \wedge (\neg p \vee p)) = p$

h) $M(\neg p,\neg p,\neg p) = (\neg p \wedge p \wedge p) \vee (p \wedge (p \vee p)) = p$

Por *a*) podemos ocupar $\neg p$ como input para nuestro operador. Si bien este es el único caso base necesario, enunciamos todas las combinaciones posibles con negación para aplicarlo directamente en el paso inductivo.

H.I. Si φ_1, φ_2, $\varphi_3 \in L(P)$ y se construyen utilizando únicamente$\{M\}$ entonces $\varphi_i \equiv p$ p $\varphi_i \equiv \neg p$ para $i \in \{1,2,3\}$

T.I. PD: $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv p$ o $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv \neg p$.

Existen 8 casos posibles:

a) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(p,p,p) \equiv \neg p$

b) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(p,p,\neg p) \equiv \neg p$

c) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(p,\neg p,p) \equiv \neg p$

d) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(p,\neg p,\neg p) \equiv p$

e) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(\neg p,p,p) \equiv \neg p$

f) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(\neg p,p,\neg p) \equiv p$

g) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(\neg p,\neg p,p) \equiv p$

h) $M(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \equiv M(\neg p,\neg p,\neg p) \equiv p$

2.2 $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq L(p), \alpha, \beta \in L(p)$.

a) **Falso.** Si $\Sigma_1 = \{\neg\alpha, \neg\beta\}$ entonces $\Sigma \cup \{\beta\} \models \alpha$, pero $\Sigma_1 \not\models \alpha$

b) **Verdadero.** Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \Sigma_2) = 1$. Esto es equivalente a decir que $\sigma(\Sigma_1) = 1$ y $\sigma(\Sigma_2) = 1$. Luego, por consecuencia lógica, $\sigma(\alpha) = 1$ y $\sigma(\beta) = 1$, y podemos concluir que $\sigma(\alpha \wedge \beta) = 1$.

c) **Falso.**

Sea $\Sigma_1 = \{p\}$ y $\alpha = q$. Luego $\Sigma_1 \not\models \alpha$ pero $\Sigma_1 \not\models \neg\alpha$.

d) **Verdadero.** Debemos demostrar ambos sentidos de la doble implicancia.

($\Rightarrow$)

Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma_1 \cup \{\alpha\}) = 1$. Vamos a demostrar que $\sigma(\beta) = 1$.

Como $\sigma(\Sigma_1 \cup \{\alpha\}) = 1$ necesariamente debe cumplirse que $\sigma(\Sigma_1) = 1$ y $\sigma(\alpha) = 1$. Por consecuencia lógica, $\sigma(\Sigma_1) = 1$ implica que $\sigma(\alpha \to \beta) = \sigma(\neg\alpha \vee \beta) = 1$. Ya que sabemos que $\sigma(\alpha) = 1$, entonces necesariamente $\sigma(\neg\alpha) = 0$ y por lo tanto $\sigma(\beta) = 1$.

($\Leftarrow$)

Sea $\sigma(\Sigma_1) = 1$ Debemos demostrar que $\sigma(\alpha \to \beta) = 1$. Demostraremos por casos.

<u>Caso 1:</u> $\sigma(\alpha) = 1$

Luego $\sigma(\Sigma_1 \cup \{\alpha\}) = 1$ y por consecuencia logica $\sigma(\beta) = 1$. De esto concluimos que $\sigma(\alpha \to \beta) = 1$.

<u>Caso 2:</u> $\sigma(\alpha) = 0$

Por defínción de la implicancia se cumple que $\sigma(\alpha \to \beta) = 1$.

Como en todos los casos posibles se cumple, entonces hemos demostrado que $\sigma(\alpha \to \beta) = 1$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

2.1) (**0.5 punto**) Por notar el patrón de las fórmulas construidas con $\{M\}$

(**1 puntos**) Por el caso base.

(**1 puntos**) Por el paso inductivo.

(**0.5 puntos**) Por concluir correctamente.

2.2) (**0.75 puntos**) Por cada inciso de esta pregunta (demostración o contraejemplo), a cada sentido de la doble implicancia se le asigna la mitad del puntaje.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.