Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Examen

28 de Noviembre de 2016
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- En cada parte del examen debe contestar al menos dos preguntas. Si contesta las tres, se considerarán las dos mejores en el cálculo de su nota.
- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Parte A (50 %)

1. a) Sea $P = \{p, q, r, s\}$. Considere las siguientes fórmulas en $L(P)$:

   φ_1: $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$

   φ_2: $\neg s \rightarrow \neg p$

   φ_3: $s \vee \neg q$

   φ_4: $\neg s \rightarrow \neg r$

   ψ: s

   Demuestre que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \vDash \psi$.

   b) Demuestre que

   $$\{\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)\} \models \forall x R(x, x)$$

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que el grado de cada vértice es mayor o igual a 2. Demuestre que G tiene al menos un ciclo.

3. a) Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Definimos la relación $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$n_1 \sim n_2 \Leftrightarrow 3 \mid (2n_1 + n_2)$$

Demuestre que $\sim$ es de equivalencia y determine el índice[1] de la relación.

b) Resuelva la siguiente recurrencia y verifique su resultado utilizando el teorema maestro:

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8\mathrm{T}(\frac{n}{2}) + n^2 & n > 1 \end{cases}$$

Puede asumir que el largo del input esta en $POTENCIA_2$.

Parte B (50 %)

1. Demuestre que existe un número cuyos dígitos son sólo unos que es divisible por 2017.

   Hint: 2017 es primo.

2. Decimos que un árbol es ternario completo si todos sus nodos internos tienen exactamente tres hijos y todas sus hojas están a la misma profundidad.

   a) Demuestre que un árbol ternario completo de altura h tiene exactamente 3^h hojas.

   b) Demuestre que un árbol ternario completo de altura h tiene exactamente $\frac{3^{h+1}-1}{2}$ vértices.

3. Considere el siguiente problema:

$$\text{SAT-3CNF} = \{\varphi \mid \varphi \in L(P) \text{ en 3-CNF satisfacible.}\}$$

   En otras palabras, las instancias $I_{\text{SAT-3CNF}}$ son todas las fórmulas de la lógica proposicional en 3-CNF y el lenguaje $L_{\text{SAT-3CNF}}$ son todas las fórmulas que tienen por lo menos una valuación que las satisfacen. Demuestre que SAT-3CNF es NP-completo.

[1] Cardinalidad del conjunto cuociente inducido por la relación.