Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

25 de septiembre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
2. Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
3. Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de distintos dominios.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

N°alumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde $\mathcal{U}$ es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

1. $a = b$: En este caso $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\{\{a\}, \{a\}\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\{\{a\}\}$. Luego, tenemos que $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$

2. $a \neq b$: Como $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, y luego por axioma de extensión $\{a, b\} = \{a, d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

$(\Leftarrow)$ Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Definiciones básicas

Ejercicio

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a,b) = \{a, \{b\}\}$$

¿Se cumple la propiedad anterior?

R: No. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{array}{ccccc} (a,b) & = & (\{x\}, y) & = & \{\{x\}, \{y\}\} \\ (c,d) & = & (\{y\}, x) & = & \{\{y\}, \{x\}\} \end{array}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuadruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una n-**tupla** como:

$$(a_1, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Definiciones básicas

Definición

Dados dos conjuntos A y B, definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejercicio

Defina el producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

Respuesta: $A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$
Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que sum es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

Definiciones básicas

La *aridad* de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación n-aria.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

N°alumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B.

Ejercicio

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B?

Respuesta: Hay tantas como el tamaño del conjunto potencia de $A \times B$. Si A y B son finitos y de tamaño m y n respectivamente, entonces hay $2^{m \cdot n}$ relaciones binarias posibles.

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A, diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de "potencia":

$$A \times \overset{(n-2 \text{ veces})}{\cdots} \times A = A^n$$

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$<\subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in < \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1,3) \in < \qquad (10,4) \notin < \qquad (7,7) \notin <$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: ¿$(3,17) \in <$?

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a, b) \in R$
- $R(a, b)$
- aRb
  - Si no están relacionados, podemos escribir $a \not R b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \not< 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación *infija*.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo $=$ ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo $=$ usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Ejemplo

La relación *divide a*, denotada por $|$, sobre los naturales sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a:

$$a|b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = ka.$$

$$3|9 \qquad 18|72 \qquad 7 \not| 9$$

Ejemplo

La relación *equivalencia módulo* n, denotada por $\equiv_n$, sobre los naturales, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $|a-b|$ es múltiplo de n:

$$a \equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a-b| = kn.$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4$$

Observación: de ahora en adelante trabajaremos con relaciones binarias sobre un conjunto, a las que nos referiremos simplemente como relaciones. Cuando sea de otra manera se explicitará.

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Refleja** si para cada $a \in A$ se tiene que $R(a, a)$.
- **Irrefleja** si para cada $a \in A$ no se tiene que $R(a, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto que $R(b, a)$.
- **Antisimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Transitiva** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa** si para cada $a, b \in A$, se tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Ejercicios

1. Demuestre que la relación $\mid$ es refleja, antisimétrica y transitiva.
2. Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Reflexividad: Ejercicio.

Antisimetría: Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$. Si $a|b$, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = k_1 \cdot a$. Similarmente, si $b|a$ sabemos que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a = k_2 \cdot b$. Reemplazando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $b = k_1 \cdot k_2 \cdot b$. Como la relación $|$ está definida sobre los naturales sin el 0, podemos dividir por b y obtenemos que $1 = k_1 \cdot k_2$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, necesariamente se debe cumplir que $k_1 = k_2 = 1$, y aplicando esta igualdad en $b = k_1 \cdot a$, obtenemos que $b = a$.

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Transitividad: Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$. Aplicando la definición, sabemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 \cdot a$ y $c = k_2 \cdot b$. Aplicando la primera igualdad en la segunda, obtenemos que $c = k_2 \cdot k_1 \cdot a$, y por lo tanto existe $k_3 = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c = k_3 \cdot a$, de donde concluimos que $a|c$. $\square$

Ejercicio

Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Reflexividad: Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n x$. Por definición, debemos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x| = k \cdot n$. Como $x - x = 0$ para todo natural, podemos tomar $k = 0$ y luego se cumple la igualdad anterior, con lo que mostramos que $x \equiv_n x$.

Simetría: Debemos demostrar que si $x \equiv_n y$, entonces $y \equiv_n x$. Por definición, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| = k \cdot n$. Como $|x - y| = |y - x|$, tenemos que $|y - x| = k \cdot n$, y luego por definición de equivalencia módulo n, se cumple que $y \equiv_n x$.

Ejercicio

Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Transitividad: Dados x, y, z tales que $x \equiv_n y$ e $y \equiv_n z$, debemos demostrar que $x \equiv_n z$. Usando la definición, esto es equivalente a demostrar que si $|x - y| = k_1 \cdot n$ y $|y - z| = k_2 \cdot n$, entonces $|x - z| = k \cdot n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Asumiremos que $x \neq y \neq z$ (el resultado es trivial de otra manera). Supongamos ahora que $x - y > 0$ e $y - z > 0$ (los demás casos son análogos). Entonces, podemos escribir

$$x - y = k_1 \cdot n$$
$$y - z = k_2 \cdot n$$

y sumando ambas igualdades, obtenemos que $x - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n$. Notemos que $x - z > 0$ también. Por lo tanto, si tomamos $k = k_1 + k_2$, tenemos que $|x - z| = k \cdot n$, concluyendo entonces que $x \equiv_n z$. $\square$

Las propiedades de las relaciones se pueden usar para definir tipos de relaciones. Un tipo muy importante es el siguiente:

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Ya mostramos una relación de equivalencia, ¿cierto?

Ejercicio

Demuestre que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall\sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

Demostración: Debemos demostrar que la equivalencia lógica es refleja, simétrica y transitiva.

Reflexividad: Debemos demostrar que para toda fórmula $\varphi \in L(P)$, se cumple que $\varphi \equiv \varphi$. Si tomamos cualquier valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición obtenemos que $\varphi \equiv \varphi$.

Simetría: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa[1], tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

Transitividad: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$ y $\psi \equiv \theta$, entonces $\varphi \equiv \theta$. Por definición, tenemos que para todo σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ y $\sigma(\psi) = \sigma(\theta)$. Aplicando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $\sigma(\varphi) = \sigma(\theta)$, y luego por definición concluimos que $\varphi \equiv \theta$. $\square$

[1] Demuestre esto desde la definición de teoría de conjuntos.

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$. La **clase de equivalencia** de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

Si la relación se entiende del contexto, sólo escribiremos $[x]$.

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

R: Cada clase de equivalencia contendrá a todas las fórmulas que son lógicamente equivalentes entre sí. Las fórmulas que son lógicamente equivalentes tienen la misma tabla de verdad, por lo que podemos pensar que cada clase de equivalencia representa a una posible tabla de verdad. Por lo tanto, si tenemos un conjunto P de variables proposicionales de tamaño n, la cantidad de clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia lógica es 2^{2^n}.

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Teorema

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.

Demostración: Como $\sim$ es una relación de equivalencia, es refleja. Por lo tanto, $\forall x \in A, x \sim x$. Luego, por definición de una clase de equivalencia, tenemos que $\forall x \in A, x \in [x]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

$(\Rightarrow)$: Suponiendo que $x \sim y$, debemos demostrar que $[x] = [y]$. Esto significa que debemos demostrar que $[x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$:

a. Por demostrar que $[x] \subseteq [y]$. Por definición, $[x] = \{z \mid x \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es simétrica, y luego $y \sim x$. Ahora, también es cierto que $\sim$ es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [x], y \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [x], z \in [y]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

b. Por demostrar que $[y] \subseteq [x]$. Por definición, $[y] = \{z \mid y \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [y], x \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [y], z \in [x]$.

$(\Leftarrow)$: Suponiendo que $[x] = [y]$, debemos demostrar que $x \sim y$. Sea $z \in [x]$. Por definición de clases de equivalencia: $x \sim z$ (1). Como $[x] = [y]$, sabemos que $z \in [y]$, y por lo tanto $y \sim z$, y por simetría $z \sim y$ (2). Finalmente, por transitividad entre (1) y (2), concluimos que $x \sim y$.

Teorema

3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Por contrapositivo, supongamos que $[x] \neq [y]$. Como la intersección de ambas clases de equivalencia no es vacía, existe z tal que $z \in [x]$ y $z \in [y]$. Aplicando la definición de clase de equivalencia, tenemos que $x \sim z$ (1) e $y \sim z$, y por simetría se cumple que $z \sim y$ (2). Por transitividad entre (1) y (2) se tiene que $x \sim y$, y por la parte 2 del teorema se cumple que $[x] = [y]$. Por lo tanto, queda demostrado el resultado.

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El **conjunto cuociente** de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim\ = \{[x] \mid x \in A\}$$

Ejercicio

Determine $\mathbb{N}/\equiv_4$.

$$\mathbb{N}/\equiv_4\ = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

Definición

El **índice** de una relación de equivalencia es la cantidad de clases de equivalencia que induce. Es decir, la cantidad de elementos de su conjunto cuociente.

Ejercicio

¿Cuál es el índice de $\equiv_4$?

Como $\mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}$, el índice de $\equiv_4$ es 4.

Definición

Sea A un conjunto cualquiera, y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de A ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$). Diremos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si cumple que:

1. $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$.

Ejercicio

Dé ejemplos de particiones de $\mathbb{N}$.

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración: Debemos demostrar que $A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A. Para esto demostraremos las tres propiedades que debe cumplir según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\sim$, $X \neq \varnothing$: por teorema anterior, sabemos que $\forall x \in A$, $x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\!\sim$ es una partición de A.

2. $\bigcup A/\!\sim\, = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
   - $\bigcup A/\!\sim\, \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\!\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
   - $A \subseteq \bigcup A/\!\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\!\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\!\sim$.
3. $\forall X, Y \in A/\!\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: Todos los conjuntos en $A/\!\sim$ son clases de equivalencia, y por lo tanto por teorema anterior esta propiedad se cumple.

Algo muy interesante es que lo inverso también se cumple:

Teorema

Si $\mathcal{S}$ es una partición cualquiera de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A.

Un elemento x estará relacionado con y si ambos pertenecen al mismo conjunto de la partición.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.

Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

Construcción de conjuntos

Una de las aplicaciones más importantes de las relaciones de equivalencia es la definición de nuevos conjuntos. Lo que haremos será:

- Tomar un conjunto ya conocido (¿por ejemplo?).
- Calcular su conjunto cuociente respecto a alguna relación de equivalencia.
- Nombrar al conjunto y sus elementos.
- Definir operaciones sobre el nuevo conjunto, basándonos en los operadores del conjunto original.

Construcción de conjuntos

Tomemos un conjunto y una relación de equivalencia que ya hayamos visto.

Definición

El conjunto de los números naturales módulo 4 será el conjunto cuociente de $\mathbb{N}$ respecto a $\equiv_4$:

$$\mathbb{N}_4 = \mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}.$$

¿Cómo definimos la suma módulo 4?

$$[i] +_4 [j] = [i + j]$$

Ejercicio

Calcule $[3] +_4 [2]$ y $[1] +_4 [3]$.

$[3] +_4 [2] = [3 + 2] = [5] = [1]$ $\qquad$ $[1] +_4 [3] = [1 + 3] = [4] = [0]$

Ejercicio

Defina la multiplicación módulo 4 y calcule $[2] \cdot_4 [3]$.

$$[i] \cdot_4 [j] = [i \cdot j]$$

$[2] \cdot_4 [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$

Ejercicio

Defina la multiplicación módulo 4 y calcule $[2] \cdot_4 [3]$.

Ahora podríamos renombrar los elementos de $\mathbb{N}_4$:

$$[0] \leftrightarrow 0 \quad [1] \leftrightarrow 1 \quad [2] \leftrightarrow 2 \quad [3] \leftrightarrow 3$$

Y ocupar simplemente $+$ y $\cdot$, obteniendo un nuevo conjunto con operadores bien definidos:

$$\mathbb{N}_4 = \{0, 1, 2, 3\} \text{ con operadores } + \text{ y } \cdot$$

tal que, por ejemplo, $1 + 1 = 2$, $3 + 3 = 2$, $3 \cdot 3 = 1$, etc.

Una relación de equivalencia fundamental

Veamos una relación de equivalencia más interesante.

Definición

La relación $\downarrow$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como

$$(m, n) \downarrow (r, s) \Leftrightarrow m + s = n + r.$$

Ejercicio

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

Reflexividad: Dado un par (m, n), es claro que $m + n = m + n$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(m, n) \downarrow (m, n)$.

Simetría: Dados dos pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$, por definición de $\downarrow$ se tiene que $m + s = n + r$. Es claro que $r + n = s + m$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(r, s) \downarrow (m, n)$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

<u>Transitividad:</u> Dados tres pares tales que $(m,n) \downarrow (r,s)$ y $(r,s) \downarrow (t,u)$, debemos demostrar que $(m,n) \downarrow (t,u)$. Por definición de $\downarrow$, tenemos que $m + s = n + r$ (1) y $r + u = s + t$ (2). Despejando r en (2), obtenemos que $r = s + t - u$, y reemplazando esto último en (1), se tiene que $m + s = n + s + t - u$. Reordenando, obtenemos que $m + u = n + t$, y por definición de $\downarrow$, concluimos que $(m,n) \downarrow (t,u)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.

Una relación de equivalencia fundamental

¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por $\downarrow$?

$$
\begin{gathered}
[(0,0)] = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\} \\
[(0,1)] = \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\} \\
[(1,0)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\} \\
[(0,2)] = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\} \\
[(2,0)] = \{(2,0),(3,1),(4,2),\ldots\} \\
\vdots \\
[(0,n)] = \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),\ldots\} \\
[(n,0)] = \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),\ldots\} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

¿Qué podemos hacer ahora?

Definición

El conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cuociente de $\mathbb{N}^2$ respecto a $\downarrow$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\!\downarrow\, = \{[(0,0)], [(0,1)], [(1,0)], [(0,2)], [(2,0)], \ldots\}.$$

¿Qué representan las clases de equivalencia?

- $[(0,0)]$ será el entero 0.
- $[(0,i)]$ será el entero i.
- $[(i,0)]$ será el entero $-i$.

Una relación de equivalencia fundamental

Renombramos los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{gathered}
[(0,0)] \leftrightarrow 0 \\
[(0,1)] \leftrightarrow 1 \\
[(1,0)] \leftrightarrow -1 \\
[(0,2)] \leftrightarrow 2 \\
[(2,0)] \leftrightarrow -2 \\
\vdots \\
[(0,i)] \leftrightarrow i \\
[(i,0)] \leftrightarrow -i \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

Y obtenemos entonces el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Importante: "-1" es sólo un **nombre** para la clase de equivalencia $[(1, 0)]$. El símbolo "$-$" no significa nada por sí solo para nosotros.

Intentemos definir los operadores $+_{\downarrow}$ y $\cdot_{\downarrow}$, teniendo en cuenta que deben "captar la estructura" de los números enteros.

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

$[(m,n)] +_{\downarrow} [(r,s)] = [(m+r, n+s)]$

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

Definición

$[(m,n)] \cdot_{\downarrow} [(r,s)] = [(m \cdot s + n \cdot r, m \cdot r + n \cdot s)]$

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

$7 +_{\downarrow} -5 = [(0,7)] +_{\downarrow} [(5,0)] = [(0+5, 7+0)] = [(5,7)] = [(0,2)] = 2$

$-18 +_{\downarrow} 4 = [(18,0)] +_{\downarrow} [(0,4)] = [(18+0, 0+4)] = [(18,4)] = [(14,0)]$
$= -14$

$-3 +_{\downarrow} -6 = [(3,0)] +_{\downarrow} [(6,0)] = [(3+6, 0+0)] = [(9,0)] = -9$

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

$$-3 \cdot_{\downarrow} -4 = [(3,0)] \cdot_{\downarrow} [(4,0)] = [(3 \cdot 0 + 0 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0)] = [(0,12)] = 12$$

$$3 \cdot_{\downarrow} 3 = [(0,3)] \cdot_{\downarrow} [(0,3)] = [(0 \cdot 3 + 3 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3)] = [(0,9)] = 9$$

Finalmente, podemos renombrar las operaciones anteriores, y obtenemos el conjunto de los números enteros con sus dos operaciones habituales:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\} \text{ con las operaciones } + \text{ y } \cdot.$$

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de orden parcial** si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Conocemos muchas relaciones de orden parcial, ¿cierto?

Generalmente denotaremos una relación de orden parcial con el símbolo $\preceq$.

- $(x, y) \in \preceq \quad x \preceq y$.
- x es menor (o menor-igual) que y.

Si $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre A, diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Ejemplos

1. Los pares $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son órdenes parciales.
2. El par $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ es un orden parcial.
3. Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Ejercicio

Demuestre los ejemplos anteriores.

Ejercicio

Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Demostración: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$.

Reflexividad: Por definición de subconjunto, para todo conjunto X se cumple que $X \subseteq X$, por lo que la relación es refleja.

Antisimetría: Por definición de igualdad de conjuntos, si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, se cumple que $X = Y$, y entonces la relación es antisimétrica.

Transitividad: Por definición de subconjunto:

- Si $X \subseteq Y$, entonces $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Y$.
- Si $Y \subseteq Z$, entonces $\forall y \in Y$ se tiene que $y \in Z$.

Combinando las dos aseveraciones, obtenemos que $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Z$, y por lo tanto $X \subseteq Z$. Concluimos que la relación es transitiva.

¿Por qué orden *parcial*?

Definición

Una relación $\preceq$ sobre A es una **relación de orden total** (o lineal) si es una relación de orden parcial y además es conexa.

¿Qué quiere decir esto?

$$\text{Para todo par } x, y \in A, \text{ se tiene que } x \preceq y \text{ o } y \preceq x$$

Similarmente al caso anterior, diremos que un par $(A, \preceq)$ es un orden total.

Al hablar de órdenes parciales o totales, ¿qué estamos diciendo sobre el conjunto?

- Implícitamente, establecemos cierta *estructura* sobre él.
- Nos gustaría entonces hablar de elementos menores que, mayores que, mínimos, máximos. . .

Definición

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Definición

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ y
$S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

- 1 es cota inferior, pues $1|2$, $1|3$, etc.
- 2 no es cota inferior, pues $2 \not| 3$.
- 60 es cota superior, pues $2|60$, $3|60$, $\dots$, $20|60$.
  Nótese que 60 es el mínimo común múltiplo de S.
- También cualquier múltiplo de 60 es cota superior, por ejemplo 120.
- Elementos minimales: $2, 3, 5$, pues ningún elemento en S además de ellos mismos los divide.
- Elementos maximales: $15, 20$, pues no dividen a ningún elemento en S además de ellos mismos.
- No tiene mínimos ni máximos, pues ninguna cota inferior o superior pertenece a S.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \subseteq)$ y $S = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3,4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

- $\{1\}$ es cota inferior, elemento minimal y mínimo.
- $\{1,2,3,4\}$ es cota superior, elemento maximal y máximo.
- $\varnothing$ también es cota inferior.
- No hay más cotas superiores, pues el orden está definido sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

- En el orden $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ podemos tomar $S = \{2, 3, 5\}$. Como no se dividen entre sí, son todos minimales y maximales.
- En el orden $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ podemos tomar $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Como ninguno de los conjuntos en S es subconjunto de ninguno de los demás, son todos minimales y maximales.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

Demuestre el resultado análogo para el máximo.

Esto nos permite hablar de **el** mínimo o **el** máximo, que denotaremos por $min(S)$ y $max(S)$ respectivamente.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

<u>Demostración:</u> Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x, y \in S(x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

Por demostración directa, supongamos que S tiene dos mínimos s_1, s_2. Como son mínimos, $s_1, s_2 \in S$, y también $s_1 \preceq s_2$ y $s_2 \preceq s_1$. Como $\preceq$ es una relación de orden, es antisimétrica, y luego $s_1 = s_2$,. Por lo tanto, si hay un mínimo, este es único.

La demostración de unicidad del máximo es completamente análoga.

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un **ínfimo** de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior.

Análogamente se define el supremo de un conjunto.

Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

Un ejemplo típico son los intervalos abiertos en el orden $(\mathbb{R}, \leq)$. Por ejemplo, $(0, 1)$ no tiene mínimo pero sí infimo, 0; y no tiene máximo pero sí supremo, 1.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Esto nos permite hablar de **el** supremo o **el** ínfimo, que denotaremos por $sup(S)$ e $inf(S)$ respectivamente.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

Demostración: de manera similar a la demostración del mínimo, supongamos que S tiene dos supremos s_1 y s_2. Por definición de supremo, ambos son cotas superiores de S.
Como s_1 es supremo, para toda cota superior s de S se tiene que $s_1 \preceq s$, pues el supremo es la menor cota superior, y en particular, $s_1 \preceq s_2$, pues s_2 es cota superior.
Realizando un razonamiento análogo, obtenemos también que $s_2 \preceq s_1$, y como $\preceq$ es antisimétrica, se tiene que $s_1 = s_2$. Concluimos entonces que si existe un supremo, este es único.

La demostración de unicidad del ínfimo es completamente análoga.

Relaciones de orden

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- En los órdenes $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ no existen.
- En $(\mathbb{Q}, \leq)$ sí, por ejemplo $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Este conjunto está acotado superiormente (por ejemplo por 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Uno podría estar tentado de decir que el supremo es $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. El supremo debe pertenecer al conjunto sobre el cual está definido el orden.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Este se dice **superiormente completo** si para cada $S \subseteq A$ no vacío, si S tiene cota superior, entonces tiene supremo.

De manera similar definimos el concepto de ser **inferiormente completo**.

Dado el ejemplo anterior, tenemos que $(\mathbb{Q}, \leq)$ no es superiormente completo. Una observación importante es que tampoco es inferiormente completo: basta tomar $S' = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \geq 2\}$.

Esto motiva el siguiente teorema:

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Demostración: Demostraremos la dirección hacia la derecha; la otra dirección es análoga y se deja como ejercicio.

Supongamos que $(A, \preceq)$ es superiormente completo; es decir, $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado superiormente, tiene supremo. Queremos demostrar que también es inferiormente completo; es decir, $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado inferiormente, tiene ínfimo. Sea entonces $S \subseteq A$ no vacío. Supongamos que está acotado inferiormente. Demostraremos que tiene ínfimo.

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Como S está acotado inferiormente, tiene al menos una cota inferior. Tomemos el siguiente conjunto:

$$S_{ci} = \{a \in A \mid a \text{ es cota inferior de } S\}$$

Es decir, S_{ci} es el conjunto de todas las cotas inferiores de S. Es claro que $S_{ci} \neq \varnothing$. Por otra parte, como todos los elementos de S_{ci} son cotas inferiores de S, por definición de cota inferior se cumple que

$$\forall x \in Sci \quad \forall y \in S \quad x \preceq y$$

de donde es claro que S_{ci} está acotado superiormente (por todos los elementos de S). Luego, como $(A, \preceq)$ es superiormente completo, S_{ci} tiene supremo, $sup(S_{ci})$, el que por definición es una cota superior de S_{ci}.

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ahora, como todos los elementos de S son cotas superiores de S_{ci}, se cumple que

$$\forall y \in S \quad sup(S_{ci}) \preceq y$$

pues el supremo es la menor cota superior. De esto último se deduce que $sup(S_{ci})$ es una cota inferior de S, y como es una cota superior de S_{ci}, es la mayor cota inferior de S, es decir, es el ínfimo de S:

$$inf(S) = sup(S_{ci})$$

Concluimos entonces que $(A, \preceq)$ es inferiormente completo.

Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

25 de septiembre de 2023