



## Ayudantía 4

8 de septiembre

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

### Resumen

#### ■ ¿Qué es la lógica de predicados?

La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado  $P(x)$  es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Interpretadores: sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula e  $I$  una interpretación de los símbolos en  $\varphi$ . Diremos que  $I$  satisface  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $I(\text{dom})$ :

$$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  es verdadero al interpretar cada símbolo en  $\varphi$  según  $I$ .

#### ■ Conceptos importantes de lógica de predicados:

- Valuación: la valuación  $P(a)$  es el valor de verdad del predicado  $P(x)$  en  $a$ .
- Predicado n-ario  $P(x_1, \dots, x_n)$ : es una afirmación con  $n$  variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Cuantificadores:  $\forall$  (para todo) o  $\exists$  (existe).
- Equivalencia lógica: Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  y  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que  $\varphi$  y  $\psi$  son lógicamente equivalentes:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación  $I$  y para todo  $a_1, \dots, a_n$  en  $I(\text{dom})$  se cumple:

$$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula  $\varphi$  es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas  $\Sigma$ :

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación  $I$  y  $a_1, \dots, a_n$  en  $I(\text{dom})$  se cumple que: si  $I \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$  entonces  $I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ .

## Ejercicio 1 — Equivalencia lógica

Sea  $F$  un predicado ternario. Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente equivalencia lógica

$$\exists x. \forall y. \forall z. F(x, y, z) \equiv \forall x. \exists y. \forall z. \neg F(x, y, z)$$

## Ejercicio 2 — Modelación

Los mobs son entidades que simulan criaturas en el juego Discreticraft. Estos poseen diferentes naturalezas e interactúan entre sí de acuerdo con ellas. Para modelar estas interacciones, considere los siguientes símbolos de predicado:  $P(x), N(x), H(x), A(x, y), M(x, y)$  y  $x = y$ .

Además, considere la interpretación  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I}(\text{dom}) := \text{mobs de Discreticraft.}$$

$$\mathcal{I}(P(x)) := x \text{ es de naturaleza pacífica.}$$

$$\mathcal{I}(N(x)) := x \text{ es de naturaleza neutral.}$$

$$\mathcal{I}(H(x)) := x \text{ es de naturaleza hostil}$$

$$\mathcal{I}(A(x)) := x \text{ ataca a } y.$$

$$\mathcal{I}(M(x)) := x \text{ le tiene miedo a } y.$$

$$\mathcal{I}(x = y) := x \text{ es el mismo mob que } y.$$

En otras palabras, para algún mob  $m \in \mathcal{I}(\text{dom})$  se tiene que  $I \models P(m)$  si, y solo si,  $m$  es pacífico. Análogamente, se definen los otros predicados.

En el caso de la igualdad, esta siempre funciona como la igualdad y no tiene otra interpretación. Es decir, para todo  $m_1, m_2 \in \mathcal{I}(\text{dom})$  se tiene que  $I \models (m_1 = m_2)$  si, y solo si,  $m_1$  y  $m_2$  son exactamente el mismo mob. Además, diremos que la naturaleza de un mob corresponde a si este es pacífico, neutral u hostil.

Defina la siguiente afirmación en lógica de predicados, explicando brevemente su correctitud.

“Existe un mob hostil tal que todos los mobs a los que él les tiene miedo, le tienen miedo a algún mob pacífico en común.”

## Ejercicio 3 — Resolución

Sea  $R(.,.)$  un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas  $\Sigma$  tal que,

$$\Sigma = \{\forall x \exists y (R(x, y)), \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\}$$

y sea  $\phi = \forall x (R(x, x))$ . Demuestre que  $\Sigma \models \phi$ .

## Ejercicio 4 (Propuesto)— Modelación

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un rumor que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados  $R(x)$ ,  $C(x, y)$ ,  $x = y$ . Además, considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned} I(\text{dom}) &:= \text{Personas} \\ I(R(x)) &:= x \text{ conoce el rumor} \\ I(C(x, y)) &:= x \text{ le contó el rumor a } y \\ I(x = y) &:= x \text{ es igual a } y \text{ (esto es, exactamente el mismo)} \end{aligned}$$

En otras palabras, para alguna persona  $p$  del dominio se tiene que  $R(p) = 1$  si, y solo si,  $p$  conoce el rumor. Análogamente, para personas  $p$  y  $q$  se tiene que  $C(p, q) = 1$  si, y solo si,  $p$  le contó el rumor a  $q$ . Por último, la igualdad  $x = y$  es usada para comparar dos personas y saber si son la misma persona o no.

Usando lógica de predicados, uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del rumor. Por ejemplo, la afirmación “existe una persona que conoce el rumor y otra que no” se puede definir con la fórmula  $\exists x. \exists y. (R(x) \wedge \neg R(y))$ .

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados.

- (a) Si una persona conoce el rumor y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el rumor.
- (b) Nadie puede conocer el rumor y habérselo contado a sí mismo.
- (c) Existe un “chismoso original”, o sea alguien que conoce el rumor pero que nadie se lo contó
- (d) No existen “triángulos de chismosos”, o sea, tres personas distintas que se contaron el rumor circularmente.