Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

23 de Septiembre de 2022

Profesores: Gabriel Diéguez - Nicolás Alvarado - Sebastián Bugedo - Bernardo Barías

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada. **Esto solo aplica a preguntas completas**.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Lógica de predicados

a) **(3 ptos.)** En clases vimos que

$$\forall x(Q(x) \vee P(x)) \not\equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

¿Es cierta la siguiente afirmación?

$$\forall x \forall y(Q(x) \vee P(y)) \equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

Demuestre o dé un contraejemplo.

b) **(3 ptos.)** Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

Solución

a) La afirmación es cierta, por lo que demostraremos que dada una interpretación $\mathcal{I}$, se tiene que

$$\mathcal{I} \models \forall x \forall y (Q(x) \vee P(y)) \text{ si y solo si } \mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{I} \models \forall x \forall y (Q(x) \vee P(y))$. Mostraremos que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Consideremos dos casos:

- $\mathcal{I} \models \forall x Q(x)$: en este caso es claro que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$.
- $\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x)$: en este caso tenemos que existe $a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que $\mathcal{I} \not\models Q(a)$. Como $\mathcal{I} \models \forall x \forall y (Q(x) \vee P(y))$, en particular se tiene que cumplir que $\mathcal{I} \models \forall y (Q(a) \vee P(y))$, y entonces necesariamente $\mathcal{I} \models \forall y P(y)$. Como y es una variable cuantificada, podemos cambiarla por x, por lo que $\mathcal{I} \models \forall x P(x)$, de donde concluimos que $\mathcal{I} \models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$.

($\Leftarrow$) Por contrapositivo, supongamos que $\mathcal{I} \not\models \forall x \forall y (Q(x) \vee P(y))$. Mostraremos que $\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \not\models \forall x \forall y (Q(x) \vee P(y)) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \models \neg\left(\forall x \forall y (Q(x) \vee P(y))\right) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \models \exists x \exists y (\neg Q(x) \wedge \neg P(y))
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que existen $a, b \in \mathcal{I}(dom)$ tales que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models \neg Q(a) \wedge \neg P(b) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \models \neg Q(a) \text{ y } \mathcal{I} \models \neg P(b)
\end{aligned}$$

y por generalización existencial:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models \exists x \neg Q(x) \text{ y } \mathcal{I} \models \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \models \exists x \neg Q(x) \wedge \exists x \neg P(x) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \not\models \neg(\exists x \neg Q(x) \wedge \exists x \neg P(x)) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{I} \not\models \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)
\end{aligned}$$

b) ($\Rightarrow$) Dado que $\Sigma \models \varphi$, demostraremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Por contrapositivo, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, y luego existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Esto implica que $\mathcal{I} \models \Sigma$ y que $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, y por lo tanto $\mathcal{I} \models \Sigma$ y $\mathcal{I} \not\models \varphi$, de donde concluimos que $\Sigma \not\models \varphi$.

($\Leftarrow$) Dado que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, demostraremos que $\Sigma \models \varphi$. Debemos demostrar que dada una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$, se tiene que $\mathcal{I} \models \varphi$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\mathcal{I} \models \Sigma$, necesariamente $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, y luego $\mathcal{I} \models \varphi$. Concluimos entonces que $\Sigma \models \varphi$.

Pauta (6 pts.)

a) 1.5 pts. por demostrar cada dirección de la equivalencia lógica. Si la respuesta es que la afirmación es falsa el puntaje es 0.

b) 1.5 pts. por cada dirección.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Conjuntos y producto cartesiano

a) Sean A, B y C conjuntos no vacíos.

¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.

1. **(2 ptos.)** $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
2. **(2 ptos.)** $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

b) **(2 ptos.)** Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como

$$A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que

$$\text{Si } A \oplus C = B \oplus C \text{ entonces } A = B.$$

Solución

a) 1. ($\Leftarrow$) Dado que $A = B$, es claro que $A \times B = A \times A$. Similarmente, también se cumple que $A \times A = B \times A$. Por lo tanto, $A \times B = B \times A$.

($\Rightarrow$) Dado que $A \times B = B \times A$, demostraremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:

($\subseteq$) Sea $a \in A$. Como $B \neq \varnothing$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in A \times B$. Como $A \times B = B \times A$, tenemos que $(a, b) \in B \times A$, y por lo tanto $a \in B$.

($\supseteq$) Análoga a la anterior.

2. Mostraremos la igualdad demostrando ambas contenciones:

- $\underline{A \times (B \backslash C) \subseteq (A \times B) \backslash (A \times C)}$:

  Sea $(x, y) \in A \times (B \backslash C)$. Por definición de producto cartesiano, sabemos que $x \in A$ y que $y \in B \backslash C$, y por definición de diferencia de conjuntos, sabemos que $y \in B$ e $y \notin C$. Luego, $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin A \times C$, y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \backslash (A \times C)$.

- $(A \times B) \backslash (A \times C) \subseteq A \times (B \backslash C)$:

  Sea $(x, y) \in (A \times B) \backslash (A \times C)$. Por definición de diferencia de conjuntos, sabemos que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin A \times C$, y por definición de producto cartesiano, sabemos que $x \in A$ e $y \in B$. Más aún, necesariamente $y \notin C$ (pues en otro caso $(x, y) \in A \times C$), y entonces $y \in B \backslash C$. Concluimos que $(x, y) \in A \times B \backslash C$.

b) Dado que $A \oplus C = B \oplus C$, demostraremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:

($\subseteq$) Sea $x \in A$. Consideremos dos casos:

- $x \notin C$: tenemos que $x \in A \backslash C$, y entonces $x \in A \backslash C \cup C \backslash A$. Luego, por definición de diferencia simétrica, se cumple que $x \in A \oplus C$, y entonces $x \in B \oplus C$. Esto significa que $x \in B \backslash C \cup C \backslash B$, y como $x \notin C$, necesariamente $x \in B \backslash C$. Concluimos que $x \in B$.
- $x \in C$: tenemos que $x \notin A \backslash C$ y que $x \notin C \backslash A$. Luego, $x \notin A \oplus C$, y entonces $x \notin B \oplus C$. Por definición de diferencia simétrica, esto último implica que $x \notin C \backslash B$, y como $x \in C$, necesariamente $x \in B$.

($\supseteq$) Análoga a la anterior.

Pauta (6 pts.)

a) 1.
   - 0.5 ptos. por dirección $\Leftarrow$.
   - 1.5 ptos. por dirección $\Rightarrow$ (0.75 por cada contención).

   2. 1 pto. por cada contención.

b) 1 pto. por cada contención.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 - Lógica proposicional

Sea M un mapa conformado por n países. Decimos que M es k-coloreable si se pueden pintar todos los países de M con k colores sin que ningún par de países adyacentes tenga el mismo color. En esta pregunta, debe construir una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que M es k-coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

a) **(1 pto.)** Defina variables proposicionales adecuadas. Mencione brevemente su significado.

b) **(3 ptos.)** Construya fórmulas adecuadas para modelar las restricciones del problema.

c) **(2 ptos.)** Demuestre que φ es satisfacible si y solo si M es k-coloreable.

Solución

a) Diremos que M consiste de un conjunto de países $Paises = \{1, \ldots, n\}$ y un conjunto de pares de países adyacentes $A = \{(i,j), (k,m), \ldots\} \subseteq Paises^2$. Tenemos además una lista de colores $C = \{1, \ldots, k\}$. Definimos las siguientes variables proposicionales:

- Para cada $(i,j) \in Paises^2$ tendremos una variable proposicional p_{ij} que será cierta si y solo si $(i,j) \in A$; es decir, si i y j son adyacentes.
- Para cada $(i,x) \in Paises \times C$ tendremos una variable proposicional c_{ix} que será cierta si y solo si el país i está pintado del color x.

b)
- A cada país se le asigna un único color:

$$\varphi_C = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\left(\bigvee_{x=1}^{k} c_{ix} \right) \wedge \bigwedge_{x=1}^{k} \left(c_{ix} \to \left(\bigwedge_{\substack{y=1 \\ y \neq x}}^{k} \neg c_{iy} \right) \right) \right)$$

- Dos países adyacentes tienen colores distintos:

$$\varphi_D = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(p_{ij} \to \left(\bigwedge_{x=1}^{k} (c_{ix} \to \neg c_{jx}) \right) \right)$$

- Finalmente inicializamos el mapa (es decir, indicamos cuáles países son adyacentes y cuáles no):

$$\varphi_M = \bigwedge_{(i,j) \in A} p_{ij} \wedge \bigwedge_{\substack{(i,j) \in Paises^2 \\ (i,j) \notin A}} \neg p_{ij}$$

Así, definimos $\varphi = \varphi_C \wedge \varphi_D \wedge \varphi_M$.

c) ($\Rightarrow$) Supongamos que M es k-coloreable. Entonces, existe una asignación de únicos k colores para cada país tal que los países adyacentes no están pintados del mismo color. Construimos una valuación σ como $\sigma(p_{ij}) = 1$ si el país i es adyacente al país j, 0 si no; y $\sigma(c_{ix}) = 1$ si el país i es de color x, 0 si no. Luego, basta chequear que $\sigma(\varphi) = 1$:

- $\sigma(\varphi_C)$: para cada país i, se debe cumplir que $\sigma(c_{ix}) = 1$ para uno y solo un $x \in C$, por cómo construimos σ. Luego, es claro que $\sigma(\varphi_C) = 1$.
- $\sigma(\varphi_D)$: para cada combinación de países i, j, sabemos que $\sigma(p_{ij}) = 1$ solo cuando los países son adyacentes. Entonces, como en φ_D tenemos una implicancia, solo nos preocuparemos de los pares de países adyacentes. En la parte de la derecha de la implicancia, sabemos que si por ejemplo $\sigma(c_{i1}) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(c_{j1}) = 0$, dado que construimos σ a partir de una k-coloración. Para las otras $k-1$ implicancias, sabemos que el lado izquierdo va a ser falso (por la fórmula φ_C), y por lo tanto todo el lado derecho se hace verdadero, y entonces $\sigma(\varphi_D) = 1$. El análisis para cuando i es de otro color es análogo.

- $\sigma(\varphi_M)$: por construcción de σ es claro que $\sigma(\varphi_M) = 1$, dado que la construimos precisamente como esta fórmula, asignando 1 a pares de países adyacentes y 0 a los que no.

Finalmente, como φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$, y entonces φ es satisfacible.

($\Leftarrow$) Supongamos que φ es satisfacible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$, y por construcción $\sigma(\varphi_C) = \sigma(\varphi_D) = \sigma(\varphi_M) = 1$. Usaremos esta valuación para colorear el mapa.

En primer lugar, como $\sigma(\varphi_C) = 1$, sabemos que $\forall i, \sigma(\bigvee_{x=1}^{k} c_{ix}) = 1$, y por lo tanto cada país tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(c_{i2}) = 1$, es decir, pintamos el país i de color 2. Como también se cumple que

$$\sigma\left(c_{i2} \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{y=1 \\ y\neq 2}}^{k} \neg c_{iy}\right)\right) = 1$$

necesariamente $\sigma(c_{iy}) = 0$ para todo color $y \neq 2$, y por lo tanto cada país tiene un único color.

En segundo lugar, como $\sigma(\varphi_M) = 1$, sabemos que si i, j son adyacentes en M, $\sigma(p_{ij}) = 1$, y si no lo son, $\sigma(p_{ij}) = 0$. Ahora, en $\sigma(\varphi_D) = 1$, solo nos interesa el primer caso (dado que en el segundo no podemos concluir nada de la implicancia). Tomemos entonces i, j adyacentes, y sin pérdida de generalidad supongamos que $\sigma(c_{i2}) = 1$. Como $\sigma(c_{i2} \rightarrow \neg c_{j2}) = 1\ \forall j$ adyacente a i, necesariamente $\sigma(c_{j2}) = 0$, y entonces los países adyacentes no pueden estar pintados del mismo color.

Concluimos que usando los colores asignados por φ a través de las variables c_{ix}, podemos k-colorear M.

Pauta (6 pts.)

a) 1 pto.

b) 1 pto. por cada fórmula.

c) 1 pto. por cada dirección.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 - Inducción

a) **(2 ptos.)** Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y sean $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre usando inducción que para todo natural $n \geq 2$ se cumple la *ley de De Morgan generalizada*:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

b) Un *alfabeto* Σ es un conjunto de símbolos finito, y una *palabra* $w = a_1 \dots a_n$ es una secuencia de símbolos tal que $a_i \in \Sigma$ para cada $1 \leq i \leq n$. En tal caso diremos que w tiene largo n. Además, si una palabra cumple que $a_1 \dots a_n = a_n \dots a_1$, es decir, se lee igual al revés y al derecho, decimos que es un *palíndromo*.

   1. **(2 ptos.)** Proponga una definición inductiva del conjunto PP_Σ de todas las palabras con símbolos de Σ que son palíndromos y además tienen largo par. *Observación:* la palabra de largo 0 se conoce como palabra vacía y se denota por ε.
   2. **(2 ptos.)** Demuestre que toda palabra $w \in PP_\Sigma$ cumple que $w = \varepsilon$ o w tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de Σ.

Solución

a) Demostraremos el resultado usando inducción simple sobre n.

- Caso base: para $n = 2$, se cumple la propiedad pues corresponde a la Ley de De Morgan estudiada en clases
$$(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$$
- Hipótesis inductiva: suponemos que para $n \geq 2$ se cumple que
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$
- Tesis inductiva: demostraremos que
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n+1} (A_i)^c$$

  Tenemos que
$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)^c &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right)^c && \text{(Asociatividad de la unión)}\\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c \cap (A_{n+1})^c && \text{(Ley de De Morgan)}\\
&= \left(\bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c\right) \cap (A_{n+1})^c && \text{(Hipótesis inductiva)}\\
&= \bigcap_{i=1}^{n+1} (A_i)^c && \text{(Asociatividad de la intersección)}
\end{aligned}$$

Con lo anterior, se demuestra la propiedad para todo $n \geq 2$.

b) 1. Dado un alfabeto Σ finito, definimos el conjunto PP_Σ como el menor conjunto tal que

- $\varepsilon \in PP_\Sigma$
- Si $w = a_1 \dots a_n \in PP_\Sigma$ y $a \in \Sigma$, entonces $aa_1 \dots a_n a \in PP_\Sigma$

2. Consideramos la siguiente propiedad de palabras con alfabeto Σ

$$P(w) \quad := \quad w \text{ es la palabra vacía o } w \text{ tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de } \Sigma.$$

Demostramos lo pedido por inducción estructural sobre las palabras de PP_Σ.

- Caso base: si $w = \epsilon$, es claro que $P(w)$ es verdadera, pues P es una disyunción donde se satisface su primer término.
- Hipótesis inductiva: suponemos que para una palabra $w \in PP_\Sigma$, la propiedad $P(w)$ es verdadera.
- Tesis inductiva: sea $a \in \Sigma$ un símbolo cualquiera del alfabeto. Demostraremos que $P(awa)$ es verdadera. Si $w = \varepsilon$, la palabra $awa = aa$ tiene dos símbolos iguales consecutivos. Si $w = a_1 \dots a_n$ no es vacía, entonces por hipótesis inductiva tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo. Si tales posiciones son i e $i+1$, la palabra $awa = aa_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n a$ mantiene los símbolos iguales consecutivos de w.

Lo anterior demuestra que P es verdadera para toda palabra en PP_Σ.

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 1.0 pto. por demostrar tesis.

b)
1. - 0.5 pts. por caso base.
   - 1.5 pto. por regla inductiva.
2. - 0.5 pts. por caso base.
   - 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
   - 1.0 pto. por demostrar tesis.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.