Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Una posible demostración consiste en primero considerar que A es finito tal que $|A| = n$, es claro que $|2^A| = 2^n$, como $n < 2^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ entonces, por principio del palomar, no existe una biyección entre A y 2^A en este caso.

Ahora supongamos que A es un conjunto infinito, por contradicción supongamos que existe una biyección $f : A \to 2^A$, definimos los conjuntos:

$$D = \{a \in A \mid a \in f(a)\}$$
$$\overline{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Como $A \neq \varnothing$, luego existe $a^* \in A$ tal que $f(a^*) = \overline{D}$. Ahora

- Si $a^* \in f(a^*)$ entonces $a^* \in \overline{D}$ y por lo tanto $a^* \notin f(a^*)$, lo que es una contradicción.
- Si $a^* \notin f(a^*)$ entonces $a^* \notin \overline{D}$ y por lo tanto $a^* \in f(a^*)$, lo que también es una contradicción.

Por lo tanto no existe una biyección entre A y 2^A.

Considerando lo anterior la distribución de puntaje es la siguiente

- **(1 punto)** Por el caso de cardinalidad finita (o el caso del conjunto vacío).
- **(2 puntos)** Por definir el conjunto D y el $\overline{D}$ correctamente.
- **(3 puntos)** Por llegar a las contradicciones mencionadas.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

La solución consiste en encontrar la función f:

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ es par} \\ n^2 & n \text{ no es par} \end{cases}$$

considerando que los prints toman tiempo constante se tiene,

$$T_A(n) = \begin{cases} c_1 n & n \text{ es par} \\ c_2 n^2 & n \text{ no es par} \end{cases}$$

Por tanto,
$T_A(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n)$ si n es par y $T_A(n) \leq \frac{1}{c_2} f(n)$ si n es impar
Tomando $C = \text{mín}\{1, c_1\}$, si n par o impar

$$C \cdot f(n) \leq T_A(n)$$

Entonces, existe K_1 y K_2 tal que

$$K1 = \text{mín}\{1, c_1, c_2\}$$

y,

$$K_2 = \text{máx}\{\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}\}$$

Si n_0=0, entonces $\forall n \geq n_0$ se tiene

$$K_1 f(n) \leq T_A(n) \leq K_2 f(n)$$

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(3 puntos)** Por encontrar función f
- **(3 puntos)** Por mostrar/explicar que es $\Theta(f)$.

Pregunta 2.2

Por contradicción, suponga $T_A(n) \in \Theta(f(n))$, es decir, existe n_0 y C_1, C_2 tal que:

$$C_1 f(n) \leq T_A(n) \leq C_2 f(n)$$

donde $f(n) = n^k$

- Caso 1: si $K \in (1, \infty)$, entonces si n es par

  $$C_1 n^k \leq T_A(n) \leq C_2 n$$

  es decir, $n^k \leq \frac{C_2}{C_1} n$, y por tanto existe C' y n_0 tal que $\forall n \geq n_0$

  $$n^k \leq C' n$$

  Ahora, sea $n' \geq \frac{C_2}{C_1}$ par, entonces

  $$\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 \leq n'^2 < n^k \leq \frac{C_2}{C_1} \cdot n$$

  es decir,

  $$n' < \frac{C_2}{C_1}$$

  lo cual es una contradicción.

- Caso 2: si $K \in (-\infty, 1]$, entonces si n es impar

$$T_A(n) = Cn \leq C_2 n^k$$

es decir, $n \leq \frac{C_2}{C} n^k$, y por tanto existe C' y n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ número impar,

$$n \leq C' n^k$$

Lo cual implica una contradicción siguiendo un procedimiento análogo al caso 1.

- **(2 puntos)** Por desarollo caso 1
- **(1 puntos)** Por explicar contradicción caso 1
- **(2 puntos)** Por desarollo caso 2
- **(1 puntos)** Por explicar contradicción caso 2

Pregunta 3

Pregunta 3.1

Una posible solución consistía en utilizar el teorema CSB, y encontrar funciones inyectivas f y g tales que:

$$f : \Sigma^\omega \to \{0,1\}^\omega$$
$$g : \{0,1\}^\omega \to \Sigma^\omega$$

Entregamos primero f. Como Σ es finito podemos ordenarlo de alguna forma. Sea $|\Sigma| = n$ y $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con $a_i \in \Sigma$ un orden cualquiera de Σ. Definimos una función auxiliar $j : \Sigma \to \{0,1\}^n$ donde:

$$j(a_i) = \overbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}^{i-1 \text{ veces}} \cdot 1 \cdot \overbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}^{n-i \text{ veces}}$$

Utilizando la función auxiliar j, definimos la función inyectiva f como:

$$f(c_1c_2c_3c_4c_5\ldots) = j(c_1)j(c_2)j(c_3)j(c_4)j(c_5)\ldots$$

Finalmente, se debía demostrar que f era inyectiva.

En el caso de g, como $|\Sigma| \geq 2$, sean $a_i, a_j \in \Sigma$ dos elementos cualquiera tales que $a_i \neq a_j$. Definimos la función auxiliar $h : \{0,1\} \to \Sigma$ tal que:

$$h(d_i) = \begin{cases} a_i & \text{si } d_i = 1 \\ a_j & \text{si } d_i = 0 \end{cases}$$

Utilizando la función auxiliar g, definimos la función inyectiva g como:

$$g(d_1d_2d_3d_4d_5\ldots) = h(d_1)h(d_2)h(d_3)h(d_4)h(d_5)\ldots$$

Finalmente, se debía demostrar que g era inyectiva.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por definir correctamente f
- **(1 punto)** Por definir correctamente g
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que f es inyectiva.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que g es inyectiva.

Pregunta 3.2

Una posible solución consistía en encontrar una estrategia de enumeración para $\Sigma^{\omega-reg}$. Esto lo haremos a partir de $\Sigma^* \times \Sigma^*$. Primero, es necesario demostrar que $\Sigma^* \times \Sigma^*$ es numerable, lo cual es posible encontrando una biyección con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, o entregando una estrategia de enumeración. Con esto, podemos crear una estrategia de enumeración para $\Sigma^{\omega-reg}$:

1. Ordenar todos los elementos $w_i \in \Sigma^* \times \Sigma^*$ en una lista L de alguna forma, donde $w_i = (u_i, v_i)$
2. Para cada $w_i \in L$:
   a) Si para todo $w_j = (u_j, v_j)$ donde $j < i$ se tiene que $u_i \cdot v_i \cdot v_i \cdot \ldots \neq u_j \cdot v_j \cdot v_j \cdot \ldots$, entregar $u_i \cdot v_i \cdot v_i \cdot \ldots$
   b) En otro caso, continuar con el siguiente elemento.

Finalmente, era necesario demostrar que esta estrategia de enumeración es correcta.

Dado lo anterior, la distribución del puntaje es la siguiente:

- **(1.5 punto)** Por demostrar formalmente que $\Sigma^* \times \Sigma^*$ es numerable.
- **(1.5 punto)** Por entregar una estrategia de enumeración para $\Sigma^{\omega-reg}$ y demostrar su correctitud.

Pregunta 4

Una posible solución consiste en hacer inducción fuerte sobre el tamaño de D.

Luego tenemos:

Caso Base: Para la demostración que haremos se necesitan como caso base el 1 y el 2. Para $|D| = 1$, supongamos I tal que $|I \cap D| > \frac{1}{2} \geq 1$ (la cardinalidad debe ser natural). Luego el único elemento de D esta en I y $median(D) \in I$.

Para $|D| = 2$, supongamos I tal que $|I \cap D| > \frac{2}{2} > 1$, luego $|I \cap D| = 2$ y $D \subseteq I$ y $median(D) \in I$

Hipotesis de inducción: Suponemos que $\forall k < n \; k, n \in \mathbb{N}$ se cumple que sea D conjunto como el descrito en el enunciado tal que $|D| = k$ e I un intervalo cualquiera en $\mathbb{N}$, $|I \cap D| \geq \frac{k}{2} \rightarrow median(D) \in I$.

Paso Inductivo: Ahora demostramos la premisa para D tal que $|D| = n$.

Sean $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e I intervalo en $\mathbb{N}$ tal que $|I \cap D| \geq \frac{n}{2}$.

Notando que por los casos bases ya demostrados podemos asumir $n > 2$, definimos el siguiente conjunto:

$$D' = \{a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

Es fácil ver que $median(D) = median(D')$ puesto que al eliminar los elementos del borde de D no cambian los elementos centrales que determinan la media.

Luego solo queda demostrar que $|I \cap D'| > \frac{n-2}{2}$, para poder demostrar lo pedido usando la hipótesis.

Haremos esto mediante una demostración por casos:

- Si a_1, $a_n \notin I$, entonces $I \cap D = I \cap D'$, por lo tanto $|I \cap D'| > \frac{n}{2} > \frac{n-2}{2}$
- Si a_1, $a_n \in I$, como I es un intervalo, se tiene que $D \subseteq I$ y $median(D) \in I$
- Sin perdida de generalidad el caso que queda es si $a_1 \in I$ y $a_n \notin I$, luego se tiene $|I \cap D'| = |I \cap D| - 1 > \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$

Finalmente por hipótesis de inducción concluimos que $median(D') \in I$ y por lo mencionado arriba $median(D) \in I$, quedando demostrado lo pedido por inducción fuerte.

Dado la solución anterior la dostribución de puntaje es la siguiente:

- **(0.5 puntos)** por cada caso base.
- **(1 punto)** por plantear correctamente la inducción.
- **(2 puntos)** por plantear un conjunto de menor tamaño que sirva para completar la inducción mediante la hipótesis.
- **(0.5 puntos)** por demostrar o explicar que $median(D) = median(D')$
- **(0.5 puntos)** por cada caso de la demostración de $|I \cap D'| > \frac{n-2}{2}$