Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 4

Pregunta 1

Pregunta 1.1

PD: La relación $\sim$ es refleja y simétrica.
Demostrar que $\sim$ es refleja significa demostrar que:

$$\forall v \in \Sigma^* : \exists i, j > 0 : v^i = v^j$$

Sabemos que $v^1 = v$, por lo que, si tomamos $i = j = 1$, es claro que $v^i = v^j = v$ por lo tanto la relación $\sim$ es refleja.
Por otra parte, demostrar que la relación es simétrica es demostrar:

$$\forall (u, v) \in \sim \rightarrow \ (v, u) \in \sim$$

Por simetría de la igualdad, sabemos que:

$$u^i = v^j \rightarrow v^j = u^i$$
$$\Rightarrow (u, v) \in \sim \rightarrow (v, u) \in \sim$$

Por lo tanto la relación . . $\sim$ es simétrica.
Otra manera de demostrar la simetría es suponer que:

$$(u, v) \in \sim$$
$$\Rightarrow \exists i, j > 0 \ \ |u^i = v^j$$

Considerando $i_2 = j \wedge j_2 = i$

$$\Rightarrow \exists i_2, j_2 > 0 \mid v^{i_2} = u^{j_2}$$
$$\Rightarrow (v, u) \in \sim$$

Por lo tanto la relación $\sim$ es simétrica.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por realizar correctamente la demostración.
- (**3 Puntos**) Por demostración correcta, pero con errores menores.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 1.2

PD: La relación $\sim$ es transitiva.

$$\Leftrightarrow \forall u, v, w \in \Sigma^* \ : \ u \sim v \ \land \ v \sim w \rightarrow \ u \sim w$$

Tenemos que:

$$\exists i, j, k, m > 0 \mid u^i = v^j \ \land v^k = w^m$$

Luego,

$$u^i = v^j \ \rightarrow \ (u^i)^k = (v^j)^k = (v^k)^j$$

Sin embargo, sabemos que $v^k = w^m$

$$\Rightarrow (u^i)^k = (v^k)^j = (w^m)^j$$

Por otra parte, podemos ver que concatenar i veces una palabra y luego concatenar la palabra resultantes k veces, será equivalente a concatenar la palabra inicial $i \cdot k$ veces; es decir: $(u^i)^k = u^{i \cdot k}$, por lo que si tomamos $l = i \cdot k \ \land \ s = m \cdot j$ tendremos:

$$u^l = w^s$$
$$\Rightarrow \exists l, s > 0 \mid u^l = w^s$$
$$\Rightarrow u \sim w$$

Por lo tanto, la relación $\sim$ es transitiva.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por realizar correctamente la demostración.
- (**3 Puntos**) Por demostración correcta, pero con errores menores.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

A partir del enunciado tenemos el conjunto $\mathcal{R} = \{R \subseteq A \times A\}$ y la relación $\preceq_1$ se define como $R \preceq_1 S$ si, y solo si, $R \circ S = S$. La respuesta es SI, la relación $\preceq_1$ es transitiva. Para esto, debemos demostrar que para todo $R, S, T \in \mathcal{R}$ se cumple que, si $R \preceq_1 S$ y $S \preceq_1 T$, entonces $R \preceq_1 T$. Para esto, suponemos que $R \preceq_1 S$ y $S \preceq_1 T$. Por definición de $\preceq_1$, tenemos que:

$$(1)\ R \circ S = S \qquad\qquad (2)\ S \circ T = T$$

Remplazando (1) en (2), obtenemos:

$$(3)\ (R \circ S) \circ T = T$$

Como la composición $\circ$ es asociativa (no es necesario demostrarlo, pero al menos debe ser mencionado), entonces:

$$(4)\ R \circ (S \circ T) = T$$

Luego reemplazando (2) en (4):

$$R \circ T = T$$

tenemos lo que queremos demostrar, y $\preceq_1$ es asociativa.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Si la demostración se hace de forma correcta y se menciona o demuestra que $\circ$ es asociativo.
- (**3 Puntos**) Si la demostración se hace de forma correcta y no se menciona que $\circ$ es asociativo.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.2

Se define la relación $\preceq_2$ como $R \preceq_2 T$ si, solo si, $R \circ S \subseteq S$. En este caso, la respuesta a esta pregunta es que $\preceq_2$ NO es transitiva. Para demostrar esto, basta dar un contra ejemplo de la transitividad. Por ejemplo, si tomamos A un conjunto no vacío con dos o más elementos, y definimos:

$$R = A \times A \qquad S = \emptyset \qquad T = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Entonces podemos ver fácilmente que se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} R \preceq_2 S & : & \text{ya que } R \circ \emptyset \subseteq \emptyset = S \\ S \preceq_2 T & : & \text{ya que } \emptyset \circ T \subseteq T \\ R \not\preceq_2 T & : & \text{ya que } R \circ T = A \times A \not\subseteq T\text{, dado que } A \text{ tiene dos o mas elementos.} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos ver que $\preceq_2$ no es transitiva.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Si el ejemplo es correcto y fácilmente chequeable.
- (**3 Puntos**) Si el ejemplo es correcto, pero la aplicación no es tan clara o si el ejemplo es parcialmente correcto, pero la explicación es completa.
- (**0 Puntos**) En otro caso.