Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

31 de Agosto de 2018

Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1 [Lógica Proposicional]

Un cuadrado mágico es una matriz de $n \times n$ que solo contiene números entre 1 y n en que la suma de cada fila y columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz de 3×3 es un cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de $n \times n$ con algunas posiciones en 0, diremos que es *completable* si existe una manera de reemplazar los 0 por números entre 1 y n de manera que la matriz resultante sea un cuadrado mágico. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable, pues pueden llenarse las casillas y obtener la matriz anterior:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que C es completable si y solo si φ es satisfacible.

Solución

Para $1 \leq i, j, k \leq 3$, definimos las siguientes variables proposicionales:

$$p_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si en la fila i, columna j, está el valor k} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos además dos conjuntos auxiliares:

$$M = \{(i, j, k) \mid \text{En la matriz } C \text{ aparece el número k en la fila i, columna j}\}$$

es decir, el conjunto que nos da los tríos de valores predeterminados, y

$$S_l = \{(l_1, l_2, l_3) \in \{1, 2, 3\}^3 \mid l_1 + l_2 + l_3 = l\}$$

es decir, los tríos de números que se pueden utilizar para completar la matriz y suman l.

A partir de ellos podemos definir las siguientes proposiciones:

Los elementos originales de la matriz aparecen en la solución:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{(i,j,k)\in M} p_{ijk}$$

Todos los elementos de la matriz tienen un número asignado:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} (p_{ij1} \vee p_{ij2} \vee p_{ij3})$$

En cada elemento de la matriz existe un único número asignado:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} \Big(\big(p_{ij1} \to (\neg p_{ij2} \wedge \neg p_{ij3})\big) \wedge \big(p_{ij2} \to (\neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij3})\big) \wedge \big(p_{ij3} \to (\neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij2})\big) \Big)$$

Las siguientes fórmulas establecen que la matriz es un cuadrado mágico. Para esto, para cada fila y columna que no sean la primera fila, escribiremos una fórmula que diga que suma lo mismo que la primera fila, donde esta suma puede estar entre 3 y 9.

La segunda fila suma lo mismo que la primera:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3)\in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{21m_1} \wedge p_{22m_2} \wedge p_{23m_3}) \right) \right)$$

La tercera fila suma lo mismo que la primera:

$$\varphi_5 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3)\in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{31m_1} \wedge p_{32m_2} \wedge p_{33m_3}) \right) \right)$$

La primera columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_6 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3)\in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{11m_1} \wedge p_{21m_2} \wedge p_{31m_3}) \right) \right)$$

La segunda columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_7 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3)\in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{12m_1} \wedge p_{22m_2} \wedge p_{32m_3}) \right) \right)$$

La tercera columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_8 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3)\in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3)\in S_l} (p_{13m_1} \wedge p_{23m_2} \wedge p_{33m_3}) \right) \right)$$

Finalmente se define

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{8} \varphi_i$$

la cual será satisfacible si y sólo si la matriz es completable.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

- 0.75 ptos. por definir las variables proposicionales.
- 0.75 ptos. por las fórmulas φ_i asociadas a suma de columnas y filas (3.75 ptos. en total).
- 1.5 ptos. por las fórmulas φ_1 y φ_2 y φ_3.
- Soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2 [Inducción]

a) **(2 pts)** Demuestre que la suma de los primeros n naturales impares es igual a n^2.

b) **(4 pts)** Demuestre que para cada natural $n \geq 6$, existen naturales $p, q \geq 0$ tales que

$$n = 2 \times p + 7 \times q$$

Solución

a) Haremos la demostración por inducción simple sobre n. Podemos escribir la suma de los primeros n impares de la siguiente forma:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-3) + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

Sea $P(n) : \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ una afirmación sobre los naturales.

BI: $P(1) : 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$

HI: Suponemos que $P(n)$ es verdadero, es decir $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$.

TI: P.D. $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 \right) + (2n+1) \\
&\overset{\text{HI}}{=} n^2 + (2n+1) \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

b) Para hacer más directa la demostración, agregaremos un par de restricciones a la propiedad. Demostraremos lo siguiente:

Para cada natural $n \geq 6$, existen naturales p, q tales que

$$n = 2 \times p + 7 \times q$$

con $p \geq 3$ y $q \geq 0$ si n es par, y $p \geq 0$ y $q \geq 1$ si n es impar.

Notemos que esta propiedad implica a la pedida en el enunciado. Demostraremos entonces esta propiedad por inducción simple sobre n:

BI: Sea $n = 6$. Como 6 es par, tomando $p = 3$ y $q = 0$, la propiedad es cierta.

HI: Sea $n \geq 6$. Suponemos que para ese número n existen naturales p, q tales que:

$$n = 2 \times p + 7 \times q$$

con $p \geq 3$ y $q \geq 0$ si n es par, y $p \geq 0$ y $q \geq 1$ si n es impar.

TI: Tenemos dos casos:

$\underline{n + 1 \text{ es par}}$

- Usando la HI, y como n es impar, sabemos que

$$n = 2 \times p' + 7 \times q' \text{ con } p',\, q' \text{ naturales tales que } q' \geq 1 \text{ y } p' \geq 0$$

Luego

$$\begin{aligned} n &= 2 \times p' + 7 \times q' \\ n + 1 &= 2 \times p' + 7 \times q' + 1 \\ n + 1 &= 2 \times p' + 7 \times q' + (8 - 7) \\ n + 1 &= 2 \times \underbrace{(p' + 4)}_{p} + 7 \times \underbrace{(q' - 1)}_{q} \end{aligned}$$

Además, $q' \geq 1$, entonces $q = (q' - 1) \geq 0$ y por otra parte $p \geq 0$, entonces $p = (p' + 4) \geq 3$. Luego

$$n + 1 = 2 \times p + 7 \times q \text{ con } q \geq 0 \text{ y } p \geq 3$$

Por lo tanto demostramos que la propiedad es verdadera si $n + 1$ es par.

$\underline{n + 1 \text{ es impar}}$

- Usando la HI, y como n es par, sabemos que

$$n = 2 \times p' + 7 \times q' \text{ con } p', q' \text{ naturales tales que } q' \geq 0 \text{ y } p' \geq 3$$

Luego

$$\begin{aligned} n &= 2 \times p' + 7 \times q' \\ n + 1 &= 2 \times p' + 7 \times q' + 1 \\ n + 1 &= 2 \times p' + 7 \times q' + (7 - 6) \\ n + 1 &= 2 \times p' + 7 \times q' + (7 - 2 \times 3) \\ n + 1 &= 2 \times \underbrace{(p' - 3)}_{p} + 7 \times \underbrace{(q' + 1)}_{q} \end{aligned}$$

Además, $q' \geq 0$, entonces $q = (q'+1) \geq 1$ y por otra parte $p \geq 3$, entonces $p = (p'-3) \geq 0$. Luego

$$n + 1 = 2 \times p + 7 \times q \text{ con } q \geq 1 \text{ y } p \geq 0$$

<u>Pauta</u> (6 pts.)

a)
- 0.5 pts. por plantear $P(n)$.
- 0.5 pts. por base e hipótesis de inducción.
- 1 punto por tesis de inducción.

b)
- 0.5 punto por base de inducción.
- 0.5 punto por plantear hipótesis de inducción.
- 3 puntos por tesis de inducción y conclusión.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 [Lógica proposicional]

Sean $\varphi, \psi \in L(P)$. Considere el conectivo lógico binario '$\leftarrow$' definido por la siguiente tabla de verdad:

φ	ψ	$\varphi \leftarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

a) **(3 pts)** Demuestre que $\{\neg, \leftarrow\}$ es funcionalmente completo.

b) **(3 pts)** Demuestre que $\{\leftarrow\}$ **no** es funcionalmente completo.

Solución

a) En primer lugar notemos que $\varphi \leftarrow \psi \equiv \psi \rightarrow \varphi$. Basta con ver las tablas de verdad:

φ	ψ	$\varphi \leftarrow \psi$	$\psi \rightarrow \varphi$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Sabemos que $C = \{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo. Demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida usando sólo dichos conectivos es lógicamente equivalente a otra fórmula que sólo usa $\{\neg, \leftarrow\}$. Así, demostraremos que $C' = \{\neg, \leftarrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Suponemos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos lógicos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos lógicos en C'.

TI: Sea una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C. Tenemos dos casos:

i) $\theta = \neg\varphi \overset{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi'$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

ii) $\theta = \varphi \vee \psi \overset{\text{HI}}{\equiv} \varphi' \vee \psi' \equiv (\neg\varphi') \rightarrow \psi' \equiv \psi' \leftarrow (\neg\varphi')$, y como φ', ψ' sólo usan conecivos lógicos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos lógicos en C'. $\square$

b) Sea $\top$ una tautología y $P = \{p\}$. Demostraremos por inducción estructural que toda fórmula en $L(P)$ construida usando sólo el conectivo $\{\leftarrow\}$ es lógicamente equivalente a p o a $\top$. Como ninguna de estas fórmulas es equivalente a una contradicción, se concluye que $\{\leftarrow\}$ no puede ser funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\alpha, \beta \in L(P)$ construidas sólo con p y $\leftarrow$ son equivalentes a p o a $\top$.

TI: Sean $\alpha, \beta \in L(P)$. El único paso inductivo que debemos demostrar es $\varphi = \alpha \leftarrow \beta$. Por hipótesis, sabemos que tanto α como β son lógicamente equivalentes a p o a $\top$. Tenemos cuatro casos posibles:

i) $\alpha \equiv p$ y $\beta \equiv p$

p	$p \leftarrow p$
0	1
1	1

ii) $\alpha \equiv p$ y $\beta \equiv \top$

p	$p \leftarrow \top$
0	0
1	1

iii) $\alpha \equiv \top$ y $\beta \equiv p$

p	$\top \leftarrow p$
0	1
1	1

iv) $\alpha \equiv \top$ y $\beta \equiv \top$

p	$\top \leftarrow \top$
0	1
1	1

Como en todos los casos obtenemos que $\alpha \leftarrow \beta$ es equivalente a p o $\top$, por inducción estructural la propiedad se cumple. Por lo tanto, por el argumento del inicio, concluimos que $\{\leftarrow\}$ no es funcionalmente completo. $\square$

Pauta

a)
- 0.5 pts. por base de inducción.
- 0.5 pts. por hipótesis de inducción.

- 1 pts. por primer paso inductivo.
- 1 pts. por segundo paso inductivo.

b)
- 0.5 pts. por argumentar que no se puede generar una contradicción.
- 0.5 pts. por base de inducción.
- 0.5 pts. por hipótesis de inducción.
- 1.5 pts. por tesis y conclusión.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 [Lógica de Predicados]

a) **(2 pts)** Sean Σ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula en lógica de predicados. Demuestre que:

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ no es satisfacible.}$$

b) **(4 pts)** Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{\ & \forall x \exists y (R(x,y)),\\ & \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)),\\ & \forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z))\ \}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x (R(x,x))$. Demuestre que $\Sigma \models \varphi$.

Solución

(a) ($\Rightarrow$) Suponga que $\Sigma \models \varphi$. Demostraremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible[1]. Lo haremos por contradicción. Supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Esto implica que existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, lo que implica que $\mathcal{I} \models \Sigma$ y $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, y por lo tanto $\mathcal{I} \models \Sigma$ y $\mathcal{I} \not\models \varphi$, lo que contradice el hecho de que $\Sigma \models \varphi$[2].$\square$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, demostraremos que $\Sigma \models \varphi$. Sea $\mathcal{I}$ una interpretación tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$, debemos demostrar que $\mathcal{I} \models \varphi$. Dado que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, y $\mathcal{I}$ es una interpretación tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$, necesariamente se tiene que $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$ de lo que concluimos que $\mathcal{I} \models \varphi$. Hemos demostrado que, si $\mathcal{I}$ es tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$, entonces $\mathcal{I} \models \varphi$, lo que implica que $\Sigma \models \varphi$.$\square$

(b) Consideremos

$$\begin{aligned}\Sigma' = \{\ & \forall x \exists y (R(x,y)),\\ & \forall x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)),\\ & \forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)),\\ & \exists x (\neg R(x,x))\ \}\end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar resolución sobre Σ':

[1] Asumiremos que las fórmulas no tienen variables libres, sin embargo, la demostración se puede extender para fórmulas que si las tienen.

[2] Notar que el símbolo $\models$ se utiliza tanto para representar consecuencia lógica como satisfacibilidad. Sin embargo, son conceptos distintos.

(1)	$\exists x(\neg R(x,x))$	$\in \Sigma'$
(2)	$\neg R(a,a)$	especificación existencial en (1)
(3)	$\forall x \exists y(R(x,y))$	$\in \Sigma'$
(4)	$R(a,b)$	especificación universal y existencial en (3)
(5)	$\forall x \forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$	$\in \Sigma'$
(6)	$\neg R(a,b) \vee R(b,a)$	especificación universal dos veces en (5)
(7)	$R(b,a)$	resolución de (4) y (6)
(8)	$\forall x \forall y \forall z(\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z))$	$\in \Sigma'$
(9)	$\neg R(a,b) \vee \neg R(b,a) \vee R(a,a)$	especificación universal tres veces en (8)
(10)	$\neg R(b,a) \vee R(a,a)$	resolución de (4) y (9)
(11)	$R(a,a)$	resolución de (7) y (10)
(12)	$\square$	resolución de $(2),(11)$

Finalmente, por resolución concluimos que $\Sigma \models \varphi.\square$

Solución Alternativa

Consideremos

$$\forall x \exists y(R(x,y)) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \tag{3}$$

$$\forall x(R(x,x)) \tag{4}$$

Aplicando lo demostrado en la pregunta anterior, demostraremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Por lo tanto, existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$ y $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. Luego, existe un $a \in dom(\mathcal{I})$ tal que $\neg R(a,a)$. Además, como $\mathcal{I} \models \Sigma$, en particular debe satisfacer a (1), de donde deducimos que existe un $b \in dom(\mathcal{I})$ tal que $R(a,b)$. De manera similar, por la definición de implicancia podemos deducir de (2) que $R(b,a)$ debe cumplirse.

Finalmente, por (3) obtenemos que $R(a,a)$, lo que contradice el hecho de que $\neg R(a,a)$, luego $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible y concluimos que $\Sigma \models \varphi.\square$

Pauta (6 pts.)

(a) 2 ptos:

- 1 pto. hacia la derecha
- 1 pto. hacia la izquierda

(b) 4 ptos:

- 1 pto por construir Σ'.
- 3 ptos por resolución.

Puntajes intermedios a criterio del corrector.