PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2017

PAUTA INTERROGACION 2

Pregunta 1

La solución consistía en demostrar que no existe biyección entre A y 2^A independientemente de la cardinalidad de A.

Caso A finito: $|A| < 2^{|A|} = |2^A|$

Caso A infinito:

La demostración se podía hacer por contradicción, suponiendo que existe una función f biyectiva entre A y su conjunto potencia. Se define el conjunto $\bar{D} = \{a \in A | a \notin f(a)\}$ es claro notar que $\bar{D} \in 2^A$

Luego, como f es biyectiva, $\exists b \in A. f(b) = \bar{D}$. Sea $b \in A$ tal que $f(b) = \bar{D}$.

Caso 1: $b \in f(b) \Rightarrow b \in \bar{D} \Rightarrow b \notin f(b) \rightarrow\!\leftarrow$

Caso 2: $b \notin f(b) \Rightarrow b \notin \bar{D} \Rightarrow b \in f(b) \rightarrow\!\leftarrow$

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1.5 puntos)** Por indicar que la demostración se hará por contradicción suponiendo que existe f biyectiva y definir el conjunto $\bar{D}$.
- **(1.5 punto)** Por argumentar que $\exists b \in A. f(b) = \bar{D}$.
- **(3 puntos)** Por desarrollar los casos y mostrar que se llega a una contradicción en ambos.

Nota 1: Demostrar explícitamente para el caso finito no es necesario, pero el hacerlo tiene un punto extra.

Nota 2: Si demuestra que hay una biyección entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$ o caso numerable de forma correcta, tiene 1 punto.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

La solución consistía en demostrar que la relación presentada sobre palabras en Σ^* era una relación de equivalencia. Luego, era necesario mostrar que la relación era refleja, simétrica y transitiva.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por mostrar reflexividad. Sale de la idea que para toda palabra w es posible definir la división como $u = w$ y $v = \epsilon$ ya que $w = w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w$. Luego, $(w, w) \in R$.

- **(1 puntos)** Por mostrar simetría. Al tener par $(a, b) \in R$, luego existen u y v tal que $a = u \cdot v$ y $b = v \cdot u$. Es claro notar que al escoger $u' = v$ y $v' = u$, podemos mostrar que se cumple para el lado contrario. Luego $(b, a) \in R$.
- **(2 puntos)** Por mostrar transitividad. Si se tienen palabras $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ luego existen divisiones entre a y b y entre b y c. La idea es notar que podemos conectar mediantes estas divisiones a a y c. Pero era necesario que revisar los casos en que estas divisiones son de distinto largo y como formar la división que conecta a a y c. Sin pérdida es generalidad es posible solo ver el caso en que una las porciones de la división entre a y b es más larga que una entre b y c. Subdividiendo más allá estas divisiones, teniendo en cuenta lo anterior, es posible construir la división buscada para mostrar que $(a, c) \in R$.

Pregunta 2.2

La solución consistía en analizar, más allá de la definición de R, que describen las clases de equivalencia de R.

- **(2 punto)** Por notar que la clase de equivalencia de una palabra w son todas las palabras obtenidas a partir de w al "girarla", es decir, si $w = a_1 \dots a_n$, entonces $a_j \dots a_n a_1 \dots a_{j-1} \in [w]_R$. Podemos pensar de toda palabra como un ciclo, luego todas las palabras que pueden formar ese mismo ciclo son parte de su clase de equvalencia. Cualquier descripción que no llegó más allá de la definición de R, tendrá puntaje parcial a criterio del corrector.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

Existen dos grandes formas de demostrar lo pedido. La primera es por argumento de diagonalización de cantor y la segunda es mostrar una biyección entre el conjunto de las trayectorias y $2^{\mathbb{N}}$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente. En el caso de utilizar diagonalización:

- **(2 puntos)** Por plantear el argumento completo de diagonalización. Esto incluye construir una matriz correcta.
- **(1 punto)** Por construir el elemento nuevo a partir de la diagonal y mostrar que es nuevo y que además pertenece al conjunto original.

En el caso de crear una función biyectiva:

- **(2 puntos)** Definir correcta y completamente la función entre el conjunto de trayectorias y $2^{\mathbb{N}}$.
- **(1 punto)** Por demostrar que esta función es efectivamente una biyección.

Pregunta 3.2

En este ítem la repartición de puntaje es idéntica al del ítem anterior.

Pregunta 4

Pregunta 4.1

P.D: $(\preceq \cup (a, b))^t$ es refleja: Basta decir que $\preceq \subseteq (\preceq \cup (a, b))^t$, luego como $\preceq$ es refleja, $(\preceq \cup (a, b))^t$ también lo es.

P.D: $(\preceq \cup (a,b))^t$ es transitiva: Se sigue trivialmente de la clausura transitiva.
P.D: $(\preceq \cup (a,b))^t$ es anti-simétrica: Suponiendo por contradicción, se puede llegar a que si (b,a) pertenece a la clausura, entonces necesariamente (a,b) o (b,a) pertenecen a $\preceq$, rompiendo el supuesto inicial de que son *incomparables*.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por demostrar que es transitiva y refleja.
- **(2 puntos)** Por demostrar que es anti-simétrica.

Pregunta 4.2

La solución consistía en una demostración por construcción. En otras palabras se plantea una forma de construir el orden topológico a partir de $\preceq$. Para esto, consideremos que si $\preceq$ no tiene elementos incomparables, entonces es total. Por otro lado, si es que si tiene, podemos agregarlos a la relación uno por uno y tomando la clausura transitiva cada vez, lo que sabemos que es un orden parcial por el inciso anterior. Esto se hace en un loop que termina una vez que no quedan elementos incomparables. Es necesario justificar la correctitud diciendo que A es finito.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por decir que si no hay elementos incomparables entonces $\preceq = \preceq^T$.
- **(1.5 puntos)** Por plantear el loop usando el inciso anterior.
- **(1 puntos)** Por justificar que A es finito.