Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

7 de octubre de 2021

2º semestre 2021 - Profesores M. Bucchi - G. Diéguez - F. Suárez

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 5 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Sean A, B y C conjuntos. ¿Son ciertas las siguientes proposiciones? Demuestre.

a) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$

b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

c) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Solución

a) $(\subseteq)$ Sea $a \in A \backslash (B \cup C)$. Debemos demostrar que $a \in (A \backslash B) \backslash C$.

$$\begin{aligned} a \in A \backslash (B \cup C) &\Rightarrow a \in A \wedge a \notin (B \cup C) && \text{(def. diferencia)} \\ &\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) && \text{(def. unión y De Morgan)} \\ &\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C && \text{(asociatividad)} \\ &\Rightarrow a \in (A \backslash B) \backslash C && \text{(def. diferencia)} \end{aligned}$$

Concluimos que $A \backslash (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \backslash C$.

$(\supseteq)$ Sea $a \in (A \backslash B) \backslash C$. Debemos demostrar que $a \in A \backslash (B \cup C)$.

$$\begin{aligned} a \in (A \backslash B) \backslash C &\Rightarrow a \in (A \backslash B) \wedge a \notin C && \text{(def. diferencia)} \\ &\Rightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge a \notin C && \text{(def. diferencia)} \\ &\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C) && \text{(asociatividad)} \\ &\Rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \cup C) && \text{(def. unión y De Morgan)} \\ &\Rightarrow a \in A \backslash (B \cup C) && \text{(def. diferencia)} \end{aligned}$$

Concluimos que $(A \backslash B) \backslash C \subseteq A \backslash (B \cup C)$.

Y por lo tanto $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$.

b) No se cumple la igualdad. Consideremos el siguiente contraejemplo. Sean

$$A = C = \{a\} \text{ y } B = \varnothing$$

Si reemplazamos en la izquierda de la igualdad obtenemos que

$$A \backslash (B \cup C) = \{a\} \backslash (\varnothing \cup \{a\}) = \{a\} \backslash \{a\} = \varnothing$$

Mientras que en la derecha de la igualdad obtenemos

$$(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = (\{a\} \backslash \varnothing) \cup (\{a\} \backslash \{a\}) = \{a\} \cup \varnothing = \{a\}$$

Concluimos que $A \backslash (B \cup C) \neq (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

c) Sea $(a,b) \in (A \times B) \cup (C \times D)$. Debemos demostrar que $(a,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in (A \times B) \cup (C \times D) &\Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \vee (a,b) \in (C \times D) && \text{(def. unión)}\\
&\Rightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in C \wedge b \in D) && \text{(def. par ordenado)}\\
&\Rightarrow (a \in A \vee a \in C) \wedge (a \in A \vee b \in D)\\
&\quad \wedge (b \in B \vee a \in C) \wedge (b \in B \vee b \in D) && \text{(distribuitividad)}\\
&\Rightarrow (a \in A \vee a \in C) \wedge (b \in B \vee b \in D) && \text{(conjunción)}\\
&\Rightarrow (a \in A \cup C) \wedge (b \in B \cup D) && \text{(def. unión)}\\
&\Rightarrow (a,b) \in (A \cup C) \times (B \cup D) && \text{(def. par ordenado)}
\end{aligned}
$$

Pauta (6 pts.)

- 2 pts por a).
- 2 pts por b).
- 2 pts por c).

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Considere el conjunto $\mathcal{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0)$, y la relación $\uparrow$ sobre $\mathcal{Q}$ definida como:

$$(a, b) \uparrow (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

a) (3 ptos.) Demuestre que $\uparrow$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{Q}$.

b) (1 pto.) Nombre a los elementos del conjunto cuociente $\mathcal{Q}/\uparrow$ de tal forma que este represente al conjunto de todos los racionales. Esto es, tal que $\mathcal{Q}/\uparrow = \mathbb{Q}$.

c) (1 pto.) Defina la operación $+_\uparrow$ sobre un par de elementos de $\mathcal{Q}/\uparrow$ de tal forma que esta se comporte como la suma de números racionales. Dé un ejemplo de suma que compruebe que su definición es correcta.

d) (1 pto.) Defina la operación $\cdot_\uparrow$ sobre un par de elementos de $\mathcal{Q}/\uparrow$ de tal forma que esta se comporte como la multiplicación de números racionales. Dé un ejemplo de multiplicación que compruebe que su definición es correcta.

Solución

a) **<u>Reflexividad:</u>**
Dado un par $(m, n) \in \mathcal{Q}$, es claro que $m \cdot n = m \cdot n$, y luego por definición de $\uparrow$ se cumple que $(m, n) \uparrow (m, n)$.

<u>Simetría:</u>
Dados dos pares tales que $(m, n) \uparrow (r, s)$, por definición de $\uparrow$ se tiene que $m \cdot s = n \cdot r$. Es claro que $r \cdot n = s \cdot m$, y luego por definición de $\uparrow$ se cumple que $(r, s) \uparrow (m, n)$.

<u>Transitividad:</u>
Dados tres pares tales que $(m, n) \uparrow (r, s)$ y $(r, s) \uparrow (t, u)$, debemos demostrar que $(m, n) \uparrow (t, u)$.

Por definición de $\uparrow$, tenemos que $m \cdot s = n \cdot r$ (1) y $r \cdot u = s \cdot t$ (2). Dado que $u \neq 0$, podemos despejar r en (2), y obtenemos que $r = \frac{s \cdot t}{u}$. Reemplazando esto último en (1), se obtiene que $m \cdot s = \frac{n \cdot s \cdot t}{u}$. Dado que $s \neq 0$, podemos reordenar y obtener que $m \cdot u = n \cdot t$. Por definición de $\uparrow$, concluimos que entonces que $(m, n) \uparrow (t, u)$, y por lo tanto, la relación es transitiva.

b) Notemos que al reordenar la definición de $\uparrow$, obtenemos que $(a, b) \uparrow (c, d)$ si, y solo si, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Por esto, podemos concluir que $[(a, b)]_\uparrow$ contiene exactamente a todos los pares que representan a una fracción que tiene el mismo valor que $\frac{a}{b}$.

Por lo anterior, definimos que $[(a, b)]_\uparrow$ será el racional $\frac{a}{b}$.

c) Se define el operador $+_\uparrow$ tal que:

$$[(a, b)] +_\uparrow [(c, d)] = [(a \cdot d + b \cdot c,\ b \cdot d)]$$

Como ejemplo, calcularemos $4{,}2 +_{\uparrow} -3{,}5$:

$$\begin{aligned} 4{,}2 +_{\uparrow} -3{,}5 &= [(21,5)] +_{\uparrow} [(-7,2)] \\ &= [(21 \cdot 2 + 5 \cdot -7,\ 5 \cdot 2)] \\ &= [(42 - 35,\ 10)] \\ &= [(7,\ 10)] \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

d) Se define el operador $\cdot_{\uparrow}$ tal que:

$$[(a,b)] \cdot_{\uparrow} [(c,d)] = [(a \cdot c,\ b \cdot d)]$$

Como ejemplo, calcularemos $4{,}2 \cdot_{\uparrow} -3{,}5$:

$$\begin{aligned} 4{,}2 \cdot_{\uparrow} -3{,}5 &= [(21,5)] \cdot_{\uparrow} [(-7,2)] \\ &= [(21 \cdot -7,\ 5 \cdot 2)] \\ &= [(-147,\ 10)] \\ &= -14{,}7 \end{aligned}$$

Pauta (6 pts.)

- 1 pto. por demostrar cada una de las propiedades de la relación.
- 1 pto. por nombrar correctamente las clases de equivalencia.
- 0,7 pts. por definir correctamente cada operador.
- 0,3 pts. por dar un ejemplo de uso de cada operador.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.