PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

IIC1253 - Matemáticas Discretas
1° semestre 2014 - Prof. Gabriel Diéguez

Interrogación 2

1. Dados dos órdenes parciales $(A, \preceq_A)$ y $(B, \preceq_B)$, construya una relación de orden $\preceq$ para el conjunto $A \times B$ a partir de las relaciones anteriores. Debe demostrar que efectivamente $(A \times B, \preceq)$ es un orden parcial.

2. La lógica de primer orden es muy útil para hablar de propiedades sobre grafos. Para esto, usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E es una relación binaria, y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{G}$ representará un grafo particular.

   a) [1,5 ptos.] Dado un grafo G y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{G}$ que lo representa, ¿qué contiene $\mathfrak{G}$? ¿Qué representan sus elementos?

   b) [4,5 ptos.] Diremos que una propiedad sobre grafos es **definible** si existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que

   $$\mathfrak{G} \models \varphi \text{ si y sólo si el grafo representado por } \mathfrak{G} \text{ tiene la propiedad.}$$

   Dado un grafo G, demuestre que las siguientes propiedades son definibles:

   I) G es simple.
   II) G tiene un clique de tamaño k.
   III) G es un conjunto de ciclos más un camino.

3. Sea A un conjunto infinito, y $\Gamma = \{G \mid G \text{ es un grafo tal que } V \text{ es un conjunto finito y } V \subseteq A\}$.

   a) Demuestre que si A es enumerable, entonces Γ es enumerable.

   b) Demuestre que si A no es enumerable, entonces Γ no es enumerable.

   c) Determine la cardinalidad de $\Gamma/\cong$ (el conjunto cuociente de Γ bajo la relación de isomorfismo de grafos).

4. Considere un nuevo cuantificador $\exists_2$, el cual se lee "existen exactamente dos".

   a) Defina formalmente la sintaxis y la semántica de la lógica de primer orden agregando este nuevo cuantificador. Asuma que tiene un vocabulario $\mathcal{L}$ y que los conceptos de $\mathcal{L}$-término, $\mathcal{L}$-estructura y valuación ya están definidos.

   b) Demuestre que

   $$\{\exists_2 x\, \forall y\, R(x,y)\} \models$$
   $$\exists x_1\, \exists x_2 \Bigg(\neg\Big(x_1 = x_2\Big) \wedge \Big(\forall y \Big(R(x_1,y) \wedge R(x_2,y)\Big)\Big) \wedge \Big(\forall z \Big(\big(\neg(z = x_1) \wedge \neg(z = x_2)\big) \rightarrow \exists w \neg R(z,w)\Big)\Big)\Bigg).$$

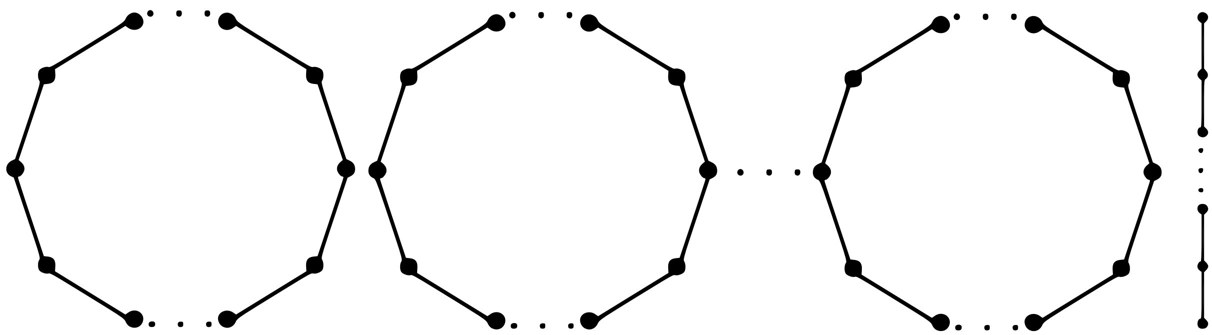

Figura 1: Un ejemplo de un conjunto de ciclos más un camino.