PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E IGNACIO VERGARA

Ayudantía 5

15 de septiembre

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de obejtos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de A (relativo a $\mathcal{U}$) es

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B$, $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$. $X = \emptyset$.

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

$$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

$$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

$$A \backslash B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

Leyes

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$
2. Elemento neutro:
   $A \cup \emptyset = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$
3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
7. Leyes de De Morgan:
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. Elemento inverso:
   $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \emptyset$
9. Dominación:
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \emptyset = \emptyset$

Ejercicio 1 — Conjuntos nociones básicas

Sean A, B, C y D conjuntos. Para las siguientes afirmaciones, demuestre o de un contra-ejemplo.

a) (A \B) ∪ (B \A) = (A ∪ B) \(A ∩ B)

b) (A ∪ B) x (C ∪ D) = (A × C) ∪ (B × D)

Ejercicio 2 — Conjuntos

Dada una secuencia de N de conjuntos $A_1, A_2, \dots A_N$, defina la secuencia $B_1 = A_1$ y $B_i = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$ para $i = 2, 3, \dots, N$. Pruebe que:

I) $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall i \neq j,$ con $i, j \leq N$.

II) $\cup_{i=1}^N B_i = \cup_{i=1}^N A_i$.

Ejercicio 3 — Conjuntos

Sea $\Omega \neq \emptyset$, diremos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un sigma-álgebra sobre Ω si,

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Si $B \in \mathcal{F}$, entonces $B^c \in \mathcal{F}$

- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$

a) Dé un ejemplo de un sigma álgebra, si es necesario especificar Ω.

b) Suponga que $\mathcal{F}$ es un sigma álgebra sobre Ω. Considerando $A \subseteq \Omega$, demuestre que

$$\mathcal{F}_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$$

es un sigma álgebra sobre A.