Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 6 (Repaso I1)

22 de Septiembre

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Ejercicio 1 — Inducción, I1 2023-1

Sea $D = a_1, a_2, ..., a_n \subseteq \mathbb{N}$ tal que n es impar y $a_1 < a_2 < ... < a_n$ se define $median(D)$ como la mediana del conjunto D tal que $median(D) = a_{\frac{n+1}{2}}$. Además se define un intervalo de naturales $I = [a, b]$ como los números naturales entre a y b incluyéndolos (por ejemplo, $I = [3, 6] = 3, 4, 5, 6$).
Demuestre usando inducción fuerte que para todo conjunto finito D y para todo intervalo de naturales I, si I contiene más de la mitad de los elementos de D, entonces la mediana de D está en el intervalo I. Formalmente esto es equivalente a demostrarque si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2}$, entonces $median(D) \in I$ ($|A|$ corresponde a la cantidad de elementos que tiene el conjunto A)

Solución:

PD: Si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2} \rightarrow \text{median}(D) \in I$

La desmostración de esta pregunta se hace con inducción fuerte.

$$P(n) : \text{Para } |D| = n \text{ se tiene que } \forall I. |I \cap D| > \frac{|D|}{2} \rightarrow \text{ median}(D) \in I$$

Caso base: Tenemos que $|D| = 1$, luego si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2}$ entonces necesariamente se tiene que $|I \cap D| = 1$ por lo cual, $D \subseteq I$ obteniendo así que $median(D) = a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 \in I$

Hipótesis inductiva: Supongamos que $\forall D$ tal que $|D| < n$ se cumple $P(|D|)$.

Tesis inductiva: Sea D cualquiera tal que $|D| = n$, tenemos los siguientes casos:

1. $a_1 \in I \land a_n \in I$
   Se puede observar que $D \subseteq I$ (puesto que $a_1 \in I \land a_n \in I$ y I por definición contiene a todos los naturales entre a_1 y a_n), por lo que $median(D) \in I$ (gracias a que todos los elementos de D están contenidos en I).
2. $a_1 \in I \land a_n \notin I$.
   Como tenemos que $|I \cap D| > \frac{|D|}{2} \land a_1 \in I$, debido a que I tiene números consecutivos se tiene que la intersección entre D e I es, por lo menos,

$$a_1, a_2, ..., a_{\frac{n+1}{2}} \in I$$

Por lo tanto $median(D) \in I$.

3. $a_1 \notin I \wedge a_n \in I$
   Análogo al anterior.

4. $a_1 \notin I \wedge a_n \notin I$
   Sea $D' = \{a_2, a_3, ..., a_{n-1}\}$, luego se tiene que

$$|I \cap D'| = |I \cap D| > \frac{|D|}{2} > \frac{|D'|}{2}$$

   Por lo que por hipótesis inductiva tenemos que: $median(D') \in I$ y finalmente, como se eliminaron a_1 y a_n de D para obtener D' tenemos que $median(D) = median(D')$ por lo cual, $median(D) \in I$.

Ejercicio 2 — Lógica proposicional, Examen 2022-1

Una fórmula proposicional α se dice que es una cláusula conjuntiva si es de la forma $\alpha = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ para algún $n \geq 1$ y cada a_i es un literal con $1 \leq i \leq n$, esto es, a_i es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional. Por ejemplo, $p \wedge \neg q \wedge r$ y $\neg q \wedge s \wedge q \wedge s$ son cláusulas conjuntivas.

Sean $\alpha = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$ y $\beta = b_1 \wedge \ldots \wedge b_m$ dos cláusulas conjuntivas satisfacibles, no necesariamente con el mismo conjunto de variables proposicionales. Demuestre que $\alpha \models \beta$ si, y solo si, $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Solución:

Se procede a demostrar ambas direcciones del bicondicional.

$\alpha \models \beta \rightarrow \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$

Por contrapositivo, suponemos que $\{b_1, \ldots, b_m\} \not\subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$. Entonces, existe $b \in \{b_1, \ldots, b_m\}$ tal que $b \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$. Como α es satisfacible, entonces existe una valuación $v_1, \ldots, v_k$ tal que $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 1$. Por el mismo argumento del ítem anterior, se tiene que $a_i(v_1, \ldots, v_k) = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Dicho eso, existen 2 casos:

1. La variable de b no está en α: Nombremos como p_{k+1} a la variable presente en b. Luego, para una valuación $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ con $v_{k+1} \in \{0, 1\}$ siempre se cumplirá que $a_i(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) = 1$ para $1 \leq i \leq n$. Eligiendo v_{k+1} como 0 o 1 dependiendo del literal b, podemos llegar a que la valuación cumple que $\beta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}) = 0$. Por lo tanto, $\alpha \not\models \beta$.

2. La variable de b sí está en α: Como $b \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, luego existe $1 \leq j \leq n$ tal que $a_j \equiv \neg b$. Así, $b(v_1, \ldots, v_k) = 0$ y entonces $\beta(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Por lo tanto, $\alpha \not\models \beta$.

$\alpha \models \beta \leftarrow \{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$

Por contrapositivo, suponga que $\alpha \not\models \beta$. Luego, existe una valuación $v_1, \ldots, v_k$ tal que $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 1$ y $\beta(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Es decir, $a_i(v_1, \ldots, v_k) = 1$ para $1 \leq i \leq n$ y existe un b_j con $1 \leq j \leq m$ tal que $b_j(v_1, \ldots, v_k) = 0$.

Claramente, $a_i \not\equiv b_j$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $b_j \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$ y entonces $\{b_1, \ldots, b_m\} \not\subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Ejercicio 3 — Lógica de predicados (I1-2023-1)

Para una fórmula proposicional $\alpha(p1, ..., pn)$ con variables proposicionales $p_1, ..., p_n$ se define el conjunto:

$$\text{valuaciones}(\alpha) = \{(v_1, ..., v_n \mid \alpha(v_1, ..., v_n) = 1\}$$

En otras palabras, valuaciones(α) es el conjunto de todas las valuaciones que satisfacen a α.

Dadas α_1 y α_2 dos fórmulas en lógica proposicional, decimos que α_1 es $\#-$equivalente a α_2 si se cumple que el número de valuaciones que satisfacen a α_1 es igual al número de valuaciones que satisfacen a α_1. Es decir, $\mid$ valuaciones$(\alpha_1) \mid = \mid$ valuaciones$(\alpha_2) \mid$.

Si α_1 y α_2 son $\#-$equivalentes, escribiremos $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_2$.

(a) Sea $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ una secuencia de fórmulas proposicionales tal que $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$ para cada $1 \leq i < n$. Demuestre que si $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_n$, entonces $\alpha_i \equiv \alpha_j$, para todo $i \neq j$.

(b) Demuestre que $\equiv_{\#}$ no cumple con el teorema de composición. En otras palabras, que no cumple que para todo par de fórmulas $\alpha_1(p_1, ..., p_n)$ y $\alpha_2(p_1, ..., p_n)$, si $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_2$, entonces $\alpha_1(\beta_1, \beta_2, ...\beta_n) \equiv_{\#} \alpha_2(\beta_1, \beta_2, ...\beta_n)$ para cualquier fórmula $\beta_1, \beta_2, ...\beta_n$

Solución:

(a) Como sabemos que $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$ $i \in \{1, ..., n\}$. Luego, por definición de consecuencia lógica se tiene que todas aquellas valuaciones que satisfacen a α_i necesariamente satisfacen a α_{i+1}, entonces se tiene que $\mid$ valuaciones$(\alpha_i) \mid \leq \mid$ valuaciones$(\alpha_{i+1}) \mid$ (notar que la desigualdad aparece pues, α_{i+1} puede llegar a satisfacerse con más valuaciones que aquellas en valuaciones(α_i)).

Luego, por hipótesis tenemos que,

$$\mid \text{valuaciones}(\alpha_1) \mid \leq \mid \text{valuaciones}(\alpha_2) \mid \leq ...... \leq \mid \text{valuaciones}(\alpha_n) \mid \ (1)$$

Además, como $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_n$, se tiene que,

$$\mid \text{valuaciones}(\alpha_1) \mid = \mid \text{valuaciones}(\alpha_n) \mid$$

pues todas aquellas valuaciones que satisfacen a α_1 son las mismas que satisfacen a α_n. Por lo cual la desigualdad inicial (1) queda como,

$$\mid \text{valuaciones}(\alpha_1) \mid = \mid \text{valuaciones}(\alpha_2) \mid = ... = \mid \text{valuaciones}(\alpha_n) \mid \quad (2)$$

Luego, como $\mid$ valuaciones$(\alpha_i) \mid = \mid$ valuaciones$(\alpha_{i+1}) \mid$ y $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$, entonces necesariamente, valuaciones$(\alpha_i) =$ valuaciones(α_{i+1}) lo que es equivalente a decir que,

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i+1}$$

Por lo cual de manera generalizada se obtiene que,

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv ... \equiv \alpha_n$$

Obteniendo así que,

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i+1} \forall i \neq j$$

(b) Para demostrar lo pedido basta con encontrar un ejemplo que no cumpla con el teorema de composición.

Sean las siguiente fórmulas proposicionales:

$$\alpha_1(p, q) = p$$

$$\alpha_2(p, q) = q$$

Podemos ver que $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_2$, pues ambas fórmulas tienen 2 valuaciones que las satisfacen, específicamente:

$$\alpha_1(1,0) = \alpha_1(1,1) = 1$$

$$\alpha_2(0,1) = \alpha_2(1,1) = 1$$

Luego, definimos las fórmulas β_1 y β_2:

$$\beta_1(r,s) = r \wedge s$$
$$\beta_2(r,s) = r \vee s$$

Con las definiciones anteriores tenemos que $\alpha_1(\beta_1, \beta_2)$ y $\alpha_2(\beta_1, \beta_2))$ quedan de la siguiente manera:

$$\alpha_1(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 = r \wedge s$$
$$\alpha_2(\beta_1, \beta_2) = \beta_2 = r \vee s$$

En este caso, podemos ver que $\mid$ valuaciones$(\alpha_1(\beta_1, \beta_2))$ $|\neq|$ valuaciones$(\alpha_2(\beta_1, \beta_2))$ $|$, pues para el primer caso hay 1 valuación que satisface la fórmula y para el segundo hay 3 valuaciones que la satisfacen.

Por lo tanto, concluimos que:

$$\alpha_1(\beta_1, \beta_2) \not\equiv_{\#} \alpha_2(\beta_1, \beta_2)$$

Entonces, queda demostrado que $\equiv_{\#}$ no cumple con el teorema de composición.

Ejercicio 4 — Conjuntos y relaciones, I2 2017-2

Sean A, B, C y D conjuntos, y sea $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots\}$ uma colección enumerable de conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades:

a) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

c) $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \times B = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \times B)$

Solución:

a) Supongamos que $A \subseteq B, C \subseteq D$ y sea $(x,y) \in A \times C$ arbitrario, luego tenemos

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times C \quad &\Rightarrow x \in A \wedge y \in C && \text{(def. de producto cruz)}\\
&\Rightarrow x \in B \wedge y \in C && \text{(por } A \subseteq B \text{)}\\
&\Rightarrow x \in B \wedge y \in D && \text{(por } C \subseteq D \text{)}\\
&\Rightarrow (x,y) \in B \times D && \text{(def. de producto cartesiano)}
\end{aligned}$$

Finalmente, como (x,y) es arbitrario se cumple que $A \times C \subseteq B \times D$.

b) Por demostrar:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \times C \quad &= \{(x,y) \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \{(x,y) \mid (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)\} && \text{(distributividad de } \wedge)\\
&= \{(x,y) \mid ((x,y) \in A \times C) \vee ((x,y) \in B \times C)\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \{(x,y) \mid (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)\} && \text{(def. de unión)}\\
&= (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \times B &= \left\{(x,y) \mid x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \wedge y \in B\right\} && \text{(def. de producto cartesiano)}\\
&= \left\{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i) \wedge y \in B\right\} && \text{(def. de intersección generalizada)}\\
&= \left\{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i) \wedge \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (y \in B)\right\} && \text{(idempotencia)}\\
&= \left\{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} (x \in A_i \wedge y \in B)\right\} && \text{(conmutatividad y asociatividad)}\\
&= \left\{(x,y) \mid \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} ((x,y) \in A_i \times B)\right\} && \text{(def. producto cruz)}\\
&= \left\{(x,y) \mid (x,y) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \times B)\right\} && \text{(def. de intersección)}\\
&= \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \times B)
\end{aligned}$$