Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 6

6 de noviembre de 2020

$2^{\underline{o}}$ semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 23 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada problema debe entregarse en un archivo independiente de las demas preguntas.
  - Los archivos que debe entregar son un archivo `PDF` por cada pregunta con su solución con nombre `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf` , junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo los archivos `numalumno-P1.tex` y `numalumno-P2.tex` que compilan su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1 - Algoritmos Recursivos

Determine la complejidad del algoritmo Mergesort visto en clases, sin usar el Teorema Maestro.

Solución

Como se vio en clases, la recurrencia para MergeSort es la siguiente:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n < 2 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

Usamos una sustitución $n = 2^k$ con $k > 1$:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{2^k}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{2^k}{2} \right\rceil\right) + 2^k \\
T(n) &= T\left(2^{k-1}\right) + T\left(2^{k-1}\right) + 2^k \\
T(n) &= 2^k + 2 \cdot T\left(2^{k-1}\right) \\
&= 2^k + 2 \cdot \left(2^{k-1} + 2 \cdot T\left(2^{k-2}\right)\right) \\
&= 2^k + 2^k + 2^2 \cdot T\left(2^{k-2}\right) \\
&= 2^k + 2^k + 2^2 \cdot \left(2^{k-2} + 2 \cdot T\left(2^{k-3}\right)\right) \\
&= 2^k + 2^k + 2^k + 2^3 \cdot T\left(2^{k-3}\right) \\
&\vdots \\
&= i \cdot 2^k + 2^i \cdot T\left(2^{k-i}\right)
\end{aligned}$$

Cuando $i = k$:

$$T(n) = k \cdot 2^k + 2^k \cdot T(1) = k \cdot 2^k + 2^k$$

Como $k = \log_2(n)$:

$$T(n) = \log_2(n) \cdot n + n$$

y entonces

$$T(n) \in O(n \cdot \log n \mid POTENCIA_2)$$

Ahora generalizaremos la solución por inducción. PD:

$$\exists c, \exists n_0, \forall n \geq n_0, T(n) \leq c \cdot n \cdot \log_2(n)$$

Una primera observación es que aparece una función techo, la cual podemos reemplazar sumando 1. Para deshacernos de este +1, vamos a demostrar la propiedad para $n - 2$ en lugar de n:

$$\exists c, \exists n_0, \forall n \geq n_0, T(n) \leq c \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2)$$

Ahora, necesitamos que la parte de la derecha no se haga 0 para que la desigualdad sea cierta. Por lo tanto, necesitamos que $n \geq 4$. Finalmente, como para la izquierda tenemos que

$$T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 2 \cdot (T(1) + T(1) + 2) + 4 = 12$$

y para la derecha tenemos

$$c \cdot 2 \cdot \log_2(2) = 2c$$

necesitamos que $c = 6$. Entonces, PD:

$$\forall n \geq 4, T(n) \leq 6 \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2)$$

BI: $T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 2 \cdot (T(1) + T(1) + 2) + 4 = 12 \leq 6 \cdot 2 \cdot \log_2(2) = 12$

HI: Suponemos que $\forall k < n, T(n) \leq 6 \cdot (k-2) \cdot \log_2(k-2)$.

TI: PD: $T(n) \leq 6 \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2)$. Tenemos que

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n$$

y por HI:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 6 \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right) \cdot \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2\right) + 6 \cdot \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right) \cdot \log_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 2\right) + n \\
&\leq 6 \cdot \left(\frac{n}{2} - 2\right) \cdot \log_2\left(\frac{n}{2} - 2\right) + 6 \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 - 2\right) \cdot \log_2\left(\frac{n}{2} + 1 - 2\right) + n \\
&\leq 6 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \log_2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 6 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \log_2\left(\frac{n}{2} - 1\right) + n \\
&= 6 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \log_2\left(\frac{n-2}{2}\right) + 6 \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \log_2\left(\frac{n-2}{2}\right) + n \\
&= 6 \cdot (n-2) \cdot (\log_2(n-2) - \log_2(2)) + n \\
&= 6 \cdot (n-2) \cdot (\log_2(n-2) - 1) + n \\
&= 6 \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2) - 6 \cdot (n-2) + n \\
&= 6 \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2) - 5n + 12
\end{aligned}$$

Y como $n \geq 4$, se cumple que $12 - 5n \leq 0$, y luego

$$T(n) \leq 6 \cdot (n-2) \cdot \log_2(n-2)$$

y por lo tanto $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.

Pauta (6 pts.)

a) 1 pto por plantear la recursión

b) 4 ptos por resolver la recursión

c) 1 pto por generalizar

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2 - Grafos

Sea $G = (V, E)$ y $H = (V', E')$ con $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Decimos que H es un subgrafo inducido de G si E' contiene todas las aristas entre los vértices de V' presentes en E.

Sea $G = (V, E)$ tal que G contiene un ciclo de largo impar. Demuestre que G tiene un subgrafo inducido isomorfo a P_4 o C_3.

Solución

Sea $G = (V, E)$ un grafo con un ciclo de largo impar, demostraremos la propiedad por inducción en el largo del ciclo.

BI: Consideremos el ciclo de largo 3, en este caso la propiedad se cumple de manera trivial ya que tiene un subrafo inducido isomorfo a C_3.

HI: Suponemos que todo grafo con un ciclo de largo impar $l < n$ cuenta con un subgrafo inducido isomorfo a P_4 o C_3.

TI: Mostraremos que $G = (V, E)$ con un ciclo de largo n impar debe ser tal que tiene un subgrafo isomorfo a P_4 o C_3. Dado que estamos sobre la base inductiva, el ciclo debe ser de largo mayor o igual a 5. Por lo tanto, podemos seleccionar 4 vértices adyacentes en el ciclo: v_1, v_2, v_3 y v_4. Consideremos el subgrafo inducido por estos 4 vértices. Si el subgrafo no contiene más aristas que v_1v_2, v_2v_3 y v_3v_4, entonces tendríamos un subgrafo inducido equivalente a P_4, por lo que se cumpliría la propiedad. En otro caso, alguna de las aristas v_1v_3, v_2v_4 o v_1v_4 tienen que estar en G. En el caso de existir v_1v_3 o v_2v_4, estas formarían un C_3 en $v_1v_2v_3$ o $v_2v_3v_4$ respectivamente, con lo que se cumpliría la propiedad. Finalmente, en el caso en que v_1v_4 exista en E, podemos remover las aristas v_1v_2, v_2v_3 y v_3v_4 del ciclo y completarlo con v_1v_4. De esta manera, obtenemos un ciclo de largo impar igual a $n - 3 + 1 = n - 2$, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtener un subgrafo isomofo a C_3 o P_4.

Concluímos que por inducción fuerte, todo grafo con un ciclo de largo impar debe tener un subgrafo inducido isomorfo a P_4 o C_3.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pauta (6 pts.)

a) 1 pto BI

b) 1 pto HI

c) 4 ptos TI

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.