Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

11 de octubre de 2022

2º semestre 2022 - Profesores F. Suárez - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 28 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

a) Demuestre que $|(0, \infty)| = |(0, 1)|$.

b) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es no enumerable.

Problema 2

a) Demuestre que $\log(n!) \in O(n \log n)$.

b) Dadas dos funciones f_1, f_2, se define la función $\text{máx}\{f_1, f_2\}(n)$ según

$$\text{máx}\{f_1, f_2\}(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{si } f_1(n) \geq f_2(n) \\ f_2(n) & \text{si } f_1(n) < f_2(n) \end{cases}$$

Si $g_1(n) \in O(f_1(n))$ y $g_2(n) \in O(f_2(n))$, demuestre que $g_1(n)+g_2(n) \in O(\text{máx}\{f_1, f_2\}(n))$.

c) Demuestre que si $f(n) \in O(g(n))$, entonces $f(n)^n \in O(g(n)^n)$ para todo $n > 0$.

Soluciones

Problema 1

a) Podemos definir la función f como

$$\begin{aligned} f\colon (0,1) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto -\frac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

Si mostramos que f es una biyección, podremos concluir lo pedido. Para esto, mostraremos que es inyectiva y sobreyectiva.

Inyectiva: Sean $x, y \in (0,1)$ tales que $f(x) = f(y)$. Es decir

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{x-1} = -\frac{y^2}{y-1} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2y - y^2x + y^2 - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad xy(x-y) - (y+x)(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)[xy - y - x] = 0 \end{aligned}$$

Esta última expresión es nula si ocurre uno de dos casos

- Si $x - y = 0$, concluimos que $x = y$.
- Si $xy - y - x = 0$, esto equivale a resolver

  $$y = \frac{x}{x-1}$$

  pero esta expresión no tiene solución en $(0,1)$. En efecto, como $0 < x < 1$, tenemos que $x - 1 < 0$ y la expresión $x/(x-1)$ es negativa. Como y es positivo, no es posible que sean iguales.

En el intervalo $(0,1)$, la única conclusión válida es que $x = y$, lo que demuestra que f es inyectiva.

Sobreyectiva: Sea $y \in (0,\infty)$. Buscamos una preimagen $x \in (0,1)$. Es decir,

$$\begin{aligned} y = -\frac{x^2}{x-1} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + xy - y = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(-y \pm \sqrt{y^2 + 4y}) \end{aligned}$$

Dado que $x \in (0,1)$, nos quedamos con la solución positiva, es decir, $x = \frac{1}{2}(-y + \sqrt{y^2+4y})$. Esto prueba que f es sobreyectiva.

b) Suponemos que $\mathcal{F}$ es enumerable. Es decir, existe una lista infinita de los elementos de $\mathcal{F}$. Llamaremos f_i a la i-ésima función de dicha lista y sea $a_{ij} = f_i(j)$, para $j \in \mathbb{N}$. Esto permite visualizar la siguiente matriz de imágenes

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\
\hline
f_0 & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\
f_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\
f_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Luego, definimos la función f^* según

$$f^*(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } a_{ii} = 1 \\ 1, & \text{si } a_{ii} = 0 \end{cases}$$

Claramente esta función está bien definida para todo $i \in \mathbb{N}$ y su imagen está siempre en $\{0,1\}$. Por lo tanto, f^* debe ser un elemento de $\mathcal{F}$ y debe aparecer en la lista de sus elementos. Supongamos que aparece en la posición j, es decir, $f^*(i) = f_j(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos que por construcción

$$f^*(j) \neq a_{jj} = f_j(j)$$

de manera que $f^* \neq f_j$. Como la elección de j fue arbitraria, probamos que f^* no aparece en la lista. Esta contradicción prueba que $\mathcal{F}$ no es enumerable.

<u>**Pauta**</u> (6 pts.)

a)
- 1. pto por definir biyección
- 1. pto por probar inyectividad
- 1. pto por probar sobreyectividad

b)
- 1. pto por suponer enumerabilidad y existencia de la lista
- 1. pto por definir función f^*
- 1. pto por concluir

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

a) Buscamos constantes c y n_0 tales que $\log(n!) \leq c \cdot n \log(n)$ para todo $n \geq n_0$. Como

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \log(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n) \\
&= \log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n) \\
&\leq \log(n) + \log(n) + \cdots + \log(n) \\
&= n \log(n)
\end{aligned}$$

basta tomar $c = 1$ y $n_0 = 1$.

b) Por hipótesis, como $g_1(n) \in O(f_1(n))$ y $g_2(n) \in O(f_2(n))$, existen constantes c_1, c_2, n_1, n_2 tales que

$$g_1(n) \leq c_1 f_1(n), \quad \forall n \geq n_1$$

$$g_2(n) \leq c_2 f_2(n), \quad \forall n \geq n_2$$

Definimos $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y $c = \text{máx}\{c_1, c_2\}$. Luego, acotamos la suma según

$$\begin{array}{rcll} g_1(n) + g_2(n) & \leq & c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) & (\text{para } n \geq n_0) \\ & \leq & c \cdot (f_1(n) + f_2(n)) & \\ & \leq & c \cdot \text{máx}\{f_1, f_2\}(n) & (\text{por def. de } \text{máx}\{f_1, f_2\}) \end{array}$$

Con esto, las constantes c y n_0 demuestran lo pedido.

c) Como $f(n) \in O(g(n))$, existen constantes c y n_0 tales que

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Dada una constante $m > 0$,

$$\begin{array}{rcll} f(n)^m & = & f(n) \cdot \dots \cdot f(n) & (m \text{ veces}) \\ & \leq & (cg(n)) \cdots (cg(n)) & \\ & = & c^m g(n)^m & \end{array}$$

Luego, basta tomar las constantes c^m y n_0 que demuestran lo pedido.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

a) 2 ptos por determinar constantes adecuadas y argumentar.

b) 2 ptos por determinar constantes adecuadas y argumentar.

c) 2 ptos por determinar constantes adecuadas y argumentar.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.