Matemáticas Discretas

Grafos y Árboles

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@uc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

6 de noviembre de 2023

Objetivos

1. Modelar una problemática discreta usando grafos y las técnicas asociadas, y demostrar propiedades acerca de problemas modelados como grafos.

Contenidos

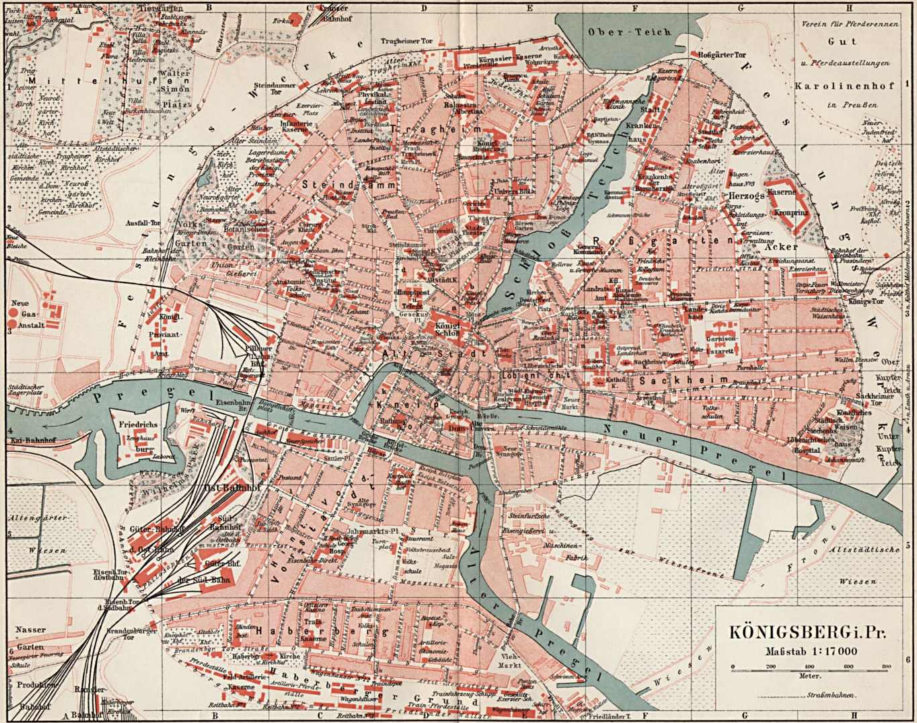
Bibliografía

- Apuntes Jorge Pérez, capítulo 2.
- Apuntes Luis Dissett, capítulo 8.
- Rosen: capítulos (grafos) y 11 (árboles).
- Epp: capítulo 10.
- Makinson: capítulo 7 (árboles).

Observación: la mayoría de las fuentes anteriores usa una definición de grafo más amplia que la que veremos nosotros en un principio. Esta definición (que llamaremos *multigrafo*) la estudiaremos hacia el final del capítulo.

¿Por qué aprender grafos?

- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia
- En general, **todo lo que se representa con relaciones binarias!**



KÖNIGSBERG i. Pr.
Maßstab 1:17000
0 200 400 600 800
Meter.
Straßenbahnen.
Ober-Teich
Schloß Teich
Pregel
Neuer Pregel
Alter Pregel
Tragheim
Steindamm
Roßgarten
Alt-Stadt
Löbenicht
Sackheim
Kneiphof
Haberberg
Haberberger Grund
Vorstadt
Mittelhufen
Friedrichsburg
Herzogs Acker
Karolinenhof in Preußen
Verein für Pferderennen
Gut
u. Pferdeaustellungen
Tragheimer Tor
Roßgärter Tor
Steindammer Tor
Königs-Tor
Sackheimer Tor
Brandenburger Tor
Friedländer T.
Ausfall-Tor
Königl. Schloß
Universität
Hauptpost
Ost-Bahnhof
Süd-Bahnhof
Pillauer Bahnhof
Kai-Bahnhof
Güter-Bahnhof
Altstädtische Wiesen
Wiesen
Festungswerke
A B C D E F G H
1 2 3 4 5 6

Alt - Stadt
Löbenicht
Kneiphof
Vorstadt
Haberberg
Dampfschiff-platz
Magazine
Lastadie
Bollwerk
Licent
Große Krahngasse
Aschhof
Neuer Speicher
Sattler-Pl.
Postamt
Grüne Brücke
Köttel-Brücke
Börse
Rathaus
Kneiph. Gymnas.
Dom
Alte Univers.
Holz-Br.
Dom-Br.
Dampf-Schneidemühle
Neue Synagoge
Hochmeisterstr.
Lindengraben-Str.
Kneiph. Holzplatz
Kneiph. Holzstraße
Kneiphof Stadthof
Alte Synagoge
Synagogenstr.
Jahrmarkts-Pl.
Vorderevorstadt
Dammstraße
Schnürlingsstr.
Selkestraße
Armen-Haus
Steinfurt'sche Eisengießerei u. Maschinen-Fabrik
Zugangsweg
Kurfürstendamm
Plantage
Steueramt
Turn-platz
Volksbrausebad
Salz-Magazin
Volks-schule
Magazinstr.
Georgsstraße
Neue Dammstr.
Borchertstraße
Hospitalstr.
II. Real-Schule
Georg-Hosp.
Eisenbahn-Direkt.
Knochenstr.
Hintere Vorstadt
Viktoria Str.
Offiziers-Kasino
Train-Kaserne
Taubstummen-Anst.
Volks-Schulen
Baptist-Kap.
Artillerie-
Alter Pregel
Hohe Br.
Städt. Realgymn.
Ehemal. Löbenicht. Hospital
Neuer Markt
Kathol. K.
Löbenichtsche K.
Elekt. Werke
Pumpstat.

Motivación

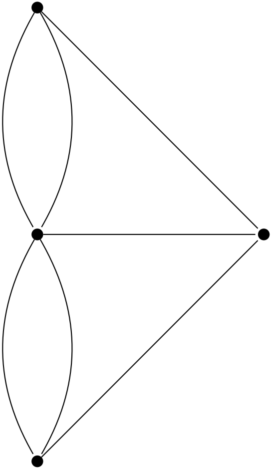


Figura: Representación simple del problema de los puentes

Motivación

Una línea aérea tiene una lista de vuelos entre ciudades del mundo, y desea saber cuáles son los posibles viajes que se pueden realizar combinando vuelos. La lista de vuelos es la siguiente:

Origen	Destino
Stgo	BsAs
Stgo	Miami
Stgo	Londres
BsAs	Stgo
Miami	Stgo
Miami	Londres
Londres	Stgo
Londres	Paris
Frankfurt	Paris
Frankfurt	Moscu
Paris	Moscu
Moscu	Frankfurt

Grafos

Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos *vértices* o *nodos*, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos *aristas*.

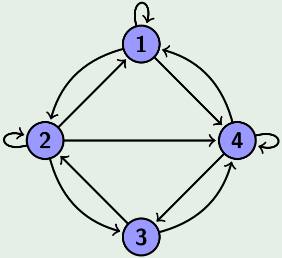
Para representar un grafo usamos puntos o círculos para dibujar vértices, y flechas para dibujar aristas. Cada arista será una flecha entre los nodos que relaciona.

Esta definición es bastante general.

- Los grafos así definidos son llamados **grafos dirigidos**.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$.



Grafos

Ahora veremos algunas clases más específicas de grafos. Para esto necesitamos un par de definiciones. Dado un grafo $G = (V, E)$:

Definición

Un **rulo** (o *loop*) es una arista $(x, y) \in E$ tal que $x = y$. Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

Definición

Dos aristas $(x, y) \in E$ y $(z, w) \in E$ son **paralelas** si $x = w$ e $y = z$. Es decir, si conectan a los mismos vértices.

El ejemplo anterior tiene rulos y aristas paralelas.

Grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

Definición (alternativa)

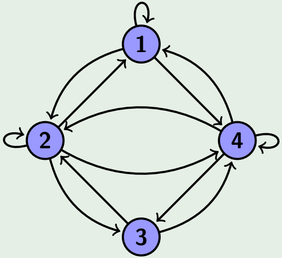
Un grafo $G = (V, E)$ es **no dirigido** si E es simétrica.

Si un grafo es no dirigido, se dibuja con trazos en lugar de flechas.

Grafos

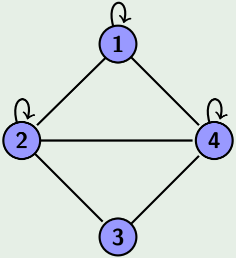
Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.



Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$.



Grafos

Definición

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación E?

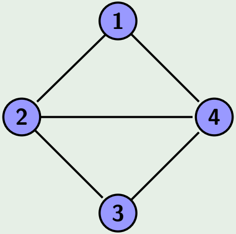
Definición (alternativa)

Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es **simple** si E es irrefleja.

Grafos

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.



Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicite otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \varnothing$ y $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$.
- E es simétrica e irrefleja.

Una pequeña definición:

Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ son **adyacentes** o **vecinos** si $(x, y) \in E$.

Isomorfismo

Definición

Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.

En tal caso:

- Diremos que f es un **isomorfismo** entre G_1 y G_2.
- Escribiremos $G_1 \cong G_2$.

Dos grafos son isomorfos si tienen "la misma forma".

- Iso $\to$ igual
- morfo $\to$ forma

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

- **Refleja:** Sea $G(V, E)$ tomemos la función $f : V \to V$ dada por $f(x) = x$. Luego, de manera trivial podemos inferir que $G \cong G$.
- **Simétrica:** Sean $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ tales que $G_1 \cong G_2$. Por definición existe $f : V_1 \to V_2$ biyectiva tal que todo $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$ (*). Además, como f es biyectiva, sabemos que es invertible. Ahora mostraremos que f^{-1} cumple la definición de isomorfismo.
  - $(\Rightarrow)$ Sea $(u_2, v_2) \in E_2$ como f es biyectiva podemos expresarlo como $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego, por (*) obtenemos $(u_1, v_1) \in E_1$. Como f^{-1} es inversa obtenemos que $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$.
  - $(\Leftarrow)$ Sea $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$, podemos reescribirlo como $(u_1, v_1) \in E_1$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego por (*) obtenemos $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ lo que es equivalente a $(u_1), f(v_1)) \in E_2$

Isomorfismo

Teorema

$\cong$ es una relación de equivalencia.

- **Transitiva:** Sean $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ y $G_3(V_3, E_3)$ tales que $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$. Por definición, sabemos que existen $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$ biyectivas tales que

$$(u_1, v_1) \in E_1 \text{ si y sólo si } (f(u_1), f(v_1)) \in E_2 \text{ (i)}$$
$$(u_2, v_2) \in E_2 \text{ si y sólo si } (g(u_2), g(v_2)) \in E_3 \text{ (ii)}$$

Sea $u_1, v_1 \in V_1$ tales que $(u_1, v_1) \in E_1$, por (i) sabemos que $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$. Luego, si aplicamos (ii) obtenemos $(g(f(u_1)), g(f(v_1))) \in E_3$. Por lo tanto, podemos utilizar $g \circ f$ como función biyectiva y concluimos que $G_1 \cong G_3$.

Isomorfismo

El concepto de isomorfismo nos permite concentrarnos en la estructura subyacente de los grafos.

- Podemos independizarnos de los nombres de los vértices.
- No importa cómo dibujemos los grafos.

Ahora veremos algunos tipos de grafos que se obtienen de tomar las clases de equivalencia de la relación de isomorfismo.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **camino** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en una línea tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en la línea.

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$, donde $V_n^P = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i+1\}$.

Un **camino** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^P.

A la clase de equivalencia $\left[G_n^P\right]_{\cong}$ la llamaremos P_n: los caminos con n vértices.

Observación: esta definición sirve para grafos dirigidos también. Para grafos simples asumimos que están las aristas paralelas correspondientes.

Clases de grafos

Definición (informal)

Un **ciclo** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en un círculo tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en él.

Definición (formal)

Considere un grafo $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$, donde $V_n^C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge j = i + 1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

Un **ciclo** (de n vértices) es un grafo isomorfo a G_n^C.

A la clase de equivalencia $\left[G_n^C\right]_{\cong}$ la llamaremos C_n: los ciclos con n vértices.

Observación: esta definición sirve para grafos dirigidos también. Para grafos simples asumimos que están las aristas paralelas correspondientes.

Clases de grafos

Definición

Un **grafo completo** es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.

A la clase de equivalencia de los grafos completos de n vértices la llamaremos K_n.

Clases de grafos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito** si V se puede particionar en dos conjuntos no vacíos V_1 y V_2 tales que para toda arista $(x, y) \in E$, $x \in V_1$ e $y \in V_2$, o $x \in V_2$ e $y \in V_1$.

Es decir:

- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
- Cada arista une a dos vértices en conjuntos distintos de la partición.

Clases de grafos

Definición

Un **grafo bipartito completo** es un grafo bipartito en que cada vértice es adyacente a todos los de la otra partición.

A la clase de equivalencia de los grafos bipartitos completos la llamaremos $K_{n,m}$, donde n y m son los tamaños de las particiones.

Más definiciones

Dado un grafo $G = (V_G, E_G)$:

Definición

Un grafo $H = (V_H, E_H)$ es un **subgrafo** de G (denotado como $H \subseteq G$) si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ y E_H sólo contiene aristas entre vértices de V_H.

Definición

Un **clique** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall v_1, v_2 \in K \ (v_1, v_2) \in E_G$.

Definición

Un **conjunto independiente** en G es un conjunto de vértices $K \subseteq V_G$ tal que $\forall u, v \in K \ (u, v) \notin E_G$.

Más definiciones

Definición

El **complemento** de G es el grafo $\overline{G} = (V_G, \overline{E_G})$, donde $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (u, v) \notin \overline{E_G}$.

Definición

Un grafo G se dice **autocomplementario** si $G \cong \overline{G}$.

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio[1]

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

[1] Artículo interesante: Mathematicians Crack a Century-Old Problem That's Perfect For Your Next Party

Más definiciones

Teorema

Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $V' \subseteq V$ es un clique en G si y sólo si es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

<u>Demostración:</u>

($\Rightarrow$) Sea $V' \subseteq V$ un clique en G. Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \in E$. Por otro lado, por definición de $\overline{G}$ sabemos que para todo $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$, y por lo tanto V' es un conjunto independiente en $\overline{G}$.

($\Leftarrow$) Sea $V' \subseteq V$ un conjunto independiente en $\overline{G}$. Por definición sabemos que para todo par de vértices $u, v \in V'$ ocurre que $(u, v) \notin \overline{E}$. Por otro lado, por definición de $\overline{G}$ sabemos que para todo $u, v \notin V'$ ocurre que $(u, v) \in E$, y por lo tanto V' es un clique en G.

Más definiciones

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

Demostración:

Sea $G(V, E)$ con $|V| = 6$, buscamos demostrar que G tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema anterior, esto es equivalente a mostrar que G tiene un clique o que $\overline{G}$ lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni G ni $\overline{G}$ tiene el clique. Sea $v \in V$ tenemos 2 casos:

- v **tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean $x, y, z \in V$ los vecinos de v tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$. Una observación importante es que no pueden existir aristas entre x, y, z dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego, x, y, z forman un conjunto independiente en G y por el teorema anterior estos vértices mismos forman un clique en $\overline{G}$.

Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

- v **tiene menos de 3 vecinos:** En este caso v no es adyacente con por lo menos 3 vertices de G. Sean x, y, z estos vértices tales que $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$. Luego, x, y, z son vecinos de v en $\overline{G}$ y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que x, y, z forman un clique de tamaño 3 en G.

Como en ambos casos llegamos a que G o $\overline{G}$ cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende G debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a M_G la **matriz de adyacencia** de G.

Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces $M_G = M_G^T$.
- ¿Cómo puedo obtener $M_{\overline{G}}$?

Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia** A_G.

- Etiquetamos las aristas de G.
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1,2), (1,4), (2,1),$
$(2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grado de un vértice

Dado un grafo G y un vértice v de él:

Definición

El **grado** de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.

Definición

La **vecindad** de v es el conjunto de vecinos de v:

$$N_G(v) = \{u \mid (v, u) \in E\}.$$

En un grafo simple, $\delta_G(v) = |N_G(v)|$.

Propiedades

Un teorema muy importante:

Teorema (Handshaking lemma)

Si $G = (V, E)$ es un grafo sin rulos, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Es decir, la suma de los grados de los vértices es dos veces la cantidad de aristas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Propiedades

Teorema (Handshaking lemma)

Si $G = (V, E)$ es un grafo sin rulos, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Demostración:
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Supongamos $|V| = n$ y $|E| = m$. Sea M la matriz de incidencia de este grafo. Una representación general de esta matriz sería de la forma:

$$M = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} e_1 & \dots & e_j & \dots & e_m \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Con v_i representando los nodos y e_j representando las aristas entre nodos.

Propiedades

A partir de la representación es posible notar que la suma de los valores en una fila cualquiera i, equivale al grado del vértice v_i. En otras palabras:

$$\delta(v_1) = \sum_{j=1}^{m} M_{1j}$$

$$\delta(v_2) = \sum_{j=1}^{m} M_{2j}$$

$$\vdots$$

$$\delta(v_i) = \sum_{j=1}^{m} M_{ij}$$

Propiedades

Luego la suma de todos los grados del grafo está dada por:

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}$$

Por otra, parte, si sumamos los valores de columna cualquiera j, obtendremos la cantidad de vértices en los que incide la arista e_j, o bien dicho: 2. En otras palabras:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 2$$

Propiedades

Ahora, si agregamos esta sumatoria por sobre todas las columnas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij} &= \sum_{j=1}^{m} 2 \\ &= 2m \\ &= 2|E| \end{aligned}$$

Dado que la suma es conmutativa, cambiar el orden de las sumatorias no altera el resultado. Luego:

$$\begin{aligned} \sum_{v\in V} \delta_G(v) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij} \\ &= 2|E| \end{aligned}$$

Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Ejercicio

En el departamento de informática de una empresa trabajan 15 empleados. Uno de ellos es la secretaria del departamento y otro es el jefe del departamento. Ambos se saludan todos los días y saludan a todos los demás empleados. Cada uno de los restantes empleados del departamento asegura que diariamente se saluda con exactamente 3 de sus compañeros (sin contar a la secretaria y el jefe). ¿Es esto posible?

Propiedades

Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

Demostración:

Sea $G = (V, E)$ un grafo sin rulos. Separemos V en dos conjuntos V_I y V_P, tales que

$$V_I = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es impar}\}$$
$$V_P = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es par}\}$$

Es simple observar que $V = V_I \cup V_P$ y a su vez $V_I \cap V_P = \varnothing$. Utilizando esto, y el resultado del *Handshaking lemma*, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{v\in V} \delta_G(v) = \sum_{v\in V_I} \delta_G(v) + \sum_{v\in V_P} \delta_G(v) = 2|E| \qquad (1)$$

Propiedades

Notemos que la segunda sumatoria actúa sólo sobre números pares, en consecuncia, debe ser par. En otras palabras, existe un entero no negativo k tal que:

$$\sum_{v \in V_P} \delta_G(v) = 2k \qquad (2)$$

Usando (2) en (1) y despejando:

$$\sum_{v \in V_I} \delta_G(v) = 2 \cdot (|E| - k)$$

Donde $|E| - k$ es un entero no negativo. En consecuencia, el valor de esta sumatoria debe ser un número par. Por las definición de V_I, sabemos que esta sumatoria actúa solo sobre números impares, luego, debe ser cierto que existe una cantidad par de estas sumas. En consecuencia $|V_I| = 2i$ para algún entero no negativo i, o en otras palabras, existe una cantidad par de vértices con grado impar.

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Conectividad

Definición

Dos vértices x e y en un grafo G están **conectados** si existe un camino en G que empieza en x y termina en y.

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

Conectividad

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

<u>Demostración:</u>

Sea $G(V, E)$ y $\sim$ la relación "estar conectados".

- **Refleja:** Sea $v \in V$ cualquiera, podemos tomar el camino (v) que une v consigo mismo. Concluímos que $v \sim v$.
- **Simétrica:** Suponemos $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$. Luego, existe un camino $(v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ que conecta v_1 y v_2. Como E es simétrica, debe existir también el camino $(v_2, u_n, \ldots, u_1, v_1)$ y por lo tanto $v_2 \sim v_1$.
- **Transitiva:** Suponemos $v_1, v_2, v_3 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Luego, existen caminos $p = (v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ y $q = (v_2, w_1, \ldots, w_m, v_3)$. Por lo tanto, debe existir el camino $((v_1, u_1, \ldots, u^*, \ldots, w_m, v_3))$ donde u^* es el último vértice del cámino q que comparte con el camino p. Si no tienen vértices en común basta con unir los caminos p y q. Concluímos que $v_1 \sim v_3$.

Conectividad

Definición

Dado un vértice v de un grafo G, su clase de equivalencia bajo la relación "estar conectados" es una **componente conexa** de G.

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

Definición

Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices $x, y \in V$ está conectado. En otro caso, G es **disconexo**.

Es decir, G tiene sólo una componente conexa.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si un grafo G con n vértices es conexo, tiene al menos $n - 1$ aristas.

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n-k$ componentes conexas.

Demostración:

Un grafo G con n vértices puede tener como máximo n componentes conexas, cuando no tiene ninguna arista, cada nueva arista que se le agregue puede reducir la cantidad de componentes a lo más en 1, por lo que luego de agregar k aristas la cantidad de componentes se ha reducido como mínimo a $n-k$, por lo que la cantidad de componentes siempre se mantiene mayor o igual a $n-k$.

Conectividad

Definición

Una **arista de corte** en un grafo G es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Definición

Un **vértice de corte** en un grafo G es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supondremos que G es conexo.

($\Rightarrow$) Por contrapositivo, mostraremos que al eliminar una arista (u, v) perteneciente a un ciclo C del grafo, este se mantiene conexo. En $G - uv$, los únicos caminos que podrían verse afectados son los que pasan por (u, v). Sea $x, y \in V$ vértices conectados por un camino que contiene a la arista (u, v). Esto quiere decir que x está conectado con u (1) y v está conectado con y (2). Ahora, como (u, v) está en C, si sacamos (u, v) se sigue cumpliendo que u está conectado con v (3), a través del camino que forma la porción restante de C. De (1) y (3) por transitividad tenemos que x está conectado con v (4), y de (4) y (2) por transitividad tenemos que x está conectado con y. Por lo tanto, (u, v) no puede ser de corte.

$(\Leftarrow)$ Por contrapositivo, supongamos ahora que $e = (u, v)$ no es una arista de corte, o sea que al sacarla G sigue siendo conexo. Esto quiere decir que existe un camino, digamos P, entre u y v en $G - e$. Luego, el camino P junto con la arista (u, v) forman un ciclo en G.

Grafos bipartitos

Lema

En un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Grafos bipartitos

Lema

En un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Demostración:

Por inducción en el largo de la caminata. La caminata cerrada más pequeña de largo impar es un ciclo de tres vértices, esta caminata ya es un ciclo así que el caso base se cumple. Supongamos como HI que toda caminata cerrada de largo impar menor a l tiene un ciclo de largo impar. Sea C una caminata cerrada de largo l impar. Si C no repite vértices entonces C ya es un ciclo impar y comprobamos lo que queríamos, si por otro lado en C se repite un vértice v, entonces podemos partir C en dos caminatas distintas que comienzan en v, C' y C''. No puede ocurrir que C' y C'' tengan largo par ya que entonces C no podría tener largo impar, por lo que al menos una de ellas es una caminata cerrada de largo impar estrictamente menor a l y por HI contiene un ciclo de largo impar, que también sería un ciclo de largo impar en C comprobando lo que queríamos.

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo simple conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- Con esto caracterizamos a los grafos bipartitos.
- ¿Qué pasa si G no es conexo?
- ¿Cómo diseñamos un algoritmo que resuelva el problema de determinar si un grafo es o no bipartito, y dé una muestra de su decisión?

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo simple conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que G contiene un ciclo de largo impar, digamos $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1)$, con k un natural impar, demostraremos que G no puede ser bipartito. Supongamos que G es bipartito con particiones V_1 y V_2 y supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Dado que C es un ciclo, necesariamente $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i < k$ y $v_k v_1 \in (G)$, por lo que debe ocurrir que $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$, etc. En general debe ocurrir que para los vértices del ciclo C, $v_i \in V_1$ si i es impar, y $v_i \in V_2$ si i es par, luego $v_k \in V_1$ lo que es una contradicción con el hecho de suponer que V_1 es una partición que contiene a v_1 ya que $v_k v_1 \in E(G)$.

Grafos bipartitos

($\Leftarrow$) Supongamos que G no contiene ningún ciclo de largo impar, demostraremos que es posible definir una partición de los vértices de G en dos conjuntos independientes. Sea v un vértice cualquiera de $V(G)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo impar de } v \text{ a } u\}$$
$$V_2 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo par de } v \text{ a } u\}$$

Si existiera una arista entre dos vértices de V_1 digamos u_1 y u_2, entonces, dado que existen caminos $v - u_1$ y $v - u_2$ ambos de largo impar, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista v_1v_2 y por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.

Grafos bipartitos

($\Leftarrow$) Si existiera una arista entre dos vértices de V_2 digamos w_1 y w_2, entonces, dado que existen caminos $v - w_1$ y $v - w_2$ ambos de largo par, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista w_1w_2 y nuevamente por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.
Finalmente no existe arista entre vértices de V_1 y no existe aristas entre vértices de V_2 y como G es conexo se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ por lo que G es bipartito con particiones V_1 y V_2.

Multigrafos

Definición

Sea V es un conjunto de vértices, E es un conjunto de aristas y $S \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que

$$S = \{\{u, v\} \mid u \in V \wedge v \in V\}$$

Un **multigrafo** $G = (V, E, f)$ es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

Ejemplo

$G = (V, E, f)$, donde $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y
$f = \{(e_1, \{1, 2\}), (e_2, \{2, 3\}), (e_3, \{2, 3\})\}$

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **ciclo Euleriano** en un (multi)grafo G es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices de G.

- Es un ciclo, por lo tanto no puede repetir aristas.
- Pueden repetirse vértices.
- Diremos que G es un **grafo Euleriano** si contiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Rightarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos y Euleriano.
Por demostrar: G es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Como G es Euleriano, tiene un ciclo C que contiene a todas las aristas y vértices. Se deduce directamente que G es conexo, pues dentro de C se pueden encontrar caminos entre todos los pares de vértices de G.

Ahora, supongamos que C empieza y termina en un vértice particular v. C necesita una arista para "salir" inicialmente y otra para "llegar" finalmente a v, y cada vez que v aparezca nuevamente en C, necesita dos aristas distintas más para entrar y salir:

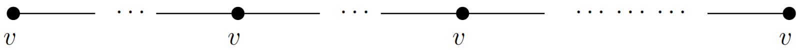


Figura: Un vértice v particular del ciclo Euleriano C y sus aristas incidentes. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Esto implica que $\delta(v)$ es necesariamente par, pues todas las aristas que lo inciden deben aparecer en C una vez cada una. El ciclo C se puede representar comenzando y terminando en cualquier vértice de G, y entonces por el mismo argumento, todos los vértices tienen grado par.

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos conexo y tal que todos sus vértices tienen grado par. Por demostrar: G es tiene un ciclo Euleriano. Se hará por inducción en la cantidad de aristas de G.

BI: Queremos tomar el grafo con el menor número de aristas que sea conexo y cuyos vértices tengan todos grado par. Si nos fijamos en el número de vértices, tenemos que el único grafo con un vértice que cumple con todas las condiciones es un vértice solo, el cual tiene un ciclo Euleriano compuesto por él mismo. El grafo más pequeño con más de un vértice que cumple con las condiciones es un grafo con dos vértices y dos aristas, el cual claramente tiene un ciclo Euleriano.

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

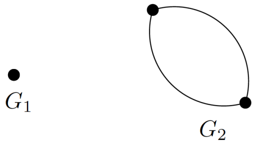


Figura: Los grafos más pequeños conexos tales que sus vértices tienen grado par. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

BI: Notemos además que cualquier grafo conexo con dos vértices de grado par tendrá un ciclo Euleriano.

HI: Supongamos que cualquier grafo conexo con vértices de grado par y que tiene menos de n aristas tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

TI: Sea G un (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen grado par y con exactamente n aristas.
Por demostrar: G tiene un ciclo Euleriano.

En la BI ya demostramos la propiedad para grafos con 1 o 2 vértices, por lo que podemos asumir que G tiene al menos 3 vértices. Como G es conexo y tiene al menos 3 vértices, debe existir un camino de largo 2 con aristas e_1, e_2 y que contiene 3 vértices v_1, v_2, v_3:

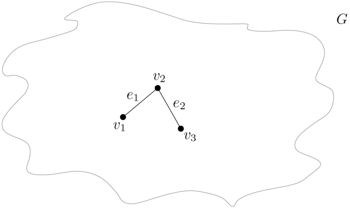


Figura: Camino de largo 2 en un grafo con al menos 3 vértices. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

TI: Creamos un nuevo grafo G' sacando e_1 y e_2 y agregando una nueva arista e entre v_1 y v_3:

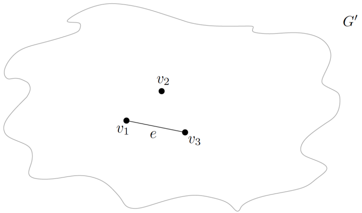


Figura: Creación de G' a partir de la eliminación de e_1 y e_2 y la inserción de e. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Notemos que G' tiene estrictamente menos aristas que G. Por otro lado, sólo v_1, v_2, v_3 pudieron ver afectados sus grados: v_1 y v_3 mantienen su grado en G', y v_2 lo redujo en 2, por lo que todos los vértices de G' tienen grado par. Sólo nos falta que G' sea conexo para aplicar la HI.

Ciclos y caminos Eulerianos

Nos pondremos entonces en dos casos:

1. G' es conexo: en este caso G' cumple con la HI, y por lo tanto tiene un ciclo Euleriano C'. Como C' contiene a todas las aristas de G', se cumple que $C' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$. Si reemplazamos de vuelta e_1 y e_2, obtenemos un ciclo $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots)$, el cual es un ciclo Euleriano en G.

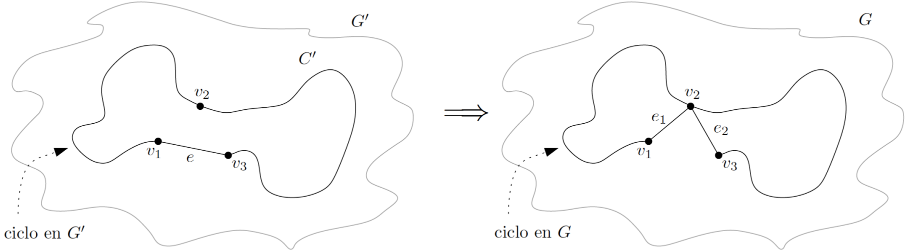


Figura: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir de uno para G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

2. G' no es conexo: como G es conexo, G' tiene dos componentes conexas: una contiene a v_2 y la otra a v_1 y v_3. A cada una de estas podemos aplicarle la HI: existe un ciclo C' que empieza y termina en v_2 que contiene a todos los vértices y aristas de la primera componente: $C' = (v_2, \dots, v_2)$; y existe otro ciclo C'' que contiene a todas las aristas de la otra componente: $C'' = (\dots, v_1, e, v_3, \dots)$.

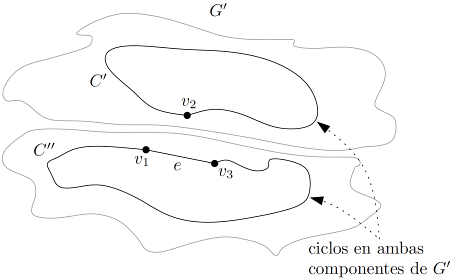


Figura: Ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

Creamos un ciclo Euleriano para G "insertando" C' en C'' entre v_1 y v_3 añadiendo de vuelta e_1 y e_2: $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_2, e_2, e_3, \ldots)$:

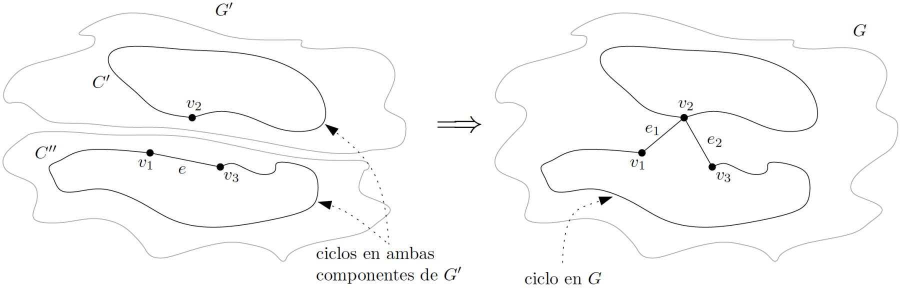


Figura: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir los ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Entonces, por inducción se concluye que cualquier (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen todos grado par es Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **camino Euleriano** en un (multi)grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que un (multi)grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v: $P = (u, \dots, v)$. Por demostrar: G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

En primer lugar, como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. En segundo lugar, si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e: $C = (u, \dots, v, e, u)$. Por el teorema anterior, todos los vértices en G' tienen grado par, por lo que en G los únicos vértices con grado impar eran u y v (pues ambos tenían una arista incidente menos). Por lo tanto, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar u y v. Por demostrar: G tiene un camino Euleriano.

Si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, y por el teorema anterior, G' tiene un ciclo Euleriano $C = (u, \ldots, v, e, u)$. Si a este ciclo le sacamos e, obtenemos un camino Euleriano $P = (u, \ldots, v)$ en G.

Ciclos Hamiltonianos

Considere los siguientes grafos:

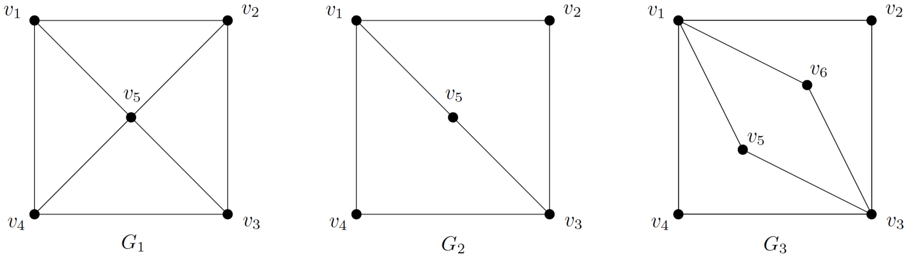


Figura: Fuente: Apuntes Jorge Pérez.

¿Es posible encontrar, en alguno de ellos, un ciclo que contenga a todos los vértices una sola vez cada uno (excepto por el inicial y final)?

R: G_1 tiene un ciclo de tales características: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$.
G_2 ni G_3 tienen tal ciclo.

Ciclos Hamiltonianos

Definición

Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo G es un ciclo en G que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

- Diremos que G es un **grafo Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.
- ¿Hay alguna relación entre grafos Eulerianos y Hamiltonianos?
  - No: G_1 es Hamiltoniano pero no Euleriano; G_2 no es Hamiltoniano ni Euleriano; y G_3 es Euleriano pero no Hamiltoniano.
- ¿Existe alguna propiedad simple para chequear si un grafo es Hamiltoniano?
- ¿Qué tan difícil es determinarlo?

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino entre ellos.

Por lo tanto, siempre es *conexo*. Si relajamos esta condición:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **bosque** si para cada par de vértices $x, y \in V$, si existe un camino entre ellos, este es único.

Un bosque se ve como un conjunto de árboles.

Árboles

En general hablaremos de árboles **con raíz**.

- Distinguimos uno de los vértices $r \in V$, al que llamaremos la **raíz** del árbol.
- Los vértices de grado menor o igual a 1 se llaman **hojas**.
- Los dibujamos con la raíz arriba y los demás vértices hacia abajo.

Árboles

Hay muchas definiciones equivalentes para los árboles:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y acíclico.

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y todas sus aristas son de corte.

Ejercicio

Demuestre las definiciones anteriores.

Árboles

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y acíclico.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Primero si T es un árbol es por definición conexo, nos falta demostrar entonces que un árbol no puede tener ciclos. Supongamos que T tuviese un ciclo, y sea C un ciclo en T que pasa por los vértices u y v. Supongamos que C parte (y termina) en u, entonces C es de la forma $(u, ..., v, ..., u)$, por lo que se puede dividir en dos porciones, una para ir de u a v, digamos p_1, y otra (distinta ya que un ciclo no repite aristas) para ir de v a u, digamos p_2. Resulta entonces que p_1 y p_2 son dos caminos distintos entre u y v en T, lo que contradice el hecho de que T es un árbol. Finalmente T no puede tener ciclos.

Árboles

($\Leftarrow$) Como T es conexo, para cada par de vértices existe un camino que los une. Falta demostrar que ese camino es único. Supongamos entonces que T no tiene ciclos pero que sin embargo existe un par de vértices con dos caminos distintos uniéndolos en T. Sean u y v estos vértices y sean p_1 y p_2 los dos caminos distintos en T que unen a u con v. Dado que estos caminos son distintos entonces ambos tienen al menos tres vértices.

Sea x el vértice anterior al primer vértice que diferencia a p_1 y p_2 (note que x está en p_1 y en p_2). Sea y el vértice siguiente a x que pertenece simultáneamente a p_1 y p_2. El camino entre x e y a través de p_1 junto con el camino entre x e y a través de p_2 forman un ciclo en T lo que contradice nuestra hipótesis de que T no tiene ciclos.

Finalmente no pueden existir dos caminos distintos entre u y v, de donde concluimos que para todo par de vértices en T existe un único camino que los une y por lo tanto T es un árbol.

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ es un **árbol** si y sólo si es conexo y todas sus aristas son de corte.

Demostración:
En la sección anterior demostramos que una arista es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en el grafo. Ahora, T es un árbol si y sólo si T es conexo y no tiene ningún ciclo, si y sólo si todas sus aristas cumplen con la propiedad de no pertenecer a un ciclo, si y sólo si, todas sus aristas son de corte.

Vimos que un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de largo impar. De esto se deduce inmediatamente que:

Teorema

Todo árbol es un grafo bipartito.

Árboles

La siguiente propiedad nos permitirá hacer demostraciones por inducción sobre los árboles:

Teorema

Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ (el grafo que resulta de quitar el vértice y sus aristas incidentes) es un árbol.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

Si T es un árbol y v es una hoja de él, entonces el grafo $T - v$ es un árbol.

<u>Demostración:</u>

Para demostrar que el grafo $T - v$ es un árbol debemos comprobar que para cualquier par de vértices en $T - v$, existe un único camino que los une. Sea u y w dos vértices en T distintos de v, y sea la secuencia $P = (u, u_1, u_2, ..., u_n, w)$ el único camino en T que une a u con w. Es claro que el vértice v no aparece en P ya que todos los vértices de P (excepto u y w) deben tener grado al menos 2, luego si eliminamos v de T no afecta al camino entre u y w, luego el camino $P = (u, u_1, u_2, ..., u_n, w)$ entre u y w también existe en $T - v$. Como la demostración la hicimos en general para un par de vértices cualquiera, en $T - v$ existe un único camino entre todo par de vértices y por lo tanto $T - v$ también es un árbol.

Ahora podemos establecer una última definición muy simple de un árbol:

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un **árbol** si y sólo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Ejercicio

Demuestre que la definición anterior es equivalente a las demás.

Con esto podemos determinar rápidamente si un grafo conexo es o no un árbol.

Definición

Un grafo $T = (V, E)$ con n vértices es un **árbol** si y sólo si es conexo y tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Si T es un árbol con n vértices, entonces claramente es conexo, falta mostrar que tiene exactamente $n - 1$ aristas, lo haremos por inducción en n.

BI: Si $n = 1$ tenemos un árbol con sólo un vértice y sin aristas, por lo que se cumple la propiedad: $|E| = 0 = 1 - 1 = n - 1$.

HI: Supongamos que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

TI: Sea ahora T un árbol con $n + 1$ vértices, queremos demostrar que T tiene exactamente $(n + 1) - 1 = n$ aristas. Centrémonos en una hoja v cualquiera. Por el lema anterior $T - v$ también es un árbol y tiene exactamente n vértices por lo que se aplica la HI, luego $T - v$ tiene exactamente $n - 1$ aristas. Dado que v es una hoja, v tiene grado 1 en T y por lo tanto T tiene exactamente una arista más que $T - v$, o sea T tiene exactamente n aristas, por lo que se cumple la propiedad.

$(\Leftarrow)$ En la sección anterior demostramos que un grafo con n vértices y k aristas tiene al menos $n-k$ componentes conexas. Si T es un grafo conexo con n vértices y exactamente $n-1$ aristas y tomamos una arista e cualquiera de T, entonces dado que $T-e$ tiene $n-2$ aristas, por el teorema mencionado, $T-e$ tiene al menos dos componentes conexas y por lo tanto e es una arista de corte. Dado que elegimos e como una arista cualquiera, T cumple con que todas sus aristas son de corte y por lo tanto T es un árbol.

Árboles

Las siguientes definiciones se usan mucho en aplicaciones de los árboles en computación.

Definición

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r y x un vértice cualquiera.

- La **profundidad** de x es el largo del camino que lo une con r (r tiene profundidad 0).
- La **altura** o **profundidad** del árbol es el máximo de las profundidades de sus vértices.
- Los **ancestros** de x son los vértices que aparecen en el camino entre él y r. Note que x es ancestro de sí mismo.
- El **padre** de x es su ancestro (propio) de mayor profundidad. Diremos que x es **hijo** de su padre.
- Dos vértices x e y con el mismo padre son **hermanos**.

Árboles binarios

Definición

Un árbol con raíz se dice **binario** si todo vértice tiene grado a lo más 3; o equivalentemente, si todo vértice tiene a lo más dos hijos.

Podemos distinguir entre hijos izquierdos y derechos.

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Demostración:

Por inducción en la cantidad de vértices del árbol binario.

BI: El caso base es un árbol compuesto por sólo un vértice, la raíz. Un árbol de estas características tiene sólo una hoja y ningún vértice con dos hijos, luego cumple la propiedad.

HI: Supongamos que un árbol binario con n vértices tiene una hoja más que vértices con dos hijos.

TI: Sea T un árbol binario con $n+1$ vértices. Sea v una hoja de T, sabemos que $T-v$ es también un árbol binario y tiene exactamente n vértices por lo que $T-v$ cumple con HI, o sea tiene una hoja más que vértices con dos hijos. Supongamos que $T-v$ tiene k vértices con dos hijos entonces por HI tiene $k+1$ hojas. Lo que podamos decir dependerá de si v tenía o no un hermano.

Árboles binarios

- Si v tiene un hermano en T, entonces el padre de$V$ es un vérticee con dos hijos en T. Ahora, en el árbol $T - v$, el vértice que era padre de v tiene sólo un hijo. Lo anterior quiere decir que T tiene exactamente un vértice más con dos hijos que $T - v$, o sea que T tiene exactamente $k + 1$ vértices con dos hijos. Ahora también ocurre que T tiene exactamente una hoja más que $T - v$, o sea que T tiene $k + 2$ hojas. Hemos concluido que T tiene $k + 2$ hojas y $k + 1$ vértices con dos hijos y por lo tanto cumple con la propiedad.
- Si v no tiene hermano, entonces el vértice padre de v en T se convierte en una hoja en el árbol $T - v$, lo que quiere decir que$T$ y $T - v$ tienen exactamente la misma cantidad de hojas, $k + 1$. El único vértice que ve afectado su cantidad de hijos en $T - v$ es el padre de v, este tiene exactamente un hijo en T y 0 hijos en $T - v$ por lo que la cantidad de vértices con dos hijos en T es también la misma que en $T - v$ e igual a k. Hemos concluido que T tiene $k + 1$ hojas y k vértices con dos hijos y por lo tanto cumple con la propiedad.

Árboles binarios

Teorema

La cantidad de vértices sin hijos de un árbol binario es la cantidad de vértices con exactamente dos hijos más 1.

Ejercicio

La ANFP está organizando la Copa Chile 2022. Si este año participan n equipos, ¿cuántos partidos se jugarán?

Respuesta: $n - 1$

Árboles binarios

Finalmente, podemos tomar una clase de árboles binarios que se usan mucho para establecer cotas para las aplicaciones de ellos.

Definición

Un **árbol binario completo** es un árbol binario tal que:

1. Todas las hojas están a la misma profundidad.
2. Todos los vértices que no son hojas tienen exactamente dos hijos.

Árboles binarios

Teorema

1. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente 2^H hojas.
2. Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente $2^{H+1}-1$ vértices.
3. Si H es la altura de un árbol binario completo con n vértices, entonces $H \leq \log_2(n)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema anterior.

Árboles binarios

Teorema

Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente 2^H hojas.

Demostración:
Sea $T = (V, E)$ un árbol binario completo, demostraremos la propiedad por inducción en la altura H.

BI: Si $H = 0$ entonces T corresponde un vértice sin aristas. Luego la cantidad de hojas es igual a $1 = 2^0 = 2^H$.

HI: Suponemos que todo árbol de altura H tiene 2^H hojas.

TI: Sea T un árbol de altura $H + 1$ y raíz r. Si eliminamos r del árbol junto con sus aristas incidentes obtenemos un bosque de 2 árboles binarios completos de altura H. Luego, podemos aplicar la HI, con lo que cada árbol en $T - r$ tiene 2^H hojas. Es claro que la cantidad de hojas de T es igual a la suma de todas las hojas de los arboles inducidos al remover r. Con lo que T tendrá una cantidad de hojas igual a $2^H + 2^H = 2 \cdot 2^H = 2^{H+1}$.

Árboles binarios

Teorema

Un árbol binario completo de altura H tiene exactamente $2^{H+1}-1$ vértices.

<u>Demostración:</u>
Sea T un árbol binario completo con altura H. Por el teorema anterior T debe tener 2^H hojas. Luego, por el otro teorema anterior sabemos que debe tener 2^H-1 vértices con exactamente 2 hijos. Dado que todo vértice en un árbol binario es hoja o tiene 2 hijos, concluimos que T debe tener $2^H+(2^H-1)=2\cdot 2^H-1=2^{H+1}-1$ vértices.

Teorema

Si H es la altura de un árbol binario completo con n vértices, entonces $H \leq \log_2(n)$.

Demostración:

Sea T un árbol binario completo con n vértices y altura H. Sabemos que la cantidad de hojas (2^H) tiene que ser menor o igual a la cantidad total de vértices (n).

$$2^H \leq n \Rightarrow H \leq \log_2(n)$$

Matemáticas Discretas

Grafos y Árboles

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@uc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

6 de noviembre de 2023