Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Demuestre la siguiente equivalencia lógica en lógica de predicados para toda fórmula α y β:

$$\exists x.(\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\alpha) \vee (\exists x.\beta)$$

Solución:

Para esta pregunta, se debía demostrar que $\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Leftrightarrow \exists x(\alpha(x)) \vee \exists x(\beta(x))$. Demostraremos ambas direcciones
(=>)
Partimos de la suposición de que $I \vDash \exists x(\alpha(x) \vee \beta(x))$, luego desarrollamos:

$$\begin{aligned}
&I \vDash \exists x(\alpha(x) \vee \beta(x))\\
&\Rightarrow \exists a \in I(Dom)(I \vDash \alpha(a) \vee \beta(a))\\
&\Rightarrow \exists a \in I(Dom)(I \vDash \alpha(a)) \text{ S.P.D.G}\\
&\Rightarrow I \vDash \exists x \alpha(x)\\
&\Rightarrow I \vDash \exists x \alpha(x) \vee \exists x \beta(x)
\end{aligned}$$

(<=) Ahora veremos el otro lado, partiendo de la suposición $I \vDash (\exists x \alpha(x)) \vee (\exists x \beta(x))$

$$\begin{aligned}
&I \vDash (\exists x \alpha(x)) \vee (\exists x \beta(x))\\
&\Rightarrow I \vDash \exists x \alpha(x) \text{ S.P.D.G}\\
&\Rightarrow \exists a \in I(Dom)(I \vDash \alpha(a))\\
&\Rightarrow \exists a \in I(Dom)(I \vDash \alpha(a) \vee \beta(a))\\
&\Rightarrow \exists x(\alpha(x) \vee \beta(a))
\end{aligned}$$

Es importante notar que los pasos no son bidireccionales, ya que el SPDG ocurre en etapas distintas en cada dirección. En la primera dirección, ocurre en el paso 3, y en la segunda ocurre en el paso 2.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**3 Puntos**) por lado si se demuestra correctamente

(**2 Puntos**) por lado si olvidan el SPDG

(**1 Puntos**) en total si hay bidireccionalidad entre las expresiones

(**0 Puntos**) si la demostración es incorrecta

Pregunta 2

Suponga la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ de los símbolos de predicados $L(x,y), S(x,y,z), M(x,y,z)$ y $x = y$ sobre el dominio de los naturales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(L) &:= x < y \\
\mathcal{I}(S) &:= x + y = z \\
\mathcal{I}(M) &:= x \times y = z \\
\mathcal{I}(=) &:= x = y
\end{aligned}$$

Pregunta 2.1

Para la siguiente fórmula de predicados:

$$\forall x.\exists y.\exists z.\neg\big(\forall u.\neg(x = u) \to L(x,u)\big) \wedge \neg\big(\forall v.\neg(y = v) \to L(y,v)\big) \wedge \exists r.\exists s.M(r,r,y) \wedge M(s,s,z) \wedge S(y,z,x)$$

diga si es verdadera o falsa en la interpretación $\mathcal{I}$ explicando su significado. Demuestre su respuesta.

Solución:

De la anterior fórmula de predicados podemos interpretar lo siguiente (recordar que la interpretación es sobre los números naturales):

"Todo natural x es la suma de dos cuadrados perfectos (i.e $x = y^2 + z^2$) tal que $x \neq 0$ y $y \neq 0$".

Demostraremos que la fórmula de predicados en la interpretación $\mathcal{I}$ es falsa mediante un contra-ejemplo. Tomemos $x = 3$, notemos que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Es fácil ver que no existe forma de que x sea la suma de dos cuadrados perfectos dadas las condiciones:

$$\begin{aligned}
2^2 + 2^2 &\neq 3 & \qquad 2^2 + 1^2 &\neq 3 \\
2^2 + 0^2 &\neq 3 & \qquad 1^2 + 2^2 &\neq 3 \\
1^2 + 1^2 &\neq 3 & \qquad 1^2 + 0^2 &\neq 3
\end{aligned}$$

Queda demostrado entonces que la fórmula de predicados es falsa.

■

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**0.3 Puntos**) Identificar que $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

(**1 Punto**) Identificar que todo número natural es la suma de dos cuadrados perfectos.

(**0.5 Puntos**) Mencionar que la fórmula de predicados es falsa.

(**1.2 Puntos**) Demostrar correctamente que la fórmula de predicados es falsa.

Pregunta 2.2

Escriba la siguiente fórmula en lógica de predicados sobre $\mathcal{I}$.

> "Para todo número n, existe un número mayor m que es divisible
> por al menos tres números distintos entre sí y a la vez distintos de 1 y m."

Justifique su respuesta.

Solución:

En base a lo pedido vamos a definir las fórmulas α_1, α_d y α_D, tal que:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &= M(x,x,x) \wedge \neg S(x,x,x)\\ \alpha_d(x,y) &= \exists k.\ M(x,k,y)\\ \alpha_D(x,y,z) &= \neg(x=y) \wedge \neg(x=z) \wedge \neg(y=z)\end{aligned}$$

En palabras, α_1 determina el número 1; tal que la fórmula es falsa para cualquier otro natural. α_d determina si y es divisible por x; tal que $x \cdot k = y$ y α_D determina si los números x, y, z son diferentes entre si.

Luego, definimos la fórmula α, tal que:

$$\alpha = \forall n.\ \exists m.\ (n < m) \wedge \exists d_1.\ \exists d_2.\ \exists d_3.\ \left(\alpha_D(d_1,d_2,d_3) \wedge \bigwedge_{i=1}^{3} \Big(\alpha_d(d_i,m) \wedge \neg(d_i = m) \wedge \neg\alpha_1(d_i)\Big)\right)$$

Es decir, “para todo número n, existe número mayor m que es divisible por los naturales d_1, d_2 y d_3, tal que: son distintos entre si, dividen a m, pero son distintos de m y tambien, diferentes de 1”.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**0.3 Puntos**) Por afirmar que $\forall n.\ \exists m.\ (n < m)$

(**0.5 Puntos**) Por afirmar, mediante una fórmula, que existen tres divisores distintos

(**0.5 Puntos**) Por afirmar, mediante una fórmula, que los divisores dividen a m.

(**0.3 Puntos**) Por afirmar, mediante una fórmula, que los divisores son distintos de m.

(**0.7 Puntos**) Por afirmar, mediante una fórmula, que los divisores son distintos de 1.

(**0.7 Puntos**) Por la explicacion correcta de todos los incisos.

Pregunta 3

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

Pregunta 3.a

Sea Σ un conjunto de fórmulas redundantes y sea $\alpha \in \Sigma$ una fórmula tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$. Demuestre que para toda fórmula β se tiene que $\Sigma \models \beta$ si, y solo si, $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \beta$.

Solución: Se pide demostrar $\Sigma \vDash \beta \iff \Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \beta$, de modo que la demostración se divide en dos partes.

- $\Sigma \vDash \beta \Rightarrow \Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \beta$

  Del enunciado se tiene que dado que Σ es redundante, existe un α particular tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \alpha$. Luego es posible plantear una valuación $\bar{v}$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\}(\bar{v}) = 1$ y $\alpha(\bar{v}) = 1$, de lo anterior se tiene que $\Sigma(\bar{v}) = 1$. Finalmente considerando que $\Sigma \vDash \beta$, esta valuación $\bar{v}$ también cumple que $\beta(\bar{v}) = 1$.

  Entonces, dado que para $\bar{v}$ se tiene que $\Sigma \setminus \{\alpha\}(\bar{v}) = 1$ y $\beta(\bar{v}) = 1$, queda demostrado que $\Sigma \vDash \beta \Rightarrow \Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \beta$.

- $\Sigma \vDash \beta \Leftarrow \Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \beta$

  Se cumple según propiedad vista en clases.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**0.5 Puntos**) por utilizar del enunciado $\Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \alpha$

(**0.5 Puntos**) por asumir $\Sigma \vDash \beta$

(**1 Puntos**) por plantear la valuación $\bar{v}$ e indicar que dado que $\Sigma \setminus \{\alpha\}(\bar{v}) = 1$ y $\alpha(\bar{v}) = 1$ entonces $\Sigma(\bar{v}) = 1$

(**1 Puntos**) por indicar que dado que $\Sigma(\bar{v}) = 1$ y $\Sigma \vDash \beta$ entonces $\beta(\bar{v}) = 1$ y concluir la demostración

(**3 Puntos**) por señalar la propiedad explicada en clases para $\Sigma \vDash \beta \Leftarrow \Sigma \setminus \{\alpha\} \vDash \beta$

Pregunta 3.b

Una fórmula proposicional β se dice que es una *cláusula disyuntiva* si es de la forma $\beta = l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$ para algún $k \geq 1$ y cada l_i es un literal con $1 \leq i \leq k$, esto es, l_i es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Demuestre que si Σ es un conjunto de fórmulas NO redundante, entonces para toda fórmula $\alpha \in \Sigma$, existe una fórmula proposicional β que es una cláusula disyuntiva, tal que $\Sigma \models \beta$ y $\Sigma \setminus \{\alpha\} \not\models \beta$.

Solución:

Se nos pide demostrar que si tenemos un conjunto de fórmulas no redundante Σ, entonces para todo $\alpha \in \Sigma$ existe una cláusula disyuntiva β tal que $\Sigma \vDash \beta$ y $\Sigma \diagdown \{\alpha\} \nvDash \beta$, por lo que a partir de un Σ y $\alpha \in \Sigma$ arbitrarios, construiremos β.

Como Σ es no redundante tenemos que $\Sigma \diagdown \{\alpha\} \nvDash \alpha$, esto significa que existe $\bar{v}$ tal que satisface $\Sigma \diagdown \{\alpha\}$ pero $\alpha(\bar{v}) = 0$, entonces definimos β como:

$$\beta = \left(\bigvee_{i:\bar{v}i=0} p_i \right) \vee \left(\bigvee_{i:\bar{v}i=1} \neg p_i \right)$$

Donde los p_i son las variables o literales que componen $\bar{v}$.

De esta forma vemos que, dada una valuación $\bar{u}$, se cumplirá que $\beta(\bar{u}) = 1 \iff \bar{u} \neq \bar{v}$.

Ahora que ya tenemos β debemos verificar que cumpla lo pedido:

1. $\Sigma \vDash \beta$**:** Dado $\bar{u}$ que satisface Σ, en particular satisface α y por tanto $\beta(\bar{u}) = 1$.
2. $\Sigma \diagdown \{\alpha\} \nvDash \beta$**:** Por la forma en que escogemos $\bar{v}$, sabemos que satisface $\Sigma \diagdown \{\alpha\}$ pero dado que $\beta(\bar{u}) = 1 \iff \bar{u} \neq \bar{v}$, tenemos que para la valuación $\bar{v}$ no se satisface β .

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**1 Punto**) Por concluir la existencia de $\bar{v}$ y caracterizarlo.

(**1 Puntos**) Por caracterizar β.

(**1 Puntos**) Por construir β.

(**1 Puntos**) Por concluir los casos para los que se satisface β.

(**1 Puntos**) Por demostrar que $\Sigma \vDash \beta$.

(**1 Puntos**) Por demostrar que $\Sigma \diagdown \{\alpha\} \nvDash \beta$

Pregunta 4

Sea $p_1, \ldots, p_n$ variables proposicionales.

Pregunta 4.1

Construya un conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tal que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo i y j con $i \neq j$, $m = 2^{2^{n-1}}$ y Σ es satisfacible. Solución:

Sean $p_1, ..., p_n$ variables propocicionales. Por el hint del enunciado sabemos que existen 2^{2^n} tablas de verdad distintas

Fijando la valuación $(0,0,0,...,0)$ como verdadera en todas las tablas, dado que b_i puede tomar el valor 0 o 1, se tiene que para $b = (1, b_2, b_3, ..., b_{2^n})$ existen 2^{2^n-1} valores distintos, generando así 2^{2^n-1} tablas de verdad distintas:

p_1	p_2	p_3	...	p_n	α_i	
0	0	0	...	0	1	
1	0	0	...	0	b_2	$\left.\right\}$ $2^n - 1$
0	1	0	...	0	b_3	
			.		.	
			.		.	
			.		.	
1	1	1	...	1	b_{2^n}	

Sea $\vec{v_i}$ la valuación en la fila i de la tabla de verdad.

Dado el argumento anterior, se tienen 2^{2^n-1} tablas de verdad distintas tal que para la valuación $\overbrace{0,0,0,...,0}^{n}$ es verdadero.

Sean $T_1, ..., T_m$ con $m = 2^{2^n-1}$ tablas distintas. Como se vio en clases, por cada tabla T_i es posible construir una fórmula α_i tal que $b_j = 1$ si, y solo si, $\alpha_i(\vec{v_j}) = 1$.

Nos queda demostrar los siguientes puntos sobre $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$:

1. PD: $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo $i \neq j$. Como T_i y T_j son distintas tablas de verdad entonces tenemos que existe una fila k tal que $T_i(\vec{v_k}) \neq T_j(\vec{v_k})$. Entonces $\alpha_i(\vec{v_k}) \not\equiv \alpha_j(\vec{v_k})$, lo que implica que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$.

2. PD: $m > 2^{2^{n-1}}$. Como $2^n - 1 > 2^{n-1}$, entonces $2^{2^n-1} > 2^{2^{n-1}}$ y por lo tanto $m > 2^{2^{n-1}}$.

3. PD: $\Sigma = \{\alpha_1, .., \alpha_m\}$ es satisfacible. Con la valuación $(0,0,0,...,0)$ se cumple que $\alpha_i(0,0,0,...,0) = 1$ para todo i. Entonces Σ es satisfacible.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- **(3 puntos)** Por construir tabla fijando valuación.
- **(2 puntos)** Por concluir que hay 2^{2^n-1} tablas de verdad distintas y argumentar que para cada tabla existe una fórmula satisfacible.
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$
- **(0.5 puntos)** Por demostrar correctamente que $\Sigma = \{\alpha_1, .., \alpha_m\}$ es satisfacible.

Pregunta 4.2 (BONUS)

Demuestre que si se tiene un conjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tal que $m > 2^{2^n-1}$ y $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo i y j con $i \neq j$, entonces Σ no puede ser satisfacible.

En otras palabras, usted habrá demostrado que el conjunto más grande de fórmulas proposicionales no equivalentes y satisfacibles es a los más $2^{2^{n-1}}$.
Hint: Considere que para variables $p_1, \ldots, p_n$ existen 2^{2^n} tablas de verdad distintas.

Solución:

Debido al error en enunciado, se otorgará 10 décimas a la nota final si el estudiante mencionó alguna de las siguientes dos respuestas:

1. No se puede demostrar lo pedido, pues existe $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ con $m = 2^{2^n-1}$ tal que Σ es satisfacible, y claramente $m > 2^{2^{n-1}}$.

2. Asumir que el enunciado hacia referencia a un $m = 2^{2^n-1}$ y demostrar la idea original.

   Supongamos por contradicción, que existe un $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ cumpliendo que $m > 2^{2^n-1}$ y $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$, para todo $i \neq j$, pero que este Σ si es satisfacible. Luego, existe una valuación $\bar{v}$ tal que $\alpha_i(\bar{v}) = 1$ para todo $i \leq m$. Del inciso anterior, se tiene que existen a lo más 2^{2^n-1} tablas de verdad distintas tal que la valuación/entrada $\bar{v}$ es igual a 1. Luego, como tenemos $m > 2^{2^n-1}$ formulas, deben existir α_i y α_j con $i \neq j$ tales que tengan la misma tabla de verdad. Por lo tanto, $\alpha_i \equiv \alpha_j$ para $i \neq j$. Lo cual es una contradicción.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- **(10 décimas a la nota final)** Por mencionar alguno de los dos items.