Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2019

INTERROGACION 1

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Sea $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ y $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la valuación correspondiente a la i-ésima fila de la tabla de verdad de φ con valor $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i)$. Demuestre que:

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \models \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i)=1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i=0} \neg p_j \right) \right)$$

Pregunta 2

Para las siguientes preguntas considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ con predicados binarios $O(\cdot, \cdot)$ y $E(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}(\text{Dom}) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(O(x,y)) & := & x \leq y \\ \mathcal{I}(E(x,y)) & := & x = y \end{array}$$

Además, decimos que un elemento a en el dominio $\mathcal{I}(Dom)$ es *definible* bajo la interpretación $\mathcal{I}$ si existe una fórmula en lógica de predicados $\varphi(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi(b)$ si, y solo si, $b = a$.

1. Demuestre que el número 0 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
2. Demuestre que el número 2 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
3. Demuestre que cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ es definible bajo la interpretación $\mathcal{I}$, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una fórmula $\varphi_n(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi_n(a)$ si, y solo si, $a = n$.

Para las formulas anteriores usted solo puede utilizar lógica de predicados $(\forall x, \exists y, \wedge, \vee, \neg, \ldots)$ y los predicados $O(\cdot, \cdot)$ y $E(\cdot, \cdot)$ asumiendo que esta en el dominio $\mathbb{N}$.

Pregunta 3

Sea $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de formulas proposicionales y φ una formula proposicional. Decimos que φ es *consecuencia lógica débil* de Σ, que denotamos como $\Sigma \vdash \varphi$, si para toda valuación $\bar{v}$, si existe algún $i \leq n$ tal que $\varphi_i(\bar{v}) = 1$, entonces $\varphi(\bar{v}) = 1$. En otras palabras, para toda valuación que hace verdadera alguna formula de Σ, entonces debe hacer verdadera φ.

Para las siguientes preguntas sobre consecuencia lógica débil, debe responder si es verdadero o falso. En caso de responder verdadero, demuestrelo, y en caso de responder falso, de un contra ejemplo.

1. ¿Es cierto que si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi\} \vdash \varphi$, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$?
2. ¿Es cierto que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ si, y solo si, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ no es satisfacible?

Pregunta 4

Sea $p_1, \ldots, p_n$ variables proposicionales con $n \geq 1$. Considere las siguientes formulas proposicionales:

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (p_{n-1} \rightarrow p_n) \cdots)) \\
\beta_n &= (\cdots((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3) \rightarrow \ldots \rightarrow p_{n-1}) \rightarrow p_n \\
\gamma_n &= (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_4) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)
\end{aligned}
$$

1. ¿Para cuales n se cumple que $\alpha_n \equiv \gamma_n$? Demuestre su afirmación.
2. ¿Para cuales n se cumple que $\beta_n \equiv \gamma_n$? Demuestre su afirmación.