Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 6

1 de diciembre de 2021

2º semestre 2021 - Profesores M. Bucchi - G. Diéguez - F. Suárez

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 29 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La *distancia* entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el *ancho* de G, denotado como $A(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices.

a) Demuestre que si $A(G) \geq 4$ entonces $A(\bar{G}) \leq 2$.

b) Demuestre que si G tiene un vértice de corte y $A(G) = 2$, entonces $\bar{G}$ tiene un vértice sin vecinos.

Solución

a) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $A(G) \geq 4$. Denotaremos por $d(x, y)$ a la distancia entre los vértices x e y en G y $\overline{d}(x, y)$ a la distancia entre x e y en $\overline{G}$.

   Sean u, v los vértices de inicio y fin del camino que representa al ancho de G. Demostraremos que para todo par de vértices $x, y \in V$ se tiene que $\overline{d}(x, y) \leq 2$.

   Consideremos $x, y \in V$ dos vértices cualquiera. En primer lugar notemos que ni x ni y pueden ser adyacentes con u y v a la vez, ya que formarían un camino de largo 2 (por ejemplo $u - x - v$) y disminuirían el ancho de G. Ahora tenemos los siguientes casos:

   - $xy \notin E$: Por definición de complemento $xy \in \overline{E}$ y por lo tanto $\overline{d}(x, y) = 1$.
   - $xy \in E$: Dado que existe una arista $x - y$, no puede darse el caso en que x e y sean adyacentes a u y a v por separado. Esto porque se generaría un ciclo y por ende un camino $u - x - y - v$ de largo 3, con lo que disminuiría el ancho de G. Ahora tenemos 2 casos:
     - u y v no son adyacentes ni a x ni a y en G: Dado que $xu, yu \notin E$, en $\overline{G}$ obtenemos el camino $x - u - y$, por ende $\overline{d}(x, y) = 2$.
     - Solo u es adyacente a x o y en G. En este caso $vx, vy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - v - y$ en $\overline{G}$ de largo 2.
     - Solo v es adyacente a x o y en G. En este caso $ux, uy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - u - y$ en $\overline{G}$ de largo 2.

   Como no tenemos más casos posibles, y cada caso demostramos que $\overline{d}(x, y) \leq 2$, concluimos que $A(\overline{G}) \leq 2$.

b) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo[1] con un vértice de corte v y $A(G) = 2$.

[1]Si el grafo no es conexo la demostración aplicará para cada una de sus componentes conexas.

Como v es de corte, si lo removemos aumenta la cantidad de componentes conexas, y por ende el grado de v es al menos 2. Sean u, w dos vértices adyacentes a v en G, y sea C la componente conexa a la que pertenece u. Demostraremos que para todo vértice x de C es adyacente a v, o en otras palabras, demostraremos que $d(v, x) = 1$.

Por contradicción, suponemos que $d(v, x) = k$ con $k \geq 2$. Luego, debe existir un camino $(x, c_1, \ldots, c_{k-1}, v)$ de largo k que sólo utiliza sólo aristas de C. Además, como v y w son adyacentes, también tendremos el camino $(x, c_1, \ldots, c_n, v, w)$ de largo $k + 1$. Notemos que este camino es el menor camino posible entre x y w, ya que no pueden existir otros caminos que no pasen por v (porque dejaría de ser de corte). Esto contradice el hecho de que $A(G) = 2$ y por ende $d(v, x) = 1$.

Como C es arbitrario, podemos aplicar el mismo argumento para todas las componentes conexas generadas al remover v y concluir que G cumple $\forall x \in V((v, x) \in E)$.

Finalmente, por definición de complemento, obtenemos que

$$\forall x \in V((v, x) \in E) \text{ si y sólo si } \forall x \in V((v, x) \notin \overline{E})$$

Es decir, v es un vértice sin vecinos en $\overline{G}$.

Pauta (3 pts.)

- 3 pto por a).
- 3 ptos por b).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Sea $T = (V, E)$ un árbol y $v_1, v_2 \in V$ tales que $\delta_T(v_1) \geq 3$ y $\delta_T(v_2) \geq 4$.

Demuestre que T tiene al menos 5 hojas:

a) Usando el *Handshaking Lemma*.

b) Sin usar el *Handshaking Lemma*.

Solución

a) Suponga que T tiene n vértices. Como este es un árbol, entonces debe tener exactamente $n - 1$ aristas. Sea k_i la cantidad de vértices con grado i; tenemos que:

- $\sum_i k_i = n$, porque hay n vértices, y
- $\sum_i i \cdot k_i = 2(n-1)$, por el *Handshaking Lemma*.

Restando dos veces la primera ecuación de la segunda obtenemos que:

$$\sum_i (i-2) \cdot k_i = -2$$

Notemos que solo los vértices de grado 1 (hojas) contribuyen negativamente a la suma. Por otro lado, v_1 contribuye a lo menos 1, y v_2 contribuye a lo menos 2, lo que implica que hay una contribución neta positive a esta suma de a lo menos 3. De esto conlcuimos que la contribución negativa debe ser a lo menos -5, y por lo tanto, deben existir al menos 5 vértices hoja.

b) Dado que T es un árbol, debe existir un camino entre v_1 y v_2. Además, existen otras 2 aristas incidentes en v_1 que no forman parte de este camino y 3 aristas que inciden en v_2 que no forman parte de este. En cada una de estas 5 aristas tenemos un vértice en el otro extremo. Notemos que estos vértices deben ser todos distintos, pues de lo contrario podríamos formar un ciclo.

   Para cada uno de estos vértices construiremos un camino de la siguiente forma:

   - Si el vértice en el cual nos encontramos es una hoja, nos detenemos.
   - Si este no es una hoja, entonces recorreremos alguna de las nuevas aristas que inciden en él hacia un nuevo vértice, y repetimos el proceso.

   Notemos que como T es un árbol, mediante este proceso nunca repetiremos un vértice, o llegaremos a un vértice contenido en alguno de los otros caminos, pues esto generaría un ciclo.

   Finalmente notemos que este proceso nos genera una hoja distinta por cada vértice en el cual partimos, y como comenzamos con 5 vértices distintos, concluimos que T tiene al menos 5 hojas.

Pauta (6 pts.)

- 3 ptos por a).
- 3 ptos por b).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.