Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 2

25 de Agosto de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica $\equiv$**

  Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

  1. Doble negación:
     $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  2. De Morgan:
     $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
     $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
  3. Conmutatividad:
     $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
     $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  4. Asociatividad:
     $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
     $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
  5. Distributividad:
     $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
     $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
  6. Idempotencia:
     $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
     $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  7. Absorción:
     $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
     $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
  8. Implicancia:
     $\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
  9. Doble implicancia:
     $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

  - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \rightarrow\}$

Ejercicio 1 — Tablas de verdad y DNF

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p,q,r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3p - 2(q+r) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Determine la tabla de verdad de EQ

b) Escriba una fórmula equivalente a $EQ(p,q,r)$ solamente usando los conectivos $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Ejercicio 2 — Tabla de verdad

Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

"Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

Ejercicio 3 — Conectivos funcionalmente completos (I1- 2022)

El conectivo unario $\triangledown$ se define según:

p	$\triangledown p$
0	0
1	0

Demuestre que $\{\rightarrow, \triangledown\}$ es funcionalmente completo.

Ejercicio 4 — Equivalencia lógica

Demuestre que

$$(p \lor (p \rightarrow q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \rightarrow q) \equiv p \land q$$

Utilizando las leyes de equivalencia vistas en clases.