Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

29 de septiembre de 2016
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Problemas

Pregunta 1

Sea A un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Demuestre que:

a) [1 pto.] $\forall x \in A$, $x \in [x]$.

b) [2.5 pts.] $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

c) [2.5 pts.] Si $[x] \neq [y]$, entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Solución

Recordemos que la clase de equivalencia de x bajo $\sim$ se define como $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

a) Como $\sim$ es una relación de equivalencia, es refleja, y por lo tanto $\forall x \in A$, $x \sim x$. Luego, por definición de clase de equivalencia, tenemos que $\forall x \in A$, $x \in [x]$.

Pauta

- 0.5 pts. por deducir que $x \sim x$.
- 0.5 pts. por argumentar que $x \in [x]$.
- Pautas para soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) ($\Rightarrow$) Supongamos que $x \sim y$. Debemos demostrar que $[x] = [y]$. Por definición de igualdad de conjuntos, esto es equivalente a demostrar que $[x] \subseteq [y] \wedge [y] \subseteq [x]$. Demostremos primero que $[x] \subseteq [y]$. Por definición de subconjunto, debemos mostrar que

$$\forall z,\ z \in [x] \rightarrow z \in [y].$$

Tomamos entonces un $z \in [x]$ y desarrollamos:

$$\begin{aligned} & z \in [x] \\ \text{(definición de clase de equivalencia)} \ & \leftrightarrow x \sim z \\ \text{(simetría de } \sim \text{)} \ & \leftrightarrow z \sim x \\ \text{(transitividad de } \sim \text{)} \ & \leftrightarrow z \sim y \\ \text{(simetría de } \sim \text{)} \ & \leftrightarrow y \sim z \\ \text{(definición de clase de equivalencia)} \ & \leftrightarrow z \in [y] \end{aligned}$$

y luego $[x] \subseteq [y]$. La demostración de que $[y] \subseteq [x]$ es análoga y se deja como ejercicio.

($\Leftarrow$) Supongamos que $[x] = [y]$. Debemos demostrar que $x \sim y$. Tomemos un $z \in [x]$ (esto es posible pues por la propiedad demostrada en a), sabemos que $[x] \neq \varnothing$). Como $[x] = [y]$, tenemos también que $z \in [y]$. Por definición de clase de equivalencia, sabemos que $x \sim z$ y $y \sim z$. Por simetría de $\sim$ tenemos que $z \sim y$, y luego por transitividad de $\sim$ concluimos que $x \sim y$ como queríamos demostrar.

Pauta

- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

c) Por contradicción, supongamos que $[x] \neq [y]$ pero $[x] \cap [y] \neq \varnothing$. Si se cumple lo segundo, entonces existe z tal que $z \in [x]$ y $z \in [y]$. Por definición de clase de equivalencia, tenemos que $x \sim z$ e $y \sim z$. Por simetría de $\sim$, se cumple que $z \sim y$, y luego por transitividad de $\sim$ obtenemos que $x \sim y$. Finalmente, aplicando el resultado demostrado en b) concluimos que $[x] = [y]$, lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto, queda demostrado el resultado.

Pauta

- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2

Considere un conjunto A y la relación $\subseteq$.

a) [1 pto.] Demuestre que $(P(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

b) [2 pts.] Dados $C, D \in P(A)$, demuestre las siguientes propiedades:

   i) $sup(\{C, D\}) = C \cup D$

   ii) $inf(\{C, D\}) = C \cap D$

c) [3 pts.] Dado $\mathcal{B} \subseteq P(A)$, demuestre las siguientes propiedades:

   i) $sup(\mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{B}$

   ii) $inf(\mathcal{B}) = \bigcap \mathcal{B}$

Solución

a) La idea era demostrar transitividad, asimetría y reflexividad de $\subseteq$, las características de un orden parcial:

   - Reflexividad: todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
   - Asimetría: Propiedad de conjuntos equivalentes.
   - Transitividad: Viene de la transitividad de conjuntos.

   Pauta

   - 0.4 pts. por reflexividad.
   - 0.3 pts. por asimetría.
   - 0.3 pts. por transitividad.
   - Pautas para soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) i) Veamos el caso de $\sup\{C, D\}$. Vemos inmediatamente que $C \cup D$ contiene por definición de unión de conjuntos a C y a D, luego es una cota superior válida (cualquier otro argumento homólogo hubiese sido considerado correcto, se asignó 0.3 por esta parte, que bien puede variar caso a caso). Ahora falta argumentar que es el mínimo de las cotas superiores. Para esto bastaba decir que cualquier otro conjunto que tuviese otro elemento menos automáticamente no sería cota superior de $C \cup D$ ya que la contención no sería válida (el elemento extraído estaría necesariamente en alguno de los dos conjuntos). Cualquier otro conjunto que tuviese un elemento más que la unión sería un conjunto mayor según la relación de orden dada y por consiguiente no un mínimo.

ii) Análogo a i).

Pauta

i) 1 pto.

ii) 1 pto.

- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

c) i) (1.5 puntos) En este caso había que generalizar el argumento entregado anteriormente. Se puede ver nuevamente que $\bigcup B$ es una cota superior válida, ya que para todo $b \in B$ se cumple que $b \subseteq \bigcup B$ y por definición $b \leq \bigcup B$ (0.5 ptos.). Ahora para probar que era la menor cota superior se podría haber argumentado de manera análoga a la anterior, diciendo que la unión generalizada contiene todos los elementos de B, luego si extraemos un elemento de ella, éste estará necesariamente en algún conjunto b^* y luego no se cumplirá para ese conjunto que $b^* \subseteq \bigcup B$ luego no se cumplirá $b^* \leq \bigcup B$ y luego $\bigcup B$ no será una cota superior, lo que es una contradicción. Por otro lado el mínimode las cotas superiores de B no puede tener al menos un elemento más que $\bigcup B$ ya que sería mayor y no sería entonces el mínimo (1 punto).

ii) (1.5 puntos) Mutatis mutandis de i).

Pauta

i) 1.5 puntos.

ii) 1.5 puntos.

- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 3

Para cada par de conjuntos A, B encuentre una biyección explícita entre ellos. Demuestre.

a) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \{n \mid n = 2^k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$

b) $A = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ y $B = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Solución

a) Mapearemos los enteros positivos a las potencias de dos con exponente impar, y los enteros negativos (y el cero) a las potencias de dos con exponente par.
$f : \mathbb{Z} \to B$
$f(a) = \begin{cases} 2^{-2a} & \text{si } a \leq 0 \\ 2^{2a-1} & \text{si } a > 0 \end{cases}$
Por demostrar: Función es inyectiva:
Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$
PD: $a_1 = a_2$
Casos:

- $a_1, a_2 \leq 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{-2a_2} \Rightarrow -2a_1 = -2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$

- $a_1, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{2a_1-1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow 2a_1 - 1 = 2a_2 - 1 \Rightarrow a_1 = a_2$

- $a_1 \leq 0, a_2 > 0$
  $f(a_1) = 2^{-2a_1} = f(a_2) = 2^{2a_2-1} \Rightarrow -2a_1 = 2a_2 - 1$
  $\rightarrow\leftarrow$ Contradicción pues un número par $(-2a_1)$ no puede ser igual a un número impar $(2a_2 - 1)$.

- $a_1 > 0, a_2 \leq 0$: Completamente análogo al caso anterior.

$\Rightarrow f$ es inyectiva
Por demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $b \in B$
PD: $\exists a \in \mathbb{Z}. f(a) = b$
Como $b \in B \to b = 2^k$ con $k \in \mathbb{N}$
Casos:

- b es una potencia de dos de exponente par:
  $b = 2^{2n_1}$ con $n_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow b = f(-n_1)$

- b es una potencia de dos de exponente impar:
  $b = 2^{2n_2-1}$ con $n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow b = f(n_2)$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva
$\square$

b) $f : B \to A$
$f(b) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } b = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } b \text{ es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ b & \text{si } b \text{ no es de la forma } \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \land b \neq 0 \end{cases}$

Por demostrar: Función en inyectiva:
Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $f(b_1) = f(b_2)$
PD: $b_1 = b_2$
Casos:

- b_1 es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
    - $b_2 = 0$
      $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow n + 2 = 2 \Rightarrow n = 0 \rightarrow\leftarrow$ Contradicción pues $b_1 = \frac{1}{n}$
    - b_2 es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{n_1} \wedge b_2 = \frac{1}{n_2}$
      $f(b_1) = \frac{1}{n_1+2} = f(b_2) = \frac{1}{n_2+1} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow b_1 = b_2$
    - $b_2 \neq 0$
      $f(b_1) = \frac{1}{n+2} = f(b_2) = b_2 \rightarrow\leftarrow$ Contradicción pues b_2 no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
- $b_1 = 0$
    - $b_2 = 0$
      $\Rightarrow b_1 = b_2 = 0$
    - $b_2 \neq 0 \wedge b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
      $f(b_1) = \frac{1}{2} = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \rightarrow\leftarrow$ Contradicción pues b_2 no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
- $b_1 \neq 0 \wedge b_1$ no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
    - $b_2 \neq 0 \wedge b_2$ no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
      $f(b_1) = b_1 = f(b_2) = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

Por demostrar: Función es sobreyectiva:
Sea $a \in A$
PD: $\exists b \in B. f(b) = a$
Casos:

- a es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N} \rightarrow a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$
    - $a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) = a \Rightarrow b = 0$
    - $a = \frac{1}{n+2}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = a \Rightarrow b = \frac{1}{n}$
- a no es de la forma $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$
  $f(a) = a \Rightarrow b = a$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva
$\Rightarrow f$ es biyectiva
$\square$

Pauta

- Para cada sección:
    - 1.5 pts. por encontrar función biyectiva
    - 0.75 pts. por demostrar que la función en inyectiva
    - 0.75 pts. por demostrar que la función es biyectiva
    - Pautas para soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector

Pregunta 4

a) Sea $\{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que S_i $(i \in \mathbb{N})$ es numerable. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

b) Una sucesión $(z_0, z_1, z_2, \ldots)$ de números enteros se dice *eventualmente periódica* si existen dos números naturales n_0 y $k > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $z_{n+k} = z_n$.

Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones eventualmente periódicas es un conjunto numerable.

Solución

a) Notemos que como S_i es numerable para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces para cada uno de los conjuntos en la colección podemos construir una lista ordenada de elementos de la siguiente manera:

$$s_{i0}\ s_{i1}\ s_{i2}\ s_{i3} \ldots$$

Dónde s_{ij} es el j-ésimo elemento de S_i.
Usando esto podemos contruir la siguiente matriz infinita con los elementos de S:

$$\begin{matrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & \cdots \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & \cdots \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Notemos también que la cardinalidad de la unión será máxima cuando los conjuntos S_i son disjuntos, luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que estos lo son.

Por supuesto, todos los elementos s_{ij} son distintos, y tomando las diagonales finitas de la matriz podemos ordenarlos todos de la siguiente forma:

$$s_{00}\ s_{01}\ s_{10}\ s_{02}\ s_{11}\ s_{20}\ \ldots$$

Es claro que todos los elementos de S aparecerán en la lista y por lo tanto concluimos que $S = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} S_i$ es numerable.

Pauta

- 1 pto. por mostrar que los S_i se pueden ordenar.
- 1 pto. por construir la matriz.
- 1 pto. por concluir lo pedido, haciendo y justificando el supuesto necesario.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) Sean n_0 y $k > 0 \in \mathbb{N}$, podemos definir el siguiente conjunto:

$$P_{n_0,k} = \{(z_0, z_1, z_2, \ldots) \mid \forall n \geq n_0\ , z_{n+k} = z_n\}$$

El cual contiene a todas las sucesiones *eventualmente periódicas*, con periodo k a partir de n_0. Demostraremos que este conjunto es numerable.
Para eso, notemos que podemos representar estas sucesiones eventualmente periódicas (en otras palabras construir una biyección) por una tupla de enteros de tamaño $n_0 + k$, donde los primeros n_0 elementos representan a los n_0 primeros elementos de la sucesión, y los k siguientes representan a los k elementos que se repiten en la sucesión. Luego, podemos concluir lo siguiente :

$$|P_{n_0,k}| = |\mathbb{Z}^{n_0+k}|$$

Y como producto cartesiano finito de conjuntos numerables es numerable, concluimos que

$$|P_{n_0,k}| = |\mathbb{N}|$$

.

Ahora notemos que si consideramos todos los conjuntos anteriores, tendremos todas las sucesiones eventualmente periódicas, llamando a este conjunto P tenemos :

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} P_{n,k}$$

Pero, por lo demostrado en el inciso anterior sabemos que unión numerable de conjuntos numerables es numerable luego:

$$|\bigcup_{n=0}^{\infty} P_{n,k}| = |\mathbb{N}|, \quad \forall k$$

Y siguiendo la misma lógica podemos concluir:

$$|P| = |\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} P_{n,k}| = |\mathbb{N}|$$

Queda entonces demostrado lo pedido.

Pauta

- 1 pto. por representar correctamente las sucesiones o construir biyección.
- 1 pto. por concluir que $P_{n_0,k}$ es numerable.
- 1 pto. por concluir lo pedido usando el inciso anterior.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.