Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

25 de septiembre de 2021

2º semestre 2021 - Profesores M. Bucchi - G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 20 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Un mosaico es una matriz de $n \times n$ en que cada celda está pintada con algún color. Si tenemos n colores, decimos que un mosaico está *balanceado* si cada color aparece exactamente una vez en cada fila y cada columna. Por ejemplo, el siguiente es un mosaico balanceado de 4×4:

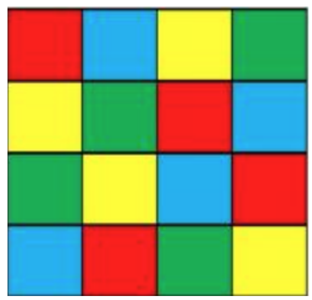

Figura 1: Mosaico balanceado de 4×4

Dado un mosaico M de $n \times n$ con algunas celdas sin pintar, diremos que M es coloreable si es que existe una manera de colorear las celdas vacías de forma de que el mosaico resultante esté balanceado. Construya una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que

$$\varphi \text{ es satisfacible } \Leftrightarrow \text{ } M \text{ es coloreable}$$

y demuestre que su construcción es correcta.

Solución

Para $i, j, k \in \{1 \dots n\}$, definimos el siguiente conjunto de variables proposicionales:

$$P = \{\ p_{ijk} \mid p_{ijk} \text{ es verdadero si y sólo si la celda en la fila } i \\ \text{ y columna } j \text{ está coloreada con el color } k\ \}$$

Ahora consideremos las siguientes fórmulas:

- Toda celda tiene al menos un color:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(\bigvee_{k=1}^{n} p_{ijk} \right)$$

- Una celda puede tener a lo más un color:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{n} \left(p_{ijk} \to \bigwedge_{\substack{k' \in \{1,\dots,n\} \\ k' \neq k}} \neg p_{ijk'} \right)$$

- Un color aparece al menos una vez en cada fila:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{k=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{n} p_{ijk} \right)$$

- Un color aparece al menos una vez en cada columna:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{k=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(\bigvee_{i=1}^{n} p_{ijk} \right)$$

- Existen celdas que ya están coloreadas en M:

$$\varphi_5 = \bigwedge_{\substack{i,j,k \in \{1,\dots,n\} \text{ tales que} \\ \text{la celda } (i,j) \text{ está coloreada} \\ \text{con el color } k \text{ en } M}} p_{ijk}$$

Para concluir, basta con tomar

$$\varphi = \bigwedge_{h=1}^{5} \varphi_h$$

Ahora demostraremos que M es coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

($\Rightarrow$) PD: si M es coloreable, entonces φ es satisfacible.

Supongamos que M es coloreable. Luego, existe una asignación de un único color en $\{1,\dots,n\}$ para cada celda, tal que el mosaico está balanceado (i.e. cada color aparece exactamente una vez en cada fila y cada columna). Construimos una valuación σ para las variables proposicionales que definimos en el primer paso como:

$$\sigma(p_{ijk}) = \begin{cases} 1 & \text{si la celda } (i,j) \text{ está pintada del color } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora simplemente hay que verificar que $\sigma(\varphi) = 1$:

- $\sigma(\varphi_1)$: como M ya está coloreado, cada celda (i,j) debe tener un color k. Luego, para una celda (i,j) se tiene que $\sigma(p_{ijk}) = 1$ para algún k, y entonces $\sigma(\varphi_1) = 1$.

- $\sigma(\varphi_2)$: como M ya está coloreado, cada celda (i, j) debe tener un único color k. Supongamos que una celda (i, j) tiene el color k, y por lo tanto $\sigma(p_{ijk}) = 1$. Como este color es único, para todo color $k' \neq k$ se cumple que $\sigma(p_{ijk'}) = 0$, y por lo tanto $\sigma(\varphi_2) = 1$.
- $\sigma(\varphi_3)$: como M está balanceado, cada color k aparece una única vez en cada fila i. Esto significa que para cada color k y cada fila i, alguna de las celdas en esa fila tendrá el color k, vale decir, existe una columna j tal que la celda (i, j) está pintada del color k. Por lo tanto, $\sigma(p_{ijk}) = 1$ para toda combinación de k, i para algún valor de j, y entonces se cumple que $\sigma(\varphi_5) = 1$.
- $\sigma(\varphi_4)$: como M está balanceado, cada color k aparece una única vez en cada columna j. Esto significa que para cada color k y cada columna j, alguna de las celdas en esa columna tendrá el color k, vale decir, existe una fila i tal que la celda (i, j) está pintada del color k. Por lo tanto, $\sigma(p_{ijk}) = 1$ para toda combinación de k, j para algún valor de i, y entonces se cumple que $\sigma(\varphi_6) = 1$.
- $\sigma(\varphi_5)$: por construcción de σ y φ_7 es claro que $\sigma(\varphi_7) = 1$, dado que el mapa ya coloreado tenía algunas celdas previamente coloreadas, con las que construimos esta fórmula.

Finalmente, como φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$, y entonces φ es satisfacible.

($\Leftarrow$) PD: si φ es satisfacible, entonces M es coloreable.

Supongamos que φ es satisfacible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$, y por construcción $\sigma(\varphi_i) = 1$ para $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Usaremos esta valuación para colorear el mosaico. En primer lugar, como $\sigma(\varphi_1) = 1$, sabemos que $\forall i \forall j, \sigma(p_{ijk}) = 1$ para algún color k, y por lo tanto cada celda tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(p_{abc}) = 1$, es decir, pintamos la celda (a, b) de color c. Como también se cumple que $\sigma(\varphi_2) = 1$, para todo color $c' \neq c$ se cumple que $\sigma(\neg p_{abc'}) = 1$, con lo que obtenemos que $\sigma(p_{abc'}) = 0$, y por lo tanto cada celda tiene un único color.

En segundo lugar, como $\sigma(\varphi_3) = 1$, sabemos que para cada color k y para cada fila i, $\sigma(p_{ijk}) = 1$ para al menos un valor de j (dado que debe cumplirse la disyunción sobre j). Esto quiere decir que cada color aparece al menos una vez en cada fila. Más aún, dado que la cantidad de colores es la misma que la cantidad de celdas en una fila, podemos concluir que cada color aparece *exactamente* una vez en cada fila.

Análogamente, usando la fórmula φ_4 obtenemos que cada color aparece una única vez en cada columna del mosaico.

Por último, como $\sigma(\varphi_5) = 1$, sabemos que los colores iniciales del mosaico forman parte de la coloración completa.

Concluimos que usando los colores asignados por φ a través de las variables p_{ijk}, podemos colorear M.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

- 0,5 pts. por definir variables proposicionales.
- 0,5 pts. por cada aspecto modelado en las fórmulas.
- 1,5 pts. por demostrar ($\Rightarrow$).
- 1,5 pts. por demostrar ($\Leftarrow$).

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Sea P un predicado binario sobre un dominio D cualquiera. Considere las siguientes oraciones en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}
\varphi_R &= \forall x\,(P(x,x)) \\
\varphi_S &= \forall x \forall y\,(P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \\
\varphi_T &= \forall x \forall y \forall z\,((P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,z)) \\
\varphi_V &= \forall x \forall y \forall z\,((P(x,y) \wedge P(x,z)) \rightarrow P(y,z)) \\
\varphi_X &= \forall x \forall y \forall z\,((P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow P(y,z)) \\
\varphi_E &= \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T
\end{aligned}$$

Demuestre que:

a) $\varphi_R \wedge \varphi_V \equiv \varphi_E$

b) $\varphi_R \wedge \varphi_X \equiv \varphi_E$

Solución

En ambos casos, debemos demostrar una equivalencia lógica. Es decir, debemos demostrar que para toda interpretación $\mathcal{I}$ se cumple que

$$I \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi$$

En cada caso entonces haremos la demostración en ambas direcciones.

a) ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{I}$ una interpretación arbitraria tal que

$$I \models \varphi_R \wedge \varphi_V$$

Debemos demostrar que

$$I \models \varphi_E, \text{ o equivalentemente, } I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$$

Para esto mostraremos que $\mathcal{I}$ satisface a cada una de las fórmulas en la conjunción:

- φ_R: directo de la premisa.
- φ_S: sean $a, b \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(a,b)$. Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(b,a)$. Como $\mathcal{I} \models \varphi_R$ sabemos que $\mathcal{I} \models P(a,a)$, y entonces $\mathcal{I} \models P(a,b) \wedge P(a,a)$. Como también $\mathcal{I} \models \varphi_V$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(b,a)$.
- φ_T: sean $a, b, c \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(a,b) \wedge P(b,c)$. Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(a,c)$. De lo primero sabemos que $\mathcal{I} \models P(a,b)$, y como ya mostramos que $\mathcal{I} \models \varphi_S$, se cumple que $\mathcal{I} \models P(b,a)$. Luego, es cierto que $\mathcal{I} \models P(b,a) \wedge P(b,c)$,

y como también $\mathcal{I} \models \varphi_V$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(a, c)$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{I}$ una interpretación arbitraria tal que

$$I \models \varphi_E, \text{ o equivalentemente, } I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$$

Debemos demostrar que

$$I \models \varphi_R \wedge \varphi_V$$

Para esto mostraremos que $\mathcal{I}$ satisface a cada una de las fórmulas en la conjunción:

- φ_R: directo de la premisa.
- φ_V: sean $a, b, c \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(a, b) \wedge P(a, c)$ (1). Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(b, c)$. En primer lugar, como $I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$ sabemos que $\mathcal{I}$ satisface a cada fórmula de la conjunción. Ahora, de (1) sabemos que $\mathcal{I} \models P(a, b)$, y como $\mathcal{I} \models \varphi_S$, se cumple que $\mathcal{I} \models P(b, a)$. Luego, es cierto que $\mathcal{I} \models P(b, a) \wedge P(a, c)$, y como también $\mathcal{I} \models \varphi_T$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(b, c)$.

b) ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{I}$ una interpretación arbitraria tal que

$$I \models \varphi_R \wedge \varphi_X$$

Debemos demostrar que

$$I \models \varphi_E, \text{ o equivalentemente, } I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$$

Para esto mostraremos que $\mathcal{I}$ satisface a cada una de las fórmulas en la conjunción:

- φ_R: directo de la premisa.
- φ_S: sean $a, b \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(a, b)$. Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(b, a)$. Como $\mathcal{I} \models \varphi_R$ sabemos que $\mathcal{I} \models P(b, b)$, y entonces $\mathcal{I} \models P(b, b) \wedge P(a, b)$. Como también $\mathcal{I} \models \varphi_X$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(b, a)$.
- φ_T: sean $a, b, c \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(a, b) \wedge P(b, c)$. Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(a, c)$. De lo primero sabemos que $\mathcal{I} \models P(b, c)$, y como ya mostramos que $\mathcal{I} \models \varphi_S$, se cumple que $\mathcal{I} \models P(c, b)$. Luego, es cierto que $\mathcal{I} \models P(a, b) \wedge P(c, b)$, y como también $\mathcal{I} \models \varphi_X$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(a, c)$.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{I}$ una interpretación arbitraria tal que

$$I \models \varphi_E, \text{ o equivalentemente, } I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$$

Debemos demostrar que

$$I \models \varphi_R \wedge \varphi_X$$

Para esto mostraremos que $\mathcal{I}$ satisface a cada una de las fórmulas en la conjunción:

- φ_R: directo de la premisa.
- φ_X: sean $a, b, c \in Dom(\mathcal{I})$ tal que $\mathcal{I} \models P(b, a) \wedge P(c, a)$ (2). Debemos demostrar que $\mathcal{I} \models P(b, c)$. En primer lugar, como $I \models \varphi_R \wedge \varphi_S \wedge \varphi_T$ sabemos que $\mathcal{I}$ satisface a cada fórmula de la conjunción. Ahora, de (2) sabemos que $\mathcal{I} \models P(c, a)$, y como $\mathcal{I} \models \varphi_S$, se cumple que $\mathcal{I} \models P(a, c)$. Luego, es cierto que $\mathcal{I} \models P(b, a) \wedge P(a, c)$, y como también $\mathcal{I} \models \varphi_T$, aplicamos lo anterior en el lado izquierdo y concluimos que $\mathcal{I} \models P(b, c)$.

Pauta (6 pts.)

En cada letra, cada dirección vale 1,5 ptos.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.