Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2018

PAUTA TAREA 6

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Para esto, sabemos que existen c, n_0 tales que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $f(n) < c \cdot g(n)$. Si $n_0 = 0$, la demostración es trivial, por lo que nos interesa el caso donde $n_0 > 0$.

Como n_0 es fijo y estamos trabajando sobre los números naturales, el intervalo $[0, n_0 - 1]$ es finito. Además como las funciones son totales, no se indefinen en ningún punto. Por lo tanto el máximo y el mínimo de ambas en el intervalo $[0, n_0 - 1]$ siempre estará bien definido. Luego, como $g(n)$ nunca es 0, tenemos que $\frac{f(n)}{g(n)} \cdot g(n) = f(n)$. Con todo esto, definimos la constante

$$c' = max_{n \in [0, n_0 - 1]} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right)$$

Finalmente, definimos la nueva constante como $k = max(c, c')$ y demostramos la correctitud. Sea un $n \in \mathbb{N}$ cualquiera:

- Si $n < n_0$, entonces $k \cdot g(n) \geq c' \cdot g(n) \geq \frac{f(n)}{g(n)} \cdot g(n) = f(n)$
- Si $n \geq n_0$, entonces $k \cdot g(n) \geq c \cdot g(n) \geq f(n)$

Y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq k \cdot g(n)$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Por encontrar y justificar correctamente la nueva constante, y demostrar correctitud
- **(3 puntos)** Por encontrar correctamente la nueva constante, pero no demostrar correctitud.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 1.2

Vemos que $a^n \in O(n!)$, lo que implica que existe una cantidad finita de elementos que entran al if, mientras que existen infinitos elementos que entran al else. Por lo tanto para el análisis asintótico nos importa el comportamiento del else. El while se comporta de la forma

$$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + 1 = \sum_{i=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{2^i} = 2 \cdot n$$

Se ve que el comportamiento del while es lineal, por lo que la función propuesta es $f(n) = n$. Finalmente como el tiempo del while es aproximadamente $2 \cdot n$, se acota por abajo por n y por arriba como $3 \cdot n$, y tenemos

$$f(n) \leq T(n) \leq 3 \cdot f(n)$$

Donde $\mathbf{n_0}$ es algun punto donde $\mathbf{n}! > \mathbf{a^n}$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Por encontrar correctamente la función y demostrar correctamente que el algoritmo corre en $\Theta(f(n))$.
- **(3 puntos)** Por tener errores menores la demostración como definir mal las constantes o n_0.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Al ser un ejercicio donde es posible encontrar infinitos pares (c, n_0) que cumplan con lo que queremos demostrar, la presente pauta solo refleja una de las tantas formas de resolver el ejercicio. Primero se demostrará si $\frac{n}{n^\epsilon} \in \mathcal{O}(\frac{n}{\log(n)})$, esto es, formalmente:

$$\exists c \in R^+. \exists n_0 \in N. \forall n \geqslant n_0. \;\; \frac{n}{n^\epsilon} \leqslant c \cdot \frac{n}{\log(n)}$$

Si tomamos un $n_0 > 1$ podemos vez evitar el caso en donde $\log(n) = 0$ y a su vez dividir por n a ambos lados, con lo cual se mantiene la desigualdad al ser n positivo. De esta forma quedaría la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n^\epsilon} \leqslant c \cdot \frac{1}{\log(n)}$$

Luego, al ser tanto n^ϵ como $\log(n)$ positivos, podemos multiplicar a ambos lados por $(n^\epsilon \cdot \log(n))$, quedando:

$$\log(n) \leqslant c \cdot n^\epsilon$$

Teniendo esta desigualdad es fácil notar que para el caso limite $\epsilon = 0$ tenemos que:

$$\nexists c \in R^+. \exists n_0 \in N. \forall n \geqslant n_0. \;\; \log(n) \leqslant c$$

Lo cual se traduce en:

$$\frac{n}{n^\epsilon} \notin \mathcal{O}(\frac{n}{\log(n)}) \text{ para } \epsilon = 0$$

.

Ahora, volviendo a la desigualdad $\log(n) \leqslant c \cdot n^\epsilon$ y obviando el caso límite $\epsilon = 0$, haremos el cambio de variable $n = 2^x$ para simplificar las operaciones algebraicas por venir.

$$\begin{aligned} \log(2^x) &\leqslant c \cdot 2^{x \cdot \epsilon} \\ x &\leqslant c \cdot 2^{x \cdot \epsilon} \end{aligned}$$

Fijaremos $c = 1$ para deshacernos de esa variable y poder seguir resolviendo la inecuación. Además, realizaremos otro cambio de variable $a = 2^\epsilon$ con $a > 1$:

$$\begin{aligned} x &\leqslant (2^\epsilon)^x \\ x &\leqslant a^x \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple trivialmente si tomamos $x = a$, ya que obtendríamos:

$$a \leqslant a^a, \; a > 1$$

Y a su vez se cumple para todo $x > a$. De esta forma, hemos demostrado que:

$$\frac{n}{n^{\epsilon}} \in \mathcal{O}(\frac{n}{\log(n)}) \text{ para } 0 < \epsilon < 1$$

.
Ahora queda demostrar si $\frac{n}{\log(n)} \in \mathcal{O}(\frac{n}{n^{\epsilon}})$, para lo cual podemos realizar un procedimiento similar al anterior, llegando a:

$$n^{\epsilon} \leqslant c \cdot \log(n)$$

En donde si tomamos nuevamente el caso límite $\epsilon = 0$ obtenemos la desigualdad $1 \leqslant c \cdot \log(n)$, lo cual se puede ver trivialmente que se cumple con $c = 1,\ n \geqslant 2$. De esta forma obtenemos que

$$\frac{n}{\log(n)} \in \mathcal{O}(\frac{n}{n^{\epsilon}}) \text{ para } \epsilon = 0$$

Ahora, obviando el caso límite y volviendo a realizar los cambios de variables anteriores:

$$a^x \leqslant c \cdot x$$
$$\frac{a^x}{x} \leq c$$

Pero $\lim_{n \to \infty}(\frac{a^x}{x}) = \infty$, por lo que c también diverge cuando $x \to \infty$. De esta forma obtenemos que:

$$\frac{n}{\log(n)} \notin \mathcal{O}(\frac{n}{n^{\epsilon}}) \text{ para } 0 < \epsilon < 1$$

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Por llegar al resultado indicado argumentando clara y correctamente los pares (c, n_0) o por que estos no existen.
- **(3 puntos)** Por llegar al resultado esperado con algún detalle en un paso o asumiendo trivial algo que no lo es.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2.2

Primero se demostrará que $\sqrt{n} \notin \mathcal{O}(n^{sin(n)})$. Por contradicción, suponemos que no se cumple, o sea:

$$\exists c \in R^+ . \exists n_0 \in N . \forall n \geqslant n_0 .\ \sqrt{n} \leqslant c \cdot n^{sin(n)}$$

Sin embargo, si se toma $n^* > max\{n_0, c^2\}$ tal que $sin(n^*) = 0$ se obtiene:

$$\sqrt{n^*} \leqslant c$$

Inecuación que no se cumple dado que $n^* > max\{n_0, c^2\}$. De esta forma, se demuestra que:

$$\sqrt{n} \notin \mathcal{O}(n^{sin(n)})$$

Ahora, se demostrará que $n^{sin(n)} \notin \mathcal{O}(\sqrt{n})$. Por contradicción, se supondrá que lo hace, teniendo así:

$$\exists c \in R^+ . \exists n_0 \in N . \forall n \geqslant n_0 .\ n^{sin(n)} \leqslant c \cdot \sqrt{n}$$

Sin embargo, si se toma $n^* > max\{n_0, c^2\}$ tal que $sin(n^*) = 1$ se obtiene:

$$n^* \leq c \cdot \sqrt{n^*}$$
$$\sqrt{n^*} \leq c$$

Inecuación que no se cumple dado que $n^* > max\{n_0, c^2\}$. De esta forma, se demuestra que:

$$n^{sin(n)} \notin \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

- **(4 puntos)** Por llegar al resultado indicado argumentando clara y correctamente por que los pares (c, n_0) no existen.
- **(3 puntos)** Por llegar al resultado esperado con algún detalle en un paso o asumiendo trivial algo que no lo es.
- **(0 puntos)** En otro caso.