Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

29 de Agosto de 2019
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1 [Lógica]

a) **(3 pts)** Demuestre que el conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

b) **(3 pts)** ¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todos los hombres son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es hombre.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Solución

a) Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\rightarrow$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

TI: Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C:

i) $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

ii)

$$
\begin{aligned}
\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} & \varphi' \wedge \psi' \\
\equiv & \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) && \text{(Ley de doble negación)} \\
\equiv & \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi')) && \text{(Ley de De Morgan)} \\
\equiv & \neg(\varphi' \rightarrow (\neg\psi')) && \text{(Ley de implicancia)}
\end{aligned}
$$

Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Hemos demostrado entonces que toda fórmula construida usando conectivos en C es equivalente a otra fórmula construida usando los conectivos en C', y como C es funcionalmente completo, concluimos que C' también lo es.$\square$

b) Consideremos los siguientes predicados:

- $H(x) := x$ es hombre
- $M(x) := x$ es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \\ H(s)\end{array}}{M(s)}$$

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

Por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s), \neg M(s)\}$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \forall x(\neg H(x) \vee M(x)) & \in \Sigma \\
(2) & \neg H(s) \vee M(s) & \text{especificación universal de } (1) \\
(3) & H(s) & \in \Sigma \\
(4) & M(s) & \text{resolución de } (2), (3) \\
(5) & \neg M(s) & \in \Sigma \\
(6) & \square & \text{resolución de } (4), (5)
\end{array}$$

Concluimos entonces que el argumento es válido.

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 ptos. por caso base.
- 0.5 ptos. por hipótesis de inducción.
- 2 ptos. por tesis de inducción y concluir.

b)
- 0.5 ptos. por modelación (predicados y formalización del argumento).
- 0.5 ptos. por expresar como consecuencia lógica.
- 2 ptos. por resolver usando el método de resolución y concluir.

Soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2 [Inducción]

La sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots$ que cumple la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

a) **(2 pts)** Demuestre que si n es múltiplo de 5, entonces F_n es divisible por 5.

b) **(4 pts)** Demuestre que la sucesión de Fibonacci sigue el siguiente patrón: par, impar, impar, par, impar, impar, ...

Solución

a) Notemos que los múltiplos de 5 son de la forma $n = 5k$, con $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos por inducción simple sobre k que F_{5k} es divisible por 5:

BI: Tenemos $k = 0$, y luego $F_0 = 0$, el que es divisible por 5.

HI: Supongamos que F_{5k} es divisible por 5.

TI: Por demostrar que $F_{5(k+1)}$ es divisible por 5. Desarrollamos:

$$\begin{aligned} F_{5(k+1)} = F_{5k+5} = F_{5k+4} + F_{5k+3} &= (F_{5k+3} + F_{5k+2}) + F_{5k+3} = 2 \cdot F_{5k+3} + F_{5k+2} \\ &= 2 \cdot (F_{5k+2} + F_{5k+1}) + F_{5k+2} = 3 \cdot F_{5k+2} + 2 \cdot F_{5k+1} \\ &= 3 \cdot (F_{5k+1} + F_{5k}) + 2 \cdot F_{5k+1} = 5 \cdot F_{5k+1} + 3 \cdot F_{5k} \end{aligned}$$

Luego, como por hipótesis de inducción sabemos que F_{5k} es divisible por 5, tenemos que $F_{5(k+1)}$ es divisible por 5 como queríamos demostrar.

Entonces, por inducción concluimos que todo número de la sucesión de Fibonacci F_n tal que n es múltiplo de 5 es divisible por 5.$\square$

b) Demostraremos usando inducción fuerte que si $n = 3k$, entonces F_n es par, mientras que si $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$, entonces F_n es impar.

BI: Necesitamos demostrar la base para 0 y 1.
$n = 0 = 3 \cdot 0$. Como $F_0 = 0$, la propiedad se cumple pues 0 es par.
$n = 1 = 3 \cdot 0 + 1$. Como $F_1 = 1$, la propiedad se cumple pues 1 es impar.

HI: Dado $n \geq 2$, supongamos que la propiedad se cumple para todo k tal que $0 \leq k < n$.

TI: Por demostrar que la propiedad se cumple para n. Como $n \geq 2$, sabemos que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Tenemos 3 casos:

- $n = 3k$: En este caso, se cumple que $n-1 = 3k-1 = 3 \cdot (k-1) + 2 = 3 \cdot k' + 2$, y entonces también tenemos que $n - 2 = 3 \cdot k' + 1$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción se cumple que tanto F_{n-1} como F_{n-2} son impares, y como la suma de dos impares es un número par, F_n es par.
- $n = 3k + 1$: En este caso, se cumple que $n - 1 = 3k$, mientras que $n - 2 = 3k - 1 = 3 \cdot (k - 1) + 2 = 3 \cdot k' + 2$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción se cumple que F_{n-1} es par y F_{n-2} es impar, y como la suma de un par y un impar es un número impar, F_n es impar.
- $n = 3k+2$: En este caso, se cumple que $n-1 = 3k+1$, mientras que $n-2 = 3k$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción se cumple que F_{n-1} es impar y F_{n-2} es par, y como la suma de un impar y un par es un número impar, F_n es impar.

Por lo tanto, por inducción fuerte tenemos que la propiedad enunciada es cierta, y luego los números de la sucesión de Fibonacci siguen la secuencia descrita.$\square$

<u>Pauta</u> (6 pts.)

a)
- 0.25 ptos. por base de inducción.
- 0.25 ptos. por base de inducción.
- 1.5 ptos. por tesis de inducción y conclusión.

b)
- 0.5 ptos. por base de inducción.
- 0.5 ptos. por hipótesis de inducción.
- 3 ptos. por tesis de inducción y conclusión.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 [Lógica proposicional]

Dado el aumento en el flujo de alumnos hacia la estación San Joaquín, el Ministerio de Transporte ha decidido evaluar la factibilidad de designarla estación común. Para resolver el problema, el ministro le sugiere que modele el problema considerando las siguientes condiciones:

- Existen n estaciones y m trenes.
- Los colores posibles tanto para trenes como para estaciones son rojo y verde.
- Toda estación tiene otra inmediatamente a la derecha, excepto Vicente Valdés.
- Parque Bustamante está inmediatamente a la derecha de Baquedano.
- Un tren que tiene asociado un color solo se puede detener en las estaciones que tienen asignado dicho color.
- Cada tren tiene asignado exactamente un color.
- Toda estación tiene asignada al menos un color.
- No existen dos estaciones contiguas exclusivamente verdes ni exclusivamente rojas.
- San Joaquín es una estación común; es decir, tiene asignada los colores rojo y verde.
- Deben haber al menos 3 estaciones comunes, contando San Joaquín.

En concreto, usted debe construir una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

$$\varphi \text{ es satisfacible}$$
$$\Leftrightarrow$$
Es posible que San Joaquín sea una estación común y se cumplan las condiciones descritas.

Solución

Para $i, j \in \{1 \dots n\}$, $k \in \{1 \dots m\}$ y $l \in \{r, v\}$. Definimos el siguiente conjunto de variables proposicionales:

$$\begin{aligned} P = &\{\ x_{ij} \mid \text{La estación } j \text{ se ubica a la derecha de } i\ \} \cup \\ &\{\ y_{ki} \mid \text{El tren } k \text{ se encuentra en la estación } i\ \} \cup \\ &\{\ z_{il} \mid \text{La estación } i \text{ tiene el color } l\ \} \cup \\ &\{\ w_{kl} \mid \text{El tren } i \text{ tiene el color } l\ \} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que Baquedano es la estación 1, Parque Bustamante la 2, San Joaquín la 3 y Vicente Valdés la n. Ahora consideremos las siguientes fórmulas:

- Toda estación tiene una a la derecha, excepto Vicente Valdés:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigvee_{j=1}^{n} x_{ij}$$

- Una estación puede tener a lo más una estación a su derecha (es una línea):

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(x_{ij} \rightarrow \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^{n} \neg x_{ij'} \right)$$

- Parque Bustamante está inmediatamente a la derecha de Baquedano:

$$\varphi_3 = x_{12}$$

- Un tren que tiene asociado un color solo se puede detener en las estaciones que tienen asignado dicho color:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{l \in \{r,v\}} (y_{ki} \wedge w_{kl}) \rightarrow z_{il}$$

- Un tren no puede estar detenido en dos estaciones a la vez:

$$\varphi_5 = \bigwedge_{k=1}^{m} \bigwedge_{i=1}^{n} \left(y_{ki} \rightarrow \bigwedge_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} \neg y_{ki'} \right)$$

- Cada tren tiene asignado exactamente un color:

$$\varphi_6 = \bigwedge_{k=1}^{m} (w_{kr} \wedge \neg w_{kv}) \vee (\neg w_{kr} \wedge w_{kv})$$

- Toda estación tiene asignada al menos un color:

$$\varphi_7 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{l \in \{r,v\}} z_{il}$$

- No existen dos estaciones contiguas exclusivamente verdes:

$$\varphi_8 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} (x_{ij} \wedge z_{iv} \wedge \neg z_{ir}) \rightarrow \neg(z_{jv} \wedge \neg z_{jr})$$

- No existen dos estaciones contiguas exclusivamente rojas:

$$\varphi_9 = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} (x_{ij} \wedge z_{ir} \wedge \neg z_{iv}) \rightarrow \neg(z_{jr} \wedge \neg z_{jv})$$

- Deben haber por lo menos 3 estaciones comunes, contando San Joaquín:

$$\varphi_{10} = (z_{3r} \wedge z_{3v}) \wedge \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_{ir} \wedge z_{iv} \wedge z_{jr} \wedge z_{jv})$$

Para concluir, basta con tomar

$$\varphi = \bigwedge_{h=1}^{10} \varphi_h$$

Pauta (6 pts.)

- 0.4 pts. por definir variables proposicionales.
- 0.8 pts. por las fórmulas φ_8, φ_9 y φ_{10} .
- 0.4 pts. por el resto de las condiciones.
- 0.4 pts. por concluir que todas las restricciones anteriores son necesarias.
- Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 [Lógica de Predicados]

Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere las siguientes fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &: \forall x\big(R(x,x)\big) \\
\varphi_2 &: \forall x \forall y\big(R(x,y) \rightarrow R(y,x)\big) \\
{\varphi_3}^1 &: \forall x \forall y\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \rightarrow x = y\Big) \\
{\varphi_4}^1 &: \forall x \forall y \forall z\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,z)\big) \rightarrow R(x,z)\Big)
\end{aligned}$$

Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ tales que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ e $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$. En cada caso, explique brevemente.

a) **(2 pts)** $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_4$

b) **(2 pts)** $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$

c) **(2 pts)** $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$

[1] Por error, la versión impresa de la interrogación no incluyó los paréntesis alrededor del lado izquierdo de ambas implicancias, por lo que algún estudiante pudo haber entendido las fórmulas como si la implicancia tuviera en el lado izquierdo sólo a la segunda parte de la conjunción. Si algún estudiante entendió la(s) fórmula(s) así, y las interpretaciones que dio en cada caso están correctas, se le otorgará el puntaje completo.

Solución

Considere las siguientes interpretaciones $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_3(dom) := \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(R(x,y)) := x = y & \mathcal{I}_2(R(x,y)) := x \leq y & \mathcal{I}_3(R(x,y)) := x \neq y \end{array}$$

a) En primer lugar veremos que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$:

- Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n = n$, por lo que $\mathcal{I}_1 \models \varphi_1$.
- Dados $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, si se cumple que $n_1 = n_2$ y $n_2 = n_3$, se tiene que $n_1 = n_3$, y por lo tanto $\mathcal{I}_1 \models \varphi_4$.

Como $\mathcal{I}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{I}_1 \models \varphi_4$, se cumple que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$.

En segundo lugar, notemos que para ningún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \neq n$, por lo que claramente $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi_1$, y en consecuencia $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi$.

b) En primer lugar, del ejercicio anterior sabemos que $\mathcal{I}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{I}_1 \models \varphi_4$. Ahora, notemos que dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si $n_1 = n_2$ necesariamente se cumple que $n_2 = n_1$, y por lo tanto $\mathcal{I}_1 \models \varphi_2$. Luego, concluimos que $\mathcal{I}_1 \models \varphi$.

En segundo lugar, dado que ya sabemos que $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi_1$, en este caso también se tiene que $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi$.

c) En primer lugar veremos que $\mathcal{I}_2 \models \varphi$:

- Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq n$, por lo que $\mathcal{I}_2 \models \varphi_1$.
- Dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, si se cumple que $n_1 \leq n_2$ y $n_2 \leq n_1$, la única posibilidad es que $n_1 = n_2$, y por lo tanto $\mathcal{I}_2 \models \varphi_3$.
- Dados $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, si se cumple que $n_1 \leq n_2$ y $n_2 \leq n_3$, se tiene que $n_1 \leq n_3$, y por lo tanto $\mathcal{I}_2 \models \varphi_4$.

Como $\mathcal{I}_2 \models \varphi_1$, $\mathcal{I}_2 \models \varphi_3$ y $\mathcal{I}_2 \models \varphi_4$, se cumple que $\mathcal{I}_2 \models \varphi$.

En segundo lugar, dado que ya sabemos que $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi_1$, en este caso también se tiene que $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi$.

Pauta (6 pts.)
1 pto. por cada interpretación.
Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.