PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 1

9 de septiembre de 2022

2º semestre 2022 - Profesores F. Suárez - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 2 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Demuestre usando inducción que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Para todo $x \geq -1$ y para todo natural $n \geq 1$ se tiene que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

b) Sea a_n la secuencia de naturales definida como

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 8$
- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 3$

Demuestre que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

Solución

a) Demostraremos por inducción simple para todo natural $n \geq 1$.

BI: Supongamos que $n = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(1+x) &= 1 + 1 \cdot x \\ &\geq 1 + x\end{aligned}$$

HI: Suponemos que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, para algún $n \geq 1$.

TI: Demostraremos que $n+1$ cumple la propiedad. Si desarrollamos el lado izquierdo de la desigualdad:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + x(1+n) + nx^2 \\ &\geq 1 + x(1+n)\end{aligned}$$

Concluimos que $(1+x)^{n+1} \geq 1 + x(1+n)$, con lo que se cumple la propiedad para $n+1$.

Por el principio de inducción simple, la propiedad debe ser cierta para todo natural $n \geq 1$.

b) Por inducción simple para $n \geq 1$.

BI: Si $n = 1$ tenemos que

$$a_1 = 3 \cdot 2^0 + 2(-1)^1 = 1.$$

Si $n = 2$ tenemos que

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2(-1)^2 = 8$$

HI: Suponemos que para algún $n \geq 3$ se tiene que

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n$$

TI: Demostraremos que $n + 1$ cumple la propiedad. Sabemos que $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Entonces

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 2a_{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} + 2(-1)^n + 2(3 \cdot 2^{n-2} + 2(-1)^{n-1}) \\ &= 3 \cdot 2^n + 2(-1)^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^n + 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

con lo que la propiedad se cumple para $n + 1$.

Finalmente, por el principio de inducción simple, la propiedad debe ser cierta para todo natural $n \geq 1$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 2.0 pts. por tesis de inducción y concluir.

b)
- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 2.0 pts. por tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

a) Sea A un conjunto no vacío de letras. Un palíndromo sobre A se define como una secuencia de letras que se lee de la misma forma de adelante hacia atrás, y desde atrás hacia adelante. Por ejemplo, *ana*, *anita lava la tina* o *la ruta nos aporto otro paso natural*. Sea λ la palabra vacía. Se define el conjunto S inductivamente como el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

   a) $\lambda \in S$.

   b) $\forall a \in A$, $a \in S$.

   c) $\forall a \in A \ \forall x \in S$, $axa \in S$.

   Demuestre que todo elemento de S es un palíndromo sobre A.

b) Sea L el conjunto de palabras formadas con los símbolos a y b, definido de manera inductiva como el menor conjunto que cumple con las siguientes reglas:

   - $a \in L$, $b \in L$.
   - Si $\mu \in L$ y $\nu \in L$, entonces $\mu\nu \in L$.

   Definimos también la operación reversa R en L como:

   - $R(a) = a$ y $R(b) = b$,
   - Si $\mu \in L$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$, y $R(b\mu) = R(\mu)b$.

   Demuestre que para todo $\mu, \nu \in L$ se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu).$$

Solución

a) Mostraremos por inducción estructural que todo elemento de $s \in S$ es un palíndromo sobre A.

   BI: Si $s = \lambda$, la palabra vacía es trivialmente un palíndromo. Además, si $s = a$ con $a \in A$, la palabra con exactamente un caracter también es un palíndromo.

   HI: Sea $s \in S$ tal que s es un palíndromo.

   TI: Mostraremos que la palabra asa, con $a \in A$ es un palíndromo. En primer lugar, notemos que asa termina y empieza con el mismo caracter a. Además, por hipótesis de inducción, sabemos que s es un palíndromo, y por ende también se lee de la misma forma de adelante y hacia atrás. Por lo tanto, asa también debe ser un palíndromo, ya que no tiene más letras que las de s en conjunto con sus caracteres iniciales y finales.

Por el principio de inducción estructural, hemos demostrado que todo $s \in S$ es un palíndromo.

b) Mostraremos por inducción estructural que todo $\mu, \nu \in L$ cumple que $R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$.

BI: Si $\mu = a$ o $\mu = b$. Si $\mu = a$, sea $\nu \in L$ y entonces

$$R(\mu\nu) = R(\nu)a = R(\nu)R(\mu).$$

De manera análoga se tiene para $\mu = b$.

HI: Sean $\mu, \nu \in L$ tales que para todo $\xi \in L$

$$R(\mu\xi) = R(\xi)R(\mu)$$
$$R(\nu\xi) = R(\xi)R(\nu)$$

TI: Mostraremos que $\mu\nu$ cumple la propiedad para todo $\xi \in L$. Es decir, mostraremos que $R(\mu\nu\xi) = R(\xi)R(\mu\nu)$. Desarrollando el lado izquierdo tenemos que:

$$\begin{aligned} R(\mu\nu\xi) &= R(\mu(\nu\xi)) \\ &= R(\nu\xi)R(\mu) && \text{(por HI)} \\ &= R(\xi)R(\nu)R(\mu) && \text{(por HI)} \\ &= R(\xi)R(\mu\nu) && \text{(por HI)} \end{aligned}$$

Por el principio de inducción estructural, hemos demostrado que todo $\mu, \nu \in L$ cumple que $R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 2.0 pts. por tesis de inducción y concluir.

b)
- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva.
- 2.0 pts. por tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.