PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2018

PAUTA INTERROGACION 3

Pregunta 1

La demostración fue vista en clases, por lo tanto se dará un breve resumen de la demostración. Esta consistía en suponer un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que cumple la premisa del principio de inducción fuerte (PIF), esto es, $\forall n \in \mathbb{N}.\{0, \cdots, n-1\} \subseteq A \rightarrow n \in A$ y utilizando el principio de inducción simple (PIS) demostrar que $A = \mathbb{N}$ y por ende que se cumple el PIF.

Para esto, había que construir un conjunto $B = \{n \mid \{0, \cdots, n\} \subseteq A\}$ y demostrar que este conjunto cumple las premisas del PIS ($0 \in B$ y $\forall n.\ n \in B \rightarrow n+1 \in B$) para poder concluir que $B = \mathbb{N}$. Finalmente, a partir de la construcción de B se debía explicar porqué $A = B = \mathbb{N}$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 punto)** Por definir el conjunto A correctamente (suponer que cumple la premisa de inducción fuerte).
- **(1 punto)** Por definir correctamente el conjunto B.
- **(1 punto)** Por mostrar que $0 \in B$ (o $0 \in A$).
- **(2 puntos)** Por mostrar que $\forall n.\ n \in B \rightarrow n+1 \in B$ y concluir por inducción simple que $B = \mathbb{N}$
- **(1 punto)** Por explicar que $A = B = \mathbb{N}$ y concluir principio de inducción fuerte.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

La solución consistía en entregar el tiempo de ejecución del algoritmo, demostrando por que está correcto, y luego encontrar una funcion f tal que el algoritmo esté en $\Theta(f)$.

En este caso, el "*for*" del algoritmo tomaba n pasos, y al terminar quedaba $k = n^n$. Luego, el *while* se ejecutaba hasta que $i \leq k$. Es claro que i se ve de la forma $i = 2^l$ donde l es el número de iteraciones que lleva el algoritmo. Por lo tanto el "*while*" se ejecuta hasta que $2^l > n^n$. Despejamos l:

$$\begin{array}{lll} 2^l & > & n^n \qquad / \log_2(\cdot) \\ l & > & n \log_2 n \end{array}$$

Entonces el "*while*" hará $n \log n$ iteraciones. Por lo tanto, la función del tiempo del algoritmo es:

$$T(n) = n + n \log n + O(1)$$

Finalmente, usamos $f(n) = n \log n$ y el algoritmo es claramente $\Theta(f(n))$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por encontrar f, explicar como se encuentra f y demostrar que está en $\Theta(f)$.
- **(2.5 puntos)** Por demostrar que la función de tiempo del algoritmo es correcta.

Pregunta 2.2

Vemos que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
\log(a_k \cdot n^k + \ldots + a_1 \cdot n + a_0) &\leq \log(a_k \cdot n^k + \ldots + a_1 \cdot n^k + a_0 \cdot n^k) \\
&\leq \log\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot n^k\Big) \\
&\leq \log\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) + k \cdot \log(n)
\end{aligned}$$

Luego, sea b la base del logaritmo. Para todo $n \geq b$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\log\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) + k \cdot \log(n) &\leq \log\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big) \cdot \log(n) + k \cdot \log(n) \\
&\leq \Big(k + \log\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big) \cdot \log(n)
\end{aligned}$$

Y por lo tanto usando $c = \big(k + \log\big(\sum_{i=0}^{n} a_i\big)\big)$ y $n_0 = b$ se tiene que $\log(a_k \cdot n^k + \ldots + a_1 \cdot n + a_0) \in O(\log(n))$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1.5 puntos)** Por acotar la función por arriba correctamente, mencionando que $n \geq 1$ y luego desarrollarla.
- **(1.5 puntos)** Por encontrar y justificar correctamente las constantes usadas.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

Para demostrar lo pedido se utilizará inducción fuerte. Se empieza definiendo la afirmación $P(n)$ que demostraremos:

$$P(n) \ := \ \text{para todo } a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N} \text{ el minimo número de multiplicaciones es } n-1$$

Luego se estructura la inducción fuerte de la siguiente forma:

1. $P(1)$: Se cumple trivialmente, ya que no se necesita ninguna multiplicación $(n-1=0)$
2. Para $P(n)$ suponemos que $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$. Si $P(k)$ y $P(l)$ son verdaderos con $k + l = n$, entonces podemos agrupar $a_1, a_2, ..., a_n$ de la siguiente forma:

   $$a_1 \times a_2 \times ... \times a_n = (b_1 \times ... \times b_k) \times (c_1 \times ... \times c_l)$$

   Por hipótesis inductiva tenemos que con dicha agrupación resolveríamos $a_1, a_2, ..., a_n$ en $(k-1) + (l-1) + 1 = k + l - 1 = n - 1$ multiplicaciones, quedando entonces demostrado $P(n)$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por definir explícita o implícitamente la afirmación a demostrar.
- **(0.5 puntos)** Por caso base.
- **(1 punto)** Por notar $a_1, a_2, ..., a_n = b_1, .., b_k, c_1, ..., c_l$.
- **(0.5 puntos)** Por notar cantidad de multiplicaciones en b_i y c_i.
- **(0.5 puntos)** Por llegar a demostrar $P(n)$ correctamente.

Demostraciones por inducción simple que, si bien el uso de inducción es correcto pero no demuestra todos los casos, obtendrán un máximo de 2 puntos con descuentos a juicio del corrector.

Pregunta 3.2

Para demostrar lo pedido se utilizará inducción simple. Se empieza definiendo la afirmación que demostraremos:

$$P(n) := \text{para todo } I_1, I_2, ..., I_n \text{ si } (I_i \cap I_j \neq \emptyset \text{ para todo } i, j \text{ con } i < j \leq n) \text{ entonces } I_1 \cap ... \cap I_n \neq \emptyset.$$

Luego se estructura la inducción.

1. $P(2)$: se cumple trivialmente ya que por suposición $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, que es lo que queremos demostrar.
2. Por inducción simple, suponemos que se cumple $P(n)$ y demostramos para $P(n+1)$. Sean $I_1, \ldots, I_{n+1}$ intervalos tal que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ para todo $i < j \leq n+1$.

   PD: $I_1 \cap \ldots \cap I_{n+1} \neq \emptyset$

   Considere $I'_n = I_n \cap I_{n+1}$. Es fácil ver que I'_n es un intervalo y además por suposición es distinto de vacío, o sea, $I'_n \neq \emptyset$. Ahora considere los n intervalos $I_1, \ldots, I_{n-1}, I'_n$. Por suposición, para todo $i < j \leq n-1$ tenemos que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. En el caso que $i < j = n$, tenemos que demostrar que $I_i \cap I'_n \neq \emptyset$ para todo $i < n$.

   PD: $I_i \cap I'_n \neq \emptyset$.

   Sea el intervalo $I_j = \{x \mid a_j < x < b_j\}$. Luego, es fácil ver que:

   $$I'_n = \{x \mid \text{máx}(a_n, a_{n+1}) < x < \text{mín}(b_n, b_{n+1})\}.$$

   Con esto tenemos que:

   $$I_i \cap I'_n = \{x \mid \text{máx}(a_i, a_n, a_{n+1}) < x < \text{mín}(b_i, b_n, b_{n+1})\}$$

   Para $a \in \{a_i, a_n, a_{n+1}\}$ y $b \in \{b_i, b_n, b_{n+1}\}$ se tiene que $a < b$, ya que $I_r \cap I_s \neq \emptyset$ para todo $r, s \in \{i, n, n+1\}$. Luego, es claro que $\text{máx}(a_i, a_n, a_{n+1}) < \text{mín}(b_i, b_n, b_{n+1})$, entonces $I_i \cap I'_n$ es un intervalo en los reales, y por ende $I_i \cap I'_n \neq \emptyset$

   Por lo tanto, como $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ para todo $i < j \leq n-1$ y $I_i \cap I'_n \neq \emptyset$ para todo $i < n$, entonces tenemos n-intervalos $I_1, \ldots, I_{n-1}, I'_n$ cuya intersección de a pares es distinta a vacía. Por hipótesis de inducción tenemos que $I_1 \cap \ldots \cap I_{n-1} \cap I'_n \neq \emptyset$ y como $I'_n = I_n \cap I_{n+1}$ tenemos que:

   $$I_1 \cap \ldots \cap I_{n-1} \cap I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset.$$

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0.5 puntos)** Por definir explícita o implícitamente la afirmación a demostrar.
- **(0.5 puntos)** Por caso base.
- **(1 punto)** Por notar límites de I^*
- **(0.5 puntos)** Por demostrar $I^* \cap I_{k+1} \neq \emptyset$.
- **(0.5 puntos)** Por llegar a demostrar $P(n)$ correctamente.

Pregunta 4

Pregunta 4.1

La solución consistía en demostrar que la cardinalidad de $\mathcal{F} = \{f : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ era distinta a la cardinalidad de $\mathbb{R}$. Una manera de hacerlo era demostrar que la cardinalidad de $\mathcal{F}$ era igual o mayor a la cardinalidad del conjunto potencia de $\mathbb{R}$, es decir, $2^{|\mathbb{R}|}$. Para esto, bastaba encontrar una función inyectiva que vaya desde $2^{\mathbb{R}}$ a $\mathcal{F}$, por lo cual podemos concluir que $|\mathbb{R}| < |2^{\mathbb{R}}| \leq \mathcal{F}$ y por lo tanto $|\mathbb{R}| \neq \mathcal{F}$.

Para formar la función inyectiva $F : 2^{\mathbb{R}} \to \mathcal{F}$, defina para cada $S \in 2^{\mathbb{R}}$ la función $f_S : \mathbb{R} \to \{0,1\} \in \mathcal{F}$ tal que $f_S(r) = 1$ si y solo si $r \in S$. Entonces, defina $F : 2^{\mathbb{R}} \to \mathcal{F}$ tal que $F(S) = f_S$ para $S \in 2^{\mathbb{R}}$. Es fácil demostrar que F es inyectiva, ya que para dos subconjuntos distintos $S_1 \neq S_2$ tal que $r \in S_1$ y $r \notin S_2$ se tendrá que $f_{S_1}(r) = 1$ y $f_{S_2}(r) = 0$ y, por lo tanto, $f_{S_1} \neq f_{S_2}$. Es importante destacar que para decir que la función era efectivamente inyectiva, no era necesario que la demostración fuera completamente formal, pero si que estuviese explicado.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(2.5 puntos)** Por encontrar la función inyectiva.
- **(0.5 punto)** Por concluir.

Pregunta 4.2

La solución consistía en demostrar que la cardinalidad de $\mathcal{P}_k$ era igual a la cardinalidad de $|\mathbb{R}|$. Para lograr esto, se debía encontrar una función biyectiva entre $\mathcal{P}_k$ y $\mathbb{R}$. Una solución posible es la siguiente. Primero, se debe argumentar que $|\mathcal{P}_k| = |\mathbb{R}^{k+1}|$. Luego, demostrar que $|\mathbb{R}^{k+1}| = |\mathbb{R}|$. Para esto, sin perdida de generalidad daremos la idea para $\mathbb{R}^3$. Sea $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, con:

$$\begin{aligned} a &= a_1a_2\dots a_j.a_{j+1}a_{j+2}\dots \\ b &= b_1b_2\dots b_j.b_{j+1}b_{j+2}\dots \\ c &= c_1c_2\dots c_j.c_{j+1}c_{j+2}\dots \end{aligned}$$

la representación decimal de a, b y c, respectivamente. Ahora defina $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como:

$$f(a,b,c) \ = \ a_1b_1c_1a_2b_2c_2\dots a_jb_jc_j \, . \, a_{j+1}b_{j+1}c_{j+1}a_{j+2}b_{j+2}c_{j+2}\dots$$

Es decir, ir intercalando los digitos de a, b, c. Es fácil demostrar que f es una biyección por lo cual $|\mathbb{R}^{k+1}| = |\mathbb{R}|$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(1 puntos)** Por reconocer que $|\mathcal{P}_k| = |\mathbb{R}^{k+1}|$.
- **(2 puntos)** Por demostrar que $|\mathbb{R}^{k+1}| = |\mathbb{R}|$, de los cuales 0.5 eran asignados por mostrar que la función encontrada era biyectiva.

Existían, por supuesto, otras maneras de demostrar esta pregunta. Para ellas, el puntaje otorgado fue gradual al nivel de logro de la demostración y al nivel de detalle de esta.