Máximo común divisor

Clase 24

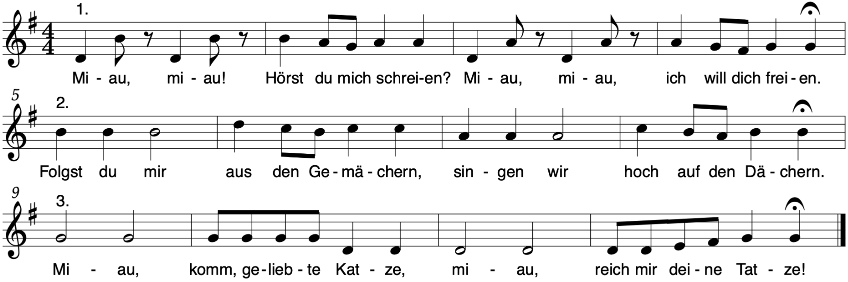
IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Miau

aus Frankreich



Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

Tercer Acto: Aplicaciones

Algoritmos, grafos y números

Playlist Tercer Acto

DiscretiWawos #3

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Aritmética modular

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

Nos pondremos en dos casos.

Caso 1: $a \geq 0$. Se hará la demostración por inducción sobre el valor de a.

BI: $a = 0 \rightarrow 0^p = 0 \equiv_p 0$

$a = 1 \rightarrow 1^p = 1 \equiv_p 1$

HI: Suponemos que $a^p \equiv_p a$. Notemos que esto implica que $p \mid a^p - a$.

TI: Por demostrar: $(a+1)^p \equiv_p (a+1)$, o equivalentemente, que

$$p \mid (a+1)^p - (a+1), \text{ con } 2 \leq a+1 \tag{1}$$

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

$$\text{PD: } p \mid (a+1)^p - (a+1), \text{ con } 2 \leq a+1. \tag{1}$$

Por el teorema del binomio, sabemos que $(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k$, con $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. Desarrollamos la parte derecha de (1):

$$\begin{aligned}
(a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1)
\end{aligned}$$

Aritmética modular

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

$$\begin{aligned}
(a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + 1 + a^p - a - 1 \\
&= (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k
\end{aligned}$$

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

Tenemos entonces que

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Por HI, sabemos que $p \mid a^p - a$. Por demostrar: $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$.

Demostraremos que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \mid \binom{p}{k}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)(p-k)!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}\end{aligned}$$

Aritmética modular

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

Tenemos entonces que

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

Como los coeficientes binomiales son enteros, el numerador debe ser divisible por el denominador. Como p es primo y $k < p$, sabemos que entre los factores de $k!$ no puede haber divisores de p, por lo que necesariamente

$$\frac{(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}, \text{ y entonces}$$

$$\binom{p}{k} = p \cdot \alpha, \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ y por lo tanto } p \mid \binom{p}{k}.$$

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

En conclusión, tenemos que

$$p \mid (a+1)^p - (a+1)$$

y por lo tanto

$$(a+1)^p \equiv_p (a+1)$$

como queríamos demostrar.

Se sigue entonces por inducción el teorema planteado para $a \geq 0$.

Teorema (Fermat)

Si p es un número primo, para cualquier entero a se cumple que $a^p \equiv_p a$.

<u>Caso 2:</u> $a < 0$. Sabemos que $a \equiv_p a \bmod p$, y por teorema de multiplicación $a^p \equiv_p (a \bmod p)^p$. Ahora, como $a \bmod p \geq 0$, corresponde al caso 1 recién demostrado, y por lo tanto $(a \bmod p)^p \equiv_p a \bmod p$. Finalmente, tenemos que

$$a^p \equiv_p (a \bmod p)^p \equiv_p a \bmod p \equiv_p a$$

y entonces $a^p \equiv_p a$.

Corolario (Fermat)

Si p es un número primo y a es un entero que no es múltiplo de p, entonces $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Aritmética modular

Corolario (Fermat)

Si p es un número primo y a es un entero que no es múltiplo de p, entonces $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Por el teorema anterior:

$$a^p \equiv_p a \Rightarrow p \mid a^p - a \Rightarrow a^p - a = k \cdot p \tag{1}$$

Notemos que $a \mid a^p - a$, y por lo tanto $a \mid k \cdot p$. Como p es primo y a no es múltiplo de p, necesariamente $a \mid k$. Dividiendo (1) por a:

$$a^{p-1} - 1 = \frac{k}{a} \cdot p, \text{ con } \frac{k}{a} \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto:

$$p \mid a^{p-1} - 1 \Rightarrow 1 \equiv_p a^{p-1} \Rightarrow a^{p-1} \equiv_p 1$$

Objetivos de la clase

- Demostrar teorema de Fermat para números primos
- Comprender concepto de MCD
- Comprender el algoritmo extendido de Euclides
- Comprender el concepto de inverso modular

Outline

Máximo común divisor

Definición (*del kinder*)

Dados dos números a y b, su **máximo común divisor**, denotado como $MCD(a, b)$, es el máximo natural n tal que $n|a$ y $n|b$.

¿Cómo podemos calcularlo?

Máximo común divisor

Teorema

Si $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces $MCD(a, b) = MCD(b,\ a \bmod b)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Máximo común divisor

Teorema

Si $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces $MCD(a, b) = MCD(b,\ a \text{ mod } b)$.

Demostraremos que un entero c divide a a y a b si y sólo si divide a b y a mod b. De esto se concluye el teorema.

Sabemos que $a = k \cdot b + a \text{ mod } b$ (1).

($\Rightarrow$) Suponemos que $c \mid a$ y $c \mid b$. Si despejamos a mod b desde (1), obtenemos que $a \text{ mod } b = a - k \cdot b$, de donde se concluye que $c \mid a \text{ mod } b$.

($\Leftarrow$) Suponemos que $c \mid b$ y $c \mid a \text{ mod } b$. De (1) se concluye que $c \mid a$.

Máximo común divisor

Entonces:

$$MCD(a,b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b,\ a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

A este método recursivo lo llamamos **Algoritmo de Euclides**

Ejercicio

Calcule $MCD(403, 156)$.

Algoritmo de Euclides

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b,\ a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

Ejercicio

Calcule $MCD(403,\ 156)$.

$$\begin{aligned} MCD(403,\ 156) &= MCD(156,\ 403 \bmod 156) = MCD(156,\ 91) \\ &= MCD(91,\ 156 \bmod 91) = MCD(91,\ 65) \\ &= MCD(65,\ 91 \bmod 65) = MCD(65,\ 26) \\ &= MCD(26,\ 65 \bmod 26) = MCD(26,\ 13) \\ &= MCD(13,\ 26 \bmod 13) = MCD(13,\ 0) \\ &= 13 \end{aligned}$$

Extenderemos este algoritmo para obtener más información sobre el MCD

Algoritmo de Euclides extendido

Algoritmo extendido del MCD

Sea $a \geq b$.

1. Definimos una sucesión $\{r_i\}$ como:

$$r_0 = a,\ r_1 = b,\ r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

2. Definimos sucesiones $\{s_i\}$, $\{t_i\}$ tales que:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, t_0 = 0 \\ s_1 &= 0, t_1 = 1 \\ r_i &= s_i \cdot a + t_i \cdot b \end{aligned}$$

3. Calculamos estas sucesiones hasta un k tal que $r_k = 0$.
4. Entonces, $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$.

¿Cómo deducimos s_i y t_i en el paso 2.?

Algoritmo de Euclides extendido

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre que

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i$$

$$t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

Algoritmo de Euclides extendido

En la sucesión definimos que $r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$. Escribimos r_{i-1} como división de r_i:

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i-1} \bmod r_i \tag{1}$$

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \tag{2}$$

En la sucesión también definimos que $r_{i-1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b$ (3). Reemplazamos (3) en la parte izquierda de (2) y despejamos r_{i+1}:

$$s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1}$$

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i$$

Algoritmo de Euclides extendido

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i$$

Como $r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$:

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot (s_i \cdot a + t_i \cdot b)$$

$$r_{i+1} = \left(s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i \right) \cdot a + \left(t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i \right) \cdot b$$

Y como $r_{i+1} = s_{i+1} \cdot a + t_{i+1} \cdot b$:

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i \qquad\qquad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

Algoritmo de Euclides extendido

Algoritmo extendido del MCD

Sea $a \geq b$.

1. Definimos una sucesión $\{r_i\}$ como:

$$r_0 = a,\ r_1 = b,\ r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

2. Definimos sucesiones $\{s_i\}$, $\{t_i\}$ tales que:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \quad t_0 = 0 \\ s_1 &= 0, \quad t_1 = 1 \\ s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i, &\quad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i \end{aligned}$$

3. Calculamos estas sucesiones hasta un k tal que $r_k = 0$.
4. Entonces, $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$.

Tenemos todo para calcular el MCD y los pesos que lo expresan como combinación lineal de a y b

Algoritmo de Euclides extendido

Ejercicio

Dados $a = 8$ y $b = 5$, use el algoritmo para calcular $MCD(a, b)$ y $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$.

Algoritmo de Euclides extendido

Usamos el algoritmo extendido sobre $a = 8$ y $b = 5$

i	r_i	s_i	t_i	combinación
0	8	1	0	$8 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 5$
1	5	0	1	$5 = 0 \cdot 8 + 1 \cdot 5$
2	8 mod 5	$1 - \lfloor 8/5 \rfloor \cdot 0$	$0 - \lfloor 8/5 \rfloor \cdot 1$	
	3	1	-1	$3 = 1 \cdot 8 - (-1) \cdot 5$
3	5 mod 3	$0 - \lfloor 5/3 \rfloor \cdot 1$	$1 - \lfloor 5/3 \rfloor \cdot (-1)$	
	2	-1	2	$2 = (-1) \cdot 8 + 2 \cdot 5$
4	3 mod 2	$1 - \lfloor 3/2 \rfloor \cdot (-1)$	$-1 - \lfloor 3/2 \rfloor \cdot 2$	
	1	2	-3	$1 = 2 \cdot 8 + (-3) \cdot 5$
5	2 mod 1	—	—	
	0	—	—	

Concluimos que $MCD(8, 5) = 1 = 2 \cdot 8 + (-3) \cdot 5$, con $s = 2$ y $t = -3$.

Identidad de Bézout

El desarrollo algorítmico anterior muestra el siguiente resultado en acción

Identidad de Bézout

Para todo $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que

$$MCD(a, b) = sa + tb$$

Este es un resultado elemental en teoría de números

Outline

Inversos modulares

Definición

b es **inverso** de a en módulo n si $a \cdot b \equiv_n 1$.

Podemos denotarlo como a^{-1}. Ojo: no es lo mismo que $\frac{1}{a}$.

Ejemplo

¿Cuál es el inverso de 5 en módulo 3?

¿Existe siempre inverso para todo a y módulo n?

Inversos modulares

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Si $MCD(a, n) = 1$, decimos que a y n son **primos relativos** o **coprimos**

Inversos modulares

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

($\Rightarrow$) Supongamos que a tiene inverso en módulo n, digamos b. Por demostrar: $MCD(a, n) = 1$.

Como b es el inverso de a en módulo n, se cumple que $a \cdot b \equiv_n 1$, y por lo tanto $(a \cdot b) \bmod n = 1$. Entonces, tenemos que $a \cdot b = k \cdot n + 1$, y despejando 1 obtenemos que $1 = a \cdot b - k \cdot n$. Luego, necesariamente cualquier entero c tal que $c \mid a$ y $c \mid n$ debe cumplir que $c \mid 1$, por lo que la única posibilidad es que c sea 1, y por lo tanto necesariamente $MCD(a, n) = 1$.

Inversos modulares

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $MCD(a, n) = 1$. Por demostrar: a tiene inverso en módulo n.

Si ejecutamos el algoritmo extendido del MCD obtenemos s, t tales que

$$\begin{aligned} & 1 = s \cdot a + t \cdot n \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot s = (-t) \cdot n + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot s \text{ mod } n = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a \cdot s \equiv_n 1 \end{aligned}$$

Y entonces a tiene inverso en módulo n, específicamente s. $\square$

¡Podemos calcular el inverso con el algoritmo extendido!
En tal caso, el coeficiente s que acompaña a a es su inverso

Outline

Objetivos de la clase

- □ Demostrar teorema de Fermat para números primos
- □ Comprender concepto de MCD
- □ Comprender el algoritmo extendido de Euclides
- □ Comprender el concepto de inverso modular