Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2022

PAUTA TAREA 2

Pregunta 1

Suponga un contexto simplificado de exportación e importación de minerales entre distintos países. Para modelar este problema considere los símbolos de predicado $O(x), P(x), C(x), V(x, y), E(x, y)$ y $x = y$. Además considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &:= \text{países.} \\
\mathcal{I}(O(x)) &:= x \text{ produce oro.} \\
\mathcal{I}(P(x)) &:= x \text{ produce plata.} \\
\mathcal{I}(C(x)) &:= x \text{ produce cobre.} \\
\mathcal{I}(V(x, y)) &:= x \text{ es vecino de } y \text{ (esto es, comparten frontera terrestre).} \\
\mathcal{I}(E(x, y)) &:= x \text{ exporta todos los tipos de minerales que él produce a } y. \\
\mathcal{I}(x = y) &:= x \text{ es el mismo país que } y.
\end{aligned}
$$

En otras palabras, para algún país p del dominio se tiene que $\mathcal{I} \models O(p)$ si, y sólo si, p tiene yacimientos de oro y lo produce. Análogamente para los otros predicados. En el caso de la igualdad, este predicado siempre funciona como la igualdad y no tiene otra interpretación. Es decir, para todo p_1, p_2 en $\mathcal{I}(dom)$ se tiene que $\mathcal{I} \models (p_1 = p_2)$ si, y solo si, p_1 y p_2 son exactamente el mismo objeto (país).

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando brevemente su correctitud.

Pregunta 1.a

Todo país exporta uno o más minerales a algún vecino si, y solo si, produce al menos un mineral.

Solución:

$$\forall x.\exists y.(E(x, y) \wedge V(x, y)) \iff (O(x) \vee P(x) \vee C(x))$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Se escriben comentarios y tiene errores irrelevantes en la fórmula o no se escriben comentarios pero la fórmula no tiene errores.
- **(3 puntos)** Se escriben comentarios y la idea es correcta, pero la fórmula contiene errores menores.
- **(2 puntos)** No se escribe comentario y la fórmula tiene errores menores, o se escribe comentario y la idea es parcialmente correcta pero hay errores medianos en la fórmula.
- **(0 puntos)** En otro caso

Pregunta 1.b

Existe al menos un país que exporta cobre a todos los países (excluyendo a él mismo) y que además importa oro y plata de algún vecino.

Solución:

$$\exists x \exists z \forall y (C(x) \wedge E(x,y) \wedge \neg(x=y)) \wedge (O(z) \wedge P(z) \wedge E(z,x) \wedge V(x,z))$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Se escriben comentarios y tiene errores irrelevantes en la fórmula o no se escriben comentarios pero la fórmula no tiene errores.
- **(3 puntos)** Se escriben comentarios y la idea es correcta, pero la fórmula contiene errores menores.
- **(2 puntos)** No se escribe comentario y la fórmula tiene errores menores, o se escribe comentario y la idea es parcialmente correcta pero hay errores medianos en la fórmula.
- **(0 puntos)** En otro caso

Pregunta 1.c

Existe más de un país que produce más de un mineral.

Solución: Sea

$$\alpha'(x) := (P(x) \wedge O(x)) \vee (P(x) \wedge C(x)) \vee (O(x) \wedge C(x))$$

$$\exists x_1 . \exists x_2 . \neg(x_1 = x_2) \wedge \alpha'(x_1) \wedge \alpha'(x_2)$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Se escriben comentarios y tiene errores irrelevantes en la fórmula o no se escriben comentarios pero la fórmula no tiene errores.
- **(3 puntos)** Se escriben comentarios y la idea es correcta, pero la fórmula contiene errores menores.
- **(2 puntos)** No se escribe comentario y la fórmula tiene errores menores, o se escribe comentario y la idea es parcialmente correcta pero hay errores medianos en la fórmula.
- **(0 puntos)** En otro caso

Pregunta 1.d

Para la siguiente afirmación considere $k > 1$:
Existe un conjunto de k países que forma un monopolio, esto es, existen k países distintos que cumplen las siguientes propiedades simultáneamente:

1. *Cada uno de los k países produce al menos un mineral.*
2. *El resto de los países (distinto a los k países) no produce ningún mineral.*
3. *Cada país importa mineral solo de estos k países y solo en caso que sea su vecino.*
4. *Para todo par de vecinos de un mismo país, ellos no producen el mismo mineral (en otras palabras, no hay competencia).*

Notar que en esta pregunta, para cada k debe entregar una fórmula distinta que dependerá de k.

Solución:
Hint: Escriba esta fórmula para $k = 2$ y $k = 3$ y generalice después para un k cualquiera.
La solución está dada por un α_k, tal que

$$\begin{aligned}
\alpha_k := \overbrace{\exists x1., ..., \exists x_k.}^{0} \overbrace{\bigwedge_{i,j\in[1,k],i\neq j} \neg(x_i = x_j)}^{1} \quad & \wedge \quad B_a(x_1, ..., x_k) \quad 2 \\
& \wedge \quad B_b(x_1, ..., x_k) \quad 3 \\
& \wedge \quad B_c(x_1, ..., x_k) \quad 4 \\
& \wedge \quad B_d \quad 5
\end{aligned}$$

Donde B_a, B_b, B_c, B_d representan cada condición del enunciado, tales que

$$\mathrm{B}_a(x_1, .., x_k) := \bigwedge_{i=1}^{k} (P(x_i) \vee O(x_i) \vee C(x_i))$$

$$\mathrm{B}_b(x_1, .., x_k) := \forall y.(\bigwedge_{i=1}^{k} \neg(y = x_i)) \rightarrow (\neg(P(y) \vee O(y) \vee C(y)))$$

$$\mathrm{B}_c(x_1, .., x_k) := \forall y.\forall z.E(z, y) \rightarrow (\bigvee_{i=1}^{k} (z = x_i) \wedge V(y, z))$$

$$\mathrm{B}_d := \forall y.\forall z, \forall w.(V(y, z) \wedge V(y, w) \wedge \neg(z = w)) \rightarrow (\neg((P(y) \wedge P(w)) \vee (O(y) \wedge O(w)) \vee (C(y) \wedge C(w))))$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

En α_k se enumeran 6 elementos a considerar para obtener el puntaje completo. Luego, el puntaje asignado varía según cuantos elementos correctos hay en la formula total.

- **(4 puntos)** Formula contiene los 6 elementos totalmente correctos
- **(3 puntos)** Formula contiene 5 de 6 elementos totalmente correctos
- **(2 puntos)** Formula contiene 4 de 6 elementos totalmente correctos
- **(0 puntos)** En otro caso

Pregunta 2

Para una interpretación $\mathcal{I}$ y un elemento a de $\mathcal{I}(dom)$, decimos que a es *definible* en lógica de predicados si existe una fórmula $\alpha(x)$ en lógica de predicados tal que $\mathcal{I} \models \alpha(a)$ y $\mathcal{I} \not\models \alpha(b)$ para todo b en $\mathcal{I}(dom)$ con $a \neq b$.

Pregunta 2.a

Para un $N > 0$ cualquiera y un símbolo de predicado $<$, sea $\mathcal{I}_N$ tal que

$$\mathcal{I}_N(dom) := \{0, \ldots, N\}$$
$$\mathcal{I}_N(<) := x < y$$

Demuestre que para todo $0 \leq k \leq N$ se tiene que k es definible en lógica de predicados.

Solución:

Dado $N > 0$ y $0 \leq k \leq N$ debemos definir una fórmula que sólo sea satisfacible al ser evaluada en k. Sea

$$\alpha_k(x) = \exists x_0 \ldots \exists x_N \bigwedge_{0 \leq i < N} (x_i < x_{i+1}) \wedge (\neg(x < x_k) \wedge \neg(x_k < x))$$

Podemos descomponer la fórmula anterior en dos partes. En primer lugar $\exists x_0 \ldots \exists x_N \bigwedge_{0 \leq i < N}(x_i < x_{i+1})$ que será satisfacible si y sólo si existen $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ en el dominio de la interpretación. En segundo lugar tenemos $(\neg(x < x_k) \wedge \neg(x_k < x))$ que será satisfecha si y sólo si evaluamos en x_k.

Al usar la interpretación $\mathcal{I}_N$ en α_k, la primera parte sólo es satisfecha al tomar $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_N = N$, de esta forma la segunda parte verifica que $x = k$ y por lo tanto sólo será cierta al evaluar en k, es decir $\mathcal{I}_N \models \alpha_k(a)$ si y sólo si $a = k$ como queríamos.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Demuestra correctamente todo lo pedido.
- (**3 Puntos**) Contiene errores menores en fórmula para definir k.
- (**2 Puntos**) Fórmula incompleta pero que demuestra comprensión de lo pedido.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.b

A partir del ítem anterior, demuestre que existen infinitas fórmulas $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ que solo usan el símbolo de predicado $<$, tales que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$ para todo $i \neq j$.

Solución:

Podemos usar una variación de la primera parte de la fórmula construida en la parte anterior para responder esta pregunta. Sea

$$\beta_i = \exists x_0 \ldots \exists x_i \bigwedge_{0 \leq t < i} (x_t < x_{t+1})$$

Esta fórmula será satisfecha si y sólo si es capaz de encontrar números $x_0 < x_1 < \ldots < x_i$ en el dominio de la interpretación usada. Tomemos $i < j$ y analicemos las fórmulas β_i y β_j. Al tomar la interpretación $\mathcal{I}_i$ como definida en el ejercicio anterior tendremos

$$\mathcal{I}_i \models \beta_i \qquad \text{pero} \qquad \mathcal{I}_i \not\models \beta_j$$

Pues es posible encontrar $i+1$ elementos distintos en el dominio de $\mathcal{I}_i$ para satisfacer β_i pero no $j+1$ para satisfacer β_j. Por lo tanto $\beta_i \not\equiv \beta_j$ para todo $i \neq j$ y de esta forma tenemos infinitas fórmulas no equivalentes.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

(**4 Puntos**) Demuestra correctamente todo lo pedido.

(**3 Puntos**) Faltan detalles en la demostración de validez de las fórmulas pedidas.

(**2 Puntos**) Define familia de fórmulas válida pero no explica su validez.

(**0 Puntos**) En otro caso.