Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2017

INTERROGACION 3

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Demuestre que para todo $b > 1$ y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, n se puede escribir de forma única como:

$$n \;=\; a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + \ldots + a_1 b + a_0 \;=\; \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$$

con $k \geq 1$, $a_{k-1} \neq 0$ y $a_i < b$ para todo $i < k$.
Recuerde demostrar que la representación es única para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Pregunta 2

Para un alfabeto finito Σ se define el conjunto $\mathcal{P}_\Sigma$ como el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

- $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$.
- $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.
- si $u \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot u \cdot a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.

Por último, para una palabra $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ se define la palabra reversa $w^R = a_n \ldots a_2 a_1$.

1. Demuestre que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $w = w^R$.
2. Demuestre que para toda palabra $w \in \Sigma^*$, si $w = w^R$, entonces $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Pregunta 3

Demuestre que $\log_2(n!) \in \Theta(n \cdot \log_2(n))$ usando la definición de notación Θ (no puede usar límites). Para esta demostración, usted puede asumir la "fórmula de Stirling":

$$n! \;\in\; \Theta(\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n)$$

donde $\pi = 3{,}14\ldots$ y $e = 2{,}71\ldots$ son constantes.

Pregunta 4

1. Para $m > 1$ demuestre que si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces $\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$.
2. Para $m > 1$ demuestre que si $ac \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv b \ (\text{mód } \frac{m}{\gcd(m,c)})$.