Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2019

INTERROGACION 3

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Demuestre que para todo conjunto A (finito o infinito) se tiene que A no es equinumeroso con el conjunto potencia 2^A.

Pregunta 2

Para esta pregunta considere el siguiente algoritmo A:

```
Require: S = {a_1, a_2, ..., a_n}
  if |S| es par then
    for i ∈ {1, 2, ..., |S|} do
      print a_i
    end for
  else
    for i ∈ {1, 2, ..., |S|} do
      for j ∈ {1, 2, ..., |S|} do
        print a_i, a_j
      end for
    end for
  end if
```

Para el análisis del algoritmo considere el tamaño del input como $|S| = n$. También considere que cada operación toma tiempo constante. En particular, la función `print` toma tiempo constante en imprimir un objeto a_i o a_i, a_j.

1. Encuentre una función f para el tiempo T_A del algoritmo tal que $T_A \in \Theta(f)$. Explique su respuesta.
2. Demuestre que para todo k se tiene que $T_A \notin \Theta(n^k)$.

Pregunta 3

Dado un alfabeto finito Σ, una palabra infinita w sobre Σ es una secuencia de símbolos: $w = s_0 s_1 s_2 \ldots$ con $s_i \in \Sigma$ para todo $i \geq 0$. Se define el conjunto de todas las palabras infinitas sobre el alfabeto Σ como Σ^ω.

1. Demuestre que para todo alfabeto finito Σ con $|\Sigma| \geq 2$ se tiene que Σ^ω es equinumeroso con $\{0,1\}^\omega$.

2. Considere el conjunto $\Sigma^{\omega\text{-reg}} \subseteq \Sigma^\omega$ de todas las secuencias "regulares" en Σ^ω tal que $s_0s_1s_2\ldots \in \Sigma^{\omega\text{-reg}}$ si, y solo si, existen palabras $u, v \in \Sigma^*$ (finitas) tal que:

$$s_0s_1s_2\ldots = u \cdot v \cdot v \cdot v \ldots$$

Por ejemplo, la secuencia $aaaabababab\ldots \in \Sigma^{\omega\text{-reg}}$ dado que considerando $u = aaa$ y $v = ab$ se tiene que $aaaabababab\ldots = aaa \cdot ab \cdot ab \cdot ab \ldots$. Demuestre que el conjunto $\Sigma^{\omega\text{-reg}}$ es numerable.

Pregunta 4

Para un conjunto finito $D = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ con $a_1 < \ldots < a_n$ se define median(D) como la *mediana* del conjunto D tal que:

$$\text{median}(D) \;=\; \frac{a_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{2}$$

Esto es, la mediana de D es un valor tal que divide el conjunto D en dos conjuntos de igual tamaño. Por ejemplo, si $D = \{1, 4, 8, 11, 15\}$ entonces median(D) $= 8$. En cambio, si $D = \{1, 4, 8, 11, 15, 20\}$ entonces median(D) $= \frac{8+11}{2} = 9{,}5$.

Sea $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ un intervalo en los reales con $a, b \in \mathbb{N}$. Demuestre usando inducción fuerte que para todo conjunto finito D, si I contiene más de la mitad de los elementos de D, entonces la mediana de D esta en el intervalo I. Formalmente, demuestre que si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2}$, entonces median($D$) $\in I$.