

Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de septiembre de 2023

Objetivos

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.

Contenidos

① Introducción

② Funciones

¿Funciones... de nuevo?

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular \longrightarrow métodos
- Modelar \longrightarrow simulación
- Estructuras de datos y algoritmos \longrightarrow hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar \longrightarrow MD5, SHA-1
- Contar

Introducción

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular \longrightarrow métodos
- Modelar \longrightarrow simulación
- Estructuras de datos y algoritmos \longrightarrow hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar \longrightarrow MD5, SHA-1
- **¡Contar o indexar!**

Formalizaremos el concepto y lo aplicaremos.

Definición

Sea f una relación binaria de A en B ; es decir, $f \subseteq A \times B$.

Diremos que f es una **función** de A en B si dado cualquier elemento $a \in A$, si existe un elemento en $b \in B$ tal que afb , este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si afb , escribimos $b = f(a)$.

- b es la *imagen* de a .
- a es la *preimagen* de b .

Notación: $f : A \rightarrow B$

Una función $f : A \rightarrow B$ se dice **total** si todo elemento en A tiene imagen.

- Es decir, si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $b = f(a)$.
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- De ahora en adelante, toda función será total a menos que se diga lo contrario.

Ejemplos

Las siguientes relaciones son todas funciones de \mathbb{N}_4 en \mathbb{N}_4 :

$$f_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$f_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$$

$$f_3 = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

¿Cuántas funciones $f : \mathbb{N}_4 \rightarrow \mathbb{N}_4$ podemos construir?

Respuesta: $4^4 = 256$.

También podemos definir funciones mediante expresiones que nos den el valor de $f(x)$.

Ejemplos

Las siguientes son definiciones para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \lfloor x + \sqrt{x} \rfloor$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Dado un conjunto A cualquiera, las siguientes son definiciones para funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$\forall a \in A, f_1(a) = \{a\}$$

$$\forall a \in A, f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

$$\forall a \in A, f_3(a) = \emptyset$$

Definición

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es:

- 1 **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos $x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Es decir, no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.
- 2 **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento $b \in B$ tiene preimagen. Es decir, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.
- 3 **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejercicio

Determine qué propiedades cumplen o no cumplen las siguientes funciones:

- ❶ $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall a \in A, f(a) = \{a\}$
- ❷ $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A), \forall a \in A, f(a) = \emptyset$
- ❸ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_4, \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n \bmod 4$
- ❹ $f : \mathbb{N}_4 \rightarrow \mathbb{N}_4, \forall n \in \mathbb{N}_4, f(n) = (n + 2) \bmod 4$

- ❶ es inyectiva y no sobreyectiva.
- ❷ ni inyectiva ni sobreyectiva.
- ❸ es sobreyectiva y no inyectiva.
- ❹ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

- Recordemos que las relaciones (y por lo tanto las funciones) son conjuntos (de pares ordenados).
- Esto significa que podemos usar las operaciones de conjuntos.
 - Unión
 - Intersección
 - Complemento
 - ...
- Existen también operaciones exclusivas para relaciones (y funciones).

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dada una relación R de A en B , la **relación inversa** de R es una relación de B en A definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

Definición

Dada una función f de A en B , diremos que f es **invertible** si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A .

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dadas relaciones R de A en B y S de B en C , la **composición** de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C , la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C .

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C , la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C .

① $g \circ f$ es función: supongamos que

$$(g \circ f)(x) = z_1 \text{ y } (g \circ f)(x) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Por definición de composición:

$$g(f(x)) = z_1 \text{ y } g(f(x)) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Como f es función, existe un único $y \in B$ tal que $y = f(x)$, y luego

$$g(y) = z_1 \text{ y } g(y) = z_2, \text{ con } x \in A, y \in B, z_1, z_2 \in C$$

y como g también es función, $z_1 = z_2$. Concluimos que $g \circ f$ es función.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C , la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C .

② $g \circ f$ es total: sea $x \in A$.

Como f es función total, $\exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Similarmente, como g es función total, $\exists z \in C$ tal que $(y, z) \in g$.

Luego, $(x, z) \in g \circ f$.

Como para cada $x \in A$ existe $z \in C$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, $g \circ f$ es total.

Teorema

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A .

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f es biyectiva, entonces es invertible.

Teorema

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A .

- 1 Función: supongamos que $yf^{-1}x_1$ e $yf^{-1}x_2$, con $y \in B$ y $x_1, x_2 \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que x_1fy y x_2fy . Como f es inyectiva, $x_1 = x_2$, y por lo tanto f^{-1} es función.
- 2 Total: como f es sobre, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es total.

Teorema

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A .

- ③ Inyectiva: supongamos que $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, con $y_1, y_2 \in B$ y $x \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$. Como f es función, $y_1 = y_2$, y por lo tanto f^{-1} es inyectiva.
- ④ Sobre: como f es total, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es sobre.

Funciones

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$:

- 1 Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
- 2 Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$:

- ❶ Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
 - ❷ Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
-
- ❶ Supongamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, con $x_1, x_2 \in A$. Por definición de composición, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$, y como f también es inyectiva, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
 - ❷ Sea $z \in C$. Como g es sobre, sabemos que existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Similarmente, como f es sobre, sabemos que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces, tenemos que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, y por lo tanto para cada $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Concluimos que $g \circ f$ es sobre.

Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de septiembre de 2023