Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

2 de septiembre de 2022

2º semestre 2022 - Profesores F. Suárez - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 20 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

a) El famoso juego Sudoku consiste en un puzzle donde se posicionan números entre 1 y 9. El objetivo es ingresar números entre dichas cantidades en entradas de una matriz de 9×9 donde cada fila y columna debe tener una, y sola una vez, los números $1, \ldots, 9$. Además, esta matriz se subdivide en 9 matrices pequeñas de 3×3, donde cada una de ellas (simultáneamente) tiene en sus 9 entradas los dígitos mencionados sin repetirlos.

Dado un tablero de Sudoku parcialmente completo con algunos números, usted debe construir una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

$$\varphi \text{ es satisfacible}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{es posible completar el tablero con las reglas planteadas}$$

b) Reduzca las siguientes fórmulas a CNF:

I) $\neg((p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$

II) $p \vee (\neg q \wedge (r \rightarrow \neg p))$

Solución

a) Para $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$ definimos el siguiente conjunto de variables proposicionales:

$$P = \{p_{ijk} \mid p_{ijk} = 1 \text{ si y sólo si en la fila } i \text{ columna } j \text{ hay un número } k\}$$

Sea M un tablero parcialmente completo, considere las siguientes fórmulas en lógica proposicional:

- Hay al menos un número en cada celda:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigvee_{k=1}^{9} p_{ijk}$$

- Las celdas no pueden tener dos números a la vez:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \left(p_{ijk} \rightarrow \bigwedge_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{9} \neg p_{ijk'} \right)$$

- Cada número aparece a lo más una vez en cada fila y en cada columna:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{i=1}^{9}\bigwedge_{j=1}^{9}\bigwedge_{k=1}^{9}\left(p_{ijk} \to \left(\bigwedge_{\substack{i'=1\\i'\neq i}}^{9} \neg p_{i'jk} \wedge \bigwedge_{\substack{j'=1\\j'\neq j}}^{9} \neg p_{ij'k}\right)\right)$$

- Una sub-región tiene todos los números del 1 al 9:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{l=0}^{2}\bigwedge_{h=0}^{2}\bigwedge_{k=1}^{9}\bigvee_{i=1}^{3}\bigvee_{j=1}^{3} p_{3l+i,3h+j,k}$$

- Inicializamos las celdas ya completadas en M:

$$\varphi_5 = \bigwedge_{\substack{\text{si en } M \text{ en la celda } (i,j)\\ \text{hay un número } k}} p_{ijk}$$

Finalmente, podemos considerar $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$ como la fórmula pedida.

b) I) Utilizando las reglas de implicancia, doble negación, De Morgan, idempotencia, distribución y asociatividad de la conjunción y la disyunción tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered}
\neg((p \to (q \to r))) \to ((p \to q) \to (q \to r)) \\
\neg((p \to (\neg q \vee r))) \to ((\neg p \vee q) \to (\neg q \vee r)) \\
\neg\neg((\neg p \vee (\neg q \vee r))) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r)) \\
(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r)) \\
(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \vee ((p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)) \\
\neg p \vee (\neg q \vee r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r) \\
(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (p \wedge \neg q) \\
(\neg p \vee \neg q \vee r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee \neg q).
\end{gathered}$$

II) Utilizando las reglas de implicancia, doble negación, De Morgan, idempotencia, distribución y asociatividad de la conjunción y la disyunción tenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered}
p \vee (\neg q \wedge (r \to \neg p)) \\
p \vee (\neg q \wedge (\neg r \vee \neg p)) \\
p \vee ((\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p)) \\
(\neg q \wedge \neg r) \vee p \vee (\neg q \wedge \neg p) \\
(\neg q \wedge \neg r) \vee ((p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg p)) \\
(\neg q \wedge \neg r) \vee (p \vee \neg q) \\
(p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)
\end{gathered}$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 pts. por plantear el conjunto P.
- 0.5 pts. por φ_1.
- 0.5 pts. por φ_2.
- 0.5 pts. por φ_3.
- 0.5 pts. por φ_4.
- 0.5 pts. por φ_5.

b)
- 1.5 pt. por I).
- 1.5 pt. por II).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

a) Considere el símbolo de predicado binario $\leq$ y las interpretaciones $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ tal que:

- $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(dom) = \mathbb{R}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\leq)$ es el orden usual sobre $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}(dom) = \mathbb{N}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}(\leq)$ es el orden usual sobre $\mathbb{N}$.

Escriba dos fórmulas α y β que cumplan las siguientes propiedades:

I) $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \models \alpha$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \not\models \alpha$.

II) $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \not\models \beta$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \models \beta$.

b) Demuestre que la siguiente oración es satisfacible, esto es, existe una interpretación $\mathcal{I}$ que la satisface:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((x_1 = y_1 \land x_2 = y_2 \land P(x_1, x_2)) \rightarrow P(y_1, y_2))$$

Solución

a) I) Definimos la siguiente fórmula

$$\alpha := \forall x \forall y ((x \leq y \land y \neq x) \rightarrow \exists z (x \leq z \land z \leq y \land z \neq x \land z \neq y))$$

que establece la existencia de un número diferente entre todo par de números distintos. Esta fórmula es satisfecha por la interpretación $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ dado que para todo par de números reales a, b podemos encontrar otro real $c = \frac{a+b}{2}$. Sin embargo, esta fórmula no es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$. Por ejemplo, si tomamos $a = 0$ y $b = 1$ no podemos encontrar ningún número natural entre ellos.

II) Definimos la siguiente fórmula

$$\beta := \exists x \forall y (x \leq y)$$

que establece la existencia de un elemento mínimo en el dominio de la interpretación. Esta fórmula es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ dado que el cero es el menor número natural. Sin embargo, β no es satisfecha por $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, dado que los reales no tienen un menor elemento.

b) Sea

$$\varphi := \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge P(x_1, x_2)) \rightarrow P(y_1, y_2))$$

Para los predicados binarios $=$ y $P(\cdot, \cdot)$, se define la interpretación $\mathcal{I}$ tal que

- $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathcal{I}(P)$ se interpreta como la relación de divide a, es decir

$$P(x, y) \text{ si y sólo si existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } xk = y$$

Mostraremos que $\mathcal{I} \models \varphi$, como tenemos 4 cuantificadores universales, tomaremos cuatro elementos x_1, x_2, y_1, y_2 arbitrarios del dominio tales que $P(x_1, x_2)$ es cierto, $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$.

Como $P(x_1, x_2)$ se cumple, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 k = x_2$. Luego aplicando la igualdad de la hipótesis:

$$x_1 k = x_2 \Leftrightarrow y_1 k = y_2$$

de manera que se cumple $P(y_1, y_2)$. Luego, como la implicancia es cierta para una elección arbitraria de elementos, concluimos

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 1.0 pts. por definición correcta de fórmula α.
- 0.5 pt. por justificación de que α cumple lo pedido.
- 1.0 pts. por definición correcta de fórmula β.
- 0.5 pt. por justificación de que β cumple lo pedido.

b)
- 0.5 pts. por definir el dominio.
- 1.0 pts. por dar nterpretación del símbolo P.
- 1.5 pts. por demostrar que $\mathcal{I} \models \varphi$.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.