PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Interrogación 2

17 de noviembre de 2023

Profesores: Nicolás Alvarado - Bernardo Barías - Sebastián Bugedo - Gabriel Diéguez

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2:30 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada. **Esto solo aplica a preguntas completas**.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Relaciones de orden

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos en A se dice *ordenada* si todos sus elementos son distintos y $a_i \preceq a_{i+1}$, con $1 \leq i < n$. Además, diremos que dicha secuencia tiene largo n.

a) Demuestre que para todo $n \geq 2$, no existe una secuencia ordenada $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de largo n tal que $a_n \preceq a_1$.

b) Decimos que una secuencia ordenada de largo n es de *largo máximo* si no existe una secuencia ordenada de largo $m > n$ de elementos en A.

   Demuestre que si A es finito y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una secuencia ordenada de largo máximo, entonces a_1 es un elemento minimal de A.

   Recuerde que x es un elemento minimal de A si $x \in A$ y para todo $y \in A$ se cumple que si $y \preceq x$, entonces $y = x$.

Pregunta 2 - Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto y S una relación binaria sobre A.

a) **(2 ptos.)** Demuestre que existe una relación de equivalencia R sobre A tal que $S \subseteq R$.

b) **(4 ptos.)** Considere el conjunto

$$T_S = \{E \subseteq A^2 \mid E \text{ es una relación de equivalencia tal que } S \subseteq E\}.$$

Sea $R_S = \bigcap T_S$ la relación que resulta de intersectar los elementos de T.

Demuestre que R_S es una relación de equivalencia.

Pregunta 3 - Cardinalidad

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un *polinomio con coeficientes enteros* si es de la forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{ donde } a_i \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mathcal{P} = \{f \mid f \text{ es un polinomio con coeficientes enteros}\}$.

Demuestre que $\mathcal{P}$ es enumerable.

Pregunta 4 - Análisis de algoritmos

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 \log_2(n) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Demuestre usando inducción que $T(n) \in O(n^2 (\log n)^2)$.

Puede que los siguientes valores le resulten útiles:

$$\log_2(3) \approx 1{,}6 \quad \log_2(5) \approx 2{,}3 \quad \log_2(6) \approx 2{,}6 \quad \log_2(7) \approx 2{,}8$$