Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

1 de octubre de 2018
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Problemas

Pregunta 1

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Demuestre que si $(A, \preceq)$ es superiormente completo, entonces es inferiormente completo.

Solución

Sabiendo que $(A, \preceq)$ es superiormente completo, debemos demostrar que es inferiormente completo; es decir, que para todo $S \subseteq A$, si S está acotado inferiormente, entonces S tiene ínfimo.

Sea $S \subseteq A$, tal que S está acotado inferiormente, vale decir S tiene al menos una cota inferior. Tomemos el conjunto de todas las cotas inferiores de S:

$$S_{ci} = \{a \in A \mid a \text{ es cota inferior de } S\}$$

Esto quiere decir que dado un $x \in S_{ci}$, se tiene que para todo $s \in S$ se cumple que $x \preceq s$, por definición de cota inferior. Más aún, tenemos que todos los elementos de S son cotas superiores de S_{ci}, por lo que este está acotado superiormente.

Como $(A, \preceq)$ es superiormente completo, se tiene que S_{ci} tiene supremo, denotado por $sup(S_{ci})$. Por definición de supremo, sabemos que $sup(S_{ci}) \preceq s'$ para toda cota superior s' de S_{ci}, y en particular para todo elemento $s \in S$, pues como ya mencionamos, todos son cotas superiores de S_{ci}. Por lo tanto, $sup(S_{ci})$ es una cota inferior de S, y luego $sup(S_{ci}) \in S_{ci}$. Por definición de supremo, $sup(S_{ci})$ es también cota superior de S_{ci}, y por lo tanto es la mayor cota inferior de S, y luego $sup(S_{ci}) = inf(S)$.

Con esto demostramos que si S está acotado inferiormente, tiene ínfimo, y entonces es inferiormente completo.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

- 3 pts por construcción de S_{ci} y demostrar que está acotado superiormente.
- 3 pts por demostrar que $sup(S_{ci})$ es cota inferior de S y concluir demostración.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Dado un elemento $a \in A$, se define el siguiente conjunto:

$$\langle a \rangle_R = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}.$$

Considere ahora el siguiente conjunto:

$$\mathcal{S}_R = \{\langle a \rangle_R \mid a \in A\}.$$

a) Si R es refleja y $\mathcal{S}_R$ es una partición de A, ¿es R una relación de equivalencia? Demuestre o dé un contraejemplo.

b) Si R es simétrica y $\mathcal{S}_R$ es una partición de A, ¿es R una relación de equivalencia? Demuestre o dé un contraejemplo.

Solución

a) R sí es una relación de equivalencia. Se demostrará directamente:

- **R es refleja**

  Se obtiene por enunciado

- **R es simétrica**

  Sean $a, b \in A$ tales que $(a,b) \in R$. Por definición, esto implica que $b \in \langle a \rangle_R$. Por otra parte, dado que R es refleja, se tiene que $(b,b) \in R$ y en consecuencia $b \in \langle b \rangle_R$. Dado que $\mathcal{S}_R$ es partición, y que b pertenece tanto a $\langle a \rangle_R$ como $\langle b \rangle_R$, se tiene que $\langle a \rangle_R = \langle b \rangle_R$. De igual forma que con b, dado que R es refleja, se tiene que $(a,a) \in R$ y en consecuencia $a \in \langle a \rangle_R$, y por lo visto anteriormente, entonces $a \in \langle b \rangle_R$. Por definición, esto implica que $(b,a) \in R$, demostrando así que R es simétrica.

- **R es transitiva**

  Sean $a, b, c \in A$ tales que (a,b) y $(b,c) \in R$. Por el mismo argumento de la parte anterior, dado que $(a,b) \in R$ y que $(b,b) \in R$, se tiene que $\langle a \rangle_R = \langle b \rangle_R$. Por otra parte, dado que $(b,c) \in R$, se cumple que $c \in \langle b \rangle_R$ y en consecuencia, que $c \in \langle a \rangle_R$. Por definición, esto implica que $(a,c) \in R$, demostrando así que R es transitiva.

Por lo tanto R es una relación de equivalencia

b) R no es una relación de equivalencia. Se demostrará por contraejemplo.

Tomemos el conjunto A y la relación R sobre A, definidos de la siguiente forma:

$$A = \{1, 2\}$$
$$R = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Notemos que R es simétrica en A y que

$$\langle 1 \rangle_R = \{2\}$$
$$\langle 2 \rangle_R = \{1\}$$

Por lo tanto $\mathcal{S}_R$ es una partición de A.

Por último, notamos que R no es refleja, y que por lo tanto no es una relación de equivalencia.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

a)
- 1.5 puntos por demostrar que la relación es simétrica.
- 1.5 puntos por demostrar que la relación es transitiva.

b)
- 2 puntos por demostrar correctamente.
- 1 punto por formalidad.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3

Sean A y B conjuntos y una función $f : A \to B$. Para todo $X \subseteq A$ definimos el siguiente conjunto:

$$F(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b\}$$

Dada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ una colección de subconjuntos de A, demuestre que:

a) $F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big) = \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$.

b) $F\Big(\bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big) \subseteq \bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$.

Solución

a) Por definición de igualdad de conjuntos, demostraremos la contención hacia ambos lados:

- $F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big) \subseteq \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$

  Sea $b \in F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big)$. Por definición, existe $a \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D$ tal que $f(a) = b$. Como $a \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D$ entonces existe un $D^* \in S$ tal que $a \in D^*$, y por lo tanto $b \in F(D^*)$, lo que implica que $b \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$. Se concluye que $F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big) \subseteq \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$.

- $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D) \subseteq F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big)$.

  Sea $b \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$. Por definición, existe $D^* \in S$ tal que $b \in F(D^*)$, y luego existe $a \in D^*$ tal que $f(a) = b$. Dado que $a \in D^*$, entonces $a \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D$, y como $f(a) = b$ esto implica que $b \in F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big)$. Se concluye que $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D) \subseteq F\Big(\bigcup\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big)$.

b) Sea $b \in F\Big(\bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big)$. Por definición, existe $a \in \bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} D$ tal que $f(a) = b$. Luego, $a \in D$ para todo $D \in S$ y por lo tanto $b \in F(D)$ para todo $D \in S$, lo que es equivalente a decir que $b \in \bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$. Se concluye que $F\Big(\bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} D\Big) \subseteq \bigcap\limits_{D\in\mathcal{S}} F(D)$.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

a) 1.5 ptos. por cada contención.

b) 3 ptos.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4

Sea S el intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Demuestre que $S \times S \approx S$.

Solución

Para demostrar que ambos conjuntos son equinumerosos, encontraremos dos funciones inyectivas

$$f : S \to S \times S$$
$$g : S \times S \to S$$

Para la primera función, basta con tomar $f(x) = (x, x)$ cuya inyectividad resulta trivial.

Ahora consideremos el par $(x, y) \in (0,1)^2$. Podemos escribir x e y como:

$$x = 0.x_0x_1x_2x_3\ldots \quad y = 0.y_0y_1y_2y_3\ldots$$

Luego definimos $g : S \times S \to S$ como:

$$g((x,y)) = 0.d_0d_1d_2d_3d_4d_5\ldots$$

donde

$$d_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ es par} \\ y_{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora debemos mostrar que g es inyectiva. Sean (u, v) y (w, z) elementos en $(0,1)^2$ tales que

$$g((u,v)) = g((w,z))$$

Podemos escribir u, v, w, z como:

$$u = 0.u_0u_1u_2u_3\ldots \quad v = 0.v_0v_1v_2v_3\ldots \quad w = 0.w_0w_1w_2w_3\ldots \quad z = 0.z_0z_1z_2z_3\ldots$$

Por definición tenemos

$$g((u,v)) = g((w,z))$$
$$0.u_0v_0u_1v_1u_2v_2\ldots = 0.w_0z_0w_1z_1w_2z_2\ldots$$

En general

$$\forall n(u_n = w_n \land v_n = z_n)$$
$$\forall n(u_n = w_n) \land \forall n(v_n = z_n)$$
$$(u = w) \land (v = z)$$
$$(u,v) = (w,z)$$

y por lo tanto concluimos que g es inyectiva.

<u>Pauta</u> (6 pts.)

- 2 ptos. por dar función f.
- 2 ptos. por dar función g.
- 2 ptos. por mostrar inyectividad de g.
- Si el estudiante sólo demuestra que $S \times S$ no es enumerable, la nota máxima de la pregunta es 4.

Puntajes intermedios a criterio del corrector.