Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 11

10 de noviembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

---

Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.
  - Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
  - Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
  - Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
  - Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes

- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u|(v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

Ejercicio 1 | Grafos y Conexidad

a) Demuestre que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y solo si, para cada partición de V en dos conjuntos no vacíos, existe una arista que conecta vértices de ambos conjuntos.

b) Demuestre que todo grafo con más de un vértice tiene al menos dos vértices con el mismo grado.

Solución:
a)

($\Rightarrow$)

Tomando una partición cualquiera V_1, V_2 no vacía de V y $u \in V_1$ y $v \in V_2$ cualesquiera, como sabemos que G es conexo, entonces necesariamente debe existir un camino P entre u y v. A partir de ello sabemos que existe un último vértice t de P en V_1 el cual necesariamente debe estar conectado a otro vértice s en V_2. Luego, $(t, s) \in E$ con $t \in V_1$ y $s \in V_2$.

($\Leftarrow$)

Por contrapositivo: Supongamos que G es disconexo, luego podemos considerar un componente H de G tal que se tiene la partición V_1, V_2 no vacía (pues G es disconexo) de V tal que,

$$V_1 = \{v \in V|v \in H\}$$

$$V_2 = V \backslash V_1$$

Dado que G es disconexo sabemos que no existe un camino entre un vértice en H y el subrgrafo de G que no contiene vértices en H, por lo cual no existe un camino entre V_1 y V_2, y más concretamente no existe ninguna arista que cruce de V_1 y V_2.

b)
Por contradicción supongamos que no existe ningún par de vértices con el mismo grado. Sabemos que para un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$ el grado máximo de un vértice es $n - 1$ y el grado mínimo es 0. Luego, a partir de esto podemos considerar el conjunto $A := \{0, ..., n - 1\}$ de todos los grados posibles de los vértices de G, luego para cada uno de los n vértices de G se corresponde un elemento del conjunto A con su grado. Luego, como existe un vértice de grado $n - 1$ significa que se encuentra conectado con todos los otros vértices

de G, sin embargo esto es imposible pues existe un vértice de grado 0, i.e, que no se encuentra conectado con ningún vértice. Por lo tanto llegamos a una contradicción, obteniendo así que debe existir al menos dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 2 | Grafos bipartitos y ciclos

Demuestre que un grafo simple y conexo G es bipartito si y solo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Hint: se permite utilizar el siguiente lema .[En] un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar, contiene un ciclo de largo impar."

($\Rightarrow$)

Supongamos que G contiene un ciclo de largo impar, digamos $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1)$, con k un natural impar. Demostraremos que G no puede ser bipartito. Supongamos que G es bipartito con particiones V_1 y V_2, y supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Dado que C es un ciclo, necesariamente $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para $1 \leq i < k$ y $v_k v_1 \in E(G)$. Por lo tanto, debe ocurrir que $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$, etc. En general, debe ocurrir que para los vértices del ciclo C, $v_i \in V_1$ si i es impar, y $v_i \in V_2$ si i es par. Luego, $v_k \in V_1$, lo que es una contradicción con el hecho de suponer que V_1 es una partición que contiene a v_1, ya que $v_k v_1 \in E(G)$.

($\Leftarrow$)

Supongamos que G no contiene ningún ciclo de largo impar. Demostraremos que es posible definir una partición de los vértices de G en dos conjuntos independientes. Sea v un vértice cualquiera de $V(G)$, definimos $V_1 = \{u \in V(G) \,|\, \text{existe un camino de largo impar de } v \text{ a } u\}$, y $V_2 = \{u \in V(G) \,|\, \text{existe un camino de largo par de } v \text{ a } u\}$. Si existiera una arista entre dos vértices de V_1, digamos u_1 y u_2, entonces, dado que existen caminos $v - u_1$ y $v - u_2$, ambos de largo impar, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista $v_1 v_2$, y por el lema existiría un ciclo de largo impar, lo que contradice nuestra suposición. Si existiera una arista entre dos vértices de V_2, digamos w_1 y w_2, entonces, dado que existen caminos $v - w_1$ y $v - w_2$, ambos de largo par, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista $w_1 w_2$, y nuevamente, por el lema , existiría un ciclo de largo impar, lo que contradice nuestra suposición. Finalmente, no existe arista entre vértices de V_1 y no existe aristas entre vértices de V_2, y como G es conexo, se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$. Por lo tanto, G es bipartito con particiones V_1 y V_2.

Ejercicio 3 | Ciclos y grado

Sea G un grafo tal que todo vértice de G tiene grado al menos $k \geq 2$. Demuestre que G tiene un ciclo de longitud al menos $k + 1$.

Solución:

Vamos a construir una sucesión de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ de la siguiente manera: v_0 es cualquier vértice y si ya construimos a $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ vamos a construir v_t tal que sea adyacente a v_{t-1} y no sea ninguno de v_{t-2}, $v_{t-3} \ldots, v_{t-k}$. Esto puede hacerse ya que $d(v_{t-1}) \geq k$. Como G tiene finitos vértices, la sucesión no puede seguir indefinidamente sin repetir vértices. Debe haber dos vértices de la sucesión v_t y v_{t-l} tal que $v_t = v_{t-l}$. Podemos suponer que t es el primer momento en que sucede esto. Además, por la construcción de la sucesión, tenemos que $l \geq k + 1$. Entonces $(v_{t-l}, v_{t-l+1}, \ldots, v_{t-1}, v_t = v_{t-l})$ es el ciclo que buscábamos.

Ejercicio 4 | Ciclos y grado

Sea G una grafo con n vértices, tal que cada vértice tiene grado mayor o igual a $\frac{n}{2}$. Demuestra que G es conexa.

Solución: Sea N la componente conexa con menos vértices. Si G no es conexa tiene al menos dos componentes conexas. Entonces debe haber una componente conexa con a lo más $\frac{n}{2}$ vértices. Los vértices de N sólo pueden ser adyacentes a vértices de N, por lo que tienen grado a lo más $\frac{n}{2} - 1$, que es menos de lo que pide el problema.

Ejercicio 5

20 jugadores de tenis van a jugar 14 partidos, de tal manera que todos juegan al menos una vez. Demuestra que hay 6 juegos en los que participan exactamente 12 jugadores distintos.

Solución: Consideremos una gráfica de 28 vértices y 14 aristas representando los juegos. A cada vértice le vamos a asignar algún jugador, dependiendo si participó en ese juego. Como cada jugador estuvo en al menos un juego, a 20 de esos vértices les asignamos alguno de los jugadores (todos distintos). Después, nos quedan 8 vértices con los que debemos repetir jugadores. Esos 8 vértices ocupan a lo más 8 aristas, por lo que las 6 aristas restantes forman los juegos que buscábamos. Es decir, en esas 6 aristas no se repite ninguna persona.