Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

13 de septiembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 19:59:59 del 27 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

1. Sea $<$ un símbolo de predicado binario y $=$ un símbolo de predicado binario que siempre se interpreta como igualdad. Considere las siguientes oraciones:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x(\neg(x < x)) \\
\alpha_2 &= \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z) \\
\alpha_3 &= \forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y) \\
\alpha_4 &= \forall x \exists y(x < y) \\
\alpha_5 &= \forall x \exists y(y < x) \\
\alpha_6 &= \forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))
\end{aligned}$$

   Para cada uno de los siguientes conjuntos, decida justificadamente si es o no satisfacible. En caso que proporcione una interpretación, argumente por qué su interpretación satisface el conjunto correspondiente.

   a) **(1.5 pts.)** $\Sigma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

   b) **(1.5 pts.)** $\Sigma_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

2. Considere los siguientes predicados:

$$\begin{aligned}
P(x) &: x \text{ es una guagua} \\
Q(x) &: x \text{ es una persona lógica} \\
R(x) &: x \text{ es capaz de mantener controlado a un león} \\
S(x) &: x \text{ es una persona despistada}
\end{aligned}$$

   Exprese las siguientes afirmaciones como fórmulas en lógica de predicados:

   a) **(0.5 pts.)** Las guaguas son ilógicas.

   b) **(0.5 pts.)** Nadie quien pueda mantener controlado un león es despistado.

   c) **(0.5 pts.)** Las personas ilógicas son despistadas.

   d) **(0.5 pts.)** Las guaguas no pueden mantener controlado a los leones.

   (1 pto.) ¿La última afirmación se puede seguir de las tres primeras? Demuestre.

Solución

1. *a*) Considere una interpretación $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1(dom) = \mathbb{N}$ y $<^{\mathcal{I}_1}$ corresponde a la relación binaria *menor que* usual.

    - Para todo natural n, es claro que $n \not<^{\mathcal{I}_1} n$, y luego $\mathcal{I}_1 \models \alpha_1 = \forall x(\neg(x < x))$.
    - Dados naturales x, y, z tales que $x <^{\mathcal{I}_1} y$ e $y <^{\mathcal{I}_1} z$, se cumple que $x <^{\mathcal{I}_1} z$. Luego, $\mathcal{I}_1 \models \alpha_2 = \forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z)$.
    - Dados naturales x e y, tenemos 3 casos posibles: $x = y$, $x <^{\mathcal{I}_1} y$, o $y <^{\mathcal{I}_1} x$. Luego, $\mathcal{I}_1 \models \alpha_3 = \forall x \forall y(x < y \lor y < x \lor x = y)$.

    Concluimos que Σ_1 es satisfacible.

   b) Considere una interpretación $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2(dom) = \mathbb{Q}$ y $<^{\mathcal{I}_2}$ corresponde a la relación binaria *menor que* usual.

    - Para todo racional x, es claro que $x \not<^{\mathcal{I}_2} x$, y luego $\mathcal{I} \models \alpha_1 = \forall x(\neg(x < x))$.
    - Dados racionales x, y, z tales que $x <^{\mathcal{I}_2} y$ e $y <^{\mathcal{I}_2} z$, se cumple que $x <^{\mathcal{I}_2} z$. Luego, $\mathcal{I} \models \alpha_2 = \forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z)$.
    - Dados racionales x e y, tenemos 3 casos posibles: $x = y$, $x <^{\mathcal{I}_2} y$, o $y <^{\mathcal{I}_2} x$. Luego, $\mathcal{I} \models \alpha_3 = \forall x \forall y(x < y \lor y < x \lor x = y)$.
    - Dado un racional x cualquiera, si tomamos $y = x + 1$ se cumple que $x <^{\mathcal{I}_2} y$. Luego, $\mathcal{I} \models \alpha_4 = \forall x \exists y(x < y)$.
    - Dado un racional x cualquiera, si tomamos $y = x - 1$ se cumple que $y <^{\mathcal{I}_2} x$. Luego, $\mathcal{I} \models \alpha_5 = \forall x \exists y(y < x)$. Notemos que la interpretación $\mathcal{I}_1$ del inciso anterior no sirve en este caso, pues falla para el 0.
    - Dados racionales x, y tales que $x <^{\mathcal{I}_2} y$, si tomamos $z = \frac{x+y}{2}$ se cumple que $z \in \mathcal{I}(dom)$ y que $x <^{\mathcal{I}_2} z <^{\mathcal{I}_2} y$. Luego, $\mathcal{I}_2 \models \alpha_6 = \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y))$.

    Concluimos que Σ_2 es satisfacible.

   Observación: la interpretación $\mathcal{I}_2$ del inciso *b*) también sirve para el inciso *a*).

2. *a*) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$

   b) $\forall x(R(x) \to \neg S(x))$

   c) $\forall x(\neg Q(x) \to S(x))$

   d) $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$

   Demostraremos ahora que

$$\{\forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \forall x(R(x) \to \neg S(x)), \forall x(\neg Q(x) \to S(x))\} \models \forall x(P(x) \to \neg R(x))$$

Dada una interpretación $\mathcal{I}$ tal que

$$\mathcal{I} \models \{\forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \forall x(R(x) \to \neg S(x)), \forall x(\neg Q(x) \to S(x))\}$$

queremos mostrar que $\mathcal{I} \models \forall x(P(x) \to \neg R(x))$. Para esto, debemos demostrar que para todo elemento $a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que $\mathcal{I} \models P(a)$ se cumple que $\mathcal{I} \models \neg R(a)$.

Sea entonces un elemento $a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que $\mathcal{I} \models P(a)$:

- Como $\mathcal{I} \models \forall x(P(x) \to \neg Q(x))$, obtenemos que $\mathcal{I} \models \neg Q(a)$.
- Como $\mathcal{I} \models \forall x(\neg Q(x) \to S(x))$, obtenemos que $\mathcal{I} \models S(a)$.
- Como $\mathcal{I} \models \forall x(R(x) \to \neg S(x))$, por contrapositivo $\mathcal{I} \models \forall x(S(x) \to \neg R(x))$. Concluimos que $\mathcal{I} \models \neg R(a)$.

Pauta (6 pts.)

1. *a*)
   - 0.6 ptos. por dar la interpretación.
   - 0.3 ptos. por explicar cada fórmula.

   b)
   - 0.6 ptos. por dar la interpretación.
   - 0.15 ptos. por explicar cada fórmula.
2. Puntajes según enunciado.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Dado un conjunto A, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \setminus X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. **(0.5 pts.)** $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. **(0.5 pts.)** $A \in \mathcal{T}(A)$
3. **(2.5 pts.)** $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. **(2.5 pts.)** Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

Solución

1. El conjunto $\varnothing$ cumple trivialmente la disyunción que define $\mathcal{T}(A)$, por lo que $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$.
2. Sea $X = A$. Como $X \in \mathcal{P}(A)$ y $A \setminus X = \varnothing$ que es finito, se cumple que $A \in \mathcal{T}(A)$.
3. Es claro que $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{P}(A)$, por lo que analizamos su complemento.

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup \mathcal{T}(A) &= \{a \in A \mid \text{para todo } X \in \mathcal{T}(A) \text{ se tiene } a \notin X\} \\ &= \{a \in A \mid \text{para todo } X \in \mathcal{T}(A) \text{ se tiene } a \in A \setminus X\} \\ &= \bigcap_{X \in \mathcal{T}(A)} (A \setminus X) \end{aligned}$$

   Como los $A \setminus X$ son finitos por definición de $\mathcal{T}(A)$, esta intersección es finita. Concluimos que $\cup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$.

   <u>Observación:</u> también se puede demostrar este inciso argumentando correctamente que la unión es igual a A y utilizando el inciso anterior.

4. Sea $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(A)$ finito, es decir, $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n\}$ para algún natural n.
   - Si $\bigcap \mathcal{X} = \varnothing$, por el inciso 1 es claro que $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.
   - Si $\bigcap \mathcal{X} \neq \varnothing$, demostraremos que $A \setminus \bigcap \mathcal{X}$ es finito.

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcap \mathcal{X} &= \{a \in A \mid a \notin \bigcap \mathcal{X}\} \\ &= \{a \in A \mid \text{existe } \mathcal{X}_i \in \mathcal{X} \text{ tal que } a \notin \mathcal{X}_i\} \\ &= \{a \in A \mid \text{existe } \mathcal{X}_i \in \mathcal{X} \text{ tal que } a \in A \setminus \mathcal{X}_i\} \\ &= \bigcup_{\mathcal{X}_i \in \mathcal{X}} (A \setminus \mathcal{X}_i) \end{aligned}$$

     Como $\bigcap \mathcal{X} \neq \varnothing$, sabemos que cada $\mathcal{X}_i \neq \varnothing$ y $\mathcal{X}_i \in \mathcal{T}(A)$. Por lo tanto, cada $A \setminus \mathcal{X}_i$ es finito. La unión de n conjuntos finitos es finita, por lo cual $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

Pauta (6 pts.)

1. y 2. puntajes según enunciado.
3.
   - 1.5 ptos. por deducir intersección de complementos.
   - 1.0 pto. por concluir complemento finito.
4.
   - 0.5 ptos. por considerar el caso vacío.
   - 1.0 ptos. por deducir unión de complementos.
   - 1.0 pto. por concluir unión finita.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.