Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2020

Examen

Indicaciones

- La duración del examen es 3 horas pero puede tomarse más tiempo si estima necesario.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre, sección y número de lista en cada hoja de respuesta.
- Debe entregar una copia digital de cada pregunta por el buzón del curso, antes de las 23:59 horas del día del examen.
- Debe preocuparse que la copia digital y su calidad sea legible. Se recomienda usar hojas blancas y un lápiz oscuro que sea visible en la versión digital. En caso de no ser legible, no podrá ser evaluada su solución.
- Durante la evaluación puede hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Esta es una evaluación estrictamente individual y, por lo tanto, no puede compartir información con sus compañeros o usar material fuera de sus apuntes o slides del curso. En caso de hacerlo, el examen no reflejará su progreso en el curso, viéndose perjudicada su formación personal y profesional.
- **Al comienzo de cada pregunta debe escribir la siguiente oración y firmarla:**

  "*Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta X fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad.*"

  En caso de no escribir esto al comienzo de cada pregunta, su solución no será evaluada.

Pregunta 1

Sea α y β dos formulas en lógica proposicional con variables $p_1, \ldots, p_k$.

Demuestre que $\alpha \models \beta$ si, y solo si, $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$.

Pregunta 2

Sea S un conjunto infinito y $M = A_0, A_1, A_2, \ldots$ una secuencia tal que $\emptyset \neq A_i \subseteq S$. Decimos que M es una cobertura de S si $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = S$ y $A_i \subset A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dada una cobertura $M = A_0, A_1, \ldots$ de S se define la secuencia de conjuntos $B_0, B_1, B_2, \ldots$ tal que $B_0 = A_0$ y $B_i = A_i \cap (A_{i-1})^c$ para todo $i \geq 1$.

En esta pregunta demostraremos que el conjunto $R = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una partición de S.

1. Demuestre que $B_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. Demuestre que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.
3. Demuestre que $\bigcup_{i=0}^{n} B_i = A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y utilice este resultado para concluir que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$.

Pregunta 3

Considere la notación $\mathcal{O}$ sobre funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:

$$\mathcal{O}(f) \;=\; \{\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \mid\ \exists c \in \mathbb{N}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ g(n) \;\leq\; c \cdot f(n)\ \}$$

1. Para $a \in \mathbb{N}/\{0\}$ se define la función constante $f_a(n) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{O}(f_a)$ es no-numerable.

   Hint: Considere el conjunto de funciones $B = \{\, g : \mathbb{N} \to \{0,1\}\, \}$.

2. Considere el conjunto de funciones crecientes sobre $\mathbb{N}$ como $\mathcal{C} = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}.\ g(n) \leq g(n{+}1)\}$.

   Sea $a \in \mathbb{N}/\{0\}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{C}$ es numerable.

Pregunta 4

Se define el conjunto $\mathcal{T}$ de árboles binarios como $\bullet \in \mathcal{T}$ y, si $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in \mathcal{T}$. Recuerde que para todo árbol $t \in \mathcal{T}$ se define la función $\#\text{nodes} : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ que cuenta el número de nodos recursivamente como $\#\text{nodes}(\bullet) = 1$ y, si $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $\#\text{nodes}(t) = \#\text{nodes}(t_1) + \#\text{nodes}(t_2) + 1$.

1. Considere la función $f : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ definida recursivamente como: $f(\bullet) = 0$ y, si $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $f(t) = \min\{f(t_1), f(t_2)\} + 1$. Explique en sus propias palabras lo que representa el valor $f(t)$ para todo $t \in \mathcal{T}$.

2. Considere la secuencia $t_0, t_1, \ldots \in \mathcal{T}$ definida inductivamente como $t_0 = \bullet$ y $t_{n+1} = \bullet(t_n, t_n)$ para todo $n \geq 0$. Demuestre que $f(t_n) = \lfloor \log_2(\#\text{nodes}(t_n)) \rfloor$.

3. Demuestre usando inducción que $f(t) \leq \log_2(\#\text{nodes}(t))$ para todo $t \in \mathcal{T}$.