Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

28 de octubre de 2021

2º semestre 2021 - Profesores M. Bucchi - G. Diéguez - F. Suárez

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 27 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

a) Sean A, B, C conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones invertibles.

Demuestre que si $g \circ f$ es invertible, entonces para todo $x \in C$ se cumple que

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

b) Sean A, B conjuntos, $f : A \to B$ una función y $S \subseteq A$. Considere el siguiente operador:

$$F(S) = \{b \in B \mid \exists s \in S \text{ tal que } f(s) = b\}$$

Demuestre que para todo $X, Y \subseteq A$ se cumple que

$$F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$$

Solución

a) Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones invertibles tales que $g \circ f$ es invertible, mostraremos que para todo $c \in C$ se cumple que

$$(g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$$

Sea $c \in C$ arbitrario. Dado que $g \circ f$ es invertible, sabemos que existe $(g \circ f)^{-1} : C \to A$ función. Como $(g \circ f)^{-1}$ es total, existe $a \in A$ tal que $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Luego, por definición de inversa obtenemos que $(g \circ f)(a) = c$.

Por definición de composición de funciones debe existir un $b \in B$ tal que $f(a) = b$ y $g(b) = c$. Como f y g son invertibles, obtenemos que $f^{-1}(b) = a$ y $g^{-1}(c) = b$. Esto último corresponde nuevamente a la definición de composición de funciones, de donde se deduce que $(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = a$. Si juntamos esto con la primera igualdad obtenemos que

$$(g \circ f)^{-1}(c) = a = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$$

Finalmente, como $c \in C$ es arbitrario, concluimos que la propiedad se cumple para todos los elementos de C.

b) Demostraremos que para todo $X, Y \subseteq A$ se cumple que $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$.

Como tenemos una igualdad de conjuntos debemos mostrar la contención entre ambos.

- $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$

  Sea $b \in F(X \cup Y)$, por definición de F sabemos que

$$\exists a \in X \cup Y : f(a) = b$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a \in X$. Si juntamos esto con la definición anterior obtenemos que

$$\exists a \in X : f(a) = b$$

Luego por la definición de F se tiene que

$$b \in F(X)$$

Como el resultado también se puede obtener cambiando X por Y, deducimos lo siguiente

$$b \in F(X) \text{ o } b \in F(Y)$$
$$b \in F(X) \cup F(Y)$$

- $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$

  Sea $b \in F(X) \cup F(Y)$ por definición de unión de conjuntos tenemos que

  $$b \in F(X) \text{ o } b \in F(Y)$$

  Aplicando la definición de F

  $$\exists x \in X : f(x) = b \text{ o } \exists y \in Y : f(y) = b$$

  Esto corresponde a la definición de unión de conjuntos, si juntamos esto con la definición de F obtenemos

  $$\exists s \in X \cup Y : f(s) = b$$

  Y por lo tanto $b \in F(X \cup Y)$ y por ende $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$.

Finalmente como $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$ y $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$ concluimos que $F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y)$

Pauta (6 pts.)

- 3 pts por a).
- En b) 1,5 pts por $F(X \cup Y) \subseteq F(X) \cup F(Y)$.
- En b) 1,5 pts por $F(X) \cup F(Y) \subseteq F(X \cup Y)$.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Considere el conjunto

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito y } \mathbb{N}\backslash A \text{ es infinito}\}$$

Por ejemplo, el conjunto $\mathfrak{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es primo}\}$ está en $\mathcal{I}$, pues $\mathfrak{P}$ es infinito, al igual que su complemento $\mathbb{N}\backslash\mathfrak{P}$.

Demuestre que $\mathcal{I} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Solución

Usaremos el teorema de Schröder-Bernstein, por lo que debemos encontrar dos funciones $f : \mathcal{I} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}$ inyectivas.

Para $f : \mathcal{I} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ basta considerar la identidad $f(X) = X$, pues todos los elementos de $\mathcal{I}$ están también en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Es claro que esta función es inyectiva.

Para $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}$, lo que debemos hacer es mapear cada subconjunto X de $\mathbb{N}$ a otro subconjunto de $\mathbb{N}$ que sea infinito y que tenga complemento infinito.

Dado $X \subseteq \mathbb{N}$, hay 3 posibilidades:

- X es finito.
- X es infinito y tiene complemento finito (por ejemplo, $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$).
- X es infinito y tiene complemento infinito (por ejemplo, los impares).

Lo que haremos será enviar cada $x \in X$ a un elemento en un subconjunto de $\mathbb{N}$ que sabemos que es infinito y tiene complemento infinito. Además, para asegurar que todas las imágenes sean distintas (y por lo tanto la función sea inyectiva), usaremos un conjunto que sabemos que es equinumeroso con $\mathbb{N}$. Un conjunto que cumple con todo lo anterior son los impares.

Sean entonces $\mathbb{I}$ y $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales impares y pares respectivamente. Como sabemos que $\mathbb{I} \approx \mathbb{N}$, existe una función biyectiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$. Definimos entonces $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}$ como:

$$g(X) = \begin{cases} \{h(x) \mid x \in X\} \cup \mathbb{P} & \text{si } X \text{ es finito} \\ \{h(x) \mid x \in X\} & \text{si } X \text{ es infinito} \end{cases}$$

En primer lugar, debemos mostrar que las imágenes producidas por g efectivamente están en $\mathcal{I}$; vale decir, que son subconjuntos de $\mathbb{N}$ infinitos con complemento infinito:

- Todas las imágenes están compuestas por números en $\mathbb{I}$ o en $\mathbb{P}$, por lo que son subconjuntos de $\mathbb{N}$.
- Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es finito, por definición de g tenemos que $\mathbb{P} \subseteq g(X)$, por lo que $g(X)$ es infinito. Notemos además que su complemento $\mathbb{N}\backslash g(X)$ contiene a todos los impares,

excepto una cantidad finita de ellos (los que fueron mapeados desde X usando h). Por lo tanto, su complemento es infinito.

- Si X es infinito, $g(X)$ también lo será, pues cada elemento de X será enviado a un número impar distinto en $g(X)$, dado que usamos una biyección. Notemos además que su complemento $\mathbb{N}\backslash g(X)$ contiene a todos los pares, puesto que todos los elementos en $g(X)$ son imágenes de h, que son solo números impares. Por lo tanto, el complemento de $g(X)$ es infinito.

En segundo lugar, debemos mostrar que g es inyectiva:

$$g(X) = g(Y) \to X = Y$$

Como primer caso, tomemos X e Y infinitos. Supogamos también que $g(X) = g(Y)$:

$$\{h(x) \mid x \in X\} = \{h(y) \mid y \in Y\}$$

Como h es biyectiva, es invertible. Aplicamos h^{-1} a los elementos de ambos conjuntos:

$$\begin{gathered}\{h^{-1}(h(x)) \mid x \in X\} = \{h^{-1}(h(y)) \mid y \in Y\} \\ \{x \mid x \in X\} = \{y \mid y \in Y\} \\ X = Y\end{gathered}$$

Como segundo caso, tomemos X e Y finitos. Supogamos también que $g(X) = g(Y)$:

$$\{h(x) \mid x \in X\} \cup \mathbb{P} = \{h(y) \mid y \in Y\} \cup \mathbb{P}$$

Como sabemos que $\{h(x) \mid x \in X\}$ y $\{h(y) \mid y \in Y\}$ solo tienen números impares, no tienen elementos en común con $\mathbb{P}$, de donde obtenemos que

$$\{h(x) \mid x \in X\} = \{h(y) \mid y \in Y\}$$

y luego procedemos análogamente al caso infinito.

Notemos que no es necesario considerar cuando X e Y no sean ambos finitos o infinitos a la vez, puesto que en tales casos una de las imágenes $g(X)$ o $g(Y)$ va a contener números pares y la otra no (por definición de g), y entonces nunca sucederá que $g(X) = g(Y)$. Por lo tanto, se cumple que g es inyectiva.

Dado que encontramos funciones inyectivas $f : \mathcal{I} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}$, concluimos que $\mathcal{I} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Pauta (6 pts.)

- 1 punto por dar función inyectiva $f : \mathcal{I} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- 2 puntos por dar función inyectiva $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{I}$.
- 1 punto por demostrar que g produce imágenes infinitas con complemento infinito.
- 2 puntos por demostrar que g es inyectiva.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.