PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Interrogación 1

23 de Septiembre de 2022

Profesores: Gabriel Diéguez - Nicolás Alvarado - Sebastián Bugedo - Bernardo Barías

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada. **Esto solo aplica a preguntas completas**.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Lógica de predicados

a) **(3 ptos.)** En clases vimos que

$$\forall x(Q(x) \vee P(x)) \not\equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

¿Es cierta la siguiente afirmación?

$$\forall x \forall y(Q(x) \vee P(y)) \equiv \forall x Q(x) \vee \forall x P(x)$$

Demuestre o dé un contraejemplo.

b) **(3 ptos.)** Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

Pregunta 2 - Conjuntos y producto cartesiano

a) Sean A, B y C conjuntos no vacíos.

¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.

1. **(2 ptos.)** $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
2. **(2 ptos.)** $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

b) **(2 ptos.)** Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como

$$A \oplus B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que

$$\text{Si } A \oplus C = B \oplus C \text{ entonces } A = B.$$

Pregunta 3 - Lógica proposicional

Sea M un mapa conformado por n países. Decimos que M es k-coloreable si se pueden pintar todos los países de M con k colores sin que ningún par de países adyacentes tenga el mismo color. En esta pregunta, debe construir una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que M es k-coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

a) **(1 pto.)** Defina variables proposicionales adecuadas. Mencione brevemente su significado.

b) **(3 ptos.)** Construya fórmulas adecuadas para modelar las restricciones del problema.

c) **(2 ptos.)** Demuestre que φ es satisfacible si y solo si M es k-coloreable.

Pregunta 4 - Inducción

a) **(2 ptos.)** Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y sean $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre usando inducción que para todo natural $n \geq 2$ se cumple la *ley de De Morgan generalizada*:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

b) Un *alfabeto* Σ es un conjunto de símbolos finito, y una *palabra* $w = a_1 \ldots a_n$ es una secuencia de símbolos tal que $a_i \in \Sigma$ para cada $1 \leq i \leq n$. En tal caso diremos que w tiene largo n. Además, si una palabra cumple que $a_1 \ldots a_n = a_n \ldots a_1$, es decir, se lee igual al revés y al derecho, decimos que es un *palíndromo*.

1. **(2 ptos.)** Proponga una definición inductiva del conjunto PP_Σ de todas las palabras con símbolos de Σ que son palíndromos y además tienen largo par. *Observación:* la palabra de largo 0 se conoce como palabra vacía y se denota por ε.
2. **(2 ptos.)** Demuestre que toda palabra $w \in PP_\Sigma$ cumple que $w = \varepsilon$ o w tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de Σ.