

# Cardinalidad

Clase 14

IIC 1253

Prof. Sebastián Buggedo

# Outline

**Obertura**

Cardinalidad

Conjuntos finitos e infinitos

Epílogo



# Segundo Acto: Relaciones

## Conjuntos, relaciones y funciones



# Funciones

## Definición

Sea  $f$  una relación binaria de  $A$  en  $B$ ; es decir,  $f \subseteq A \times B$ .

Diremos que  $f$  es una **función** de  $A$  en  $B$  si dado cualquier elemento  $a \in A$ , si existe un elemento en  $b \in B$  tal que  $afb$ , este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si  $afb$ , escribimos  $b = f(a)$ .

- $b$  es la *imagen* de  $a$ .
- $a$  es la *preimagen* de  $b$ .

**Notación:**  $f : A \rightarrow B$

# Funciones

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **total** si todo elemento en  $A$  tiene imagen.

- Es decir, si para todo  $a \in A$  existe  $b \in B$  tal que  $b = f(a)$ .
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- De ahora en adelante, toda función será total a menos que se diga lo contrario.

# Funciones

## Definición

Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es:

1. **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos  $x, y \in A$  se tiene que  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Es decir, no existen dos elementos distintos en  $A$  con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento  $b \in B$  tiene preimagen. Es decir, para todo  $b \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ .
3. **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

# Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

## Definición

Dada una relación  $R$  de  $A$  en  $B$ , la **relación inversa** de  $R$  es una relación de  $B$  en  $A$  definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

## Definición

Dada una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , diremos que  $f$  es **invertible** si su relación inversa  $f^{-1}$  es una función de  $B$  en  $A$ .



# Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

## Definición

Dadas relaciones  $R$  de  $A$  en  $B$  y  $S$  de  $B$  en  $C$ , la **composición** de  $R$  y  $S$  es una relación de  $A$  en  $C$  definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

## Proposición

Dadas funciones  $f$  de  $A$  en  $B$  y  $g$  de  $B$  en  $C$ , la composición  $g \circ f$  es una función de  $A$  en  $C$ .

# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Corolario

Si  $f$  es biyectiva, entonces es invertible.

# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

1. Función: supongamos que  $yf^{-1}x_1$  e  $yf^{-1}x_2$ , con  $y \in B$  y  $x_1, x_2 \in A$ . Por definición de relación inversa, esto significa que  $x_1fy$  y  $x_2fy$ . Como  $f$  es inyectiva,  $x_1 = x_2$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es función.
2. Total: como  $f$  es sobre, para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $y = f(x)$ . Luego, para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $x = f^{-1}(y)$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es total.

# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

3. Inyectiva: supongamos que  $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$ , con  $y_1, y_2 \in B$  y  $x \in A$ . Por definición de relación inversa, esto significa que  $f(x) = y_1$  y  $f(x) = y_2$ . Como  $f$  es función,  $y_1 = y_2$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es inyectiva.
4. Sobre: como  $f$  es total, para todo  $x \in A$  existe  $y \in B$  tal que  $y = f(x)$ . Luego, para todo  $x \in A$  existe  $y \in B$  tal que  $x = f^{-1}(y)$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es sobre.

# Funciones

## Teorema

Dadas dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ :

1. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.
2. Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.

## Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

## Corolario

Si  $f$  y  $g$  son biyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.

# Funciones

## Teorema

Dadas dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ :

1. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.
  2. Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.
- 
1. Supongamos que  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ , con  $x_1, x_2 \in A$ . Por definición de composición,  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ . Como  $g$  es inyectiva, se tiene que  $f(x_1) = f(x_2)$ , y como  $f$  también es inyectiva,  $x_1 = x_2$ . Por lo tanto,  $g \circ f$  es inyectiva.
  2. Sea  $z \in C$ . Como  $g$  es sobre, sabemos que existe  $y \in B$  tal que  $z = g(y)$ . Similarmente, como  $f$  es sobre, sabemos que existe  $x \in A$  tal que  $y = f(x)$ . Entonces, tenemos que  $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ , y por lo tanto para cada  $z \in C$  existe  $x \in A$  tal que  $z = (g \circ f)(x)$ . Concluimos que  $g \circ f$  es sobre.

# Funciones

Una aplicación muy importante de las funciones es que nos permiten razonar sobre el tamaño de los conjuntos. Una propiedad interesante sobre los conjuntos finitos es la siguiente:

## Principio del palomar

Se tienen  $m$  palomas y  $n$  palomares, con  $m > n$ . Entonces, si se reparten las  $m$  palomas en los  $n$  palomares, necesariamente existirá un palomar con más de una paloma.

## Principio del palomar (matemático)

Si se tiene una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  con  $m > n$ , la función  $f$  no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán  $x, y \in \mathbb{N}_m$  tales que  $x \neq y$ , pero  $f(x) = f(y)$ .

# Funciones

## Principio del palomar (para sobreyectividad)

Si se tiene una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  con  $m < n$ , la función  $f$  no puede ser sobreyectiva.

## Corolario

La única forma en que una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  sea biyectiva es que  $m = n$ .



# Funciones

## Ejemplo

Si en una sala hay 8 personas, entonces este año necesariamente dos de ellas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Las 8 personas las podemos modelar como el conjunto  $P = \{0, \dots, 7\}$  y los días de la semana como el conjunto  $S = 0, \dots, 6$ . El día de la semana que se celebra el cumpleaños de cada una resulta ser una función de  $P$  en  $S$ , por el principio de los cajones, esta función no puede ser inyectiva, luego al menos dos personas distintas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

# Objetivos de la clase

- Comprender concepto de cardinalidad
- Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- Comprender concepto de numerabilidad
- Demostrar numerabilidad de conjuntos

# Outline

Obertura

**Cardinalidad**

Conjuntos finitos e infinitos

Epílogo

# Cardinalidad

Queremos resolver el problema de determinar el tamaño de un conjunto.

- Es decir, la cantidad de elementos que contiene.
- ¿Cómo lo hacemos?

## Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?

Simplemente contamos... tiene 6.

# Cardinalidad

## Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?

$$a \rightarrow 1$$

$$b \rightarrow 2$$

$$c \rightarrow 3$$

$$d \rightarrow 4$$

$$e \rightarrow 5$$

$$f \rightarrow 6$$

Estamos estableciendo una *correspondencia* entre los elementos de  $A$  y los números naturales. . .

# Cardinalidad

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera. Diremos que  $A$  es **equinumeroso** con  $B$  (o que  $A$  tiene el mismo tamaño que  $B$ ) si existe una función biyectiva  $f : A \rightarrow B$ . Lo denotamos como

$$A \approx B$$

$A$  y  $B$  tienen el mismo tamaño si los elementos de  $A$  se pueden poner en correspondencia con los de  $B$ .

# Cardinalidad

Notemos que  $\approx$  es una relación sobre conjuntos.

Teorema

La relación  $\approx$  es una relación de equivalencia.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

# Cardinalidad

## Teorema

La relación  $\approx$  es una relación de equivalencia.

### Demostración:

- Refleja: Para todo conjunto  $A$  existe  $f : A \rightarrow A$  tal que  $f(a) = a$ ,  $\forall a \in A$  es una función biyectiva, por lo que  $A \approx A$ .
- Simétrica: Sea  $A, B$  conjuntos tal que  $A \approx B \Rightarrow$  existe  $f : A \rightarrow B$  biyectiva, entonces la función  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es biyectiva y por lo tanto  $B \approx A$ .
- Transitiva: Sea  $A, B, C$  conjuntos tal que  $A \approx B$  y  $B \approx C \Rightarrow$  existen  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  biyectivas, luego  $f \circ g : A \rightarrow C$  es una función biyectiva, por lo que  $A \approx C$ .



# Cardinalidad

Podemos usar conceptos de las relaciones de equivalencia para hablar sobre el tamaño de los conjuntos.

- ¿Por ejemplo?
- Podemos tomar las clases de equivalencia inducidas por  $\approx$ .

## Definición

La **cardinalidad** de un conjunto  $A$  es su clase de equivalencia bajo  $\approx$ :

$$|A| = [A]_{\approx}$$

# Cardinalidad

## Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?

Es fácil notar que  $A \approx \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- Entonces,  $|A| = [A]_{\approx} = [\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}]_{\approx}$ .
- Pero nosotros le pusimos un nombre al último conjunto...

$$|A| = [6]_{\approx}$$

Formalizaremos esto y simplificaremos la notación.

# Outline

Obertura

Cardinalidad

**Conjuntos finitos e infinitos**

Epílogo

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Definición

Diremos que  $A$  es un conjunto **finito** si  $A \approx n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir, si existe una función biyectiva  $f : A \rightarrow n = \{0, \dots, n-1\}$ .

En tal caso, se tiene que  $|A| = [n]_{\approx}$ .

- Por simplicidad, diremos que  $|A| = n$ .
- También podremos decir que  $A$  tiene  $n$  elementos.

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?

- $|A| = 6$
- $A$  tiene 6 elementos.

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Lema

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos **finitos** tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces,  
 $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

Ejercicio (propuesta ★)

Demuestre el lema.

# Cardinalidad

## Lema

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos tales que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces,  
 $|A \cup B| = |A| + |B|$ .

### Demostración:

Supongamos que  $|A| = n$  y que  $|B| = m$ . Sabemos entonces que  $A \approx \{0, \dots, n-1\}$  y que  $B \approx \{0, \dots, m-1\}$ , luego existen funciones biyectivas  $f : A \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$  y  $g : B \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$ . Sea  $h : A \cup B \rightarrow \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$  tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ n + g(x) & x \in B \end{cases}$$

Primero se debe notar que  $h$  está bien definida como función ya que no existe un  $x$  que pertenezca simultáneamente a  $A$  y  $B$ .

# Cardinalidad

## Continuación:

- **Sobreyectividad:** Sea  $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$ , lo demostraremos por casos. Si  $k < n$  entonces dado que  $f$  es sobreyectiva en  $\{0, \dots, n+1\}$  sabemos que existe un  $x \in A$  tal que  $k = f(x) = h(x)$ . Si  $n \leq k < n+m$  entonces dado que  $g$  es sobreyectiva en  $\{0, \dots, m-1\}$  sabemos que existe en  $x \in B$  tal que  $g(x) = k - n$  y por lo tanto  $k = n + g(x) = h(x)$ , finalmente  $h$  es sobreyectiva en  $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$ .
- **Inyectividad:** Otra vez por casos, si  $h(x) = h(y) < n$  entonces necesariamente  $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$  de donde se concluye que  $f(x) = f(y)$  y dado que  $f$  es inyectiva obtenemos que  $x = y$ . Si en cambio  $n \leq h(x) = h(y) < n+m$ , sabemos que  $h(x) = n + g(x) = h(y) = n + g(y)$  de donde se concluye que  $g(x) = g(y)$  y dado que  $g$  es inyectiva obtenemos que  $x = y$ , finalmente  $h$  es inyectiva.



# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Teorema

Sea  $A$  un conjunto finito. Entonces, se cumple que  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

Esto implica que si  $A$  es un conjunto finito, entonces su cardinalidad es **estrictamente menor** que la de su conjunto potencia.

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Teorema

Sea  $A$  un conjunto finito. Entonces, se cumple que  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

### Demostración:

Por inducción en la cardinalidad de  $A$ .

**BI:** Si  $|A| = 0$  entonces  $A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \approx \{0\}$  por lo tanto  $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$ .

**HI:** Supongamos que para cualquier conjunto  $A$  tal que  $|A| = n$  se cumple que  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

**TI:** Sea  $A$  un conjunto tal que  $|A| = n + 1$ , y sea  $B = A - \{a\}$ , con  $a$  un elemento arbitrario de  $A$ . El conjunto  $B$  cumple con  $|B| = n$ , por lo que  $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$ . ¿Cómo podemos a partir de  $\mathcal{P}(B)$  formar  $\mathcal{P}(A)$ ? Si nos damos cuenta en  $\mathcal{P}(B)$  están todos los subconjuntos de  $B$ , es decir, todos los subconjuntos de  $A$  que no contienen al elemento  $a$ .

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Continuación:

Si llamamos  $\mathcal{S}$  al conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \subseteq A \wedge a \in X\}$$

Es decir  $\mathcal{S}$  está formado por todos los subconjuntos de  $A$  que contienen a  $a$ , no es difícil notar que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$  y que  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}(B)$ . Ahora, la siguiente función  $f : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $f(X) = X \cup \{a\}$ , es una función biyectiva de  $\mathcal{P}(B)$  en  $\mathcal{S}$ , por lo que concluimos que  $\mathcal{P}(B) \approx \mathcal{S}$  y por lo tanto  $|\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{S}|$ . Luego, dado que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \emptyset$  y que  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{S}$  y usando el lema anterior concluimos que

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{S}| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{S}| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(B)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}.$$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?
- Ya no podemos contar...
- ...pero sí podemos establecer una correspondencia como la que mostramos.
- ¿Cómo? ¡Con funciones!

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

Sea  $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$  el conjunto de los números naturales pares.

¿Cuál conjunto es más grande,  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{P}$ ?

Podemos tomar  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  dada por  $f(n) = 2n$ , la cual es claramente biyectiva, y entonces  $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Un conjunto  $A$  se dice **enumerable** si  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{Z}$  es enumerable.

Podemos tomar  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

## Definición

Un conjunto  $A$  es **enumerable** si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$$

tal que *todos* los elementos de  $A$  aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:

$$f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ con } f(a_i) = i$$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$  es enumerable.
- $\mathbb{Q}$  es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

- Piense en un computador.

## Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?



# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es enumerable.
- $\mathbb{Q}$  es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable.

Por inducción sobre  $n$ :

**Bl:** La base es  $n = 2$ , demostrado anteriormente.

**Hi:** Supongamos que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable, con  $n \geq 2$ .

**Ti:** PD:  $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$  es enumerable.

Como por HI sabemos que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable, existe una lista  $(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots)$  que contiene a todas las tuplas de  $\mathbb{N}^n$  exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , ponemos las tuplas de  $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$  en una matriz, la cual recorreremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de  $\mathbb{N}^n$  más la segunda componente suman  $k$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable.

**TI:** De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \dots)$$

Concluimos entonces que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



## Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$  si y sólo si existen funciones inyectivas  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ .

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección  
(eso puede ser muy difícil!!)

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

Demuestre que  $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(x) = x$ , la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \rightarrow A$  dada por  $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$ .  
 $g(x) = g(y) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$ , y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

# Outline

Obertura

Cardinalidad

Conjuntos finitos e infinitos

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Comprender concepto de cardinalidad
- Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- Comprender concepto de numerabilidad
- Demostrar numerabilidad de conjuntos