Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de septiembre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.

Contenidos

¿Funciones... de nuevo?

Introducción

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular $\longrightarrow$ métodos
- Modelar $\longrightarrow$ simulación
- Estructuras de datos y algoritmos $\longrightarrow$ hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar $\longrightarrow$ MD5, SHA-1
- Contar

Introducción

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular $\longrightarrow$ métodos
- Modelar $\longrightarrow$ simulación
- Estructuras de datos y algoritmos $\longrightarrow$ hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar $\longrightarrow$ MD5, SHA-1
- **¡Contar o indexar!**

Formalizaremos el concepto y lo aplicaremos.

Funciones

Definición

Sea f una relación binaria de A en B; es decir, $f \subseteq A \times B$.
Diremos que f es una **función** de A en B si dado cualquier elemento $a \in A$, si existe un elemento en $b \in B$ tal que afb, este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si afb, escribimos $b = f(a)$.

- b es la *imagen* de a.
- a es la *preimagen* de b.

Notación: $f : A \to B$

Funciones

Una función $f : A \to B$ se dice **total** si todo elemento en A tiene imagen.

- Es decir, si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $b = f(a)$.
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- De ahora en adelante, toda función será total a menos que se diga lo contrario.

Funciones

Ejemplos

Las siguientes relaciones son todas funciones de $\mathbb{N}_4$ en $\mathbb{N}_4$:

$$f_1 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$f_2 = \{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1)\}$$
$$f_3 = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$$

¿Cuántas funciones $f : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}_4$ podemos construir?

Respuesta: $4^4 = 256$.

Funciones

También podemos definir funciones mediante expresiones que nos den el valor de $f(x)$.

Ejemplos

Las siguientes son definiciones para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 + 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \lfloor x + \sqrt{x} \rfloor$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Funciones

Ejemplos

Dado un conjunto A cualquiera, las siguientes son definiciones para funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$\forall a \in A, f_1(a) = \{a\}$$
$$\forall a \in A, f_2(a) = A \setminus \{a\}$$
$$\forall a \in A, f_3(a) = \varnothing$$

Funciones

Definición

Diremos que una función $f : A \to B$ es:

1. **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos $x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Es decir, no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento $b \in B$ tiene preimagen. Es decir, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.
3. **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Funciones

Ejercicio

Determine qué propiedades cumplen o no cumplen las siguientes funciones:

1. $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $\forall a \in A, f(a) = \{a\}$
2. $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $\forall a \in A, f(a) = \varnothing$
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_4$, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n \bmod 4$
4. $f : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}_4$, $\forall n \in \mathbb{N}_4, f(n) = (n + 2) \bmod 4$

1. es inyectiva y no sobreyectiva.
2. ni inyectiva ni sobreyectiva.
3. es sobreyectiva y no inyectiva.
4. es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

- Recordemos que las relaciones (y por lo tanto las funciones) son conjuntos (de pares ordenados).
- Esto significa que podemos usar las operaciones de conjuntos.
  - Unión
  - Intersección
  - Complemento
  - ...
- Existen también operaciones exclusivas para relaciones (y funciones).

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dada una relación R de A en B, la **relación inversa** de R es una relación de B en A definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

Definición

Dada una función f de A en B, diremos que f es **invertible** si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la **composición** de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C.

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C.

1. $g \circ f$ es función: supongamos que

$$(g \circ f)(x) = z_1 \text{ y } (g \circ f)(x) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Por definición de composición:

$$g(f(x)) = z_1 \text{ y } g(f(x)) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Como f es función, existe un único $y \in B$ tal que $y = f(x)$, y luego

$$g(y) = z_1 \text{ y } g(y) = z_2, \text{ con } x \in A, y \in B, z_1, z_2 \in C$$

y como g también es función, $z_1 = z_2$. Concluimos que $g \circ f$ es función.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C.

2. $g \circ f$ es total: sea $x \in A$.
   Como f es función total, $\exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
   Similarmente, como g es función total, $\exists z \in C$ tal que $(y, z) \in g$.
   Luego, $(x, z) \in g \circ f$.
   Como para cada $x \in A$ existe $z \in C$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, $g \circ f$ es total.

Funciones

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f es biyectiva, entonces es invertible.

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

1. Función: supongamos que $y f^{-1} x_1$ e $y f^{-1} x_2$, con $y \in B$ y $x_1, x_2 \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que $x_1 f y$ y $x_2 f y$. Como f es inyectiva, $x_1 = x_2$, y por lo tanto f^{-1} es función.
2. Total: como f es sobre, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es total.

Funciones

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

3. Inyectiva: supongamos que $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, con $y_1, y_2 \in B$ y $x \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$. Como f es función, $y_1 = y_2$, y por lo tanto f^{-1} es inyectiva.
4. Sobre: como f es total, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es sobre.

Funciones

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

1. Supongamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, con $x_1, x_2 \in A$. Por definición de composición, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$, y como f también es inyectiva, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
2. Sea $z \in C$. Como g es sobre, sabemos que existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Similarmente, como f es sobre, sabemos que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces, tenemos que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, y por lo tanto para cada $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Concluimos que $g \circ f$ es sobre.

Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de septiembre de 2023