Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la computación
Curso: Matemáticas discretas
Ayudantes: Francisca Caprile, Catalina Ortega, Matías Fernández e Ignacio Vergara

Ayudantía 4

8 de septiembre

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

- **¿Qué es la lógica de predicados?**

  La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

  Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

  La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

  - Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
  - Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \dots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

    $$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

    si $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**

  - Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
  - Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
  - Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).
  - Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

    $$\varphi \equiv \psi$$

    si para toda interpretación I y para todo $a_1, \dots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

    $$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación I y $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Ejercicio 1 — Equivalencia lógica

Sea F un predicado ternario. Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente equivalencia lógica

$$\exists x.\forall y.\forall z.F(x, y, z) \equiv \forall x.\exists y.\forall z \neg F(x, y, z)$$

Solución

La equivalencia es falsa. Para demostrarlo basta con el siguiente contraejemplo,

$$\mathcal{I}(Dom) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}(>) := \text{representa el orden usual de mayor a en } \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}(<) := \text{representa el orden usual de menor a en } \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}(F(x, y, z)) := x \leq y \wedge x \leq z$$

A partir de esto, la equivalencia queda de la siguiente manera,

$$\exists x.\forall y.\forall z.(x \leq y \wedge x \leq z) \equiv \forall x.\exists y.\forall z.\neg(x \leq y \wedge x \leq z)$$

Primero, consideramos $x = 0$, se tiene que $\mathcal{I}(x \leq y \wedge x \leq z)$ es verdadero, pues el menor elemento en $\mathbb{N}$ corresponde a 0, por lo tanto existe un elemento que es menor o igual a otros dos (y,z) cualesquiera sean estos.

Segundo, demostraremos que $I \not\models \forall x.\exists y.\forall z.\neg(x \leq y \wedge x \leq z)$

Desarrollando se tiene que:

$$\begin{aligned}
I &\not\models \forall x.\exists y.\forall z.\neg(x \leq y \wedge x \leq z) \\
&\models \neg(\forall x.\exists y.\forall z.\neg(x \leq y \wedge x \leq z)) \\
&\models \exists x.\forall y.\exists z.(x \leq y \wedge x \leq z)
\end{aligned}$$

Sea x = 0, luego para todo y , existe $z = y + 1$ tal que $(x \leq y \wedge x \leq z)$.

Por lo tanto, $I \not\models \forall x.\exists y.\forall z.\neg(x \leq y \wedge x \leq z)$

Concluimos que existe alguna interpretación tal que satisface la mitad izquierda pero no la derecha, por lo cual no hay equivalencia lógica.

Ejercicio 2 — Modelación

Los mobs son entidades que simulan criaturas en el juego Discreticraft. Estos poseen diferentes naturalezas e interactúan entre sí de acuerdo con ellas. Para modelar estas interacciones, considere los siguienets símbolos de predicado: $P(x), N(x), H(x), A(x, y), M(x, y)$ y $x = y$.

Además, considere la interpretación $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(\text{dom}) := \text{mobs de Discreticraft.}$$

$$\mathcal{I}(P(x)) := \text{x es de naturaleza pacífica.}$$

$$\mathcal{I}(N(x)) := \text{x es de naturaleza neutral.}$$

$$\mathcal{I}(H(x)) := \text{x es de naturaleza hostil}$$

$$\mathcal{I}(A(x)) := \text{x ataca a y.}$$

$$\mathcal{I}(M(x, y)) := \text{x le tiene miedo a y.}$$

$$\mathcal{I}(x = y) := \text{x es el mismo mob que y.}$$

En otras palabras, para algún mob $m \in \mathcal{I}(dom)$ se tiene que $I \models P(m)$ si, y solo si, m es pacífico. Análogamente, se definen los otros predicados.

En el caso de la igualdad, esta siempre funciona como la igualdad y no tiene otra interpretación. Es decir, para todo $m_1, m_2 \in I(dom)$ se tiene que $I \models (m_1 = m_2)$ si, y solo si, m_1 y m_2 son exactamente el mismo mob. Además, diremos que la naturaleza de un mob corresponde a si este es pacífico, neutral u hostil.

Defina la siguiente afirmación en lógica de predicados, explicando brevemente su correctitud.

"Existe un mob hóstil tal que todos los mobs a los que él les tiene miedo, le tienen miedo a algún mob pacífico en común."

Solución:

$$\phi = \exists x.H(x) \land \exists z[\forall y.(P(z) \land M(x, y)) \Rightarrow M(y, z)]$$

Ejercicio 3— Resolución

Sea $R(.,.)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas Σ tal que,

$$\Sigma = \{\forall x\exists y(R(x, y)), \forall x\forall y(R(x, y) \to R(y, x)), \forall x\forall y\forall z((R(x, y) \land R(y, z)) \to R(x, z))\}$$

y sea $\phi = \forall x\exists y(R(x, x) \land \neg R(x, y))$. Demuestre que $\Sigma \models \phi$.

Solución: Tenemos que,

$$\Sigma\cup\{\neg\phi\} = \{\forall x\exists y(R(x, y)), \forall x\forall y(R(x, y) \to R(y, x)), \forall x\forall y\forall z((R(x, y)\land R(y, z)) \to R(x, z)), \neg\forall x\exists y(R(x, x)\land\neg R(x, y))$$

Luego, utilizando leyes de equivalencia obtenemos que, $\Sigma \cup \{\neg\phi\} \equiv \Sigma'$ tal que,

$$\Sigma' \equiv \{\forall x\exists y(R(x, y)), \forall x\forall y(\neg R(x, y)\lor R(y, x)), \forall x\forall y\forall z((\neg R(x, y)\lor\neg R(y, z)\lor R(x, z)), \exists x\forall y(\neg R(x, x)\lor R(x, y)\}$$

Por lo cual ahora podemos utilizar resolución.

(1)	$\exists x \forall y(\neg R(x,x) \vee R(x,y))$	$\in \Sigma'$
(2)	$\neg R(a,a) \vee R(a,b)$	especificación existencial en (1)
(3)	$\forall x \exists y(R(x,y))$	$\in \Sigma'$
(4)	$R(a,b)$	especificación universal y existencial en (3)
(5)	$\forall x \forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$	$\in \Sigma'$
(6)	$\neg R(a,b) \vee R(b,a)$	especificación universal dos veces en (5)
(7)	$R(b,a)$	resolución de (4) y (6)
(8)	$\forall x \forall y \forall z(\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z))$	$\in \Sigma'$
(9)	$\neg R(a,b) \vee \neg R(b,a) \vee R(a,a)$	especificación universal tres veces en (8)
(10)	$\neg R(a,b) \vee R(a,a)$	resolución de (7) y (9)
(11)	$\square$	resolución de (2) y (10)

Por lo cual finalmente se tiene que $\Sigma' \models \square$, entonces $\Sigma \cup \{\neg \phi\}$ es inconsistente, y por teorema visto en clases $\Sigma \models \phi$.

Ejercicio 4 (Propuesto)— Modelación

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un rumor que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x)$, $C(x,y)$, $x = y$. Además, considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned} I(\text{dom}) &:= \text{Personas} \\ I(R(x)) &:= x \text{ conoce el rumor} \\ I(C(x,y)) &:= x \text{ le contó el rumor a } y \\ I(x = y) &:= x \text{ es igual a } y \text{ (esto es, exactamente el mismo)} \end{aligned}$$

En otras palabras, para alguna persona p del dominio se tiene que $R(p) = 1$ si, y solo si, p conoce el rumor. Análogamente, para personas p y q se tiene que $C(p,q) = 1$ si, y solo si, p le contó el rumor a q. Por último, la igualdad $x = y$ es usada para comparar dos personas y saber si son la misma persona o no.

Usando lógica de predicados, uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del rumor. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el rumor y otra que no" se puede definir con la fórmula $\exists x.\exists y.(R(x) \wedge \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados.

Solución

(a) Si una persona conoce el rumor y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el rumor.

$$\forall x.\forall y.((R(x) \wedge C(x,y)) \Rightarrow R(y))$$

(b) Nadie puede conocer el rumor y habérselo contado a sí mismo.

$$\neg \exists x.(R(x) \wedge C(x,x))$$

(c) Existe un "chismoso original", o sea alguien que conoce el rumor pero que nadie se lo contó

$$\exists x.(R(x) \wedge \neg \exists y.C(y,x))$$

(d) No existen “triángulos de chismosos”, o sea, tres personas distintas que se contaron el rumor circularmente.

$$\neg\exists x.\exists y.\exists z.(\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x) \wedge C(x, y) \wedge C(y, z) \wedge C(z, x))$$