Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 6

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Es evidente que $\mathcal{C}$ es infinito. Supongamos que $\mathcal{C}$ es numerable. Entonces existe una biyección $g : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$, de manera que podemos definir

$$
\begin{aligned}
f_0 &:= g(0) \\
f_1 &:= g(1) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

tal que $\forall i, j \in \mathbb{N}.\ i \neq j \implies f_i \neq f_j$, $\forall f \in \mathcal{C}\ \exists n \in \mathbb{N}.\ f_n = f$ y $\forall n \in \mathbb{N}.\ f_n \in \mathcal{C}$. Esto es, podemos formar una lista $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \mathcal{C}$.
Sea ahora $f^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido según $f^*(0) = f_0(0) + 1$, y para todo $n > 0$,

$$f^*(n) = \text{máx}\{f_n(n) + 1, f^*(n-1) + 1\}.$$

Se sigue directo de esta definición que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^*(n) \neq f_n(n)$ y por lo tanto $f^* \notin \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Es trivial que $\forall n \in \mathbb{N}.\ n < 0 \implies f^*(0) > f^*(n)$. Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ es tal que $\forall n \in \mathbb{N}.\ n < k \implies f^*(n) < f^*(k)$. Notemos que como $f(k) = f(k)$, esto implica que $\forall n \leq k$ se tiene que $f(n) \leq f(k)$. Sea $m < k+1$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
f^*(k+1) &> f^*(k) \\
&\geq f^*(m)
\end{aligned}
$$

ya que $m \leq k$. Por lo tanto,

$$f^*(k+1) > f^*(m).$$

Luego, $\forall m < k+1$ se tiene que $f^*(k+1) > m$. Por inducción, podemos concluir que $\forall m \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ m > n \implies f^*(m) > f^*(n)$. Por lo tanto, $f^* \in \mathcal{C}$. Sin embargo teníamos que $f^* \notin \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \mathcal{C}$. Por contradicción, queda demostrado que $\mathcal{C}$ no es numerable.
Alternativamente, sea $h^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido por

$$h^*(n) = \sum_{i=0}^{n} f_i(i) + 1$$

Notemos que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$h^*(i) = \sum_{j=0}^{i} f_j(j) + 1 > f_i(i)$$
$$\therefore h^*(i) \neq f_i(i)$$

por lo que $h^* \notin \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \mathcal{C}$. Veamos que

$$h^*(0) = f_0(0) + 1 < f_0(0) + f_1(1) + 1 = h^*(1)$$

debido a que $\forall f_i \in \mathcal{C}.\ n > 0 \implies f_i(n) > 0$ pues de lo contrario, f_i no sería creciente. Sean ahora $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$. Entonces,

$$\begin{aligned} h^*(m) &= \sum_{i=0}^{m} f_i(i) + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_i(i) + \sum_{n+1}^{m} f_i(i) + 1 \\ &> \sum_{i=0}^{n} f_i(i) + 1 \\ &= h^*(n) + 1 \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a que $\sum_{n+1}^{m} f_i(i) \geq f_{n+1}(n+1) > 0$ por el mismo argumento anterior ($n+1$ es mayor a cero). De esto concluimos que $h^* \in \mathcal{C}$. Sin embargo teníamos que $h^* \notin \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \mathcal{C}$. Por contradicción, queda demostrado que $\mathcal{C}$ no es numerable.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar correctamente que $\mathcal{C}$ no es numerable.
- (**3 Puntos**) Por tener un error o descuido pequeño que **no afecte sustancialmente** la conclusión de la demostración.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 1.2

Demostraremos lo pedido por contradicción. Sean A, B tales que $A \subseteq B$, A es no numerable y B es numerable. Si B es finito, la conclusión es trivial, por lo que no trataermos este caso. Como B es numerable, existe una lista completa, sin repeticiones, de B dada por $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} = B$. De tal forma, podemos definir una biyección $f : B \to \mathbb{N}$ según

$$f(b_i) = i$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $S = \mathbb{N} \setminus f(A^c)$ donde

$$f(A^c) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists b \in A^c.\ f(b) = n\}$$

es la imagen de f restringida a A^c. Notemos que $S \subseteq \mathbb{N}$ por definición. Definamos ahora $f' : A \to S$ según

$$f'(a) = f(a)$$

para todo $a \in A$. Como $A \subseteq B$, y B es el dominio de f, f' está bien definida. Como f es una biyección, es inyectiva. Esto es, $\forall a_1, a_2 \in B. a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$. En particular,

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f_{a_2}$$

y luego f' es inyectiva.
Sea finalmente $n \in S$. Como $n \notin f(A^c)$ y f es sobreyectiva, debe existir $a \in A$ tal que $f(a) = n = f'(a)$. Por esto, $\forall n \in S.\ \exists a \in A.\ f'(a) = n$, y f' es sobreyectiva. Deducimos entonces que f' es una biyección entre A y S con $S \subseteq \mathbb{N}$, por lo que A es numerable. Esto contradice nuestra premisa, y concluimos que si $A \subseteq B$ y A no es numerable, entonces B tampoco lo es.
Sea ahora $f \in \mathcal{C}$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$. Sin pérdida de generalidad, asuma $m > n$. Luego $f(m) > f(n)$ y, en particular, $f(m) \neq f(n)$. De esto se sigue que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. De lo anteriormente demostrado, como $\mathcal{C}$ es no numerable, $\mathcal{F}$ tampoco lo es.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar correctamente la primera parte de la pregunta, notar que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ y concluir lo pedido.
- (**3 Puntos**) Por tener un error o descuido pequeño que **no afecte sustancialmente** la conclusión de la demostración.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Asuma que $f \in o(g)$ y demostraremos que $f \in O(g)$ y $g \notin O(f)$.

1. $f \in O(g)$. Por definición, para que $f \in O(g)$, se debe cumplir que:

$$\exists c > 0. \exists n_0. \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)$$

   Dado que $f \in o(g)$, si escogemos c = 1, tenemos que $\exists n_0. \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)$ dado que $f \in o(g)$ significa que esto se cumple para todo c. Por lo tanto, vemos que se cumple que $f \in O(g)$.

2. $g \notin O(f)$. Sabemos que $f \in o(g)$, esto es, $\forall c > 0. \exists n_0. \forall n \geq n_0.\ f(n) \leq c \cdot g(n)$. Para demostrar que $g \notin O(f)$, lo haremos por contradicción. Suponga entonces que $g \in O(f)$, esto es:

$$\exists c' > 0. \exists n'_0. \forall n \geq n'_0.\ g(n) \leq c' \cdot f(n).$$

   Sean c' y n'_0 los números que cumplen la definición anterior, o sea:

$$\forall n \geq n'_0.\ g(n) \leq c' \cdot f(n). \quad (1)$$

   Como $f \in o(g)$ se tiene que para todo c^*:

$$\exists n_0. \forall n \geq n_0.\ f(n) \leq c^* \cdot g(n).$$

   Si escogemos $c^* = 1/(c' + 1)$, sabemos que hay un n_0^* tal que $f(n) \leq c^* \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0^*$. En particular, $(c'+1)f(n) \leq g(n)$ (2). Por último, dado que $f(n) > 0$ se tiene que $c' \cdot f(n) < (c'+1) \cdot f(n)$ para todo n (3). Juntando todas las piezas (1), (2), y (3) concluimos que para todo $n \geq \max\{n'_0, n_0^*\}$:

$$g(n) \ \leq \ c' \cdot f(n) \ < \ (c'+1) \cdot f(n) \ \leq \ g(n)$$

   Como $g(n) < g(n)$ es una contradicción, concluimos que $g \notin O(f)$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por tener ambas demostraciones correctas.
- (**3 Puntos**) Por tener al menos una demostración correcta.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

[NUEVO] Algunas consideraciones adicionales que se tuvieron durante la corrección:

- Se dio (**3 Puntos**) por tener errores menores en ambas demostraciones simultáneamente.
- Se dio (**0 Puntos**) si no se no considera el comportamiento de n_0 o c.

Pregunta 2.2

Sea $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ y $\epsilon > 0$. Para demostrar que $p(x) \in o(x^{k+\epsilon})$ tomaremos un $c > 0$ cualquiera, y demostraremos que existe n_0, tal que para todo $n > n_0$, se cumple que $p(x) \leq c \cdot x^{k+\epsilon}$.

Primero, como n^{ε} es una función creciente (tiende a infinito), sabemos que existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_c$ se tiene que:

$$\frac{1}{c} \cdot \sum_{i=0}^{k} |a_i| \leq n^{\varepsilon}$$

Ahora para todo $n \geq max\{n_c, 1\}$, se deduce que:

$$\begin{array}{rcl} p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 & \leq & |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \cdots + |a_0| \\ & \leq & |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \cdots + |a_0| n^k \\ & = & \sum_{i=0}^{k} |a_i| \cdot n^k \\ & \leq & c \cdot n^{\varepsilon} \cdot n^k \\ & = & c \cdot n^{k+\varepsilon} \end{array}$$

Como esto se cumple para cualquier $c > 0$, por lo tanto $p(x) \in o(x^{k+\varepsilon})$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por tener la demostración correcta.
- (**3 Puntos**) Por tener la lógica del procedimiento correcta, pero errores menores.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

[NUEVO] Algunas consideraciones adicionales que se tuvieron durante la corrección:

1. Se dio (**4 Puntos**) en el caso de usar límites correctamente, esto es, calcular un limite a partir de $p(x)$ y x^k (el cálculo de este límite no era necesario demostrarlo) y después demostrar la pregunta usando la definición de límite. Acá era necesario explicar cómo el ϵ y δ demuestran que $p(x) \in o(x^{k+\epsilon})$. En particular, no bastaba calcular un límite y argumentar directamente que $p(x) \in o(x^{k+\epsilon})$.