Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA EXAMEN

Pregunta 1

(⇒) Supongamos que $\alpha \models \beta$. Sea $v_1, v_2, ..., v_k = \bar{v}$ una valuación arbitraria de las variables $p_1, ..., p_k$. P.D: $\alpha(\bar{v}) = (\alpha \wedge \beta)(\bar{v})$.

Hay dos opciones:

1. si $\alpha(\bar{v}) = 1$ entonces $\beta(\bar{v}) = 1$ (pues asumimos que $\alpha \models \beta$) y luego $(\alpha \wedge \beta)(\bar{v}) = 1$ por definición de conjunción.
2. si $\alpha(\bar{v}) = 0$ entonces directamente $(\alpha \wedge \beta)(\bar{v}) = 0$

Luego $\alpha(\bar{v}) = (\alpha \wedge \beta)(\bar{v})$ y entonces como $\bar{v}$ es arbitraria $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$.

(⇐) Suponemos que $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$. Sea $v_1, ..., v_k = \bar{v}$ una valuación tal que $\alpha(\bar{v}) = 1$. P.D: $\beta(\bar{v}) = 1$. Como $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$ entonces $(\alpha \wedge \beta)(\bar{v}) = 1$. Luego por definición de conjunción se tiene $\beta(\bar{v}) = 1$, luego $\alpha \models \beta$

Nota: comparar directamente los valores de verdad de α y β con $\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$ y $\alpha \models \beta$ en tablas de verdad como la siguiente no constituye una demostración correcta debido a que, aunque existe una relación entre el valor de verdad de α y β y lo que se pide demostrar, no se hace cargo de las definiciones de consecuencia lógica y equivalencia lógica.

α	β	$\alpha \equiv \alpha \wedge \beta$	$\alpha \models \beta$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**3 Puntos**) Por dirección ⇒
  - (**2 Puntos**) Por ver el caso cuando $\alpha(\bar{v}) = 1$
  - (**1 Punto**) Por ver el caso cuando $\alpha(\bar{v}) = 0$
- (**3 Puntos**) Por dirección ⇐
  - (**1 Punto**) Por tomar una valuación $\bar{v}$ tal que $\alpha(\bar{v}) = 1$
  - (**2 Puntos**) Por mostrar que $\beta(\bar{v}) = 1$ y concluir

Pregunta 2

Pregunta 2.1

PD: $\forall i \in \mathbb{N} : B_i \neq \emptyset$

Opción 1:
Para $i = 0$:

$$B_0 = A_0 \neq \emptyset$$

Para $i \geq 1$:
Sabemos que $B_i = A_i \cap A_{i-1}^c$ y además que $A_{i-1} \subset A_i$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists x \in A_i \ \wedge \ x \notin A_{i-1} \\
&\Rightarrow x \in A_i \ \wedge \ x \in A_{i-1}^c \\
&\Rightarrow x \in A_i \cap A_{i-1}^c \\
&\Rightarrow A_i \cap A_{i-1}^c \neq \emptyset \\
&\Rightarrow B_i \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Opción 2:
Para $i = 0$:

$$B_0 = A_0 \neq \emptyset$$

Para $i \geq 1$ podemos demostrar por contradicción. Notamos que:

$$\begin{aligned}
&B_i = A_i \cap A_{i-1}^c \\
&\Rightarrow B_i = \{x \mid x \in A_i \ \wedge \ x \in A_{i-1}^c\} \\
&\Rightarrow B_i = \{x \mid x \in A_i \ \wedge \ x \notin A_{i-1}\} \\
&\Rightarrow B_i = A_i \ A_{i-1}
\end{aligned}$$

Luego, sup. que $B_i = \emptyset$, como $A_i \neq \emptyset$ y $B_i = A_i \cap A_{i-1}^c = \emptyset$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_i = A_{i-1} \ \vee \ A_i \subset A_{i-1} \\
&\Rightarrow A_i \subseteq A_{i-1}
\end{aligned}$$

Sin embargo, por enunciado, tenemos que $A_{i-1} \subset A_i$, por lo que llegamos a una contradicción.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por demostrar correctamente el caso $i = 0$
- (**1.5 Puntos**) Por demostrar correctamente el caso $i \geq 1$

Pregunta 2.2

PD: $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j : B_i \cap B_j \neq \emptyset$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow B_i \cap B_j &= (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap (A_j \cap A_{j-1}^c)\\ &= (A_i \cap A_j) \cap (A_{i/1} \cap A_{j-1}^c)\end{aligned}$$

Como $A_i \subset A_j$:

$$A_i \cap A_j = A_i$$

Y como $i < j$:

$$\begin{aligned} i-1 &< j-1\\ \Rightarrow A_{j-1}^c &\subset A_{i-1}^c\\ \Rightarrow A_{j-1}^c \cap A_{i-1}^c &= A_{j-1}^c\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_i \cap B_j A_i^c \cap A_{j-1}^c$$

Notar que si $i = 0$, tendremos:

$$\begin{aligned}\Rightarrow B_i \cap B_j &= (A_i) \cap (A_j \cap A_{j-1}^c)\\ &= (A_i \cap A_j) \cap A_{j-1}^c\\ &= A_i \cap A_{j-1}^c\end{aligned}$$

Luego, para demostrar por contradiccón, supongamos que $A_i \cap A_{j-1}^c \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists x \mid x \in A_i \ \wedge \ x \in A_{j-1}^c\\ &\Rightarrow x \in A_i \ \wedge \ x \notin A_{j-1}\end{aligned}$$

Sin embargo, sabemos que $i < j \leftarrow i \leq j-1$

$$\Rightarrow A_i \subseteq A_{j-1} \subset A_j$$

Por lo que llegamos a una contradicción.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por demostrar que $B_i \cap B_j = A_i \cap A_{j-1}^c$
  - (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $A_i \cap A_j = A_i$
  - (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $A_{j-1}^c \cap A_{i-1}^c = A_{j-1}^c$
- (**1 Punto**) Por demostrar que $A_i \cap A_{j-1}^c = \emptyset$
  - (**0.5 Puntos**) Por llegar a que $A_i \cap A_{j-1}^c \neq \emptyset \rightarrow \exists x \,|\, x \in A_i \ \wedge \ x \notin A_{j-1}$
  - (**0.5 Puntos**) Por llegar a la contradicción.

Pregunta 2.3

PD: $\bigcup_{i=0}^{n} B_i = A_n \;\; \wedge \;\; \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$
Podemos demostrar la primera parte utilizando inducción.
Caso base, $i = 0$:

$$\bigcup_{i=0}^{0} B_i = A_0 = B_0$$

Sup. que (HI):

$$\bigcup_{i=0}^{n} B_i = A_n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{n+1} B_i &= \bigcup_{i=0}^{n} B_i \,\cup\, B_{n+1} \\
&= A_n \,\cup\, B_{n+1} \\
&= A_n \,\cup\, (A_{n+1} \cap A_n^c) && (HI) \\
&= (A_n \cup A_{n+1}) \,\cap\, (A_n \cup A_n^c) \\
&= A_{n+1} \,\cap\, (A_n \cup A_n^c) && (A_n \subset A_{n+1}) \\
&= A_{n+1} \,\cap\, S \\
&= A_{n+1}
\end{aligned}$$

Ahora debemos demostrar la segunda parte. Notar que haber demostrado la parte anterior para todo n **no es suficiente** para afirmar que la igualdad se cumple para ∞.
Tenemos que:

$$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

Luego para demostrar la igualdad, debemos demostrar:

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \;\wedge\; \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$$

PD: $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$
Sea $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \exists n \,|\, x \in B_n \\
&\Rightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{n} B_i \\
&\Rightarrow x \in A_n \\
&\Rightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i
\end{aligned}$$

PD: $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$

Sea $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \exists n \,|\, x \in A_n$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{n} B_i$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por demostrar que $\bigcup_{i=0}^{n} B_i = A_n$
  - (**0.5 Puntos**) Por el caso base
  - (**0.5 Puntos**) Por el caso general
- (**1 Punto**) Por demostrar que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = S$
  - (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$
  - (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$

  Nota: Se asignaron 0 puntos en esta sección si se dijo que haber demostrado para todo n era suficiente para afirmar que se cumplía para ∞.

Pregunta 3

Pregunta 3.1

Sea $S \subset \mathbb{N}$. Consideremos la función característica de S, $f_S : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, definida por

$$f_S(n) = \begin{cases} 1 & n \in S \\ 0 & n \notin S \end{cases}$$

y definamos también la función $\mathcal{F} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{O}(a)$ como aquella que entrega la función característica de su argumento. Esto es,

$$\mathcal{F}(S) = f_S.$$

¿Cómo sabemos que $\mathcal{F}$ llega a $\mathcal{O}(a)$? Pues, sea $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $S \subseteq \mathbb{N}$. Luego, para $c = 1$ y $n_0 = 0$ se tiene que

$$\forall n \geq n_0.\ f_S(n) \leq 1$$

y como $1 \leq ca$, tenemos que $f_S \in \mathcal{O}(a)$. De esto deducimos que $\mathrm{Im}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{O}(a)$ (es decir, habíamos definido correctamente la función).

$\mathcal{F}$ es evidentemente inyectiva, pues $S_1 \neq S_1$ implica, sin pérdida de generalidad, que $\exists n.\ n \in S_1 \wedge n \notin S_2$ por lo que $f_{S_1}(n) \neq f_{S_2}(n)$. También, se tiene que es trivialmente sobreyectiva a su imagen. Por esto, sabemos que $2^{\mathbb{N}}$ es equinumeroso con $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$, por lo que $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ es no numerable. Pero además, como $\mathrm{Im}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{O}(a)$, debemos concluir que $\mathcal{O}(a)$ es no numerable (esto último se sigue de que si A es no numerable y $A \subseteq B$ entonces B no es numerable, demostrado en la tarea 6).

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por definir correctamente f_S.
- (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $\mathcal{F}$ es inyectiva.
- (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $\text{Im}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{O}(a)$.
- (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $\text{Im}(\mathcal{F})$ no es numerable.
- (**0.5 Puntos**) Por concluir correctamente que $\mathcal{O}(a)$ no es numerable.

Pregunta 3.2

Lo que se pide demostrar es que las funciones acotadas y (débilmente) crecientes son numerables. Para hacer esto haremos una demostración directa que utiliza una formalización de la idea de que si $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)$ entonces $\text{Im}(f)$ es un conjunto finito.
Sea $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)$. Entonces existe $n_f \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_f.\ f(n) = f(n_f).$$

Esto es porque, en caso contrario, $f \notin \mathcal{O}(a)$. Con esto en mente, definamos $\mathcal{F} : \mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a) \to \{0, 1, \#\}^*$ según

$$\mathcal{F}(f) = \text{bin}(f(0)) \cdot \# \cdot \text{bin}(f(1)) \cdot \# \cdot \cdots \cdot \#\text{bin}(f(n_f))$$

donde $\cdot$ es la concatenación de *strings*. Es decir, $\mathcal{F}$ es una función que lista la codificación binaria de los valores de f, separados por un caracter $\#$, hasta que f se estabiliza en el valor $f(n_f)$ donde n_f fue definido anteriormente.
Notemos que si $f_2 \neq f_2$ entonces existe n tal que $f_1(n) \neq f_2(n)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $f_1(n) < f_2(n)$, lo que implica que $f_1(n) < f_2(n_{f_2})$. Aquí tenemos dos casos:

1. $n \leq n_{f_1}$.

   En este caso, tenemos que $\text{bin}(f_1(n))$ sí aparece en $\mathcal{F}(f_1)$ y es distinto de $\text{bin}(f_2(n_{f_2}))$, por lo que $\mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(f_2)$ pues habrá necesariamente al menos un caracter distinto en sus *strings*.

2. $n > n_{f_1}$

   En este caso, $f_1(n) = f_1(n_{f_1})$ y luego $\text{bin}(f_1(n_{f_1})) \neq \text{bin}(f_2(n_{f_2}))$ porque habíamos dicho que $f_1(n) < f_2(n_{f_2})$. De esto se sigue que $\mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(f_2)$ pues su última seguidilla de bits es necesariamente distinta.

Notemos que la separación por casos era necesaria pues no sabíamos si $f_1(n)$ se codificaba en $\mathcal{F}(f_1)$ por n o por n_{f_1}. De lo anterior concluimos que $\mathcal{F}$ es inyectiva. Como $\text{Im}(\mathcal{F}) \subseteq \{0, 1, \#\}^*$ que es numerable pues el conjunto de palabras finitas de un alfabeto finito es numerable, $\text{Im}(\mathcal{F})$ es numerable (esto último se sigue del contrapositivo del argumetno final de **3.1**). Finalmente, como $|\text{Im}(\mathcal{F})| = |\mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)|$ debido a que $\mathcal{F}$ es biyectiva a su imagen por ser inyectiva, concluimos que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)$ es numerable.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por demostrar la existencia de n_f para cada $f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)$.
- (**1 Punto**) Por definir que $\mathcal{F}$.
- (**0.5 Puntos**) Por demostrar que $f_1 \neq f_2 \implies \mathcal{F}(f_1) \neq \mathcal{F}(f_2)$ en el primer caso.
- (**0.5 Puntos**) Por el segundo caso, y concluir que $\mathcal{F}$ es inyectiva.
- (**0.5 Puntos**) Por concluir correctamente a partir de lo anterior que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}(a)$ es numerable.

Pregunta 4

Pregunta 4.1

El valor de $f(t)$ se puede explicar como: "el largo de la rama más corta de t".

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**2 Puntos**) Por explicar correctamente que representa el valor de $f(t)$

Pregunta 4.2

PD: $f(t_n) = \lfloor \log_2(\#nodes(t_n)) \rfloor$

En primer lugar, se demostrará que $f(t_n) = n$ mediante inducción:

$$\begin{array}{rl} \text{CB:} & f(t_0) = f(\bullet) = 0 \\ \text{HI:} & f(t_n) = n \\ \text{PD:} & f(t_{n+1}) = n + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(t_{n+1}) = f(\bullet(t_n, t_n)) &= min\{f(t_n), f(t_n)\} + 1 && \text{(Definición)} \\ &= n + 1 && \text{(HI)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $f(t_n) = n$.

A continuación se demostrará que $\#\text{nodes}(t_n) = 2^{n+1} - 1$:

$$\begin{array}{rl} \text{CB:} & \#\text{nodes}(t_0) = 2^{0+1} - 1 = 1 \\ \text{HI:} & \#\text{nodes}(t_n) = 2^{n+1} - 1 \\ \text{PD:} & \#\text{nodes}(t_{n+1}) = 2^{n+2} - 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \#\text{nodes}(t_{n+1}) = \#\text{nodes}(\bullet(t_n, t_n)) &= 1 + 2 \cdot \#\text{nodes}(t_n) && \text{(Definición)} \\ &= 1 + 2 \cdot (2^{n+1} - 1) && \text{(HI)} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $\#\text{nodes}(t_n) = 2^{n+1} - 1$. Tomando en cuenta esto, volvemos a nuestra demostración original:

$$\begin{array}{rl} \text{PD:} & f(t_n) = \lfloor \log_2(\#nodes(t_n)) \rfloor \\ & = \lfloor \log_2(2^{n+1} - 1) \rfloor \\ & = n = f(t_n) \end{array}$$

$\square$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Puntos**) Por demostrar que $f(t_n) = n$.
  - (**0.5 Puntos**) Plantear el caso base y afirmar qué se quiere demostrar.
  - (**0.5 Puntos**) Hacer correctamente el paso inductivo.
- (**1 Puntos**) Por demostrar que $\#\text{nodes}(t_n) = 2^{n+1} - 1$.
  - (**0.5 Puntos**) Plantear el caso base y afirmar qué se quiere demostrar.
  - (**0.5 Puntos**) Hacer correctamente el paso inductivo.

Pregunta 4.3

Para el caso base:

$CB : f(\bullet) = 0 \leq \log_2(1) = 0$

Suponga que $f(t) \leq \log_2(\#\text{nodes}(t))$ se cumple para todas las capas menores que n, demostraremos que se cumple para n.

Sea $t \in C[n] \Rightarrow t = \bullet(t_1, t_2)$, con $t_1, t_2 \in C[n-1]$

Ahora bien, por HI, se cumple que $f(t_i) \leq log_2(\#\text{nodes}(t_i))$ $\forall i \in \{1,2\}$. En otras palabras, el largo de la rama más corta de t_i es menor o igual que $log_2(\#\text{nodes}(t_i))$.

Por otro lado, se cumple que:

$$\exists i.\#\text{nodes}(t_i) \leq \frac{\#\text{nodes}(t) - 1}{2} \quad i \in \{1,2\} \quad (*)$$

Tomando esto en cuenta:

$$\begin{aligned}
f(t) &= min\{f(t_1), f(t_2)\} + 1 \\
&\leq \text{mín}_{i\in\{1,2\}}\{log_2(\#\text{nodes}(t_i))\} + 1 && (HI) \\
&\leq log_2(\frac{\#\text{nodes}(t) - 1}{2}) + 1 && (*) \\
&\leq log_2(\frac{\#\text{nodes}(t)}{2}) + 1 && \text{(Función Creciente)} \\
&= log_2(\#\text{nodes}(t))
\end{aligned}$$

Quedando así demostrado que $f(t) \leq log_2(\#\text{nodes}(t))$.

$\square$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por plantear el caso base y plantear que la hipótesis se cumple para las capas menores a n.
- (**1 Puntos**) Por darse cuenta que $\exists i.\#\text{nodes}(t_i) \leq \dfrac{\#\text{nodes}(t) - 1}{2} \quad i \in \{1,2\}$.
- (**0.5 Puntos**) Por completar la demostración.