Examen

7 de diciembre de 2023
Profesores: Nicolás Alvarado - Bernardo Barías - Sebastián Bugedo - Gabriel Diéguez

Instrucciones

- La duración del examen es de 2:30 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada. **Esto solo aplica a preguntas completas**.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- El examen consta de 2 partes:
  - En la parte A debe responder 2 de las 3 preguntas a elección. Si responde las 3 se corregirán las 2 primeras.
  - En la parte B debe responder ambas preguntas.
  - La nota del examen será el promedio de las 2 preguntas respondidas en la parte A y las 2 preguntas de la parte B.
- Una vez terminado el examen, tendrá 10 minutos para escanear sus respuestas. Se habilitará un buzón para cada sección en el módulo de tareas donde podrá subir uno o más archivos en formatos de imagen o pdf con sus respuestas. En caso de que deje alguna pregunta en blanco, también es necesario entregarla en el buzón. Debe preocuparse de que la copia digital sea legible. Se recomienda el uso de algún software de escaneo como CamScanner o la app de Google Drive.

Parte A (50 %)

En esta parte debe responder 2 de las 3 preguntas a elección. Si responde las 3 se corregirán las 2 primeras.

Pregunta 1 - Lógica

a) Sea P un conjunto de variables proposicionales y $L(P)$ el conjunto de todas las fórmulas de **lógica proposicional** sobre P. Decimos que un conjunto C de conectivos lógicos es *funcionalmente completo* si toda fórmula en $L(P)$ es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C.

Demuestre que el conjunto $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo.

b) Sean $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binarios y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(=) &:= n = m \text{ si y solo si } n \text{ y } m \text{ son iguales} \\
\mathcal{I}(\leq) &:= n \leq m \text{ si y solo si } n \text{ es menor o igual que } m \\
\mathcal{I}(P) &:= P(n) \text{ si y solo si } n \text{ es primo}
\end{aligned}
$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

"Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo".

Solución

a) Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\vee$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

TI: Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C:

1. $\theta = (\neg\varphi) \stackrel{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

2. $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi'$

   Usando las leyes de doble negación y De Morgan:

$$\theta \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi'))$$

   Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

3. $\theta = \varphi \vee \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \vee \psi'$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

b) Considere los siguientes predicados:

- $0(x) := \forall y\ (x \leq y)$ (x es 0).
- $Entre(x, y, z) := x \leq y \wedge y \leq z \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(y = z)$ (y está entre x y z).
- $S(x, y) := x \leq y \wedge \neg(x = y) \wedge \big(\neg\exists z\ Entre(x, z, y)\big)$ (y es sucesor de x).
- $1(x) := \exists y\ \big(0(y) \wedge S(y, x)\big)$ (x es 1).
- $2(x) := \exists y\ \big(1(y) \wedge S(y, x)\big)$ (x es 2).
- $3(x) := \exists y\ \big(2(y) \wedge S(y, x)\big)$ (x es 3).
- $PrimoNo2No3(x) := P(x) \wedge \neg 2(x) \wedge \neg 3(x)$ (x es un número primo distinto de 2 y 3).

Usando estos predicados, la fórmula pedida es la siguiente:

$$\forall x \forall y\ \Big(\Big(PrimoNo2No3(x) \wedge PrimoNo2No3(y)\Big) \rightarrow \Big(\exists z\ \big(Entre(x, z, y) \wedge \neg P(z)\big)\Big)\Big)$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 0.5 ptos. por la base de inducción.
- 0.5 ptos. por la hipótesis de inducción.
- 2 ptos. por la tesis de inducción.
- Si no se usa un argumento inductivo solo se asignará el puntaje correspondiente a la tesis.
- En la tesis es válido usar tablas de verdad para mostrar las equivalencias.

b)
- 1 pto. por definir correctamente a un número primo distinto de 2 y 3.
- 1 pto. por definir correctamente que un número está entre otros dos.
- 1 pto. por la fórmula final (incluye el correcto uso de cuantificadores e implicancia).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Relaciones

Sea A un conjunto cualquiera, y $\sim$ una relación de equivalencia sobre A.

- Dado $x \in A$, la *clase de equivalencia* de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

- El *conjunto cuociente* de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\!\sim\; = \{[x] \mid x \in A\}$$

- Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de A ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$). Diremos que $\mathcal{S}$ es una *partición* de A si cumple que:

    1. $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \varnothing$
    2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
    3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$.

Demuestre que si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A entonces $A/\!\sim$ es una partición de A.

Solución

En clases vimos el siguiente teorema:

Teorema: sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Demostraremos las tres propiedades que debe cumplir $A/\!\sim$ según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\!\sim, X \neq \varnothing$: por el teorema anterior, sabemos que $\forall x \in A$, $x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\!\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.
2. $\bigcup A/\!\sim\; = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
    - $\bigcup A/\!\sim\; \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\!\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.

- $A \subseteq \bigcup A/\sim$: dado un elemento $x \in A$, por el teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\sim$.

3. $\forall X, Y \in A/\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: todos los conjuntos en $A/\sim$ son clases de equivalencia, y por lo tanto por el teorema anterior esta propiedad se cumple.

Pauta (6 pts.)

- 2 ptos. por cada propiedad.
- Tal como en esta solución, es válido citar el teorema de clases, pero debe estar correctamente enunciada la parte del teorema que se utiliza al momento de demostrar. Si no lo está, se asignará como máximo la mitad del puntaje a la demostración de la propiedad respectiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 - Cardinalidad

Demuestre que el intervalo abierto $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ no es enumerable.

Solución

Por contradicción, supongamos que $(0, 1)$ es enumerable. Entonces, existe una lista infinita de los reales en $(0, 1)$:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0, 1)$ aparece exactamente una vez (estableciendo con esto una biyección con $\mathbb{N}$). Notemos que cada r_i es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0}d_{i1}d_{i2}d_{i3}\ldots, \text{ con } d_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$$

La lista se vería así:

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Considere ahora el siguiente número:

$$r = 0.d_0d_1d_2 \dots d_i \dots, \text{ donde } d_i = (d_{ii} + 1) \bmod 10$$

Es decir, construimos r tomando la diagonal de la lista y sumando 1 a cada dígito:

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	$\boxed{d_{00}}$	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	$\boxed{d_{11}}$	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	$\boxed{d_{22}}$	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	$\boxed{d_{33}}$	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	$\boxed{d_{44}}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Es claro que $r \in (0, 1)$. Ahora, es fácil notar que $r \neq r_0$, pues difieren en el primer dígito decimal, y de la misma manera $r \neq r_1$, pues difieren en el segundo dígito decimal. En general, se cumple que $r \neq r_i$, pues difieren en el $(i + 1)$-ésimo dígito decimal, y por lo tanto r es distinto a todos los números de la lista. Hemos encontrado un elemento del conjunto que no aparece en la lista, lo que contradice nuestra suposición inicial de que $(0, 1)$ es enumerable. Concluimos entonces que $(0, 1)$ no es enumerable.

Pauta (6 pts.)

- 1 pto. por suponer la existencia de una lista para $(0, 1)$.
- 2 ptos. por construir un número modificando la diagonal.
- 2 ptos. por argumentar que tal elemento no aparece en la lista.
- 1 pto. por concluir que el supuesto inicial es contradictorio.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Parte B (50 %)

Pregunta 4 - Grafos

a) Un *camino Euleriano* en un grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G. Recuerde que un camino no repite aristas. Suponga además que G puede tener más de una arista entre 2 vértices.

   Demuestre que un grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

b) Sea $T = (V, E)$ un árbol, y sea v su vértice con grado máximo, al que llamaremos d. Demuestre que T tiene al menos d hojas.

Solución

a) ($\Rightarrow$) Supongamos que un grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v, a saber $P = (u, \ldots, v)$. Como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. Por otra parte, si agregamos una nueva arista e entre u y v obtenemos un grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e. Sabemos también que un grafo sin loops es Euleriano si y solo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par. Entonces, todos los vértices de G' tienen grado par, lo que implica que los únicos vértices de grado impar en G son u y v.

   ($\Leftarrow$) Supongamos ahora que G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar. Sean u y v estos vértices. Si agregamos una arista e entre u y v, obtenemos un grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, lo que implica que G' tiene un ciclo Euleriano. Luego, G tiene un camino Euleriano formado por el ciclo Euleriano de G' al sacarle la arista e.

b) Sea v el vértice con grado máximo d en T. Por definición, cada arista del árbol es una arista de corte, por lo que toda arista incidente en v lo es. Entonces, si eliminamos v obtenemos un grafo con d componentes.

   Ahora bien, notemos que cada una de las d componentes resultantes es un árbol. Si alguna de ellas no lo fuera, contendría un ciclo que sería subgrafo de T, contradiciendo que este sea un árbol. Para demostrar que cada componente T' aporta al menos 1 hoja a T, notemos que:

   - Si la componente T' tiene un nodo, dicho nodo tiene grado 1 en T y por lo tanto es hoja.
   - Si la componente T' tiene al menos dos nodos, como no tiene ciclos, entonces deben existir al menos dos nodos con grado 1 en T'. Luego, al menos uno de ellos tiene grado 1 en T.

   Concluimos que T tiene al menos d hojas.

Pauta (6 pts.)

a) 1.5 ptos. por cada dirección.

b)
- 1 pto. por usar el argumento de las aristas de corte.
- 1 pto. por notar que existen d árboles al remover v.
- 1 pto. por concluir que cada árbol aporta al menos una hoja a T.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 5 - Teoría de números

a) Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k > 0$, y considere k números enteros consecutivos $x_1, \ldots, x_k$.

Demuestre que $k \,\Big|\, \prod_{i=1}^{k} x_i$; vale decir, k divide al producto de k enteros consecutivos.

b) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a, b > 0$. Demuestre que $a \mid (a+1)^b - 1$.

Solución

a) En primer lugar, demostraremos que debe existir un $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $k \mid x_j$.

Para esto, demostraremos por casos que existe un $j \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$x_j \equiv_k 0$$

1. $x_1 \equiv_k 0$: en este caso $j = 1$.
2. $x_1 \not\equiv_k 0$: supongamos que $x_1 \equiv_k m$, con $m \in \{1, ..., k-1\}$. Sumando $(k-m)$ en ambos lados de la equivalencia:

$$\begin{aligned} x_1 + k - m &\equiv_k m + k - m \\ &\equiv_k k \\ &\equiv_k 0 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $x_1 + k - m = x_{1+k-m}$, ya que los k números son consecutivos y $(k-m) \in \{1, ..., k\}$. Tomamos entonces $j = 1 + k - m$.

Utilizando lo anterior tenemos que

$$\prod_{i=1}^{k} x_i = x_j \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} x_i \equiv_k 0 \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} x_i \equiv_k 0$$

de donde concluimos que $k \,\Big|\, \prod_{i=1}^{k} x_i$

b) Queremos demostrar que $a \mid (a+1)^b - 1$. Notemos que si tomamos módulo a:

$$
\begin{aligned}
& a \equiv_a 0 \land 1 \equiv_a 1 & \\
\Rightarrow\ & a + 1 \equiv_a 1 & \text{(por teorema de sumas)} \\
\Rightarrow\ & (a+1)^b \equiv_a 1^b & \text{(por teorema de multiplicaciones)} \\
\Leftrightarrow\ & (a+1)^b \equiv_a 1 & \\
\Leftrightarrow\ & a \mid (a+1)^b - 1 & \text{(por definición de equivalencia modular)}
\end{aligned}
$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 2 ptos. por mostrar que existe un $x_j \equiv_k 0$.
- 1 pto. por mostrar que $k \,\Big|\, \prod_{i=1}^{k} x_i$.

b)
- 2 ptos. por mostrar que $(a+1)^b \equiv_a 1$.
- 1 pto. por concluir que $a \mid (a+1)^b - 1$.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.