PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E IGNACIO VERGARA

Ayudantía 1

18 de agosto

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

---

Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. BI: se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).
    2. HI: se supone que la propiedad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. TI: se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. BI: se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).
    2. HI: se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.
    3. TI: se demuestra que la propiedad se cumple para $k+1$. $(p(i)\ \forall i \leq k) \implies p(k+1)$.
- **Inducción Estructural:**
  Se utiliza cuando se quiere demostrar una propiedad en una estructura que está definida inductivamente (la inducción simple es un caso particular de inducción estructural), por ejemplo en listas enlazadas, en arboles, grafos, etc. Se utiliza BI, HI y TI de la misma forma que en la inducción simple.

¡Inducción simple, fuerte y el principio del buen orden son equivalentes!

La elección del tipo de inducción depende de la naturaleza del problema.

Ejercicio 1 — Inducción simple

Pruebe ocupando inducción simple las siguientes proposiciones sobre los naturales:

a) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

Solución:

- **Base inductiva:** Para $n=1$, el lado izquierdo es $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$ y el lado derecho es $\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$, lo cual se cumple.
- **Hipótesis inductiva:** Supongamos que la fórmula es válida para algún $k\geq 1$, es decir:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

- **Tesis inductiva:** Demostraremos que la fórmula también es válida para $k+1$:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

Consideremos la suma $S(k+1)$:

$$\begin{aligned}
S(k+1) &= \frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}\\
&= \frac{k(2(k+1)+1)}{(2k+1)(2(k+1)+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}\\
&= \frac{2k^2+3k}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= \frac{k+1}{2k+3}\\
&= \frac{k+1}{2(k+1)+1}
\end{aligned}$$

Lo cual es la expresión que queríamos demostrar.

b) Los números de Fermat, $F_n = 2^{2^n} + 1$, cumplen que,

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2 \text{ para } n \geq 1$$

Solución:

- **Base inductiva**
  para n = 1 se tiene que,

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = \prod_{k=0}^{1-1} F_k = F_0 = 3$$

  luego, como $F_1 = 5$, i.e, $F_1 - 2 = 3$, se obtiene que,

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 = 3 = F_1 - 2$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_1 - 2$$

- **Hipótesis inductiva**

  Supongamnos que se cumple para n que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$

- **Tesis inductiva**
  Tenemos que,

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = (\prod_{k=0}^{n-1} F_k)F_n$$

  Luego, por hipótesis inductiva tenemos que $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$, entonces

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = (\prod_{k=0}^{n-1} F_k)F_n$$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = (F_n - 2)F_n$$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = 2^{2^{n+1}} - 1$$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$$

  Demostrando entonces que se cumple el caso para $n + 1$.

Ejercicio 2 — Inducción fuerte

Demuestre con inducción fuerte que $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional es equivalente a demostrar que no existe ninguna expresión de la forma $\sqrt{2} = \frac{n}{b}$ para ningún par de enteros n, b.

- **Base inductiva** Consideramos el caso base $n = 1$ planteando la relación $\sqrt{2} = \frac{1}{b}$ para algún entero b. De lo que se obtiene que $b^2 = \frac{1}{2}$, lo que es imposible dado que b es un número entero. Debido a esta contradioción se demuestra que no existe ninguna relación de la forma $\sqrt{2} = \frac{1}{b}$.

- **Hipótesis inductiva** Se asume como cierto que no existe ninguna relación de la forma $\sqrt{2} = \frac{k}{b}$, para ningún par de enteros k, b tal que k es menor que n.

- **Tesis inductiva** Para demostrar que no existe ninguna relación de la forma $\sqrt{2} = \frac{n}{b}$ comenzamos asumiendo lo contrario.

$$\sqrt{2} = \frac{n}{b}$$
$$2b^2 = n^2$$

  De modo que n^2 es par, por consiguiente n es par y se puede escribir como $n = 2c$ para algún entero c. Luego dado que $2b^2 = n^2 = 4c^2$ se tiene que b^2 y b son pares, entonces $b = 2d$. Finalmente se plantea

$$\sqrt{2} = \frac{n}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{c}{d}$$

  Sin embargo, dado que c es menor que n y considerando la hipótesis inductiva, esta relación es imposible. Así queda demostrado que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Ejercicio 3 — Inducción estructural

Sea L el conjunto de palabras formadas con los símbolos a y b definido de manera inductiva como el menor conjunto que cumple con las reglas:

- $a \in L$, $b \in L$
- Si $\mu \in L$ y $\nu \in L$ entonces $\mu\nu \in L$

Se define la operación reversa R en L como

- $R(a) = a$ y $R(b) = b$
- Si $\mu \in L$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$ y $R(b\mu) = R(\mu)b$

Demuestre que para todo $\mu, \nu \in L$ se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$

Solución:

- **Base inductiva**
  Si $\mu = a$ o $\mu = b$. Sin pérdida de generalidad supongamos $\mu = a$, sea $\nu \in L$, luego

$$R(\mu\nu) = R(a\nu) = R(\nu)a = R(\nu)R(a) = R(\nu)R(\mu)$$

- **Hipótesis inductiva**
  Supongamos que existen $\mu, \nu \in L$ tales que para todo $\xi \in L$ se cumple que

$$R(\mu\xi) = R(\xi)R(\mu)$$

$$R(\nu\xi) = R(\xi)R(\mu)$$

- **Tesis inductiva**
  Tenemos por demostrar que $\mu\nu$ cumple la propiedad para todo $\xi \in L$, desarrollando tenemos que,

$$R(\mu\nu\xi) = R(\mu(\nu\xi))$$

$$R(\mu\nu\xi) = R(\nu\xi)R(\mu) \text{ por HI}$$

$$R(\mu\nu\xi) = R(\xi)R(\nu)R(\mu) \text{ por HI}$$

$$R(\mu\nu\xi) = R(\xi)R(\mu\nu) \text{ por HI}$$

  quedando así demostrado por inducción estructural que para todo $\mu, \nu \in L$ se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$