Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2018

INTERROGACION 2

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Demuestre que si $(A, \preceq)$ es un orden parcial, entonces el grafo dirigido $(A, \preceq)$ no tiene ciclos de largo mayor o igual a 2.

Pregunta 2

Sea A un conjunto. Una relación $R \subseteq A \times A$ se dice que es *de punto medio* si, y solo si, para todo $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces existe $c \in A$ tal que $(a, c) \in R$ y $(c, b) \in R$.

1. (4 puntos) Suponga que A es un conjunto finito y $R \subseteq A \times A$ tal que $R \neq \emptyset$. Demuestre que si R es transitiva y de punto medio, entonces existe un $x \in A$ tal que $(x, x) \in R$.
2. (2 puntos) ¿Es cierto lo anterior si R es infinito? Demuestre su afirmación.

Pregunta 3

Sea A un conjunto finito y $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones biyectivas $f : A \to A$. Para $S \subseteq A$ se define:

$$\mathcal{F}_S \ = \ \big\{ f \in \mathcal{F} \ \mid \ \forall x \in S.\ f(x) = x \big\}$$

En otras palabras, $\mathcal{F}_S$ son todas las funciones biyectivas $f : A \to A$ que mantienen (en otras palabras, "fijan") todos los elementos en S. Note que para todo $f, g \in \mathcal{F}_S$, se cumple que $f \circ g \in \mathcal{F}_S$ y $f^{-1} \in \mathcal{F}_S$.

1. Considere la relación $R_S \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ tal que $(f, g) \in R_S$ si, y solo si, $f^{-1} \circ g \in \mathcal{F}_S$. Demuestre que R_S es una relación de equivalencia.
2. Considere el conjunto cuociente $\mathcal{F}/R_S$, esto es, el conjunto de todas las clases de equivalencia de R_S. Demuestre que para todo $X \in \mathcal{F}/R_S$ existe un $g \in \mathcal{F}$ tal que:

$$X \ = \ \{ f \circ g \ \mid \ f \in \mathcal{F}_S \}$$

Pregunta 4

Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

1. Se define la clausura transitiva de R como:

$$R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

   donde $R^i = R \circ \overset{\text{i-veces}}{\cdots} \circ R$. Demuestre que R^t es una relación transitiva.

2. Se define $I = \{(a, a) \mid a \in A\}$ como la relación identidad sobre A. Demuestre que la relación:

$$R^{\sim} \;=\; (R \cup R^{-1} \cup I)^t$$

   es la menor relación de equivalencia que contiene a R. En otras palabras, demuestre que $R^{\sim}$ es una relación de equivalencia y, para toda otra relación de equivalencia E, si $R \subseteq E$ entonces $R^{\sim} \subseteq E$.