Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 2

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Todos los Pokémon son de alguna naturaleza.

Se busca que todo elemento del dominio cumpla con al menos un predicado de naturaleza. Esto es

$$\forall x\ (A(x) \vee F(x) \vee P(x) \vee N(x))\,.$$

Pregunta 1.2

Algunos Pokémon poseen 2 naturalezas.

Se busca la existencia de uno o más elementos del dominio que cumplan con dos predicados de naturaleza distintos a la vez (de los cuales hay seis combinaciones). Esto es

$$\exists x\ ((A(x) \wedge F(x)) \vee (A(x) \wedge P(x)) \vee (A(x) \wedge N(x)) \vee (F(x) \wedge P(x)) \vee (F(x) \wedge N(x)) \vee (P(x) \wedge N(x)))\,.$$

Pregunta 1.3

Los ataques de naturaleza agua son efectivos contra Pokémon de naturaleza fuego, los de naturaleza fuego son efectivos contra Pokémon de naturaleza planta y los ataques de naturaleza planta son efectivos contra Pokémon de naturaleza agua.

Para todo par de elementos del dominio, si estos cumplen con alguna combinación correspondiente de fortaleza/debilidad, entonces el ataque será *súper efectivo*. Esto es

$$\forall x\, \forall y\ (((A(x) \wedge F(y)) \vee (F(x) \wedge P(y)) \vee (P(x) \wedge A(y))) \implies E(x,y))\,.$$

Pregunta 1.4

Si dos Pokeémon son de la misma naturaleza, entonces sus hijos son de aquella naturaleza.

Para todo par de Pokémon que tenga hijos, si este par comparte naturaleza entonces todos sus hijos deben compartirla también. Esto es

$$\begin{aligned}\forall x\, \forall y\, \forall z\, (H(x,y,z) \implies (\,&(A(x) \wedge A(y) \implies A(z)) \wedge \\ &(F(x) \wedge F(y) \implies F(z)) \wedge \\ &(P(x) \wedge P(y) \implies P(z)) \wedge \\ &(N(x) \wedge N(y) \implies N(z))).\end{aligned}$$

Pregunta 1.5

Los Pokémon que son hermanos comparten las mismas naturalezas.

En este caso corresponde escribir que para cualquier par de Pokémon, si son hermanos —es decir, si comparten padres—, entonces la naturaleza de uno debe ser del otro también. Esto es:

$$\begin{aligned}\forall x\,\forall y\,\exists v\,\exists w\,((H(v,w,x)\wedge H(v,w,y)) \implies (\,&(A(x)\iff A(y))\wedge\\ &(F(x)\iff F(y))\wedge\\ &(P(x)\iff P(y))\wedge\\ &(N(x)\iff N(y)))).\end{aligned}$$

Se puede interpretar que "hermanos" signifca que comparten *un* padre, en cual caso lo anterior sería

$$\begin{aligned}\forall x\,\forall y\,\exists v\,\exists w_1\,\exists w_2\,((H(v,w_1,x)\wedge H(v,w_2,y)) \implies (\,&(A(x)\iff A(y))\wedge\\ &(F(x)\iff F(y))\wedge\\ &(P(x)\iff P(y))\wedge\\ &(N(x)\iff N(y)))).\end{aligned}$$

Dado lo anterior el puntaje asignado **para cada afirmación** es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por definir correctamente la fórmula, una variante lógicamente equivalente a ella, o una que represente **correctamente** una interpretación **válida** de la oración.
- (**3 Puntos**) Por tener algún error pequeño en la fórmula, pero que esta tenga una explicación que da a entender una idea correcta detrás de ella.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Una posible solución es utilizar el conjunto finito $\{a,b\}$ e interpretar la relación $<$ de la siguiente forma:

$$x<y=\begin{cases}1 & si \quad (x,y)\in\{(a,b),(b,a)\}\\ \\ 0 & \qquad\qquad e.o.c.\end{cases}$$

Como ejemplo, en este caso, $a<a=0$ y $a<b=1$. Por lo tanto se cumple con lo pedido, ya que un elemento no se relaciona consigo mismo ($\forall x.\neg(x<x)$) y todos los elementos se relacionan con algún otro ($\forall x.\exists y.x<y$). Esta relación también puede ser expresada gráficamente de la siguiente forma:

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Se elige un conjunto finito y la interpretación dada a $<$ satisface φ_1 bajo este dominio. Además, el alumno explica por qué es satisfacible.

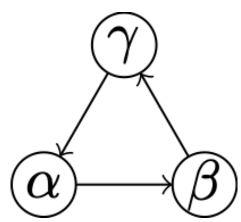
- (**3 Puntos**) A pesar de tener algún pequeño error, esto no afecta el razonamiento que hay detrás de por qué, bajo esa interpretación, se vuelve satisfacible el predicado.
- (**0 Puntos**) Se elige un dominio no finito, la interpretación entregada no hace satisfacible al predicado o no se explicita por qué se vuelve satisfacible este.

Pregunta 2.2

En este caso, una posible solución es utilizar un conjunto finito de tres elementos, como podría ser $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ e interpretar la relación $<$ de la siguiente forma:

$$x < y = \begin{cases} 1 \quad si \quad (x, y) \in \{(\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha)\} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad e.o.c. \end{cases}$$

Bajo esta interpretación, se sigue cumpliendo que un elemento no se relaciona consigo mismo $(\forall x.\neg(x < x))$ y todos los elementos se relacionan con algún otro $(\forall x.\exists y.x < y)$. Por ejemplo: $\alpha < \alpha = 0$, $\alpha < \beta = 1$. Sin embargo, aquí también se debía considerar que una relación solo se podía dar en un sentido $(\forall x.\forall y.(x < y \rightarrow \neg(y < x)))$. Lo que se cumple, ya que, por ejemplo, $\alpha < \beta = 1$ pero $\beta < \alpha = 0$. La interpretación dada a $<$ se puede visualizar como:



Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

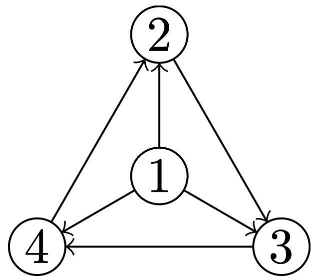
- (**4 Puntos**) Se elige un conjunto finito y la interpretación dada a $<$ satisface φ_2 bajo este dominio. Además, el alumno explica por qué es satisfacible.
- (**3 Puntos**) A pesar de tener algún pequeño error, esto no afecta el razonamiento que hay detrás de por qué, bajo esa interpretación, se vuelve satisfacible el predicado.
- (**0 Puntos**) Se elige un dominio no finito, la interpretación entregada no hace satisfacible al predicado o no se explicita por qué se vuelve satisfacible este.

Pregunta 2.3

Para esta última parte, una posible solución es un dominio finito de 4 elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ e interpretar la relación $<$ de la siguiente forma:

$$x < y = \begin{cases} 1 \quad si \quad (x, y) \in \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad e.o.c. \end{cases}$$

Con esta interpretación, se sigue cumpliendo que un elemento no se relaciona consigo mismo $(\forall x.\neg(x < x))$ y todos los elementos se relacionan con algún otro $(\forall x.\exists y.x < y)$, y se sigue cumpliendo que dos elementos, si es que se relacionan, solo lo hacen en un sentido $(\forall x.\forall y.(x < y \rightarrow \neg(y < x)))$. Ahora también debemos considerar, que debe existir un elemento que se relacione con todos los demás $(\exists x.\forall y.(\neg(x = y)) \rightarrow x < y))$, lo que se cumple ya que $1 < 2 = 1$, $1 < 3 = 1$ y $1 < 4 = 1$. Podemos ver la relación $<$ de la siguiente forma:



Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Se elige un conjunto finito y la interpretación dada a $<$ satisface φ_3 bajo este dominio. Además, el alumno explica por qué es satisfacible.
- (**3 Puntos**) A pesar de tener algún pequeño error, esto no afecta el razonamiento que hay detrás de por qué, bajo esa interpretación, se vuelve satisfacible el predicado.
- (**0 Puntos**) Se elige un dominio no finito, la interpretación entregada no hace satisfacible al predicado o no se explicita por qué se vuelve satisfacible este.