

Matemáticas Discretas

Lógica de predicados

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

8 de septiembre de 2021

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

- ① Objetivos
- ② Introducción
- ③ Sintaxis
 - Predicados
 - Conectivos
- ④ Semántica
 - Interpretaciones
 - Equivalencia lógica
 - Consecuencia lógica
- ⑤ Reglas de inferencia
- ⑥ Conclusiones

Bueno y... ¿qué paso con este problema?

Problema

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Lo resolveremos a lo largo de esta clase.

Imaginemos que sólo sabemos que la siguiente afirmación es verdadera:

Afirmación

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.

Ninguna de las reglas de lógica proposicional nos permiten concluir lo siguiente:

Conclusión

El número 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.
16 es par.

Por lo tanto, 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

¿Qué le falta a nuestra lógica proposicional?

- Objetos (no sólo proposiciones)
- Predicados
- Cuantificadores: **para todo** (\forall) o **existe** (\exists)

Esta lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales.
- Enteros, racionales, reales, etc.
- Grafos, árboles, palabras, matrices, etc.
- Estructuras en general.

Podemos definir propiedades como:

- Para todo número n , existe un m tal que $n \geq m$.
- Para todo par de vértices v_1 y v_2 , si $(v_1, v_2) \in E$, entonces $(v_2, v_1) \in E$.

Ejemplos

- x es par
- $x \leq y$
- $x + y = z$

¿Cuáles de estos ejemplos son **proposiciones**?

¡Ninguno!

Pero si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

- 2 es par, 3 es par,
- $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...
- $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Definición

Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Definición

Para un predicado $P(x)$ y un valor a , la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a .

Ejemplos

$P(x) := x$ es par $R(x) := x$ es primo $M(x) := x$ es mortal

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

Definición

Un predicado n -ario $P(x_1, \dots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

Definición

Para un predicado n -ario $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores a_1, \dots, a_n , la **valuación** $P(a_1, \dots, a_n)$ es el valor de verdad de P en a_1, \dots, a_n .

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

$O(x, y) \quad := x \leq y \quad \text{sobre } \mathbb{N}$

$S(x, y, z) \quad := x + y = z \quad \text{sobre } \mathbb{Q}$

$Padre(x) \quad := x \text{ es padre de } y \quad \text{sobre el conjunto de todas las personas}$

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ diremos que x_1, \dots, x_n son **variables libres** de P .
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación.

Predicados compuestos

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado, o la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), implicancia (\rightarrow) o bidireccional (\leftrightarrow) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

$P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$
- $P'(4) = 0$

Cuantificador universal

Definición

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D . Definimos el cuantificador universal

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \forall x(P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde x es la variable cuantificada y y_1, \dots, y_n son las variables libres.

Definición

Para b_1, \dots, b_n en D , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $O'(y) := \forall x(O(x, y)) \Rightarrow O'(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \forall y(O(x, y)) \Rightarrow O''(0) = \forall y(O(0, y))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P'_0 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

Cuantificador existencial

Definición

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D . Definimos el cuantificador existencial

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \exists x(P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde x es la variable cuantificada y y_1, \dots, y_n son las variables libres.

Definición

Para b_1, \dots, b_n en D , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $O'(y) := \exists x(O(x, y)) \Rightarrow O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y)) \Rightarrow O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \wedge O(z, y) \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \Rightarrow O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Es posible combinar cuantificadores

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{Z} :

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(x, y)))$

Predicados compuestos

(re)Definición

Decimos que un predicado es compuesto (o también **fórmula**) si es:

- un predicado básico,
- la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), implicancia (\rightarrow), bidireccional (\leftrightarrow) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuantificación universal (\forall) o existencial (\exists) de un predicado compuesto.

(re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del dominio y la **interpretación** del símbolo \leq .

Notación

Desde ahora, para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, \dots, x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, \dots, x_n)$ es el predicado sobre D .

Definición

Sean P_1, \dots, P_m símbolos de predicados.

Una **interpretación** \mathcal{I} para P_1, \dots, P_m está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i .

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$$

$$\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x$$

$$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$$

$$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$$

Definición

Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula e \mathcal{I} una interpretación de los símbolos en φ . Diremos que \mathcal{I} **satisface** φ sobre a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(\text{dom})$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según \mathcal{I} .

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$\mathcal{I}_1(\text{dom}) := \mathbb{N}$	$\mathcal{I}_2(\text{dom}) := \mathbb{Z}$
$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$	$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$
$\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x$	$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

Definición

Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula e \mathcal{I} una interpretación de los símbolos en φ . Diremos que \mathcal{I} **satisface** φ sobre a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(\text{dom})$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según \mathcal{I} .

Si \mathcal{I} **no satisface** φ sobre a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(\text{dom})$ lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \not\models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Equivalencia lógica

Definición

Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación \mathcal{I} y para todo a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres), entonces:

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi$$

Equivalencia lógica

Observación

Todas las equivalencias de lógica proposicional son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas φ , ψ y θ en lógica de predicados:

- 1 **Conmutatividad:** $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
- 2 **Asociatividad:** $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
- 3 **Idempotencia:** $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
- 4 **Doble negación:** $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
- 5 **Distributividad:** $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
- 6 **De Morgan:** $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
- 7 ...

Ejemplos

Las siguientes fórmulas también son lógicamente equivalentes:

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x(P(x)) \rightarrow \exists y(R(y)) \equiv \neg \exists y(R(y)) \rightarrow \neg \forall x(P(x))$$

Tenemos nuevas equivalencias además de las ya mencionadas:

Teorema

Sea $\varphi(x), \psi(x)$ fórmulas con x su variable libre. Entonces:

$$\neg \forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg \varphi(x))$$

$$\neg \exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg \varphi(x))$$

$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

¿Qué nos dicen estos teoremas?

Ejercicio

Demuestre los teoremas.

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \models \neg \forall x(\varphi(x)) &\Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \forall x(\varphi(x)) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\neg \varphi(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a), \text{ o} \\ &\quad \text{existe } b \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \psi(b) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \text{ o } \mathcal{I} \models \exists x(\psi(x)) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))\end{aligned}$$

Ejercicio

¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

- $\forall x(\exists y(\varphi(x, y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(\varphi(x, y))) \times$
- $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \forall x(\varphi(x)) \vee \forall x(\psi(x)) \times$
- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x)) \times$

Las siguientes definiciones nos ayudan a extender el concepto de consecuencia lógica.

Definición

Para un conjunto Σ de fórmulas, decimos que \mathcal{I} satisface Σ sobre a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(dom)$ si:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ para toda } \varphi \in \Sigma$$

Notación: $\mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$

Definición

Una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Σ :

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación \mathcal{I} y a_1, \dots, a_n en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \dots, a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))\} \models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \checkmark$
- $\{\exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))\} \models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \times$
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \models \exists x(\varphi(x)) \checkmark$
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x, y)))\} \models \exists x(\forall y(\varphi(x, y))) \times$

¿Existe algún algoritmo que nos permita resolver este problema? ¿Qué tal nuestro sistema deductivo de lógica proposicional?

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

1. Especificación universal:

$$\frac{\forall x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. Generalización universal:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para un } a \text{ arbitrario}}{\forall x(\varphi(x))}$$

Además de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

3. Especificación existencial:

$$\frac{\exists x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. Generalización existencial:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x(\varphi(x))}$$

Ejemplos

- Por especificación universal, de $\mathbb{N} \models \forall x(x \geq 0)$ podemos deducir que $1 \geq 0$.
- Por especificación existencial, de $\mathbb{N} \models \exists x(x \geq 0)$, podemos deducir que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 0$.
- Sea $n \in \mathbb{N}$ un número arbitrario, por definición de los números naturales sabemos que $n \geq 0$, luego por generalización universal obtenemos que $\mathbb{N} \models \forall x(x \geq 0)$.
- Por generalización existencial, de $1 \geq 0$ podemos deducir que $\mathbb{N} \models \exists x(x \geq 0)$.

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todos los hombres son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es hombre.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $H(x) := x$ es hombre
- $M(x) := x$ es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\frac{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \quad H(s)}{M(s)}$$

Ejercicio

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s), \neg M(s)\}$:

- (1) $\forall x(\neg H(x) \vee M(x)) \in \Sigma$
- (2) $\neg H(s) \vee M(s)$ especificación universal de (1)
- (3) $H(s) \in \Sigma$
- (4) $M(s)$ resolución de (2), (3)
- (5) $\neg M(s) \in \Sigma$
- (6) \square resolución de (4), (5)

- La lógica de predicados permite extender la lógica proposicional a estructuras más complejas.
- En general, esta lógica nos permite cuantificar elementos dentro de un dominio y establecer relaciones entre estos.
- A las “valuaciones” en lógica de predicados les llamamos interpretaciones, y se componen de un dominio mas un conjunto de predicados.
- Es posible extender el método de resolución a la lógica de predicados, para esto se incluyen nuevas reglas de inferencia.

- ¿Existe un algoritmo eficiente que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?
- ¿Existe un algoritmo que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?

Matemáticas Discretas

Lógica de predicados

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

8 de septiembre de 2021