Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

3 de octubre de 2019
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1

a) **(4 pts)** Demuestre que si $\mathcal{S}$ es una partición cualquiera de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A.

b) **(1 pt)** Demuestre que existe un único conjunto vacío.

c) **(1 pt)** Demuestre que para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Solución

a)
- Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.
- Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

- Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

b) Por contradicción, supongamos que existen dos conjuntos vacíos distintos: $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$. Dado que todo conjunto tiene como subconjunto al vacío, y como $\varnothing_1$ y $\varnothing_2$ son conjuntos, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$, ya que estamos suponiendo que $\varnothing_1$ es vacío. Recíprocamente, se tiene que $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Entonces, tenemos que $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ y $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, de donde se concluye que $\varnothing_1 = \varnothing_2$, lo que contradice nuestra suposición incial de que existen dos conjuntos vacíos distintos.

c) Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 1 pto. por caso reflexividad.
- 1 pto. por simetría.
- 2 ptos. por transitividad.

b) 1 pto.

c) 1 pto.

Soluciones alternativas y puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2 [Relaciones de equivalencia]

a) Sea R una relación simétrica y transitiva sobre un conjunto A. Demuestre que si para cada $a \in A$ existe un $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$, entonces R es una relación de equivalencia.

b) Sea R una relación refleja y transitiva sobre un conjunto A. Sea T una relación sobre A definida como

$$(a, b) \in T \text{ si y sólo si } \{(a, b), (b, a)\} \subseteq R$$

Demuestre que T es transitiva.

c) Diremos que una relación R sobre un conjunto A es **circular** si

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow zRx).$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia si y sólo si es refleja y circular.

Solución

a) Dado que la relación es simétrica y transitiva, basta con demostrar que es refleja.

Suponemos que para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Sea $a \in A$, por hipótesis existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Como R es simétrica, se tiene que $(b, a) \in R$. Además, como R es transitiva y $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, obtenemos que $(a, a) \in R$. Finalmente podemos concluir que $(a, a) \in R, \forall a \in A$.

b) Sea $(a, b) \in T$ y $(b, c) \in T$. Por definición, sabemos que $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ y $(b, c) \in R$, $(c, b) \in R$. Como R es transitiva, obtenemos que $(a, c) \in R$ y $(c, a) \in R$. Luego, por definición de T obtenemos que $(a, c) \in T$. Finalmente, como a, b y c son arbitrarios, podemos concluir que T es transitiva.

c) $(\Rightarrow)$ Sea R una relación de equivalencia. Dado que R es refleja, sólo debemos mostrar que es circular. Sean $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$. Como R es transitiva obtenemos que $(a, c) \in R$. Luego, como R es simétrica se tiene que $(c, a) \in R$. Finalmente, como a, b y c son arbitrarios, concluimos que R es circular.

$(\Leftarrow)$ Sea R una relación refleja y circular. Mostraremos que es simétrica y transitiva.

- Simetría: Sea $(a, b) \in R$. Como R es refleja sabemos que $(b, b) \in R$. Además, como es circular obtenemos que $(b, a) \in R$. Por lo tanto, podemos concluir que R es simétrica.
- Transitividad: Sea $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$. Como R es circular, obtenemos que $(c, a) \in R$. Luego, dado que R es simétrica tenemos que $(a, c) \in R$. Finalmente, como a, b y c son arbitrarios concluimos que R es transitiva.

Pauta (6 pts.)

a) 2 ptos.

b) 2 ptos.

c)
- 1 pto. por $(\Rightarrow)$.
- 1 pto. por $(\Leftarrow)$.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 [Relaciones de orden]

a) Sea $(A, \preceq)$ un orden total, y $S \subseteq A$ tal que S es finito y no vacío. Demuestre que $sup(S)$ e $inf(S)$ existen y pertenecen a S.
Hint: *use inducción.*

b) Sea $(A, \preceq)$ un orden total, y $S_1 \subseteq A$ tal que tiene supremo. Suponga ahora que existe $S_2 \subsetneq S_1$ tal que para todo $x \in S_1$ existe $y \in S_2$ tal que $x \preceq y$. Demuestre que S_2 tiene supremo, y que $sup(S_2) = sup(S_1)$.

Solución

a) Sea $S \subseteq A$ con n elementos. Mostraremos que $sup(S)$ e $inf(S)$ existen y pertenecen a S por inducción simple sobre n.

BI: Sea $n = 1$. En este caso $S = \{s\}$, con $s \in A$. Por un lado, dado que $(A, \preceq)$ es un orden total, obtenemos que $s \preceq s$, y como s es el único elemento de S, se tiene que es cota inferior y superior. Por otro lado, dada una cota superior c, como $s \in S$ se tiene que $s \preceq c$ y por lo tanto $s = sup(S)$. De manera análoga podemos concluir que $s = inf(S)$.

HI: Suponemos que para todo $S \subseteq A$ con n elementos, tanto $sup(S)$ como $inf(S)$ existen y pertenecen a S.

TI: Sea $S \subseteq A$ con $n+1$ elementos: $A = \{s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}\}$. Sea $A' = \{s_1, \ldots, s_n\}$, el cual tiene n elementos. Por HI A' está acotado y $sup(A'), inf(A') \in A'$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $inf(A') = s_1$ y $sup(A') = s_n$. Tenemos 2 casos:

i) Si $s_n \preceq s_{n+1}$ entonces $s_i \preceq s_{n+1}$ para todo $i \in 1 \ldots n$ (dado que $s_n = sup(A')$). Además, como $s_{n+1} \preceq s_{n+1}$ obtenemos que s_{n+1} es cota superior de A. Por otro lado, como $s_{n+1} \in A$ concluimos que $s_{n+1} = sup(A)$.

ii) Si $s_{n+1} \preceq s_n$ entonces $s_i \preceq s_n$ para todo $i \in 1 \ldots n+1$. Por lo tanto, s_n es cota superior de A y como $s_n \in A$ se tiene que $s_n = sup(A)$.

De manera análoga se puede mostrar el resultado para el ínfimo de A.

b) Debemos mostrar que el supremo de S_1 es también supremo de S_2. Para esto mostraremos que $sup(S_1)$ es cota superior de S_2 (I) y que para toda cota superior c de S_2 se tiene que $sup(S_1) \preceq c$ (II).

i) Sea c una cota superior de S_1. Para todo $x \in S_1$ se cumple que $x \preceq c$. Como $S_2 \subsetneq S_1$, si $x' \in S_2$ entonces $x \in S_1$, y por lo tanto $x' \preceq c$. Luego, toda cota superior de S_1 es también una cota superior de S_2. En particular, $sup(S_1)$ es una cota superior de S_1, y por ende también lo debe ser para S_2.

ii) Por contradicción, sea c una cota superior de S_2 tal que $c \preceq sup(S_1)$. Luego, c no puede ser cota superior de S_1 ya que es menor que su supremo. Entonces, debe existir un $x \in S_1$ tal que $c \preceq x$. Luego, por la propiedad del conjunto S_2, debe existir un $y \in S_2$ tal que $x \preceq y$. Finalmente, por transitividad obtenemos que $c \preceq y$ lo que contradice el hecho de que c es cota superior de S_2. Concluimos que $sup(S_2) = sup(S_1)$.

<u>**Pauta**</u> (6 pts.)

a)
- 1 pto por BI.
- 0.5 ptos por HI.

- 1.5 ptos por TI.

b)
- 1 pto por i).
- 2 ptos por ii).

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 [Funciones y cardinalidad]

a) Sean A y B conjuntos. Demuestre que si $A \approx B$ entonces $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{P}(B)$.

b) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Demuestre que $[a, b] \approx [c, d]$.

Solución

a) Como $A \approx B$, sabemos que existe $f : A \to B$ biyectiva. Considere la función

$$g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \text{ definida como}$$

$$g(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b\}, \forall X \in \mathcal{P}(A).$$

Es decir, la función g asigna a cada subconjunto X de A el conjunto de las imágenes de los elementos de X bajo la función f. Demostraremos que g es una función biyectiva entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$, con lo que quedará demostrado que $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{P}(B)$.

- Inyectiva: Sean $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ tales que $g(X_1) = g(X_2)$. Queremos demostrar que $X_1 = X_2$, y lo haremos usando la definición de igualdad de conjuntos.
  - $X_1 \subseteq X_2$: Sea $a \in X_1$. Por definición de g, sabemos que $f(a) \in g(X_1)$. Como $g(X_1) = g(X_2)$, se tiene que $f(a) \in g(X_2)$, y entonces por definición de g sabemos que existe $a' \in X_2$ tal que $f(a) = f(a')$. Ahora, como f es biyectiva, es inyectiva, y por lo tanto $a = a'$, de donde obtenemos que $a \in X_2$.
  - $X_2 \subseteq X_1$: Sea $a \in X_2$. Por definición de g, sabemos que $f(a) \in g(X_2)$. Como $g(X_1) = g(X_2)$, se tiene que $f(a) \in g(X_1)$, y entonces por definición de g sabemos que existe $a' \in X_1$ tal que $f(a) = f(a')$. Ahora, como f es biyectiva, es inyectiva, y por lo tanto $a = a'$, de donde obtenemos que $a \in X_1$.
- Sobreyectiva: Sea $Y \in \mathcal{P}(B)$. Como f es biyectiva, es invertible, y por lo tanto podemos tomar el conjunto

  $$X = \{a \in A \mid \exists b \in Y \text{ tal que } f^{-1}(b) = a\}.$$

  Es decir, X es el conjunto de las preimágenes de los elementos en Y bajo f. Demostraremos que $Y = g(X)$, con lo que se concluye que g es sobreyectiva.
  - $Y \subseteq g(X)$: Sea $b \in Y$. Por definición de X, sabemos que $f^{-1}(b) \in X$. Entonces, por definición de g, tenemos que $f(f^{-1}(b)) \in g(X)$, y por lo tanto $b \in g(X)$.

- $g(X) \subseteq Y$: Sea $b \in g(X)$. Por definición de g, sabemos que existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Ahora, por definición de X, sabemos que existe $b' \in Y$ tal que $f^{-1}(b') = a$. Entonces, tenemos que $b = f(a) = f(f^{-1}(b')) = b'$, y por lo tanto $b \in Y$.

b) Queremos construir una función $f : [a, b] \to [c, d]$ que sea biyectiva. Una posibilidad es mapear a a c y b a d, y mapear los puntos intermedios linealmente. En otras palabras, podemos tomar una recta que pase entre los puntos (a, c) y (b, d) del plano real:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x - a) + c$$

Esta función está bien definida, pues como $a < b$ se tiene que $b - a \neq 0$. Por otro lado, como $c < d$, esta función es claramente biyectiva. Lo demostraremos a continuación:

- Inyectiva: Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Por definición de f,

$$\frac{d-c}{b-a} \cdot (x_1 - a) + c = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x_2 - a) + c,$$

de donde es evidente que $x_1 = x_2$ luego de despejar todas las constantes.

- Sobreyectiva: Sea $y \in [c, d]$. Esto quiere decir que

$$\begin{array}{rcccl} c & \leq & y & \leq & d \\ 0 & \leq & y - c & \leq & d - c \\ 0 & \leq & (b-a)(y-c) & \leq & (b-a)(d-c) \\ 0 & \leq & \frac{b-a}{d-c}(y-c) & \leq & b-a \\ a & \leq & \frac{b-a}{d-c}(y-c) + a & \leq & b \end{array}$$

Tenemos entonces un $x \in [a, b]$ definido como

$$x = \frac{b-a}{d-c}(y - c) + a.$$

Es claro que $f(x) = y$, con lo que demostramos que f es sobreyectiva.

Pauta (6 pts.)

a)
- 1 pto. por dar la biyección.
- 1 pto. por demostrar inyectividad.
- 1 pto. por demostrar sobreyectividad.

b)
- 1.5 ptos. por dar la biyección.
- 0.75 ptos. por demostrar inyectividad.
- 0.75 ptos. por demostrar sobreyectividad.

Puntajes intermedios y soluciones alternativas a criterio del corrector.