Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

15 de septiembre de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 5 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada problema debe entregarse en un archivo independiente de las demas preguntas.
  - Los archivos que debe entregar son un archivo `PDF` por cada pregunta con su solución con nombre `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf` , junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo los archivos `numalumno-P1.tex` y `numalumno-P2.tex` que compilan su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1 - Teoría de Conjuntos

Usando la definición del conjunto de los naturales vista en el capítulo de teoría de conjuntos, demuestre que:

a) La suma tiene elemento neutro [1 pt]

b) La multiplicación tiene elemento neutro [1 pt]

c) La suma y multiplicación son distributivas entre sí [4 pts]

Solución

a) Por definición de la suma, se cumple:

$$sum(m, 0) = m$$

Por conmutatividad de la suma, se cumple que:

$$sum(0, m) = sum(m, 0) = m$$

Por lo tanto 0 es un elemento neutro de la suma.

b) De la definición de *mult* sabemos que:

$$mult(m, 0) = 0$$
$$mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$$

Vamos a demostrar que el 1 es neutro.

$$mult(m, 1) = mult(m, \delta(0)) = sum(m, mult(m, 0)) = sum(m, 0) = m$$

La otra dirección se va a realizar por inducción. Por demostrar:

$$\forall m \in \mathbb{N} \;\; mult(1, m) = m$$

BI:

$$mult(1, 0) = 0$$

Debido a la definición de la suma.

HI:

$$mult(1, n) = n$$

Para $n \in \mathbb{N}$

TI:

$$mult(1, n+1) = mult(1, \delta(n))$$
$$mult(1, n+1) = sum(1, mult(1, n))$$
$$mult(1, n+1) = sum(1, n)$$
$$mult(1, n+1) = n+1$$

Por lo tanto, $mult(1, m) = m$. Es decir 1 es neutro. (También se puede demostrar la conmutatividad de la multiplicación en general y usar la primera parte de la demostración)

c) Se debe demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$mult(sum(a, b), c)) = sum(mult(a, c), mult(b, c))$$

Se demostrará por inducción simple.

BI: Si $c = 0$, entonces se tiene que:

$$mult(sum(a, b), 0) = 0$$

Por la definición de la multiplicación. Además:

$$sum(mult(a, 0), mult(b, 0)) = sum(0, 0) = 0$$

Por lo tanto:

$$mult(sum(a, b), 0)) = sum(mult(a, 0), mult(b, 0))$$

HI: Se asume que se cumple:

$$mult(sum(a, b), n) = sum(mult(a, n), mult(b, n))$$

Para $n \in \mathbb{N}$.

TI: Sea $\delta(n) = n + 1$. Luego, se quiere demostrar que

$$mult(sum(a, b), \delta(n)) = sum(mult(a, \delta(n)), mult(b, \delta(n)))$$

. Se tiene:

$$mult(sum(a, b), \delta(n)) = sum(sum(a, b), mult(sum(a, b), n))$$

Por H.I.:

$$= sum(sum(a, b), sum(mult(a, n), mult(b, n)))$$

Dada la asociatividad y conmutatividad de la suma:

$$= sum(sum(a, mult(a, n)), sum(b, mult(b, n))$$
$$= sum(mult(a, \delta(n)), mult(b, \delta(n)))$$

Además, como a y b son naturales arbitrarios, y se demuestra por inducción para todo c que los multiplica, queda demostrada la propiedad distributiva entre suma y multiplicación sobre los naturales.

Pauta (6 pts.)

- 1.0 pto. Elemento neutro de la suma.
- 1.0 pto. Elemento neutro de la multiplicación.
- 4.0 ptos. Distribuitividad de la suma y multiplicación.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2 - Relaciones de Equivalencia

a) Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \neq -1$. Definimos la relación $\sim_n$ sobre $\mathbb{Z}$:

$$x \sim_n y \quad \text{si y solo si} \quad n+1 \mid x+ny$$

Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia.

b) Sea A un conjunto cualquiera y sea $S \subseteq A$. Dados $X, Y \subseteq A$, definimos la relación $\sim$:

$$X \sim Y \quad \text{si y solo si} \quad (X \cup Y - X \cap Y) \subseteq S$$

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Solución

a) Demostraremos que $\sim_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

- **Refleja:** Debemos demostrar que $x \sim_n x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Es claro que

$$xn + x = x(n+1)$$

de donde obtenemos $n+1 \mid xn+x$ y por ende $x \sim_n x$.

- **Simétrica:** Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \sim_n y$, por definición sabemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\begin{aligned}
x + yn &= k(n+1) \\
x + yn + (y-y) + (xn - xn) &= k(n+1) \\
(x+y) + (yn + xn) - (y + xn) &= k(n+1) \\
(x+y)(n+1) - (y+xn) &= k(n+1) \\
y + xn &= (x+y)(n+1) - k(n+1) \\
y + xn &= (n+1)(x+y-k) \\
y + xn &= (n+1) \cdot k_2 \\
y &\sim_n x
\end{aligned}$$

Por lo tanto la relación es simétrica.

- **Transitiva:** Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $(x \sim_n y)$ y $(y \sim_n z)$, por definición sabemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned}
x + yn &= k_1(n+1) \\
y + zn &= k_2(n+1)
\end{aligned}$$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x + yn + y + zn &= (k_1 + k_2)(n+1) \\ x + y(n+1) + zn &= k_3 \cdot (n+1) \\ x + zn &= k_3 \cdot (n+1) - y(n+1) \\ x + zn &= (n+1)(k_3 - y) \\ x + zn &= (n+1) \cdot k_4 \\ x &\sim_n z \end{aligned}$$

Por lo tanto la relación es transitiva.

Concluimos que la relación es relación de equivalencia.

b) Demostraremos que $\sim$ es refleja, simétrica y transitiva.

- **Refleja**: Debemos mostrar que $\forall X \subseteq A$, $X \sim X$. Reemplazando en la definición obtenemos que $X \cup X - X \cap X = \emptyset \subseteq S$ y por ende $X \sim X$.
- **Simétrica**: Sean $X, Y \subseteq A$ tales que $X \sim Y$. Por definición

$$X \cup Y - X \cap Y \subseteq S$$

Por Conmutatividad:

$$\begin{gathered} Y \cup X - Y \cap X \subseteq S \\ Y \sim X \end{gathered}$$

- **Transitividad**: Sean $X, Y, Z \subseteq A$ tales que $X \sim Y$ y $Y \sim Z$. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} X \cup Y - X \cap Y &\subseteq S \qquad (1) \\ Y \cup Z - Y \cap Z &\subseteq S \qquad (2) \end{aligned}$$

Debemos mostrar que

$$X \cup Z - X \cap Z \subseteq S$$

Sea $x^* \in X \cup Z - X \cap Z$ arbitrario, tenemos 2 casos:

i) $x^* \in X$: En este caso tenemos que necesariamente $x^* \notin Z$. Nuevamente, tenemos 2 casos:

   - Si $x^* \in Y$ obtenemos por (2) que $x^* \in S$.
   - Si $x^* \notin Y$ obtenemos por (1) que $x^* \in S$.

ii) $x^* \notin X$: En este caso tenemos que necesariamente $x^* \in Z$. Nuevamente, tenemos 2 casos:

   - Si $x^* \in Y$ obtenemos por (1) que $x^* \in S$.
   - Si $x^* \notin Y$ obtenemos por (2) que $x^* \in S$.

Finalmente, como no tenemos más casos posibles, obtenemos $x^* \in S$ y por ende

$$X \cup Z - X \cap Z \subseteq \ S$$

y luego

$$X \sim Z$$

Concluimos que $\sim$ es de equivalencia.

Pauta (3 pts.)

a)
- 0.5 ptos. Demostrar que $\sim_n$ es refleja.
- 2.0 ptos. Demostrar que $\sim_n$ es simétrica.
- 0.5 ptos. Demostrar que $\sim_n$ es transitiva.

b)
- 0.5 ptos. Demostrar que $\sim$ es refleja.
- 0.5 ptos. Demostrar que $\sim$ es simétrica.
- 2.0 ptos. Demostrar que $\sim$ es transitiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.