

Matemáticas Discretas

Teoría de conjuntos

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de septiembre de 2023

Objetivos

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
- 3 Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

- ① Objetivos
- ② Introducción
- ③ Axiomas
- ④ Operaciones
- ⑤ Leyes
- ⑥ Operaciones generalizadas

Introducción

- Hasta ahora hemos usado conjuntos de una manera intuitiva pero razonable.
- Vamos a estudiar la teoría de conjuntos desde un punto de vista **axiomático**.
- Esta teoría se considera la base de las matemáticas.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Conjunto?
- ¿Elemento?
- ¿Pertenencia?

Ejemplos

$$x \in A$$

- x pertenece a A .
- x es un elemento de A .

$$1 \in \mathbb{N}$$

- 1 pertenece a los naturales.

$$2 \in \{1, 2\} \in \{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$$

- 2 es un elemento de $\{1, 2\}$, el que a su vez es un elemento de $\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Bien definida?
- Enunciaremos algunos *axiomas* con los que definiremos formalmente la teoría de conjuntos.
 - O al menos lo intentaremos...

Axiomas

Queremos saber cuándo dos conjuntos son iguales. Necesitamos la siguiente definición:

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplos

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \quad ¿\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}?$$

Axiomas

Definición

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Y si ahora aplicamos la definición de subconjunto y equivalencias lógicas:

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$A = B \leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Definición equivalente

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Este es el **Axioma de extensión**. ¿Por qué?

- Nos dice que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.
- Es decir, un conjunto queda completamente definido por los elementos que contiene.
- Esto constituye la definición fundamental de un conjunto como una colección abstracta de objetos.

En conclusión, lo único que define a un conjunto son los elementos que contiene.

Observación

$$\{x, x\} = \{x\}$$

- Los conjuntos no pueden tener elementos repetidos (o al menos no tiene sentido que los tengan).

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Notación: $A \subsetneq B$.

¿Qué significa que $A \neq B$?

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \neq B \leftrightarrow A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$$

¿Y que $B \not\subseteq A$?

$$B \subseteq A \leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \leftrightarrow \forall x(x \notin B \vee x \in A)$$

$$B \not\subseteq A \leftrightarrow \neg \forall x(x \notin B \vee x \in A) \leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B, \text{ o alternativamente, } A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A.$$

Notación: $A \subsetneq B$.

Corolario

$B \not\subseteq A$ si y sólo si $\exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

- Podemos establecer puntos de partida más formales.
- ¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$ tal que $\forall x, x \notin X$.

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por \emptyset o $\{\}$.

Axiomas

Algunas propiedades importantes del conjunto vacío:

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$.

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Ejercicio

Demuestre los teoremas.

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$.

Demostración: Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \emptyset \rightarrow x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\emptyset \subseteq A$. \square

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Demostración: Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \rightarrow A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos A y B vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que A y B son conjuntos, tenemos que $A \subseteq B$, ya que estamos suponiendo que A es vacío. Recíprocamente, se tiene que $B \subseteq A$. Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que $A = B$. \square

¿Como podemos definir un conjunto?

- Por extensión (listando sus elementos):

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Podemos hacer algo más *comprehensivo*:

$$\mathbb{Z}_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

- De hecho, lo necesitamos. ¿Por qué?

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ :

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación: A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Ejercicio

Defina el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

Respuesta: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Ejemplo

$\varphi_1(x)$: x es un conjunto con más de 3 elementos

$\varphi_2(x)$: x es un conjunto con una cantidad finita de elementos

$\varphi_3(x)$: x es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

Axiomas

Siguiendo con el ejemplo:

Ejemplo

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos.

Dado que \mathcal{A}_1 es un conjunto que tiene conjuntos adentro, ¿es \mathcal{A}_1 un elemento de sí mismo? ¿ $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$?

- En \mathcal{A}_1 están todos los conjuntos con más de 3 elementos.
- ¡Son muchos! Definitivamente más de 3...
- Entonces, \mathcal{A}_1 tiene más de 3 elementos.
- Luego, \mathcal{A}_1 cumple φ_1 .
- Concluimos que $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$.

Axiomas

Ejemplo

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

¿ $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$? No.

Ejemplo

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

¿ $\mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}_3$? Sí.

Luego de toda esta discusión, tiene sentido preguntarse si un conjunto pertenece a sí mismo. Tomemos la siguiente propiedad:

$$\varphi(x) \leftrightarrow x \notin x$$

La propiedad φ la cumplen todos los conjuntos que **no** pertenecen a sí mismos. Por ejemplo, \mathcal{A}_2 cumple φ , mientras que \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_3 no.

¿Qué más podemos hacer? ¡Ocupar el axioma de abstracción!

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

\mathcal{R} será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos. . . ¿Es \mathcal{R} un elemento de \mathcal{R} ? ¿ $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto \mathcal{R} pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ .
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA! Esta es la **paradoja de Russell**.

Axiomas

No nos sirve el axioma de abstracción :(

- Es demasiado permisivo.

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto “sano”, entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto “sano”?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto A se obtiene *separando* de C los elementos que cumplen la propiedad φ .

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto “universal sano” que llamaremos \mathcal{U} .
- Entonces, cuando escribamos $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$.
- Típicamente el conjunto \mathcal{U} se deduce del contexto.

Operaciones

A partir de conjuntos dados, es posible crear nuevos conjuntos aplicando operaciones entre ellos.

Sean A y B conjuntos. Definimos las siguientes operaciones elementales, que tienen como resultado un conjunto:

Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o B .

Intersección

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A y en B .

Operaciones

Diferencia

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B .

Conjunto potencia

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A .

Algunas observaciones:

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \delta(0) = \delta(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \delta(1) = \delta(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \delta(2) = \delta(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$\vdots$$

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, \dots , $n = \{0, \dots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de \mathbb{N} :

Definición

El conjunto de los números naturales, denotado por \mathbb{N} , es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

- 1 $\emptyset \in \mathbb{N}$
- 2 Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a \emptyset , 1 a $\delta(\emptyset)$, y así sucesivamente.

Mostramos entonces que la simple existencia del conjunto vacío basta para crear a todos los naturales, partiendo de llamar 0 a \emptyset y usando el operador sucesor δ para crear los siguientes de manera inductiva.

Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

Suma de dos números naturales:

- ① $sum(m, 0) = m$
- ② $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

$$\begin{aligned} \text{sum}(3, 4) &= \text{sum}(3, \delta(3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, 3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, \delta(2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, 2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(4))) \\ &= \delta(\delta(5)) \\ &= \delta(6) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $\text{mult}(3, 2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Construcción de conjuntos

Definición

Multiplicación de dos números naturales

- ① $mult(m, 0) = 0$
- ② $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$\begin{aligned} mult(3, 2) &= mult(3, \delta(1)) \\ &= sum(3, mult(3, 1)) \\ &= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\ &= sum(3, sum(3, mult(3, 0))) \\ &= sum(3, sum(3, 0)) \\ &= sum(3, 3) \\ &\vdots \\ &= 6 \end{aligned}$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Demostración: Debemos demostrar que

$$\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c :

BI: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), 0) = \text{sum}(a, b) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, 0))$.

HI: Supongamos que se cumple que

$\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$ para un natural c .

TI: Por demostrar: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c)))$.

Desarrollamos el lado izquierdo: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) =$

$$\begin{aligned} \delta(\text{sum}(\text{sum}(a, b), c)) &\stackrel{HI}{=} \delta(\text{sum}(a, \text{sum}(b, c))) = \\ \text{sum}(a, \delta(\text{sum}(b, c))) &= \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c))) \square \end{aligned}$$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal \mathcal{U} fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, \mathbb{N}).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a \mathcal{U}) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de \mathcal{U}), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}.$

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de \mathcal{S} ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de \mathcal{S} .

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de \mathcal{S} ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de \mathcal{S} .

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n, \dots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Matemáticas Discretas

Teoría de conjuntos

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de septiembre de 2023