Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

29 de Agosto de 2017
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
    - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Problemas

Pregunta 1

a) Demuestre que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo.

b) Sean P un conjunto de variables proposicionales, $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\varphi \in L(P)$.

Demuestre que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Solución

a) Dado $P = \{p\}$, demostraremos por inducción que toda fórmula en $L(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es lógicamente equivalente a p o a $\neg p$. Como ninguna de estas fórmulas es equivalente a $p \wedge \neg p$, se concluye que $\{\neg\}$ no puede ser funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi \in L(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es equivalente a p o a $\neg p$.

TI: El único caso inductivo que tenemos que demostrar es $\psi = \neg\varphi$, pues sólo podemos usar el conectivo $\neg$. Por HI, sabemos que para toda valuación σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(p)$ o $\sigma(\varphi) = \sigma(\neg p)$. Podemos hacer una tabla de verdad:

φ	$\psi = \neg\varphi$
p	$\neg p$
$\neg p$	p

Concluimos que ψ es equivalente a p o a $\neg p$. Por lo tanto, por el argumento dado al principio, tenemos que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo. $\square$

<u>Pauta</u> (3 pts.)

- 0.5 pts. por argumentar que toda fórmula en $\{\neg\}$ es equivalente a p o $\neg p$.
- 0.5 pts. por caso base e hipótesis.
- 1.5 pts. por tesis.
- 0.5 pts. por concluir que no se puede formar $p \wedge \neg p$.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) ($\Rightarrow$) Dado que $\Sigma \models \varphi$, demostraremos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, y luego existe una valuación σ tal que

$\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$. Esto implica que $\sigma(\Sigma) = 1$ y que $\sigma(\neg\varphi) = 1$, y por lo tanto $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \models \varphi$.

($\Leftarrow$) Dado que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, demostraremos que $\Sigma \models \varphi$. Debemos demostrar que dada una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\sigma(\Sigma) = 1$, necesariamente $\sigma(\neg\varphi) = 0$, y luego $\sigma(\varphi) = 1$. Hemos demostrado que si σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$, por lo que concluimos que $\Sigma \models \varphi$. $\square$

<u>Pauta</u> (3 pts.)

- 1.5 pts. por ($\Rightarrow$).
- 1.5 pts. por ($\Leftarrow$).
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2

a) Considere la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} G_0 &= 1 \\ G_1 &= 3 \\ G_2 &= 9 \\ G_n &= G_{n-1} + 3 \cdot G_{n-2} + 3 \cdot G_{n-3}, \text{ con } n \geq 3 \end{aligned}$$

Demuestre que para todo $n \geq 0$ se cumple que $G_n \leq 3^n$.

b) Un alumno del Departamento de Ciencia de la Computación asegura que ha hecho un descubrimiento revolucionario: ¡Todas las personas tienen el mismo nombre! "Esto es imposible", pensará usted, pero el alumno ha provisto una demostración:

> *Por demostrar:* todas las personas tienen el mismo nombre, por inducción sobre la cantidad de personas n.
>
> ***BI:*** *Con $n = 1$ tenemos una sola persona, por lo que la propiedad se cumple.*
>
> ***HI:*** *Supongamos que en cualquier grupo de n personas, todas tienen el mismo nombre.*
>
> ***TI:*** *Debemos demostrar que en todo grupo de $n+1$ personas, todas tienen el mismo nombre. Enumeremos a todas las personas desde 1 a $n+1$: $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Si sacamos a la última persona del grupo, obtenemos el grupo $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tamaño n, y por hipótesis de inducción, todas tienen el mismo nombre. Ahora, si sacamos a la primera persona del grupo, obtenemos el grupo $\{2, \ldots, n, n+1\}$, también de tamaño n, y nuevamente por hipótesis de inducción todas tienen el mismo nombre. Es claro que estos dos grupos tienen personas en común, y entonces concluimos que todas las personas tienen el mismo nombre.*

Usted sabe que esta afirmación no es cierta, y por lo tanto algún problema debe haber con la demostración del alumno. ¿Cuál es el error?

Solución

a) Demostraremos la propiedad por inducción sobre n, usando el princpio de inducción por curso de valores.

BI: Tenemos 3 casos base:

- $G_0 = 1 = 3^0$.
- $G_1 = 3 = 3^1$.
- $G_2 = 9 = 3^2$.

HI: Supongamos que para todo $k < n$, se cumple que $G_k \leq 3^k$.

TI: Debemos demostrar que $G_n \leq 3^n$. Como $n \geq 3$, podemos tomar G_{n-1}, G_{n-2} y G_{n-3}, los cuales todos cumplen con la propiedad por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
G_{n-1} &\leq 3^{n-1} && \text{HI} \quad (1)\\
G_{n-2} &\leq 3^{n-2} && \text{HI} \quad (2)\\
G_{n-3} &\leq 3^{n-3} && \text{HI} \quad (3)\\
3 \cdot G_{n-2} &\leq 3 \cdot 3^{n-2} && (2) \cdot 3 \quad (4)\\
3 \cdot G_{n-3} &\leq 3 \cdot 3^{n-3} && (3) \cdot 3 \quad (5)\\
G_{n-1} + 3 \cdot G_{n-2} + 3 \cdot G_{n-3} &\leq 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-3} && (1) + (4) + (5) \quad (6)\\
G_n &\leq 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-3} && \text{Definición} \quad (7)\\
&= 3 \cdot 3^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-2} && (8)\\
&= 7 \cdot 3^{n-2} && (9)\\
&< 9 \cdot 3^{n-2} && (10)\\
&= 3^n && (11)
\end{aligned}$$

<u>**Pauta**</u> (3 pts.)

- 0.25 pts. por caso base
- 0.25 pts. por hipótesis de inducción.
- 2.5 pts. por tesis de inducción.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) El error que cometió el alumno en su demostración es que el paso inductivo no se aplica para todos los casos. En particular, basta con tomar $n = 2$ para darnos cuenta de que en un grupo de dos personas, no podemos aplicar el argumento dado en la tesis, puesto que al tomar los dos grupos descritos, estos no tienen personas en común. Luego, la hipótesis no puede ser usada en la tesis, y por lo tanto la demostración está incorrecta.

<u>Pauta</u> (3 pts.)

- 1 pts. por argumentar que el error está en que la tesis no aplica para todo $n > 1$.
- 2 pts. por explicar por qué en $n = 2$ el argumento inductivo no funciona.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 3

Como usted ya sabrá, hace un par de semanas se dio a conocer que todos los empleados públicos obtuvieron bono anual por cumplimiento. En esta pregunta usted debe modelar con lógica proposicional cómo sucedió esta maravilla. En concreto, se debe construir una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

$$\varphi \text{ es satisfacible}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{Es posible que todos los trabajadores obtengan el bono por cumplimiento.}$$

Para construir su fórmula usted cuenta con la siguiente información:

- Existen n trabajadores públicos.
- Existen 255 días laborales.
- Existen m tareas a realizar en el servicio público.
- Para que todos obtengan el bono, es necesario tanto que todas la tareas sean realizadas como que todos los trabajadores cumplan con sus metas individuales.
- Para que un trabajador cumpla sus metas, debe o bien faltar a lo más un día al trabajo o realizar al menos una tarea durante el año.
- Las tareas se pueden realizar exclusivamente una vez.
- Las tareas toman exactamente un día de trabajo.
- Las tareas no son realizables de forma remota (deben asistir al trabajo).
- Las tareas son individuales.

Solución

En primer lugar, debemos definir nuestro conjunto P de variables proposicionales:

$$\begin{aligned} P = &\{\ p_{ij} \mid \text{El trabajador } i \text{ asiste el día } j\ \} \cup \\ &\{\ q_{ijk} \mid \text{El trabajador } i \text{ en el día } j \text{ realiza la tarea } k\ \} \end{aligned}$$

Luego, consideremos las siguientes fórmulas:

- Todas las tareas son realizadas:

$$\varphi_{\forall tareas} = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{255} \bigvee_{k=1}^{n} q_{kji}$$

- Todos los trabajadores cumplen con sus metas individuales: para esto, primero modelaremos el que un trabajador cumpla sus metas individuales.

- El trabajador k cumple con la meta de asistencia, el trabajador k cumple con la meta de tareas:

$$\varphi^k_{meta} = \bigwedge_{i=1}^{255} \left(\neg p_{ki} \to \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{255} p_{kj} \right) \qquad \varphi^k_{tarea} = \bigvee_{i=1}^{255} \bigvee_{j=1}^{m} q_{kij}$$

- El trabajador k cumple sus metas individuales:

$$\varphi^k_{meta} = \varphi^k_{asistencia} \vee \varphi^k_{tarea}$$

Ahora podemos construir una fórmula para representar que todos los trabajadores cumplen con sus metas individuales:

$$\varphi_{meta} = \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi^i_{meta}$$

- Las tareas son individuales y pueden realizarse exclusivamente una vez:

$$\varphi_{exc} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{255} \bigwedge_{k=1}^{m} \left(q_{ijk} \to \left(\left(\bigwedge_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} \bigwedge_{j'=1}^{255} \neg q_{i'j'k} \right) \wedge \bigwedge_{\substack{j''=1 \\ j'' \neq j}}^{255} \neg q_{ij''k} \right) \right)$$

- Las tareas toman un día de trabajo (o en otras palabras, un trabajador sólo puede realizar una tarea al día):

$$\varphi_{1tarea} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{255} \bigwedge_{k=1}^{m} \left(q_{ijk} \to \bigwedge_{\substack{k'=1 \\ k' \neq k}}^{m} \neg q_{ijk'} \right)$$

- Las tareas no se pueden realizar de forma remota:

$$\varphi_{remoto} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{255} \bigwedge_{k=1}^{m} (q_{ijk} \to p_{ij})$$

Para concluir, basta con tomar

$$\varphi = \varphi_{\forall tareas} \wedge \varphi_{meta} \wedge \varphi_{exc} \wedge \varphi_{1tarea} \wedge \varphi_{remoto}$$

<u>Pauta</u> (6 pts.)

- 0.25 pts. por definir variables proposicionales.
- 0.5 pts. porque todas las tareas deben ser realizadas.
- 2 pts. porque todos los trabajadores cumplen sus metas individuales.
- 2 pts. porque todas las tareas son individuales y se realizan una vez.
- 0.5 pts. porque las tareas toman exactamente un día de trabajo.

- 0.5 pts. porque las tareas no se realizan de forma remota.
- 0.25 pts. por concluir que todas las restricciones anteriores son necesarias.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 4

¿Es válida la siguiente afirmación? Demuestre.

Todo gato es querido por al menos un perro.

Ningún perro quiere a un reptil.

Por lo tanto, ningún gato es reptil.

Solución

Definimos primero los siguientes predicados:

$$\begin{array}{cc} G(x)\text{: } x \text{ es un gato.} & P(x)\text{: } x \text{ es un perro.} \\ R(x)\text{: } x \text{ es reptil.} & Q(x,y)\text{: } x \text{ quiere a } y. \end{array}$$

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y (G(x) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y,x))) \quad (\varphi_1) \\ \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow \neg Q(x,y)) \quad (\varphi_2) \\ \hline \forall x (G(x) \rightarrow \neg R(x)) \quad (\psi) \end{array}$$

Queremos demostrar entonces que $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$. Lo haremos demostrando que el conjunto $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\psi\}$ es inconsistente usando resolución.

(1)	$\neg(\forall x(G(x) \to \neg R(x)))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg(\forall x(\neg G(x) \vee \neg R(x)))$	regla de implicancia en (1)
(3)	$\exists x(G(x) \wedge R(x))$	regla de De Morgan en (2)
(4)	$G(a) \wedge R(a)$	especificación existencial en (3)
(5)	$\forall x \exists y(G(x) \to (P(y) \wedge Q(y,x)))$	$\in \Sigma$
(6)	$\forall x \exists y(\neg G(x) \vee (P(y) \wedge Q(y,x)))$	regla de implicancia en (5)
(7)	$\forall x \exists y((\neg G(x) \vee P(y)) \wedge (\neg G(x) \vee Q(y,x)))$	distribuitividad en (6)
(8)	$\exists y((\neg G(a) \vee P(y)) \wedge (\neg G(a) \vee Q(y,a)))$	especificación universal en (7)
(9)	$(\neg G(a) \vee P(b)) \wedge (\neg G(a) \vee Q(b,a))$	especificación existencial en (8)
(10)	$\forall x \forall y(P(x) \wedge R(y) \to \neg Q(x,y))$	$\in \Sigma$
(11)	$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg R(y) \vee \neg Q(x,y))$	regla de implicancia y asociatividad en (10)
(12)	$\forall y(\neg P(b) \vee \neg R(y) \vee \neg Q(b,y))$	especificación universal en (11)
(13)	$\neg P(b) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(b,a)$	especificación universal en (12)
(14)	$\neg G(a) \vee Q(b,a)$	desde el conjunto de clausulas en (9)
(15)	$G(a)$	desde el conjunto de clausulas en (3)
(16)	$Q(b,a)$	resolución de $(14), (15)$
(17)	$\neg P(b) \vee \neg R(a)$	resolución de $(13), (16)$
(18)	$R(a)$	desde el conjunto de clausulas en (3)
(19)	$\neg P(b)$	resolución de $(17), (18)$
(20)	$\neg G(a) \vee P(b)$	desde el conjunto de clausulas en (9)
(21)	$\neg G(a)$	resolución de $(19), (20)$
(22)	$\square$	resolución de $(15), (21)$

Pauta (6 pts.)

- 0.5 pts. por definir los predicados.
- 0.5 pts. por modelar φ_1.
- 0.5 pts. por modelar φ_2.
- 0.5 pts. por modelar ψ.
- 0.5 pts. por plantear el problema como consecuencia lógica.
- 0.5 pts. por construir el conjunto Σ.
- 3 pts. por método de resolución.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.