PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 5

26 de octubre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado - B. Barías

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 19:59:59 del 3 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Una sucesión de números naturales es una secuencia $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$, posiblemente infinita, tal que $s_i \in \mathbb{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Decimos además que una sucesión es *monótona* si $s_i \leq s_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}$.

1. **(2 ptos.)** Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones monótonas finitas de números naturales es enumerable.
2. **(4 ptos.)** Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones monótonas infinitas de números naturales no es enumerable.

Solución

1. Considere una familia de conjuntos $\mathcal{S} = \{S_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, donde

   $$S_{ij} = \{s \mid s \text{ es una sucesión monótona finita de números naturales de largo } i \text{ y cuyos elementos suman } j\}, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

   Sea s una sucesión monótona finita de números naturales. Notemos que como s es finita, su largo es un natural, y la suma de sus elementos también es un natural. Luego, $s \in S_{ij}$ para algún $i, j \in \mathbb{N}$. Más aún, como cada sucesión tiene un único largo y suma, s está en un único S_{ij} para algún $i, j \in \mathbb{N}$. Bastaría entonces con listar todas las sucesiones en $\bigcup \mathcal{S}$ para demostrar que el conjunto de todas las sucesiones monótonas finitas de números naturales es enumerable.

   En primer lugar, notemos que $\mathcal{S}$ es enumerable; como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable, basta tomar una función $f : \mathcal{S} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(S_{ij}) = (i, j)$, la cual es claramente biyectiva. Luego, los elementos de $\mathcal{S}$ se pueden poner en una lista tal que todos aparecen una única vez.

   En segundo lugar, dado S_{ij}, su cantidad de elementos es finita: dada una sucesión $s \in S_{ij}$, como sus elementos deben sumar j, ninguno de ellos puede ser mayor a j. Tenemos entonces $j + 1$ posibilidades para cada uno de los i elementos de s, y luego la cantidad de posibles sucesiones está acotada por $(j + 1)^i$. Note que el razonamiento anterior considera todas las posibles sucesiones de largo i con elementos menores o iguales a j, y al limitarlas a las sucesiones monótonas que efectivamente suman j el número es aún menor (se deja como ejercicio calcularlo). Por lo tanto, los elementos de S_{ij} se pueden poner en una lista finita tal que todos aparecen una única vez.

   Dado lo anterior, podemos listar los elementos de $\mathcal{S}$ como sigue:

   - Para cada S_{ij} en la enumeración de $\mathcal{S}$:
     - Listamos todos los $s \in Sij$

Finalmente, por lo expuesto anteriormente, el conjunto de todas las sucesiones monótonas finitas de números naturales es enumerable.

Otro argumento posible es tomar los conjuntos de sucesiones de un largo dado:

$$\mathcal{S}_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} S_{ij}$$

Cada uno de estos conjuntos es enumerable: para listar sus elementos, basta con listar cada S_{ij} para cada suma j posible, los que ya argumentamos que son finitos. Es claro que el conjunto de todas las sucesiones monótonas finitas de números naturales corresponde a $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{S}_i$, y por lo tanto es una unión enumerable de conjuntos enumerables, con lo que concluimos que el conjunto es enumerable.

2. Por contradicción, supongamos que el conjunto dado es enumerable. Entonces, existe una lista infinita

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$$

donde cada sucesión monótona infinita de números naturales aparece exactamente una vez. Notemos que cada s_i es una secuencia de la forma

$$s_i = (s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} \ldots), \text{ con } s_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Podemos visualizar la lista en la siguiente tabla:

Sucesión	Secuencia					
s_0	s_{00}	s_{01}	s_{02}	s_{03}	s_{04}	$\cdots$
s_1	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	$\cdots$
s_2	s_{20}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	$\cdots$
s_3	s_{30}	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}	$\cdots$
s_4	s_{40}	s_{41}	s_{42}	s_{43}	s_{44}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Considere una sucesión $s = (d_0, d_1, \ldots, d_i, \ldots)$ tal que

$$d_i = 1 + \sum_{j=0}^{i} s_{jj}$$

Vale decir, cada elemento d_i de esta sucesión es la suma de la diagonal hasta la fila i más 1. Por ejemplo, $d_2 = 1 + s_{00} + s_{11} + s_{22}$.

Es claro que s no aparece en la lista, pues difiere de cada s_i en el elemento i-ésimo. También es evidente que s es una sucesión infinita de números naturales. Por último, es fácil mostrar que s es monótona. Por simplicidad en la notación, demostraremos que

$\forall i \geq 1$ se tiene que $d_i \geq d_{i-1}$, lo cual es equivalente a la definición dada.

$$\begin{aligned}
d_i &= 1 + \sum_{j=0}^{i} s_{jj} \\
&= 1 + s_{ii} + \sum_{j=0}^{i-1} s_{jj} \\
&= s_{ii} + \left(1 + \sum_{j=0}^{i-1} s_{jj}\right) \\
&= s_{ii} + d_{i-1} \\
&\geq d_{i-1}
\end{aligned}$$

Encontramos entonces una sucesión monótona infinita de números naturales que no aparece en la lista, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que el conjunto dado no es enumerable.

Pauta (6 pts.)

1. Para el argumento de listar:
   - 1 pto. por dar la forma de listar las sucesiones.
   - 0.5 ptos. por argumentar que toda sucesión aparece en la lista.
   - 0.5 ptos. por argumentar que toda sucesión aparece una única vez.

   Para el argumento de unión enumerable:
   - 1 pto. por demostrar que el conjunto de sucesiones de largo i es enumerable.
   - 0.5 ptos. por argumentar que el conjunto de sucesiones es la unión enumerable de los conjuntos anteriores.
   - 0.5 ptos. por concluir que el conjunto es enumerable al ser la unión enumerable de conjuntos enumerables.
2. - 1 pto. por construir una sucesión usando los elementos de la lista.
   - 2 ptos. por demostrar que está en el conjunto (lo crucial es demostrar que es monótona).
   - 1 pto. por argumentar que no está en la lista.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, definimos la notación asintótica *o-chica* como

$$o(f) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\forall c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq c \cdot f(n))\}$$

1. **(0,5 ptos.)** ¿Qué representa la notación asintótica *o-chica*? ¿Qué relación establece entre las funciones involucradas? Contrástela con las notaciones asintóticas vistas en clase.
2. **(1 pto.)** Encuentre funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tales que $g \in o(f)$. Debe demostrar que cumplen con esta propiedad.
3. Dadas funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tales que $g \in o(f)$, demuestre que:
   a) **(1 pto.)** $g \in O(f)$
   b) **(3,5 ptos.)** $f \notin O(g)$

Solución

1. La notación *o-chica* representa una versión más fuerte o estricta de $\mathcal{O}$-*grande*, refiriéndose a que si $f \in o(g)$, entonces f crece mucho más lento que g. En este sentido, requiere que exista un n_0 para cada posible elección de constante $c \in \mathbb{R}^+$, no solo para un c específico.
2. Consideremos $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ dadas por

$$g(n) = n \quad f(n) = n^2$$

   Sea $c \in \mathbb{R}^+$ una constante cualquiera. Luego, como $c > 0$, cuando $n > 0$ se tiene

$$g(n) \leq c \cdot f(n) \quad \Leftrightarrow \quad n \leq c \cdot n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c} \leq n$$

   De esta inecuación deducimos que basta tomar $n_0 = \max\{1, \lceil \frac{1}{c} \rceil\}$ para cumplir la definición de *o-chica*. Concluimos que $g \in o(f)$.
3. a) Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tales que $g \in o(f)$. Por definición de *o-chica*, existen infinitos pares $(c, n_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}$ tales que para $n \geq n_0$, se cumple $g(n) \leq c \cdot f(n)$. Para demostrar $g \in \mathcal{O}(f)$ se requiere la existencia de al menos un par con tales características. Basta tomar $c = 1$ y su n_0 asociado para verificar el resultado.

   b) Demostraremos lo pedido por contradicción. Supongamos que f, g cumplen $g \in o(f)$ y supongamos que $f \in \mathcal{O}(g)$. Por definición de $\mathcal{O}$-*grande* existen $M \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$ se cumple

$$f(n) \leq M \cdot g(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M} f(n) \leq g(n)$$

Como $g \in o(f)$, para la constante $\frac{1}{M}$ debe existir $n_0' \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0'$ se tiene

$$g(n) \leq \frac{1}{M} f(n)$$

De ambas inecuaciones se obtiene que

$$g(n) = \frac{1}{M} f(n)$$

Como $g \in o(f)$, para una constante arbitraria C existe un natural n_0'' tal que para $n \geq n_0''$ se tiene $g(n) \leq C \cdot f(n)$. Luego, para $n \geq \text{máx}\{n_0', n_0''\}$ se cumple

$$g(n) \leq C \cdot f(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M} f(n) \leq C \cdot f(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M} \leq C$$

Dado que C es arbitraria, pero M es una constante fija específica para la definición de $\mathcal{O}$-*grande*, tomamos $C < \frac{1}{M}$. Como sabemos además que $\frac{1}{M} \leq C$, se obtiene una contradicción y concluimos que $f \notin \mathcal{O}(g)$.

Pauta (6 pts.)

1. - 0.5 ptos. por la explicación.
2. - 0.25 ptos. por proponer dos funciones que son un ejemplo correcto.
   - 0.25 ptos. por demostrar que cumplen la definición.
3. a) - 1 pto. por deducir un par de constantes que cumplen la definición.
   b) - 1.5 ptos. por obtener una relación entre f y g.
      - 1.0 pto. por usar *o-chica* para deducir relación entre constantes.
      - 1.0 pto. por escoger constante para llegar a la contradicción.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.