PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Interrogación 1

27 de Septiembre de 2021

Profesores: Marco Bucchi - Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- La duración de la interrogación es de 2 horas.
- Durante la evaluación **no puede** hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.
- Escriba sus respuestas con lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.

Pregunta 1 - Lógica de predicados (vista en clases)

Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ fórmulas en lógica de predicados con una variable libre. Demuestre que:

a) $\neg\forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg\varphi(x))$

b) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$

Solución

a) Sea $\mathcal{I}$ un interpretación cualquiera.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \neg\forall x(\varphi(x)) &\Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \forall x(\varphi(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\neg\varphi(x))
\end{aligned}$$

b) Sea $\mathcal{I}$ un interpretación cualquiera.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a), \text{ o} \\
& \ \text{existe } b \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \psi(b) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \text{ o } \mathcal{I} \models \exists x(\psi(x)) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))
\end{aligned}$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 1.5 pts por demostrar la dirección ($\Rightarrow$).
- 1.5 pts por demostrar la dirección ($\Leftarrow$).

b)
- 1.5 pts por demostrar la dirección ($\Rightarrow$).
- 1.5 pts por demostrar la dirección ($\Leftarrow$).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 - Lógica proposicional

Sea P un conjunto de variables proposicionales, $\Sigma \subseteq L(P)$ un conjunto de fórmulas en lógica proposicional, y $\varphi, \psi \in L(P)$ dos fórmulas en lógica proposicional. Demuestre que:

a) Si $\Sigma \models \varphi \to \psi$, entonces $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

b) Si φ es una tautología, se cumple que si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ entonces $\Sigma \models \psi$.

Solución

a) Por demostración directa, suponemos que $\Sigma \models \varphi \to \psi$, y buscamos demostrar que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

   Sea $\sigma : P \to \{0, 1\}$ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$. Como $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$, se cumple que $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 1$.

   Luego, de $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\Sigma \models \varphi \to \psi$, obtenemos que $\sigma(\varphi \to \psi) = 1$.

   Finalmente como $\sigma(\varphi) = 1$ y $\sigma(\varphi \to \psi) = 1$, necesariamente $\sigma(\psi) = 1$. Como σ es una valuación arbitraria, concluimos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

b) Por demostración directa, suponemos que φ es una tautología y que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Buscamos demostrar que $\Sigma \models \psi$.

   Sea $\sigma : P \to \{0, 1\}$ una valuación tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como φ es una tautología, necesariamente $\sigma(\varphi) = 1$.

   Luego, como $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 1$, obtenemos que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$.

   Finalmente como $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ y $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(\psi) = 1$, y como σ es una valuación arbitraria, concluimos que $\Sigma \models \psi$.

Pauta (6 pts.)

- 3.0 pts por a).
- 3.0 pts por b).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3 - Inducción estructural

En clases definimos el conjunto de las listas enlazadas sobre los naturales $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ como el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

El operador de *concatenación* de listas, denotado por $\circ$, recibe dos listas y retorna la lista que resulta de agregar todos los números de la segunda lista al final de la primera. Por ejemplo:

$$(\to 3 \to 4 \to 10) \circ (\to 2 \to 6) = \to 3 \to 4 \to 10 \to 2 \to 6$$

Definimos entonces el operador $\circ : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \times \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ inductivamente como:

1. $L \circ \varnothing = L$, con $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. $L \circ (L' \to k) = (L \circ L') \to k$, con $L, L' \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Note que el operador de concatenación es asociativo: $(L_1 \circ L_2) \circ L_3 = L_1 \circ (L_2 \circ L_3)$.

Por otra parte, el operador *reverso* $()^r : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ recibe una lista y retorna la lista que resulta de invertir el orden de sus elementos. Por ejemplo:

$$(\to 3 \to 4 \to 10 \to 7)^r = \to 7 \to 10 \to 4 \to 3$$

a) Defina inductivamente el operador reverso.

b) Demuestre por inducción estructural que dadas dos listas L_1 y L_2 se cumple que

$$(L_1 \circ L_2)^r = L_2^r \circ L_1^r$$

Solución

a) Definimos el operador reverso $()^r : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ inductivamente como:

   1. $\varnothing^r = \varnothing$
   2. $(L \to k)^r = \to k \circ L^r$, con $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

b) Para facilitar la demostración, considere el siguiente lema:

   <u>Lema:</u> Para toda lista $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ se cumple que $\varnothing \circ L = L$.

   <u>Demostración:</u> Por inducción estructural sobre L:

BI: Si $L = \varnothing$, entonces: $\varnothing \circ L = \varnothing \circ \varnothing = \varnothing = L$.

HI: Sea $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ tal que $\varnothing \circ L = L$.

TI: Debemos demostrar que $\varnothing \circ (L \to k) = L \to k$:

$$
\begin{aligned}
\varnothing \circ L &= L && \text{por hipótesis de inducción} \\
(\varnothing \circ L) \to k &= L \to k && \to k \text{ a ambos lados} \\
\varnothing \circ (L \to k) &= L \to k && \text{por definición de } \circ
\end{aligned}
$$

Ahora, sea $L_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ una lista cualquiera. Demostraremos la propiedad por inducción estructural sobre $L_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$:

BI: Si $L_2 = \varnothing$, entonces:

$$
\begin{aligned}
(L_1 \circ L_2)^r &= (L_1 \circ \varnothing)^r \\
&= {L_1}^r && \text{por definición de } \circ \\
&= \varnothing \circ {L_1}^r && \text{por lema} \\
&= {L_2}^r \circ {L_1}^r && \text{por definición de } ()^r
\end{aligned}
$$

HI: Sea $L_2 \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ tal que $(L_1 \circ L_2)^r = {L_2}^r \circ {L_1}^r$.

TI: Debemos demostrar que $(L_1 \circ (L_2 \to k))^r = (L_2 \to k)^r \circ {L_1}^r$:

$$
\begin{aligned}
(L_1 \circ L_2)^r &= {L_2}^r \circ {L_1}^r && \text{por hipótesis de inducción} \\
\to k \circ (L_1 \circ L_2)^r &= \to k \circ ({L_2}^r \circ {L_1}^r) && \to k \circ () \text{ a ambos lados} \\
((L_1 \circ L_2) \to k)^r &= \to k \circ ({L_2}^r \circ {L_1}^r) && \text{por definición de } ()^r \\
(L_1 \circ (L_2 \to k))^r &= \to k \circ ({L_2}^r \circ {L_1}^r) && \text{por definición de } \circ \\
&= (\to k \circ {L_2}^r) \circ {L_1}^r && \text{por asociatividad de } \circ \\
&= (L_2 \to k)^r \circ {L_1}^r && \text{por definición de } ()^r
\end{aligned}
$$

Pauta (6 pts.)

a)
- 1.0 pts por definición base.
- 2.0 pts por definición inductiva.

b)
- 0.5 pts BI.
- 0.5 pts HI.
- 2.0 pts TI.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4 - Conjuntos y Relaciones

Sea A un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto potencia de A. Considere el conjunto:

$$A^{\dagger} \;=\; \{\; \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A) \;\mid\; \mathcal{S} \text{ es una partición de } A \;\}$$

Es decir, $A^{\dagger}$ es el conjunto de todas las particiones de A.

Sea $\preceq$ una relación sobre $A^{\dagger}$ tal que dos particiones están relacionadas si cada conjunto de la primera partición está contenido en algún conjunto de la segunda partición.

Formalmente, para $\mathcal{S} \in A^{\dagger}$ y $\mathcal{S}' \in A^{\dagger}$:

$$\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}' \quad \text{si y solo si} \quad (\forall X \in \mathcal{S})(\exists X' \in \mathcal{S}')\; X \subseteq X'$$

Demuestre que la relación $\preceq$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Solución

Refleja: por demostrar que $\forall \mathcal{S} \in A^{\dagger}, \mathcal{S} \preceq \mathcal{S}$.

Sea $\mathcal{S} \in A^{\dagger}$. Debemos demostrar que $(\forall X \in \mathcal{S})(\exists X' \in \mathcal{S})\, X \subseteq X'$.
Sea entonces $X \in \mathcal{S}$. Tomando $X' = X$, es claro que $X' \in \mathcal{S}$ y que $X \subseteq X'$.

Antisimétrica: por demostrar que $\forall \mathcal{S}, \mathcal{S}' \in A^{\dagger}\; (\,(\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}' \wedge \mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}\,) \rightarrow \mathcal{S} = \mathcal{S}'\,)$:

Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ dos elementos arbitrarios de $A^{\dagger}$, tal que $\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}$. Debemos demostrar que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, o equivalentemente, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$:

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$: Dado $X \in \mathcal{S}$, debemos demostrar que $X \in \mathcal{S}'$. Como $\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}'$, sabemos que existe $X' \in \mathcal{S}'$ tal que $X \subseteq X'$. Demostraremos que $X' \subseteq X$, lo cual nos permite concluir que $X = X'$ y por lo tanto que $X \in \mathcal{S}'$.

Dado que $\mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}$, sabemos que existe un $X'' \in \mathcal{S}$ tal que $X' \subseteq X''$. Mostraremos que $X = X''$. Notemos que $X \neq \varnothing$, dado que $\mathcal{S}$ es una partición, y además que $X \subseteq X''$, pues $X \subseteq X' \subseteq X''$. Estos últimos dos puntos implican que $X \cap X'' \neq \varnothing$, y por definición de partición, podemos concluir entonces que $X = X''$, demostrando así que $X' \subseteq X$, y más importante aún, que $X \in \mathcal{S}'$.

$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$: análoga a la anterior.

Con esto, hemos demostrado que $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, concluyendo así que $\preceq$ es antisimétrica.

<u>**Transitiva:**</u>
Por demostrar que $\forall \mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in A^\dagger \; ((\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}' \land \mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}'') \rightarrow (\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}''))$:

Sean $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}''$ tres elementos arbitrarios de $A^\dagger$ tales que $\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}''$. Debemos demostrar que $\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}''$, o equivalentemente, $(\forall X \in \mathcal{S})(\exists X'' \in \mathcal{S}'')\, X \subseteq X''$.

Sea $X \in \mathcal{S}$. Dado que $\mathcal{S} \preceq \mathcal{S}'$, sabemos que existe un $X' \in \mathcal{S}'$ tal que $X \subseteq X'$. De igual forma, dado que $\mathcal{S}' \preceq \mathcal{S}''$, sabemos que existe un $X'' \in \mathcal{S}''$ tal que $X' \subseteq X''$. Dado que la relación $\subseteq$ es transitiva, podemos concluir que $X \subseteq X''$, demostrando así que $\preceq$ es transitiva.

Pauta (6 pts.)

- 2 pts. por demostrar cada una de las propiedades.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.