Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de octubre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.

Contenidos

¿Funciones... de nuevo?

Introducción

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular $\longrightarrow$ métodos
- Modelar $\longrightarrow$ simulación
- Estructuras de datos y algoritmos $\longrightarrow$ hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar $\longrightarrow$ MD5, SHA-1
- Contar

Introducción

¿Por qué queremos funciones en Ciencia de la Computación?

- Calcular $\longrightarrow$ métodos
- Modelar $\longrightarrow$ simulación
- Estructuras de datos y algoritmos $\longrightarrow$ hashing, map reduce, ordenamiento
- Encriptar $\longrightarrow$ MD5, SHA-1
- **¡Contar o indexar!**

Formalizaremos el concepto y lo aplicaremos.

Funciones

Definición

Sea f una relación binaria de A en B; es decir, $f \subseteq A \times B$.
Diremos que f es una **función** de A en B si dado cualquier elemento $a \in A$, si existe un elemento en $b \in B$ tal que afb, este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si afb, escribimos $b = f(a)$.

- b es la *imagen* de a.
- a es la *preimagen* de b.

Notación: $f : A \to B$

Funciones

Una función $f : A \to B$ se dice **total** si todo elemento en A tiene imagen.

- Es decir, si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $b = f(a)$.
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- De ahora en adelante, toda función será total a menos que se diga lo contrario.

Funciones

Ejemplos

Las siguientes relaciones son todas funciones de $\mathbb{N}_4$ en $\mathbb{N}_4$:

$$f_1 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$$
$$f_2 = \{(0,1),(1,1),(2,1),(3,1)\}$$
$$f_3 = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$$

¿Cuántas funciones $f : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}_4$ podemos construir?

También podemos definir funciones mediante expresiones que nos den el valor de $f(x)$.

Ejemplos

Las siguientes son definiciones para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 + 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \lfloor x + \sqrt{x} \rfloor$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Dado un conjunto A cualquiera, las siguientes son definiciones para funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$\forall a \in A, f_1(a) = \{a\}$$
$$\forall a \in A, f_2(a) = A \setminus \{a\}$$
$$\forall a \in A, f_3(a) = \varnothing$$

Definición

Diremos que una función $f : A \to B$ es:

1. **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos $x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Es decir, no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.

2. **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento $b \in B$ tiene preimagen. Es decir, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.

3. **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejercicio

Determine qué propiedades cumplen o no cumplen las siguientes funciones:

1. $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $\forall a \in A, f(a) = \{a\}$
2. $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $\forall a \in A, f(a) = \varnothing$
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_4$, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n \bmod 4$
4. $f : \mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}_4$, $\forall n \in \mathbb{N}_4, f(n) = (n + 2) \bmod 4$

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

- Recordemos que las relaciones (y por lo tanto las funciones) son conjuntos (de pares ordenados).
- Esto significa que podemos usar las operaciones de conjuntos.
  - Unión
  - Intersección
  - Complemento
  - ...
- Existen también operaciones exclusivas para relaciones (y funciones).

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dada una relación R de A en B, la **relación inversa** de R es una relación de B en A definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

Definición

Dada una función f de A en B, diremos que f es **invertible** si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la **composición** de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C.

Ejercicio

Demuestre la proposición.

Funciones

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f es biyectiva, entonces es invertible.

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Funciones

Una aplicación muy importante de las funciones es que nos permiten razonar sobre el tamaño de los conjuntos. Una propiedad interesante sobre los conjuntos finitos es la siguiente:

Principio del palomar

Se tienen m palomas y n palomares, con $m > n$. Entonces, si se reparten las m palomas en los n palomares, necesariamente existirá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar (matemático)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m > n$, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Principio del palomar (para sobreyectividad)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m < n$, la función f no puede ser sobreyectiva.

Corolario

La única forma en que una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ sea biyectiva es que $m = n$.

Ejemplo

Si en una sala hay 8 personas, entonces este año necesariamente dos de ellas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Cardinalidad

Queremos resolver el problema de determinar el tamaño de un conjunto.

- Es decir, la cantidad de elementos que contiene.
- ¿Cómo lo hacemos?

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Simplemente contamos. . . tiene 6.

Cardinalidad

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

$$\begin{aligned} a &\to 1 \\ b &\to 2 \\ c &\to 3 \\ d &\to 4 \\ e &\to 5 \\ f &\to 6 \end{aligned}$$

Estamos estableciendo una *correspondencia* entre los elementos de A y los números naturales. . .

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es **equinumeroso** con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

Notemos que $\approx$ es una relación sobre conjuntos.

Teorema

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad

Podemos usar conceptos de las relaciones de equivalencia para hablar sobre el tamaño de los conjuntos.

- ¿Por ejemplo?
- Podemos tomar las clases de equivalencia inducidas por $\approx$.

Definición

La **cardinalidad** de un conjunto A es su clase de equivalencia bajo $\approx$:

$$|A| = [A]_{\approx}$$

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Es fácil notar que $A \approx \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Entonces, $|A| = [A]_{\approx} = [\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}]_{\approx}$.
- Pero nosotros le pusimos un nombre al último conjunto...

$$|A| = [6]_{\approx}$$

Formalizaremos esto y simplificaremos la notación.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que A es un conjunto **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n = \{0, \ldots, n-1\}$.

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

- Por simplicidad, diremos que $|A| = n$.
- También podremos decir que A tiene n elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

- $|A| = 6$
- A tiene 6 elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Lema

Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Esto implica que si A es un conjunto finito, entonces su cardinalidad es **estrictamente menor** que la de su conjunto potencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?
- Ya no podemos contar...
- ...pero sí podemos establecer una correspondencia como la que mostramos.
- ¿Cómo? ¡Con funciones!

Ejemplo

Sea $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números naturales pares.
¿Cuál conjunto es más grande, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{P}$?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

Ejercicio

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es enumerable si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

¿Cómo se justifica esta definición?

- ¿Cuál es la biyección?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

- Piense en un computador.

Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Matemáticas Discretas

Funciones y Cardinalidad

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

11 de octubre de 2023