Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2020

CONTROL 3

Indicaciones

- La duración del control es 1 hora y 30 minutos.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre, sección y número de lista en cada hoja de respuesta.
- Debe entregar una copia digital de cada pregunta por el buzón del curso, antes de las 23:59 horas del día del control.
- Debe preocuparse que la copia digital y su calidad sea legible. En caso de hacerla con papel y lápiz, se recomienda usar hojas blancas y un lápiz oscuro que sea visible en la versión digital. En caso de no ser legible, no podrá ser evaluada su solución.
- En caso de hacer el control fuera del horario, se recomienda tomar el tiempo (1 hora y 30 minutos) y entregarlo justo después de concluido el tiempo.
- Durante la evaluación puede hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Esta es una evaluación estrictamente individual y, por lo tanto, no puede compartir información con sus compañeros o usar material fuera de sus apuntes o slides del curso. En caso de hacerlo, el control no reflejará su progreso en el curso, viéndose perjudicada su formación personal y profesional.
- **Al comienzo de cada pregunta debe escribir la siguiente oración y firmarla:**

  "*Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta X fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad.*"

  En caso de no escribir la oración o no firmarla, su solución no será evaluada.

Pregunta 1

1. Sea A un conjunto no vacío y $R \subseteq A \times A$. Se define la clausura simétrica de R como una relación R^s tal que (1) $R \subseteq R^s$, (2) R^s es simétrica y (3) para toda relación R', si $R \subseteq R'$ y R' es simétrica, entonces $R^s \subseteq R'$. Recuerde que denotamos por R^r y R^t a la clausura refleja y transitiva de R, respectivamente.

   Demuestre que para todo $R \subseteq A \times A$ se tiene que $((R^r)^s)^t$ es una relación de equivalencia.

2. Sea A un conjunto infinito numerable. Se define el conjunto:

   $$\mathcal{C}(A) = \{R \subseteq A \times A \mid R \text{ es una relación de equivalencia}\}.$$

   Demuestre que $\mathcal{C}(A)$ es siempre no numerable.

   Hint: Piense en las clases de equivalencia de cada R.

Pregunta 2

Considere el siguiente algoritmo A para analizar en esta pregunta:

input : Un grafo dirigido $G = (V, E)$ y nodos $u, v \in V$.
output: 1 si existe un camino entre u y v, 0 en caso contrario.

1 $i = 1$;
2 $M = E$;
3 **while** $i \leq |V|$ **do**
4   **if** $(u, v) \in M$ **then**
5   **return** 1;
6   **else**
7         $M = M \circ E$;
8         $i = i + 1$;
9   **end**
10 **end**
11 **return** 0;

Utilice la función de tamaño de input $|((V, E), u, v)| = |V| = n$. Además, considere que el costo computacional para la línea 7 (esto es, computar $M \circ E$) es $\Theta(n^3)$ y para todas las demás lineas el costo es constante. Encuentre una función f tal que peor-caso$_A(n) \in \Theta(f(n))$ y una función g tal que mejor-caso$_A(n) \in \Theta(g(n))$. Demuestre ambos resultados.