Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

29 de Agosto de 2016
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- Use lápiz pasta. Por el uso de lápiz mina usted pierde el derecho a recorreción.
- Rellene sus datos en cada hoja de respuesta que utilice.
- Cada pregunta debe responderse en hojas separadas.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Problemas

Pregunta 1

Considere la siguiente definición del conjunto $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ de las listas enlazadas sobre los naturales:

Definición. El conjunto de las listas enlazadas sobre los naturales $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.
2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $L \to k \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Por ejemplo, las siguientes son listas en $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$:

$$\varnothing$$
$$\to 5 \to 7 \to 1 \to 0 \to 3 \to 1 \to 4$$
$$\to 10 \to 6$$

Considere además la siguiente definición de igualdad entre listas:

Definición. Dados $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, entonces

$$L_1 \to k_1 = L_2 \to k_2 \text{ si y sólo si } L_1 = L_2 \text{ y } k_1 = k_2$$

a) [1.5 pts.] Defina inductivamente la función $sum : \mathcal{L}_\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que recibe una lista como argumento y entrega la suma de sus elementos.

b) [1.5 pts.] Defina el operador $Suf : \mathcal{L}_\mathbb{N} \setminus \{\varnothing\} \to \mathcal{L}_\mathbb{N}$ (operador sufijo) que recibe una lista no vacía, y entrega la lista que resulta de sacarle el primer elemento.

c) [3 pts.] Demuestre que si $L_1, L_2 \neq \varnothing$, se cumple que $L_1 = L_2$ si y sólo si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$.

Solución

a) 1. $sum(\varnothing) = 0$

2. $sum(L \to k) = sum(L) + k$, con $L \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Pauta

- 0.5 pts. por caso base.
- 1 pto. por caso inductivo.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) 1. $Suf(\to k) = \varnothing$, con $k \in \mathbb{N}$.

2. $Suf(L \to k) = Suf(L) \to k$, con $L \neq \varnothing \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Pauta

- 0.5 pts. por caso base.
- 1 pto. por caso inductivo.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

c) La dirección ($\Rightarrow$) es trivial. Demostraremos la otra dirección.
PD: Si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.

- **BI:** Sean $L_1 =\to k$ y $L_2 =\to j$ dos listas tales que $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$. Por definición de sum, tenemos que $sum(\to k) = sum(\to j)$, y luego $k = j$. Concluimos que $L_1 = L_2$.

- **HI:** Dadas dos listas L_1 y L_2 cualquiera, supongamos que si $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $sum(L_1) = sum(L_2)$, entonces $L_1 = L_2$.
- **TI:** Sean ahora dos listas $L_1 \to k$ y $L_2 \to j$. Queremos demostrar que si $Suf(L_1 \to k) = Suf(L_2 \to j)$ y $sum(L_1 \to k) = sum(L_2 \to j)$, entonces $L_1 \to k = L_2 \to j$. Supongamos entonces que $Suf(L_1 \to k) = Suf(L_2 \to j)$ y $sum(L_1 \to k) = sum(L_2 \to j)$. Por definición de ambas funciones, obtenemos que

  $$Suf(L_1) \to k = Suf(L_2) \to j$$
  $$sum(L_1) + k = sum(L_2) + j$$

  Por igualdad de listas, sabemos que necesariamente $Suf(L_1) = Suf(L_2)$ y $k = j$. Usando este último resultado, obtenemos también que $sum(L_1) = sum(L_2)$. Luego, por HI tenemos que $L_1 = L_2$, y como $k = j$ concluimos que $L_1 \to k = L_2 \to j$. $\square$

Pauta

- 0.5 pts. por dirección ($\Rightarrow$).
- 0.75 ptos. por base de inducción.
- 0.5 ptos. por hipótesis de inducción.
- 1.25 ptos. por tesis de inducción.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 2

En menos de un mes es el matrimonio de su mejor amigo y usted se ha ofrecido para ayudarlo con la gestión de la cena nupcial. Dada la gran cantidad de invitados, sus profesores de Matemáticas Discretas le recomiendan modelar el problema utilizando lógica proposicional.

En concreto, usted debe construir una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

φ es satisfacible

$\Leftrightarrow$

existe una forma de asignar a todos los asistentes del matrimonio entre las mesas disponibles.

Para construir su fórmula usted debe considerar los siguientes aspectos:

- Existen n personas invitadas al matrimonio, las personas 1 y 2 son los novios, mientras que las personas $3, \ldots, n$ son invitados.
- Existen m mesas disponibles en el salón de eventos.
- Toda persona debe conocer por lo menos a otras tres personas con las que se sienta.

- Las mesas tienen una capacidad máxima para cinco personas.

De manera adicional, la chismosa amiga de la novia le entrega una lista $\mathcal{L}$ con las distintas ex parejas asistentes al matrimonio. Puede asumir que los elementos de la lista son de la forma (i, j), donde la persona i es ex pareja de la persona j. Como podrá intuir, ningún invitado puede sentarse con su ex pareja en una mesa.

Además, usted descargó una tabla $\mathcal{F}$ de Facebook para reconocer quiénes son conocidos entre sí. La estructura de esta tabla es similar a la anterior. Finalmente, usted no puede olvidar que los novios deben sentarse juntos durante la celebración.

Solución

En primer lugar, debemos definir nuestro conjunto P de variables proposicionales:

$$P = \{\ p_{ij} \mid \text{La persona } i \text{ se sienta en la mesa } j\ \}$$

Luego, consideremos las siguientes fórmulas:

- Todo invitado debe ser asignado a una mesa:

$$\varphi_{todos} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} p_{ij}$$

- Un invitado no puede estar en dos mesas a la vez:

$$\varphi_{unica} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \left(p_{ij} \rightarrow \left(\bigwedge_{j' \neq i} \neg p_{ij'} \right) \right)$$

- Los invitados conocen por lo menos a tres personas con las que se sientan:

$$\varphi_{conocidos} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \left(p_{ij} \rightarrow \left(\bigvee_{\substack{(i,i_1)\in\mathcal{F} \\ (i,i_2)\in\mathcal{F} \\ (i,i_3)\in\mathcal{F}}} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j} \wedge p_{i_3 j}) \right) \right)$$

- Las mesas tienen capacidad máxima para cinco personas:

$$\varphi_{capacidad} =$$

$$\bigwedge_{l=1}^{m} \left(\bigwedge_{\substack{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5)\in\{1,\ldots,n\}^5 \\ i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4\neq i_5}} \left(p_{i_1 l} \wedge p_{i_2 l} \wedge p_{i_3 l} \wedge p_{i_4 l} \wedge p_{i_5 l} \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{k\neq i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4\neq i_5 \\ 0<k\leq n}} \neg p_{kl} \right) \right) \right)$$

- Una persona no puede sentarse con su ex pareja:

$$\varphi_{exparejas} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} \left(p_{ij} \rightarrow \left(\bigwedge_{(i,i')\in\mathcal{L}} \neg p_{i'j} \right) \right)$$

- Los novios deben sentarse juntos:

$$\varphi_{novios} = \bigvee_{j=1}^{m} (p_{1j} \wedge p_{2j})$$

Para concluir, basta con tomar

$$\varphi = \varphi_{todos} \wedge \varphi_{unica} \wedge \varphi_{conocidos} \wedge \varphi_{capacidad} \wedge \varphi_{exparejas} \wedge \varphi_{novios}$$

Pauta (6 pts.)

- 0.5 pts. por definir las variables.
- 0.5 pts. porque toda persona debe ser asignada a una mesa.
- 0.5 pts. porque una persona no puede estar en dos mesas a la vez.
- 1 pts. porque los invitados tienen que sentarse con por lo menos tres personas que conozcan.
- 1 pts. porque haya una capacidad máxima de cinco personas por mesa.
- 1 pts. porque las exparejas no pueden estar juntas.
- 1 pts. porque los novios van juntos en la misma mesa.
- 0.5 pts. por concluir que la conjunción de todas esas restricciones es la fórmula que se busca.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 3

a) Demuestre que $C = \{\uparrow\}$ es funcionalmente completo, donde $\uparrow$ es un conectivo binario definido por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b) Sea P un conjunto de variables proposicionales y $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(P)$. Demuestre que si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$, entonces:

$$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots))$$

es tautología.

Solución

a) Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo el conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\uparrow$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.
TI: Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C:
i) $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi') \equiv (\varphi' \uparrow \varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.
ii) $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi' \equiv ((\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi'))$
Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Pauta

- 0.5 pts. por caso base.
- 0.5 pts. por hipóstesis de inducción.
- 1 pts. por primer paso inductivo.
- 1 pts. por segundo paso inductivo.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

b) *Demostración.* Supongamos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi$. Luego por teorema visto en clases obtenemos que

$$\begin{aligned}
\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\} &\equiv \square && \text{Por teorema de clases.}\\
\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \wedge \neg\psi &\equiv \square && \text{Por regla de conjunción.}\\
\neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \wedge \neg\psi\right) &\equiv T_o && \text{Negando ambos lados.}\\
\bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i \vee \psi &\equiv T_o && \text{Regla de morgan.}\\
\neg\varphi_1 \vee (\neg\varphi_2 \vee (\ldots(\neg\varphi_n \vee \psi)\ldots)) &\equiv T_o && \text{Asociatividad.}\\
\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\ldots(\varphi_n \rightarrow \psi)\ldots)) &\equiv T_o && \text{Regla de implicancia.}
\end{aligned}$$

$\square$

Pauta

- 0.5 pts. por aplicar teorema de inconsistencia.
- 0.5 pts. por aplicar regla de conjunción sobre conjuntos.
- 0.5 pts. por negar la equivalencia lógica.
- 0.5 pts. por aplicar regla de morgan.
- 0.5 pts. por aplicar regla de asociatividad.
- 0.5 pts. por aplicar regla de implicancia.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.

Pregunta 4

¿Son válidas las siguiente afirmaciones? Demuestre.

a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

b) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$

c) $\forall x\exists y(\varphi(x, y)) \equiv \exists x\forall y(\varphi(x, y))$

Solución

Por definición de equivalencia lógica, $\varphi \equiv \psi$ si para toda estructura $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi$.

a) Por demostrar $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$, es decir, para toda estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

- ($\Rightarrow$) Suponiendo que $\mathfrak{A} \models \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ es interpretada como verdadera, por definición $P(a) \wedge Q(a)$ es verdad para todo $a \in Dom(\mathfrak{A})$, luego (por semántica del conectivo), $P(a)$ y $Q(a)$ son verdad.

  Como $P(a)$ y $Q(a)$ son verdad para todo elemento del dominio, por definición de interpretación, $\mathfrak{A} \models \forall xP(x)$ y $\mathfrak{A} \models \forall xQ(x)$, luego, $\mathfrak{A} \models \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$.

- ($\Leftarrow$) Suponiendo que $\mathfrak{A} \models \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ es interpretada como verdadera, por definición, $\mathfrak{A} \models \forall xP(x)$ y $\mathfrak{A} \models \forall xQ(x)$, entonces, $P(a)$ y $Q(a)$ son verdad para todo $a \in Dom(\mathfrak{A})$. Por semántica $P(a) \wedge Q(a)$ es verdad para todo elemento $a \in Dom(\mathfrak{A})$, entonces por definición, $\mathfrak{A} \models \forall x(P(x) \wedge Q(x))$.

De lo anterior podemos concluir que $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.

b) Por contraejemplo, bastaría encontrar una estructura $\mathfrak{B}$ tal que no cumpla que $\mathfrak{B} \models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N}, x \text{ es par}, x \text{ es impar}\rangle$

Se interpreta P y Q en la estructura:

- $P(x) = x$ es par
- $Q(x) = x$ es impar

Se tiene que $\mathfrak{B} \not\models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ya que no existe ningún natural que sea par e impar a la vez, pero $\mathfrak{B} \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, ya que existe un natural par y existe un natural impar.

Se ha encontrado una estructura tal que no cumpla que $\mathfrak{B} \models \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, por lo que hemos demostrado que $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ no es válida.

c) Sea $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z} \rangle$ y $\varphi(x, y) = M(x, y)$, donde $M(x, y) =$ x es menor que y.

Luego se tiene que $\mathfrak{Z} \models \forall x \exists y(\varphi(x, y))$, ya que para cualquier entero k existe un entero menor.

Sin embargo $\mathfrak{Z} \not\models \exists x \forall y(\varphi(x, y))$, ya que no existe ningún entero tal que sea menor que todo el resto.

Al igual que el caso anterior se ha encontrado una estructura que no cumple $\mathfrak{Z} \models \forall x \exists y(\varphi(x, y)) \Leftrightarrow \mathfrak{Z} \models \exists x \forall y(\varphi(x, y))$, por lo que hemos demostrado que $\forall x \exists y(\varphi(x, y)) \equiv \exists x \forall y(\varphi(x, y))$ no es válida.

Pauta

- (a) 2 pts.
  - 1 pts. por cada dirección de la demostración
- (b) y (c) 2 pts. cada una.
  - 1 pts. por encontrar una estructura.
  - 1 pts. por demostración con contraejemplo.
- Puntajes intermedios a criterio del corrector.