Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2017

INTERROGACION 1

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Demuestre que toda fórmula proposicional φ es lógicamente equivalente a una fórmula en CNF.

Pregunta 2

Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}_{\text{primos}}$ definida como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\text{primos}}(\text{dom}) :=&\quad \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(=) :=&\quad n = m \quad \text{si, y solo si,} \quad n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(\leq) :=&\quad n \leq m \quad \text{si, y solo si,} \quad n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(P) :=&\quad P(n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \text{n es un número primo.}
\end{aligned}
$$

Recuerde que un número se dice primo si es mayor a 1 y no es divisible por ningún número exceptuando el número 1 y él mismo.

1. (2 puntos) Para la siguiente fórmula de predicados:

   $$\alpha \ := \ \forall x.\ P(x) \rightarrow \big(\exists y.\ x \leq y \wedge \neg(x = y) \wedge P(y)\big)$$

   diga si es verdadera o falsa en la interpretación $\mathcal{I}_{\text{primos}}$ explicando su significado. Justifique su respuesta.

2. (4 puntos) Escriba la siguiente fórmula en lógica de predicados sobre $\mathcal{I}_{\text{primos}}$.

   "Para todo par de números primos distintos de 2 y 3,
   existe un número entre ellos que no es primo."

   Justifique su respuesta.

Pregunta 3

Suponga que tiene un grupo de n niñas $m_1, \ldots, m_n$ y n niños $h_1, \ldots, h_n$, y una *relación de gusto* que viene dado por una lista L de pares (m_i, h_j) lo cual significa que "a la niña m_i le gusta el niño h_j". Un *emparejamiento* E entre el grupo de niñas y niños es un listado de pares (m_i, h_j) tal que cada niña es emparejada con exactamente un niño y no pueden haber niñas que estén emparejadas con el mismo niño y viceversa. Decimos que un emparejamiento E es *perfecto* para las relaciones de gusto L si cada vez que m_i

esta emparejado con h_j en E se tiene que a m_i le gusta el niño h_j en L. En otras palabras, el emparejamiento es perfecto si las niñas son emparejadas con los niños siguiendo el gusto de las niñas. Dado un listado de relación de gusto L, el problema consiste en determinar si existe un emparejamiento perfecto para L.

Para cualquier grupo de n niñas y n niños, y cualquier relación de gusto L, construya un conjunto de fórmulas proposicionales Σ tal que existe un emparejamiento perfecto para L si, y solo si, Σ es satisfacible.

Pregunta 4

Para dos valuaciones $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\bar{v}' = (v_1', \ldots, v_n')$, decimos que $\bar{v} \leq \bar{v}'$ si para todo $i \leq n$ se cumple que $v_i \leq v_i'$, considerando el orden entre valores de verdad como $0 \leq 1$. También, decimos que una fórmula proposicional $\varphi(\bar{p})$ con variables $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es *monótona* si cumple que para toda valuación $\bar{v}$ y $\bar{v}'$, si $\bar{v} \leq \bar{v}'$ entonces $\varphi(\bar{v}) \leq \varphi(\bar{v}')$. En otras palabras, φ es monótona si al cambiar algunos valores de la valuación de 0 a 1, el valor de verdad "solo puede subir o quedar igual". Por ejemplo, $\varphi_1(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$ es monótona pero $\varphi_2(p, q) = \neg p \vee q$ no lo es, ya que $\varphi_2(0, 0) = 1$ y $\varphi_2(1, 0) = 0$. Por último, decimos que φ es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula si solo esta compuesta por variables proposicionales, 0, 1, conjunciones y disyunciones. Por ejemplo, φ_1 es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula, pero φ_2 no lo es.

1. (2 puntos) Demuestre que toda $\{\wedge, \vee\}$-fórmula es monótona. Para esto demuestre que si dos $\{\wedge, \vee\}$-fórmulas φ_1 y φ_2 son monótonas, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ y $\varphi_1 \vee \varphi_2$ también son monótonas.

2. (4 puntos) Demuestre que si una fórmula φ es monótona, entonces existe una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula φ' tal que φ es lógicamente equivalente a φ'.