

# Matemáticas Discretas

## Lógica de predicados

Nicolás Alvarado  
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías  
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo  
bugedo@uc.cl

**Gabriel Diéguez**  
**gsdieguez@ing.puc.cl**

Departamento de Ciencia de la Computación  
Escuela de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile

8 de septiembre de 2021

# Objetivos

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

# Contenidos

## ① Objetivos

## ② Introducción

## ③ Sintaxis

- Predicados
- Conectivos

## ④ Semántica

- Interpretaciones
- Equivalencia lógica
- Consecuencia lógica

## ⑤ Reglas de inferencia

## ⑥ Conclusiones

# Introducción

Bueno y... ¿qué paso con este problema?

## Problema

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

---

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Lo resolveremos a lo largo de esta clase.

# Introducción

Imaginemos que sólo sabemos que la siguiente afirmación es verdadera:

## Afirmación

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.

Ninguna de las reglas de lógica proposicional nos permiten concluir lo siguiente:

## Conclusión

El número 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

# Introducción

Todo número par puede ser escrito como suma de dos números primos.  
16 es par.

---

Por lo tanto, 16 puede ser escrito como suma de dos números primos.

¿Qué le falta a nuestra lógica proposicional?

- Objetos (no sólo proposiciones)
- Predicados
- Cuantificadores: **para todo** ( $\forall$ ) o **existe** ( $\exists$ )

# Introducción

Esta lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales.
- Enteros, racionales, reales, etc.
- Grafos, árboles, palabras, matrices, etc.
- Estructuras en general.

Podemos definir propiedades como:

- Para todo número  $n$ , existe un  $m$  tal que  $n \geq m$ .
- Para todo par de vértices  $v_1$  y  $v_2$ , si  $(v_1, v_2) \in E$ , entonces  $(v_2, v_1) \in E$ .

# Predicados

## Ejemplos

- $x$  es par
- $x \leq y$
- $x + y = z$

¿Cuáles de estos ejemplos son **proposiciones**?  
¡Ninguno!

Pero si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

- 2 es par, 3 es par, ....
- $2 \leq 3$ ,  $6 \leq 0$ ,  $10 \leq 5$ , ...
- $10 + 5 = 15$ ,  $3 + 8 = 1$ , ...



# Predicados

## Definición

Un predicado  $P(x)$  es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

## Ejemplos

- $P(x) := x$  es par
- $R(x) := x$  es primo
- $M(x) := x$  es mortal

# Predicados

## Definición

Para un predicado  $P(x)$  y un valor  $a$ , la **valuación**  $P(a)$  es el valor de verdad del predicado  $P(x)$  en  $a$ .

## Ejemplos

$P(x) := x$  es par     $R(x) := x$  es primo     $M(x) := x$  es mortal

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

# Predicados

## Definición

Un predicado  $n$ -ario  $P(x_1, \dots, x_n)$  es una afirmación con  $n$  variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

## Definición

Para un predicado  $n$ -ario  $P(x_1, \dots, x_n)$  y valores  $a_1, \dots, a_n$ , la **valuación**  $P(a_1, \dots, a_n)$  es el valor de verdad de  $P$  en  $a_1, \dots, a_n$ .

## Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$ ,  $S(x, y, z) := x + y = z$ ,  $Padre(x, y) := x$  es padre de  $y$

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

# Predicados y Dominio

## Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

## Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$ ,  $S(x, y, z) := x + y = z$ ,  $Padre(x, y) := x$  es padre de  $y$

$O(x, y) \quad := x \leq y \quad \text{sobre } \mathbb{N}$

$S(x, y, z) \quad := x + y = z \quad \text{sobre } \mathbb{Q}$

$Padre(x) \quad := x \text{ es padre de } y \quad \text{sobre el conjunto de todas las personas}$

# Predicados y Dominio

## Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

## Notación

- Para un predicado  $P(x_1, \dots, x_n)$  diremos que  $x_1, \dots, x_n$  son **variables libres** de  $P$ .
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación.

# Predicados compuestos

## Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado, o la negación ( $\neg$ ), conjunción ( $\wedge$ ), disyunción ( $\vee$ ), implicancia ( $\rightarrow$ ) o bidireccional ( $\leftrightarrow$ ) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

## Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

## Ejemplos

$P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$
- $P'(4) = 0$

# Cuantificador universal

## Definición

Sea  $P(x, y_1, \dots, y_n)$  un predicado compuesto con dominio  $D$ . Definimos el cuantificador universal

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \forall x (P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde  $x$  es la variable cuantificada y  $y_1, \dots, y_n$  son las variables libres.

## Definición

Para  $b_1, \dots, b_n$  en  $D$ , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **para todo**  $a$  en  $D$  se tiene que  $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$ , y 0 en otro caso.

# Cuantificador universal

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $O'(y) := \forall x(O(x, y)) \Rightarrow O'(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \forall y(O(x, y)) \Rightarrow O''(0) = \forall y(O(0, y))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P'_0 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$



# Cuantificador existencial

## Definición

Sea  $P(x, y_1, \dots, y_n)$  un predicado compuesto con dominio  $D$ . Definimos el cuantificador existencial

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \exists x(P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde  $x$  es la variable cuantificada y  $y_1, \dots, y_n$  son las variables libres.

## Definición

Para  $b_1, \dots, b_n$  en  $D$ , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **existe**  $a$  en  $D$  tal que  $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$ , y 0 en otro caso.

# Cuantificador existencial

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $O'(y) := \exists x(O(x, y)) \Rightarrow O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y)) \Rightarrow O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \wedge O(z, y) \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \Rightarrow O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

# Es posible combinar cuantificadores

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{Z}$ :

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(x, y)))$

# Predicados compuestos

## (re)Definición

Decimos que un predicado es compuesto (o también **fórmula**) si es:

- un predicado básico,
- la negación ( $\neg$ ), conjunción ( $\wedge$ ), disyunción ( $\vee$ ), implicancia ( $\rightarrow$ ), bidireccional ( $\leftrightarrow$ ) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuantificación universal ( $\forall$ ) o existencial ( $\exists$ ) de un predicado compuesto.

## (re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \stackrel{?}{=} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del dominio y la **interpretación** del símbolo  $\leq$ .

# Interpretaciones

## Notación

Desde ahora, para un dominio  $D$  diremos que:

- $P(x_1, \dots, x_n)$  es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, \dots, x_n)$  es el predicado sobre  $D$ .

## Definición

Sean  $P_1, \dots, P_m$  símbolos de predicados.

Una **interpretación**  $\mathcal{I}$  para  $P_1, \dots, P_m$  está compuesta de:

- un dominio  $D$  que denotaremos  $\mathcal{I}(dom)$  y
- un predicado  $P_i^D$  que denotaremos por  $\mathcal{I}(P_i)$  para cada símbolo  $P_i$ .

## Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos  $P(x)$  y  $O(x, y)$ ?

$$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$$

$$\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x$$

$$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$$

$$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$$

# Interpretaciones

## Definición

Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula e  $\mathcal{I}$  una interpretación de los símbolos en  $\varphi$ . Diremos que  $\mathcal{I}$  **satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(\text{dom})$ :

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  es verdadero al interpretar cada símbolo en  $\varphi$  según  $\mathcal{I}$ .

## Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos  $P(x)$  y  $O(x, y)$ ?

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}_1(\text{dom}) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(\text{dom}) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$



# Interpretaciones

## Definición

Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula e  $\mathcal{I}$  una interpretación de los símbolos en  $\varphi$ . Diremos que  $\mathcal{I}$  **satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(\text{dom})$ :

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  es verdadero al interpretar cada símbolo en  $\varphi$  según  $\mathcal{I}$ .

Si  $\mathcal{I}$  **no satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(\text{dom})$  lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \not\models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

# Equivalencia lógica

## Definición

Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  y  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que  $\varphi$  y  $\psi$  son **lógicamente equivalentes**:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación  $\mathcal{I}$  y para todo  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(\text{dom})$  se cumple:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

## Caso especial

Si  $\varphi$  y  $\psi$  son oraciones (no tienen variables libres), entonces:

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi$$

# Equivalencia lógica

## Observación

Todas las equivalencias de lógica proposicional son equivalencias en lógica de predicados.

## Ejemplos

Para fórmulas  $\varphi$ ,  $\psi$  y  $\theta$  en lógica de predicados:

- 1 **Conmutatividad:**  $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
- 2 **Asociatividad:**  $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
- 3 **Idempotencia:**  $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
- 4 **Doble negación:**  $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
- 5 **Distributividad:**  $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
- 6 **De Morgan:**  $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$
- 7 ...

## Ejemplos

Las siguientes fórmulas también son lógicamente equivalentes:

$$\textcircled{1} \quad \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))$$

$$\textcircled{2} \quad \forall x(P(x)) \rightarrow \exists y(R(y)) \equiv \neg \exists y(R(y)) \rightarrow \neg \forall x(P(x))$$

# Equivalencia lógica

Tenemos nuevas equivalencias además de las ya mencionadas:

## Teorema

Sea  $\varphi(x), \psi(x)$  fórmulas con  $x$  su variable libre. Entonces:

$$\neg \forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg \varphi(x))$$

$$\neg \exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg \varphi(x))$$

$$\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$$

$$\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$$

¿Qué nos dicen estos teoremas?

## Ejercicio

Demuestre los teoremas.

# Equivalencia lógica

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \models \neg \forall x(\varphi(x)) &\Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \forall x(\varphi(x)) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\neg \varphi(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a), \text{ o} \\ &\quad \text{existe } b \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \psi(b) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \text{ o } \mathcal{I} \models \exists x(\psi(x)) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))\end{aligned}$$

## Ejercicio

¿Son ciertas las siguientes equivalencias?

- $\forall x(\exists y(\varphi(x, y))) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(\varphi(x, y))) \times$
- $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \forall x(\varphi(x)) \vee \forall x(\psi(x)) \times$
- $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x)) \times$

# Consecuencia lógica

Las siguientes definiciones nos ayudan a extender el concepto de consecuencia lógica.

## Definición

Para un conjunto  $\Sigma$  de fórmulas, decimos que  $\mathcal{I}$  satisface  $\Sigma$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(dom)$  si:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ para toda } \varphi \in \Sigma$$

Notación:  $\mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$



# Consecuencia lógica

## Definición

Una fórmula  $\varphi$  es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas  $\Sigma$ :

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación  $\mathcal{I}$  y  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(\text{dom})$  se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \dots, a_n) \text{ entonces } \mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

# Consecuencia lógica

## Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))\} \models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \checkmark$
- $\{\exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))\} \models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \times$
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \models \exists x(\varphi(x)) \checkmark$
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x, y)))\} \models \exists x(\forall y(\varphi(x, y))) \times$

¿Existe algún algoritmo que nos permita resolver este problema? ¿Qué tal nuestro sistema deductivo de lógica proposicional?

# Reglas de inferencia

**Además** de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

1. Especificación universal:

$$\frac{\forall x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. Generalización universal:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para un } a \text{ arbitrario}}{\forall x(\varphi(x))}$$

# Reglas de inferencia

**Además** de las reglas de inferencia de lógica proposicional (resolución y factorización), podemos considerar las siguientes reglas:

3. Especificación existencial:

$$\frac{\exists x(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. Generalización existencial:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x(\varphi(x))}$$

## Ejemplos

- Por especificación universal, de  $\mathbb{N} \models \forall x(x \geq 0)$  podemos deducir que  $1 \geq 0$ .
- Por especificación existencial, de  $\mathbb{N} \models \exists x(x \geq 0)$ , podemos deducir que existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq 0$ .
- Sea  $n \in \mathbb{N}$  un número arbitrario, por definición de los números naturales sabemos que  $n \geq 0$ , luego por generalización universal obtenemos que  $\mathbb{N} \models \forall x(x \geq 0)$ .
- Por generalización existencial, de  $1 \geq 0$  podemos deducir que  $\mathbb{N} \models \exists x(x \geq 0)$ .

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

## Ejercicio

¿Es válido el siguiente argumento? Modele y demuestre usando un sistema deductivo.

- **Premisa 1:** Todos los hombres son mortales.
- **Premisa 2:** Sócrates es hombre.
- **Conclusión:** Sócrates es mortal.

Finalmente, podemos establecer la noción de argumento válido.

## Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $H(x) := x$  es hombre
- $M(x) := x$  es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\frac{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)) \quad H(s)}{M(s)}$$

## Ejercicio

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(H(x) \rightarrow M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s)\} \models M(s)$$

Consideremos  $\Sigma = \{\forall x(\neg H(x) \vee M(x)), H(s), \neg M(s)\}$ :

- (1)  $\forall x(\neg H(x) \vee M(x)) \in \Sigma$
- (2)  $\neg H(s) \vee M(s)$  especificación universal de (1)
- (3)  $H(s) \in \Sigma$
- (4)  $M(s)$  resolución de (2), (3)
- (5)  $\neg M(s) \in \Sigma$
- (6)  $\square$  resolución de (4), (5)



- La lógica de predicados permite extender la lógica proposicional a estructuras más complejas.
- En general, esta lógica nos permite cuantificar elementos dentro de un dominio y establecer relaciones entre estos.
- A las “valuaciones” en lógica de predicados les llamamos interpretaciones, y se componen de un dominio mas un conjunto de predicados.
- Es posible extender el método de resolución a la lógica de predicados, para esto se incluyen nuevas reglas de inferencia.

# Preguntas abiertas

- ¿Existe un algoritmo eficiente que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?
- ¿Existe un algoritmo que resuelva satisfacibilidad para lógica de predicados?

# Matemáticas Discretas

## Lógica de predicados

Nicolás Alvarado  
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías  
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo  
bugedo@uc.cl

**Gabriel Diéguez**  
**gsdieguez@ing.puc.cl**

Departamento de Ciencia de la Computación  
Escuela de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile

8 de septiembre de 2021