PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas

INTERROGACION 1

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Sea A un conjunto no vacío y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria. Demuestre que:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Donde R^t es la clausura transitiva de R y R^i es la relación R compuesta i-veces.

Pregunta 2

Sea A un conjunto finito y $\sim_1, \sim_2 \subseteq A \times A$ dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que $\sim_1 \cap \sim_2$ es una relación de equivalencia.
2. Sea $\sim = \sim_1 \cap \sim_2$. Demuestre que para toda clase de equivalencia $X \in A/\sim$ existen dos clases de equivalencia $X_1 \in A/\sim_1$ y $X_2 \in A/\sim_2$ tal que $X = X_1 \cap X_2$.

Pregunta 3

Sea A un conjunto no vacío y 2^A el conjunto potencia de A. Considere el conjunto:

$$A^\dagger = \{S \in 2^{2^A} \mid \text{para todo } X, Y \in S, \text{ si } X \subseteq Y, \text{ entonces } X = Y\}$$

En otras palabras, $A^\dagger$ contiene todos los $S \in 2^{2^A}$ tal que no existen dos conjuntos distintos X e Y en S con $X \subseteq Y$.

Se define la relación $R \subseteq A^\dagger \times A^\dagger$ tal que $(S, S') \in R$ si para todo $X \in S$, existe un $X' \in S'$ tal que $X \subseteq X'$. Formalmente:

$$(S, S') \in R \quad \text{si, y solo si,} \quad \forall X \in S.\ \exists X' \in S'.\ X \subseteq X'$$

Demuestre que la relación R es un orden parcial.

Pregunta 4

Sea A un conjunto finito y $f : A \to A$ una biyección. A partir de f, se define la relación $R_f \subseteq A \times A$ como:

$$(a, b) \in R_f \quad \text{si, y solo si,} \quad \text{existe un } n > 0 \text{ tal que } f^n(a) = b$$

donde $f^n = f \circ \overset{n\text{-veces}}{\cdots} \circ f$. En otras palabras, f^n corresponde a componer la función f n-veces.

Demuestre que la relación R_f es una relación de equivalencia.