

# Matemáticas Discretas

## Teoría de números y Criptografía

Nicolás Alvarado  
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías  
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo  
bugedo@uc.cl

**Gabriel Diéguez**  
**gsdieguez@uc.cl**

Departamento de Ciencia de la Computación  
Escuela de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de noviembre de 2023

# Objetivos

- 1 Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
- 2 Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
- 3 Aplicar propiedades y resultados de aritmética modular al estudio de números primos, congruencias y criptografía.

# Contenidos

- 1 Objetivos
- 2 Aritmética modular
- 3 Teoremas de Fermat
- 4 Máximo común divisor
- 5 Inversos modulares
- 6 Ecuaciones de congruencia
- 7 Teorema Chino del Resto
- 8 Criptografía
- 9 RSA

# Bibliografía

- Apuntes Luis Dissett, capítulo 11.
- Rosen: capítulo 4.

# Recordemos. . .

## Definición

La relación *divide*  $a$ , denotada por  $|$ , sobre los enteros sin el 0, es una relación tal que  $a$  está relacionado con  $b$  si y sólo si  $b$  es múltiplo de  $a$ :

$a|b$  si y sólo si  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = ka$ .

$$3|9$$

$$18|72$$

$$7 \nmid 9$$

$$2|-4$$

# Recordemos. . .

## Definición

La relación *equivalencia módulo  $n$* , denotada por  $\equiv_n$ , sobre los enteros, es una relación tal que  $a$  está relacionado con  $b$  si y sólo si  $n|(b - a)$ :

$$\begin{aligned} a &\equiv_n b \text{ si y sólo si } n|(b - a) \\ a &\equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (b - a) = kn. \end{aligned}$$

Por ejemplo, dado  $n = 7$ :

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4 \qquad -3 \equiv_7 4$$

# Recordemos. . .

- La relación  $\equiv_n$  es una relación de equivalencia.
- Podemos tomar el conjunto cociente generado por ella sobre  $\mathbb{Z}$ .
- Usando las clases de equivalencia, definimos la suma y la multiplicación.

## Definición

Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ , definimos

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} / \equiv_n$$

y sus operaciones

$$\begin{aligned}[i] + [j] &= [i + j] \\ [i] \cdot [j] &= [i \cdot j]\end{aligned}$$

# Recordemos. . .

Por simplicidad, renombramos las clases de equivalencia como los números que representan.

## Ejemplo

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Calcule  $37 + 18$  y  $26 \cdot 37$ .



# Recordemos. . .

## Ejemplo

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Calcule  $37 + 18$  y  $26 \cdot 37$ .

$$37 + 18 = [37] + [18] = [37 + 18] = [55] = [0]$$

$$26 \cdot 37 = [26] \cdot [37] = [26 \cdot 37] = [962] = [2]$$

# Aritmética modular

Dados dos enteros  $a$  y  $n$ , siempre podemos expresar  $a$  en términos de  $n$  como  $a = \alpha \cdot n + \beta$ , donde  $\alpha = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$  es la división entera de  $a$  por  $n$ , y  $\beta$  es el resto de esa división, con  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  y  $\beta \geq 0$ .

## Ejemplo

Dados  $a = 3$  y  $n = 2$ , podemos escribir

$$a = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \cdot 2 + 1 = 1 \cdot 2 + 1$$

## Definición

La operación **módulo**  $n$  entrega el resto de la división por  $n$ .  
Se escribe  $a \bmod n$ .

## Ejemplo

$$3 \bmod 2 = 1$$

# Aritmética modular

Con esta operación podemos redefinir la suma y la multiplicación en  $\mathbb{Z}_n$ :

$$[i] + [j] = (i + j) \bmod n$$

$$[i] \cdot [j] = (i \cdot j) \bmod n$$

Una observación importante es que siempre se cumple que

$$0 \leq a \bmod n < n$$

- ¿Por qué?

# Aritmética modular

## Teorema

$a \equiv_n b$  si y sólo si  $a \bmod n = b \bmod n$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Aritmética modular

## Teorema

$a \equiv_n b$  si y sólo si  $a \bmod n = b \bmod n$ .

En primer lugar, sabemos que podemos escribir  $a$  y  $b$  en términos de  $n$ :

$$a = \alpha \cdot n + a \bmod n \quad (1)$$

$$b = \gamma \cdot n + b \bmod n \quad (2)$$

donde  $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$  son los resultados de las divisiones enteras.

( $\Leftarrow$ ) Suponemos que  $a \bmod n = b \bmod n$ . Por demostrar:  $a \equiv_n b$ .

Si restamos (2)  $-$  (1) obtenemos  $b - a = (\gamma - \alpha) \cdot n$ , de donde es claro que  $n \mid (b - a)$ , pues  $(\gamma - \alpha) \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, se cumple que  $a \equiv_n b$ .

## Teorema

$a \equiv_n b$  si y sólo si  $a \bmod n = b \bmod n$ .

( $\Rightarrow$ ) Por contrapositivo, suponemos que  $a \bmod n \neq b \bmod n$  (3). Por demostrar:  $a \not\equiv_n b$ .

Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $a \bmod n < b \bmod n$  (4). Si restamos (2) – (1) obtenemos  $b - a = (\gamma - \alpha) \cdot n + (b \bmod n - a \bmod n)$ . Como

$$0 \leq a \bmod n, b \bmod n < n$$

por (4) se tiene que  $1 \leq (b \bmod n - a \bmod n) \leq b \bmod n < n$ . Por lo tanto,  $n \nmid (b - a)$ , de donde concluimos que  $a \not\equiv_n b$ .

# Aritmética modular

## Corolario

$$a \equiv_n a \bmod n$$

## Ejercicio

Demuestre el corolario.

## Corolario

$$a \equiv_n a \bmod n$$

Como sabemos que  $a \bmod n < n$ , se tiene que  $\lfloor \frac{a \bmod n}{n} \rfloor = 0$ . Luego, si expresamos  $a \bmod n$  en términos de  $n$ :

$$a \bmod n = 0 \cdot n + (a \bmod n) \bmod n$$

$$a \bmod n = (a \bmod n) \bmod n$$

y por el teorema anterior,  $a \equiv_n a \bmod n$ .



## Teorema

Si  $a \equiv_n b$  y  $c \equiv_n d$ , entonces

- $(a + c) \equiv_n (b + d)$
- $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Teorema

Si  $a \equiv_n b$  y  $c \equiv_n d$ , entonces

- $(a + c) \equiv_n (b + d)$
- $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$

Como  $a \equiv_n b$ , por definición sabemos que  $n \mid (b - a)$ , y nuevamente por definición tenemos que  $b - a = k_1 \cdot n$ . Si despejamos  $b$ , y procedemos análogamente desde  $c \equiv_n d$ :

$$b = a + k_1 \cdot n \tag{1}$$

$$d = c + k_2 \cdot n \tag{2}$$

## Teorema

Si  $a \equiv_n b$  y  $c \equiv_n d$ , entonces  $(a + c) \equiv_n (b + d)$ .

$$b = a + k_1 \cdot n \quad (1)$$

$$d = c + k_2 \cdot n \quad (2)$$

Sumamos (1) y (2):

$$b + d = a + c + (k_1 + k_2) \cdot n$$

$$\Leftrightarrow (b + d) - (a + c) = k_3 \cdot n$$

$$\Leftrightarrow n \mid (b + d) - (a + c)$$

$$\Leftrightarrow a + c \equiv_n b + d$$

# Aritmética modular

## Teorema

Si  $a \equiv_n b$  y  $c \equiv_n d$ , entonces  $(a \cdot c) \equiv_n (b \cdot d)$ .

$$b = a + k_1 \cdot n \quad (1)$$

$$d = c + k_2 \cdot n \quad (2)$$

Multiplicamos (1) y (2):

$$\begin{aligned} b \cdot d &= (a + k_1 \cdot n)(c + k_2 \cdot n) \\ \Leftrightarrow &= a \cdot c + (a \cdot k_2 + c \cdot k_1 + n \cdot k_1 \cdot k_2) \cdot n \\ \Leftrightarrow &b \cdot d - a \cdot c = k_4 \cdot n \\ \Leftrightarrow &n \mid b \cdot d - a \cdot c \\ \Leftrightarrow &a \cdot c \equiv_n b \cdot d \end{aligned}$$

# Aritmética modular

## Corolario

$$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a \cdot b \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$$

## Ejercicio

Demuestre el corolario.

## Ejercicio

Calcule  $(55 \cdot 26) \bmod 4$ .

## Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

# Aritmética modular

## Corolario

$$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a \cdot b \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$$

Por teorema anterior sabemos que  $a \equiv_n a \bmod n$  y  $b \equiv_n b \bmod n$ .

Aplicando el teorema de sumas y multiplicaciones:

$$\begin{aligned} a + b &\equiv_n (a \bmod n) + (b \bmod n) \\ \Leftrightarrow (a + b) \bmod n &= ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &\equiv_n (a \bmod n) \cdot (b \bmod n) \\ \Leftrightarrow (a \cdot b) \bmod n &= ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n \end{aligned}$$

## Ejercicio

Calcule  $(55 \cdot 26) \bmod 4$ .

$$\begin{aligned}(55 \cdot 26) \bmod 4 &= (55 \bmod 4 \cdot 26 \bmod 4) \bmod 4 \\ &= (3 \cdot 2) \bmod 4 \\ &= 6 \bmod 4 \\ &= 2\end{aligned}$$

## Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Sabemos que un número entero  $n$  se puede representar como

$$n = d_k \cdot 10^k + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0 \quad (1)$$

donde  $d_i$  es el dígito  $i$ -ésimo de  $n$ . Por ejemplo:

$$1347 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 7$$

Ahora, tenemos que  $n$  será divisible por 3 si y sólo si  $n \bmod 3 = 0$ .



## Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Tomamos mod 3 en (1) y usamos el teorema de suma y multiplicación:

$$\begin{aligned}n \bmod 3 &= (d_k \cdot 10^k + \cdots + d_1 \cdot 10 + d_0) \bmod 3 \\&= ((d_k \cdot 10^k) \bmod 3 + \cdots + (d_1 \cdot 10) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\&= ((d_k \bmod 3 \cdot 10^k \bmod 3) \bmod 3 + \cdots \\&\quad + (d_1 \bmod 3 \cdot 10 \bmod 3) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3\end{aligned}$$

# Aritmética modular

## Ejercicio

Demuestre que un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Notemos que  $\forall k \geq 1, 10^k \bmod 3 = 1$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} n \bmod 3 &= ((d_k \bmod 3 \cdot 1) \bmod 3 + \cdots \\ &\quad + (d_1 \bmod 3 \cdot 1) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= ((d_k \bmod 3) \bmod 3 + \cdots \\ &\quad + (d_1 \bmod 3) \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= (d_k \bmod 3 + \cdots + d_1 \bmod 3 + d_0 \bmod 3) \bmod 3 \\ &= (d_k + \cdots + d_1 + d_0) \bmod 3 \end{aligned}$$

Luego,  $n \bmod 3 = 0$  si y sólo si  $(d_k + \cdots + d_1 + d_0) \bmod 3 = 0$ ; es decir, si la suma de los dígitos de  $n$  es divisible por 3.

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Aritmética modular

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

Nos pondremos en dos casos.

Caso 1:  $a \geq 0$ . Se hará la demostración por inducción sobre el valor de  $a$ .

BI:  $a = 0 \rightarrow 0^p = 0 \equiv_p 0$

$$a = 1 \rightarrow 1^p = 1 \equiv_p 1$$

HI: Suponemos que  $a^p \equiv_p a$ . Notemos que esto implica que  $p \mid a^p - a$ .

TI: Por demostrar:  $(a + 1)^p \equiv_p (a + 1)$ , o equivalentemente, que

$$p \mid (a + 1)^p - (a + 1), \text{ con } 2 \leq a + 1 \quad (1)$$

# Aritmética modular

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

$$\text{PD: } p \mid (a+1)^p - (a+1), \text{ con } 2 \leq a+1 < p. \quad (1)$$

Por el teorema del binomio, sabemos que  $(a+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k$ , con

$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ . Desarrollamos la parte derecha de (1):

$$\begin{aligned} (a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1) \end{aligned}$$

# Aritmética modular

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k - (a+1) \\&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p - (a+1) \\&= \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + 1 + a^p - a - 1 \\&= (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k\end{aligned}$$

# Aritmética modular

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

Tenemos entonces que

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Por HI, sabemos que  $p \mid a^p - a$ . Por demostrar:  $p \mid \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$ .

Demostraremos que  $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \mid \binom{p}{k}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \binom{p}{k} &= \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)(p-k)!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} \end{aligned}$$

# Aritmética modular

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

Tenemos entonces que

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!}$$

Como los coeficientes binomiales son enteros, el numerador debe ser divisible por el denominador. Como  $p$  es primo y  $k < p$ , sabemos que entre los factores de  $k!$  no puede haber divisores de  $p$ , por lo que necesariamente

$$\frac{(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} \in \mathbb{Z}, \text{ y entonces}$$

$$\binom{p}{k} = p \cdot \alpha, \text{ con } \alpha \in \mathbb{Z}, \text{ y por lo tanto } p \mid \binom{p}{k}.$$



## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

En conclusión, tenemos que

$$p \mid (a+1)^p - (a+1)$$

y por lo tanto

$$(a+1)^p \equiv_p (a+1)$$

como queríamos demostrar.

Se sigue entonces por inducción el teorema planteado para  $a \geq 0$ .

## Teorema (Fermat)

Si  $p$  es un número primo, para cualquier entero  $a$  se cumple que  $a^p \equiv_p a$ .

Caso 2:  $a < 0$ . Sabemos que  $a \equiv_p a \bmod p$ , y por teorema de multiplicación  $a^p \equiv_p (a \bmod p)^p$ . Ahora, como  $a \bmod p \geq 0$ , corresponde al caso 1 recién demostrado, y por lo tanto  $(a \bmod p)^p \equiv_p a \bmod p$ . Finalmente, tenemos que

$$a^p \equiv_p (a \bmod p)^p \equiv_p a \bmod p \equiv_p a$$

y entonces  $a^p \equiv_p a$ .

# Aritmética modular

## Corolario (Fermat)

Si  $p$  es un número primo y  $a$  es un entero que no es múltiplo de  $p$ , entonces  $a^{p-1} \equiv_p 1$ .

## Ejercicio

Demuestre el corolario.

## Corolario (Fermat)

Si  $p$  es un número primo y  $a$  es un entero que no es múltiplo de  $p$ , entonces  $a^{p-1} \equiv_p 1$ .

Por el teorema anterior:

$$a^p \equiv_p a \Rightarrow p \mid a^p - a \Rightarrow a^p - a = k \cdot p \quad (1)$$

Notemos que  $a \mid a^p - a$ , y por lo tanto  $a \mid k \cdot p$ . Como  $p$  es primo y  $a$  no es múltiplo de  $p$ , necesariamente  $a \mid k$ . Dividiendo (1) por  $a$ :

$$a^{p-1} - 1 = \frac{k}{a} \cdot p, \text{ con } \frac{k}{a} \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto:

$$p \mid a^{p-1} - 1 \Rightarrow 1 \equiv_p a^{p-1} \Rightarrow a^{p-1} \equiv_p 1$$

# Máximo común divisor

## Definición (de colegio)

Dados dos números  $a$  y  $b$ , su **máximo común divisor**, denotado como  $MCD(a, b)$ , es el máximo natural  $n$  tal que  $n|a$  y  $n|b$ .

¿Cómo podemos calcularlo?

# Máximo común divisor

## Teorema (Algoritmo de Euclides)

Si  $b > 0$ , entonces  $MCD(a, b) = MCD(b, a \bmod b)$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Máximo común divisor

## Teorema (Algoritmo de Euclides)

Si  $b > 0$ , entonces  $MCD(a, b) = MCD(b, a \bmod b)$ .

Demostraremos que un entero  $c$  divide a  $a$  y a  $b$  si y sólo si divide a  $b$  y  $a \bmod b$ . De esto se concluye el teorema.

Sabemos que  $a = k \cdot b + a \bmod b$  (1).

( $\Rightarrow$ ) Suponemos que  $c \mid a$  y  $c \mid b$ . Si despejamos  $a \bmod b$  desde (1), obtenemos que  $a \bmod b = a - k \cdot b$ , de donde se concluye que  $c \mid a \bmod b$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponemos que  $c \mid b$  y  $c \mid a \bmod b$ . De (1) se concluye que  $c \mid a$ .

# Máximo común divisor

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b, a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

## Ejercicio

Calcule  $MCD(403, 156)$ .



# Máximo común divisor

Entonces:

$$MCD(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ MCD(b, a \bmod b) & b > 0 \end{cases}$$

## Ejercicio

Calcule  $MCD(403, 156)$ .

$$\begin{aligned} MCD(403, 156) &= MCD(156, 403 \bmod 156) = MCD(156, 91) \\ &= MCD(91, 156 \bmod 91) = MCD(91, 65) \\ &= MCD(65, 91 \bmod 65) = MCD(65, 26) \\ &= MCD(26, 65 \bmod 26) = MCD(26, 13) \\ &= MCD(13, 26 \bmod 13) = MCD(13, 0) \\ &= 13 \end{aligned}$$

# Máximo común divisor

Un resultado importante relacionado al MCD:

## Teorema (Identidad de Bézout)

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , entonces existen  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que

$$\text{MCD}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

- El máximo común divisor de  $a, b$  se puede escribir como una **combinación lineal** de  $a$  y  $b$ .
- $s$  y  $t$  se conocen como los **coeficientes de Bézout** de  $a$  y  $b$ .
  - No necesariamente son únicos.
- Para demostrar el teorema, vamos a extender el algoritmo de Euclides para que, además del MCD de  $a$  y  $b$ , nos entregue algún par de coeficientes de Bézout.

# Máximo común divisor

## Algoritmo de Euclides extendido

Sea  $a \geq b$ .

- 1 Definimos una sucesión  $\{r_i\}$  como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- 2 Definimos sucesiones  $\{s_i\}, \{t_i\}$  tales que:

$$s_0 = 1, t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, t_1 = 1$$

$$r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$$

- 3 Calculamos estas sucesiones hasta un  $k$  tal que  $r_k = 0$ .
- 4 Entonces,  $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$ .

# Máximo común divisor

## Ejercicio

Demuestre que

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i$$

$$t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

# Máximo común divisor

En la sucesión definimos que  $r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$ . Escribimos  $r_{i-1}$  como división de  $r_i$ :

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \bmod r_i \quad (1)$$

$$r_{i-1} = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1} \quad (2)$$

En la sucesión también definimos que  $r_{i-1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b$  (3). Reemplazamos (3) en la parte izquierda de (2) y despejamos  $r_{i+1}$ :

$$s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b = \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i + r_{i+1}$$

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i$$

# Máximo común divisor

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot r_i$$

Como  $r_i = s_i \cdot a + t_i \cdot b$ :

$$r_{i+1} = s_{i-1} \cdot a + t_{i-1} \cdot b - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot (s_i \cdot a + t_i \cdot b)$$

$$r_{i+1} = \left( s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i \right) \cdot a + \left( t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i \right) \cdot b$$

Y como  $r_{i+1} = s_{i+1} \cdot a + t_{i+1} \cdot b$ :

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i$$

$$t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

# Máximo común divisor

## Algoritmo de Euclides extendido

Sea  $a \geq b$ .

- ① Definimos una sucesión  $\{r_i\}$  como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- ② Definimos sucesiones  $\{s_i\}, \{t_i\}$  tales que:

$$s_0 = 1, \quad t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, \quad t_1 = 1$$

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i, \quad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

- ③ Calculamos estas sucesiones hasta un  $k$  tal que  $r_k = 0$ .
- ④ Entonces,  $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$ .

# Máximo común divisor

## Ejercicio

Dados  $a = 60$  y  $b = 13$ , use el algoritmo para calcular  $MCD(a, b)$  y  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$ .



# Máximo común divisor

## Ejercicio

Dados  $a = 60$  y  $b = 13$ , use el algoritmo para calcular  $MCD(a, b)$  y  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$ .

Inicialmente:  $r_0 = a = 60 \quad s_0 = 1 \quad t_0 = 0$

$$r_1 = b = 13 \quad s_1 = 0 \quad t_1 = 1$$

Entonces:  $r_2 = r_0 \bmod r_1 = 60 \bmod 13 = 8$

$$s_2 = s_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor \cdot s_1 = 1 - 4 \cdot 0 = 1$$

$$t_2 = t_0 - \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor \cdot t_1 = 0 - 4 \cdot 1 = -4$$

$$r_3 = r_1 \bmod r_2 = 13 \bmod 8 = 5$$

$$s_3 = s_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \cdot s_2 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$t_3 = t_1 - \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor \cdot t_2 = 1 - 1 \cdot -4 = 5$$

# Máximo común divisor

## Ejercicio

Dados  $a = 60$  y  $b = 13$ , use el algoritmo para calcular  $MCD(a, b)$  y  $s, t \in \mathbb{Z}$  tales que  $MCD(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$ .

$$\begin{array}{lll} r_0 = 60 & s_0 = 1 & t_0 = 0 \\ r_1 = 13 & s_1 = 0 & t_1 = 1 \\ r_2 = 8 & s_2 = 1 & t_2 = -4 \\ r_3 = 5 & s_3 = -1 & t_3 = 5 \\ r_4 = 3 & s_4 = 2 & t_4 = -9 \\ r_5 = 2 & s_5 = -3 & t_5 = 14 \\ r_6 = 1 & s_6 = 5 & t_6 = -23 \\ r_7 = r_5 \bmod r_6 = 2 \bmod 1 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} MCD(60, 13) &= r_6 = 1 \\ &= s_6 \cdot a + t_6 \cdot b = 5 \cdot 60 + (-23) \cdot 13 \end{aligned}$$

# Inversos modulares

## Definición

$b$  es **inverso** de  $a$  en módulo  $n$  si  $a \cdot b \equiv_n 1$ .

Podemos denotarlo como  $a^{-1}$ . Ojo: no es lo mismo que  $\frac{1}{a}$ .

## Ejemplo

1337 es inverso de 3 en módulo 4010.

- ¿Siempre existe el inverso modular?
  - No. Por ejemplo, 2 no tiene inverso en módulo 4.
- ¿Bajo qué condiciones  $a$  tiene inverso en módulo  $n$ ?
- ¿Cómo podemos calcularlo?

# Inversos modulares

## Teorema

$a$  tiene inverso en módulo  $n$  si y sólo si  $MCD(a, n) = 1$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

En este caso, diremos que  $a$  y  $n$  son *primos relativos* (o coprimos o primos entre sí).

# Inversos modulares

## Teorema

$a$  tiene inverso en módulo  $n$  si y sólo si  $MCD(a, n) = 1$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $a$  tiene inverso en módulo  $n$ , digamos  $b$ . Por demostrar:  $MCD(a, n) = 1$ .

Como  $b$  es el inverso de  $a$  en módulo  $n$ , se cumple que  $a \cdot b \equiv_n 1$ , y por lo tanto  $(a \cdot b) \bmod n = 1$ . Entonces, tenemos que  $a \cdot b = k \cdot n + 1$ , y despejando 1 obtenemos que  $1 = a \cdot b - k \cdot n$ . Luego, necesariamente cualquier entero  $c$  tal que  $c \mid a$  y  $c \mid n$  debe cumplir que  $c \mid 1$ , por lo que la única posibilidad es que  $c$  sea 1, y por lo tanto necesariamente  $MCD(a, n) = 1$ .

# Inversos modulares

## Teorema

$a$  tiene inverso en módulo  $n$  si y sólo si  $MCD(a, n) = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $MCD(a, n) = 1$ . Por demostrar:  $a$  tiene inverso en módulo  $n$ .

Si ejecutamos el algoritmo de Euclides extendido obtenemos  $s, t$  tales que

$$\begin{aligned} 1 &= s \cdot a + t \cdot n \\ \Leftrightarrow a \cdot s &= (-t) \cdot n + 1 \\ \Leftrightarrow a \cdot s \bmod n &= 1 \\ \Leftrightarrow a \cdot s &\equiv_n 1 \end{aligned}$$

Y entonces  $a$  tiene inverso en módulo  $n$ ,  $s$ .

Notemos que la demostración nos da un método para calcular el inverso:

- Usamos el algoritmo de Euclides extendido para encontrar  $s$  y  $t$  tales que  $1 = s \cdot a + t \cdot n$ .
- $s$  será el inverso de  $a$  en módulo  $n$ .

# Notación

Dados  $a, b, n \in \mathbb{Z}$ , si  $a \equiv_n b$  también podemos escribir:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Esta es la notación más usada en la literatura.



# Ecuaciones de congruencia

## Definición

Una **congruencia lineal** es una ecuación de la forma

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

donde  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $x$  es una variable.

## Ejemplos

$$3x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$4x \equiv 3 \pmod{6}$$

¿Cómo resolvemos estas ecuaciones? ¡Con inversos!

# Ecuaciones de congruencia

## Corolario (del teorema de los inversos)

Si  $a$  y  $n$  son primos relativos, entonces  $ax \equiv b \pmod{n}$  tiene solución en  $\mathbb{Z}_n$ .

## Ejercicio

Demuestre el corolario.

## Ejercicio

Resuelva las ecuaciones anteriores.

# Ecuaciones de congruencia

## Corolario (del teorema de los inversos)

Si  $a$  y  $n$  son primos relativos, entonces  $ax \equiv b \pmod{n}$  tiene solución en  $\mathbb{Z}_n$ .

Como  $a$  y  $n$  son primos relativos,  $a$  tiene inverso en módulo  $n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} ax &\equiv b \pmod{n} \text{ multiplicamos por } a^{-1} \\ \Leftrightarrow (a^{-1} \cdot a)x &\equiv (a^{-1} \cdot b) \pmod{n} \\ \Leftrightarrow x &\equiv (a^{-1} \cdot b) \pmod{n} \end{aligned}$$

# Ecuaciones de congruencia

## Ejercicio

Resuelva  $3x \equiv 2 \pmod{7}$ .

El inverso de 3 en módulo 7 es 5:  $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod{7}$ .

$$\begin{aligned}x &\equiv 5 \cdot 2 \pmod{7} \\&\equiv 10 \pmod{7} \\&\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

$x = 3$  es solución en  $\mathbb{Z}_7$ .

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

El General Tso se encontraba próximo a una nueva batalla, pero esta vez quería saber cuántos soldados de su ejército resultarían muertos, y para eso necesitaba contarlos.

Si los soldados se ordenaban en filas de 3, sobraban 2 soldados. Si se ordenaban en filas de 5, sobraban 3, y si se ordenaban en filas de 7, solo sobraban 2.

Si  $x$  es la cantidad de soldados en el ejército del General Tso:

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

¿Cómo resolvemos este sistema de ecuaciones?

# Teorema Chino del Resto

## Teorema

Sean  $m_1, m_2, \dots, m_n$  con  $m_i > 1$  tal que  $m_i, m_j$  son primos relativos con  $i \neq j$ . Para  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , el sistema de ecuaciones:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_n \pmod{m_n}$$

tiene una única solución en  $\mathbb{Z}_m$  con  $m = \prod_{i=1}^n m_i$

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Ejercicio

¿Cuántos soldados tiene el ejército del General Tso?

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

Dividiremos la demostración en existencia (i) y unicidad (ii) de la solución al sistema de ecuaciones.

i) Sea  $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  definimos

$$M_k = \frac{m}{m_k}$$

Dado que  $m_i, m_j$  son primos relativos para todo  $i \neq j$ , es claro que  $M_k$  y  $m_k$  son coprimos y por ende  $MCD(M_k, m_k) = 1$ . Por lo tanto,  $M_k$  tiene inverso  $M_k^{-1}$  en módulo  $m_k$ . Luego, definimos la solución  $x^*$  como:

$$x^* = a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1}$$



# Teorema Chino del Resto

Definimos la solución  $x^*$  como:

$$x^* = a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1}$$

¿Es  $x^*$  una solución para el sistema de ecuaciones?

Como  $M_j \equiv 0 \pmod{m_k}$  para todo  $j \neq k$ , entonces:

$$x^* \equiv a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1} \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_1 \cdot M_1 \cdot M_1^{-1} + \dots + a_k \cdot M_k \cdot M_k^{-1} + \dots + a_n \cdot M_n \cdot M_n^{-1} \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_k \cdot (M_k \cdot M_k^{-1}) \pmod{m_k}$$

$$x^* \equiv a_k \pmod{m_k}$$

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

- ii) Por demostrar: si el sistema de ecuaciones tiene solución, entonces esta es única. Por contradicción, sean  $u, v$  soluciones distintas al sistema de congruencias. Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  debe cumplirse que

$$u \equiv a_i \pmod{m_i}$$

$$v \equiv a_i \pmod{m_i}$$

y por transitividad de la equivalencia obtenemos que

$$u \equiv v \pmod{m_1}$$

$$u \equiv v \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$u \equiv v \pmod{m_n}$$

# Teorema Chino del Resto

## Lema

Sean  $m_1, m_2 > 1$  coprimos y  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Si  $u \equiv v \pmod{m_1}$  y  $u \equiv v \pmod{m_2}$ , entonces  $u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_2}$ .

Supongamos que  $u \equiv v \pmod{m_1}$  y  $u \equiv v \pmod{m_2}$ . Por definición, sabemos que existen con  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  tales que:

$$u - v = k_1 \cdot m_1 \tag{1}$$

$$u - v = k_2 \cdot m_2 \tag{2}$$

por definición en (2):

$$m_2 \mid u - v \tag{3}$$

aplicando esto a (1):

$$m_2 \mid k_1 \cdot m_1 \tag{4}$$

# Teorema Chino del Resto

Como  $m_1$  y  $m_2$  son primos relativos, se debe tener que  $m_2 \mid k_1$ , por lo que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$k_1 = k \cdot m_2 \quad (5)$$

y reemplazando en (1) obtenemos

$$u - v = k_1 \cdot m_1 \quad (6)$$

$$u - v = k \cdot m_2 \cdot m_1 \quad (7)$$

$$u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_2} \quad (8)$$

## Ejercicio

Generalice el lema para  $n$  equivalencias.

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

ii) Anteriormente obtuvimos que

$$u \equiv v \pmod{m_1}$$

$$u \equiv v \pmod{m_2}$$

$$\vdots$$

$$u \equiv v \pmod{m_n}$$

Dado que  $m_1, m_2, \dots, m_n$  son primos relativos, por el lema se debe tener que:

$$u \equiv v \pmod{m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n}$$

de donde se concluye que la solución es única en módulo  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ .

# Teorema Chino del Resto

## Ejercicio

¿Cuántos soldados tiene el ejército del General Tso?

$$m = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$M_1 = \frac{m}{3} = \frac{105}{3} = 35$$

$$M_2 = \frac{m}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

$$M_3 = \frac{m}{7} = \frac{105}{7} = 15$$

$$x = 2 \cdot 35 \cdot 35^{-1} \pmod{3} + 3 \cdot 21 \cdot 21^{-1} \pmod{5} + 2 \cdot 15 \cdot 15^{-1} \pmod{7}$$

$$x = 2 \cdot 35 \cdot 2 + 3 \cdot 21 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1$$

$$x = 140 + 63 + 30$$

$$x = 233$$

$$x \equiv_{105} 23$$

# Criptografía

- La criptografía es el estudio de métodos para enviar y recibir mensajes en privado.
- El interés en el área viene desde la antigüedad...

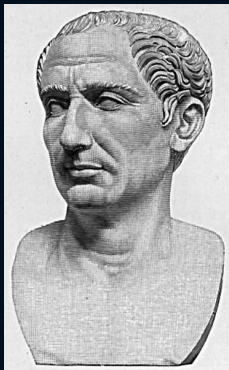


Figura: Julio César

# Criptografía

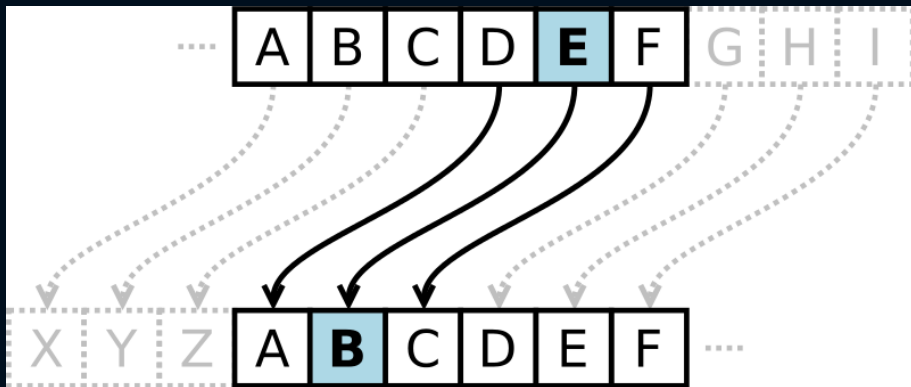


Figura: Julio César usaba este método para su correspondencia privada



# Criptografía

Con lo que sabemos, podemos formalizar esto...

## Cifrado del César

**Input:** letra  $M \in \{0, \dots, 26\}$

**Output:** letra cifrada  $C = (M + 3) \bmod 27$

## Ejercicio

Cifre el mensaje “holamundo”.

Cada letra del alfabeto corresponde a un número según la siguiente tabla:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

## Ejercicio

Cifre el mensaje “holamundo”.

Entonces:

$$h = 7 \rightarrow +3 = 10 = k$$

$$o = 15 \rightarrow +3 = 18 = r$$

$$l = 11 \rightarrow +3 = 14 = \text{ñ}$$

$$a = 0 \rightarrow +3 = 3 = d$$

$$m = 12 \rightarrow +3 = 15 = o$$

$$u = 21 \rightarrow +3 = 24 = x$$

$$n = 13 \rightarrow +3 = 16 = p$$

$$d = 3 \rightarrow +3 = 6 = g$$

$$o = 15 \rightarrow +3 = 18 = r$$

Por lo tanto, el mensaje cifrado es  
krñdoxpgr

# Criptografía

Podemos generalizar el cifrado del César:

## Cifrado del César generalizado

Dado un número  $d$ :

**Input:** letra  $M \in \{0, \dots, 26\}$

**Output:** letra cifrada  $C = (M + d) \bmod 27$

En criptografía y teoría de la comunicación, se habla de dos agentes A y B (Alice y Bob) que desean comunicarse.

- Alice desea enviar el mensaje  $M = \text{"holamundo"}$  a Bob privadamente.
- Elige un número  $d$  y envía  $C = (M + d) \bmod 27$ .
- Bob obtiene el mensaje  $C$ .

A  $M$  se le conoce como el **texto plano**, a  $C$  como el **texto cifrado** y a  $d$  como la **llave**.

# Criptografía

¿Como recupera Bob el mensaje original?

- Necesita la llave  $d$ .
- Con ella:  $M = (C - d) \bmod 27$ .

## Ejercicio

Demuestre que para todo  $d$  y  $M$ , si  $C = (M + d) \bmod 27$  y  $M' = (C - d) \bmod 27$ , entonces  $M = M'$ .

$$\begin{aligned}M' &= (C - d) \bmod 27 \\&= ((M + d) \bmod 27 - d) \bmod 27 \\&= ((M + d) \bmod 27 - d \bmod 27) \bmod 27 \\&= ((M + d - d) \bmod 27) \bmod 27 \\&= M \bmod 27 \\&= M\end{aligned}$$

Bob necesita la llave. . .

- ¿Cómo puede obtenerla?
- Alice se la envía.
- ¿Cómo se puede hacer esto de manera segura?
- Suponiendo que se puede, ¿es suficiente protección?

# Criptografía asimétrica de clave pública

Vimos que tener sólo una clave es muy inseguro. Estudiaremos ahora sistemas criptográficos que tienen las siguientes características:

- Se tienen dos funciones  $E$  y  $D$ .
- $E$  sirve para encriptar y  $D$  para desencriptar:  $D(E(M)) = M$ .
- $E$  no puede usarse para desencriptar:  $E(E(M)) \neq M$ .
- $E$  y  $D$  están relacionadas, pero es difícil descubrir  $D$  a partir de  $E$ .

Uno de estos sistemas es RSA, y es el que estudiaremos.

# El sistema criptográfico RSA

## Algoritmo RSA

- 1 Adivinar dos números primos distintos  $P$  y  $Q$ .
- 2 Calcular  $N = P \cdot Q$  y  $\phi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$ .
- 3 Sean  $e$  y  $d$  dos números tales que  $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$ .
- 4 Entonces:

$$E(M) = M^e \bmod N$$

$$D(M) = M^d \bmod N$$

Diremos que  $(e, N)$  es la **clave pública** y  $(d, N)$  es la **clave privada**.



# El sistema criptográfico RSA

Algunas observaciones importantes:

- La clave pública se calcula sólo una vez y se publica.
- Esto permite comunicarse de manera segura con varios clientes.

## Ejercicio

Aplice el algoritmo RSA para  $P = 7$ ,  $Q = 11$ ,  $e = 13$  y  $d = 37$ , y encripte y desencripte un mensaje  $M = 5$ .

# El sistema criptográfico RSA

## Ejercicio

Aplique el algoritmo RSA para  $P = 7$ ,  $Q = 11$ ,  $e = 13$  y  $d = 37$ , y encripte y desencripte un mensaje  $M = 5$ .

Tenemos que  $N = 7 \cdot 11 = 77$  y  $\phi(N) = 6 \cdot 10 = 60$ .

Notemos que efectivamente  $e \cdot d \bmod \phi(N) = 1$ :

$$13 \cdot 37 = 481 = 8 \cdot 60 + 1$$

Entonces:  $E(M) = M^{13} \bmod 77$ ,  $D(M) = M^{37} \bmod 77$ .

Para  $M = 5$ :

$$E(5) = 5^{13} \bmod 77 = 26$$

$$D(E(5)) = 26^{37} \bmod 77 = 5$$

# Paréntesis: exponenciación modular

- En el ejercicio anterior aparecieron módulos de potencias muy grandes.
- Podemos aprovechar el teorema de las multiplicaciones para obtener estos resultados sin recurrir al uso de calculadoras.
- La idea es factorizar la base de la potencia en potencias más pequeñas para las cuales sea más fácil calcular el módulo, y de esta manera vamos reduciendo el resultado.
  - Hay que ser inteligente en la factorización.

## Ejercicio

Calcule  $5^{13} \bmod 77$  y  $26^{37} \bmod 77$ .

# Paréntesis: exponenciación modular

## Ejercicio

Calcule  $5^{13} \bmod 77$ .

$$\begin{aligned} 5^{13} \bmod 77 &= ((5^3)^4 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= (125^4 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= (48^4 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= ((48^2)^2 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= (2304^2 \cdot 5) \bmod 77 \end{aligned}$$

Notemos que  $77 \cdot 30 = 2310$ , y luego  $2304 \bmod 77 = 71$ .

# Paréntesis: exponenciación modular

## Ejercicio

Calcule  $5^{13} \bmod 77$ .

$$\begin{aligned} 5^{13} \bmod 77 &= (2304^2 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= (71^2 \cdot 5) \bmod 77 \\ &= (71 \cdot (71 \cdot 5)) \bmod 77 \\ &= (71 \cdot 355) \bmod 77 \end{aligned}$$

Notemos que  $77 \cdot 5 = 385$ , y luego  $355 \bmod 77 = 47$ .

$$\begin{aligned} 5^{13} \bmod 77 &= (71 \cdot 355) \bmod 77 \\ &= (71 \cdot 47) \bmod 77 \\ &= 3337 \bmod 77 \end{aligned}$$

Y como  $77 \cdot 43 = 3311$ , tenemos que

$$5^{13} \bmod 77 = 3337 \bmod 77 = 26$$

# Paréntesis: exponenciación modular

## Ejercicio

Calcule  $26^{37} \bmod 77$ .

Como  $26^2 = 676$  y  $77 \cdot 8 = 616$ , tenemos que  $26^2 \bmod 77 = 60$ :

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= ((26^2)^{18} \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (60^{18} \cdot 26) \bmod 77 \\ &= ((60^2)^9 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (3600^9 \cdot 26) \bmod 77 \end{aligned}$$

Notemos que  $77 \cdot 46 = 3542$ , y luego  $3600 \bmod 77 = 58$ .

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= (3600^9 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (58^9 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= ((58^2)^4 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \end{aligned}$$

# Paréntesis: exponenciación modular

## Ejercicio

Calcule  $26^{37} \bmod 77$ .

Como  $58^2 = 3364$  y  $77 \cdot 43 = 3311$ , tenemos que  $58^2 \bmod 77 = 53$ :

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= ((58^2)^4 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (53^4 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= ((53^2)^2 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \end{aligned}$$

Como  $53^2 = 2809$  y  $77 \cdot 36 = 2772$ , tenemos que  $53^2 \bmod 77 = 37$ :

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= ((53^2)^2 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (37^2 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \end{aligned}$$

# Paréntesis: exponenciación modular

## Ejercicio

Calcule  $26^{37} \bmod 77$ .

Como  $37^2 = 1369$  y  $77 \cdot 17 = 1309$ , tenemos que  $37^2 \bmod 77 = 60$ :

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= (37^2 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (60 \cdot 58 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (3480 \cdot 26) \bmod 77 \end{aligned}$$

Como  $77 \cdot 45 = 3465$ , tenemos que  $3480 \bmod 77 = 15$ :

$$\begin{aligned} 26^{37} \bmod 77 &= (3480 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= (15 \cdot 26) \bmod 77 \\ &= 390 \bmod 77 \end{aligned}$$

Y como  $77 \cdot 5 = 385$ , concluimos que  $26^{37} \bmod 77 = 5$ .



# El sistema criptográfico RSA

Lo primero que debemos probar es que RSA funciona correctamente.

## Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada  $M \in \{0, \dots, N - 1\}$ , se tiene que  $D(E(M)) = M$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# El sistema criptográfico RSA

## Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada  $M \in \{0, \dots, N-1\}$ , se tiene que  $D(E(M)) = M$ .

Sean  $N = P \cdot Q$ ,  $E(M) = M^e \bmod N$ ,  $D(M) = M^d \bmod N$ . Luego,

$$D(E(M)) = (M^e \bmod N)^d \bmod N = (M^e)^d \bmod N = M^{e \cdot d} \bmod N$$

Por demostrar:  $M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{N}$ .

Como  $N = P \cdot Q$ , esto es equivalente a demostrar que

$$M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{P \cdot Q}$$

y como  $P$  y  $Q$  son primos (y por lo tanto coprimos), por el lema visto en la demostración del Teorema Chino del Resto, basta demostrar que

$$M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{P} \wedge M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{Q}$$

# El sistema criptográfico RSA

## Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada  $M \in \{0, \dots, N-1\}$ , se tiene que  $D(E(M)) = M$ .

Por demostrar:  $M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{P}$ . Nos pondremos en 2 casos:

- ①  $P \mid M$ : en este caso tenemos que  $M \bmod P = 0$ , y entonces

$$M^{e \cdot d} \bmod P = (M \bmod P)^{e \cdot d} \bmod P = 0^{e \cdot d} \bmod P = 0 = M \bmod P$$

y por lo tanto  $M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{P}$ .

- ②  $P \nmid M$ : en primer lugar, sabemos que  $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ :

$$\begin{aligned} \rightarrow e \cdot d &= k \cdot \phi(N) + 1 \\ &= k \cdot (P-1) \cdot (Q-1) + 1 \\ \rightarrow M^{e \cdot d} &= M^{k \cdot (P-1) \cdot (Q-1) + 1} \end{aligned}$$

Idea: como aparece un  $(P-1)$ , usemos Fermat!

# El sistema criptográfico RSA

## Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada  $M \in \{0, \dots, N-1\}$ , se tiene que  $D(E(M)) = M$ .

Como  $P \nmid M$ , tenemos que  $R = (M \bmod P) \in \{1, \dots, P-1\}$ .

Por (corolario del) teorema de Fermat:

$$R^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$$

y como  $R \equiv M \pmod{P}$ :

$$M^{P-1} \equiv 1 \pmod{P}$$

Calculemos entonces  $M^{e \cdot d} \bmod P$ .

# El sistema criptográfico RSA

$$\begin{aligned} M^{e \cdot d} \bmod P &= M^{k \cdot (P-1) \cdot (Q-1) + 1} \bmod P \\ &= \left( M^{(P-1) \cdot k \cdot (Q-1)} \cdot M \right) \bmod P \\ &= \left( \left( M^{(P-1)} \right)^{k \cdot (Q-1)} \cdot M \right) \bmod P \\ &= \left( \left( M^{(P-1)} \right)^{k \cdot (Q-1)} \bmod P \cdot M \bmod P \right) \bmod P \\ &= \left( \left( M^{(P-1)} \bmod P \right)^{k \cdot (Q-1)} \bmod P \cdot M \bmod P \right) \bmod P \\ &= \left( 1^{k \cdot (Q-1)} \bmod P \cdot M \bmod P \right) \bmod P = M \bmod P \end{aligned}$$

de donde concluimos que  $M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{P}$ .

La demostración de que  $M^{e \cdot d} \equiv M \pmod{Q}$  es análoga a la anterior.  $\square$

# RSA: implementación

Ya vimos que RSA funciona correctamente. Para poder implementarlo, necesitamos resolver los siguientes problemas de manera eficiente:

- 1 Generar primos  $P$  y  $Q$ : verificar si un número es primo.
- 2 Generar números  $e$  y  $d$  tales que  $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$ .
- 3 Calcular funciones  $E$  y  $D$ .

Dados  $P, Q, e, d$  ya vimos como resolver 3. Ahora resolveremos 2.

# Recordando...

## Algoritmo de Euclides extendido

Sea  $a \geq b$ .

- 1 Definimos una sucesión  $\{r_i\}$  como:

$$r_0 = a, r_1 = b, r_{i+1} = r_{i-1} \bmod r_i$$

- 2 Definimos sucesiones  $\{s_i\}, \{t_i\}$  tales que:

$$s_0 = 1, \quad t_0 = 0$$

$$s_1 = 0, \quad t_1 = 1$$

$$s_{i+1} = s_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot s_i, \quad t_{i+1} = t_{i-1} - \left\lfloor \frac{r_{i-1}}{r_i} \right\rfloor \cdot t_i$$

- 3 Calculamos estas sucesiones hasta un  $k$  tal que  $r_k = 0$ .
- 4 Entonces,  $MCD(a, b) = r_{k-1} = s_{k-1} \cdot a + t_{k-1} \cdot b$ .

## Teorema

$a$  tiene inverso en módulo  $n$  si y sólo si  $MCD(a, n) = 1$ .



# RSA: implementación

Tenemos entonces que  $N = P \cdot Q$  y  $\phi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$ , y debemos generar  $e$  y  $d$  tales que  $(e \cdot d) \equiv_{\phi(N)} 1 \pmod{\phi(N)}$ .

## Ejercicio

Encuentre un algoritmo para generar  $e$  y  $d$ .

*Hint:* empiece con un número aleatorio.

De (1) tenemos que  $d$  es inverso de  $e$  en módulo  $\phi(N)$ , y por lo tanto,  $e$  y  $\phi(N)$  deben ser coprimos:  $\text{MCD}(e, \phi(N)) = 1$ .

Supongamos que  $\text{EUCLIDES\_EXTENDIDO}(a, b)$  nos entrega como output  $(s, t)$  tales que  $\text{MCD}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$ .

Supongamos también que  $\text{RANDOMZ}()$  nos entrega un número entero aleatorio.

# RSA: implementación

## Ejercicio

Encuentre un algoritmo para generar  $e$  y  $d$ .

*Hint:* empiece con un número aleatorio.

Entonces, nuestro algoritmo será el siguiente:

```
1:  $e = \text{RANDOMZ}()$ 
2: while  $\text{MCD}(e, \phi(N)) > 1$  do
3:    $e = \text{RANDOMZ}()$ 
4:  $(s, t) = \text{EUCLIDES\_EXTENDIDO}(e, \phi(N))$ 
5:  $d = s \bmod \phi(N)$ 
6: return  $(e, d)$ 
```

# RSA: implementación

Recapitulando, necesitamos resolver eficientemente los siguientes problemas:

- 1 Generar primos  $P$  y  $Q$ : verificar si un número es primo.
- 2 Generar números  $e$  y  $d$  tales que  $(e \cdot d) \bmod \phi(N) = 1$ .
- 3 Calcular funciones  $E$  y  $D$ .

Lamentablemente, resolver 1 está fuera del alcance de este curso :(.

# RSA en la vida real

- En la actualidad RSA es el método de encriptación más usado en la práctica.
- RSA es seguro, pues factorizar  $N = P \cdot Q$  es un problema difícil. Hasta el momento<sup>1</sup> nadie ha logrado hacerlo en tiempo polinomial...
- Muchas empresas necesitan enviar y guardar mensajes de sus clientes de forma segura y eficaz.
- Para autenticar sus firmas y llaves públicas están compañías como Verisign y DigiCert (especie de notario público).
- Hace algunos años, los certificados entregados por Let's Encrypt comenzaron a ser aceptados por los principales browsers. La gracia: Let's Encrypt es gratis!
- Facebook, Twitter y Gmail usan claves de 2048-bits, son del orden de 600 dígitos.

<sup>1</sup>26 de Noviembre de 2023

# Llave pública de Facebook

$N =$

15 585 352 828 848 349 856 166 485 283 177 966 421 839 795 946 170  
777 142 906 490 005 519 208 671 120 899 899 262 624 211 155 018 963  
971 149 091 443 609 485 368 759 496 111 237 537 449 707 311 848 134  
373 181 995 199 147 493 452 694 003 500 368 011 547 715 117 173 524  
344 682 017 000 591 316 495 883 475 735 773 018 093 817 594 895 866  
056 314 350 877 860 912 538 574 834 472 261 127 066 627 480 222 084  
560 839 269 816 445 602 628 601 581 895 334 632 745 344 191 517 226  
140 490 360 921 741 751 939 558 168 295 980 724 044 307 482 559 952  
209 322 025 555 003 487 849 962 968 543 380 943 480 454 078 536 534  
564 950 012 916 335 726 434 409 781 845 853 383 357 876 198 148 575  
972 979 783 587 061 381 625 532 779 677 764 226 990 978 580 238 389  
348 019 608 813 319 553 602 560 294 192 317 728 580 669 275 227 894  
025 650

$e = 65537 = 2^{16} + 1.$

# Matemáticas Discretas

## Teoría de números y Criptografía

Nicolás Alvarado  
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías  
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo  
bugedo@uc.cl

**Gabriel Diéguez**  
**gsdieguez@uc.cl**

Departamento de Ciencia de la Computación  
Escuela de Ingeniería  
Pontificia Universidad Católica de Chile

27 de noviembre de 2023