PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 5

19 de noviembre de 2022

2º semestre 2022 - Profesores F. Suárez - S. Bugedo - N. Alvarado

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 15 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Dado un conjunto A, un conjunto de subconjuntos $S(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ se dice simplicial si satisface las siguientes propiedades

- Cada $s \in S(A)$ es finito y no vacío.
- $\{a\} \in S(A)$ para todo $a \in A$.
- Dado $s \in S(A)$, todo subconjunto propio no vacío $t \subsetneq s$ cumple $t \in S(A)$.

Para un grafo $G = (V, E)$ no simple cuya relación es refleja, considere el conjunto de todos sus cliques K_G, i.e.

$$K_G = \{U \subseteq V \mid U \text{ es clique no vacío}\}$$

Muestre que K_G es un conjunto simplicial.

Solución

Mostraremos que K_G cumple las 3 propiedades para ser un conkunto simplicial.

1. Sea $U \in K_G$, por definición de K_G, U es un clique no vacío. Además, como G es un grafo finito, todos sus posibles cliques tabién son finitos, con lo que concluimos que todo $U \in K_G$ es finito y no vacío.
2. Sea $v \in V$ un vértice cualquiera, como E es refleja obtenemos que $(v, v) \in E$ y por lo tanto todos los vértices forman cliques de tamaño 1 de la forma $\{v\}$, los cuales pertenecen a K_G.
3. Sea $U \in K_G$ y $U' \subsetneq U$ un subconjunto propio no vacío de U, mostraremos que U' también es un clique en G y que por ende debe pertenecer a K_G. Sea $u, v \in U'$, como U' es un subconjunto de U es claro que u y v pertenecen a U, y como U es un clique obtenemos que $(u, v) \in E$. Como u, v son vértices arbitrarios, todo par de vértices de U' están conectados entre sí, con lo que concluimos que todo subconjunto $U' \subseteq U$ es un clique y por lo tanto pertenece a K_G

Pauta (6 pts.)

- 1 pto. por propiedad 1.
- 2 ptos por propiedad 2.
- 3 ptos por propiedad 3.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

a) Demuestre que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si, y solo si, para cada par de subconjuntos no vacíos de vértices U y W tales que $U \cup W = V$ y $U \cap W = \emptyset$, existe una arista en E que une un vértice de U con un vértice de W.

b) Dado un grafo $G = (V, E)$ conexo y un vértice $v \in V$, se define el grafo $G - v$ como aquel que resulta de eliminar v y todas sus aristas incidentes en G. Demuestre que v tiene un vecino en cada una de las componentes conexas de $G - v$.

c) Use el resultado en (b) para demostrar que ningún grafo tiene un vértice de corte de grado 1.

Solución

a) ($\Rightarrow$) Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con U y W particiones arbitrarias, debemos mostrar que existe al menos una arista entre vértices de ambas particiones. Sean $u \in U$ y $w \in W$, como G es conexo, sabemos que existe un camino C entre u y w

$$C = (u, x_1, \dots, x_n, w)$$

Como U y W son particiones, todo vértice de C debe aparecer en alguna de las 2 particiones. Sea x_i el primer vértice del camino que pertenece a W[1]. Luego, tenemos que necesariamente $x_{i-1} \in U$ y como C es un camino obtenemos que $x_i x_{i-1} \in E$ es un arista que une dos vértices de ambas particiones.

($\Leftarrow$) Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que para todo par de particiones U y W se cumple que existe una arista entre dos vértices de ambos conjuntos. Por contradicción, suponemos que G no es conexo.

Como G no es conexo, debe tener al menos 2 componentes conexas, sean C los vértices de una de estas componentes. Ahora particionaremos a G en pase a los conjuntos

$$V = C \cup (V - C)$$

Luego, por hipótesis, debe existir una arista entre vértices de C y $V - C$, es decir, existe una arista entre C y al menos otra componente conexa de G, lo que es una contradicción con la definición de componentes conexas. Concluimos que G debe ser conexo.

b) Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$, tenemos 2 casos:

- v no es de corte: En este caso, en $G - v$ sigue siendo conexo, y por lo tanto los vecinos de v en G son parte de esta única componente.

[1] Notar que este vértice debe existir ya que sabemos que al menos w pertenece a W.

- v es de corte: En este caso tendremos al menos dos componentes conexas C_1 y C_2 en $G-v$. Notar que no pueden haber aristas ni caminos entre ambas compontenes. Luego como G es conexto, todo camino entre C_1 y C_2 debe pasar por v, por lo tanto v tiene al menos un vecino en cada una de ambas componentes.

c) Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$ tal que $\delta(v) = 1$. Es claro que v tiene sólo 1 vecino, por lo tanto, por el resultado anterior en $G-v$ tendremos sólo una componente conexa. Como $G - v$ tiene sólo 1 componente, también es conexo y por lo tanto v no puede ser de corte.

Pauta (6 pts.)

a)
- 1 pto. por ($\Rightarrow$)
- 1 pto. por ($\Leftarrow$)

b) 1 pto por cada caso.

c) 2 ptos.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.