Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

13 de septiembre de 2023

Objetivos

1. Formular enunciados formales en notación matemática usando lógica, conjuntos, relaciones, funciones, cardinalidad, y otras herramientas, desarrollando definiciones y teoremas al respecto, así como demostrar o refutar estos enunciados, usando variadas técnicas.
2. Aplicar inducción como técnica para demostración de propiedades en conjuntos discretos y como técnica de definición formal de objetos discretos.
3. Modelar formalmente un problema usando lógica, conjuntos, relaciones, y las propiedades necesarias, y demostrar propiedades al respecto de su modelo.

Contenidos

Introducción

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de distintos dominios.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

N°alumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde $\mathcal{U}$ es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Definiciones básicas

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

1. $a = b$: En este caso $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, a\}\big\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\big\{\{a\}, \{a\}\big\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\big\{\{a\}\big\}$. Luego, tenemos que $\big\{\{a\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Definiciones básicas

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$

2. $a \neq b$: Como $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, d\}\big\}$, y luego por axioma de extensión $\{a, b\} = \{a, d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Demostración:
$(\Leftarrow)$ Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Definiciones básicas

Ejercicio

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a, b) = \{a, \{b\}\}$$

¿Se cumple la propiedad anterior?

R: No. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{array}{rcccl} (a, b) & = & (\{x\}, y) & = & \{\{x\}, \{y\}\} \\ (c, d) & = & (\{y\}, x) & = & \{\{y\}, \{x\}\} \end{array}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Definiciones básicas

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuadruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una n-**tupla** como:

$$(a_1, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Definiciones básicas

Definición

Dados dos conjuntos A y B, definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejercicio

Defina el producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

Respuesta: $A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$

Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que sum es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

La *aridad* de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación n-aria.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

N°alumno	Nombre	Apellido	Carrera	Año
154	Diego	Valdés	Ingeniería comercial	5
339	María	Espinoza	Pedagogía	2
271	José	Barros	Periodismo	3
404	Josefina	Sáez	Medicina	1

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B.

Ejercicio

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B?

Respuesta: Hay tantas como el tamaño del conjunto potencia de $A \times B$.
Si A y B son finitos y de tamaño m y n respectivamente, entonces hay $2^{m \cdot n}$ relaciones binarias posibles.

Relaciones binarias

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A, diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de "potencia":

$$A \times \overset{(n-2 \text{ veces})}{\cdots} \times A = A^n$$

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$<\subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in< \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1,3) \in< \qquad (10,4) \notin< \qquad (7,7) \notin<$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: ¿$(3,17) \in <$?

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a,b) \in R$
- $R(a,b)$
- aRb
    - Si no están relacionados, podemos escribir $a \not R b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \not< 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación *infija*.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo $=$ ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo $=$ usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Matemáticas Discretas

Relaciones

Nicolás Alvarado
nfalvarado@mat.uc.cl

Bernardo Barías
bjbarias@uc.cl

Sebastián Bugedo
bugedo@uc.cl

Gabriel Diéguez
gsdieguez@ing.puc.cl

Departamento de Ciencia de la Computación
Escuela de Ingeniería
Pontificia Universidad Católica de Chile

13 de septiembre de 2023