Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2017

INTERROGACION 2

Preguntas en blanco: Preguntas entregadas en blanco se evaluarán con un 1.5.

Pregunta 1

Demuestre que para todo conjunto A no existe una biyección entre A y el conjunto 2^A.

Pregunta 2

Sea $\{0,1\}^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$ el conjunto de todas las palabras (strings) binarios y sea $u \cdot v$ la concatenación de dos palabras $u, v \in \{0,1\}^*$ (ej. $00 \cdot 101 = 00101$). Se define la relación $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$:

$$(w_1, w_2) \in R \quad \text{si, y solo si,} \quad \text{existen palabras } u \text{ y } v \text{ tal que } w_1 = u \cdot v \text{ y } w_2 = v \cdot u.$$

1. (4 puntos) Demuestre que R es una relación de equivalencia sobre $\{0,1\}^*$.
2. (2 puntos) Interprete en palabras a que corresponden las clases de equivalencia de R.

Pregunta 3

Considere una partícula en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que parte en el punto $(0,0)$. Una trayectoria de la partícula en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una secuencia $(i_0, j_0), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(i_0, j_0) = (0,0)$ y para todo $k \geq 0$ se cumple que $|i_k - i_{k+1}| + |j_k - j_{k+1}| = 1$. En otras palabras, la trayectoria de la partícula cambia en exactamente una coordenada $+1$ o -1.

1. Demuestre que el conjunto de todas las posibles trayectorias de la partícula son no-numerables.
2. ¿Qué sucede con la cardinalidad del conjunto de trayectorias si ahora las trayectorias están acotadas a un plano finito $\{0, \ldots, n\} \times \{0, \ldots, n\}$? Demuestre su respuesta.

Pregunta 4

Sea A un conjunto finito y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

1. Dos elementos $a, b \in A$ se dicen *incomparables* en $(A, \preceq)$ si $a \not\preceq b$ y $b \not\preceq a$. Demuestre que si a y b son incomparables, entonces $(\preceq \cup \{(a,b)\})^t$ es un orden parcial de A donde $(\cdot)^t$ es la clausura transitiva de la relación.
2. Un orden total $(A, \preceq^T)$ se dice un *orden topológico* para $(A, \preceq)$ si se cumple que para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \preceq^T b$. Demuestre que para todo orden parcial $(A, \preceq)$ existe un orden topológico.