Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

30 de septiembre de 2020
Profesores: Gabriel Diéguez - Fernando Suárez

Instrucciones

- La duración de la interrogación es 1 hora y 20 minutos.
- Se podrán realizar preguntas solamente durante el módulo de clases, de 8:30 a 10:00 hrs., por el foro de Canvas correspondiente.
- Debe entregar una solución escrita a mano, ya sea en papel o tablet, antes de las 23:59 horas del día de la interrogación. En el caso de hacerlo en papel, debe preocuparse que la copia digital sea legible. Se recomienda el uso de algún software de escaneo como CamScanner o la app de Google Drive.
- Responda cada pregunta en archivo separado, `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf`, y ponga su nombre y sección en cada archivo.
- En caso de hacer la interrogación fuera del horario, se recomienda tomar el tiempo (1 hora y 20 minutos) y entregarlo justo después de concluido el tiempo.
- Durante la evaluación puede hacer uso de sus apuntes o slides del curso.
- Esta es una evaluación estrictamente individual y, por lo tanto, no puede compartir información con sus compañeros o usar material fuera de sus apuntes o slides del curso. En caso de hacerlo, la interrogación no reflejará su progreso en el curso, viéndose perjudicada su formación personal y profesional.
- **Al comienzo de cada pregunta debe escribir la siguiente oración y firmarla:** *"Doy mi palabra que la siguiente solución de la pregunta X fue desarrollada y escrita individualmente por mi persona según el código de honor de la Universidad."*

  En caso de no escribir la oración o no firmarla, su solución no será evaluada.
- Entregue al menos una hoja por pregunta.
  - Si entrega la pregunta **completamente en blanco**, tiene nota mínima 1.5 en vez de 1.0 en la pregunta entregada.

Pregunta 1 [Inducción y Lógica Proposicional]

a) [2 ptos] Sea $p \in \mathbb{N}$ y q un número impar. Demuestre por inducción que

$$n = 2^p \cdot q$$

se cumple para todo natural $n \geq 1$.

b) [4 ptos] Tras la pandemia, la ciudad de Venecia tendrá un recorte de presupuesto y en consecuencia tomó la decisión de disminuir la cantidad de generadores eléctricos. La ciudad puede pensarla como un conjunto de islotes conectados por puentes. El problema consiste en que cada puente debe tener luz eléctrica y por ende, este debe incidir en un islote con generador eléctrico. Tenga en consideración que la ciudad consta de 10 islotes y usted cuenta con 5 generadores para distribuir en las islas. Además, el gobierno le entregó un plano con todos los puentes e islotes.

En concreto, usted debe construir una fórmula $\varphi \in L(P)$ tal que:

φ es satisfacible

$\Leftrightarrow$

es posible asignar los generadores a los islotes y tener luz eléctrica en todos los puentes

Solución

a) Por inducción fuerte:

BI: $n = 2$ se puede representar como $n = 2^1 \cdot 1$, por lo que cumple la propiedad.

HI: Suponemos que todo $k < n$ se puede representar como $k = 2^p \cdot q$, con $p \geq 1 \in \mathbb{N}$ y q un número impar.

TI: Demostraremos que n cumple la propiedad. Tenemos 2 casos:

Caso 1: Si n es impar, podemos expresarlo como $n = 2^0 \cdot q$ con $q = n$. Luego, la propiedad se cumple.

Caso 2: Si n es par, entonces podemos representarlo de la siguiente forma:

$$n = 2 \cdot n'$$

con $n' \in \mathbb{N}$. Es claro que $n' < n$, y por lo tanto n' cumple la hipótesis de inducción. Entonces:

$$n = \ 2 \cdot (2^p \cdot q) = 2^{p+1} \cdot q$$

Como $p + 1 \in \mathbb{N}$ y q es impar, por inducción fuerte concluimos que se cumple la propiedad para todo n.

Pauta (2 pts.)

- 0.5 ptos. por BI
- 0.5 ptos. por HI
- 1 pto por TI

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

b) Tenemos 10 islas denotadas por los números del 1 al 10.

Consideremos el siguiente conjunto de variables proposicionales:

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{si la isla } i \text{ tiene asignado un generador} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay un puente entre } i \text{ y } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, como tenemos un mapa con los puentes, denotaremos con $\mathbb{M}$ como el conjunto de pares (i, j) que indican que hay un puente entre las islas i y j.

Ahora consideremos de las siguientes fórmulas:

Fórmula 1: Todo puente debe estar conectado a una isla con generador:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i=1}^{10} \bigwedge_{j=1}^{10} \Big(p_{ij} \to (q_i \vee q_j)\Big)$$

Fórmula 2: No hay más de 5 generadores asignados:

$$\varphi_2 = \bigvee_{(l_1,l_2,l_3,l_4,l_5)\in\{1,\ldots,10\}^5} \Bigg((q_{l_1} \wedge q_{l_2} \wedge q_{l_3} \wedge q_{l_4} \wedge q_{l_5}) \to \bigwedge_{\substack{l\in\{1,\ldots,10\} \\ l\neq l_1 \wedge l\neq l_2 \\ l\neq l_3 \wedge l\neq l_4 \wedge l\neq l_5}} \neg q_l\Bigg)$$

Fórmula 3: Todos los puentes del mapa deben formar parte de la solución:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{(i,j)\in\mathbb{M}} p_{ij} \wedge \bigwedge_{(i,j)\notin\mathbb{M}} \neg p_{ij}$$

Finalmente obtenemos la expresión:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$$

Pauta (4 pts.)

- 1.0 pto por definir conjunto de variables
- 1.0 pto por φ_1
- 1.0 pto por φ_2
- 1.0 pto por φ_3

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2 [Conjuntos y Relaciones]

a) Sea $\mathcal{U}$ un conjunto universal y A, B, C conjuntos. Demuestre que:

  i) $A \backslash B \subseteq C$ si y sólo si $A \backslash C \subseteq B$.

  ii) $A \subseteq B$ si y sólo si para todo $D \subseteq \mathcal{U}$ se tiene que $D \subseteq A \rightarrow D \subseteq B$.

b) Sea R una relación sobre un conjunto A. Decimos que R es

- **Cóncava** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(a, c)$, entonces $R(b, c)$.
- **Convexa** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(b, a)$ y $R(c, a)$, entonces $R(b, c)$.

  i) Demuestre que R es cóncava y refleja si y sólo si es de equivalencia.

  ii) Demuestre que R es convexa y refleja si y sólo si es de equivalencia.

Solución

a) i) ($\Rightarrow$) PD: $A \backslash B \subseteq C \; \rightarrow \; A \backslash C \subseteq B$ Suponemos que se cumple la afirmación de la izquierda. Por definición de diferencia y subconjunto:

$$\forall x \in \mathcal{U} \; (x \in A \wedge x \notin B) \rightarrow x \in C$$

Por regla de implicancia y De Morgan, sabemos que esto es equivalente a:

$$\forall x \in \mathcal{U} \, \neg (x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in C$$

$$\forall x \in \mathcal{U} \; x \notin A \vee x \in B \vee x \in C \; (1)$$

Ahora queremos demostrar que:

$$A \backslash C \subseteq B$$

Que por definición de diferencia y subconjunto quiere decir:

$$\forall x \in \mathcal{U} \; (x \in A \wedge x \notin C) \rightarrow x \in B$$

Si $x \in A$ y $x \notin C$, por (1) sabemos que se debe cumplir que $x \in B$, y por lo tanto esta última implicancia es cierta.

($\Leftarrow$) PD: $A \backslash C \subseteq B \ \rightarrow \ A \backslash B \subseteq C$ Suponemos que se cumple la afirmación de la izquierda. Por definición de diferencia y subconjunto:

$$\forall x \in \mathcal{U} \ \ (x \in A \wedge x \notin C) \rightarrow x \in B$$

Por regla de implicancia y De Morgan, sabemos que esto es equivalente a:

$$\forall x \in \mathcal{U} \neg (x \in A \wedge x \notin C) \vee x \in B$$

$$\forall x \in \mathcal{U} \ x \notin A \vee x \in C \vee x \in B \ (2)$$

Ahora queremos demostrar que:

$$A \backslash B \subseteq C$$

Que por definición de diferencia y subconjunto quiere decir:

$$\forall x \in \mathcal{U} \ \ (x \in A \wedge x \notin B) \rightarrow x \in C$$

Si $x \in A$ y $x \notin B$, por (2) sabemos que se debe cumplir que $x \in C$, y por lo tanto esta última implicancia es cierta.

ii) ($\Rightarrow$) PD: $A \subseteq B \ \rightarrow \ \forall D \subseteq \mathcal{U}(D \subseteq A \rightarrow D \subseteq B)$
Sean A, B, D tales que $A \subseteq B$ y $D \subseteq A$. Por la definición de $A \subseteq B$ se tiene que:

$$x \in A \rightarrow x \in B$$

Además por la definición de $D \subseteq A$, se tiene que:

$$x \in D \rightarrow x \in A$$

Por lo tanto:

$$x \in D \rightarrow x \in A \ \wedge \ x \in A \rightarrow x \in B$$

Es decir:

$$x \in D \rightarrow x \in B$$

Y por lo tanto:

$$D \subseteq B$$

Como D era un subconjunto de A cualquiera:

$$\forall D \subseteq \mathcal{U} \ \ D \subseteq A \rightarrow D \subseteq B$$

($\Leftarrow$) PD: $\big(\forall D \subseteq \mathcal{U}(D \subseteq A \rightarrow D \subseteq B)\big) \ \rightarrow \ A \subseteq B$.
Supongamos que se cumple la afirmación de la izquierda, es decir, que para todo $D \subseteq A$ se tiene que $D \subseteq B$. En particular, como $A \subseteq A$, se cumple que $A \subseteq B$.

b) i) ($\Rightarrow$) PD: R es cóncava y refleja $\rightarrow$ R es de equivalencia.

- Refleja: R ya es refleja.
- Simétrica: Supongamos que se cumple $R(a,b)$. Como R es refleja se cumple que:

  $$\forall a \in A \quad R(a,a)$$

  Como R es cóncava se cumple que:

  $$R(a,b) \wedge R(a,a) \rightarrow R(b,a)$$

  Luego se cumple $R(b,a)$, y por lo tanto R es simétrica.
- Transitiva: Supongamos que se cumplen $R(a,b) \wedge R(b,c)$. Como R es simétrica se cumple que:

  $$R(a,b) \rightarrow R(b,a)$$

  Como R es cóncava se cumple que:

  $$R(b,a) \wedge R(b,c) \rightarrow R(a,c)$$

  Luego se cumple $R(a,c)$, y por lo tanto R es transitiva.

Concluimos que R es una relación de equivalencia.

($\Leftarrow$) PD: R es de equivalencia $\rightarrow$ R es refleja y cóncava.

- Refleja: Por definición de una relación de equivalencia, R es refleja.
- Cóncava: Supongamos que se cumple que $R(a,b) \wedge R(a,c)$. Como R es de equivalencia, es simétrica, y entonces:

  $$R(a,b) \rightarrow R(b,a)$$

  Como R es de equivalencia, es transitiva, y entonces:

  $$R(b,a) \wedge R(a,c) \rightarrow R(b,c)$$

  Por lo tanto $R(a,b) \wedge R(a,c) \rightarrow R(b,c)$. Concluimos que R es cóncava.

ii) ($\Rightarrow$) PD: R es refleja y convexa $\rightarrow$ R es de equivalencia.

- Refleja: R ya es refleja.
- Simétrica: Supongamos que se cumple $R(a,b)$. Como R es refleja, se cumple que $R(b,b)$. Luego, como R es convexa:

  $$R(b,b) \wedge R(a,b) \rightarrow R(b,a)$$

  Concluimos que R es simétrica.

- Transitiva: Supongamos que se cumplen $R(a,b) \wedge R(b,c)$. Como R es simétrica:

  $$R(b,c) \to R(c,b)$$

  Luego, como R es convexa:

  $$R(a,b) \wedge R(c,b) \to R(a,c)$$

  Concluimos que R es transitiva.

Concluimos que R es una relación de equivalencia.
($\Leftarrow$) PD: R es de equivalencia $\to$ R es refleja y convexa.

- Refleja: Por definición de una relación de equivalencia, R es refleja.
- Convexa: Ya que la relación es de equivalencia, es transitiva. Entonces:

  $$R(b,a) \wedge R(a,c) \to R(b,c)$$

  Además, la relación es simétrica, por lo que se cumple:

  $$R(a,c) \to R(c,a)$$

  Por lo tanto:

  $$R(b,a) \wedge R(c,a) \to R(b,c)$$

  Concluimos que R es convexa.

Pauta (6 pts.)

a) i) 0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.
   0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.

   ii) 0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.
   0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.

b) i) 0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.
   0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.

   ii) 0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.
   0.75 pts implicancia de izquierda a derecha.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.