



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS  
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E  
IGNACIO VERGARA

## Ayudantía 12

17 de noviembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

### Ejercicio 1 | Relaciones

Dados dos números  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ , se define la relación  $Q$  como:

$$q_1 Q q_2 \text{ si y solo si } q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}.$$

Demuestre que es una relación de equivalencia.

#### Solución

Para demostrar que es una relación de equivalencia, se debe demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

**Reflexiva:** Por demostrar que  $q Q q$  para todo  $q \in \mathbb{Q}$ . Debemos demostrar que  $q - q = 0 \in \mathbb{Z}$ , lo cual es cierto para cualquier  $q$ . Por lo tanto, es reflexiva.

**Simétrica:** Por demostrar que si  $q_1 Q q_2$ , entonces  $q_2 Q q_1$ . Si  $q_1 = q_2$ , la propiedad es trivial. En caso contrario, si  $q_1 Q q_2$ , entonces  $q_1 - q_2 = k \in \mathbb{Z}$ . Se debe demostrar que  $q_2 - q_1 = m \in \mathbb{Z}$ , lo cual es cierto ya que  $q_2 - q_1 = -k \in \mathbb{Z}$ . Si  $k \in \mathbb{Z}$  entonces  $-k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, es simétrica.

**Transitiva:** Por demostrar que si  $q_1 Q q_2$  y  $q_2 Q q_3$ , entonces  $q_1 Q q_3$ . Si  $q_1 Q q_2$  y  $q_2 Q q_3$ , entonces  $q_1 - q_2 = k$  y  $q_2 - q_3 = l$ , con  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Se debe demostrar que  $q_1 - q_3 = m \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= k \\ q_1 &= k + q_2 \\ q_2 - q_3 &= l \\ -q_3 &= l - q_2 \\ q_1 - q_3 &= k + q_2 + l - q_2 \\ q_1 - q_3 &= k + l \end{aligned}$$

Luego  $k + l \in \mathbb{Z}$ , ya que  $\mathbb{Z}$  es cerrado bajo la suma.

Por lo tanto, la relación es una relación de equivalencia.

## Ejercicio 2 | Funciones y cardinalidad

Sea el conjunto

$$\mathcal{I} := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito y } \mathbb{N} \setminus A \text{ es infinito}\}$$

Demuestre que  $\mathcal{I}$  es equinumeroso con  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

### Solución

Para demostrar que  $\mathcal{I}$  es equinumeroso con  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  utilizaremos el teorema de Schröder-Bernstein. Entonces debemos formar dos funciones  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{I}$  ambas inyectivas.

En primer lugar se puede observar que todo elemento en  $\mathcal{I}$  se encuentra en  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , por lo cual es directo que una función  $f$  inyectiva a la cual recurrir es la identidad,  $f(X) = X$ , la cual es inyectiva trivialmente.

Para formar  $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{I}$  es importante notar que existen tres casos posibles para  $X \subseteq \mathbb{N}$ ,

1.  $X$  es finito.
2.  $X$  es infinito pero tiene complemento finito.
3.  $X$  es infinito y tiene complemento infinito.

Considerando esto, la idea es formar  $g$  de tal manera que a partir de  $x \in X$  lo asociaremos con particiones infinitas de  $\mathbb{N}$ .

Considerando entonces,  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{I}$  como los conjuntos de números pares e impares respectivamente, sabemos que existe una biyección entre  $\mathbb{I}$  y  $\mathbb{N}$ , llamaremos a ésta función  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ . Definimos entonces  $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{I}$  como

$$g(X) = \begin{cases} \{h(x) \mid x \in X\} \cup \mathbb{P} & \text{si } X \text{ es finito} \\ \{h(x) \mid x \in X\} & \text{si } X \text{ es infinito} \end{cases}$$

Ahora, para mostrar que ésta función efectivamente es la que necesitamos falta mostrar que todas las imágenes de  $g$  están en  $\mathcal{I}$ , esto es, son subconjuntos de  $\mathbb{N}$  infinitos o con complementos infinito. Posterior a esto, falta demostrar que la función es inyectiva.

Para mostrar que todas las imágenes de  $g$  están en  $\mathcal{I}$ :

- Todas las imágenes están compuestas por números en  $\mathbb{I}$  o en  $\mathbb{P}$ , por lo cual se cumple que son subconjuntos de  $\mathbb{N}$ .
- En el caso de que  $X \subseteq \mathbb{N}$  es finito, por definición de  $g$  tenemos que  $\mathbb{P} \subseteq g(X)$ , por lo cual como  $\mathbb{P}$  es infinito, necesariamente  $g(X)$  también lo es. Además su complemento,  $\mathbb{N} \setminus g(X)$  contiene a todos los impares, salvo una cantidad finita de ellos los cuales fueron mapeados desde  $X$  usando  $h$ . Por lo tanto su complemento también es infinito obteniendo así que  $g(X) \in \mathcal{I}$ .
- En el caso de que  $X$  sea infinito,  $g(X)$  también lo es, pues todo elemento de  $X$  tendrá como imagen un número impar diferente debido a que  $h$  es una biyección. Además, su complemento  $\mathbb{N} \setminus g(X)$  contiene a todos los números pares, puesto que todos los elementos en  $g(X)$  son impares pues son imágenes de  $h$ . Por lo tanto su complemento también es infinito obteniendo así que  $g(X) \in \mathcal{I}$ .

Finalmente falta mostrar que  $g$  es inyectiva,

$$g(X) = g(Y) \rightarrow X = Y$$

Para ello, se tienen los siguientes casos

- Si  $X$  e  $Y$  son infinitos. Supongamos que  $g(X) = g(Y)$  tenemos entonces que,

$$\{h(x) \mid x \in X\} = \{h(y) \mid y \in Y\}$$

además, sabemos que  $h$  es invertible pues es inyectiva, luego

$$\{h^{-1}(h(x)) | x \in X\} = \{h^{-1}(h(y)) | y \in Y\}$$

$$\{x | x \in X\} = \{y | y \in Y\}$$

$$X = Y$$

Por lo tanto en éste caso  $g$  si es inyectiva.

- Si  $X$  e  $Y$  son finitos. Supongamos que  $g(X) = g(Y)$  tenemos entonces que,

$$\{h(x) | x \in X\} \cup \mathbb{P} = \{h(y) | y \in Y\} \cup \mathbb{P}$$

pero sabemos que  $\{h(x) | x \in X\}$  y  $\{h(y) | y \in Y\}$  no tienen números pares, por lo cual necesariamente se cumple que

$$\{h(x) | x \in X\} = \{h(y) | y \in Y\}$$

llegando a la misma situación que el caso anterior, por lo tanto en éste caso  $g$  también es inyectiva.

- Si  $X$  e  $Y$  no son finitos o infinitos a la vez. Para este caso no es posible asumir que  $g(X) = g(Y)$  pues alguna de las imagenes va a contener numeros pares y la otra no.

Finalmente podemos concluir que existe  $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{I}$  inyectiva, lo que sumado a  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  por teorema de Schröder-Bernstein nos permite concluir que  $\mathcal{I}$  es equinumeroso con  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

### Ejercicio 3 | Funciones y cardinalidad (I2 2021-2)

Sean  $A, B, C$  y  $D$  conjuntos infinitos tales que  $A \approx C$  y  $B \approx D$ . Considere los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{F} = \{f | f : A \rightarrow B \text{ es una función}\}$$

$$\mathcal{G} = \{g | g : C \rightarrow D \text{ es una función}\}$$

Demuestre que  $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ .

#### Solución

Dado que  $A \approx C$  y  $B \approx D$ , existen funciones biyectivas  $\alpha : A \rightarrow C$  y  $\beta : B \rightarrow D$ . Consideremos las siguientes relaciones:

- $h_1 \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{G}$  tal que  $(f, g) \in h_1$  si y solo si

$$\forall a \in A, \forall b \in B \text{ se cumple que } (a, b) \in f \text{ si y solo si } (\alpha(a), \beta(b)) \in g.$$

- $h_2 \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{F}$  tal que  $(g, f) \in h_2$  si y solo si

$$\forall c \in C, \forall d \in D \text{ se cumple que } (c, d) \in g \text{ si y solo si } (\alpha^{-1}(c), \beta^{-1}(d)) \in f.$$

Por el teorema de Schröder-Bernstein, demostrar que ambas relaciones son funciones inyectivas implica que  $\mathcal{F} \approx \mathcal{G}$ . Demostraremos esto para  $h_1$ , siendo la demostración para  $h_2$  completamente análoga.

#### Demostración para $h_1$

Función: Sean  $f \in \mathcal{F}$  y  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  tales que  $(f, g_1) \in h_1$  y  $(f, g_2) \in h_1$ . Debemos demostrar que  $g_1 = g_2$ .

- $g_1 \subseteq g_2$ : Sea  $(c, d) \in g_1$ . Como  $(f, g_1) \in h_1$ , existen  $a \in A$  y  $b \in B$  tales que  $f(a) = b$ ,  $\alpha(a) = c$ , y  $\beta(b) = d$ . Entonces, como  $(f, g_2) \in h_1$ , también se cumple que  $(c, d) \in g_2$ .
- $g_2 \subseteq g_1$ : Análogo al caso anterior.

Función total: Dado  $f \in \mathcal{F}$ , debemos demostrar que existe  $g \in \mathcal{G}$  tal que  $(f, g) \in h_1$ . Definimos  $g \subseteq C \times D$  como:

$$g = \{(c, d) \mid \exists a \in A, \exists b \in B \text{ tales que } f(a) = b \wedge \alpha(a) = c \wedge \beta(b) = d\}$$

Debemos demostrar que  $g$  es efectivamente una función:

- **Función:** Sean  $(c, d_1)$  y  $(c, d_2) \in g$ . Por definición de  $g$ , existen  $a \in A$  y  $b_1, b_2 \in B$  tales que  $\alpha(a) = c$ ,  $\beta(b_1) = d_1$ ,  $\beta(b_2) = d_2$ , y  $f(a) = b_1$  y  $f(a) = b_2$ . Como  $f$  es función, tenemos que  $b_1 = b_2$ , y por lo tanto  $g$  es función.
- **Función total:** Dado  $c \in C$ , como  $\alpha$  es una función biyectiva, existe  $a \in A$  tal que  $\alpha(a) = c$ . Como  $f$  es total, existe  $b \in B$  tal que  $f(a) = b$ , y como  $\beta$  también es total, existe  $d \in D$  tal que  $\beta(b) = d$ . Por lo tanto, por definición de  $g$ , se cumple que  $g(c) = d$ .

### Inyectiva

Supongamos que  $h_1(f_1) = h_1(f_2)$  (1). Debemos demostrar que  $f_1 = f_2$ .

- $f_1 \subseteq f_2$ : Sea  $(a_1, b_1) \in f_1$ , es decir,  $f_1(a_1) = b_1$ . Sean también  $c \in C$ ,  $d \in D$  tales que  $\alpha(a_1) = c$  y  $\beta(b_1) = d$ . Por definición de  $h_1$ ,  $(c, d) \in h_1(f_1)$ , y por (1) se tiene que  $(c, d) \in h_1(f_2)$ . Luego, existen  $a_2 \in A$  y  $b_2 \in B$  tales que  $f_2(a_2) = b_2$ ,  $\alpha(a_2) = c$ , y  $\beta(b_2) = d$ . Como  $\alpha$  y  $\beta$  son biyectivas,  $a_1 = a_2$  y  $b_1 = b_2$ . Por lo tanto,  $f_2(a_1) = b_1$ , y entonces  $(a_1, b_1) \in f_2$ .
- $f_2 \subseteq f_1$ : Análogo al caso anterior

## Ejercicio 4 | Algoritmos y complejidad

1. Considere el siguiente algoritmo:

---

**Algorithm 1:** theavengersaredead( $n$ )

---

**Data:**  $n$

**Result:**  $i$

```

1  $k \leftarrow 1$ ;
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3    $k \leftarrow k \times n$ ;
4  $i \leftarrow 1$ ;
5 while  $i \leq k$  do
6    $i \leftarrow i \times 2$ ;
7 return  $i$ ;
```

---

Encuentre una función  $f$  y demuestre (usando la definición formal de la notación  $\Theta$ ) que el tiempo de theavengersaredead en términos de  $n$  es  $\Theta(f(n))$ .

2. Demuestre que si  $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$  y  $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$ , entonces  $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$

### Solución

1. El "for" del algoritmo toma  $n$  pasos, y al terminar queda  $k = n^n$ . Luego, el while se ejecuta hasta que  $i \leq k$ . Es claro que  $i$  se ve de la forma  $i = 2^l$  donde  $l$  es el número de iteraciones que lleva el algoritmo. Por lo tanto el "while" se ejecuta hasta que  $2^l > n^n$ . Despejamos  $l$ :

$$2^l > n^n \quad / \log_2(\cdot)$$

$$l > n \log_2 n$$

Entonces el "while"hará  $n \log n$  iteraciones. Por lo tanto, la función del tiempo del algoritmo es:

$$T(n) = n + n \log n + O(1)$$

Finalmente, usamos  $f(n) = n \log n$  y el algoritmo es claramente  $\Theta(f(n))$ .

2. Dado que  $f_1(n) \in \mathcal{O}(g_1(n))$  y  $f_2(n) \in \mathcal{O}(g_2(n))$ , sabemos que:

- Existe  $c_1 > 0, n_0^1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n)$  para todo  $n \geq n_0^1$ .
- Existe  $c_2 > 0, n_0^2 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n)$  para todo  $n \geq n_0^2$ .

Si  $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ , entonces para todo  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} f_1(n) + f_2(n) &\leq c_1 \cdot g_1(n) + c_2 \cdot g_2(n) \\ &\leq c_1 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} + c_2 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} \\ &\leq C \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} \end{aligned}$$

Queda demostrado lo pedido ya que existe un  $C = c_1 + c_2$  y existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$f_1(n) + f_2(n) \in \mathcal{O}(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$$