Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

3 de septiembre de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 31 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

a) Considere la siguiente recursión definida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$b_0 = 3$$
$$b_n = 2 \cdot n \cdot b_{n-1}$$

Demuestre por inducción que $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot n!$

b) Sea $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}, x > 0\}$. Dados $n, m \in \mathbb{P}$, decimos que m es un p-factor de n si existe $k \in \mathbb{P}$ tal que $k \cdot m = n$. Además, decimos que $q \in \mathbb{P}$ es un p-primo si no tiene p-factores.

Demuestre por inducción que todo elemento de $\mathbb{P}$ tiene factorización p-prima (*i.e.* puede ser expresado como un producto de p-primos).

Solución

a) Demostraremos la propiedad utilizando el Principio de Inducción simple sobre los naturales.

BI: Para $n = 0$ tenemos que

$$b_0 = 3 \cdot 2^0 \cdot 0! = 3$$

HI: Suponemos que

$$b_n = \ 3 \cdot 2^n \cdot n! \text{ , con } n \geq 0$$

TI: Debemos demostrar que

$$b_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

Por definicion de la recursión:

$$b_{n+1} = 2 \cdot (n+1) \cdot b_n$$

Por hipótesis inductiva:

$$b_{n+1} = 2 \cdot (n+1) \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \tag{1}$$
$$= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1) \cdot n! \tag{2}$$
$$= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)! \tag{3}$$

Por inducción tenemos entonces que $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como queríamos demostrar.$\square$

Pauta (3 pts.)

- 0.5 pto. por caso base.
- 0.5 pto. por hipótesis de inducción.
- 2 ptos. tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

b) Demostraremos la propiedad utilizando el principio de inducción fuerte sobre $\mathbb{P}$.

BI: Para $n = 2$ la factorización p-prima es sí mismo, ya que 2 es p-primo.

HI: Suponemos que para todo $k < n$ perteneciente a $\mathbb{P}$ existe una factorización p-prima de k.

TI: Debemos demostrar que n tiene factorización p-prima. Tenemos 2 casos:

i) Si n es p-primo, entonces su factorización p-prima es sí mismo.

ii) Si n no es p-primo, entonces deben existir p-factores $s, t \in \mathbb{P}$ tales que $n = s \cdot t$. Es claro que $s, t < n$ y como pertenecen a $\mathbb{P}$ deben cumplir la hipótesis de inducción y pueden ser expresados como un producto de p-primos:

$$s = \prod_i s_i$$
$$t = \prod_j t_j$$

Finalmente podemos escribir la factorización p-prima de n como

$$n = \prod_i s_i \cdot \prod_j t_j$$

Pauta (3 pts.)

- 0.5 pto. por caso base.
- 0.5 pto. por hipótesis de inducción.
- 2 ptos. tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Dado un conjunto A, definimos el conjunto de los A-remolinos $\mathcal{R}_A$ como el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\forall x \in A, x \in \mathcal{R}_A$
2. $\forall x, y \in A$
   - $x — y \in \mathcal{R}_A$, $y — x \in \mathcal{R}_A$
   - $\begin{array}{c} x \\ | \\ y \end{array} \in \mathcal{R}_A$, $\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array} \in \mathcal{R}_A$

   Para las siguientes reglas considere que $R \in \mathcal{R}_A$ y que $x, y \in A$.

3. Sea un A-remolino de la forma $R — x$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$R — x — y \qquad \begin{array}{ccc} R & — & x \\ & & | \\ & & y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & y \\ & & | \\ R & — & x \end{array}$$

4. Sea un A-remolino de la forma $x — R$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$y — x — R \qquad \begin{array}{ccc} x & — & R \\ | & & \\ y & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & & \\ | & & \\ x & — & R \end{array}$$

5. Sea un A-remolino de la forma $\begin{array}{c} R \\ | \\ x \end{array}$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$\begin{array}{c} R \\ | \\ x \\ | \\ y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & & \\ | & & \\ x & — & y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & R \\ & & | \\ y & — & x \end{array}$$

6. Sea un A-remolino de la forma $\begin{array}{c} x \\ | \\ R \end{array}$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ x \\ | \\ R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & — & y \\ | & & \\ R & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & — & x \\ & & | \\ & & R \end{array}$$

A modo de ejemplo, el siguiente es un $\mathbb{N}$-remolino:

$$R \quad = \quad \begin{array}{ccccccc} 3 & \text{---} & 2 & & & & 100 \\ | & & & & & & | \\ 3 & & & & 0 & \text{---} & 3 \\ | & & & & | & & \\ 27 & \text{---} & 1 & \text{---} & 1 & & \end{array}$$

a) Defina la función $size : \mathcal{R}_A \to \mathbb{N}$, la que recibe un A-remolino y retorna el número de elementos de A que contiene. En el caso del ejemplo anterior, $size(R) = 9$.

b) Considere la siguiente definición inductiva para el *origen* de un A-remolino:

$origin : \mathcal{R}_A \to A$

1. $\forall x \in A, origin(x) = x$
2. $\forall x, y \in A$
   - $origin(x \text{ --- } y) = x$, $origin(y \text{ --- } x) = x$
   - $origin\begin{pmatrix} x \\ | \\ y \end{pmatrix} = x$, $origin\begin{pmatrix} y \\ | \\ x \end{pmatrix} = x$

   Para las siguientes reglas considere que $R \in \mathcal{R}_A$ y que $x \in A$.
3. $origin(R \text{ --- } x) = origin(R)$.
4. $origin(x \text{ --- } R) = origin(R)$.
5. $origin\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix} = origin(R)$.
6. $origin\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix} = origin(R)$.

Note que con esta definición, un A-remolino puede tener múltiples orígenes.

Demuestre que el número de orígenes de un A-remolino R es igual a $size(R)$.

Solución

a)
- **Casos base:** $\forall x, y \in A$, definimos:

$$size(x) = 1, \quad size(x\text{—}y) = 2, \quad size(y\text{—}x) = 2, \quad size\begin{pmatrix} y \\ | \\ x \end{pmatrix} = 2, \quad size\begin{pmatrix} x \\ | \\ y \end{pmatrix} = 2$$

- **Caso inductivo:** Para cualquier A-remolino R', definido en los puntos 3, 4, 5 y 6 del enunciado, definimos:

$$size(R') = size(R) + 2$$

Pauta (3 pts.)

- Casos base: 1 pto.
- Caso inductivo: 2 ptos.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

b) Demostremos la propiedad mediante el Principio de Inducción Estructural:

BI: Sean $x, y \in A$.

Sea $R_1 = x$. El único origen posible de R_1 es x, luego $\#origenes(R_1) = 1 = size(R_1)$.

Sea $R_2 = x\text{—}y$. Los únicos orígenes posibles de R_2 son x e y, luego $\#origenes(R_2) = 2 = size(R_2)$.

Sea $R_3 = y\text{—}x$. Los únicos orígenes posibles de R_3 son x e y, luego $\#origenes(R_3) = 2 = size(R_3)$.

Sea $R_4 = \begin{matrix} y \\ | \\ x \end{matrix}$. Los únicos orígenes posibles de R_4 son x e y, luego $\#origenes(R_4) = 2 = size(R_4)$.

Sea $R_5 = \begin{matrix} x \\ | \\ y \end{matrix}$. Los únicos orígenes posibles de R_4 son x e y, luego $\#origenes(R_4) = 2 = size(R_4)$.

HI: Supongamos que para un A-remolino de cualquiera de las siguientes formas

$$R \text{ — } x \qquad x \text{ — } R \qquad \begin{matrix} R \\ | \\ x \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x \\ | \\ R \end{matrix}$$

donde $R \in \mathcal{R}_A$ y $x \in A$ se cumple que su número de orígenes es igual a su *size*.

TI: Por demostrar que para los A-remolinos R' construidos usando las reglas 3, 4, 5 y 6 se cumple que $\#origenes(R') = size(R')$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que R' es de la forma $R — x — y$ (los demás casos se demuestran análogamente). Por la regla 3 de la definición de origin tenemos que $origin(R — x — y) = origin(R — x)$. Por HI sabemos que $\#origenes(R — x) = size(R — x)$, y luego todos los elementos de $R — x$ serán orígenes de R'. Luego, si demostramos que y es origen, demostramos que $\#origenes(R — x — y) = size(R — x — y)$.

Notemos que como R tiene al menos un elemento, deben existir $x'' \in A$, $R'' \in \mathcal{R}_A$ tales que al menos una de las siguientes igualdades es cierta:

- $R — x — y = x'' — R''$
- $R — x — y = \begin{array}{c} x'' \\ | \\ R'' \end{array}$
- $R — x — y = \begin{array}{c} R'' \\ | \\ x'' \end{array}$

Luego por las reglas 4, 5 o 6 de la definición de origin tenemos que:

$$origin(R — x — y) = origin(R'')$$

Como R'' resulta de sacarle un elemento a R', podemos usar la HI nuevamente, y tenemos que

$$\#origenes(R'') = size(R'')$$

y entonces todos los elementos de R'' son orígenes. En particular, y es origen de R'', y por lo tanto de $R — x — y$. Por lo tanto, como todos los elementos de $R — x$ junto con y son posibles orígenes de R', concluimos que

$$\#origenes(R — x — y) = size(R — x — y)$$

Se sigue por inducción estructural que $\#origenes(R) = size(R)$ para cualquier A-remolino.

Pauta (3 pts.)

- 0.5 pto. por caso base.
- 0.5 pto. por hipótesis de inducción.
- 2 ptos. tesis de inducción y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.