PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
CURSO: MATEMÁTICAS DISCRETAS
AYUDANTES: FRANCISCA CAPRILE, CATALINA ORTEGA, MATÍAS FERNÁNDEZ E IGNACIO VERGARA

# Ayudantía 8

13 de octubre de 2023

2º semestre 2023 - Profesores G. Diéguez - S. Bugedo - N. Alvarado- B. Barías

**Clases de equivalencia**

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto $A$ y un elemento $x \in A$. La clase de equivalencia de $x$ bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

**Teorema:** Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto $A$.

1. Para todo $x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y solo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$, entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$.

**Función**

Sea $f \subseteq A \times B$ diremos que f es una función de A en B si dado cualquier elemento $\forall a \in A \exists b \in B$ tal que:

$$afb \wedge afc \Longrightarrow b = c$$

Sea $f : A \to B$. Diremos que f es

- **Inyectiva** si la función es uno a uno, esto es $\forall x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
- **Sobreyectiva** si $\forall b \in B. \exists a \in A$ tal que $b = f(a)$
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

**Función invertible** Dada una función f de A en B, diremos que f es invertible si su relación inversa $f^{-1}$ es una función de B en A.

**Composición de funciones** Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la composición de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

**Principio del palomar** Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$ , pero $f(x) = f(y)$.

**Equinumeroso** Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

## Ejercicio 1

Se define el conjunto $M$ conformado por todas las estaciones del metro de Santiago. Además se define la relación binaria L sobre el conjunto $M \times M$, de modo que dos estaciones $(a, b) \in L$ si es posible realizar un viaje en metro desde $a$ hasta $b$ sin realizar ningún transbordo (combinación). Por ejemplo, $(Conchal, U.deChile) \in L$, sin embargo, $(ULA, Bellasartes) \notin L$. En base a las definiciones previas y considerando el trazado actual del metro de Santiago, evalúe si es posible definir $L$ como una relación de equivalencia y describa sus posibles clases de equivalencia. En caso contrario, plantee correcciones a la definición para definir $L$ como una relación de equivalencia y describir sus posibles clases de equivalencia.

**Solución:**

En primer lugar, es posible llegar a una estación $a$ desde la misma estación, por ende $L$ es refleja. En segundo lugar, dado que el metro ofrece trenes en ambas direcciones, si es posible trasladarse de $a$ a $b$ sin transbordo, también lo es de $b$ a $a$, así $L$ es simétrica. Finalmente la propiedad que no permite formar clases de equivalencia (ni que $L$ sea relación de equivalencia) es la transitividad debido a las estaciones que son combinaciones como Santa Ana o Baquedano, ya que permiten hacer viajes en 2 líneas. Sería intuitivo considerar las líneas del metro como clases de equivalencia, ya que entre ellas uno se podría desplazar sin transbordos. Por ende es necesario redefinir las estaciones que son combinación, ya sea eliminándolas o definiendo la estación $a$ como dos estaciones, cada una perteneciente a su línea. Así, se evalúan nuevamente las características y se formarían las clases de equivalencia como las actuales seis líneas del metro.

## Ejercicio 2

Sean $A, B$ conjuntos no vacíos con al menos dos elementos cada uno. Sean $\pi : A \times B \to A$ dada por $\pi(a, b) = a, \sigma : B \times A \to B$ dada por $\sigma(b, a) = b$ y $f : A \times B \to B \times A$ dada por $f(a, b) = (b, a)$. Determine si las siguientes composiciones están definidas.

1. $\pi \circ \sigma$.
2. $\sigma \circ f$.
3. $f \circ \pi$.

**Solución:**

1. $\pi \circ \sigma$ no está definida pues $\pi$ tiene dominio $A \times B$, mientras que el codominio de $\sigma$ es $B$.
2. $\sigma \circ f$ sí está definida pues el dominio de $\sigma$ es justamente el codominio de $f$.
3. $f \circ \pi$ no está definida pues el dominio de $f$ es $A \times B$, mientras que el codominio de $\pi$ es $A$.

## Ejercicio 3

Sean $A, B$ conjuntos no vacíos con al menos dos elementos cada uno. Determine la inyectividad y la sobreyectividad de las siguientes funciones. En caso de que sean biyectivas, determine la inversa.

1. $\pi : A \times B \to A$ dada por $\pi(a, b) = a$.
2. $f : A \times B \to B \times A$ dada por $f(a, b) = (b, a)$.

**Solución:**

1. En primer lugar, $\pi$ no es inyectiva pues si $b, c$ son dos elementos distintos de $B$, entonces $\pi(a, b) = \pi(a, c)$ pero $(a, b) \neq (a, c)$. Por otro lado, veamos que $\pi$ es sobreyectiva. En efecto, tomemos un $a \in A$. Queremos probar que existe un par $(x, y) \in A \times B$ de modo que $\pi(x, y) = a$. Notemos que si tomamos el par $(a, b) \in A \times B$, donde $b \in B$, entonces $\pi(a, b) = a$, y por lo tanto $\pi$ es sobreyectiva.

2. Veamos que $f$ es inyectiva. Sean $(a,b),(c,d) \in A \times B$ de modo que $f(a,b) = f(c,d)$. Por definición de $f$, esto equivale a que $(b,a) = (d,c)$, de donde $b = d$ y $a = c$. Esto implica que $(a,b) = (c,d)$, y por lo tanto $f$ es inyectiva. Veamos ahora que $f$ es sobreyectiva. Sea $(b,a) \in B \times A$. En tal caso, notamos que $(a,b) \in A \times B$ cumple que $f(a,b) = (b,a)$ y por lo tanto $f$ es sobreyectiva. Finalmente, definamos $g : B \times A \to A \times B$ dada por $g(b,a) = (a,b)$. Afirmamos que $g$ es la inversa de $f$. En efecto,

$$g \circ f(a,b) = g(f(a,b)) = g(b,a) = (a,b) = \mathrm{id}_{A\times B}(a,b),$$

y

$$f \circ g(b,a) = f(g(b,a)) = f(a,b) = (b,a) = \mathrm{id}_{B\times A}(b,a).$$

# Ejercicio 4

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$ y sea $\mathcal{F} := \{f | f : \mathbb{N} \to \{0,...,9\}$ es una función monótona decreciente$\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es equinumeroso con $\mathbb{Q}$.

Hint: Puede utilizar que si $g$ es una funcion inyectiva tal que $g : A \to B$ con $A$ infinito y $B$ numerable (con numerable se entiende como equinumeroso con $\mathbb{N}$, pueden asumir $\mathbb{Q}$ es equinumeroso con $\mathbb{N}$, o sea $\mathbb{Q}$ es numerable), entonces $A$ es equinumeroso con $B$. Queda como propuesto demostrar éste resultado

**Solución:**
Para demostrar lo solicitado buscamos generar una función $g : \mathcal{F} \to \mathbb{Q}$ inyectiva Como las funciones en $\mathcal{F}$ son monótonas decrecientes se cumple que todo $f \in \mathcal{F}$ se puede expresar como una sucesión del tipo $f(0)f(1)f(2)...$ donde $f(0) \geq f(1) \geq f(2) \geq ...$, pero como las funciones son del tipo $f : \mathbb{N} \to \{0,...,9\}$ necesariamente a partir de un $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) = f(k+1) = f(k+2) = ... \text{ pues } \{0,...,9\} \text{ se encuentra acotado inferiormente}$$

por lo cual considerando

$$g : \mathcal{F} \to \mathbb{Q}$$

tal que,

$$g(f) = f(0), f(1)f(2)...f(k)f(k)f(k)...$$

se tiene que $g$ es inyectiva pues si $g(f) = g(h)$ ésto implica que

$$f(0), f(1)f(2)...f(k)f(k)f(k)... = h(0), h(1)h(2)...h(k)h(k)h(k)...$$

por lo cual $f(n) = h(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Finalmente utilizando el hint obtenemos que $\mathcal{F}$ es equinumeroso con $\mathbb{Q}$. Se puede ver que se puede utilizar el hint ya que $\mathcal{F}$ es infinito pues por ejemplo la sucesión infinita de funciones

$$f_1(0) = 1 \wedge f(n) = 0 \forall n > 0$$

$$f_2(0) = 1 \wedge f_2(1) = 1 \wedge f(n) = 0 \forall n > 1$$

$$f_3(0) = 1 \wedge f_3(1) = 1 \wedge f_3(2) = 1 \wedge f(n) = 0 \forall n > 2$$

y así sucesivamente, pertenece a $\mathcal{F}$

# Demostración propuesto

Como $B$ es numerable, entonces es equinumeroso con $\mathbb{N}$ por lo cual existe una función $g : B \to \mathbb{N}$ biyectiva. Luego, por composición de funciones se tiene que la función $\tilde{f} : A \to \mathbb{N}$ tal que,

$$\tilde{f}(a) = (gof)(a)$$

es inyectiva. Definimos también,

$$M := \{m \in \mathbb{N} | \exists a \in A, \tilde{f}(a) = m\} \subseteq \mathbb{N}$$

por lo cual $M$ corresponde al conjunto de los elementos con preimagen en $\tilde{f}$. Definimos entonces la función $\tilde{f}_M : A \to M$ como la restricción de $\tilde{f}$. A partir de ésto, se puede observar que $\tilde{f}_M$ es sobreyectiva e inyectiva, i.e, es biyectiva. Finalmente como $M \subseteq \mathbb{N}$ es numerable, existe una biyección entre $h : M \to \mathbb{N}$ por lo cual, definiendo $\tau : A \to \mathbb{N}$ como

$$\tau(a) = (ho\tilde{f})(a)$$

se obtiene que $\tau$ es biyectiva, obteniendo así que existe una biyección entre $A$ y $\mathbb{N}$ por lo cuál tanto $A$ como $B$ y $\mathbb{N}$ son equinumerosos, demostrando así lo buscado.