Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7 - Relaciones de Orden

10 de mayo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial, y sean $S \subseteq A, x \in A$.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior. Análogamente se define el supremo de un conjunto.

1. Monarquías

Sea K el conjunto de los monarcas ingleses. Sea $\mathcal{M}$ una relación sobre K definida como

$a\mathcal{M}b$ si y solo si a fue monarca después o al mismo tiempo que b.

Su dual $\mathcal{M}^{-1}$ se define como

$a\mathcal{M}^{-1}b$ si y solo si a fue un monarca antes o al mismo tiempo que b.

Demuestre que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{-1}$ son órdenes totales sobre K.

Solución
Un órden total $\mathcal{M}$ definido sobre un conjunto K es un órden parcial que además cumple que $\forall x, y \in K, x\mathcal{M}y \vee y\mathcal{M}x$. Recordemos que un orden parcial es una relación refleja, antisimétrica y transitiva. Demostraremos cada una de estas propiedades por separado, primero para $\mathcal{M}$ y luego para $\mathcal{M}^{-1}$.

1. Refleja: como todo monarca cumple que fue monarca al mismo tiempo que sí mismo, claramente se cumple que $\forall a \in K, a\mathcal{M}a$.

2. Antisimétrica: sean $a, b \in K$ tales que $a\mathcal{M}b$ y $b\mathcal{M}a$. Por definición de monarquía[1], en un momento dado solo puede haber un monarca. Adicionalmente, un monarca solo puede ser monarca una vez, ya que el cargo se hereda tras la muerte, por lo que no es posible que a sea monarca, luego b lo sea (satisfaciendo $b\mathcal{M}a$) y luego a nuevamente (lo que satisfacería también $a\mathcal{M}b$), ya que una vez que b asuma, a ya estaría muerto. Deducimos con ello que a y b son necesariamente el mismo monarca, con lo que la relación es antisimétrica.

3. Transitiva: sean $a, b, c \in K$ tales que $a\mathcal{M}b \wedge b\mathcal{M}c$. Como b fue monarca al mismo tiempo o después que a, y c fue después que b, como el tiempo es lineal (y que no hay viajes en el tiempo) necesariamente c fue monarca después que a, con lo que $a\mathcal{M}c$, y concluímos que la relación es transitiva.

Tenemos entonces que $\mathcal{M}$ es un orden parcial.
Con $a, b \in K$, necesariamente o a fue monarca después que b, o b fue monarca después que a, o a y b son el mismo monarca, y estos tres casos son los unicos posibles, necesariamente $a\mathcal{M}b$ o $b\mathcal{M}a$, por lo que $\mathcal{M}$ es un orden total.

2. Verdadero y Falso

Sea A un conjunto no vacío y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial. En esta pregunta refiérase siempre a este orden parcial y responda verdadero o falso según corresponda. En caso de ser verdadero, demustrelo, y en caso de ser falso, dé un contra ejemplo y explíquelo.

[1]RAE: Organización del Estado en la que la jefatura y representación supremas son ejercidas por **una persona** a título de rey o reina.

1. . Si S tiene un mínimo para todo $S \subseteq A$ con $S \neq \varnothing$, entonces $\preceq$ es un orden total.
2. Si $\preceq$ es un orden total, entonces S tiene un mínimo para todo $S \subseteq$ A con $S \neq \varnothing$.
3. Para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.

Solución

1. Verdadero.
   PD: $\forall S \subseteq A, S \neq \varnothing$. S tiene un mínimo, entonces $\preceq$ es un orden total.
   Sabemos por enunciado que $\preceq$ que ya es un orden parcial , por lo tanto lo anterior es equivalente a demostrar que $\preceq$ es conexo.
   Sean $a, b \in A$ y escogemos $S = \{a, b\}$. Como S tiene mínimo, pueden pasar dos cosas, que a sea menor que b o viceversa: $a \preceq b$ o $b \preceq a$. Por lo tanto, $\preceq$ es conexo.
2. Falso. Basta tomar el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ como contraejemplo. El conjunto $\mathbb{Z}$ es un orden total y no tiene mínimo.
3. Falso. Falso que para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.
   Un posible contra-ejemplo es el siguiente: Sea $A = \mathbb{N}$ y el orden parcial "divide a". Si definimos $S = \{2, 3\}$, vemos que tanto 2 como 3 son minimales y maximales al mismo tiempo, pero S no tiene un único elemento. Otro posible contra-ejemplo es considerar el conjunto potencia $A = 2^{\mathbb{N}}$ tomando el subconjunto $S = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

3. La mezcla

Sea A un conjunto no vacío, $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial, ambos sobre A. Considere el conjunto cuociente $A/\simeq$ y defina la siguiente relación $\ll \subseteq (A/\simeq) \times (A/\simeq)$:

$$(S_1, S_2) \in \ll \text{ si, y solo si, existe } a \in S_1 \text{ tal que } \forall b \in S_2 \text{ se cumple que } a \preceq b$$

1. Demuestre que $\ll^r$ es un orden parcial sobre $A/\simeq$ donde $\ll^r$ es la clausura refleja de $\ll$.
2. ¿Es verdad que A tiene un elemento minimal según $\preceq$ si, y solo si, $A/\simeq$ tiene un elemento minimal según $\ll^r$? Demuestre su afirmación.

Solución

Parte 1

Como debemos demostrar que $\ll^r$ es un orden parcial, debemos demostrar que esta relación es refleja, transitiva y antisimétrica.

1. Refleja

   Como $\ll^r$ es clausura refleja, es refleja por definición.

2. Antisimétrica

   Sean S_1, S_2 tales que $S_1, S_2 \in A/\simeq$, $S_1 \ll^r S_2$ y $S_2 \ll^r S_1$.
   P.D.: $S_1 = S_2$
   Como

$$S_1 \ll^r S_2, \exists a \in S_1. \forall b \in S_2. a \preceq b$$

$$S_2 \ll^r S_1, \exists c \in S_2. \forall d \in S_1. c \preceq d$$

   En particular, $(a \preceq c) \wedge (c \preceq a)$. Como $\preceq$ es orden parcial, es antisimétrico y $a = c \rightarrow a \simeq c$. Luego,

$$a \in S_1 \rightarrow S_1 = [a]_{\simeq}$$

$$c \in S_2 \rightarrow S_2 = [c]_{\simeq}$$

   y como $a \simeq c$, $S_1 = S_2$.

3. Transitiva

   Sean S_1, S_2 y $S_3 \in A/\simeq$ tales que $S_1 \ll^r S_2$ y $S_2 \ll^r S_3$.
   P.D.: $S_1 \ll^r S_3$

$$S_1 \ll^r S_2 \rightarrow \exists a \in S_1. \forall b \in S_2. a \preceq b$$

$$S_2 \ll^r S_3 \rightarrow \exists c \in S_2. \forall d \in S_3. c \preceq d$$

   En particular $a \preceq c$ ya que $c \in S_2$. Como $a \preceq c$ y $c \preceq d$, por transitividad de $\preceq$ (que es un orden parcial) tenemos que $a \preceq d$. Como $\exists a \in S_1. \forall d \in S_3. a \preceq d$, tenemos que $S_1 \ll^r S_3$.

Parte 2

Esta afirmación es falsa por lo que debemos encontrar un contraejemplo. Consideremos $A = \mathbb{Z}$, con orden parcial $\leq$ usual, y la relación de equivalencia $\simeq$ tal que $a \simeq b \leftrightarrow$ a y b son ambos negativos o ambos positivos$_0$ (más el 0).

Con esto, tenemos que $A/\simeq = \{\{a|a \in \mathbb{Z}_-\}, \{a|a \in \mathbb{Z}_+\}\}$. Fácilmente se puede ver que $\{a|a \in \mathbb{Z}_-\} \ll^r \{a|a \in \mathbb{Z}_+\}$, ya que existe un número (cualquier negativo) que es menor a todos los elementos del otro conjunto (los positivos). Esto implica que existe un elemento minimal según $\ll^r$ ($\{a|a \in \mathbb{Z}_-\}$). No obstante, $\mathbb{Z}$ no tiene minimal según $\leq$, por lo que concluímos que la dirección $\leftarrow$ de la doble implicancia no se cumple, por lo que la propiedad es falsa.