Relaciones

Clase 12

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Introducción

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de dominios posiblemente distintos.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Angela	Merkel	Política	ISTJ
339	Johann Wolfgang	Von Goethe	Escritor	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ada	Lovelace	Matemática	ENTP

¿Qué le falta a los conjuntos para poder definir tablas?

Objetivos de la clase

- Entender el producto cartesiano y las relaciones
- Conocer ejemplos de relaciones binarias
- Conocer tipos de relaciones según sus propiedades
- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia

Outline

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde $\mathcal{U}$ es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Definiciones básicas

Demostración

($\Rightarrow$) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

1. $a = b$: En este caso $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\{\{a\}, \{a\}\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\{\{a\}\}$. Luego, tenemos que $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Demostración

($\Rightarrow$)

2. $a \neq b$: Como $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{c\},\{c,d\}\big\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a,b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a\},\{a,d\}\big\}$, y luego por axioma de extensión $\{a,b\} = \{a,d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Demostración

($\Leftarrow$) Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Definiciones básicas

Observación (propuesta ★)

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a, b) = \left\{a, \{b\}\right\}$$

Esta no es una buena definición. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{array}{ccccc} (a, b) & = & (\{x\}, y) & = & \{\{x\}, \{y\}\} \\ (c, d) & = & (\{y\}, x) & = & \{\{y\}, \{x\}\} \end{array}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuadruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una ***n*-tupla** como:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Definición

Dados dos conjuntos A y B, definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejemplo

Podemos definir producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

$$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Outline

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que *sum* es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

La **aridad** de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación ***n*-aria**.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Angela	Merkel	Política	ISTJ
339	Johann Wolfgang	Von Goethe	Escritor	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ada	Lovelace	Matemática	ENTP

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{3,4\}$, entonces $R = \{(1,3),(2,4)\}$ es una relación binaria de A en B.

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B?

Relaciones binarias

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A, diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de "potencia":

$$A \times \overset{(n-2 \text{ veces})}{\cdots} \times A = A^n$$

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$<\subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in < \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1,3) \in < \qquad (10,4) \notin < \qquad (7,7) \notin <$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: ¿$(3, 17) \in <$?

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a, b) \in R$
- $R(a, b)$
- aRb
  - Si no están relacionados, podemos escribir $a \not R b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \nless 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación **infija**.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo = ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo = usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación *divide a*, denotada por $|$, sobre los naturales sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a:

$$a|b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = ka.$$

$$3|9 \qquad 18|72 \qquad 7\nmid 9$$

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación *equivalencia módulo n*, denotada por $\equiv_n$, sobre los naturales, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $|a - b|$ es múltiplo de n:

$$a \equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a - b| = kn.$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4$$

De ahora en adelante trabajaremos con relaciones binarias sobre un conjunto, a las que nos referiremos simplemente como relaciones.

Outline

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Refleja** si para cada $a \in A$ se tiene que $R(a, a)$.
- **Irrefleja** si para cada $a \in A$ no se tiene que $R(a, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto que $R(b, a)$.
- **Antisimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Transitiva** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa** si para cada $a, b \in A$, se tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Ejercicio

Dé ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Ejercicios

1. Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.
2. Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

<u>Reflexividad:</u> Propuesto (★).

<u>Antisimetría:</u> Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$. Si $a|b$, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = k_1 \cdot a$. Similarmente, si $b|a$ sabemos que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a = k_2 \cdot b$. Reemplazando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $b = k_1 \cdot k_2 \cdot b$. Como la relación $|$ está definida sobre los naturales sin el 0, podemos dividir por b y obtenemos que $1 = k_1 \cdot k_2$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, necesariamente se debe cumplir que $k_1 = k_2 = 1$, y aplicando esta igualdad en $b = k_1 \cdot a$, obtenemos que $b = a$.

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Transitividad: Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$. Aplicando la definición, sabemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 \cdot a$ y $c = k_2 \cdot b$. Aplicando la primera igualdad en la segunda, obtenemos que $c = k_2 \cdot k_1 \cdot a$, y por lo tanto existe $k_3 = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c = k_3 \cdot a$, de donde concluimos que $a|c$. $\square$

Propiedades de las relaciones

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Demostración

<u>Reflexividad:</u> Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n x$. Por definición, debemos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x| = k \cdot n$. Como $x - x = 0$ para todo natural, podemos tomar $k = 0$ y luego se cumple la igualdad anterior, con lo que mostramos que $x \equiv_n x$.

<u>Simetría:</u> Debemos demostrar que si $x \equiv_n y$, entonces $y \equiv_n x$. Por definición, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| = k \cdot n$. Como $|x - y| = |y - x|$, tenemos que $|y - x| = k \cdot n$, y luego por definición de equivalencia módulo n, se cumple que $y \equiv_n x$.

Demostración

Transitividad: Dados x, y, z tales que $x \equiv_n y$ e $y \equiv_n z$, debemos demostrar que $x \equiv_n z$. Usando la definición, esto es equivalente a demostrar que si $|x - y| = k_1 \cdot n$ y $|y - z| = k_2 \cdot n$, entonces $|x - z| = k \cdot n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Asumiremos que x, y y z son distintos (el resultado es trivial de otra manera). Supongamos ahora que $x - y > 0$ e $y - z > 0$ (los demás casos son análogos). Entonces, podemos escribir

$$x - y = k_1 \cdot n$$
$$y - z = k_2 \cdot n$$

y sumando ambas igualdades, obtenemos que $x - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n$. Notemos que $x - z > 0$ también. Por lo tanto, si tomamos $k = k_1 + k_2$, tenemos que $|x - z| = k \cdot n$, concluyendo entonces que $x \equiv_n z$. □

Outline

Relaciones de equivalencia

Las propiedades de las relaciones se pueden usar para definir tipos de relaciones. Un tipo muy importante es el siguiente:

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejercicio

Demuestre que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)^2$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall\sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)^2$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall\sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

<u>Demostración:</u> Debemos demostrar que la equivalencia lógica es refleja, simétrica y transitiva.

<u>Reflexividad:</u> Debemos demostrar que para toda fórmula $\varphi \in L(P)$, se cumple que $\varphi \equiv \varphi$. Si tomamos cualquier valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición obtenemos que $\varphi \equiv \varphi$.

Relaciones de equivalencia

Simetría: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa $(\star)$, tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

$(\star)$ Demuestre esto desde la definición de teoría de conjuntos

Relaciones de equivalencia

Simetría: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa $(\star)$, tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

$(\star)$ Demuestre esto desde la definición de teoría de conjuntos

Transitividad: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$ y $\psi \equiv \theta$, entonces $\varphi \equiv \theta$. Por definición, tenemos que para todo σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ y $\sigma(\psi) = \sigma(\theta)$. Aplicando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $\sigma(\varphi) = \sigma(\theta)$, y luego por definición concluimos que $\varphi \equiv \theta$. □

Clase de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$. La **clase de equivalencia** de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

Si la relación se entiende del contexto, sólo escribiremos $[x]$.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

R: Cada clase de equivalencia contendrá a todas las fórmulas que son lógicamente equivalentes entre sí. Las fórmulas que son lógicamente equivalentes tienen la misma tabla de verdad, por lo que podemos pensar que cada clase de equivalencia representa a una posible tabla de verdad. Por lo tanto, si tenemos un conjunto P de variables proposicionales de tamaño n, la cantidad de clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia lógica es 2^{2^n}.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Teorema

1. $\forall x \in A,\ x \in [x]$.

<u>Demostración:</u> Como $\sim$ es una relación de equivalencia, es refleja. Por lo tanto, $\forall x \in A, x \sim x$. Luego, por definición de una clase de equivalencia, tenemos que $\forall x \in A, x \in [x]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

$(\Rightarrow)$: Suponiendo que $x \sim y$, debemos demostrar que $[x] = [y]$. Esto significa que debemos demostrar que $[x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$:

a Por demostrar que $[x] \subseteq [y]$. Por definición, $[x] = \{z \mid x \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es simétrica, y luego $y \sim x$. Ahora, también es cierto que $\sim$ es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [x], y \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [x], z \in [y]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

b Por demostrar que $[y] \subseteq [x]$. Por definición, $[y] = \{z \mid y \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [y], x \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [y], z \in [x]$.

$(\Leftarrow)$: Suponiendo que $[x] = [y]$, debemos demostrar que $x \sim y$. Sea $z \in [x]$. Por definición de clases de equivalencia: $x \sim z$ (1). Como $[x] = [y]$, sabemos que $z \in [y]$, y por lo tanto $y \sim z$, y por simetría $z \sim y$ (2). Finalmente, por transitividad entre (1) y (2), concluimos que $x \sim y$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Por contrapositivo, supongamos que $[x] \cap [y] \neq \varnothing$. Como la intersección de ambas clases de equivalencia no es vacía, existe z tal que $z \in [x]$ y $z \in [y]$. Aplicando la definición de clase de equivalencia, tenemos que $x \sim z$ (1) e $y \sim z$, y por simetría se cumple que $z \sim y$ (2). Por transitividad entre (1) y (2) se tiene que $x \sim y$, y por la parte 2 del teorema se cumple que $[x] = [y]$. Por lo tanto, queda demostrado el resultado.

Outline

Objetivos de la clase

- Entender el producto cartesiano y las relaciones
- Conocer ejemplos de relaciones binarias
- Conocer tipos de relaciones según sus propiedades
- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia