Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

21 de Junio de 2024

Preguntas e incisos en blanco se evalúan con nota 1.5 proporcional.

Pregunta 1

Sea A un conjunto. Una relación binaria $\prec$ sobre A se dice orden estricto si es asimétrica y transitiva.

(a) **(3 ptos.)** Demuestre que si $\prec$ es un orden estricto, entonces $\prec^{-1}$ es un orden estricto.

(b) **(3 ptos.)** Considere $\preceq$ y $\succeq$ definidas según

$$\begin{aligned} \preceq \quad &:= \quad \prec \cup I_A \\ \succeq \quad &:= \quad \prec^{-1} \cup I_A \end{aligned}$$

donde $I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- **(1 pto.)** $\prec^{-1} \subsetneq \succeq$
- **(1 pto.)** $\preceq \cap \succeq = I_A$
- **(1 pto.)** $\prec \cup \prec^{-1} = A \setminus I_A$

Solución

Sea A un conjunto. Una relación binaria $\prec$ sobre A se dice orden estricto si es asimétrica y transitiva.

(a) Demuestre que si $\prec$ es un orden estricto, entonces $\prec^{-1}$ es un orden estricto.

<u>Sol.</u> Supongamos que $\prec$ es un orden estricto, es decir que es una relación asimétrica y transitiva. Debemos demostrar que $\prec^{-1}$ también es asimétrica y transitiva.

Asimetría. Sean $a, b \in A$ tales que $a \prec^{-1} b$. Entonces

$$\begin{aligned} a \prec^{-1} b &\Rightarrow b \prec a && \text{(definición de relación inversa)} \\ &\Rightarrow \neg(a \prec b) && \text{(asimetría de } \prec\text{)} \\ &\Rightarrow \neg(b \prec^{-1} a) && \text{(definición de relación inversa)} \end{aligned}$$

Concluimos que $\prec^{-1}$ es asimétrica.

Transitividad. Sean $a, b, c \in A$ tales que $a \prec^{-1} b$ y $b \prec^{-1} c$. Entonces

$$\begin{aligned} b \prec^{-1} c &\Rightarrow c \prec b && \text{(definición de relación inversa)} \quad (1)\\ a \prec^{-1} b &\Rightarrow b \prec a && \text{(definición de relación inversa)} \quad (2)\\ (1) \text{ y } (2) &\Rightarrow c \prec a && \text{(transitividad de } \prec) \quad (3)\\ &\Rightarrow a \prec^{-1} c && \text{(definición de relación inversa)} \quad (4) \end{aligned}$$

Concluimos que $\prec^{-1}$ es transitiva, y, por lo tanto, también un orden estricto.

(b) Considere $\preceq$ y $\succeq$ definidas según

$$\begin{aligned} \preceq &:= \prec \cup I_A \\ \succeq &:= \prec^{-1} \cup I_A \end{aligned}$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- $\prec^{-1} \subsetneq \succeq$

  Sol. Asumiremos A no vacío, pues en caso contrario la propiedad es falsa y todas las propiedades sobre las relaciones descritas se vuelven triviales. Debemos demostrar que

  $$\forall x (x \in \prec^{-1} \to x \in \succeq)$$

  o, dicho de otro modo, que

  $$\forall a \in A \, \forall b \in A \, (a \prec^{-1} b \to a \succeq b)$$

  Sean entonces $a, b \in A$ tales que $a \prec^{-1} b$. Por una parte, por definición de unión, tenemos que

  $$\begin{aligned} \succeq &= \prec^{-1} \cup I_A \\ &= \{x \mid x \in \prec^{-1} \vee x \in I_A\} \\ &= \{(a, b) \in A \times A \mid (a \prec^{-1} b) \vee (a = b)\} \end{aligned}$$

  Notemos entonces que $(a, b) \in \succeq$, pues satisfacen $(a \prec^{-1} b) \vee (a = b)$. Por generalización universal, concluimos que $\prec^{-1} \subseteq \succeq$.
  Para demostrar inclusión estricta, debemos demostrar que $\prec^{-1} \neq \succeq$, es decir que existe algún par en $\succeq$ que no esté en $\prec^{-1}$. Es fácil notar que basta tomar cualquier $a \in A$ y $a \succeq a$ pero no $a \prec^{-1} a$. Lo primero es directo de la definición de unión anteriormente explicitada. Para lo segundo, notemos que $\prec^{-1}$ es antisimétrica, por lo que $a \prec^{-1} a$ implicaría $\neg(a \prec^{-1} a)$ lo que es una contradicción.

- $\preceq \cap \succeq = I_A$

  Sol. Sea $(a, b) \in \preceq \cup \succeq$. Entonces

  $$\begin{aligned} (a, b) \in \preceq \cup \succeq &\Leftrightarrow (a \preceq b) \wedge (a \succeq b) && \text{(definición de } \cap)\\ &\Leftrightarrow ((a, b) \in \prec \cup I_A) \wedge ((a, b) \in \prec^{-1} \cup I_a) && \text{(definición de } \preceq \text{ y } \succeq)\\ &\Leftrightarrow ((a \prec b) \vee (a = b)) \wedge ((a \prec^{-1} b) \vee (a = b)) && \text{(definición de } \cup, \prec \text{ e } I_A)\\ &\Leftrightarrow (a = b) \vee (a \prec b \wedge a \prec^{-1} b) && \text{(ley de distribución)}\\ &\Leftrightarrow (a = b) \vee (a \prec b \wedge b \prec a) && \text{(definición de relación inversa)} \end{aligned}$$

Como ya argumentamos anteriormente, $(a \prec b \wedge b \prec a)$ es una contradicción puesto que $\prec$ es una relación antisimétrica por lo que $a \prec b$ implica $\neg(b \prec a)$, lo que contradice $b \prec a$. Finalmente:

$$\begin{aligned} (a,b) \in \preceq \cup \succeq &\Leftrightarrow (a=b) \vee (a \prec b \wedge b \prec a) \\ &\Leftrightarrow a = b && \text{(ley de identidad)} \\ &\Leftrightarrow (a,b) \in I_A \end{aligned}$$

De lo que concluimos que $\preceq \cap \succeq = I_A$.

- $\prec \cup \prec^{-1} = (A \times A) \setminus I_A$

  Sol. Esta afirmación es falsa y daremos un contraejemplo de relación de orden estricto que no cumple con la igualdad. Sea $A = \mathbb{N}$ y $\prec$ la relación de divisor estrictamente menor definida por

  $$a \prec b \Leftrightarrow a < b \text{ y } a|b$$

  Se deja como demostración al lector que $\prec$ es un orden estricto, pero esencialmente viene del hecho que $<$ y $|$ son transitivos, y que $<$ es asimétrico. En dicha relación, notemos que $(3,5) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus I_A$ pero no es cierto $(3,5) \in \prec \cup \prec^{-}1$ pues $\neg(3|5)$ y $\neg(5,3)$.

  Para que la afirmación sea cierta, se requiere que $\preceq$ (o equivalentemente $\succeq$) sea una relación conexa.

Pauta (6 pts.)

a) 1.5 pts. por cada propiedad (asimetría y transitividad).

b)
- 1.5 pts. por demostrar $\prec^{-1} \subsetneq \succeq$. Bonus de 0.5 pt. por explicar que si A es vacío, la propiedad es falsa.
- 1.5 pts. por demostrar $\preceq \cap \succeq = I_A$.
- Bonus de 0.5 por demostrar con algún contraejemplo que no es cierto $\prec \cup \prec^{-1} = (A \times A) \setminus I_A$. Bonus de 0.5 por explicar que se requiere conexidad para que sea cierto.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2

(a) **(3 ptos.)** Sean A, B, C y D conjuntos tales que $|A| = |C|$ y $|B| = |D|$. Demuestre que existe una inyección $f \colon A \to B$ si y sólo si existe una inyección $g \colon C \to D$.

(b) **(3 ptos.)** Sean A, B conjuntos finitos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$. Demuestre que

$$|A \times B| = n \cdot m$$

mostrando una biyección $h : A \times B \to \{0, 1, \ldots, n \cdot m - 1\}$.

Solución

(a) Sean A, B, C y D conjuntos tales que $|A| = |C|$ y $|B| = |D|$. Por definición de equinumerosidad, existen biyecciones $h_1 : A \to C$ y $h_2 : B \to D$.

($\Rightarrow$) Sea $f : A \to B$ inyectiva. Definimos la función $g : C \to D$ dada por

$$g(c) = h_2(f(h_1^{-1}(c)))$$

Como h_1 es biyección, h_1^{-1} es función y en particular es inyectiva. Como g se define como composición de funciones inyectivas, es inyectiva. Esta función verifica la condición solicitada.

($\Leftarrow$) Sea $g : C \to D$ inyectiva. Definimos de manera análoga, la función $f : A \to B$ dada por

$$f(a) = h_2^{-1}(g(h_1(a)))$$

Como h_2 es biyección, h_2^{-1} es función y en particular es inyectiva. Como f se define como composición de funciones inyectivas, es inyectiva.

(b) Definimos la función $h : A \times B \to \{0, \dots, nm - 1\}$ según

$$h((a_i, b_j)) = nj + i$$

Es claro que dado que $0 \leq i \leq n - 1$ y $0 \leq j \leq m - 1$, el valor máximo de las imágenes de h es $n(m - 1) + (n - 1) = nm - 1$ y estas siempre son naturales. Demostraremos que h es biyección.

- Inyectividad. Sean a_i, b_j, a_k, b_t tales que $h(a_i, b_j) = h(a_k, b_t)$. Es decir, $nj + i = nt + k$. Como $0 \leq i, k < n$, no es posible factorizar i ni k dividiendo por n. Luego, deducirmos que el resto de dividir $h(a_i, b_j)$ y $h(a_k, b_t)$ entre n es i y k respectivamente. Dada la igualdad de estas imágenes, tenemos que $i = k$. Por lo tanto, también se cumple que $j = t$. De esta forma, tenemos $(a_i, b_j) = (a_k, b_t)$, por lo que h es inyectiva.
- Sobreyectividad. Sea $k \in \{0, \dots, nm - 1\}$. Sabemos que todo natural puede escribirse, al dividir entre n, como $k = nj + i$ para ciertos naturales i, j únicos. Luego, $h(a_i, b_j) = k$ y h es sobreyectiva.

Pauta (6 pts.)

(a) 3 puntos

- 1.0 pto. por definir función g en la demostración $\Rightarrow$.
- 1.0 pto. por argumentar su inyectividad.
- 1.0 pto. por argumento análogo con una función adecuada en la dirección $\Leftarrow$.

(b) 3 puntos

- 1.0 pto. por definir la función h mediante una expresión explícita o entregar una descripción que permita calcular su imagen para un par de elementos de $A \times B$ arbitrario.
- 1.0 pto. por demostrar su inyectividad.
- 1.0 pto. por demostrar sobreyectividad.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un *polinomio con coeficientes enteros* si es de la forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{ donde } a_i \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\mathcal{P} = \{f \mid f \text{ es un polinomio con coeficientes enteros}\}$. Demuestre que $\mathcal{P}$ es enumerable.

Solución

Sea $\mathcal{P}\backslash$ el conjunto de todos los polinomios de grado n con coeficientes enteros (donde el grado corresponde a la mayor potencia presente en el polinomio). Como todo polinomio en $\mathcal{P}$ tiene un grado $n \in \mathcal{N}$, es claro que

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} P_n$$

Es decir, $\mathcal{P}$ corresponde a la unión enumerable de los P_n. Luego, basta demostrar que cada P_n es enumerable. Sea

$$g : P_n \to \mathcal{Z}^{n+1} \text{ tal que } g(f) = (a_n, ..., a_1, a_0$$

con f un polinmio de grado n con la forma descrita en el enunciado. Es claro que esta función es inyectiva, pues si $g(f_1) = g(f_2)$, se tiene que f_1 y f_2 tienen los mismos coeficientes, y por lo tanto son el mismo polinomio. Además, como todos los coeficientes son enteros, esta función es sobreyectiva. Tenemos entonces una biyección entre P_n y $\mathcal{Z}^{n+1}$. En clases demostramos que $\mathcal{N}^n$ es enumerable, y como $|\mathcal{N}| = |\mathcal{Z}|$, es fácil demostrar que $\mathcal{Z}^n$ es enumerable. Concluimos entonces que cada P_n es enumerable, y por el argumento dado anteriormente, que $\mathcal{P}$ es enumerable.

Pauta (6 pts.)

- 0.75 ptos. por fundamentar que la unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable.
- 0.75 ptos. por fundamentar que $\mathcal{P}$ es la unión enumerable de los P_n.
- 0.5 ptos. por fundamentar que $\mathcal{Z}^n$ es enumerable.
- 2.5 ptos. por mostrar que todo P_n es enumerable encontrando una biyección entre P_n y $\mathcal{Z}^{n+1}$.
- 0.5 ptos. por concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4

Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A. Decimos que R es una relación de preorden si es refleja y transitiva. Para esta pregunta, el símbolo $\preceq$ se interpreta como la relación binaria "no es más numeroso que", que cumple

$$A \preceq B \text{ si y solo si, existe función inyectiva } f : A \to B$$

Además, denotamos por $\mathcal{U}$ el conjunto de conjuntos sanos (bien definidos).

(a) **(2 ptos.)** Demuestre que $\preceq$ es una relación de preorden sobre $\mathcal{U}$.

(b) **(2 ptos.)** Demuestre que la relación $\approx := \preceq \cap \preceq^{-1}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{U}$.

(c) **(2 ptos.)** Considere el conjunto cuociente $S = \mathcal{U}/\approx$ y considere la relación $\lessapprox$ sobre S definida por

$$X \lessapprox Y \text{ si y solo si existen conjuntos } A \in X \text{ y } B \in Y \text{ tales que } A \preceq B$$

Demuestre que $\lessapprox$ define un orden total sobre S.

Solución

(a) Demuestre que $\preceq$ es una relación de preorden sobre $\mathcal{U}$

Sol. Demostraremos que $\preceq$ es refleja y transitiva.

Refleja. Sea $A \in \mathcal{U}$. La función identidad $f : A \to A$ dada por $f(a) = a$ es claramente inyectiva pues $f(x) = f(y)$ es por definición lo mismo que $x = y$, por lo que $A \preceq A$. Concluimos que $\preceq$ es una relación refleja.

Transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{U}$ tres conjuntos bien definidos tales que $A \preceq B$ y $B \preceq C$. Por definición de la relación, existen funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ inyectivas. Notemos que la composición $g \circ f : A \to C$ es inyectiva (teorema visto en clases), por lo que $A \preceq C$. Concluimos que $\preceq$ es una relación transitiva.

Como $\preceq$ es refleja y transitiva, concluimos que es una relación de preorden sobre $\mathcal{U}$.

(b) Demuestre que la relación $\approx := \preceq \cap \preceq^{-1}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{U}$.

Notemos que esta es una definición alternativa de la relación de equinumerosidad (que sabemos que es una relación de equivalencia) permitida por el teorema CSB, pero la demostraremos formalmente, puesto que la demostración en clases quedó propuesta. Para esto, demostraremos que $\approx$ es refleja, simétrica y transitiva.

Refleja. Sea $A \in \mathcal{U}$. Como vimos en el punto anterior, la función identidad muestra que $A \preceq A$, y por definición de relación inversa, que $A \preceq A^{-1}$ igualmente. Por definición de intersección de conjuntos, concluimos que $(A, A) \in \preceq \cap \preceq^{-1} = \approx$, y por lo tanto que $\approx$ es una relación refleja.

Simétrica. Sean $A, B \in \mathcal{U}$ y supongamos que $A \approx B$, demostraremos que $B \approx A$. Notemos que

$$\begin{aligned}
A \approx B &\Leftrightarrow (A, B) \in \preceq \cap \preceq^{-1} && \text{(definición de } \approx\text{)}\\
&\Leftrightarrow A \preceq B \wedge A \preceq^{-1} B && \text{(definición de intersección)}\\
&\Leftrightarrow A \preceq B \wedge B \preceq A && \text{(definición de relación inversa)}\\
&\Leftrightarrow B \preceq A \wedge A \preceq B && \text{(conmutatividad de la conjunción)}\\
&\Leftrightarrow B \preceq A \wedge B \preceq^{-1} A && \text{(definición de relación inversa)}\\
&\Leftrightarrow (B, A) \in \preceq \cap \preceq^{-1} && \text{(definición de intersección)}\\
&\Leftrightarrow B \approx A && \text{(definición de } \approx\text{)}
\end{aligned}$$

Concluimos que $\approx$ es simétrica.

Transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{U}$ y supongamos que $A \approx B$ y que $B \approx C$, demostraremos que $A \approx C$. Notemos que dado que $A \approx B$ y que $B \approx C$, tenemos que (1) $A \prec B$, (2) $A \prec^{-1} B$, (3) $B \prec C$ y (4) $B \prec^{-1} C$. Como $\preceq$ es transitiva, (1) y (3) implican $A \prec C$. Por otra parte, (2) es lo mismo que $B \prec A$ (*) y (4) es lo mismo que $C \prec B$ (**) por definición de relación inversa. Por transitividad de $\prec$, (*) y (**) implican $C \prec A$. Luego, tenemos que $A \prec C$ y $C \prec A$, por lo que $A \approx C$, con lo que concluimos que $\approx$ es una relación transitiva.

Concluimos que $\approx$ es una relación de equivalencia.

(c) Considere el conjunto cuociente $S = \mathcal{U}/\approx$ y considere la relación $\lessapprox$ sobre S definida por

$$X \lessapprox Y \text{ si y solo existen conjuntos } A \in X \text{ y } B \in Y \text{ tales que } A \preceq B$$

Demuestre que $\lessapprox$ define un orden total sobre S.

<u>Sol.</u> Debemos demostrar que $\lessapprox$ cumple ser refleja, antisimétrica, transitiva y conexa.

Refleja. Notemos que cada clase de equivalencia $X \in S$ es no vacía, por lo que podemos escoger $A \in X$ (es decir, $X = [A]$). Notemos que $A \preceq A$, por lo que $[A] \lessapprox [A]$, y por lo tanto $\lessapprox$ es refleja.

Asimétrica. Sean X e Y clases de equivalencia en S y supongamos que $X \lessapprox Y$ e $Y \lessapprox X$. Luego, por definición tenemos que existen $A \in X$ y $B \in Y$ tales que $A \preceq B$, y que existen $C \in X$ y $D \in Y$ tales que $D \preceq C$. Además, por definición de clase de equivalencia, tenemos que $A \approx C$ y que $B \approx D$. Finalmente, por definición de $\approx$ tenemos que $A \preceq C$ y $A \preceq^{-1} C$ (es decir $C \preceq A$), y que $B \preceq D$ y $B \preceq^{-1} D$ (es decir $D \preceq B$). Por la transitividad de $\preceq$, tenemos entonces que $B \preceq D$ y $D \preceq C$ implican $B \preceq C$, y como además $C \preceq A$, tenemos que $B \preceq A$, es decir $A \preceq^{-1} B$. Sumando esto a que $A \preceq B$, obtenemos que $A \approx B$. Luego, A y B deben estar en la misma clase de equivalencia, es decir $X = Y$. Concluimos que $\lessapprox$ es asimétrica.

Transitiva. Sean $X, Y, Z \in S$ y supongamos que $X \lessapprox Y$ e $Y \lessapprox Z$. Luego existe $A \in X$ y existe $B \in Y$ tales que $A \preceq B$. Además existen $C \in Y$ y $D \in Z$ tales que $C \preceq D$. Adicionalmente, como $B \in Y$ y $C \in Y$, $B \approx C$, y por definición de $\approx$, esto implica en particular que $B \preceq C$. Luego, por transitividad de $\preceq$, tenemos que $A \preceq B$ y $B \preceq C$ implican $A \preceq C$, y sumado a $C \preceq D$, tenemos que $A \preceq D$. Finalmente, esto nos dice que $X \lessapprox Z$, por lo que $\lessapprox$ es transitiva.

Conexa. Sean $X, Y \in S$. Debemos demostrar que $X \lessapprox Y$ o $Y \lessapprox X$. Para esto, podemos considerar elementos arbitrarios $A \in X$ y $B \in Y$, y siempre existe una función inyectiva ya sea de A hacia B (con lo que $X \lessapprox Y$) o de B hacia A (con lo que $Y \lessapprox X$).

Pauta (6 pts.)

a) 1 pt. por cada propiedad (refleja y transitiva).

b) 0.5 pt. por demostrar que la relación es refleja, 0.75 pt. por cada una de las demás propiedades (simétrica y transitiva).

c) 0.5 pt. por cada propiedad (refleja, antisimétrica, transitiva y conexa). En el caso de conexitud, no es necesario demostrar que siempre hay una función inyectiva entre dos conjuntos (o equivalentemente, que sus cardinalidades siempre son comparables, o que siempre hay una función total entre ellos).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.