Equivalencia y conjunto cuociente

Clase 13

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Refleja** si para cada $a \in A$ se tiene que $R(a, a)$.
- **Irrefleja** si para cada $a \in A$ no se tiene que $R(a, a)$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto que $R(b, a)$.
- **Antisimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es:

- **Transitiva** si para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa** si para cada $a, b \in A$, se tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Propiedades de las relaciones

Ejercicios

1. Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.
2. Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Propiedades de las relaciones

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Reflexividad: Para cualquier a, es claro que $a = 1 \cdot a$, por lo que $a|a$.
Antisimetría: Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$. Si $a|b$, sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b = k_1 \cdot a$. Similarmente, si $b|a$ sabemos que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a = k_2 \cdot b$. Reemplazando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $b = k_1 \cdot k_2 \cdot b$. Como la relación $|$ está definida sobre los naturales sin el 0, podemos dividir por b y obtenemos que $1 = k_1 \cdot k_2$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, necesariamente se debe cumplir que $k_1 = k_2 = 1$, y aplicando esta igualdad en $b = k_1 \cdot a$, obtenemos que $b = a$.

Ejercicio

Demuestre que la relación $|$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

<u>Transitividad:</u> Debemos demostrar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$. Aplicando la definición, sabemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $b = k_1 \cdot a$ y $c = k_2 \cdot b$. Aplicando la primera igualdad en la segunda, obtenemos que $c = k_2 \cdot k_1 \cdot a$, y por lo tanto existe $k_3 = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c = k_3 \cdot a$, de donde concluimos que $a|c$. $\square$

Propiedades de las relaciones

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre que la relación $\equiv_n$ es refleja, simétrica y transitiva.

Propiedades de las relaciones

Demostración

<u>Reflexividad:</u> Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n x$. Por definición, debemos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x| = k \cdot n$. Como $x - x = 0$ para todo natural, podemos tomar $k = 0$ y luego se cumple la igualdad anterior, con lo que mostramos que $x \equiv_n x$.

<u>Simetría:</u> Debemos demostrar que si $x \equiv_n y$, entonces $y \equiv_n x$. Por definición, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| = k \cdot n$. Como $|x - y| = |y - x|$, tenemos que $|y - x| = k \cdot n$, y luego por definición de equivalencia módulo n, se cumple que $y \equiv_n x$.

Propiedades de las relaciones

Demostración

<u>Transitividad:</u> Dados x, y, z tales que $x \equiv_n y$ e $y \equiv_n z$, debemos demostrar que $x \equiv_n z$. Usando la definición, esto es equivalente a demostrar que si $|x - y| = k_1 \cdot n$ y $|y - z| = k_2 \cdot n$, entonces $|x - z| = k \cdot n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Asumiremos que x, y y z son distintos (el resultado es trivial de otra manera). Supongamos ahora que $x - y > 0$ e $y - z > 0$ (los demás casos son análogos). Entonces, podemos escribir

$$x - y = k_1 \cdot n$$
$$y - z = k_2 \cdot n$$

y sumando ambas igualdades, obtenemos que $x - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n$. Notemos que $x - z > 0$ también. Por lo tanto, si tomamos $k = k_1 + k_2$, tenemos que $|x - z| = k \cdot n$, concluyendo entonces que $x \equiv_n z$. $\square$

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente
- Comprender concepto de partición
- Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia

Outline

Relaciones de equivalencia

Las propiedades de las relaciones se pueden usar para definir tipos de relaciones. Un tipo muy importante es el siguiente:

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejercicio

Demuestre que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)^2$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall \sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio

Demuestre que la relación *equivalencia lógica* sobre $L(P)^2$:

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \forall\sigma,\ \sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$$

es una relación de equivalencia.

<u>Demostración:</u> Debemos demostrar que la equivalencia lógica es refleja, simétrica y transitiva.

<u>Reflexividad:</u> Debemos demostrar que para toda fórmula $\varphi \in L(P)$, se cumple que $\varphi \equiv \varphi$. Si tomamos cualquier valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición obtenemos que $\varphi \equiv \varphi$.

Relaciones de equivalencia

<u>Simetría:</u> Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa $(\star)$, tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

$(\star)$ Demuestre esto desde la definición de teoría de conjuntos

Relaciones de equivalencia

Simetría: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$, entonces $\psi \equiv \varphi$. Por definición, si $\varphi \equiv \psi$ tenemos que para toda valuación σ, se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$. Como la igualdad de los naturales es conmutativa $(\star)$, tenemos que $\sigma(\psi) = \sigma(\varphi)$, y luego por definición $\psi \equiv \varphi$.

$(\star)$ Demuestre esto desde la definición de teoría de conjuntos

Transitividad: Debemos demostrar que si $\varphi \equiv \psi$ y $\psi \equiv \theta$, entonces $\varphi \equiv \theta$. Por definición, tenemos que para todo σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ y $\sigma(\psi) = \sigma(\theta)$. Aplicando la segunda igualdad en la primera, obtenemos que $\sigma(\varphi) = \sigma(\theta)$, y luego por definición concluimos que $\varphi \equiv \theta$. $\square$

Clase de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$. La **clase de equivalencia** de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Clase de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A y un elemento $x \in A$. La **clase de equivalencia** de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

Si la relación se entiende del contexto, sólo escribiremos $[x]$.

Ejercicio

Estudie las clases de equivalencia de la relación de equivalencia lógica. ¿Qué representan? ¿Cuántas hay?

R: Cada clase de equivalencia contendrá a todas las fórmulas que son lógicamente equivalentes entre sí. Las fórmulas que son lógicamente equivalentes tienen la misma tabla de verdad, por lo que podemos pensar que cada clase de equivalencia representa a una posible tabla de verdad. Por lo tanto, si tenemos un conjunto P de variables proposicionales de tamaño n, la cantidad de clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia lógica es 2^{2^n}.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

1. $\forall x \in A,\ x \in [x]$.

<u>Demostración:</u> Como $\sim$ es una relación de equivalencia, es refleja. Por lo tanto, $\forall x \in A, x \sim x$. Luego, por definición de una clase de equivalencia, tenemos que $\forall x \in A, x \in [x]$.

Teorema

2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.

$(\Rightarrow)$: Suponiendo que $x \sim y$, debemos demostrar que $[x] = [y]$. Esto significa que debemos demostrar que $[x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$:

a Por demostrar que $[x] \subseteq [y]$. Por definición, $[x] = \{z \mid x \sim z\}$. Por otro lado, sabemos que $x \sim y$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia, es simétrica, y luego $y \sim x$. Ahora, también es cierto que $\sim$ es transitiva, y por lo tanto $\forall z \in [x], y \sim z$. Finalmente, por definición de clases de equivalencia, tenemos que $\forall z \in [x], z \in [y]$.

Outline

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El **conjunto cuociente** de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\!\sim\ = \{[x] \mid x \in A\}$$

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El **conjunto cuociente** de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\!\sim\; = \{[x] \mid x \in A\}$$

Ejemplo

Determinemos $\mathbb{N}/\!\equiv_4$. Las clases de equivalencia son

$$\begin{array}{rclcl}
[0]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4\cdot k = b\} & = & \{0,4,8,12,\dots,\text{-}4,\text{-}8,\text{-}12,\dots\} \\
[1]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4\cdot k + 1 = b\} & = & \{1,5,9,13,\dots,\text{-}3,\text{-}7,\text{-}11,\dots\} \\
[2]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4\cdot k + 2 = b\} & = & \{2,6,10,14,\dots,\text{-}2,\text{-}6,\text{-}10,\dots\} \\
[3]_{\equiv_4} & = & \{b \mid \exists k.\ 4\cdot k + 3 = b\} & = & \{3,7,11,15,\dots,\text{-}1,\text{-}5,\text{-}9,\dots\}
\end{array}$$

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\equiv_4$ de la siguiente forma

$\cdots$ -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $\cdots$

$$\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\equiv_4$ de la siguiente forma

$\cdots$ -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $\cdots$

$$\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/{\equiv_4}$ de la siguiente forma

$$\cdots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \cdots$$

$$\mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\equiv_4$ de la siguiente forma

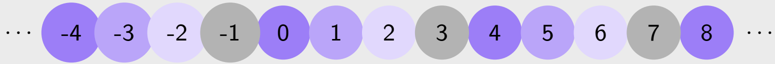
$$\cdots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \cdots$$

$$\mathbb{N}/\equiv_4 \; = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\equiv_4$ de la siguiente forma



$$\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Definición

El **índice** de una relación de equivalencia es la cantidad de clases de equivalencia que induce. Es decir, la cantidad de elementos de su conjunto cuociente.

Relaciones de equivalencia

Definición

El **índice** de una relación de equivalencia es la cantidad de clases de equivalencia que induce. Es decir, la cantidad de elementos de su conjunto cuociente.

Ejemplo

¿Cuál es el índice de $\equiv_4$?

Como $\mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0],[1],[2],[3]\}$, el índice de $\equiv_4$ es 4.

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto cualquiera, y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de A ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$). Diremos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si cumple que:

1. $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$.

Ejercicio

Dé ejemplos de particiones de $\mathbb{N}$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Demostración: Debemos demostrar que $A/\sim\, = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A. Para esto demostraremos las tres propiedades que debe cumplir según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\sim, X \neq \varnothing$: por teorema anterior, sabemos que $\forall x \in A$, $x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

2. $\bigcup A/\sim\, = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
    - $\bigcup A/\sim\, \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
    - $A \subseteq \bigcup A/\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\sim$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

2. $\bigcup A/\sim\, = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
   - $\bigcup A/\sim\, \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
   - $A \subseteq \bigcup A/\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\sim$.
3. $\forall X, Y \in A/\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: Todos los conjuntos en $A/\sim$ son clases de equivalencia, y por lo tanto por teorema anterior esta propiedad se cumple.

Algo muy interesante es que lo inverso también se cumple:

Teorema

Si $\mathcal{S}$ es una partición cualquiera de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A.

Un elemento x estará relacionado con y
si ambos pertenecen al mismo conjunto de la partición.

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.

Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

Outline

Construcción de conjuntos

Una de las aplicaciones más importantes de las relaciones de equivalencia es la definición de nuevos conjuntos. Lo que haremos será:

- Tomar un conjunto ya conocido (¿por ejemplo?).
- Calcular su conjunto cuociente respecto a alguna relación de equivalencia.
- Nombrar al conjunto y sus elementos.
- Definir operaciones sobre el nuevo conjunto, basándonos en los operadores del conjunto original.

Construcción de conjuntos

Definición

El conjunto de los **números naturales módulo 4** será el conjunto cuociente de $\mathbb{N}$ respecto a $\equiv_4$:

$$\mathbb{N}_4 = \mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}.$$

¿Cómo definimos las operaciones en este nuevo "*mundo*"?

Definimos la suma módulo 4 según

$$[i] +_4 [j] = [i + j]$$

Ejemplos

$$[3] +_4 [2] = [3 + 2] = [5] = [1] \qquad [1] +_4 [3] = [1 + 3] = [4] = [0]$$

Análogamente, definimos la multiplicación módulo 4 según

$$[i] \cdot_4 [j] = [i \cdot j]$$

Ejemplo

$$[2] \cdot_4 [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$$

Ahora simplificaremos notación renombrando elementos de $\mathbb{N}_4$

Construcción de conjuntos

Podríamos renombrar los elementos de $\mathbb{N}_4$:

$$[0] \leftrightarrow 0 \quad [1] \leftrightarrow 1 \quad [2] \leftrightarrow 2 \quad [3] \leftrightarrow 3$$

Y ocupar simplemente + y ·, obteniendo un nuevo conjunto con operadores bien definidos:

$$\mathbb{N}_4 = \{0, 1, 2, 3\} \text{ con operadores } + \text{ y } \cdot$$

tal que, por ejemplo, $1 + 1 = 2$, $3 + 3 = 2$, $3 \cdot 3 = 1$, etc.

Del contexto se entiende que estamos sumando/multiplicando elementos de $\mathbb{N}_4$

Una relación de equivalencia fundamental

Veamos una relación de equivalencia más interesante.

Definición

La relación $\downarrow$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como

$$\begin{aligned} (m, n) \downarrow (r, s) \quad &\Leftrightarrow \quad m + s = n + r \\ (&\Leftrightarrow \quad m - n = r - s) \end{aligned}$$

Una relación de equivalencia fundamental

Veamos una relación de equivalencia más interesante.

Definición

La relación $\downarrow$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como

$$\begin{aligned} (m, n) \downarrow (r, s) \quad &\Leftrightarrow \quad m + s = n + r \\ (&\Leftrightarrow \quad m - n = r - s) \end{aligned}$$

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

Reflexividad: Dado un par (m, n), es claro que $m + n = m + n$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(m, n) \downarrow (m, n)$.

Simetría: Dados dos pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$, por definición de $\downarrow$ se tiene que $m + s = n + r$. Es claro que $r + n = s + m$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(r, s) \downarrow (m, n)$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

Transitividad: Dados tres pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$ y $(r, s) \downarrow (t, u)$, debemos demostrar que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por definición de $\downarrow$, tenemos que $m + s = n + r$ (1) y $r + u = s + t$ (2). Despejando r en (2), obtenemos que $r = s + t - u$, y reemplazando esto último en (1), se tiene que $m + s = n + s + t - u$. Reordenando, obtenemos que $m + u = n + t$, y por definición de $\downarrow$, concluimos que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.

Una relación de equivalencia fundamental

¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por $\downarrow$?

Una relación de equivalencia fundamental

¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por $\downarrow$?

$$
\begin{gathered}
\big[(0,0)\big] = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\} \\
\big[(0,1)\big] = \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\} \\
\big[(1,0)\big] = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\} \\
\big[(0,2)\big] = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\} \\
\big[(2,0)\big] = \{(2,0),(3,1),(4,2),\ldots\} \\
\vdots \\
\big[(0,n)\big] = \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),\ldots\} \\
\big[(n,0)\big] = \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),\ldots\} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
(0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
(0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
(0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
(0,0) & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

¿Qué tienen en común las diagonales?

¿Qué podrían representar los elementos de $\mathbb{N}^2/{\downarrow}$?

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

El conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cuociente de $\mathbb{N}^2$ respecto a $\downarrow$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\downarrow = \{[(0,0)],[(0,1)],[(1,0)],[(0,2)],[(2,0)],\ldots\}.$$

¿Qué representan las clases de equivalencia?

- $[(0,0)]$ será el entero 0.
- $[(0,i)]$ será el entero i.
- $[(i,0)]$ será el entero $-i$.

Una relación de equivalencia fundamental

Renombramos los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &\leftrightarrow 0\\
[(0,1)] &\leftrightarrow 1\\
[(1,0)] &\leftrightarrow -1\\
[(0,2)] &\leftrightarrow 2\\
[(2,0)] &\leftrightarrow -2\\
&\vdots\\
[(0,i)] &\leftrightarrow i\\
[(i,0)] &\leftrightarrow -i\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

Y obtenemos entonces el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Importante: "-1" es sólo un **nombre** para la clase de equivalencia $[(1,0)]$.
El símbolo "$-$" no significa nada por sí solo para nosotros.

Intentemos definir los operadores $+_{\downarrow}$ y $\cdot_{\downarrow}$, teniendo en cuenta que deben "*captar la estructura*" de los números enteros.

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

$[(m,n)] +_{\downarrow} [(r,s)] = [(m+r, n+s)]$

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

Definición

$[(m,n)] \cdot_{\downarrow} [(r,s)] = [(m \cdot s + n \cdot r, m \cdot r + n \cdot s)]$

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

$$7 +_{\downarrow} -5 = \big[(0,7)\big] +_{\downarrow} \big[(5,0)\big] = \big[(0+5, 7+0)\big] = \big[(5,7)\big] = \big[(0,2)\big] = 2$$

$$-18 +_{\downarrow} 4 = \big[(18,0)\big] +_{\downarrow} \big[(0,4)\big] = \big[(18+0, 0+4)\big] = \big[(18,4)\big] = \big[(14,0)\big]$$
$$= -14$$

$$-3 +_{\downarrow} -6 = \big[(3,0)\big] +_{\downarrow} \big[(6,0)\big] = \big[(3+6, 0+0)\big] = \big[(9,0)\big] = -9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

$$-3 \cdot_{\downarrow} -4 = \left[(3,0)\right] \cdot_{\downarrow} \left[(4,0)\right] = \left[(3 \cdot 0 + 0 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0)\right] = \left[(0,12)\right] = 12$$

$$3 \cdot_{\downarrow} 3 = \left[(0,3)\right] \cdot_{\downarrow} \left[(0,3)\right] = \left[(0 \cdot 3 + 3 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3)\right] = \left[(0,9)\right] = 9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Finalmente, podemos renombrar las operaciones anteriores, y obtenemos el conjunto de los números enteros con sus dos operaciones habituales:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\} \text{ con las operaciones } + \text{ y } \cdot.$$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de relación de equivalencia
- Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente
- Comprender concepto de partición
- Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia