Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

8 de mayo de 2024

1º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 15 de mayo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

(a) Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ relaciones de equivalencia sobre un conjunto A. Encuentre la relación de equivalencia más pequeña definida en A que contenga a $\sim_1$ y a $\sim_2$. Demuestre que tal relación cumple lo pedido.

(b) Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ relaciones de equivalencia sobre un conjunto A tales que $A/\sim_1 = A/\sim_2$. ¿Es cierto que $\sim_1=\sim_2$? Demuestre su respuesta.

(c) Sea A un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre A tales que para toda relación de equivalencia $\sim$ sobre A, se tiene que $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$ (vale decir, para todo $(a, b) \in A \times A$, si $a \sim_1 b$, entonces $a \sim b$, y si $a \sim b$, entonces $a \sim_2 b$).

Problema 2

(a) Sea $\prec$ una relación sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada (a, b), $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \prec (c, d)$ si y solo si $a < c$ y $b < d$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\prec$ es un orden parcial pero no un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(b) Sea $\preceq$ una relación sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida de la siguiente forma. Para cada (a, b), $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \preceq (c, d)$ si y solo si $(a < c)$ o $(a = c$ y $b \leq d)$, donde $<$ es la relación de orden usual sobre los naturales. Demuestre que $\preceq$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(c) Generalice la definición de la relación $\preceq$ definida en (b) para el caso $\mathbb{N}^k$, con $k \geq 3$. Demuestre que la relación resultante es un orden total sobre $\mathbb{N}^k$.