Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Repaso I2

24 de mayo de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

1. Teoría de Conjuntos

Sean A y B conjuntos y una función $f : A \to B$. Para todo $X \subseteq A$ definimos el siguiente conjunto:

$$F(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b\}$$

Dada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ una colección de subconjuntos de A, demuestre que:

1. $F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right) = \bigcup\limits_{D \in S} F(D)$
2. $F\left(\bigcap\limits_{D \in S} D\right) \subseteq \bigcap\limits_{D \in S} F(D)$

Solución

1. Por definición de igualdad de conjuntos, demostraremos la contención hacia ambos lados:
   - $F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right) \subseteq \bigcup\limits_{D \in S} F(D)$: Sea $b \in F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right)$. Por definición, existe $a \in \bigcup\limits_{D \in S} D$ tal que $f(a) = b$. Como $a \in \bigcup\limits_{D \in S} D$, entonces existe un $D' \in S$ tal que $a \in D'$. Luego, $b \in F(D')$, y consecuentemente $b \in \bigcup\limits_{D \in S} F(D)$. Concluímos que $F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right) \subseteq \bigcup\limits_{D \in S} F(D)$.
   - $\bigcup\limits_{D \in S} F(D) \subseteq F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right)$: Sea $b \in \bigcup\limits_{D \in S} F(D)$. Por definición, existe un $D' \in S$ tal que $b \in F(D')$. Luego, existe $a \in D'$ tal que $f(a) = b$. Este a también está en $\bigcup\limits_{D \in S} D$, por lo que $b \in F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right)$. Concluímos que $\bigcup\limits_{D \in S} F(D) \subseteq F\left(\bigcup\limits_{D \in S} D\right)$.

2. Sea $b \in F\left(\bigcap_{D \in S} D\right)$. Por definición, existe $a \in \bigcap D \in SD$ tal que $f(a) = b$. Esto quiere decir que para todo $D \in S$, existe $a \in D$ tal que $f(a) = b$, lo que es equivalente a decir que para todo $D \in S$ se tiene que $b \in F(D)$. Esto último se puede escribir como $b \in \bigcap_{D \in S} F(D)$. Concluímos que $F\left(\bigcap_{D \in S} D\right) \subseteq \bigcap_{D \in S} F(D)$.

2. Relaciones

2.1. Relaciones de orden

Dados un conjunto A y una relación $\lesssim$ sobre A, diremos que el par $(A, \lesssim)$ es un *preorden* si $\lesssim$ es una relación refleja y transitiva.
Denotramos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ como

$$A \rightsquigarrow B \Leftrightarrow inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B)$$

donde $inf(\cdot)$ y $sup(\cdot)$ son el ínfimo y el supremo de un conjunto respectivamente.

1. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ es un preorden.
2. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.
3. Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

Solución

1. PD: $\rightsquigarrow$ es refleja y transitiva en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

   I.- Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Como A es finito entonces $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup(A) = n_1$. De la misma manera $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf(A) = n_2$. Por lo tanto podemos decir que $\sup(A) = \sup(A) \wedge \text{ínf}(A) = \inf(A) \implies A \rightsquigarrow A$. Luego, $\rightsquigarrow$ es refleja.

   II.- Sea $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tales que $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow C$. Entonces

   $$\sup(A) \leq \sup(B) \wedge \inf(A) \leq \inf(B) \quad \sup(B) \leq \sup(C) \wedge \inf(B) \leq \inf(C)$$

   Por la transitividad de $" \leq ", \sup(A) \leq \sup(C) \wedge \inf(A) \leq \inf(C) \implies A \rightsquigarrow C$. Se concluye que $\rightsquigarrow$ es transitiva.

   Por (I) y (II) implica que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \rightsquigarrow)$ es un pre orden.

2. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 3\}$. Claramente se tiene que

   $$\inf(A) = \inf(B) = 1 \wedge \sup(A) = \sup(B) = 3$$

   Por lo tanto $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$. Sin embargo, $A \neq B$ ya que $2 \notin B$. Por axioma de extensión podemos asegurar que A es distinto a B. Por lo tanto, no es antisimétrica.

3. Sea $S = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Como ya se demostró en (1) $\rightsquigarrow$ es refleja y transitiva.

   PD: $\rightsquigarrow$ es antisimétrica en S. Para que se cumpla $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$ necesariamente $\sup(A) = \sup(B) \wedge \inf(A) = \inf(B)$ por la antisimetría de $\leq$.

   Ahora, supongamos que existen $A, B \in \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ tales que $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$ pero $A \neq B$. Luego, $\sup(A) = \sup(B) \wedge \inf(A) = \inf(B)$. Pero los únicos casos en que pasa eso son:

   $$A = B = \{1\}$$
   $$A = B = \{2\}\star$$
   $$A = B = \{1,2\}$$

   Por lo tanto, $\rightsquigarrow$ es necesariamente antisemétrica, por lo tanto un orden parcial sobre S.

   $\star$ Un argumento de conteo es válido para demostrar que no hay más combinaciones sobre S que cumplen $A \rightsquigarrow B$ y $B \rightsquigarrow A$.

2.2. Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:

$$S \circ T = T \circ S \Leftrightarrow S \circ T \text{ es una relación de equivalencia}$$

Solución
($\Rightarrow$) Suponiendo $S \circ T = T \circ S$, debemos demostrar que $S \circ T$ sea una relación de equivalencia

- Refleja
  Dado que S y T son reflejas $\forall a \in A(a,a) \in S \wedge (a,a) \in T$
  Luego por la definición de $S \circ T, \forall a \in A, (a,a) \in S \circ T$, por lo que es refleja.
- Simétrica
  Sea $(a,b) \in S \circ T$, como $S \circ T = T \circ S, (a,b) \in S \circ T$. por lo tanto:

  $$\exists z \in A(a,z) \in T \wedge (z,b) \in S$$

  que puede ser reescrito como

  $$\exists z \in A(z,b) \in S \wedge (a,z) \in T$$

  y luego, dado que las relaciones S y T son simétricas, tenemos que $(b,z) \in S \wedge (z,a) \in T$ y así $(b,a) \in S \circ T$
- Transitiva
  Sea $(a,b), (b,c) \in S \circ T$ entonces:

  $$\exists z_1 \in A(a,z_1) \in S \wedge (z_1,b) \in T$$

$$\exists z_1 \in A(b, z_2) \in S \land (z_2, c) \in T$$

Y dado que $(z_1, z_2) \in T \circ S$ ya que $(z_1, b) \in T \land (b, z_2) \in S$, por lo tanto como $S \circ T = T \circ S$ ocurre que:

$$(z_1, z_2) \in S \circ T$$

$$\exists z_3 \in A(z_1, z_3) \in S \land (z_3, z_2) \in T$$

$$(a, z_3) \in S \land (z_3, c) \in T$$

como S y T son transitivas

$$(a, z_3) \in S \land (z_3, c) \in T$$

y entonces $(a, c) \in S \circ T$

Por lo tanto, $S \circ T$ es una relación de equivalencia

($\Leftarrow$) Suponiendo que $S \circ T$ es una relación de equivalencia, para demostrar que $S \circ T = T \circ S$ se busca probar que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $S \circ T \supseteq T \circ S$.

(1) En primer lugar, sea $(a, b) \in S \circ T$, por la simetría de $S \circ T$ se tiene que también $(b, a) \in S \circ T$. Luego, por la definición de composición se cumple que

$$\exists z \in A(z, b) \in S \land (z, a) \in T$$

Ahora dada la simetría de S y T se tiene que

$$\exists z \in A.(z, b) \in S \land (a, z) \in T$$

Además por definición de composición dado que $\exists z \in A(a, z) \in T \land (z, b) \in S$ entonces $(b, a) \in T \circ S$. Así queda demostrado que $S \circ T \subseteq T \circ S$

(2) De manera análoga, sea $(a, b) \in T \circ S$, por definición de composición se tiene que

$$\exists z \in A.(a, z) \in T \land (z, b) \in S$$

Luego por simetría de S y T también se cumple que

$$\exists z \in A(z, a) \in T \land (b, z) \in S$$

Finalmente dado que $\exists z \in A(b, z) \in S \land (z, a) \in T$ se tiene que $(b, a) \in S \circ T$ y por simetría de $S \circ T$ también $(a, b) \in S \circ T$. Así queda demostrado que $T \circ S \subseteq S \circ T$.

Queda demostrado que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $S \circ T \supseteq T \circ S$, se ha probado que $S \circ T = T \circ S$ dado que $S \circ T$ es una relación de equivalencia.

3. Cardinalidad

3.1. Numerabilidad

Demuestre que el conjunto de todos los strings ASCII (finitos) que sólo tienen caracteres `a` y `b`, y tales que no contienen el substring `abb` es un conjunto numerable.

Solución

Sea S el conjunto de las strings ASCII finitas que sólo tienen caracteres `a` y `b` y no tienen el substring `abb`. Consideremos $f : S \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(s_1 s_2 s_3 \dots) = d_1 d_2 d_3 \dots$$

donde d_i está dado por

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i = a \\ 2 & \text{si } s_i = b \end{cases}$$

Esta función es inyectiva. Para demostrar que es inyectiva hay que demostrar que $(f(s) = f(r)) \to (s = r)$. Se deja como ejercicio

Consideremos la función $g : \mathbb{N} \to S$ tal que

$$g(x) = a \cdot x$$

donde la multiplicación de un caracter a por un número x denota "repetir el número a x veces". Esta función es inyectiva. La demostración de inyectividad se deja como ejercicio.

Como existen funciones inyectivas de $\mathbb{N}$ a S y vice versa, por teorema de Schroeder-Bernstein podemos concluir que existe una función biyectiva entre estos dos conjuntos, y por ende son equinumerosos, con lo que concluímos que S es numerable.

3.2. No numerabilidad

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}$ es no numerable.

Solución
Se demostrará por diagonalización. Supongamos que $\mathcal{F}$ es numerable.
Entonces existe una forma de listar los elementos de $\mathcal{F}$. Digamos, sin pérdida de generalidad, que ese orden es:

$$f_0, f_1, f_2, ...$$

con $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva para $i \geq 0$.

Consideremos la siguiente tabla:

	0	1	2	3	$\dots$
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$\dots$
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	
$\vdots$					$\ddots$

Buscamos una función $g \in \mathcal{F}$ tal que $\forall i (g \neq f_i)$.

Una opción podría ser tomar $g(i) = f_i(i) + 1$. Esto efectivamente haría que g sea diferente de toda f_i. Sin embargo, necesitamos que $g \in \mathcal{F}$, y todas las funciones de $\mathcal{F}$ son inyectivas. Con esa definición de g, si se da que $f_0(0) = 0$ y $f_1(1) = 0$, se tendrá que $g(0) = g(1) = 1$, con lo que g no será inyectiva, por lo que no es correcta.

Necesitamos que $x \neq y \rightarrow g(x) \neq g(y)$ (contrapositivo de inyección). Una forma de conseguir una función inyectiva, como podrán recordar de una ayudantía pasada, es con una función estrictamente creciente. Una forma de hacer que g sea estrictamente creciente con la diagonal de la tabla es tomar la suma del valor de g anterior y sumarle 1 para cumplir con el crecimiento. Además, debemos sumar $f_i(i)$ para que $g(i)$ se necesariamente sea diferente de $f_i(i)$, y consecuentemente, de la diagonal completa. La definición propuesta es entonces:

$$g(i) = \begin{cases} 1 + f_i(i) & , i = 0 \\ g(i-1) + 1 + f_i(i) & , i \neq 0 \end{cases}$$

Demostraremos que es creciente (y con ello que es inyectiva). Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i < j$, aplicaremos inducción sobre la diferencia entre i y j:

BI: Con $j - i = 1$, se tiene que $g(j) = g(j-1) + 1 + f_j(j) = g(i) + 1 + f_j(j) > g(i)$, ya que $f_j(j) \in \mathbb{N}$ y por lo tanto es ≥ 0.

HI: Supongamos que si $j - i = n$ entonces $g(i) < g(j)$.

TI: PD: $j - i = n + 1 \Rightarrow g(i) < g(j)$.
Se tiene que $g(j) = g(j-1) + 1 + f_j(j)$. Como $j - i = n + 1$, se tiene que $j - 1 - i = n$. Luego, por HI, $g(j-1) > g(i)$. Como $1 + f_j(j) > 0$, tenemos que $g(j-1) + 1 + f_j(j) > g(i)$, con lo que $g(j) > g(i)$, que es lo que queríamos demostrar.

Queda demostrado que g es creciente. Como es creciente, es inyectiva (demostración formal de esto en la ayudantía 8), y es claro que $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, por lo que $g \in \mathcal{F}$.

Sin embargo, $g(i) > f_i(i)$ para todo $i \geq 0$, por lo que es diferente a todas las funciones listadas en la tabla. Con ello, llegamos a una contradicción. Concluímos entonces que $\mathcal{F}$ no puede ser numerable.