

# Funciones

Clase 15

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes



# Objetivos de la clase

- Comprender conceptos de supremo e ínfimo
- Comprender concepto de función y otros conceptos asociados
- Demostrar propiedades básicas de las funciones

# Outline

Elementos extremos (continuación)

Funciones

Epílogo

# Mínimos y máximos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$  no vacío. Si  $S$  tiene un elemento mínimo, este es único.

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Ejercicio (★)

Demuestre el resultado análogo para el máximo.

Esto nos permite hablar de **el** mínimo o **el** máximo, que denotaremos por  $\min(S)$  y  $\max(S)$  respectivamente.

# Mínimos y máximos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$  no vacío. Si  $S$  tiene un elemento mínimo, este es único.

Demostración: Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x \in S \forall y \in S (x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

# Mínimos y máximos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$  no vacío. Si  $S$  tiene un elemento mínimo, este es único.

Demostración: Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x \in S \forall y \in S (x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

Por demostración directa, supongamos que  $S$  tiene dos mínimos  $s_1, s_2$ . Como son mínimos,  $s_1, s_2 \in S$ , y también  $s_1 \leq s_2$  y  $s_2 \leq s_1$ . Como  $\leq$  es una relación de orden, es antisimétrica, y luego  $s_1 = s_2$ . Por lo tanto, si hay un mínimo, este es único.

(\*) La demostración de unicidad del máximo es completamente análoga.

# Supremo e ínfimo

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

## Definición

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Diremos que  $s$  es un **ínfimo** de  $S$  si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior  $s'$  se tiene que  $s' \leq s$ .



# Supremo e ínfimo

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

## Definición

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Diremos que  $s$  es un **ínfimo** de  $S$  si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior  $s'$  se tiene que  $s' \leq s$ .

El ínfimo es la mayor cota inferior.

# Supremo e ínfimo

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

## Definición

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Diremos que  $s$  es un **ínfimo** de  $S$  si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior  $s'$  se tiene que  $s' \leq s$ .

El ínfimo es la mayor cota inferior.

Análogamente se define el supremo de un conjunto.

# Supremos e ínfimos

## Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

# Supremos e ínfimos

## Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

Un ejemplo típico son los intervalos abiertos en el orden  $(\mathbb{R}, \leq)$ . Por ejemplo,  $(0, 1)$  no tiene mínimo pero sí ínfimo, 0; y no tiene máximo pero sí supremo, 1.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Si  $S$  tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Si  $S$  tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

## Ejercicio (★)

Demuestre el teorema.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Si  $S$  tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

## Ejercicio (★)

Demuestre el teorema.

Esto nos permite hablar de **el** supremo o **el** ínfimo, que denotaremos por  $\sup(S)$  e  $\inf(S)$  respectivamente.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

Sea  $(A, \preceq)$  un orden parcial y  $S \subseteq A$ . Si  $S$  tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

Demostración: de manera similar a la demostración del mínimo, supongamos que  $S$  tiene dos supremos  $s_1$  y  $s_2$ . Por definición de supremo, ambos son cotas superiores de  $S$ .

Como  $s_1$  es supremo, para toda cota superior  $s$  de  $S$  se tiene que  $s_1 \preceq s$ , pues el supremo es la menor cota superior, y en particular,  $s_1 \preceq s_2$ , pues  $s_2$  es cota superior.

Realizando un razonamiento análogo, obtenemos también que  $s_2 \preceq s_1$ , y como  $\preceq$  es antisimétrica, se tiene que  $s_1 = s_2$ . Concluimos entonces que si existe un supremo, este es único.

(\*) La demostración de unicidad del ínfimo es completamente análoga.



# Supremos e ínfimos

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

# Supremos e ínfimos

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- En los órdenes  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  y  $(\mathbb{R}, \leq)$  no existen.

# Supremos e ínfimos

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- En los órdenes  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  y  $(\mathbb{R}, \leq)$  no existen.
- En  $(\mathbb{Q}, \leq)$  sí, por ejemplo  $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$ . Este conjunto está acotado superiormente (por ejemplo por 2), pero no tiene supremo en  $\mathbb{Q}$ .

# Supremos e ínfimos

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- En los órdenes  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  y  $(\mathbb{R}, \leq)$  no existen.
- En  $(\mathbb{Q}, \leq)$  sí, por ejemplo  $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$ . Este conjunto está acotado superiormente (por ejemplo por 2), pero no tiene supremo en  $\mathbb{Q}$ . Uno podría estar tentado de decir que el supremo es  $\sqrt{2}$ , pero  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . El supremo debe pertenecer al conjunto sobre el cual está definido el orden.

# Supremos e ínfimos

## Definición

Sea  $(A, \leq)$  un orden parcial. Este se dice **superiormente completo** si para cada  $S \subseteq A$  no vacío, si  $S$  tiene cota superior, entonces tiene supremo.

De manera similar definimos el concepto de ser **inferiormente completo**.

# Supremos e ínfimos

Dado el ejemplo anterior, tenemos que  $(\mathbb{Q}, \leq)$  no es superiormente completo. Una observación importante es que tampoco es inferiormente completo: basta tomar  $S' = \{q \in \mathbb{Q} \mid -2 \leq q \wedge 2 \leq q^2\}$ .

Esto motiva el siguiente teorema:

## Teorema

$(A, \leq)$  es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

$(A, \leq)$  es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Demostración: Demostraremos la dirección hacia la derecha; la otra dirección es análoga y se deja como ejercicio.

Supongamos que  $(A, \leq)$  es superiormente completo; es decir,  $\forall S \subseteq A$  no vacío, si  $S$  está acotado superiormente, tiene supremo. Queremos demostrar que también es inferiormente completo; es decir,  $\forall S \subseteq A$  no vacío, si  $S$  está acotado inferiormente, tiene ínfimo. Sea entonces  $S \subseteq A$  no vacío.

Supongamos que está acotado inferiormente. Demostraremos que tiene ínfimo.

# Supremos e ínfimos

## Teorema

$(A, \leq)$  es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Como  $S$  está acotado inferiormente, tiene al menos una cota inferior.

Tomemos el siguiente conjunto:

$$S_{ci} = \{a \in A \mid a \text{ es cota inferior de } S\}$$

Es decir,  $S_{ci}$  es el conjunto de todas las cotas inferiores de  $S$ . Es claro que  $S_{ci} \neq \emptyset$ . Por otra parte, como todos los elementos de  $S_{ci}$  son cotas inferiores de  $S$ , por definición de cota inferior se cumple que

$$\forall x \in S_{ci} \quad \forall y \in S \quad x \leq y$$

de donde es claro que  $S_{ci}$  está acotado superiormente (por todos los elementos de  $S$ ). Luego, como  $(A, \leq)$  es superiormente completo,  $S_{ci}$  tiene supremo,  $\sup(S_{ci})$ , el que por definición es una cota superior de  $S_{ci}$ .



# Supremos e ínfimos

## Teorema

$(A, \leq)$  es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ahora, como todos los elementos de  $S$  son cotas superiores de  $S_{ci}$ , se cumple que

$$\forall y \in S \quad \sup(S_{ci}) \leq y$$

pues el supremo es la menor cota superior. De esto último se deduce que  $\sup(S_{ci})$  es una cota inferior de  $S$ , y como es una cota superior de  $S_{ci}$ , es la mayor cota inferior de  $S$ , es decir, es el ínfimo de  $S$ :

$$\inf(S) = \sup(S_{ci})$$

Concluimos entonces que  $(A, \leq)$  es inferiormente completo.

# Outline

Elementos extremos (continuación)

**Funciones**

Epílogo

# Funciones

## Definición

Sea  $f$  una relación binaria de  $A$  en  $B$ ; es decir,  $f \subseteq A \times B$ .

Diremos que  $f$  es una **función** de  $A$  en  $B$  si dado cualquier elemento  $a \in A$ , si existe un elemento en  $b \in B$  tal que  $afb$ , este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si  $afb$ , escribimos  $b = f(a)$ .

- $b$  es la *imagen* de  $a$ .
- $a$  es la *preimagen* de  $b$ .

**Notación:**  $f : A \rightarrow B$

# Funciones

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **total** si todo elemento en  $A$  tiene imagen.

- Es decir, si para todo  $a \in A$  existe  $b \in B$  tal que  $b = f(a)$ .
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- Por simplicidad, de ahora en adelante, toda función será total a menos que se especifique lo contrario.

# Funciones

## Definición

Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es:

1. **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos  $x, y \in A$  se tiene que  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . Es decir, no existen dos elementos distintos en  $A$  con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento  $b \in B$  tiene preimagen. Es decir, para todo  $b \in B$  existe  $a \in A$  tal que  $b = f(a)$ .
3. **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

# Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

## Definición

Dada una relación  $R$  de  $A$  en  $B$ , la **relación inversa** de  $R$  es una relación de  $B$  en  $A$  definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

## Definición

Dada una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , diremos que  $f$  es **invertible** si su relación inversa  $f^{-1}$  es una función de  $B$  en  $A$ .

# Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

## Definición

Dadas relaciones  $R$  de  $A$  en  $B$  y  $S$  de  $B$  en  $C$ , la **composición** de  $R$  y  $S$  es una relación de  $A$  en  $C$  definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

## Proposición

Dadas funciones  $f$  de  $A$  en  $B$  y  $g$  de  $B$  en  $C$ , la composición  $g \circ f$  es una función de  $A$  en  $C$ .

# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Corolario

Si  $f$  es biyectiva, entonces es invertible.



# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

1. Función: Sean  $x_1, x_2 \in A$  e  $y \in B$  y supongamos que  $yf^{-1}x_1$  e  $yf^{-1}x_2$ . Por definición de relación inversa, esto significa que  $x_1fy$  y  $x_2fy$ . Como  $f$  es inyectiva,  $x_1 = x_2$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es función.
2. Total: Como  $f$  es biyectiva, es sobreeyectiva, por lo que para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $y = f(x)$ . Luego, para todo  $y \in B$  existe  $x \in A$  tal que  $x = f^{-1}(y)$ . Concluimos que  $f^{-1}$  es total.

# Funciones

## Teorema

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces la relación inversa  $f^{-1}$  es una función biyectiva de  $B$  en  $A$ .

3. Inyectiva: Supongamos que  $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$ , con  $y_1, y_2 \in B$  y  $x \in A$ . Por definición de relación inversa, esto significa que  $f(x) = y_1$  y  $f(x) = y_2$ . Como  $f$  es función,  $y_1 = y_2$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es inyectiva.
4. Sobre: como  $f$  es total, para todo  $x \in A$  existe  $y \in B$  tal que  $y = f(x)$ . Luego, para todo  $x \in A$  existe  $y \in B$  tal que  $x = f^{-1}(y)$ , y por lo tanto  $f^{-1}$  es sobre.

# Funciones

## Teorema

Dadas dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ :

1. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.
2. Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.

## Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

## Corolario

Si  $f$  y  $g$  son biyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.

# Funciones

## Teorema

Dadas dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ :

1. Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.
2. Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas, entonces  $g \circ f$  también lo es.

1. Supongamos que  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ , con  $x_1, x_2 \in A$ . Por definición de composición,  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ . Como  $g$  es inyectiva, se tiene que  $f(x_1) = f(x_2)$ , y como  $f$  también es inyectiva,  $x_1 = x_2$ . Por lo tanto,  $g \circ f$  es inyectiva.
2. Sea  $z \in C$ . Como  $g$  es sobre, sabemos que existe  $y \in B$  tal que  $z = g(y)$ . Similarmente, como  $f$  es sobre, sabemos que existe  $x \in A$  tal que  $y = f(x)$ . Entonces, tenemos que  $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ , y por lo tanto para cada  $z \in C$  existe  $x \in A$  tal que  $z = (g \circ f)(x)$ . Concluimos que  $g \circ f$  es sobre.

# Funciones

Una aplicación muy importante de las funciones es que nos permiten razonar sobre el tamaño de los conjuntos. Una propiedad interesante sobre los conjuntos finitos es la siguiente:

## Principio del palomar

Se tienen  $m$  palomas y  $n$  palomares, con  $m > n$ . Entonces, si se reparten las  $m$  palomas en los  $n$  palomares, necesariamente existirá un palomar con más de una paloma.

## Principio del palomar (matemático)

Si se tiene una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  con  $m > n$ , la función  $f$  no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán  $x, y \in \mathbb{N}_m$  tales que  $x \neq y$ , pero  $f(x) = f(y)$ .

# Funciones

## Principio del palomar (para sobreyectividad)

Si se tiene una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  con  $m < n$ , la función  $f$  no puede ser sobreyectiva.

## Corolario

La única forma en que una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  sea biyectiva es que  $m = n$ .

# Funciones

## Ejemplo

Si en una sala hay 8 personas, entonces este año necesariamente dos de ellas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Las 8 personas las podemos modelar como el conjunto  $P = \{0, \dots, 7\}$  y los días de la semana como el conjunto  $S = 0, \dots, 6$ . El día de la semana que se celebra el cumpleaños de cada una resulta ser una función de  $P$  en  $S$ , por el principio de los cajones, esta función no puede ser inyectiva, luego al menos dos personas distintas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

# Outline

Elementos extremos (continuación)

Funciones

**Epílogo**



# Objetivos de la clase

- Comprender conceptos de supremo e ínfimo
- Comprender concepto de función y otros conceptos asociados
- Demostrar propiedades básicas de las funciones