Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 8 - Funciones y Cardinalidad

26 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

Función

Sea $f \subseteq A \times B$ diremos que f es una función de A en B si dado cualquier elemento $\forall a \in A \exists b \in B$ tal que:

$$afb \wedge afc \Longrightarrow b = c$$

Sea $f : A \to B$. Diremos que f es

- **Inyectiva** si la función es uno a uno, esto es $\forall x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
- **Sobreyectiva** si $\forall b \in B . \exists a \in A$ tal que $b = f(a)$
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Función invertible Dada una función f de A en B, diremos que f es invertible si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A.

Composición de funciones Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la composición de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m > n$, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

Video: Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad AQUI :)

1. Funciones

Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \to B$ es *creciente* si dados $x, y \in A$ tales que $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

1. Demuestre que si f es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contarejemplo.

2. Numerabilidad

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

3. Numerabilidad (hardcore)

Sea $\mathbb{Z}^\omega$ el conjunto de todas las secuencias infinitas de números en $\mathbb{Z}$ de la forma $a_0a_1a_2\ldots$

1. Considere el siguiente conjunto:

$$S_1 = \{a_0a_1a_2\ldots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}.\forall i \geq 0.a_{i+1} - a_i = c\}$$

   Por ejemplo, la secuencia $7, 10, 13, 16, 19, \ldots \in S_1$ ya que $(a_{i+1} - a_i) = 3$.
   ¿Es S_1 un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.

2. Considere el siguiente conjunto:

$$S_2 = \{a_0a_1a_2\ldots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}.\forall i \geq 0.|a_{i+1} - a_i| = c\}$$

   Por ejemplo, la secuencia $7, 10, 7, 4, 1, -2, 1, \ldots \in S_2$ ya que $|a_{i+1} - a_i| = 3$.
   ¿Es S_2 un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.