PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 1

13 de marzo de 2024

1º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 20 de marzo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

(a) Demuestre por inducción que para todo natural $n \geq 2$ se cumple

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$$

(b) Demuestre por inducción que para todo natural $n \geq 0$ y $x \neq 1$ se cumple

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = \frac{ax^{n+1} - a}{x - 1}$$

(c) Sea $k \geq 1$ natural. Encuentre un natural n_0 tal que $n^k < 2^n$ para todo $n \geq n_0$. Demuestre que dicho n_0 cumple lo pedido mediante inducción.

Solución

(a) Haremos una demostración por inducción simple sobre n.

- **BI**: Para $n = 2$, notamos que

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} &= \prod_{k=2}^{2} \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{2-1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned} \qquad \checkmark$$

- **HI**: Supongamos que para algún $n \geq 2$ se cumple que

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$$

- **TI**: Queremos demostrar entonces que

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n+1}$$

Para esto, notemos que

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k} &= \frac{(n+1)-1}{(n+1)} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} && \text{(HI)} \\
&= \frac{1}{n+1} && \checkmark
\end{aligned}
$$

Concluimos que para todo $n \geq 2$ se cumple que

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$$

$\square$

(b) Nuevamente hacemos una demostración por inducción simple sobre n.

- **BI**: Para $n = 0$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} ax^i &= \sum_{i=0}^{0} ax^i \\
&= a \cdot 1 \\
&= \frac{a(x-1)}{x-1} && \text{para } x \neq 1 \\
&= \frac{ax-a}{x-1} \\
&= \frac{ax^{n+1}-a}{x-1} && \checkmark
\end{aligned}
$$

- **HI**: Supongamos que para algún $n \geq 0$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} ax^i = \frac{ax^{n+1}-a}{x-1}$$

- **TI**: Queremos demostrar entonces que

$$\sum_{i=0}^{n+1} ax^i = \frac{ax^{(n+1)+1}-a}{x-1}$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} ax^i &= \sum_{i=0}^{n} ax^i + ax^{n+1} \\
&= \frac{ax^{n+1} - a}{x - 1} + ax^{n+1} && \text{(HI)} \\
&= \frac{(ax^{n+1} - a) + ax^{n+1}(x - 1)}{x - 1} \\
&= \frac{ax^{n+1} - a + ax^{n+2} - ax^{n+1}}{x - 1} \\
&= \frac{ax^{(n+1)+1} - a}{x - 1} && \checkmark
\end{aligned}$$

Concluimos que para todo natural $n \geq 0$ se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} ax^i = \frac{ax^{n+1} - a}{x - 1}$$

$\square$

(c) Para esta pregunta utilizaremos $n_0 = (k+1)^2$, pues nos permite demostrar más fácilmente algunas desigualdades que necesitaremos durante la demostración. Obviamente cotas mayores o similares también son bienvenidas, pero deben realizar demostraciones válidas por inducción.

Herramientas gráficas pueden ayudarnos a encontrar algún n_0 adecuado para el punto de partida, pero no deberían contar como herramientas rigurosas de demostración.

Para esta demostración haremos más de una inducción. Divideremos esta demostración en 3 partes, i) $k = 1$, ii) $k = 2$, y iii) $k \geq 3$, siempre considerando $n \geq n_0$

- (i) Para $k = 1$, queremos demostrar que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

  $$n < 2^n$$

  Demostraremos esto por inducción simple sobre n.

  - **BI**: Para $n_0 = (k+1)^2 = 4$, tenemos que

    $$n_0 = 4 < 16 = 2^4 = 2^{n_0} \qquad \checkmark$$

  - **HI**: Supongamos que para $n \geq n_0$ se tiene que

    $$n < 2^n$$

- **TI**: Queremos demostrar entonces que

  $$n + 1 < 2^{n+1}$$

  Para esto, notemos que:

  $$\begin{aligned} n + 1 &< 2^n + 1 && \text{(HI)} \\ &< 2^n + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} && \checkmark \end{aligned}$$

Concluimos que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$n < 2^n$$

- (ii) Para $k = 2$, queremos demostrar que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$n^2 < 2^n$$

Demostraremos esto por inducción simple sobre n.

- **BI**: Para $n_0 = (k+1)^2 = 9$, tenemos que

  $$n_0^2 = 9^2 = 81 < 512 = 2^9 = 2^{n_0} \qquad \checkmark$$

- **HI**: Supongamos que para $n \geq n_0$ se tiene que

  $$n^2 < 2^n$$

- **TI**: Queremos demostrar entonces que

  $$(n+1)^2 < 2^{n+1}$$

  Para esto, notemos que:

  $$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< 2^n + 2n + 1 && \text{(HI)} \end{aligned}$$

  Demostraremos a continuación, también por inducción, que $2n + 1 < 2^n$ (*) para $n \geq n_0$, con lo que lo anterior queda como

  $$\begin{aligned} (n+1)^2 &< 2^n + 2^n && (*) \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

  Demostramos (*) por inducción entonces:

- ◇ **BI**: Para $n = n_0 = 9$, tenemos que

$$2n_0 + 1 = 19 < 512 = 2^9 = 2^{n_0} \qquad \checkmark$$

- ◇ **HI**: Suponemos que para algún $n \geq n_0$ se tiene que $2n + 1 < 2^n$
- ◇ **TI**: Queremos demostrar entonces que $2(n+1) + 1 < 2^{n+1}$. Para esto, notemos que:

$$\begin{aligned} 2(n+1) + 1 &= 2n + 2 + 1 \\ &= (2n+1) + 2 \\ &< 2^n + 2 && \text{(HI)} \\ &< 2^n + 2^n \\ &= 2^{n+1} && \checkmark \end{aligned}$$

Concluimos que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$2n + 1 < 2^n$$

Dado que solo nos faltaba demostrar esto para el caso $k = 2$, concluimos que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$n^2 < 2^n$$

- (iii) Para $k \geq 3$, queremos demostrar que para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$n^k < 2^n$$

- ◦ **BI**: Para el caso base, tomamos $n = n_0$, vale decir, queremos mostrar que

$$\left((k+1)^2\right)^k < 2^{(k+1)^2}$$

Lo haremos por una segunda inducción, pero sobre k.

- ◇ **BI**: Para $k = 3$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left((k+1)^2\right)^k &= \left((3+1)^2\right)^3 \\ &= 16^3 \\ &= 2^{12} \\ &< 2^{16} \\ &= 2^{(3+1)^2} \\ &= 2^{(k+1)^2} && \checkmark \end{aligned}$$

- $\diamond$ **HI**: Supongamos que se cumple para $k \geq 3$ que

$$\left((k+1)^2\right)^k < 2^{(k+1)^2}$$

- $\diamond$ **TI** Demostraremos entonces que

$$\left(((k+1)+1)^2\right)^{k+1} < 2^{((k+1)+1)^2}$$

Para demostrar esto, haremos uso de la siguiente propiedad que es un caso particular de $2^m > m^2$:

$$2^{k+2} > (k+2)^2$$

Nótese que la demostración de esta propiedad es equivalente a la del caso ii), pero partiendo de $m = 5$, donde el caso base sale de que:

$$2^m = 2^7 = 128 > 49 = 7^2 = m^2$$

De la propiedad anterior, observemos que al elevar por $(k+1)$ a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} ((k+1)+1)^{2(k+1)} &= (k+2)^{2(k+1)} \\ &= \left((k+2)^2\right)^{k+1} \\ &< \left(2^{k+2}\right)^{k+1} \\ &= 2^{(k+2)(k+1)} \\ &< 2^{(k+2)(k+2)} \\ &= 2^{((k+1)+1)^2} \end{aligned}$$

Concluimos que para todo $k \geq 3$, se tiene que $n_0^k < 2^{n_0}$.

- $\circ$ **HI**: Sea $n \geq n_0$ un natural y supongamos que

$$2^m > m^k$$

para todo m tal que $n_0 \leq m \leq n$

- $\circ$ **TI** Queremos demostrar, por inducción fuerte, que

$$2^{n+1} > n + 1^k$$

Consideraremos acá dos casos:

1. Si $(n+1)$ es par En este caso, podemos escribir $(n+1) = 2j$, con $j = \frac{n+1}{2} \geq n$. Notemos entonces que

$$\begin{aligned}
(n+1)^k &= (2j)^k \\
&= 2^k \cdot j^k \\
&< 2^k \cdot 2^j && \text{(HI)} \\
&= 2^{k+j} \\
&< 2^{2\cdot \text{máx}(k,j)}
\end{aligned}$$

Además, como $n \geq n_0 = (k+1)^2$, tenemos que $n \geq 2k-1$, es decir, $k \leq \frac{n+1}{2}$. Por otra parte, como $(n+1) = 2j$, tenemos que $j = \frac{n+1}{2}$. Por lo tanto, $\text{máx}(k,j) = j$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^k &< 2^{2\cdot \text{máx}(k,j)} \\
&< 2^{2j} \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

2. Si $(n+1)$ es impar En este caso, podemos escribir $(n+1) = 2j-1$, con $j = \frac{n+2}{2}$. Observemos aquí que

$$\begin{aligned}
(n+1)^k &= (2j-1)^k \\
&< (2j)^k \\
&= 2^k j^k \\
&< 2^k 2^j && \text{(HI)} \\
&= 2^{k+j} \\
&= 2^{k+\frac{n+2}{2}} \\
&= 2^{k+\frac{n}{2}+1}
\end{aligned}$$

Notemos finalmente que $2(k+1) \leq (k+1)^2$ pues $k \geq 1$, y que $(k+1)^2 = n_0 \leq n$, por lo tanto, $(k+1) \leq \frac{n}{2}$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
(n+1)^k &< 2^{k+\frac{n}{2}+1} \\
&\leq 2^n \\
&< 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Concluimos que para todo $n \geq n_0$ y $k \geq 3$ se cumple que

$$n^k < 2^n$$

Los casos i), ii) y iii) en conjunto demuestran que para todo $k \geq 1$, podemos utilizar $n_0 = (k+1)^2$ de manera que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que

$$n^k < 2^n$$

Pauta (6 pts. + 1 pt. de bonus)

(a)
- 1.0 por casos base, 0.5 por cada uno.
- 0.5 por plantear hipótesis correctamente.
- 1.5 por desarrollar la tesis.

(b)
- 0.5 por el caso base.
- 0.5 por plantear hipótesis correctamente.
- 2.0 por desarrollar la tesis.

(c)
- Bonus máximo de 1.0 por la demostración completa

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Para $n \geq 0$, denotamos por $F(n)$ al n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Demuestre los siguientes resultados usando inducción.

(a) Para todo par de naturales $n, m \geq 0$, se tiene que

$$F(m+n+1) = F(m)F(n) + F(m+1)F(n+1)$$

Sugerencia: dado que existen dos variables m y n simétricas, realice inducción sobre n tomando m fijo.

(b) Para todo par de naturales $k \geq 1$ y $n \geq 0$, existe un natural a tal que $F(kn) = aF(n)$.
Sugerencia: realice inducción sobre k y use el inciso (a).

Solución

(a) Definimos la propiedad P según:

$$P(n) : F(m+n+1) = F(m)F(n) + F(m+1)F(n+1)$$

para un $m \geq 0$ fijo. Demostraremos $P(n)$ por inducción fuerte sobre n.

BI: Consideramos los casos $n = 0$ y $n = 1$. A saber,

- $P(0)$:

$$\begin{aligned} F(m+0+1) = F(m+1) &= F(m) \cdot 0 + F(m+1) \cdot 1 \\ &= F(m)F(0) + F(m+1)F(1) \end{aligned}$$

- $P(1)$:

$$\begin{aligned} F(m+1+1) = F(m+2) &= F(m) \cdot 1 + F(m+1) \cdot 1 \\ &= F(m)F(1) + F(m+1)F(2) \end{aligned}$$

HI: Suponemos que para todo $k \leq n$ se cumple $P(k)$.

TI: Consideramos $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} F(m+(n+1)+1) &= F(n+n+2) \\ &= F(m+n+1) + F(m+n) \\ &= F(m+(n)+1) + F(m+(n-1)+1) \\ &= F(m)F(n) + F(m+1)F(n+1) + F(m)F(n-1) + F(m+1)F(n) \\ &= F(m)[F(n) + F(n-1)] + F(m+1)[F(n+1) + F(n)] \\ &= F(m)F(n+1) + F(m+1)F(n+2) \\ &= F(m)F(n+1) + F(m+1)F((n+1)+1) \end{aligned}$$

lo que prueba que $P(n+1)$ es verdadera.

Concluimos que $P(n)$ para todo natural $n \geq 0$.

(b) Definimos la propiedad P según:

$$P(k) : \text{existe } a \text{ tal que } F(kn) = aF(n)$$

es decir, que $F(kn)$ es múltiplo de $F(n)$. Demostraremos por inducción simple sobre $k \geq 1$.

BI: Consideramos $P(1)$. Es claro que $F(1 \cdot n) = F(n) = 1 \cdot F(n)$. es decir, $a = 1$.

HI: Suponemos que para un $k \geq 1$ se cumple $P(k)$.

TI: Consideramos $P(k+1)$.

$$\begin{aligned}
F((k+1)n) &= F(kn+n) \\
&= F(kn+(n-1)+1) \\
&= F(kn)F(n-1) + F(kn+1)F(n) && \text{por inciso (a)} \\
&= aF(n)F(n-1) + F(kn+1)F(n) && \text{por HI sobre } F(kn) \\
&= (aF(n-1) + F(kn+1))F(n)
\end{aligned}$$

luego, basta tomar $b = (aF(n-1) + F(kn+1))$ que cumple $F((k+1)n) = bF(n)$ y se demuestra que $P(k+1)$ es cierta.

Concluimos que $P(k)$ para todo natural $k \geq 1$.

Pauta (6 pts.)

(a)
- 1.0 por casos base, 0.5 por cada uno.
- 0.5 por plantear hipótesis correctamente.
- 1.5 por desarrollar la tesis.

(b)
- 0.5 por el caso base.
- 0.5 por plantear hipótesis correctamente.
- 2.0 por desarrollar la tesis.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.