Repaso I1

Clase 11

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Se viene la I1...

Se viene la I1...

Outline

Outline

Interrogación 1

Información relevante

- La interrogación 1 se realizará mañana **martes 16 de abril desde las 17:30 horas**.
- Casos particulares (alumnos Piane, tope de horarios) empezarán **antes** y se les avisará oportunamente el horario y la información relevante.
- Temario:
  - Inducción simple y estructural
  - Lógica proposicional completa
  - Lógica de predicados completa
  - ¿Métodos de demostración?

No evaluamos métodos de demostración de forma directa, pero asumimos que los manejan para las preguntas de demostración

Frame Title

Información relevante

- La interrogación es **individual**
- Durante la evaluación, **no podrán** hacer uso de apuntes o material del curso
- En caso de copia se aplicará:

POLÍTICA DE INTEGRIDAD ACADÉMICA
DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Outline

¿Cómo enfrentar una pregunta nueva?

De forma general, tenemos los siguientes pasos:

1. Lectura global de la pregunta
2. Identificación de contenidos involucrados
3. Identificar tipo de pregunta (demostración, cálculo, definición, construcción de ejemplo...)

Según el tipo de pregunta hay opciones

Preguntas de calcular/algoritmos

Buscan medir manejo de “recetas” vistas. Ejemplos:

- Mostrar por tablas de verdad
- Construcción de fórmulas en CNF
- Mostrar el árbol sintáctico de una estructura definida inductivamente
- ...

Ejemplo

Obtenga una fórmula equivalente a $p \vee (p \leftrightarrow q)$ en CNF

Pueden ser subpreguntas dentro de preguntas más grandes

Importante

- No se salten pasos
- Si hacen supuestos, explicítenlos

Preguntas de construir definiciones

Buscan medir formalidad y menjo de tipos de definiciones

- Estructuras recursivas
- Operadores sobre estructuras recursivas

Ejemplo

Defina el conjunto T de los árboles binario sobre los naturales de manera recursiva. Defina recursivamente el tamaño de un árbol como la cantidad de los números que almacena.

Generalmente acompañadas de demostraciones por inducción estructural

Importante

- Definir cuidadosamente casos base
- Las reglas de construcción definen elementos nuevos desde elementos preexistentes y los utilizan o modifican

Preguntas de modelación

Buscan medir manejo de sintaxis lógica y capacidad de representar conocimiento

- Lógica proposicional (variables binarias)
- Lógica de predicados (cuantificadores)

Ejemplo

Las de las tareas 2 (semáforo) y 3 (sudoku)

Pueden ir acompañadas de demostraciones de correctitud

Importante

- Identificar qué tipo de fórmula se pide (proposicional o predicado)
- Escoger variables/predicados adecuados
- Usar fórmulas auxiliares para mejor legibilidad (para ustedes y nosotros)

Preguntas de construir ejemplos

Buscan medir comprensión de definiciones nuevas

- Análogos de definiciones conocidas
- Extensiones de definiciones conocidas

Ejemplo

Definimos una expresión algebraica como (...). Dé un ejemplo de expresión algebraica.

Generalmente acompañada demostraciones que usan la nueva definición.

Importante

- Pensar en casos pequeños y básicos
- ¿Cuál es el ejemplo más simple que cumple lo pedido?

Preguntas de demostraciones

Buscan medir comprensión de definiciones nuevas y antiguas, a través de técnicas de demostración

- Identificar estructura de la propiedad a demostrar (implicancia, doble implicancia, existencial, ...)
- Identificar partes de la propiedad a demostrar

Luego de identificar estos elementos, podemos elegir método de demostración

Preguntas de demostraciones

Ejemplo

Sea P un conjunto de variables proposicionales, $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ un conjunto de fórmulas en lógica proposicional y $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ dos fórmulas en lógica proposicional. Demuestre que

(a) Si $\Sigma \vDash \varphi \rightarrow \psi$ entonces $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$.

(b) Si φ es una tautología, se cumple que si $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \psi$.

Outline

¿Dudas de materia?

Outline

Repaso: Inducción simple

Definición (Naturales)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es el menor conjunto que cumple:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Principio de inducción simple (PIS)

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $0 \in A$ (**BI**)
2. Si $n \in A$ (**HI**) entonces $n + 1 \in A$ (**TI**)

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Repaso: Inducción simple

Principio de inducción simple (PIS) - Alt. 2

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (**BI**)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero (**HI**) entonces $P(n+1)$ es verdadero (**TI**)

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Principio de inducción simple (PIS) - Alt. 3

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero (**BI**)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $P(n)$ es verdadero (**HI**) entonces $P(n+1)$ es verdadero (**TI**)

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Repaso: Inducción fuerte

Principio de inducción fuerte (PICV)

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \subseteq \mathbb{N}$:

$$\{0, 1, ..., n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Principio de inducción fuerte (PICV) - Alt.

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

1. Si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$ (**HI**) entonces $P(n)$ es verdadero

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

¡El caso base está implícito! Para $n = 0$ hay que demostrar $P(0)$

Repaso: Inducción estructural

Definición inductiva, forma general

El conjunto S es el **menor conjunto** que cumple que:

- $B \subseteq S$ donde B tiene los elementos base (**BI**)
- Si $s_1, \ldots, s_n \in S$ (**HI**) entonces $f_1(s_1, \ldots, s_n) \in S, \ldots, f_m(s_1, \ldots, s_n) \in S$, donde los f_j son las reglas que nos permiten construir nuevos elementos a partir de los que ya conocemos (**TI**).

Siempre tenemos uno o más casos base y una o más reglas constructivas, que luego son las que nos permiten ir construyendo nuevos elementos a partir de los que ya conocemos.

Repaso: Inducción estructural

Principio de inducción estructural

Sea S definido inductivamente como en la definición general anterior y P una propiedad sobre los elementos de S. Si se cumple que:

- Para todo $s \in B$, se tiene que $P(s)$ (**BI**)
- Si $P(s_1), ..., P(s_n)$ (**HI**) entonces $P(f_1(s_1, ..., s_n)), ..., P(f_m(s_1, ..., s_n))$ (**TI**).

Entonces todos los elementos de S cumplen la propiedad P.

¡Por tener una definición inductiva es que podemos aplicar inducción estructural!

Repaso: Inducción estructural

Ejemplos

- Naturales
- Palíndromos
- Fórmulas de lógica proposicional
- Fórmulas de lógica de predicados
- Listas ligadas
- Expresiones algebraicas
- Producto cartesiano n-dimensional
- ¿Demostraciones por resolución?
- ...

Repaso: Inducción estructural

Operadores en estructuras inductivas

Sea S definido inductivamente como en la definición general anterior.

Definimos un operador O sobre S como:

- Para todo $s \in B$, definimos $O(s)$.
- Para $O(s_1), \dots, O(s_n)$, definimos $O(f_1(s_1, \dots, s_n)), \dots, O(f_m(s_1, \dots, s_n))$.

Esto nos permite definir O para todo elemento de S.

Ejemplos

- Valuación de una fórmula
- Largo de un palíndromo
- Paridad de un natural
- Profundidad de una expresión algebraica
- ...

Repaso: Lógica proposicional

Sintaxis (¡Definición inductiva!)

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\varphi \star \psi \in \mathcal{L}(P)$.

Repaso: Lógica proposicional

Semántica (¡Operador inductivo!)

Sea P un conjunto de variables proposicionales y $\sigma : P \to \{0,1\}$. Se define la valuación extendida $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según:

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces:

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(p)$$

- Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces:

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- Si $\varphi = \psi_1 \star \psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, entonces ...

¡La definición es inductiva! Podemos hacer inducción estructural y evaluar recursivamente.

Repaso: Lógica proposicional

Otros puntos importantes a revisar

- **Tablas de verdad**: Representación de valuaciones, cuántas hay para cada fórmula, cuántas tablas distintas podemos hallar, cómo usarlas para demostrar equivalencia, cómo demostrar por contraejemplo, ...
- **Equivalencia lógica**: Por tablas de verdad, por leyes de equivalencia (doble negación, de Morgan, conmutatividad, asociatividad, distributividad, idempotencia, absorción, implicancia material, doble implicancia).
- **Conjuntos funcionalmente completos**: Ya conocemos varios, notablemente, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$. Podemos partir desde estos para encontrar otros (ver ayudantías).
- **Modelación con lógica**: Hemos visto distintas opciones, pueden ir desde cosas simples (semáforo) a complejas (asignación de recursos). ¡En la tarea y las ayudantías hemos visto ejemplos!
- **Tautologías y contradicciones**: Nos ayudan a simplificar y razonar.
- **Formas normales**: Tener claro CNF, DNF y cómo construir las fórmulas equivalentes en esas formas.

Repaso: Consecuencia lógica

Satisfacción de un conjunto de fórmulas

Dado $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$, decimos que σ satisface a Σ ($\sigma(\Sigma) = 1$) si para toda $\varphi \in \Sigma$ se cumple que $\sigma(\varphi) = 1$.

Si existe tal σ, diremos que Σ es satisfactible. En caso contrario, diremos que es inconsistente.

Consecuencia lógica

Decimos que *psi* $\in \mathcal{L}(P)$ es consecuencia lógica de $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ si para toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

Lo denotamos por $\Sigma \vDash \psi$

Teorema

$\Sigma \vDash \psi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\psi\}$ es inconsistente

Este teorema fundamental nos lleva a la resolución proposicional

Repaso: Resolución proposicional

Demostración por resolución

Una demostración por resolución de que σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$:
  - $C_i \in \Sigma$, o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j y C_k usando la **regla de resolución**
  - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la **regla de factorización**
- $C_n = \square$

Lo denotamos por $\Sigma \vdash \square$

Teorema

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \vDash \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Repaso: Resolución proposicional

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica:

1. Tomamos $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ y convertimos sus fórmulas a CNF.
2. Separamos las fórmulas en CNF en sus cláusulas para construir Σ'.
3. Aplicamos resolución proposicional para mostrar $\Sigma' \vdash \square$.
4. Concluimos que $\Sigma \models \varphi$.

Repaso: Lógica de predicados

A diferencia de la lógica proposicional, tomamos predicados (aserciones interpretables) en lugar de proposiciones. Los predicados pueden tener variables libres (no determinadas) o determinadas, y pueden tener distintas aridades (cantidad de variables libres). Estos predicados nos permiten definir las fórmulas de predicados de manera inductiva también.

Predicado compuesto

Diremos que φ es un predicado compuesto (o fórmula) si es:

- Un predicado básico
- La negación ($\neg$) de un predicado compuesto
- La conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o dobleimplicancia ($\leftrightarrow$) de predicados del mismo dominio
- La cuantificación existencial ($\exists$) o universal ($\forall$) de un predicario compuesto

Podemos escribir esto más formalmente, es un buen ejercicio. ¿Cómo se ve la semántica?

Repaso: Lógica de predicados

A diferencia de la lógica proposicional, tomamos predicados (aserciones interpretables) en lugar de proposiciones. Los predicados pueden tener variables libres (no determinadas) o determinadas, y pueden tener distintas aridades (cantidad de variables libres).

Predicado compuesto

Diremos que φ es un predicado compuesto (o fórmula) si es:

- Un predicado básico
- La negación ($\neg$) de un predicado compuesto
- La conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o dobleimplicancia ($\leftrightarrow$) de predicados del mismo dominio
- La cuantificación existencial ($\exists$) o universal ($\forall$) de un predicario compuesto

Podemos escribir esto más formalmente, es un buen ejercicio. ¿Cómo se ve la semántica?

Repaso: Lógica de predicados

Semántica de un predicado compuesto

La valuación de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados sobre un dominio

Para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, ..., x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, ..., x_n)$ es el predicado sobre D.

Interpretación

Sean $P_1, ..., P_m$ símbolos de predicados. Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $P_1, ..., P_m$ está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i.

Repaso: Lógica de predicados

Otros puntos importantes a revisar

- **Equivalencia lógica**: Extendemos las leyes de equivalencia (doble negación, de Morgan, conmutatividad, asociatividad, distributividad, idempotencia, absorción, implicancia material, doble implicancia) con leyes sobre la cuantificación existencial y universal.
- **Modelación con lógica**: Similar a la proposicional, en algunos casos más compacta y más fácil de leer, especialmente en casos infinitos.
- **Particularidades**: Satisfactibilidad, consecuencia lógica son similares, pero ¡ojo con las definiciones y la notación!
- **Inferencia**: Extendemos la resolución proposicional con especificación universal, generalización universal, especificación existencial y generalización existencial.

Se viene la I1...