Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

1 de mayo de 2024

1^{o} semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 20 de marzo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Respuestas

Problema 1

Solución

(a) Definimos la fórmula

$$C(x) := \forall y.\ x \leq y$$

($\Rightarrow$) Sea $C(x)$ satisfecho por $\mathcal{I}$ en $x = a$. Por construcción, para todo elemento y del dominio, este es mayor o igual que a, por lo que a es el mínimo, i.e. $a = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $a = 0$. Es claro que al evaluar en la fórmula, para todo y del dominio $C(x)$ es verdadero.

(b) Definimos la fórmula

$$\varphi_1 := \forall x \forall y \exists z.\ V(x, y, z)$$

($\Rightarrow$) Sea φ_1 satisfecha por $\mathcal{I}$. Por construcción, para cualquier elección de celda (x, y) existe un valor z asignado.

($\Leftarrow$) Si en el tablero hay un valor para toda celda, es claro que todo par (x, y) tiene un valor z asociado tal que la fórmula φ_1 es satisfecha.

(c) Definimos la fórmula

$$\varphi_2 := \forall x \forall y \forall w \forall z.[V(x, y, z) \wedge V(x, w, z) \rightarrow y = w]$$

($\Rightarrow$) Sea φ_2 satisfecha por $\mathcal{I}$. Sean x, y, z, w tales que $\mathcal{I} \models V(x, y, z)$ y $\mathcal{I} \models V(x, w, z)$. Por construcción de φ_1, sabemos que necesariamente $y = w$, es decir, en la fila x la única forma de que dos celdas tengan el mismo valor z es que correspondan a la misma columna. Luego, no se repiten valores en una misma fila.

($\Leftarrow$) Si no hay valores repetidos en ninguna fila, cuando dos celdas de una misma fila contienen el mismo valor, esto significa que son la misma celda. Por ello, la fórmula es satisfecha en tal escenario.

(d) Definimos la fórmula auxiliar

$$E(x) := \forall y.\ y \leq x$$

que es satisfecha si y solo si, x toma valor 8. La demostración de este resultado es análoga al inciso (a). Ahora, definimos los siguientes dos fragmentos para construir la fórmula pedida. Por una parte,

$$\alpha \quad := \quad \forall x \forall y \forall z.\ V(x, x, z) \wedge V(y, y, z) \rightarrow x = y$$

Demostraremos que $\mathcal{I} \models \alpha$ si y solo si la diagonal $y = x$ no tiene repetidos.

($\Rightarrow$) Si α es satisfecho, todo par de celdas en la diagonal con igual valor debe ser la misma celda. Por lo tanto, no hay repetidos en la diagonal de ecuacion $y = x$.

($\Leftarrow$) Supongamos que no hay repetidos en la diagonal $y = x$. Luego, si el antecedente de la implicancia es falso, significa que las celdas tienen valor diferente. En caso que tengan el mismo valor, dado que no hay repetidos, se deduce que son la misma celda y la implicancia es verdadera. Por lo tanto, $\mathcal{I} \models \alpha$.

Por otra parte,

$$\begin{array}{lcl} \beta & := & \exists e \forall x \forall y \forall v \forall w \forall z. \quad [E(e) \wedge S(x, y, e) \wedge S(v, w, e) \wedge \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad V(x, y, z) \wedge V(v, w, z)] \rightarrow x = v \wedge y = w \end{array}$$

Demostraremos que $\mathcal{I} \models \beta$ si y solo si la diagonal $y = 8 - x$ no tiene repetidos.

($\Rightarrow$) Supongamos que β es satisfecha. Luego, sabemos que e toma valor 8 y las combinaciones de celdas (x, y) y (v, w) pertenecen a la diagonal de ecuación $y = 8 - x$ por semántica del predicado de suma S. El resto, es análogo a la demostración de α.

($\Leftarrow$) Análoga a α.

Finalmente, la fórmula pedida es $\varphi_3 := \alpha \wedge \beta$, que claramente cumple lo pedido.

(e) Para esta propiedad requerimos más elementos del dominio como variables con el fin de operar con ellos. Para esto, definimos las siguientes fórmulas que capturan los valores 1, 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{array}{rcl} U(x) & := & \exists c \forall y. C(c) \wedge (\neg x \leq c) \wedge (\neg y = c \rightarrow x \leq y) \\ D(x) & := & \exists u. U(u) \wedge S(u, u, x) \\ T(x) & := & \exists u \exists d. U(u) \wedge D(d) \wedge S(u, d, x) \end{array}$$

Con ayuda de estas fórmulas, modelamos el valor que define los rangos de los cuadrantes del tablero principal (expresión de la forma $k \cdot 3 + a$). Definimos la fórmula

$$F(k, a, r) \quad := \quad \exists t \exists u.\ T(t) \wedge M(k, t, u) \wedge S(u, a, r)$$

Esta fórmula cumple que $\mathcal{I} \models F(k, a, r)$ si y solo si $r = 3k + a$.

Ahora bien, dos celdas $(x, y), (v, w)$ comparten subtablero si su componente x y v satisfacen la siguiente fórmula

$$\begin{array}{lcr} ST(x, v) & := & \exists c \exists d \exists k \exists r \exists m.\ C(c) \wedge D(d) \wedge F(k, c, r) \wedge F(k, d, m) \wedge \\ & & r \leq x \wedge x \leq m \wedge r \leq v \wedge v \leq m \end{array}$$

Esta expresión nos permite acotar tanto la primera como la segunda componente de las celdas que queremos tener en el mismo subtablero.

Con todo esto,

$$\varphi_4 \quad := \quad \forall x \forall y \forall v \forall w \forall z.\ ST(x, v) \wedge ST(y, w) \wedge V(x, y, z) \wedge V(v, w, z) \rightarrow x = v \wedge z = w$$

Demostraremos que $\mathcal{I} \models \varphi_4$ si y solo si un subtablero no tiene repetidos. Para esto, aprovecharemos que la fórmula final es análoga a la del inciso anterior y demostraremos que $ST(x, v)$ captura la restricción de subtablero.

Supongamos que $\mathcal{I} \models ST(x, v)$. Debemos demostrar que x y v corresponden a coordenadas dentro de un mismo subtablero. De la definición de ST, tenemos que existe un k tal que

$$3k \leq x, v \leq 3k + 2$$

Dado que $F(k, a, r)$ fija el valor r en el dominio, k es tal que $3k$ y $3k + 2$ son valores del dominio. En particular, k solo puede tomar valores $0, 1, 2$ correspondientes a los 3 posibles subtableros. Luego, x y v se encuentran en el mismo cuadrante.

Pauta (6 pts.)

- Cada inciso tiene 6 puntos. El puntaje de la pregunta es el promedio entre los incisos.
    - 3.0 ptos por la fórmula.
    - 3.0 ptos por la demostración.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Solución

a. Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfactibles y demuestre su respuesta.

   i. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$
   No es satisfactible. Recordemos que todos los predicados están restringidos al dominio **no vacío** de evaluación dado por la interpretación. Para una interpretación arbitraria, sea a en ese dominio. Se tiene que $a = a$, lo que da un contraejemplo para $x = a$, $y = a$. Como la interpretación es arbitraria, ninguna interpretación satisface φ_1.

   ii. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
   Es satisfactible. Basta con tomar cualquier interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio tenga al menos dos elementos, como por ejemplo. $D = \mathcal{I}(dom) = \{0, 1\}$ (no nos importa la interpretación de S pues no se utiliza en esta fórmula). Sea a un elemento arbitrario del dominio (por ejemplo, 0 o 1 en D). Por generalización universal, basta demostrar que $\exists y \exists z[\neg(a = y) \wedge (a = z \vee y = z)]$. Como el dominio tiene al menos dos elementos distintos, sea b algún otro elemento del dominio (por ejemplo, $1 - a$ en D). Luego, notemos que $\neg(a = b)$ por cómo lo escogimos, y además trivialmente $(b = b)$, por lo que también es cierto que $(a = b \vee b = b)$. Aplicando generalización existencial dos veces, obtenemos lo mencionado.

iii. $\varphi_3(x) := \forall y S(x, y, y) \wedge S(x, x, y)$
Es satisfactible. Consideremos una interpretación $\mathcal{I}$ dada por $\mathcal{I}$ donde $D = I(dom) = \{0\}$ y el predicado S^D satisfecho por $\{(0, 0, 0)\}$. Se tiene entonces que $\mathcal{I} \vdash \varphi_3(0)$, por lo que φ_3 es satisfactible.

Pauta (3 pts.)

- Cada inciso tiene 1 punto. El puntaje del ítem es la suma entre los incisos.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

(b) Considere los símbolos de predicado P, A, G, S y R unarios y D binario. Demuestre la siguiente consecuencia lógica. [3pts]

$$\begin{array}{c}\forall x(P(x) \to A(x)) \\ \forall x \forall y\,[D(x,y) \land G(y) \to \neg \exists z(D(x,z) \land R(z))] \\ \forall x\,[S(x) \to \neg \exists y(D(x,y) \land A(y))] \\ \exists x\,[D(a,x) \land (G(x) \lor P(x))] \\ \hline S(a) \to \neg \exists z(D(a,z) \land R(z))\end{array}$$

R: Equivalentemente, definimos Σ como

$$\Sigma := \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x(P(x) \to A(x)) \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y\,[D(x,y) \land G(y) \to \neg \exists z(D(x,z) \land R(z))] \\ \varphi_3 &:= \forall x\,[S(x) \to \neg \exists y(D(x,y) \land A(y))] \\ \varphi_4 &:= \exists x\,[D(a,x) \land (G(x) \lor P(x))]\end{aligned}$$

Y definimos φ como

$$\varphi := \ S(a) \to \neg \exists z(D(a,z) \land R(z))$$

Y queremos demostrar que $\Sigma \models \varphi$. Para ello, definimos el conjunto Σ' dado por

$$\Sigma' := \{\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3', \varphi_4\}$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi_1' &:= \forall x(\neg P(x) \lor A(x)) \\ \varphi_2' &:= \forall x \forall y\,[\neg D(x,y) \lor \neg G(y) \lor \forall z(\neg D(x,z) \lor \neg R(z))] \\ \varphi_3' &:= \forall x\,[\neg S(x) \lor \forall y(\neg D(x,y) \lor \neg A(y))]\end{aligned}$$

De manera que φ_1' es equivalente a φ_1 por regla de implicancia; φ_2' es equivalente a φ_2 por regla de implicancia, leyes de morgan y teorema de equivalencia sobre la negación de la cuantificación existencial; φ_3' es equivalente a φ_3 por regla de implicancia, el mismo teorema de equivalencia sobre la negación de la cuantificación existencial y leyes de morgan.

Luego, definimos φ' y φ'' como

$$\begin{aligned}\varphi' :=& S(a)\\ \varphi'' :=& \exists z(D(a,z) \lor R(z))\end{aligned}$$

De manera que $\varphi' \land \varphi''$ es equivalente a $(\neg\varphi)$ por regla de implicancia y doble negación.

Con esto, basta con demostrar que $\Sigma' \cup \{\varphi', \varphi''\} \vdash \square$. Por simplicidad, definimos $\Sigma'' = \Sigma' \cup \{\varphi', \varphi''\}$. Haremos la demostración por resolución.

(1)	$\forall x(\neg P(x) \lor A(x))$	$(\in \Sigma'')$
(2)	$\forall x \forall y\, [\neg D(x,y) \lor \neg G(y) \lor \forall z(\neg D(x,z) \lor \neg R(z))]$	$(\in \Sigma'')$
(3)	$\forall x\, [\neg S(x) \lor \forall y(\neg D(x,y) \lor \neg A(y))]$	$(\in \Sigma'')$
(4)	$\exists x\, [D(a,x) \land (G(x) \lor P(x))]$	$(\in \Sigma'')$
(5)	$S(a)$	$(\in \Sigma'')$
(6)	$\exists z(D(a,z) \lor R(z))$	$(\in \Sigma'')$
(7)	$\forall y\, [\neg D(a,y) \lor \neg G(y) \lor \forall z(\neg D(a,z) \lor \neg R(z))]$	(Esp. Univ. de (2))
(8)	$[D(a,b) \land (G(b) \lor P(b))]$ para algún b	(Esp. Exist. de (4))
(9)	$D(a,b)$	(Sep. de cláusulas de (8))
(10)	$G(b) \lor P(b)$	(Sep. de cláusulas de (8))
(11)	$(\neg D(a,b) \lor \neg G(b) \lor \forall z(\neg D(a,z) \lor \neg R(z)))$	(Esp. Univ. de (7))
(12)	$(D(a,c) \lor R(c))$ para algún c	(Esp. Exist. de (6))
(13)	$(\neg D(a,b) \lor \neg G(b) \lor \neg D(a,c) \lor \neg R(c))$	(Esp. Univ. de (11))
(14)	$(\neg D(a,b) \lor \neg G(b) \lor \neg D(a,c))$	(Res. de (12) y (13))
(15)	$(\neg D(a,b) \lor \neg G(b))$	(Res. de (12) y (14))
(16)	$\neg G(b)$	(Res. de (9) y (15))
(17)	$P(b)$	(Res. de (10) y (16))
(18)	$\neg P(b) \lor A(b)$	(Esp. Univ. de (1))
(19)	$A(b)$	(Res. de ((17) y (18))
(20)	$\neg S(a) \lor \forall y(\neg D(a,y) \lor \neg A(y))$	(Esp. Univ. de (3))
(21)	$\neg S(a) \lor \neg D(a,b) \lor \neg A(b)$	(Esp. Univ. de (20))
(22)	$\neg D(a,b) \lor \neg A(b)$	(Res. de (5) y (21))
(23)	$\neg D(a,b)$	(Res. de (19) y (22))
(24)	$\square$	(Res. de (9) y (23))

Con esto concluimos la demostración.