

# Teoría de conjuntos

Clase 9

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

# Outline

**Introducción**

Conjuntos y axiomas

Operaciones

Epílogo

# Introducción

- Hasta ahora hemos usado conjuntos de una manera intuitiva pero razonable.
- Vamos a estudiar la teoría de conjuntos desde un punto de vista **axiomático**.
- Esta teoría se considera la base de las matemáticas.



# Introducción

## Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Conjunto?
- ¿Elemento?
- ¿Pertenencia?

# Introducción

## Ejemplos

$$x \in A$$

- $x$  pertenece a  $A$ .
- $x$  es un elemento de  $A$ .

$$0 \in \mathbb{N}$$

- 0 pertenece a los naturales.

$$2 \in \{1, 2\} \in \{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$$

- 2 es un elemento de  $\{1, 2\}$ , el que a su vez es un elemento de  $\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$ .

# Introducción

## Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

Enunciaremos algunos *axiomas* con los que definiremos formalmente la teoría de conjuntos

# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos



# Outline

Introducción

**Conjuntos y axiomas**

Operaciones

Epílogo

# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

■  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$



# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$



# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

■  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$



■  $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$



# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$



# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto** de  $B$  si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras,  $A$  es subconjunto de  $B$  si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

## Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \subseteq \{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \}$





# Axiomas

## Definición

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales** si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

# Axiomas

## Definición

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales** si y sólo si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Y si ahora aplicamos la definición de subconjunto y equivalencias lógicas:

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$A = B \leftrightarrow \forall x ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$$

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

# Axiomas

## Definición equivalente

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales** si y sólo si

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Este se conoce como **Axioma de extensión**.

- Nos dice que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

Un conjunto queda completamente definido por los elementos que contiene

# Axiomas

En conclusión, lo único que define a un conjunto son los elementos que contiene.

Observación

$$\{x, x\} = \{x\}$$

Los conjuntos no pueden tener elementos repetidos

# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto propio** de  $B$  si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Notación:  $A \subsetneq B$ .

¿Qué significa que  $A \neq B$ ?

$$A = B \quad \leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$A \neq B \quad \leftrightarrow \quad A \not\subseteq B \vee B \not\subseteq A$$

¿Y que  $B \not\subseteq A$ ?

$$B \subseteq A \quad \leftrightarrow \quad \forall x (x \in B \rightarrow x \in A) \quad \leftrightarrow \quad \forall x (x \notin B \vee x \in A)$$

$$B \not\subseteq A \quad \leftrightarrow \quad \neg \forall x (x \notin B \vee x \in A) \quad \leftrightarrow \quad \exists x (x \in B \wedge x \notin A)$$

# Axiomas

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos. Diremos que  $A$  es **subconjunto propio** de  $B$  si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B, \text{ o alternativamente, } A \subseteq B \wedge B \not\subseteq A.$$

Notación:  $A \subsetneq B$ .

## Corolario

$B \not\subseteq A$  si y sólo si  $\exists x \in B$  tal que  $x \notin A$ .

# Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

¿Sabemos si existe algún conjunto?

# Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$  tal que  $\forall x, x \notin X$ .

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por  $\emptyset$  o  $\{\}$ .

Veremos algunas propiedades importantes del conjunto vacío



# Axiomas

## Teorema

Para todo conjunto  $A$  se tiene que  $\emptyset \subseteq A$ .

# Axiomas

## Teorema

Para todo conjunto  $A$  se tiene que  $\emptyset \subseteq A$ .

## Demostración

Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que  $\forall x, x \in \emptyset \rightarrow x \in A$ . Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego  $\emptyset \subseteq A$ . □

# Axiomas

## Teorema

Existe un único conjunto vacío.

# Axiomas

## Teorema

Existe un único conjunto vacío.

## Demostración

Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \rightarrow A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos  $A$  y  $B$  vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que  $A$  y  $B$  son conjuntos, tenemos que  $A \subseteq B$ , ya que estamos suponiendo que  $A$  es vacío. Recíprocamente, se tiene que  $B \subseteq A$ . Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que  $A = B$ .



# Axiomas

¿Como podemos definir un conjunto?

- Por extensión (listando sus elementos):

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Podemos hacer algo más *comprensivo*:

$$\mathbb{Z}_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

De hecho, necesitamos ser muy específicos... ¿por qué?

# Axiomas

## Axioma de abstracción

Si  $\varphi$  es una propiedad sobre objetos, entonces  $A = \{x \mid \varphi(x)\}$  es un conjunto.

$A$  sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad  $\varphi$ :

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

# Axiomas

## Axioma de abstracción

Si  $\varphi$  es una propiedad sobre objetos, entonces  $A = \{x \mid \varphi(x)\}$  es un conjunto.

$A$  sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad  $\varphi$ :

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

## Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

# Axiomas

## Axioma de abstracción

Si  $\varphi$  es una propiedad sobre objetos, entonces  $A = \{x \mid \varphi(x)\}$  es un conjunto.

$A$  sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad  $\varphi$ :

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

## Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

## Ejemplo

Definamos el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$



# Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

# Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

## Ejemplo

$\varphi_1(x)$  :  $x$  es un conjunto con más de 3 elementos

$\varphi_2(x)$  :  $x$  es un conjunto con una cantidad finita de elementos

$\varphi_3(x)$  :  $x$  es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

# Axiomas

Siguiendo con el ejemplo:

## Ejemplo

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos.

Dado que  $\mathcal{A}_1$  es un conjunto que tiene conjuntos adentro, ¿es  $\mathcal{A}_1$  un elemento de sí mismo? ¿ $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$ ?

- En  $\mathcal{A}_1$  están todos los conjuntos con más de 3 elementos.
- ¡Son muchos! Definitivamente más de 3...
- Entonces,  $\mathcal{A}_1$  tiene más de 3 elementos.
- Luego,  $\mathcal{A}_1$  cumple  $\varphi_1$ .
- Concluimos que  $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$ .

# Axiomas

## Ejemplo

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

¿ $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$ ? No.

## Ejemplo

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$ , el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

¿ $\mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}_3$ ? Sí.

# Axiomas

Luego de toda esta discusión, tiene sentido preguntarse si un conjunto pertenece a sí mismo. Tomemos la siguiente propiedad:

$$\varphi(x) \leftrightarrow x \notin x$$

La propiedad  $\varphi$  es satisfecha por todos los conjuntos que **no pertenecen a sí mismos**. Por ejemplo,  $\mathcal{A}_2$  cumple  $\varphi$ , mientras que  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_3$  no.

¿Qué más podemos hacer? ¡Ocupar el axioma de abstracción!



Bertrand Russell (1872–1970)

# Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$  será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

# Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$  será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es  $\mathcal{R}$  un elemento de  $\mathcal{R}$ ? ¿ $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ ?

- El conjunto  $\mathcal{R}$  pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad  $\varphi$ .



# Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$  será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es  $\mathcal{R}$  un elemento de  $\mathcal{R}$ ? ¿ $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ ?

- El conjunto  $\mathcal{R}$  pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad  $\varphi$ .
- Es decir, sólo si cumple que  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ .

# Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$  será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es  $\mathcal{R}$  un elemento de  $\mathcal{R}$ ? ¿ $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ ?

- El conjunto  $\mathcal{R}$  pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad  $\varphi$ .
- Es decir, sólo si cumple que  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ .

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA!

Esta es la **paradoja de Russell**.

# Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

## Axioma de separación

Si  $\varphi$  es una propiedad y  $C$  es un conjunto "*sano*", entonces

$A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$  es un conjunto.

# Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

## Axioma de separación

Si  $\varphi$  es una propiedad y  $C$  es un conjunto "*sano*", entonces  $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$  es un conjunto.

¿Qué significa que  $C$  sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

# Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

## Axioma de separación

Si  $\varphi$  es una propiedad y  $C$  es un conjunto "*sano*", entonces  $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$  es un conjunto.

¿Qué significa que  $C$  sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto  $A$  se obtiene *separando* de  $C$  los elementos que cumplen la propiedad  $\varphi$ .

# Axiomas

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto “universal sano” que llamaremos  $\mathcal{U}$ .
- Entonces, cuando escribamos  $A = \{x \mid \varphi(x)\}$  en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto  $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$ .

Típicamente el conjunto  $\mathcal{U}$  se deduce del contexto.

# Outline

Introducción

Conjuntos y axiomas

**Operaciones**

Epílogo

# Operaciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos.



# Operaciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos.

Definición

La **unión** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  o  $B$ .

# Operaciones

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos.

## Definición

La **unión** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  o  $B$ .

## Definición

La **intersección** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  y en  $B$ .

# Operaciones

## Diferencia

La **diferencia** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  pero no en  $B$ .

# Operaciones

## Diferencia

La **diferencia** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  pero no en  $B$ .

## Definición

El **conjunto potencia** de  $A$  se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

# Operaciones

## Diferencia

La **diferencia** de  $A$  y  $B$  se define por

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en  $A$  pero no en  $B$ .

## Definición

El **conjunto potencia** de  $A$  se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ .

## Observaciones

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

# Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

## Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

¿Cómo podemos llamar al operador  $\delta$ ?

# Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador  $\delta$  (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \delta(0) = \delta(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \delta(1) = \delta(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \delta(2) = \delta(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$\vdots$

## Observación

Note que  $1 = \{0\}$ ,  $2 = \{0, 1\}$ ,  $3 = \{0, 1, 2\}$ ,  $\dots$ ,  $n = \{0, \dots, n-1\}$ .

# Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de  $\mathbb{N}$ :

## Definición

El conjunto de los **números naturales**, denotado por  $\mathbb{N}$ , es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1.  $\emptyset \in \mathbb{N}$
2. Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a  $\emptyset$ , 1 a  $\delta(\emptyset)$ , y así sucesivamente.

Solo con  $\emptyset$  y  $\delta$  podemos definir todo  $\mathbb{N}$  !!!



# Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

## Definición

La **suma** de dos números naturales cumple

1.  $sum(m, 0) = m$
2.  $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

## Ejercicio

Muestre que  $sum(3, 4) = 7$ .

# Construcción de conjuntos

## Ejercicio

$$\begin{aligned} \text{sum}(3, 4) &= \text{sum}(3, \delta(3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, 3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, \delta(2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, 2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(4))) \\ &= \delta(\delta(5)) \\ &= \delta(6) \\ &= 7 \end{aligned}$$

# Construcción de conjuntos

## Ejercicio (propuesto ★)

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que  $\text{mult}(3, 2) = 6$ .

## Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

# Construcción de conjuntos

## Ejercicio

Multiplicación de dos números naturales

1.  $mult(m, 0) = 0$
2.  $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$\begin{aligned} mult(3, 2) &= mult(3, \delta(1)) \\ &= sum(3, mult(3, 1)) \\ &= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\ &= sum(3, sum(3, mult(3, 0))) \\ &= sum(3, sum(3, 0)) \\ &= sum(3, 3) \\ &\vdots \\ &= 6 \end{aligned}$$

# Construcción de conjuntos

## Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre  $c$ :

**BI:**  $\text{sum}(\text{sum}(a, b), 0) = \text{sum}(a, b) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, 0))$ .

**HI:** Supongamos que se cumple que  
 $\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$  para un natural  $c$ .

**TI:** Por demostrar:  $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c)))$ .

Desarrollamos el lado izquierdo:  $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) =$

$$\delta(\text{sum}(\text{sum}(a, b), c)) \stackrel{HI}{=} \delta(\text{sum}(a, \text{sum}(b, c))) =$$

$$\text{sum}(a, \delta(\text{sum}(b, c))) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c)))$$



# Leyes

Consideraremos un conjunto universal  $\mathcal{U}$  fijo (por ejemplo, como ya lo definimos,  $\mathbb{N}$ ).

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathcal{U}$  un conjunto cualquiera. El **complemento** de  $A$  (relativo a  $\mathcal{U}$ ) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

# Leyes

Consideraremos un conjunto universal  $\mathcal{U}$  fijo (por ejemplo, como ya lo definimos,  $\mathbb{N}$ ).

## Definición

Sea  $A \subseteq \mathcal{U}$  un conjunto cualquiera. El **complemento** de  $A$  (relativo a  $\mathcal{U}$ ) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

## Teorema

Si  $A, B$  y  $C$  son conjuntos cualquiera (subconjuntos de  $\mathcal{U}$ ), entonces se cumplen las leyes siguientes:

# Leyes

## Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

## Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

## Idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$



# Leyes

## Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

## Elemento neutro

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

## Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

# Leyes

## Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

## Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

## Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

# Operaciones generalizadas

Sea  $\mathcal{S}$  un conjunto de conjuntos.

Definición

**Unión generalizada:**  $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}.$

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de  $\mathcal{S}$ ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de  $\mathcal{S}$ .

# Operaciones generalizadas

Sea  $\mathcal{S}$  un conjunto de conjuntos.

Definición

**Intersección generalizada:**  $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}.$

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de  $\mathcal{S}$ ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de  $\mathcal{S}$ .

# Operaciones generalizadas

Sea  $\mathcal{S}$  un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

# Operaciones generalizadas

Si  $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$  (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

# Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.

Si  $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n, \dots\}$ :

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

# Outline

Introducción

Conjuntos y axiomas

Operaciones

**Epílogo**



# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos