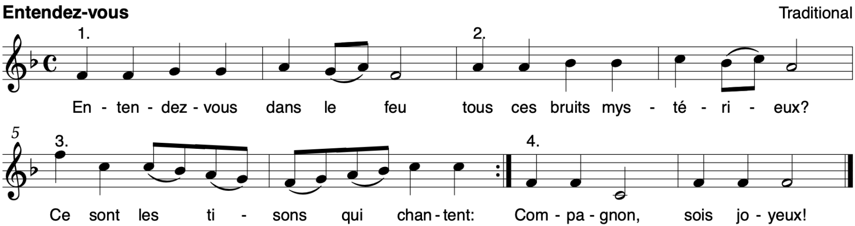
Conjunto cuociente y relaciones de orden

Clase 15

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline



Entendez-vous dans le feu
tous ces bruits mystérieux?

Ce sont les tisons qui chantent:
Compagnon, sois joyeux!

Segundo Acto: Relaciones

Conjuntos, relaciones y funciones

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

La equivalencia lógica y $\equiv_n$ son relaciones de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A.

1. $\forall x \in A$, $x \in [x]$.
2. $x \sim y$ si y sólo si $[x] = [y]$.
3. Si $[x] \neq [y]$ entonces $[x] \cap [y] = \varnothing$.

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente
- Comprender concepto de partición
- Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia
- Comprender concepto de orden parcial y total

Outline

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El **conjunto cuociente** de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim \; = \{[x] \mid x \in A\}$$

Ejemplo

Determinemos $\mathbb{N}/\equiv_4$. Las clases de equivalencia son

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k = b\} &&= \{0, 4, 8, 12, \ldots, \text{-}4, \text{-}8, \text{-}12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 1 = b\} &&= \{1, 5, 9, 13, \ldots, \text{-}3, \text{-}7, \text{-}11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 2 = b\} &&= \{2, 6, 10, 14, \ldots, \text{-}2, \text{-}6, \text{-}10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 3 = b\} &&= \{3, 7, 11, 15, \ldots, \text{-}1, \text{-}5, \text{-}9, \ldots\}
\end{aligned}$$

Relaciones de equivalencia

Ejemplo

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\!\equiv_4$ de la siguiente forma

$$\mathbb{N}/\!\equiv_4 \; = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

Relaciones de equivalencia

Definición

El **índice** de una relación de equivalencia es la cantidad de clases de equivalencia que induce. Es decir, la cantidad de elementos de su conjunto cuociente.

Ejemplo

¿Cuál es el índice de $\equiv_4$?

Como $\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}$, el índice de $\equiv_4$ es 4.

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto cualquiera, y $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de A ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$). Diremos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si cumple que:

1. $\forall X \in \mathcal{S}, X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$.

Ejercicio

Dé ejemplos de particiones de $\mathbb{N}$.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración: Debemos demostrar que $A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición de A. Para esto demostraremos las tres propiedades que debe cumplir según la definición de partición:

1. $\forall X \in A/\sim,\ X \neq \varnothing$: por teorema anterior, sabemos que $\forall x \in A,\ x \in [x]$. Como todos los elementos de $A/\sim$ son clases de equivalencia, es claro que todos son no vacíos.

Relaciones de equivalencia

Teorema

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.

2. $\bigcup A/\sim = A$: demostramos subconjunto hacia ambos lados.
   - $\bigcup A/\sim \subseteq A$: dado un elemento $x \in \bigcup A/\sim$, por definición de unión generalizada y de conjunto cuociente, tenemos que $x \in [y]$ para algún $y \in A$. Las clases de equivalencia de una relación sólo tienen elementos del conjunto donde están definidas, por lo que $x \in A$.
   - $A \subseteq \bigcup A/\sim$: dado un elemento $x \in A$, por teorema anterior sabemos que $x \in [x]$. Dado que $[x]$ es una clase de equivalencia, tenemos que $[x] \in A/\sim$, y por lo tanto $x \in \bigcup A/\sim$.
3. $\forall X, Y \in A/\sim$, si $X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$: Todos los conjuntos en $A/\sim$ son clases de equivalencia, y por lo tanto por teorema anterior esta propiedad se cumple.

Relaciones de equivalencia

Algo muy interesante es que lo inverso también se cumple:

Teorema

Si $\mathcal{S}$ es una partición cualquiera de un conjunto A, entonces la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{S} \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X$$

es una relación de equivalencia sobre A.

Un elemento x estará relacionado con y
si ambos pertenecen al mismo conjunto de la partición.

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Relaciones de equivalencia

Reflexividad: Dado $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para algún $X \in \mathcal{S}$, pues $\mathcal{S}$ es una partición de A. Luego, $\{x\} \subseteq X$, y por axioma de extensión $\{x, x\} \subseteq X$. Aplicando la definición de la relación $\sim$, concluimos que $x \sim x$ y por lo tanto la relación es refleja.

Simetría: Dados $x, y \in A$ tales que $x \sim y$, por definición de $\sim$ sabemos que existe $X \in \mathcal{S}$ tal que $\{x, y\} \subseteq X$. Por axioma de extensión, se cumple que $\{y, x\} \subseteq X$, y por definición de $\sim$ concluimos que $y \sim x$. Por lo tanto, la relación es simétrica.

Transitividad: Dados $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, por definición de $\sim$ sabemos que existen $X_1, X_2 \in \mathcal{S}$ tales que $\{x, y\} \subseteq X_1$ y $\{y, z\} \subseteq X_2$. Notemos que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, y por lo tanto como $\mathcal{S}$ es una partición de A, necesariamente $X_1 = X_2$. Luego, se cumple que $\{x, y\} \subseteq X_2$, y entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$. Finalmente, aplicando la definición de $\sim$, tenemos que $x \sim z$, con lo que concluimos que la relación es transitiva.

Outline

Construcción de conjuntos

Una de las aplicaciones más importantes de las relaciones de equivalencia es la definición de nuevos conjuntos. Lo que haremos será:

- Tomar un conjunto ya conocido (¿por ejemplo?).
- Calcular su conjunto cuociente respecto a alguna relación de equivalencia.
- Nombrar al conjunto y sus elementos.
- Definir operaciones sobre el nuevo conjunto, basándonos en los operadores del conjunto original.

Construcción de conjuntos

Definición

El conjunto de los **números naturales módulo 4** será el conjunto cuociente de $\mathbb{N}$ respecto a $\equiv_4$:

$$\mathbb{N}_4 = \mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0],[1],[2],[3]\}.$$

¿Cómo definimos las operaciones en este nuevo "*mundo*"?

Definimos la suma módulo 4 según

$$[i] +_4 [j] = [i+j]$$

Ejemplos

$$[3] +_4 [2] = [3+2] = [5] = [1] \qquad [1] +_4 [3] = [1+3] = [4] = [0]$$

Construcción de conjuntos

Análogamente, definimos la multiplicación módulo 4 según

$$[i] \cdot_4 [j] = [i \cdot j]$$

Ejemplo

$$[2] \cdot_4 [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$$

Ahora simplificaremos notación renombrando elementos de $\mathbb{N}_4$

Construcción de conjuntos

Podríamos renombrar los elementos de $\mathbb{N}_4$:

$$[0] \leftrightarrow 0 \quad [1] \leftrightarrow 1 \quad [2] \leftrightarrow 2 \quad [3] \leftrightarrow 3$$

Y ocupar simplemente + y $\cdot$, obteniendo un nuevo conjunto con operadores bien definidos:

$$\mathbb{N}_4 = \{0, 1, 2, 3\} \text{ con operadores } + \text{ y } \cdot$$

tal que, por ejemplo, $1 + 1 = 2$, $3 + 3 = 2$, $3 \cdot 3 = 1$, etc.

Del contexto se entiende que estamos sumando/multiplicando elementos de $\mathbb{N}_4$

Una relación de equivalencia fundamental

Veamos una relación de equivalencia más interesante.

Definición

La relación $\downarrow$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como

$$\begin{aligned} (m, n) \downarrow (r, s) \quad &\Leftrightarrow \quad m + s = n + r \\ (&\Leftrightarrow \quad m - n = r - s) \end{aligned}$$

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

<u>Reflexividad:</u> Dado un par (m, n), es claro que $m + n = m + n$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(m, n) \downarrow (m, n)$.

<u>Simetría:</u> Dados dos pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$, por definición de $\downarrow$ se tiene que $m + s = n + r$. Es claro que $r + n = s + m$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(r, s) \downarrow (m, n)$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

<u>Transitividad:</u> Dados tres pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$ y $(r, s) \downarrow (t, u)$, debemos demostrar que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por definición de $\downarrow$, tenemos que $m + s = n + r$ (1) y $r + u = s + t$ (2). Despejando r en (2), obtenemos que $r = s + t - u$, y reemplazando esto último en (1), se tiene que $m + s = n + s + t - u$. Reordenando, obtenemos que $m + u = n + t$, y por definición de $\downarrow$, concluimos que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.

Una relación de equivalencia fundamental

¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por $\downarrow$?

$$
\begin{aligned}
\big[(0,0)\big] &= \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}\\
\big[(0,1)\big] &= \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}\\
\big[(1,0)\big] &= \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\}\\
\big[(0,2)\big] &= \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}\\
\big[(2,0)\big] &= \{(2,0),(3,1),(4,2),\ldots\}\\
&\vdots\\
\big[(0,n)\big] &= \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),\ldots\}\\
\big[(n,0)\big] &= \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),\ldots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$$
\begin{array}{cccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \boxed{(4,4)} & \cdots \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & \boxed{(3,3)} & (4,3) & \cdots \\
(0,2) & (1,2) & \boxed{(2,2)} & (3,2) & (4,2) & \cdots \\
(0,1) & \boxed{(1,1)} & (2,1) & (3,1) & (4,1) & \cdots \\
\boxed{(0,0)} & (1,0) & (2,0) & (3,0) & (4,0) & \cdots
\end{array}
$$

¿Qué tienen en común las diagonales?
¿Qué podrían representar los elementos de $\mathbb{N}^2/\!\downarrow$?

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

El conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cuociente de $\mathbb{N}^2$ respecto a $\downarrow$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\!\downarrow\, = \{[(0,0)], [(0,1)], [(1,0)], [(0,2)], [(2,0)], \ldots\}.$$

¿Qué representan las clases de equivalencia?

- $[(0,0)]$ será el entero 0.
- $[(0,i)]$ será el entero i.
- $[(i,0)]$ será el entero $-i$.

Una relación de equivalencia fundamental

Renombramos los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{gathered}
[(0,0)] \leftrightarrow 0 \\
[(0,1)] \leftrightarrow 1 \\
[(1,0)] \leftrightarrow -1 \\
[(0,2)] \leftrightarrow 2 \\
[(2,0)] \leftrightarrow -2 \\
\vdots \\
[(0,i)] \leftrightarrow i \\
[(i,0)] \leftrightarrow -i \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

Y obtenemos entonces el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Importante: "-1" es sólo un **nombre** para la clase de equivalencia $[(1, 0)]$. El símbolo "$-$" no significa nada por sí solo para nosotros.

Intentemos definir los operadores $+_{\downarrow}$ y $\cdot_{\downarrow}$, teniendo en cuenta que deben "*captar la estructura*" de los números enteros.

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

$[(m,n)] +_{\downarrow} [(r,s)] = [(m+r, n+s)]$

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

Definición

$[(m,n)] \cdot_{\downarrow} [(r,s)] = [(m \cdot s + n \cdot r, m \cdot r + n \cdot s)]$

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $7 +_\downarrow -5$, $-18 +_\downarrow 4$ y $-3 +_\downarrow -6$.

$$7 +_\downarrow -5 = [(0,7)] +_\downarrow [(5,0)] = [(0+5, 7+0)] = [(5,7)] = [(0,2)] = 2$$

$$-18 +_\downarrow 4 = [(18,0)] +_\downarrow [(0,4)] = [(18+0, 0+4)] = [(18,4)] = [(14,0)]$$
$$= -14$$

$$-3 +_\downarrow -6 = [(3,0)] +_\downarrow [(6,0)] = [(3+6, 0+0)] = [(9,0)] = -9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

$$-3 \cdot_{\downarrow} -4 = \big[(3,0)\big] \cdot_{\downarrow} \big[(4,0)\big] = \big[(3 \cdot 0 + 0 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0)\big] = \big[(0,12)\big] = 12$$

$$3 \cdot_{\downarrow} 3 = \big[(0,3)\big] \cdot_{\downarrow} \big[(0,3)\big] = \big[(0 \cdot 3 + 3 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3)\big] = \big[(0,9)\big] = 9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Finalmente, podemos renombrar las operaciones anteriores, y obtenemos el conjunto de los números enteros con sus dos operaciones habituales:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\} \text{ con las operaciones } + \text{ y } \cdot.$$

Outline

Relaciones de orden

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de orden parcial** si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Generalmente denotaremos una relación de orden parcial con el símbolo $\preceq$.

- $(x, y) \in \preceq \quad x \preceq y$.
- x es menor (o menor-igual) que y.

Si $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre A, diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Esto último enfatiza que el orden requiere especificar un dominio...
Quizás en otro dominio no es orden parcial

Relaciones de orden

Ejemplos

1. Los pares $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son órdenes parciales.
2. El par $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ es un orden parcial.
3. Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre los ejemplos anteriores.

Ejercicio

Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Demostración: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$.

Reflexividad: Por definición de subconjunto, para todo conjunto X se cumple que $X \subseteq X$, por lo que la relación es refleja.

Antisimetría: Por definición de igualdad de conjuntos, si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, se cumple que $X = Y$, y entonces la relación es antisimétrica.

Transitividad: Por definición de subconjunto:

- Si $X \subseteq Y$, entonces $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Y$.
- Si $Y \subseteq Z$, entonces $\forall y \in Y$ se tiene que $y \in Z$.

Combinando las dos aseveraciones, obtenemos que $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Z$, y por lo tanto $X \subseteq Z$. Concluimos que la relación es transitiva.

Relaciones de orden

¿Por qué orden *parcial*?

Definición

Una relación $\preceq$ sobre A es una **relación de orden total** (o lineal) si es una relación de orden parcial y además es conexa.

¿Qué quiere decir esto?

$$\text{Para todo par } x, y \in A, \text{ se tiene que } x \preceq y \text{ o } y \preceq x$$

Similarmente al caso anterior, diremos que un par $(A, \preceq)$ es un orden total.

Definición

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Relaciones de orden

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ y
$S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

Relaciones de orden

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

- 1 es cota inferior, pues $1|2$, $1|3$, etc.
- 2 no es cota inferior, pues $2 \not| \ 3$.
- 60 es cota superior, pues $2|60$, $3|60$, ..., $20|60$.
  Nótese que 60 es el mínimo común múltiplo de S.
- También cualquier múltiplo de 60 es cota superior, por ejemplo 120.
- Elementos minimales: $2, 3, 5$, pues ningún elemento en S además de ellos mismos los divide.
- Elementos maximales: $15, 20$, pues no dividen a ningún elemento en S además de ellos mismos.
- No tiene mínimos ni máximos, pues ninguna cota inferior o superior pertenece a S.

Relaciones de orden

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \subseteq)$ y
$S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

- $\{1\}$ es cota inferior, elemento minimal y mínimo.
- $\{1,2,3,4\}$ es cota superior, elemento maximal y máximo.
- $\emptyset$ también es cota inferior.
- No hay más cotas superiores, pues el orden está definido sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

Relaciones de orden

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

- En el orden $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ podemos tomar $S = \{2, 3, 5\}$. Como no se dividen entre sí, son todos minimales y maximales.
- En el orden $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ podemos tomar $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Como ninguno de los conjuntos en S es subconjunto de ninguno de los demás, son todos minimales y maximales.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

Demuestre el resultado análogo para el máximo.

Esto nos permite hablar de **el** mínimo o **el** máximo, que denotaremos por $min(S)$ y $max(S)$ respectivamente.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

Demostración: Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x, y \in S(x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

Por demostración directa, supongamos que S tiene dos mínimos s_1, s_2. Como son mínimos, $s_1, s_2 \in S$, y también $s_1 \preceq s_2$ y $s_2 \preceq s_1$. Como $\preceq$ es una relación de orden, es antisimétrica, y luego $s_1 = s_2$,. Por lo tanto, si hay un mínimo, este es único.

La demostración de unicidad del máximo es completamente análoga.

Outline

Objetivos de la clase

- □ Comprender concepto de clase de equivalencia y conjunto cuociente
- □ Comprender concepto de partición
- □ Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia
- □ Comprender concepto de orden parcial y total