

# Camino en grafos

Clase 24

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

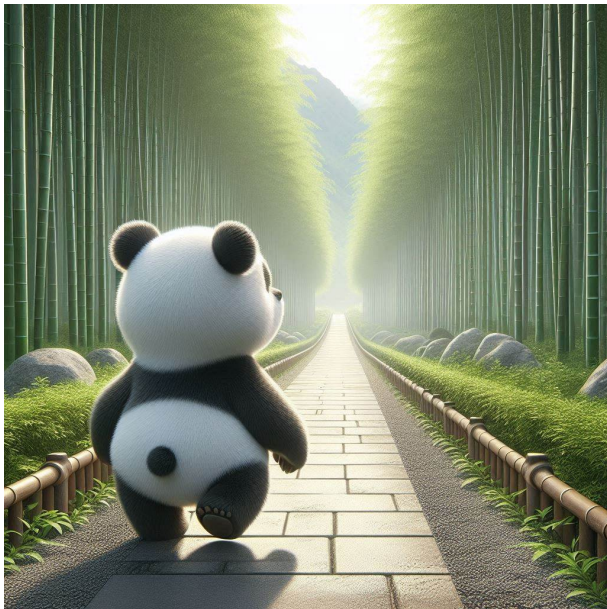
# Outline

**Definiciones**

Representación de grafos

Caminos y conectividad

Epílogo



# Más definiciones

Dado un grafo  $G = (V_G, E_G)$ :

## Definición

Un **clique** en  $G$  es un conjunto de vértices  $K \subseteq V_G$  tal que  
 $\forall v_1, v_2 \in K, (v_1, v_2) \in E_G$ .

## Definición

Un **conjunto independiente** en  $G$  es un conjunto de vértices  $K \subseteq V_G$  tal que  $\forall u, v \in K, (u, v) \notin E_G$ .

# Más definiciones

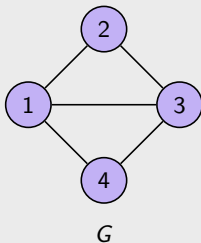
## Definición

El **complemento** de  $G$  es el grafo  $\overline{G} = (V_G, \overline{E}_G)$ , donde  $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (u, v) \notin \overline{E}_G$ .

## Definición

Un grafo  $G$  se dice **autocomplementario** si  $G \cong \overline{G}$ .

## Ejemplo



$K = \{1, 2, 3\}$  es **clique** en  $G$

$K' = \{2, 4\}$  es un **conj. indep.** en  $G$

# Más definiciones

## Teorema

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un conjunto  $V' \subseteq V$  es un clique en  $G$  si y sólo si es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

# Más definiciones

## Teorema

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un conjunto  $V' \subseteq V$  es un clique en  $G$  si y sólo si es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .

### Demostración:

- $(\Rightarrow)$  Sea  $V' \subseteq V$  un clique en  $G$ . Por definición sabemos que para todo par de vértices  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \in E$ . Por otro lado, por definición de  $\overline{G}$  sabemos que para todo  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \notin \overline{E}$ , y por lo tanto  $V'$  es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .
- $(\Leftarrow)$  Sea  $V' \subseteq V$  un conjunto independiente en  $\overline{G}$ . Por definición sabemos que para todo par de vértices  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \notin \overline{E}$ . Por otro lado, por definición de  $\overline{G}$  sabemos que para todo  $u, v \notin V'$  ocurre que  $(u, v) \in E$ , y por lo tanto  $V'$  es un clique en  $G$ .



# Más definiciones

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

### Demostración:

Sea  $G(V, E)$  con  $|V| = 6$ , buscamos demostrar que  $G$  tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema anterior, esto es equivalente a mostrar que  $G$  tiene un clique o que  $\overline{G}$  lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni  $G$  ni  $\overline{G}$  tiene el clique. Sea  $v \in V$  tenemos 2 casos:

- **$v$  tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean  $x, y, z \in V$  los vecinos de  $v$  tales que  $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$ . Una observación importante es que no pueden existir aristas entre  $x, y, z$  dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego,  $x, y, z$  forman un conjunto independiente en  $G$  y por el teorema anterior estos vértices mismos forman un clique en  $\overline{G}$ .

# Más definiciones

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

- **$v$  tiene menos de 3 vecinos:** En este caso  $v$  no es adyacente con por lo menos 3 vertices de  $G$ . Sean  $x, y, z$  estos vértices tales que  $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$ . Luego,  $x, y, z$  son vecinos de  $v$  en  $\overline{G}$  y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que  $x, y, z$  forman un clique de tamaño 3 en  $G$ .

Como en ambos casos llegamos a que  $G$  o  $\overline{G}$  cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende  $G$  debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

# Objetivos de la clase

- Conocer formas de representación de grafos
- Comprender el concepto de grado
- Comprender concepto de camino y componente
- Demostrar resultados de conectividad

# Outline

Definiciones

**Representación de grafos**

Camino y conectividad

Epílogo

# Representación matricial

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , como  $E$  es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ .

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a  $M_G$  la **matriz de adyacencia** de  $G$ .

# Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces  $M_G = M_G^T$ .
- ¿Cómo puedo obtener  $M_{\overline{G}}$ ?

Estas construcciones solo necesitan operar con los **bits** en la matriz

# Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia**  $A_G$ .

- Etiquetamos las aristas de  $G$ .
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ .

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Grado de un vértice

Dado un grafo  $G$  y un vértice  $v$  de él:

Definición

El **grado** de  $v$  (denotado como  $\delta_G(v)$ ) es la cantidad de aristas que inciden en  $v$ .

Definición

La **vecindad** de  $v$  es el conjunto de vecinos de  $v$ :

$$N_G(v) = \{u \mid (v, u) \in E\}.$$

En un grafo simple,  $\delta_G(v) = |N_G(v)|$ .



# Propiedades

Un teorema muy importante:

Teorema (Handshaking lemma)

Si  $G = (V, E)$  es un grafo sin rulos, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Es decir, la suma de los grados de los vértices es dos veces la cantidad de aristas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Propiedades

## Teorema (Handshaking lemma)

Si  $G = (V, E)$  es un grafo sin rulos, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

### Demostración:

Sea  $G = (V, E)$  un grafo simple. Supongamos  $|V| = n$  y  $|E| = m$ . Sea  $M$  la matriz de incidencia de este grafo. Una representación general de esta matriz sería de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_j & \dots & e_m \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{matrix}$$

Con  $v_i$  representando los nodos y  $e_j$  representando las aristas entre nodos.

# Propiedades

A partir de la representación es posible notar que la suma de los valores en una fila cualquiera  $i$ , equivale al grado del vértice  $v_i$ . En otras palabras:

$$\delta(v_1) = \sum_{j=1}^m M_{1j}$$

$$\delta(v_2) = \sum_{j=1}^m M_{2j}$$

$$\vdots$$

$$\delta(v_i) = \sum_{j=1}^m M_{ij}$$

# Propiedades

Luego la suma de todos los grados del grafo está dada por:

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}$$

Por otra, parte, si sumamos los valores de columna cualquiera  $j$ , obtendremos la cantidad de vértices en los que incide la arista  $e_j$ , o bien dicho: 2. En otras palabras:

$$\sum_{i=1}^n M_{ij} = 2$$

# Propiedades

Ahora, si agregamos esta sumatoria por sobre todas las columnas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} &= \sum_{j=1}^m 2 \\ &= 2m \\ &= 2|E|\end{aligned}$$

Dado que la suma es conmutativa, cambiar el orden de las sumatorias no altera el resultado. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} \delta_G(v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} \\ &= 2|E|\end{aligned}$$

# Propiedades

## Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

## Ejercicio

Demuestre el corolario.

## Ejercicio

En el departamento de informática de una empresa trabajan 15 empleados. Uno de ellos es la secretaria del departamento y otro es el jefe del departamento. Ambos se saludan todos los días y saludan a todos los demás empleados. Cada uno de los restantes empleados del departamento asegura que diariamente se saluda con exactamente 3 de sus compañeros (sin contar a la secretaria y el jefe). ¿Es esto posible?

# Propiedades

## Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

### Demostración:

Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin rulos. Separemos  $V$  en dos conjuntos  $V_I$  y  $V_P$ , tales que

$$V_I = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es impar}\}$$

$$V_P = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es par}\}$$

Es simple observar que  $V = V_I \cup V_P$  y a su vez  $V_I \cap V_P = \emptyset$ . Utilizando esto, y el resultado del *Handshaking lemma*, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = \sum_{v \in V_I} \delta_G(v) + \sum_{v \in V_P} \delta_G(v) = 2|E| \quad (1)$$

# Propiedades

Notemos que la segunda sumatoria actúa sólo sobre números pares, en consecuencia, debe ser par. En otras palabras, existe un entero no negativo  $k$  tal que:

$$\sum_{v \in V_P} \delta_G(v) = 2k \quad (2)$$

Usando (2) en (1) y despejando:

$$\sum_{v \in V_I} \delta_G(v) = 2 \cdot (|E| - k)$$

Donde  $|E| - k$  es un entero no negativo. En consecuencia, el valor de esta sumatoria debe ser un número par. Por las definición de  $V_I$ , sabemos que esta sumatoria actúa solo sobre números impares, luego, debe ser cierto que existe una cantidad par de estas sumas. En consecuencia  $|V_I| = 2i$  para algún entero no negativo  $i$ , o en otras palabras, existe una cantidad par de vértices con grado impar.



# Outline

Definiciones

Representación de grafos

**Camino y conectividad**

Epílogo

# Caminos y Ciclos

## Definición

Una **caminata** en un grafo  $G = (V, E)$  es una secuencia de vértices  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ , con  $v_0, \dots, v_k \in V$ , tal que  $(v_{i-1}, v_i) \in E$ , con  $i$  entre 1 y  $k$ .

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice:  $v_0 = v_k$ .

# Caminos y Ciclos

## Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

## Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

# Conectividad

## Definición

Dos vértices  $x$  e  $y$  en un grafo  $G$  están **conectados** si existe un camino en  $G$  que empieza en  $x$  y termina en  $y$ .

## Ejercicio

Muestre que “estar conectados” es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

# Conectividad

## Ejercicio

Muestre que “estar conectados” es una relación de equivalencia.

Demostración:

Sea  $G(V, E)$  y  $\sim$  la relación “estar conectados”.

- **Refleja:** Sea  $v \in V$  cualquiera, podemos tomar el camino  $(v)$  que une  $v$  consigo mismo. Concluimos que  $v \sim v$ .
- **Simétrica:** Suponemos  $v_1, v_2 \in V$  tales que  $v_1 \sim v_2$ . Luego, existe un camino  $(v_1, u_1, \dots, u_n, v_2)$  que conecta  $v_1$  y  $v_2$ . Como  $E$  es simétrica, debe existir también el camino  $(v_2, u_n, \dots, u_1, v_1)$  y por lo tanto  $v_2 \sim v_1$ .
- **Transitiva:** Suponemos  $v_1, v_2, v_3 \in V$  tales que  $v_1 \sim v_2$  y  $v_2 \sim v_3$ . Luego, existen caminos  $p = (v_1, u_1, \dots, u_n, v_2)$  y  $q = (v_2, w_1, \dots, w_m, v_3)$ . Por lo tanto, debe existir el camino  $((v_1, u_1, \dots, u^*, \dots, w_m, v_3))$  donde  $u^*$  es el último vértice del camino  $q$  que comparte con el camino  $p$ . Si no tienen vértices en común basta con unir los caminos  $p$  y  $q$ . Concluimos que  $v_1 \sim v_3$ .

# Conectividad

## Definición

Dado un vértice  $v$  de un grafo  $G$ , su clase de equivalencia bajo la relación “estar conectados” es una **componente conexa** de  $G$ .

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

## Definición

Un grafo  $G$  se dice **conexo** si todo par de vértices  $x, y \in V$  está conectado. En otro caso,  $G$  es **disconexo**.

Un grafo conexo tiene una única componente conexa

# Conectividad

## Teorema

Un grafo  $G$  con  $n$  vértices y  $k$  aristas tiene al menos  $n - k$  componentes conexas.

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Corolario

Si un grafo  $G$  con  $n$  vértices es conexo, tiene al menos  $n - 1$  aristas.

# Conectividad

## Teorema

Un grafo  $G$  con  $n$  vértices y  $k$  aristas tiene al menos  $n - k$  componentes conexas.

### Demostración:

Un grafo  $G$  con  $n$  vértices puede tener como máximo  $n$  componentes conexas, cuando no tiene ninguna arista, cada nueva arista que se le agregue puede reducir la cantidad de componentes a lo más en 1, por lo que luego de agregar  $k$  aristas la cantidad de componentes se ha reducido como mínimo a  $n - k$ , por lo que la cantidad de componentes siempre se mantiene mayor o igual a  $n - k$ .



# Conectividad

## Definición

Una **arista de corte** en un grafo  $G$  es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de  $G$ .

## Definición

Un **vértice de corte** en un grafo  $G$  es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de  $G$ .

# Conectividad

## Teorema

Una arista en un grafo  $G$  es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en  $G$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Conectividad

## Teorema

Una arista en un grafo  $G$  es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en  $G$ .

### Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $G$  es conexo.

( $\Rightarrow$ ) Por contrapositivo, mostraremos que al eliminar una arista  $(u, v)$  perteneciente a un ciclo  $C$  del grafo, este se mantiene conexo. En  $G - uv$ , los únicos caminos que podrían verse afectados son los que pasan por  $(u, v)$ . Sea  $x, y \in V$  vértices conectados por un camino que contiene a la arista  $(u, v)$ . Esto quiere decir que  $x$  está conectado con  $u$  (1) y  $v$  está conectado con  $y$  (2). Ahora, como  $(u, v)$  está en  $C$ , si sacamos  $(u, v)$  se sigue cumpliendo que  $u$  está conectado con  $v$  (3), a través del camino que forma la porción restante de  $C$ . De (1) y (3) por transitividad tenemos que  $x$  está conectado con  $v$  (4), y de (4) y (2) por transitividad tenemos que  $x$  está conectado con  $y$ . Por lo tanto,  $(u, v)$  no puede ser de corte.

# Conectividad

- ( $\Leftarrow$ ) Por contrapositivo, supongamos ahora que  $e = (u, v)$  no es una arista de corte, o sea que al sacarla  $G$  sigue siendo conexo. Esto quiere decir que existe un camino, digamos  $P$ , entre  $u$  y  $v$  en  $G - e$ . Luego, el camino  $P$  junto con la arista  $(u, v)$  forman un ciclo en  $G$ .

# Grafos bipartitos

## Lema

En un grafo simple  $G$ , toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

## Ejercicio

Demuestre el lema.

### Demostración:

Por inducción en el largo de la caminata.

¡Ojo, las caminatas que nos interesan son las de largo impar!

# Grafos bipartitos

- **CB.** La caminata cerrada más pequeña de largo impar es un ciclo de tres vértices, esta caminata ya es un ciclo así que el caso base se cumple.
- **HI.** Supongamos que toda caminata cerrada de largo impar menor a  $\ell$  tiene un ciclo de largo impar.
- **TI.** Sea  $C$  una caminata cerrada de largo  $\ell$  impar.
  - Si  $C$  no repite vértices entonces  $C$  ya es un ciclo impar y comprobamos lo que queríamos.
  - Si por otro lado, en  $C$  se repite un vértice  $v$ , entonces podemos partir  $C$  en dos caminatas distintas que comienzan en  $v$ ,  $C'$  y  $C''$ . No puede ocurrir que  $C'$  y  $C''$  tengan largo par ya que entonces  $C$  no podría tener largo impar, por lo que al menos una de ellas es una caminata cerrada de largo impar estrictamente menor a  $\ell$  y por HI contiene un ciclo de largo impar, que también sería un ciclo de largo impar en  $C$  comprobando lo que queríamos.



# Outline

Definiciones

Representación de grafos

Caminos y conectividad

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Conocer formas de representación de grafos
- Comprender el concepto de grado
- Comprender concepto de camino y componente
- Demostrar resultados de conectividad