Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 8 - Funciones y Cardinalidad

26 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

Función

Sea $f \subseteq A \times B$ diremos que f es una función de A en B si dado cualquier elemento $\forall a \in A \exists b \in B$ tal que:

$$afb \wedge afc \Longrightarrow b = c$$

Sea $f : A \to B$. Diremos que f es

- **Inyectiva** si la función es uno a uno, esto es $\forall x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
- **Sobreyectiva** si $\forall b \in B. \exists a \in A$ tal que $b = f(a)$
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Función invertible Dada una función f de A en B, diremos que f es invertible si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A.

Composición de funciones Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la composición de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m¿n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

Video: Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad AQUI :)

1. Funciones

Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \to B$ es *creciente* si dados $x, y \in A$ tales que $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

1. Demuestre que si f es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contarejemplo.

Solución

a) Demostraremos que si f es creciente, entonces es inyectiva. Sea f una función creciente y supongamos por contradicción que no es inyectiva; vale decir, que existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 < x_2$. Luego, como f es creciente, se cumple que

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Esto claramente es una contradicción. Concluímos que f es inyectiva.

b) Demostraremos que esta afirmación es verdadera. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones crecientes, y $x_1, X_2 \in A$ tales que $x_1 < x_2$. Como f es creciente, entonces

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Además, como $f(x_1), f(x_2) \in B$ y g es creciente, tenemos que

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) &< g(f(x_2)) \\ \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) &< (g \circ f)(x_2) \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que $g \circ f$ es creciente. Por el inciso anterior podemos concluir que $g \circ f$ es inyectiva.

2. Numerabilidad

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

3. Numerabilidad (hardcore)

Sea $\mathbb{Z}^\omega$ el conjunto de todas las secuencias infinitas de números en $\mathbb{Z}$ de la forma $a_0a_1a_2\ldots$

1. Considere el siguiente conjunto:

$$S_1 = \{a_0a_1a_2\ldots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}.\forall i \geq 0.a_{i+1} - a_i = c\}$$

   Por ejemplo, la secuencia $7, 10, 13, 16, 19, \ldots \in S_1$ ya que $(a_{i+1} - a_i) = 3$.
   ¿Es S_1 un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.

2. Considere el siguiente conjunto:

$$S_2 = \{a_0a_1a_2\ldots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}.\forall i \geq 0.|a_{i+1} - a_i| = c\}$$

   Por ejemplo, la secuencia $7, 10, 7, 4, 1, -2, 1, \ldots \in S_2$ ya que $|a_{i+1} - a_i| = 3$.
   ¿Es S_2 un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.

Solución
1. El conjunto si es numerable.

Consideremos la función $f : S_1 \to \mathbb{Z}^2$ tal que

$$f(a_0a_1\ldots) = (a_0, a_1 - a_0)$$

Es claro que con $s \in S_1, f(s) \in \mathbb{Z}^2$ siempre. Demostraremos que f es inyectiva.
Supongamos que $f(a_0a_1\ldots) = f(b_0b_1\ldots)$, con $a_0a_1\ldots$ y $b_0b_1\ldots \in S_1$. Esto quiere decir que $(a_0, a_1-a_0) = (b_0, b_1-b_0)$. Por definición de igualdad de tuplas, $a_0 = b_0 \wedge a_1-a_0 = b_1-b_0$. Con ello, los primeros elementos de las secuencias son iguales, y también lo es la diferencia entre cada par de elementos, que es constante. Esto necesariamente hace que todos los términos de una secuencia sean iguales a los de la otra, es decir, que $a_0a_1\ldots = b_0b_1\ldots$, por lo que concluímos que f es inyectiva.

Consideremos la función $g : \mathbb{Z}^2 \to S_1$ tal que

$$g((a, b)) = a, b, (b + (b - a)), (b + 2(b - a))\ldots$$

Es decir, $g((a, b))$ es una secuencia cuyo primer elemento es a, segundo elemento b, y el resto de la secuencia está definida por la diferencia entre a y b, con lo que para todo par $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ se tiene que la diferencia entre el $(i+1)$-ésimo y el i-ésimo término de la secuencia es constante, y de valor $b-a$. Luego, $g((a, b)) \in S_1$ siempre. Demostraremos que g es inyectiva.

Supongamos que $g((a, b)) = g((c, d))$. Los primeros dos elementos de la secuencia $g((a, b))$ son iguales a los primeros dos elementos de la secuencia $g((c, d))$, y consecuentemente también lo es la diferencia entre ellos. Como todo el resto de los elementos de cada secuencia son iguales al elemento anterior más esta diferencia, concluímos que las secuencias son iguales, y consecuentemente que g es inyectiva.

Existen funciones inyectivas $f : S_1 \to \mathbb{Z}^2$ y $g : \mathbb{Z}^2 \to S_1$, por lo que el Teorema de Schröder–Bernstein nos dice que existe una función biyectiva entre S_1 y $\mathbb{Z}^2$. Esto quiere decir que $S_1 \approx \mathbb{Z}^2$. Adicionalmente, como $\mathbb{Z}$ es numerable, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ también lo es, por lo que concluímos que S_1 es numerable.

2. El conjunto no es numerable. Se demostrará por diagonalización.

Notemos que dada una secuencia $s \in S_2$ con diferencia entre elementos $c \in \mathbb{Z}$, dado el i-ésimo término de s, el $(i+1)$-ésimo término puede ser $s_i + c$ o $s_i - c$, llámense a estos el c-sucesor y el c-predecesor de s_i respectivamente. Luego, para cada nuevo término de la secuencia, se puede tomar al c-sucesor o al c-predecesor del término anterior. Con esto en mente, comenzemos con la diagonalización.

Por contradicción, supongamos que S_2 es numerable. Esto quiere decir que podemos ordenar todas las secuencias $s \in S_2$ en una secuencia de secuencias $S = s_0, s_1, s_2, \ldots$:

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{S} \\ \hline s_0 & = s_{00}, s_{01}, s_{02}, \ldots \\ s_1 & = s_{10}, s_{11}, s_{12}, \ldots \\ s_2 & = s_{20}, s_{21}, s_{22}, \ldots \\ s_3 & = s_{30}, s_{31}, s_{32}, \ldots \\ \vdots & \qquad \vdots \end{array}$$

Consideremos la siguiente secuencia s':

- $s'_0 = -2s_{00} + 1, s'_1 = -2s_{11} + 2$. Luego, $c = s'_1 - s'_0 = (-2s_{11} + 2) - (-2s_{00} + 1) = 2(s_{00} - s_{11}) + 1$. Notemos que c es el resultado de sumar 1 un número par, por lo que $c \neq 0$.
- Para $i \geq 2$:
  - Si en S se tiene que s_{ii} es el c-sucesor de $s_{i(i-1)}$, entonces s'_i será el c-predecesor de s'_{i-1}.
  - Si en S se tiene que s_{ii} es el c-predecesor de $s_{i(i-1)}$, entonces s'_i será el c-sucesor de s'_{i-1}.

Dada su construcción, es claro que $s' \in S_2$. Como $s'_0 = -2s_{00} + 1$, si s'_0 fuera igual a s_{00}, resolviendo la ecuación, se obtendría que $s_{00} = \frac{1}{3}$; sin embargo, $s_{00} \in \mathbb{Z}$, por lo que esto no es posible, de lo que deducimos que $s'_0 \neq s_0$. Análogamente, $s' \neq s_1$. Supongamos que para algún $i \geq 2$, se tiene que $\forall j, 0 \leq j \leq i-1 : s'_j = s_{ij}$, es decir, que existe un s_i que comparte los primeros i elementos con s'. Si s_{ii} es el c-sucesor de $s_{i(i-1)}$, tendremos que s'_i será el c-predecesor de $s'_{(i-1)}$. Como el c de s' es distinto de 0, el c-sucesor y el c-predecesor de un elemento cualquiera son necesariamente distintos. Luego, necesariamente $s'_i \neq s_{ii}$. Luego, se cumple que $(\forall i \geq 0)((\exists j < i : s'_j \neq s_{ij}) \vee (s'_i \neq s_{ii}))$. Concluímos entonces que s' difiere en por lo menos un término con cada secuencia presente en S, por lo que no puede estar en

S. Sin embargo, esto es una contradicción, pues habíamos dicho que S listaba a todas las secuencias de S_2. Con ello, queda demostrado que S_2 no es numerable.