Ciclos en grafos

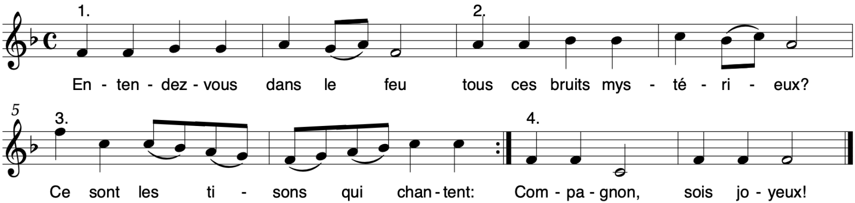
Clase 25

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Entendez-vous Traditional



Entendez-vous dans le feu
tous ces bruits mystérieux?

Ce sont les tisons qui chantent:
Compagnon, sois joyeux!

Tercer Acto: Aplicaciones

Algoritmos, grafos y números

Playlist Tercer Acto

DiscretiWawos #3

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Caminos y Ciclos

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Caminos y Ciclos

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Objetivos de la clase

- Demostrar propiedades basadas en ciclos
- Comprender el concepto de ciclos y caminos eulerianos
- Demostrar propiedades relacionadas con ciclos eulerianos

Outline

Caminos y Ciclos

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Caminos y Ciclos

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Conectividad

Definición

Dos vértices x e y en un grafo G están **conectados** si existe un camino en G que empieza en x y termina en y.

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

Conectividad

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

Demostración:

Sea $G(V, E)$ y $\sim$ la relación "estar conectados".

- **Refleja:** Sea $v \in V$ cualquiera, podemos tomar el camino (v) que une v consigo mismo. Concluímos que $v \sim v$.
- **Simétrica:** Suponemos $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$. Luego, existe un camino $(v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ que conecta v_1 y v_2. Como E es simétrica, debe existir también el camino $(v_2, u_n, \ldots, u_1, v_1)$ y por lo tanto $v_2 \sim v_1$.
- **Transitiva:** Suponemos $v_1, v_2, v_3 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Luego, existen caminos $p = (v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ y $q = (v_2, w_1, \ldots, w_m, v_3)$. Por lo tanto, debe existir el camino $((v_1, u_1, \ldots, u^*, \ldots, w_m, v_3))$ donde u^* es el último vértice del cámino q que comparte con el camino p. Si no tienen vértices en común basta con unir los caminos p y q. Concluímos que $v_1 \sim v_3$.

Conectividad

Definición

Dado un vértice v de un grafo G, su clase de equivalencia bajo la relación "estar conectados" es una **componente conexa** de G.

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

Definición

Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices $x, y \in V$ está conectado. En otro caso, G es **disconexo**.

Un grafo conexo tiene una única componente conexa

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si un grafo G con n vértices es conexo, tiene al menos $n - 1$ aristas.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

<u>Demostración:</u>

Un grafo G con n vértices puede tener como máximo n componentes conexas, cuando no tiene ninguna arista, cada nueva arista que se le agregue puede reducir la cantidad de componentes a lo más en 1, por lo que luego de agregar k aristas la cantidad de componentes se ha reducido como mínimo a $n - k$, por lo que la cantidad de componentes siempre se mantiene mayor o igual a $n - k$.

Conectividad

Definición

Una **arista de corte** en un grafo G es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Definición

Un **vértice de corte** en un grafo G es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

<u>Demostración:</u>

Sin pérdida de generalidad, supondremos que G es conexo.

($\Rightarrow$) Por contrapositivo, mostraremos que al eliminar una arista (u, v) perteneciente a un ciclo C del grafo, este se mantiene conexo. En $G - uv$, los únicos caminos que podrían verse afectados son los que pasan por (u, v). Sea $x, y \in V$ vértices conectados por un camino que contiene a la arista (u, v). Esto quiere decir que x está conectado con u (1) y v está conectado con y (2). Ahora, como (u, v) está en C, si sacamos (u, v) se sigue cumpliendo que u está conectado con v (3), a través del camino que forma la porción restante de C. De (1) y (3) por transitividad tenemos que x está conectado con v (4), y de (4) y (2) por transitividad tenemos que x está conectado con y. Por lo tanto, (u, v) no puede ser de corte.

$(\Leftarrow)$ Por contrapositivo, supongamos ahora que $e = (u, v)$ no es una arista de corte, o sea que al sacarla G sigue siendo conexo. Esto quiere decir que existe un camino, digamos P, entre u y v en $G - e$. Luego, el camino P junto con la arista (u, v) forman un ciclo en G.

Grafos bipartitos

Lema

En un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Demostración:

Por inducción en el largo de la caminata.

¡Ojo, las caminatas que nos interesan son las de largo impar!

Grafos bipartitos

- **CB.** La caminata cerrada más pequeña de largo impar es un ciclo de tres vértices, esta caminata ya es un ciclo así que el caso base se cumple.
- **HI.** Supongamos que toda caminata cerrada de largo impar menor a ℓ tiene un ciclo de largo impar.
- **TI.** Sea C una caminata cerrada de largo ℓ impar.
  - Si C no repite vértices entonces C ya es un ciclo impar y comprobamos lo que queríamos.
  - Si por otro lado, en C se repite un vértice v, entonces podemos partir C en dos caminatas distintas que comienzan en v, C' y C''. No puede ocurrir que C' y C'' tengan largo par ya que entonces C no podría tener largo impar, por lo que al menos una de ellas es una caminata cerrada de largo impar estrictamente menor a ℓ y por HI contiene un ciclo de largo impar, que también sería un ciclo de largo impar en C comprobando lo que queríamos.

$\square$

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo simple conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- Con esto caracterizamos a los grafos bipartitos.
- ¿Qué pasa si G no es conexo?
- ¿Cómo diseñamos un algoritmo que resuelva el problema de determinar si un grafo es o no bipartito, y dé una muestra de su decisión?

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo simple conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que G contiene un ciclo de largo impar, digamos $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1)$, con k un natural impar, demostraremos que G no puede ser bipartito. Supongamos que G es bipartito con particiones V_1 y V_2 y supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Dado que C es un ciclo, necesariamente $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i < k$ y $(v_k, v_1) \in E(G)$, por lo que debe ocurrir que $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$, etc. En general debe ocurrir que para los vértices del ciclo C, $v_i \in V_1$ si i es impar, y $v_i \in V_2$ si i es par, luego $v_k \in V_1$ lo que es una contradicción con el hecho de suponer que V_1 es una partición que contiene a v_1 ya que $(v_k, v_1) \in E(G)$.

Grafos bipartitos

($\Leftarrow$) Supongamos que G no contiene ningún ciclo de largo impar, demostraremos que es posible definir una partición de los vértices de G en dos conjuntos independientes. Sea v un vértice cualquiera de $V(G)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo impar de } v \text{ a } u\}$$
$$V_2 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo par de } v \text{ a } u\}$$

Si existiera una arista entre dos vértices de V_1 digamos u_1 y u_2, entonces, dado que existen caminos $v - u_1$ y $v - u_2$ ambos de largo impar, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista (v_1, v_2) y por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.

Grafos bipartitos

$(\Leftarrow)$ Si existiera una arista entre dos vértices de V_2 digamos w_1 y w_2, entonces, dado que existen caminos $v - w_1$ y $v - w_2$ ambos de largo par, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista (w_1, w_2) y nuevamente por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.

Finalmente no existe arista entre vértices de V_1 y no existe aristas entre vértices de V_2 y como G es conexo se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ por lo que G es bipartito con particiones V_1 y V_2.

Outline

Multigrafos

Definición

Sea V es un conjunto de vértices, E es un conjunto de aristas y $S \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que

$$S = \{\{u, v\} \mid u \in V \wedge v \in V\}$$

Un **multigrafo** $G = (V, E, f)$ es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

Ejemplo

$G = (V, E, f)$, donde $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y
$f = \{(e_1, \{1, 2\}), (e_2, \{2, 3\}), (e_3, \{2, 3\})\}$

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **ciclo Euleriano** en un (multi)grafo G es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices de G.

- Es un ciclo, por lo tanto no puede repetir aristas.
- Pueden repetirse vértices.
- Diremos que G es un **grafo Euleriano** si contiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Rightarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos y Euleriano.
Por demostrar: G es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Como G es Euleriano, tiene un ciclo C que contiene a todas las aristas y vértices. Se deduce directamente que G es conexo, pues dentro de C se pueden encontrar caminos entre todos los pares de vértices de G.

Ciclos y caminos Eulerianos

Ahora, supongamos que C empieza y termina en un vértice particular v. C necesita una arista para "salir" inicialmente y otra para "llegar" finalmente a v, y cada vez que v aparezca nuevamente en C, necesita dos aristas distintas más para entrar y salir:

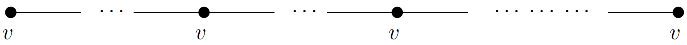


Figure: Un vértice v particular del ciclo Euleriano C y sus aristas incidentes. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Esto implica que $\delta(v)$ es necesariamente par, pues todas las aristas que lo inciden deben aparecer en C una vez cada una. El ciclo C se puede representar comenzando y terminando en cualquier vértice de G, y entonces por el mismo argumento, todos los vértices tienen grado par.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos conexo y tal que todos sus vértices tienen grado par. Por demostrar: G es tiene un ciclo Euleriano. Se hará por inducción en la cantidad de aristas de G.

BI: Queremos tomar el grafo con el menor número de aristas que sea conexo y cuyos vértices tengan todos grado par. Si nos fijamos en el número de vértices, tenemos que el único grafo con un vértice que cumple con todas las condiciones es un vértice solo, el cual tiene un ciclo Euleriano compuesto por él mismo. El grafo más pequeño con más de un vértice que cumple con las condiciones es un grafo con dos vértices y dos aristas, el cual claramente tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo sin rulos es Euleriano si y sólo si es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

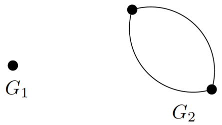


Figure: Los grafos más pequeños conexos tales que sus vértices tienen grado par. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

BI: Notemos además que cualquier grafo conexo con dos vértices de grado par tendrá un ciclo Euleriano.

HI: Supongamos que cualquier grafo conexo con vértices de grado par y que tiene menos de n aristas tiene un ciclo Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

TI: Sea G un (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen grado par y con exactamente n aristas.
Por demostrar: G tiene un ciclo Euleriano.

En la BI ya demostramos la propiedad para grafos con 1 o 2 vértices, por lo que podemos asumir que G tiene al menos 3 vértices. Como G es conexo y tiene al menos 3 vértices, debe existir un camino de largo 2 con aristas e_1, e_2 y que contiene 3 vértices v_1, v_2, v_3:

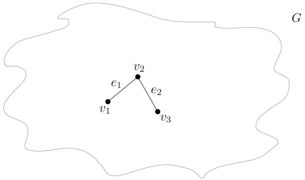


Figure: Camino de largo 2 en un grafo con al menos 3 vértices. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

TI: Creamos un nuevo grafo G' sacando e_1 y e_2 y agregando una nueva arista e entre v_1 y v_3:

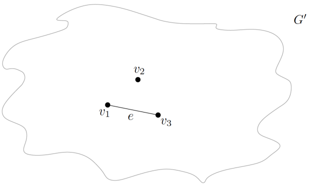


Figure: Creación de G' a partir de la eliminación de e_1 y e_2 y la inserción de e. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Notemos que G' tiene estrictamente menos aristas que G. Por otro lado, sólo v_1, v_2, v_3 pudieron ver afectados sus grados: v_1 y v_3 mantienen su grado en G', y v_2 lo redujo en 2, por lo que todos los vértices de G' tienen grado par. Sólo nos falta que G' sea conexo para aplicar la HI.

Ciclos y caminos Eulerianos

Nos pondremos entonces en dos casos:

1. G' es conexo: en este caso G' cumple con la HI, y por lo tanto tiene un ciclo Euleriano C'. Como C' contiene a todas las aristas de G', se cumple que $C' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$. Si reemplazamos de vuelta e_1 y e_2, obtenemos un ciclo $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots)$, el cual es un ciclo Euleriano en G.

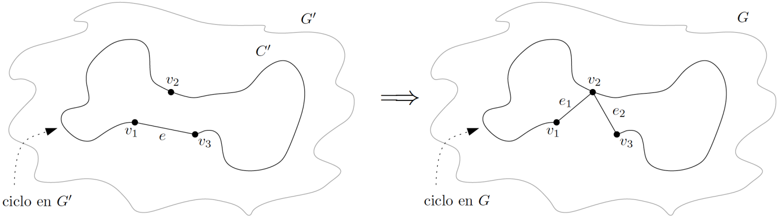


Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir de uno para G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

2. G' no es conexo: como G es conexo, G' tiene dos componentes conexas: una contiene a v_2 y la otra a v_1 y v_3. A cada una de estas podemos aplicarle la HI: existe un ciclo C' que empieza y termina en v_2 que contiene a todos los vértices y aristas de la primera componente: $C' = (v_2, \ldots, v_2)$; y existe otro ciclo C'' que contiene a todas las aristas de la otra componente: $C'' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$.

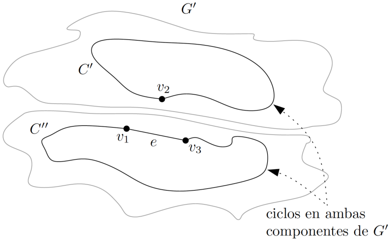


Figure: Ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Ciclos y caminos Eulerianos

Creamos un ciclo Euleriano para G "insertando" C' en C'' entre v_1 y v_3 añadiendo de vuelta e_1 y e_2: $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_2, e_2, e_3, \ldots)$:

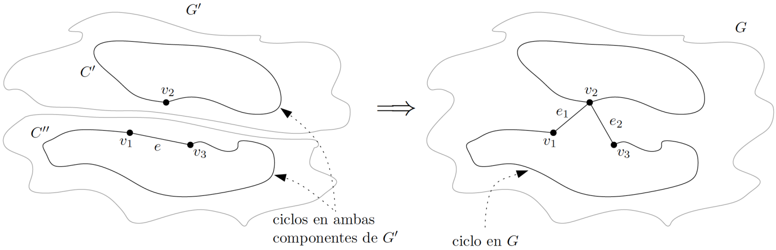


Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir los ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Entonces, por inducción se concluye que cualquier (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen todos grado par es Euleriano.

Ciclos y caminos Eulerianos

Definición

Un **camino Euleriano** en un (multi)grafo G es un camino no cerrado que contiene a todas las aristas y vértices de G.

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Rightarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G tiene un camino Euleriano que comienza en un vértice u y termina en un vértice v: $P = (u, \ldots, v)$. Por demostrar: G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

En primer lugar, como P contiene a todos los vértices de G, es claro que G es conexo. En segundo lugar, si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' que contiene un ciclo Euleriano, el cual se forma al cerrar P con la nueva arista e: $C = (u, \ldots, v, e, u)$. Por el teorema anterior, todos los vértices en G' tienen grado par, por lo que en G los únicos vértices con grado impar eran u y v (pues ambos tenían una arista incidente menos). Por lo tanto, G tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Ciclos y caminos Eulerianos

Teorema

Un (multi)grafo tiene un camino Euleriano si y sólo si es conexo y contiene exactamente dos vértices de grado impar.

($\Leftarrow$) Supongamos que un (multi)grafo G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar u y v. Por demostrar: G tiene un camino Euleriano.

Si agregamos una nueva arista e entre u y v, obtenemos un nuevo grafo G' tal que todos sus vértices tienen grado par, y por el teorema anterior, G' tiene un ciclo Euleriano $C = (u, \ldots, v, e, u)$. Si a este ciclo le sacamos e, obtenemos un camino Euleriano $P = (u, \ldots, v)$ en G.

Ciclos Hamiltonianos

Considere los siguientes grafos:

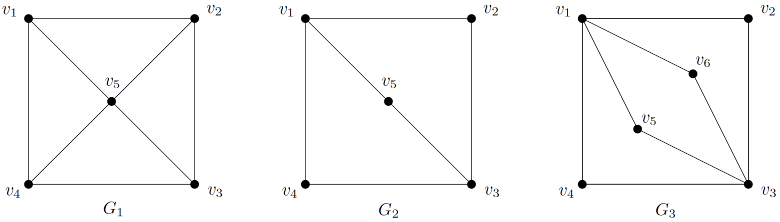


Figure: Fuente: Apuntes Jorge Pérez.

¿Es posible encontrar, en alguno de ellos, un ciclo que contenga a todos los vértices una sola vez cada uno (excepto por el inicial y final)?

R: G_1 tiene un ciclo de tales características: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$.
G_2 ni G_3 tienen tal ciclo.

Ciclos Hamiltonianos

Definición

Un **ciclo Hamiltoniano** en un grafo G es un ciclo en G que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

- Diremos que G es un **grafo Hamiltoniano** si contiene un ciclo Hamiltoniano.
- ¿Hay alguna relación entre grafos Eulerianos y Hamiltonianos?
  - No: G_1 es Hamiltoniano pero no Euleriano; G_2 no es Hamiltoniano ni Euleriano; y G_3 es Euleriano pero no Hamiltoniano.
- ¿Existe alguna propiedad simple para chequear si un grafo es Hamiltoniano?
- ¿Qué tan difícil es determinarlo?

Outline

Objetivos de la clase

- Demostrar propiedades basadas en ciclos
- Comprender el concepto de ciclos y caminos eulerianos
- Demostrar propiedades relacionadas con ciclos eulerianos