



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 10 - Algoritmos y Grafos

7 de junio de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V):**
 - Vertices adyacentes Dado un grafo $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
 - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G .
- **Tipos de aristas (E)**
 - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
 - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
 - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G .
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
 - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
 - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
 - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

- Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
- Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
- Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
- Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \rightarrow S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E .
- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v .
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v : $N_G(v) = \{u | (v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
 - Handshaking lemma: $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
 - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
 - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

1. Correctitud de algoritmos

1. Escriba un algoritmo iterativo que resuelva el problema del Mínimo Común Múltiplo. Su algoritmo debe recibir como input dos números y devolver como output el número natural que corresponda al mínimo común múltiplo del input.
2. Demuestre que su algoritmo es correcto.

2. Grafos 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo no-dirigido. Una k -coloración de aristas de G es una función $f : E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

1. Demuestre que, para toda grafo no-dirigido $G = (V, E)$, si f es una k -coloración de aristas de G , entonces k es mayor o igual que el grado máximo de G , esto es, $k \geq \max_{v \in V} \deg(v)$.
2. Demuestre usando inducción que para toda grafo no-dirigido $G = (V, E)$ y para toda k -coloración de aristas f de G , se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $|V|/2$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \dots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

3. Grafos 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v , denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v , mientras que el ancho de G , denotado como $A(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices.

1. Demuestre que si $A(G) \geq 4$ entonces $A(\bar{G}) \leq 2$.
2. Demuestre que si G tiene un vértice de corte y $A(G) = 2$, entonces \bar{G} tiene un vértice sin vecinos.