Teoría de conjuntos

Clase 10

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Obertura

Conjuntos y axiomas

Operaciones

Epílogo

Segundo Acto: Relaciones

Conjuntos, relaciones y funciones

Introducción

- Hasta ahora hemos usado conjuntos de una manera intuitiva pero razonable.
- Vamos a estudiar la teoría de conjuntos desde un punto de vista **axiomático**.
- Esta teoría se considera la base de las matemáticas.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Conjunto?
- ¿Elemento?
- ¿Pertenencia?

Introducción

Ejemplos

$x \in A$

- x pertenece a A.
- x es un elemento de A.

$0 \in \mathbb{N}$

- 0 pertenece a los naturales.

$2 \in \{1, 2\} \in \big\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \big\}$

- 2 es un elemento de $\{1, 2\}$, el que a su vez es un elemento de $\big\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \big\}$.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

Enunciaremos algunos *axiomas* con los que definiremos formalmente la teoría de conjuntos

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos

Outline

Obertura

Conjuntos y axiomas

Operaciones

Epílogo

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \to x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \big\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \big\}$ ✗

Axiomas

Definición

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

Y si ahora aplicamos la definición de subconjunto y equivalencias lógicas:

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \land \forall x(x \in B \to x \in A)$$
$$A = B \leftrightarrow \forall x((x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A))$$
$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Axiomas

Definición equivalente

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Este se conoce como **Axioma de extensión**.

- Nos dice que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

Un conjunto queda completamente definido por los elementos que contiene

Axiomas

En conclusión, lo único que define a un conjunto son los elementos que contiene.

Observación

$\{x, x\} = \{x\}$

Los conjuntos no pueden tener elementos repetidos

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Notación: $A \subsetneq B$.

¿Qué significa que $A \neq B$?

$$\begin{array}{ccc} A = B & \leftrightarrow & A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\ A \neq B & \leftrightarrow & A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{array}$$

¿Y que $B \nsubseteq A$?

$$\begin{array}{ccccc} B \subseteq A & \leftrightarrow & \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) & \leftrightarrow & \forall x(x \notin B \vee x \in A) \\ B \nsubseteq A & \leftrightarrow & \neg\forall x(x \notin B \vee x \in A) & \leftrightarrow & \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \end{array}$$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B, \text{ o alternativamente, } A \subseteq B \wedge B \nsubseteq A.$$

Notación: $A \subsetneq B$.

Corolario

$B \nsubseteq A$ si y sólo si $\exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$ tal que $\forall x,\ x \notin X$.

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por $\varnothing$ o $\{\}$.

Axiomas

Algunas propiedades importantes del conjunto vacío:

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Ejercicio

Demuestre los teoremas.

Axiomas

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Demostración

Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \rightarrow x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$. $\square$

Axiomas

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Demostración

Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \rightarrow A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos A y B vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que A y B son conjuntos, tenemos que $A \subseteq B$, ya que estamos suponiendo que A es vacío. Recíprocamente, se tiene que $B \subseteq A$. Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que $A = B$. $\square$

Axiomas

¿Como podemos definir un conjunto?

- Por extensión (listando sus elementos):

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Podemos hacer algo más *comprensivo*:

$$\mathbb{Z}_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x < 5\}$$

De hecho, necesitamos ser muy específicos... ¿por qué?

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Ejemplo

Definamos el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

Axiomas

Este axioma es bastante "permisivo".

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Ejemplo

$\varphi_1(x)$: x es un conjunto con más de 3 elementos
$\varphi_2(x)$: x es un conjunto con una cantidad finita de elementos
$\varphi_3(x)$: x es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos
$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos
$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

Axiomas

Siguiendo con el ejemplo:

Ejemplo

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos.

Dado que $\mathcal{A}_1$ es un conjunto que tiene conjuntos adentro, ¿es $\mathcal{A}_1$ un elemento de sí mismo? ¿$\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$?

- En $\mathcal{A}_1$ están todos los conjuntos con más de 3 elementos.
- ¡Son muchos! Definitivamente más de 3...
- Entonces, $\mathcal{A}_1$ tiene más de 3 elementos.
- Luego, $\mathcal{A}_1$ cumple φ_1.
- Concluimos que $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$.

Axiomas

Ejemplo

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

¿$\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$? No.

Ejemplo

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

¿$\mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}_3$? Sí.

Axiomas

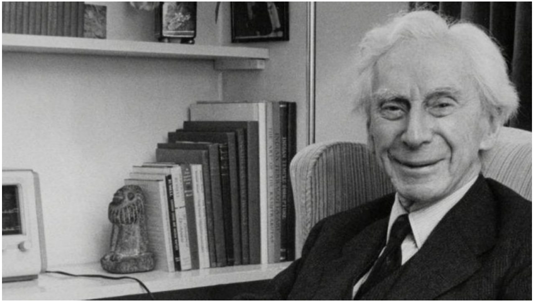
Luego de toda esta discusión, tiene sentido preguntarse si un conjunto pertenece a sí mismo. Tomemos la siguiente propiedad:

$$\varphi(x) \leftrightarrow x \notin x$$

La propiedad φ es satisfecha por todos los conjuntos que **no pertenecen a sí mismos.** Por ejemplo, $\mathcal{A}_2$ cumple φ, mientras que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_3$ no.

¿Qué más podemos hacer? ¡Ocupar el axioma de abstracción!

Axiomas



Bertrand Russell (1872–1970)

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA!

Esta es la **paradoja de Russell**.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto A se obtiene *separando* de C los elementos que cumplen la propiedad φ.

Axiomas

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto "universal sano" que llamaremos $\mathcal{U}$.
- Entonces, cuando escribamos $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$.

Típicamente el conjunto $\mathcal{U}$ se deduce del contexto.

Outline

Obertura

Conjuntos y axiomas

Operaciones

Epílogo

Operaciones

Sean A y B conjuntos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o B.

Definición

La **intersección** de A y B se define por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A y en B.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Definición

El **conjunto potencia** de A se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A.

Observaciones

- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

¿Cómo podemos llamar al operador δ?

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \delta(0) = \delta(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \delta(1) = \delta\left(\{\varnothing\}\right) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \delta(2) = \delta\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\ldots$, $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de $\mathbb{N}$:

Definición

El conjunto de los **números naturales**, denotado por $\mathbb{N}$, es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a $\varnothing$, 1 a $\delta(\varnothing)$, y así sucesivamente.

Solo con $\varnothing$ y δ podemos definir todo $\mathbb{N}$!!!

Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

La **suma** de dos números naturales cumple

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

$$
\begin{aligned}
sum(3,4) &= sum(3,\delta(3)) \\
&= \delta(sum(3,3)) \\
&= \delta(sum(3,\delta(2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,\delta(1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,\delta(0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(sum(3,0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(4))) \\
&= \delta(\delta(5)) \\
&= \delta(6) \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio (propuesto ★)

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $mult(3, 2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Multiplicación de dos números naturales

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$
\begin{aligned}
mult(3,2) &= mult(3, \delta(1)) \\
&= sum(3, mult(3,1)) \\
&= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\
&= sum(3, sum(3, mult(3,0))) \\
&= sum(3, sum(3,0)) \\
&= sum(3,3) \\
&\vdots \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$sum(sum(a,b),c) = sum(a, sum(b,c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c:

BI: $sum(sum(a,b),0) = sum(a,b) = sum(a, sum(b,0))$.

HI: Supongamos que se cumple que $sum(sum(a,b),c) = sum(a, sum(b,c))$ para un natural c.

TI: Por demostrar: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = sum(a, sum(b,\delta(c)))$.
Desarrollamos el lado izquierdo:$sum(sum(a,b),\delta(c)) =$
$\delta(sum(sum(a,b),c)) \overset{HI}{=} \delta(sum(a, sum(b,c))) =$
$sum(a, \delta(sum(b,c))) = sum(a, sum(b, \delta(c)))$ $\square$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de $\mathcal{U}$), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Leyes

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Leyes

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}$.

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.
Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Outline

Obertura

Conjuntos y axiomas

Operaciones

Epílogo

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos