

Guía ejercicios - Repaso I2

Pedro Bahamondes

May 23, 2024

1 Teoría de conjuntos

1. Sea $C := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \rightarrow \psi\}$ y $D := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \leftrightarrow \psi\}$. Demuestre que $C \subsetneq D$.
2. Considere las relaciones usuales $<, \leq, >, \geq$ y $=$ sobre los naturales. Demuestre que
 - (a) $< \subsetneq \leq$
 - (b) $> \subsetneq \geq$
 - (c) $< \cap > = \emptyset$
 - (d) $\leq \cap \geq =$
 - (e) $< \cup > = \mathbb{N}^2 \setminus =$
 - (f) $\leq \cup \geq = \mathbb{N}^2$
3. Sea A un conjunto y R una relación refleja sobre A . Demuestre que $= \subseteq R \subseteq A^2$.

2 Relaciones

1. Sea P un conjunto de variables proposicionales y sea $\leq_{\rightarrow} := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \rightarrow \psi\}$. Demuestre que \leq_{\rightarrow} es una relación refleja y transitiva sobre $\mathcal{L}(P)$.
2. Sea P un conjunto de variables proposicionales, sea $\mathbb{L} := \mathcal{L}(P)/\equiv$ y sea \preceq_{\rightarrow} definida por

$$\preceq_{\rightarrow} := \{(A, B) \in \mathbb{L}^2 \mid \exists \varphi \in A \quad \exists \psi \in B \quad \varphi \rightarrow \psi\}$$

Demuestre que \preceq_{\rightarrow} es una relación de orden parcial sobre \mathbb{L} .

3. Sea $f : A \rightarrow B$ una función y definamos \equiv_f como la relación dada por

$$a \equiv_f a' \text{ si y sólo si } f(a) = f(a')$$

Demuestre que \equiv_f es una relación de equivalencia.

4. Sea $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva y definamos \leq_f como la relación dada por

$$a \leq_f a' \text{ si y sólo si } f(a) \leq f(a')$$

Demuestre que \leq_f es una relación de orden parcial.

5. Demuestre que la relación \equiv sobre $\mathcal{L}(P)$ es una relación de equivalencia.
6. Demuestre que la relación \approx (equinumerosidad) sobre conjuntos es una relación de equivalencia.
7. Defina \preceq como la siguiente relación binaria sobre funciones de A en B :

$$f \preceq g \text{ si y sólo si } f(A) \subseteq g(A)$$

Demuestre que \preceq es una relación refleja y transitiva. Demuestre que \preceq no es antisimétrica.

8. Definimos el conjunto de rectas bidimensionales con coeficientes reales como el conjunto de funciones $R = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{R} \quad f = x \mapsto mx + n\}$. Diremos que dos rectas f y g en R son paralelas, lo que denotamos por $f \parallel g$ si existen m, n, n' en \mathbb{R} tales que $f = x \mapsto mx + n$ y $g = x \mapsto mx + n'$. Demuestre que \parallel es una relación de equivalencia sobre R .

9. Definimos el conjunto de triángulos en el plano cartesiano Δ como

$$\Delta := \{(a, b), (c, d), (e, f)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \mid (a, b) \neq (c, d) \wedge (c, d) \neq (e, f) \wedge (a, b) \neq (e, f)\}$$

(es decir, un triángulo está definido por exactamente tres puntos distintos en el plano). Diremos que dos triángulos $T_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $T_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$ son congruentes si el largo de sus aristas son iguales, es decir, si existen r_1, r_2 y r_3 en T_2 tales que $d(r_1, r_2) = d(p_1, p_2)$, $d(r_2, r_3) = d(p_2, p_3)$ y $d(r_3, r_1) = d(p_3, p_1)$, donde d es la función de distancia euclidiana entre puntos dada por:

$$d((a, b), (c, d)) := \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$$

Lo denotamos por $T_1 \approx T_2$. Demuestre que \approx es una relación de equivalencia sobre triángulos.

10. Defina de manera similar el conjunto de círculos en el plano y la relación compuesta por los pares de círculos de igual radio. Demuestre que dicha relación es una relación de equivalencia.
11. Sea A un conjunto, \equiv una relación de equivalencia sobre A y \preceq la relación A/\equiv dada por

$$[B]_{\equiv} \preceq [C]_{\equiv} \text{ si y sólo si existe una función inyectiva } f : [B]_{\equiv} \rightarrow [C]_{\equiv}$$

Demuestre que \preceq define un orden parcial sobre A/\equiv

12. Sea A un conjunto y \prec una relación binaria sobre A . Decimos que \prec es una relación de orden estricto si es una relación asimétrica y transitiva.
- (a) Dé ejemplos de conjuntos con relaciones de orden estricto.
- (b) Demuestre que $\preceq = \prec \cup =$ es una relación de orden parcial.
- (c) ¿Qué condiciones hay que exigir sobre \prec para que \preceq sea un orden total? Demuéstrelo. Cuando ello ocurre, diremos que la relación es una relación de orden estricto total.

3 Elementos extremos

1. Encuentre elementos minimales y mínimos para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sobre el orden parcial $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$:
- (a) Los números pares
- (b) Los números impares
- (c) Los números primos
- (d) Las potencias de 2
2. Sea A un conjunto. Demuestre que en el orden parcial $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $\mathcal{P}(A)$ tiene mínimo y máximo.
3. Sea k un número natural y $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ el conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} con exactamente k elementos. Demuestre que todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ son a la vez minimales y maximales.
4. Sea P un conjunto de variables proposicionales y considere la relación de equivalencia \equiv sobre $\mathcal{L}(P)$. Sobre $\mathcal{L}(P)/\equiv$, definimos la relación \preceq dada por

$$\varphi \preceq \psi \text{ si y sólo si para toda valuación } \sigma, \text{ se tiene que } \sigma(\varphi) \leq \sigma(\psi)$$

Demuestre que \preceq es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{L}(P)/\equiv$ y encuentre los elementos mínimo y máximo para el conjunto $\mathcal{L}(P)$ en el orden parcial que define $(\mathcal{L}(P), \preceq)$.

4 Cardinalidad

1. Sea N un conjunto no enumerable y $E \subseteq N$ un conjunto enumerable. Demuestre que $N \setminus E$ es no enumerable.
2. Demuestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ es enumerable.
3. Demuestre que el conjunto $C := \mathbb{Q} \cup \{\pi + n \mid n \in \mathbb{Q}\}$ es enumerable.
4. Sea $\mathcal{R} = \{R \mid R \text{ es una relación binaria sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que \mathcal{R} es no enumerable.
5. Sean A , B y C conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestre que si $A \approx C$ entonces $B \approx C$.
6. Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{F} \approx \mathbb{R}$.
7. Sea $\mathcal{B} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$. Demuestre que \mathcal{B} es no enumerable.
8. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Demuestre que $f(\mathbb{N}) := \{y \mid \exists x \in \mathbb{N} \quad f(x) = y\}$ es enumerable.
9. Sea k un número natural y $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ el conjunto de todos los subconjuntos de \mathbb{N} con exactamente k elementos. Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ es enumerable.
10. Considere el juego de ‘cachipún’ o ‘piedra-papel-o-tijera’ (PPT), con repetición en caso de empate. Un turno de PPT se puede representar como un elemento del conjunto

$$\mathcal{T} = \{PP, PT, PR, TP, TT, TR, RP, RT, RR\}$$

(donde cada letra representa la tirada del respectivo jugador, siendo P papel, T tijera y R roca o piedra). Una jugada de PPT se puede representar como una secuencia de turnos (t_1, t_2, \dots) , la que será finita en caso de que alguno de los jugadores gane en alguno de sus turnos, o infinita en caso de que la secuencia consista de infinitos empates sucesivos. Demuestre que las secuencias posibles de ‘cachipún’ son no enumerables.