Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 5

19 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de obejtos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de A (relativo a $\mathcal{U}$) es

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B,\ A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x,\ x \notin X$. $X = \varnothing$.

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

  $$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

  $$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

  $$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

  $$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

  $$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Leyes

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$

2. Elemento neutro:
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$

3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$

7. Leyes de De Morgan:
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

8. Elemento inverso:
   $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \varnothing$

9. Dominación:
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$

1. Conjuntos y Producto Cartesiano

1. Sean A, B y C conjuntos no vacíos.
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.
   a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
2. Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:
   $$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$
   Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.
   $$\text{Si } A\Delta C = B\Delta C \text{ entonces } A = B$$

2. Teoría de Conjuntos

Dado un conjunto A, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \backslash X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. $A \in \mathcal{T}(A)$
3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.