Teorema de Cantor

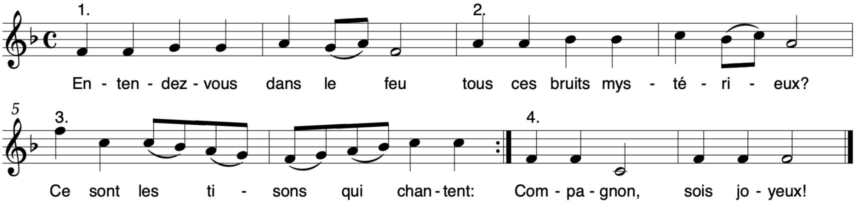
Clase 18

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Entendez-vous Traditional



Entendez-vous dans le feu
tous ces bruits mystérieux?

Ce sont les tisons qui chantent:
Compagnon, sois joyeux!

Segundo Acto: Relaciones

Conjuntos, relaciones y funciones

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es **equinumeroso** con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

Cardinalidad

Definición

La **cardinalidad** de un conjunto A es su clase de equivalencia bajo $\approx$:

$$|A| = [A]_{\approx}$$

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que A es un conjunto **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n = \{0, \ldots, n-1\}$.

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

- Por simplicidad, diremos que $|A| = n$.
- También podremos decir que A tiene n elementos.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:
$f : A \to \mathbb{N}$ con $f(a_i) = i$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

TI: PD: $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ es enumerable.
Como por HI sabemos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, existe una lista $(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ que contiene a todas las tuplas de $\mathbb{N}^n$ exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ponemos las tuplas de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ en una matriz, la cual recorremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de $\mathbb{N}^n$ más la segunda componente suman k.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

<u>TI:</u> De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \ldots)$$

Concluimos entonces que $\mathbb{N}^n$ es enumerable para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en $\{$ INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ $\}$?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección
(eso puede ser muy difícil!!)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$, la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \to A$ dada por $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$.
  $g(x) = g(x) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$, y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$.

Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no numerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor

Outline

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Por contradicción, supongamos que $(0,1)$ es enumerable.

Entonces existe una lista infinita de los reales en $(0,1)$:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0,1)$ aparece exactamente una vez.

Notemos que cada r_i es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0} d_{i1} d_{i2} d_{i3} \ldots, \text{ con } d_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para cada $i \geq 0$, definimos $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Para cada $i \geq 0$, definimos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿Aparece r en la lista?

- ¿$r = r_0$? No, porque difieren en el primer dígito decimal.
- ¿$r = r_1$? No, porque difieren en el segundo dígito decimal.
- ...
- ¿$r = r_i$? No, porque el i-ésimo digito de r es distinto al de r_i:

$$d_i \neq d_{ii}$$

Por lo tanto, r no aparece en la lista $\rightarrow\leftarrow$

Como $(0, 1)$ no puede ponerse en una lista, no es enumerable. $\square$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?
- Es clave para establecer muchos resultados en matemáticas y computación.

Usando estas ideas se puede demostrar que un computador
no puede resolver todo problema

¿Qué otros conjuntos tienen la misma cardinalidad que $(0,1)$?

Teorema

$(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Outline

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{R}$?

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \preceq B$ (A **no es más grande** que B) si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

¿Es $\preceq$ una relación de orden?

Si $A \preceq B$, diremos que $|A| \leq |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \prec B$ (A es **menos numeroso** que B) si $A \preceq B$ pero $A \not\approx B$.

¿Cómo se define esta noción usando funciones?

- Existe función inyectiva $f : A \to B$...
- ...pero no existe función biyectiva $g : A \to B$.

Si $A \prec B$, diremos que $|A| < |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Corolario

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Demostramos algo parecido para el caso finito...
veremos que aplica para **todo conjunto**

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto A (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

¡Podemos repetir este proceso *ad eternum*!

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))| < \cdots$$

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Primero, es claro que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Basta tomar

$$f : A \to \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Ahora mostraremos que no existe una función biyectiva entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Por contradicción, supongamos que sí existe una biyección f entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$. Considere ahora los siguientes casos:

- Si $x \in f(x)$, entonces $x \in \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \notin f(x)$.
- Si $x \notin f(x)$, entonces $x \notin \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \in f(x)$.

Luego, $x \in f(x)$ si y sólo si $x \notin f(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una biyección entre A y $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$? ???

Hipótesis del continuo

No existe conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

¿Por qué se llama hipótesis?

Reflexiones finales

- ¿Qué implica todo lo anterior para la computación?
  - ¿Qué cosas es capaz de hacer un computador?
  - ¿Qué cosas **no** es capaz de hacer?
  - ¿Existen problemas computacionales para los cuales no existan algoritmos que los resuelvan?
  - Respuesta: $\mathrm{IIC2213}$:)

Outline

Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no numerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor