Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

16 de Abril de 2024

Preguntas e incisos en blanco se evalúan con nota 1.5 proporcional.

Pregunta 1

(a) **(3 ptos.)** Considere la sucesión a_n para $n \geq 0$ definida de acuerdo con

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 3, \qquad a_2 = 9,$$
$$a_n = a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot a_{n-3} \quad \text{para } n \geq 3$$

Demuestre por inducción que para todo $n \geq 0$ se cumple que $a_n \leq 3^n$.

(b) **(3 ptos.)** Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ un conjunto de fórmulas proposicionales y φ, ψ fórmulas de $\mathcal{L}(P)$. Demuestre que si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, entonces $\Sigma \models \psi$.

Solución

a) Demostraremos el resultado usando inducción fuerte sobre n.

- Casos base: para $n \in \{0, 1, 2\}$, se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & = & 1 & \leq & 3^0 \\ a_1 & = & 3 & \leq & 3^1 \\ a_2 & = & 9 & \leq & 3^2 \end{array}$$

- Hipótesis inductiva: suponemos que para todo $k < n$, con $n \geq 3$, se cumple que $a_k \leq 3^k$.
- Tesis inductiva: demostraremos que $a_n \leq 3^n$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcll} a_n & = & a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot a_{n-3} & \text{(definición de } a_n\text{)} \\ & \leq & 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-3} & \text{(hipótesis inductiva)} \\ & = & 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-2} & \\ & \leq & 3 \cdot 3^{n-1} & \\ & = & 3^n & \end{array}$$

Por lo tanto, $a_n \leq 3^n$ para todo k, lo que prueba lo pedido.

b) Sean Σ un conjunto de fórmulas y φ, ψ fórmulas proposicionales tales que $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Sea además σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Demostraremos que $\sigma(\psi) = 1$ para concluir lo pedido. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma(\Sigma) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sigma(\varphi) = 1 && \text{(por } \Sigma \models \varphi\text{)} \\
&\Rightarrow \quad \sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1 && \text{(unión de conjuntos satisfechos por } \sigma\text{)} \\
&\Rightarrow \quad \sigma(\psi) = 1 && \text{(por } \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi\text{)}
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\Sigma \models \psi$.

Pauta (6 pts.)

a)
- 1.0 pto. por los tres casos base.
- 0.5 pts. por hipótesis inductiva correctamente planteada.
- 0.5 pts. por utilizar definición de a_n.
- 1.0 pto. por demostrar correctamente la tesis.

b)
- 1.0 pto. por deducir $\sigma(\varphi) = 1$.
- 1.0 pts. por la unión.
- 1.0 pto. por obtener $\sigma(\psi) = 1$ y concluir.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2

Considere M médicos, P pabellones y C cirugías agendadas para un día dado. Queremos asignar a los médicos disponibles a las distintas cirugías, suponiendo que el día tiene 24 bloques de 1 hora, durante los cuales los pabellones están disponibles y que las cirugías duran una cantidad entera de horas dada por T_c para cada cirugía c, con $1 \leq c \leq C$. Además, contamos con una tabla de compatibilidad cirugía-pabellón. Para cada cirugía c, con $1 \leq c \leq C$, y pabellón p, con $1 \leq p \leq P$, definimos:

$$K_{c,p} := \begin{cases} 1 & \text{si la cirugía } c \text{ puede ser realizada en el pabellón } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para construir una fórmula φ tal que φ sea satisfactible si y sólo si existe una calendarización adecuada de todas las cirugías, considere las siguientes variables proposicionales:

- $x_{m,c,p,t}$: Será verdadera si el médico m realiza la cirugía c en el pabellón p durante la hora t
- $k_{c,p}$: Deberá representar nuestras constantes $K_{c,p}$

Modele las siguientes restricciones en lógica proposicional:

(a) **(1 pto.)** Inicialización de las variables $k_{c,p}$

(b) **(1 pto.)** Las cirugías solo pueden ser realizadas en pabellones adecuadas para ellas.

(c) **(1 pto.)** Los médicos solo pueden ser asignados a una cirugía a la vez.

(d) **(1 pto.)** Si un médico es asignado a una cirugía, debe seguir asignado a la cirugía durante toda su duración.

(e) **(1 pto.)** Si un médico es asignado a una cirugía, no podrá realizar otra cirugía por al menos 8 horas desde el término de la cirugía.

(f) **(1 pto.)** Todas las cirugías deben tener exactamente un médico asignado durante su duración.

Solución

a) Inicialización de las variables $k_{c,p}$.

Utilizamos la fórmula φ_K para la inicialización de las variables $k_{c,p}$ dada por

$$\varphi_K := \bigwedge_{c=1}^{C} \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq p \leq P: \\ K_{c,p}=1}} k_{c,p} \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq p \leq P: \\ K_{c,p}=0}} \neg k_{c,p} \right)$$

(*) Otras notaciones como $(c,p) : K_{c,p} = 1$ también deberían ser aceptadas para los subíndices de las conjunciones.

b) Las cirugías solo pueden ser realizadas en pabellones adecuadas para ellas.

Utilizamos la fórmula φ_P dada por

$$\varphi_P := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{24} (x_{m,c,p,t} \rightarrow k_{c,p})$$

(*) Nótese que la expresión entre paréntesis también puede escribirse como cualquiera de sus equivalencias, como $(\neg x_{m,c,p,t} \vee k_{c,p})$, incluyendo su contrapositivo $(\neg k_{c,p} \rightarrow \neg x_{m,c,p,t})$

c) Los médicos solo pueden ser asignados a una cirugía a la vez.

Lo expresamos con la fórmula φ_U dada por:

$$\varphi_U := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{24} \left(x_{m,c,p,t} \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq c' \leq C \\ c' \neq c}} \neg x_{m,c',p,t} \right) \right)$$

(*) Acá igualmente hay varias escrituras de la fórmula que son válidas, notablemente separar la conjunción del consecuente en dos partes, para $1 \leq c' \leq c-1$ y para $c+1 \leq c' \leq C$

d) Si un médico es asignado a una cirugía, debe seguir asignado a la cirugía durante toda su duración.

Para esta pregunta asumiremos que $T_c \leq 24$, pues en caso contrario la fórmula es trivialmente insatisfactible. Utilizaremos la fórmula φ_C dada por

$$\varphi_C := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \left(\bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \to \bigvee_{t=1}^{(T-T_c+1)} \bigwedge_{t'=t}^{(t+T_c-1)} x_{m,c,p,t} \right)$$

Intuitivamente, esta fórmula nos permite expresar que si médico está asignado a la cirugía c, entonces debe estar asignado a los T_c períodos comprendidos entre t y $t+T_c-1$ para la cirugía y pabellón dados, para un comienzo dado en el tiempo t, que puede ser a lo más $T - T_c + 1$ (para empezar a tiempo). Otra alternativa, algo más compleja, es definirlo como:

$$\begin{aligned}
\varphi_C := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \Bigg(& \\
& \left(x_{m,c,p,1} \to \bigwedge_{t=2}^{T_c} x_{m,c,p,t} \right) \wedge \\
& \left(\bigwedge_{t=2}^{T-T_c+1} \left((\neg x_{m,c,p,t-1} \wedge x_{m,c,p,t}) \to \bigwedge_{t'=t+1}^{t+T_c-1} x_{m,c,p,t'} \right) \right) \wedge \\
& \left(x_{m,c,p,T} \to \bigwedge_{t=T-T_c+1}^{T-1} x_{m,c,p,t} \right) \wedge \\
& \left(\bigwedge_{t=T_c}^{T-1} \left((\neg x_{m,c,p,t+1} \wedge x_{m,c,p,t}) \to \bigwedge_{t'=t-T_c+1}^{t-1} x_{m,c,p,t'} \right) \right) \\
\Bigg) &
\end{aligned}$$

Aquí, intuitivamente, hacemos una implicancia sobre el tiempo de inicio de la cirugía y sobre el término de la cirugía. Para la primera mitad, si el primer período es t, forzamos que la cirugía continúe durante los $T_c - 1$ períodos que le siguen. Puesto que esto nos podría dejar con cirugías más cortas, hacemos lo análogo para el término de la cirugía. Si el último período de la cirugía es t, forzamos que la cirugía esté en proceso durante los $T_c - 1$ períodos que le preceden.

(*) Varias otras fórmulas son posibles, y nótese que no establecemos restricciones sobre estar más de T_c horas en la cirugía, pero no es problema si hay alguna subrestricción que lo implique. Nótese también que todos los subíndices deben ser válidos (en particular, índices menores a $t = 1$ o mayores a $t = T$ son inválidos y deberían incluir un descuento) y que además las cirugías deben cumplir las T_c horas como mínimo, por lo que cada mitad por sí sola no es suficiente. Una alternativa puede incluir una de las mitades de la primera fórmula con alguna otra restricción que fuerce el largo mínimo T_c, por ejemplo, algo como $\bigvee_{t=1}^{T-T_c+1} (x_{m,c,p,t} \wedge x_{m,c,p,t+T_c-1})$ (debo tener un inicio y término de la cirugía con largo T_c) o algo como $\bigwedge_{t=T-T_c+1} \neg x_{m,c,p,t} \to \bigwedge_{t'=T-T_c+2}^{T} \neg x_{m,c,p,t'}$ (la cirugía debe empezar en un tiempo de a lo más $T - T_c + 1$). Finalmente, nótese que en la segunda fórmula propuesta, el caso $t = 1$ es especial, puesto que si la variable es verdadera, la cirugía empieza en ese tiempo. Para los demás tiempos, determinamos el inicio si la variable en el tiempo que le precede es falsa.

e) Si un médico es asignado a una cirugía, no podrá realizar otra cirugía por al menos 8 horas desde el término de la cirugía.

Utilizamos la fórmula φ_L dada por:

$$\varphi_L := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{T-1} \left((x_{m,c,p,t} \wedge \neg x_{m,c,p,t+1}) \rightarrow \bigwedge_{c'=1}^{C} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=t+1}^{\text{mín}\{T,t+8\}} \neg x_{m,c',p',t'} \right)$$

(*) Aquí también varias otras fórmulas son posibles, pero esta versión es suficientemente simple. Nótese que los índices deben ser todos válidos. Acá se usa la función mín por simplicidad, pero otras formas de lograrlo pueden ser válidas.

f) Todas las cirugías deben tener exactamente un médico asignado durante su duración.

Utilizamos la fórmula dada por $\varphi_M = \varphi_R \wedge \varphi_X$ donde

$$\varphi_R := \left(\bigwedge_{c=1}^{C} \bigvee_{m=1}^{M} \bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right)$$

$$\varphi_X := \left(\bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \left(\left(\bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right) \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=1}^{T} \neg x_{m',c,p',t'} \right) \right) \right)$$

Intuitivamente, la fórmula φ_M nos dice que toda cirugía debiera ser realizada al menos por algún médico en algún pabellón en algún tiempo, y la fórmula φ_X nos dice que si la cirugía c es realizada por el médico m en alguno de los pabellones en algún tiempo, entonces no puede ser realizada por ningún otro médico, en ningún pabellón ni tiempo.

Otra alternativa razonable de solución es juntar ambas como sigue.

$$\varphi_M := \left(\bigwedge_{c=1}^{C} \bigvee_{m=1}^{M} \left(\left(\bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=1}^{T} \neg x_{m',c,p',t'} \right) \right) \right)$$

Intuitivamente, la fórmula nos dice que para toda cirugía, hay algún médico tal que en algún período y en algún pabellón, ese médico realiza la cirugía y ningún otro médico puede realizarla en ningún pabellón o tiempo. (*) Como en las demás preguntas, otras fórmulas son posibles. La mitad del puntaje debe ir a que la fórmula efectivamente implique que al menos un médico realice la cirugía, mientras que la segunda mitad a que a lo más un médico la realice. Como en las demás preguntas, los índices deben ser válidos para obtener el puntaje completo.

Pauta (6 pts.)

1 pto. por cada fórmula correcta. Hay descuentos parciales cuando las fórmulas tienen índices incorrectos, si no alcanzan a expresar por completo lo solicitado o si no se justifica alguna suposición importante. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje. Otros puntajes parciales y soluciones alternativas quedan a criterio del corrector.

Pregunta 3

Considere la interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}$ y que interpreta $=$ como igualdad y los símbolos de predicado P, Q, R, S de acuerdo con

$$
\begin{aligned}
P(x)&: \quad x \text{ es un número primo.}\\
Q(x,y)&: \quad x \text{ es menor o igual a } y.\\
R(x)&: \quad x \text{ es un número compuesto.}\\
S(x,y,z)&: \quad x + y = z.
\end{aligned}
$$

Recuerde que un número primo es aquel que solo es divisible por 1 y por sí mismo, y que un número compuesto no es primo. El número 1 por convención no se considera primo ni compuesto.

(a) **(4 ptos.)** Construya una oración φ en lógica de predicados tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ si y solo si la siguiente propiedad se cumple

> *"Hay infinitos números primos tales que, para cada uno de ellos, existe un número compuesto cuya suma con el primo da como resultado otro número primo."*

(b) **(2 ptos.)** Demuestre la correctitud de su fórmula.

Solución

Parte (a)

Se busca una oración φ en lógica de predicados que exprese la siguiente propiedad:

> "Hay infinitos números primos tales que, para cada uno de ellos, existe un número compuesto cuya suma con el primo da como resultado otro número primo."

Para formular esto, utilizamos los siguientes símbolos de predicado definidos en la interpretación $\mathcal{I}$:

$$
\begin{aligned}
P(x) &: x \text{ es un número primo.}\\
R(x) &: x \text{ es un número compuesto.}\\
S(x,y,z) &: x + y = z.
\end{aligned}
$$

La oración en lógica de predicados, φ, se formula entonces como:

$$\forall x(P(x) \to \exists y \exists z(R(y) \land P(z) \land S(x,y,z)))$$

Esta expresa que para todo número x, si x es primo, entonces existen números y y z tales que y es compuesto, z es primo, y la suma de x y y resulta en z.

Parte (b)

Para demostrar que φ es correcta:

1. Si la interpretación $\mathcal{I}$ satisface φ, entonces para cada número primo x, existe un número compuesto y y otro número primo z tal que $x + y = z$. Esto coincide con la propiedad de que hay infinitos números primos x para cada uno de los cuales existe al menos un número compuesto y que al sumarse a x da como resultado otro número primo z.

2. Si se cumple la propiedad de que para cada número primo x existe un número compuesto y tal que $x + y$ es primo, entonces para cada x primo, podemos encontrar un y compuesto y un z primo que satisfacen $x + y = z$, lo que implica que $\mathcal{I} \models \varphi$.

Puntaje:

- 4 ptos por llegar a la formula o a una equivalente.
- 2 ptos por la demostración.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4

Sabemos que una cláusula es una disyunción de literales. Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal sin negación. Decimos que una fórmula proposicional es *fórmula de Horn* si es una conjunción de cláusulas de Horn.

Sea P un conjunto de variables. Dadas dos valuaciones $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{L}(P) \to \{0, 1\}$, se define la valuación $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ como aquella que para cualquier variable proposicional $p \in P$ asigna el valor

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(p) = \text{mín}\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\}$$

y que evalúa los conectivos lógicos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ tal como se estudió en clases.

(a) **(1.5 ptos.)** Defina inductivamente el conjunto de las cláusulas de Horn con variables proposicionales en P.

(b) **(1.5 ptos.)** Defina inductivamente el conjunto de las fórmulas de Horn con variables proposicionales en P. *Sugerencia:* tome como caso base una cláusula de Horn.

(c) **(3 ptos.)** Sea φ una cláusula de Horn. Demuestre, usando inducción, que si $\sigma_1(\varphi) = 1$ y $\sigma_2(\varphi) = 1$, entonces $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\varphi) = 1$.

Solución

Parte (a)

Una cláusula de Horn es una cláusula lógica que tiene a lo más un literal positivo. Las cláusulas de Horn se definen inductivamente como sigue:

- **Caso Base:**

- Un literal negativo $\neg p$ o un literal positivo p es una cláusula de Horn.

- **Paso Inductivo:**
  - Si C es una cláusula de Horn que contiene a lo más un literal sin negación, entonces $C \vee \neg q$ también es una cláusula de Horn, donde $q \in P$.
  - Si C es una cláusula de Horn que contiene solo literales negados, entonces $C \vee r$ también es una cláusula de Horn, siempre y cuando r sea el único literal sin negación en la nueva cláusula y $r \in P$.

Parte (b)

Las fórmulas de Horn son conjunciones de cláusulas de Horn. La definición inductiva de las fórmulas de Horn se establece de la siguiente manera:

- **Caso Base:**
  - Una cláusula de Horn es una fórmula de Horn.
- **Paso Inductivo:**
  - Si ψ y θ son fórmulas de Horn, entonces $\psi \wedge \theta$ es también una fórmula de Horn.

Parte (c)

Sea φ una cláusula de Horn y sean σ_1 y σ_2 dos valuaciones tal que $\sigma_1(\varphi) = 1$ y $\sigma_2(\varphi) = 1$. Necesitamos demostrar que bajo la valuación $\sigma_1 \otimes \sigma_2$, se cumple que $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\varphi) = 1$. La valuación $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ se define como $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(p) = \text{mín}\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\}$ para cualquier variable proposicional p.

Demostración por inducción en la estructura de φ

Base inductiva:

- Si φ es un literal positivo p, entonces $\sigma_1(p) = 1$ y $\sigma_2(p) = 1$. Por lo tanto,
$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(p) = \text{mín}\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\} = 1.$$
- Si φ es un literal negativo $\neg p$, entonces $\sigma_1(\neg p) = 1$ y $\sigma_2(\neg p) = 1$, lo que implica que $\sigma_1(p) = 0$ y $\sigma_2(p) = 0$. Así,
$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(p) = \text{mín}\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\} = 0$$
y entonces,
$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\neg p) = 1.$$

Paso inductivo:

- Supongamos que $\varphi = C \vee \ell$, donde C es una cláusula de Horn y ℓ es un literal que mantiene φ como una cláusula de Horn. Por hipótesis inductiva, asumimos que si $\sigma_1(C) = 1$ y $\sigma_2(C) = 1$, entonces $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(C) = 1$.

- Si $\sigma_1(\varphi) = 1$ y $\sigma_2(\varphi) = 1$, esto puede ser porque $\sigma_1(C) = 1$ o $\sigma_1(\ell) = 1$ (y similarmente para σ_2). Si ambos, C y ℓ, evalúan a 1 bajo alguna de las valuaciones, entonces por la hipótesis inductiva y la base inductiva, $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(C) = 1$ o $(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\ell) = 1$, respectivamente. Por tanto,

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(\varphi) = 1.$$

Puntaje:

- 1 pto en (a).
- 1 pto en (b).
- 1 pto por caso base en (c).
- 2 ptos por paso inductivo y conclusion en (c).

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.