Funciones y cardinalidad

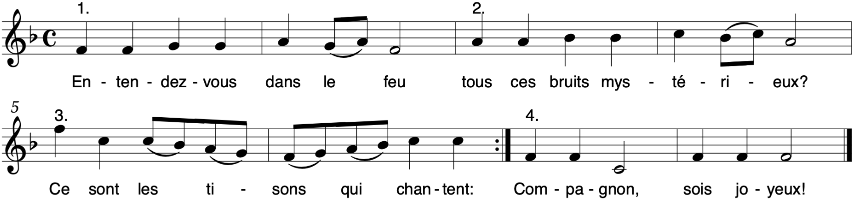
Clase 16

IIC 1253

Prof. Sebastián Bugedo

Outline

Entendez-vous Traditional



Entendez-vous dans le feu
tous ces bruits mystérieux?

Ce sont les tisons qui chantent:
Compagnon, sois joyeux!

Segundo Acto: Relaciones

Conjuntos, relaciones y funciones

Funciones

Definición

Sea f una relación binaria de A en B; es decir, $f \subseteq A \times B$.
Diremos que f es una **función** de A en B si dado cualquier elemento $a \in A$, si existe un elemento en $b \in B$ tal que afb, este es único:

$$afb \wedge afc \Rightarrow b = c$$

Si afb, escribimos $b = f(a)$.

- b es la *imagen* de a.
- a es la *preimagen* de b.

Notación: $f : A \to B$

Funciones

Una función $f : A \to B$ se dice **total** si todo elemento en A tiene imagen.

- Es decir, si para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $b = f(a)$.
- Una función que no sea total se dice **parcial**.
- De ahora en adelante, toda función será total a menos que se diga lo contrario.

Funciones

Definición

Diremos que una función $f : A \to B$ es:

1. **Inyectiva** (o 1-1) si para cada par de elementos $x, y \in A$ se tiene que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Es decir, no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva** (o sobre) si cada elemento $b \in B$ tiene preimagen. Es decir, para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$.
3. **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dada una relación R de A en B, la **relación inversa** de R es una relación de B en A definida como

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid aRb\}$$

Definición

Dada una función f de A en B, diremos que f es **invertible** si su relación inversa f^{-1} es una función de B en A.

Paréntesis: relaciones y funciones como conjuntos

Definición

Dadas relaciones R de A en B y S de B en C, la **composición** de R y S es una relación de A en C definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

Proposición

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la composición $g \circ f$ es una función de A en C.

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f es biyectiva, entonces es invertible.

Funciones

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

1. Función: supongamos que $yf^{-1}x_1$ e $yf^{-1}x_2$, con $y \in B$ y $x_1, x_2 \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que $x_1 f y$ y $x_2 f y$. Como f es inyectiva, $x_1 = x_2$, y por lo tanto f^{-1} es función.
2. Total: como f es sobre, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es total.

Funciones

Teorema

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces la relación inversa f^{-1} es una función biyectiva de B en A.

3. Inyectiva: supongamos que $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, con $y_1, y_2 \in B$ y $x \in A$. Por definición de relación inversa, esto significa que $f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$. Como f es función, $y_1 = y_2$, y por lo tanto f^{-1} es inyectiva.
4. Sobre: como f es total, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Luego, para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x = f^{-1}(y)$, y por lo tanto f^{-1} es sobre.

Funciones

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Corolario

Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

Funciones

Teorema

Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

1. Supongamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, con $x_1, x_2 \in A$. Por definición de composición, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$, y como f también es inyectiva, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
2. Sea $z \in C$. Como g es sobre, sabemos que existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Similarmente, como f es sobre, sabemos que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces, tenemos que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, y por lo tanto para cada $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Concluimos que $g \circ f$ es sobre.

Funciones

Una aplicación muy importante de las funciones es que nos permiten razonar sobre el tamaño de los conjuntos. Una propiedad interesante sobre los conjuntos finitos es la siguiente:

Principio del palomar

Se tienen m palomas y n palomares, con $m > n$. Entonces, si se reparten las m palomas en los n palomares, necesariamente existirá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar (matemático)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m > n$, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Funciones

Principio del palomar (para sobreyectividad)

Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con $m < n$, la función f no puede ser sobreyectiva.

Corolario

La única forma en que una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ sea biyectiva es que $m = n$.

Funciones

Ejemplo

Si en una sala hay 8 personas, entonces este año necesariamente dos de ellas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Las 8 personas las podemos modelar como el conjunto $P = \{0, \ldots, 7\}$ y los días de la semana como el conjunto $S = 0, \ldots, 6$. El día de la semana que se celebra el cumpleaños de cada una resulta ser una función de P en S, por el principio de los cajones, esta función no puede ser inyectiva, luego al menos dos personas distintas celebrarán su cumpleaños el mismo día de la semana.

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de cardinalidad
- Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- Comprender concepto de numerabilidad
- Demostrar numerabilidad de conjuntos

Outline

Cardinalidad

Queremos resolver el problema de determinar el tamaño de un conjunto.

- Es decir, la cantidad de elementos que contiene.
- ¿Cómo lo hacemos?

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Simplemente contamos... tiene 6.

Cardinalidad

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

$$\begin{aligned} a &\to 1 \\ b &\to 2 \\ c &\to 3 \\ d &\to 4 \\ e &\to 5 \\ f &\to 6 \end{aligned}$$

Estamos estableciendo una *correspondencia* entre los elementos de A y los números naturales. . .

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es **equinumeroso** con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

Cardinalidad

Notemos que $\approx$ es una relación sobre conjuntos.

Teorema

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Cardinalidad

Teorema

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

- Refleja: Para todo conjunto A existe $f : A \to A$ tal que $f(a) = a$, $\forall a \in A$ es una función biyectiva, por lo que $A \approx A$.
- Simétrica: Sea A, B conjuntos tal que $A \approx B \Rightarrow$ existe $f : A \to B$ biyectiva, entonces la función $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva y por lo tanto $B \approx A$.
- Transitiva: Sea A, B, C conjuntos tal que $A \approx B$ y $B \approx C \Rightarrow$ existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas, luego $f \circ g : A \to C$ es una función biyectiva, por lo que $A \approx C$.

Cardinalidad

Podemos usar conceptos de las relaciones de equivalencia para hablar sobre el tamaño de los conjuntos.

- ¿Por ejemplo?
- Podemos tomar las clases de equivalencia inducidas por $\approx$.

Definición

La **cardinalidad** de un conjunto A es su clase de equivalencia bajo $\approx$:

$$|A| = [A]_{\approx}$$

Cardinalidad

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Es fácil notar que $A \approx \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Entonces, $|A| = [A]_{\approx} = [\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}]_{\approx}$.
- Pero nosotros le pusimos un nombre al último conjunto...

$$|A| = [6]_{\approx}$$

Formalizaremos esto y simplificaremos la notación.

Outline

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que A es un conjunto **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n = \{0, \ldots, n-1\}$.

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

- Por simplicidad, diremos que $|A| = n$.
- También podremos decir que A tiene n elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

- $|A| = 6$
- A tiene 6 elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Lema

Sean A y B dos conjuntos **finitos** tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ejercicio (propuesta ★)

Demuestre el lema.

Cardinalidad

Lema

Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que $|A| = n$ y que $|B| = m$. Sabemos entonces que $A \approx \{0, \ldots, n-1\}$ y que $B \approx \{0, \ldots, m-1\}$, luego existen funciones biyectivas $f : A \to \{0, \ldots, n-1\}$ y $g : B \to \{0, \ldots, m-1\}$. Sea $h : A \cup B \to \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ n + g(x) & x \in B \end{cases}$$

Primero se debe notar que h está bien definida como función ya que no existe un x que pertenezca simultáneamente a A y B.

Cardinalidad

Continuación:

- Sobreyectividad: Sea $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$, lo demostraremos por casos. Si $k < n$ entonces dado que f es sobreyectiva en $\{0, \dots, n+1\}$ sabemos que existe un $x \in A$ tal que $k = f(x) = h(x)$. Si $n \leq k < n+m$ entonces dado que g es sobreyectiva en $\{0, \dots, m-1\}$ sabemos que existe en $x \in B$ tal que $g(x) = k - n$ y por lo tanto $k = n + g(x) = h(x)$, finalmente h es sobreyectiva en $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$.
- Inyectividad: Otra vez por casos, si $h(x) = h(y) < n$ entonces necesariamente $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$ de donde se concluye que $f(x) = f(y)$ y dado que f es inyectiva obtenemos que $x = y$. Si en cambio $n \leq h(x) = h(y) < n+m$, sabemos que $h(x) = n + g(x) = h(y) = n + g(y)$ de donde se concluye que $g(x) = g(y)$ y dado que g es inyectiva obtenemos que $x = y$, finalmente h es inyectiva.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Esto implica que si A es un conjunto finito, entonces su cardinalidad es **estrictamente menor** que la de su conjunto potencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Demostración:

Por inducción en la cardinalidad de A.

BI: Si $|A| = 0$ entonces $A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \approx \{0\}$ por lo tanto $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$.

HI: Supongamos que para cualquier conjunto A tal que $|A| = n$ se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

TI: Sea A un conjunto tal que $|A| = n + 1$, y sea $B = A - \{a\}$, con a un elemento arbitrario de A. El conjunto B cumple con $|B| = n$, por lo que $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$. ¿Cómo podemos a partir de $\mathcal{P}(B)$ formar $\mathcal{P}(A)$? Si nos damos cuenta en $\mathcal{P}(B)$ están todos los subconjuntos de B, es decir, todos los subconjuntos de A que no contienen al elemento a.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Continuación:
Si llamamos $\mathcal{S}$ al conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \subseteq A \wedge a \in X\}$$

Es decir $\mathcal{S}$ está formado por todos los subconjuntos de A que contienen a a, no es difícil notar que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}(B)$. Ahora, la siguiente función $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{S}$ tal que $f(X) = X \cup \{a\}$, es una función biyectiva de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{S}$, por lo que concluímos que $\mathcal{P}(B) \approx \mathcal{S}$ y por lo tanto $|\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{S}|$. Luego, dado que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{A}$ y usando el lema anterior concluímos que
$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B) \cup A| = |\mathcal{P}(B)| + |A| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(B)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?
- Ya no podemos contar. . .
- . . . pero sí podemos establecer una correspondencia como la que mostramos.
- ¿Cómo? ¡Con funciones!

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Sea $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números naturales pares.
¿Cuál conjunto es más grande, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{P}$?

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$, la cual es claramente biyectiva, y entonces $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:
$f : A \to \mathbb{N}$ con $f(a_i) = i$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

- Piense en un computador.

Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

TI: PD: $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ es enumerable.
Como por HI sabemos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, existe una lista $(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ que contiene a todas las tuplas de $\mathbb{N}^n$ exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ponemos las tuplas de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ en una matriz, la cual recorremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de $\mathbb{N}^n$ más la segunda componente suman k.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

<u>TI:</u> De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \ldots)$$

Concluimos entonces que $\mathbb{N}^n$ es enumerable para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en $\{$ INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ $\}$?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección
(eso puede ser muy difícil!!)

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$, la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \to A$ dada por $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$.
  $g(x) = g(x) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$, y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$.

Outline

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender concepto de cardinalidad
- ☐ Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- ☐ Comprender concepto de numerabilidad
- ☐ Demostrar numerabilidad de conjuntos