PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 6

12 de junio de 2024

1º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Bugedo - N. Alvarado

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 19 de junio a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ dos funciones cualesquiera. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(n) \in \Theta(g)$ entonces $\text{mín}\{f, g\} \in \Theta(\text{máx}\{f, g\})$.

(b) Si $f(n) \in \mathcal{O}(g)$ entonces $f^g \in \mathcal{O}(g^f)$.

Problema 2

Un homomorfismo desde $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función $h : V_1 \to V_2$ tal que si $\{u, v\} \in E_1$, entonces $\{h(u), h(v)\} \in E_2$. Decimos que G_1 es homomorfo a G_2 si existe un homomorfismo desde G_1 a G_2.

(a) Se define el grafo línea de largo n como

$$L_n = \{(i, i+1) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

Demuestre que, para todo grafo $G = (V, E)$, la línea L_n con $n \geq 2$ es homomorfo a G si, y solo si, el conjunto de aristas de G es no vacío, en otras palabras, $E \neq \emptyset$.

(b) Se define el grafo clique de tamaño n como

$$K_n = \{(i, j) \mid 0 \leq i, j \leq n-1 \land i \neq j\}$$

Demuestre que, para todo grafo $G = (V, E)$, el clique K_n es homomorfo a G si, y solo si, G contiene a K_n como subgrafo isomorfo.