Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

10 de abril de 2024

1º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - S. Bugedo - N. Alvarado

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 19 de abril a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

El juego de Sudoku consiste en una matriz de 9×9 cuyas celdas pueden contener un natural de 0 a 8. A su vez, este tablero está dividido en subtableros de 3×3. Decimos que un tablero está completo si

- Cada celda contiene un número asignado
- No hay números repetidos en ninguna fila
- No hay números repetidos en ninguna columna
- No hay números repetidos en ningún subtablero.

A continuación se muestra un ejemplo de tablero parcialmente completado. Observe que los 9 subtableros se delimitan por líneas más gruesas.

	2		5		1		0	
8			2		3			6
	3			6			7	
		1				6		
5	4						1	0
		2				7		
	0			3			8	
2			8		4			7
	1		0		7		6	

Nos interesa diseñar un verificador de tableros de Sudoku basado en lógica de predicados, para lo cual, consideramos los predicados ternarios V, S, M, el predicado binario $\leq$ y la interpretación $\mathcal{I}$ dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &:= \mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \\
\mathcal{I}(V) &:= V(x,y,z) \text{ si y solo si el valor } z \text{ está en la celda } x, y \text{ del tablero} \\
\mathcal{I}(S) &:= S(x,y,z) \text{ si y solo si el valor } z \text{ es la suma de } x \text{ e } y \\
\mathcal{I}(M) &:= M(x,y,z) \text{ si y solo si el valor } z \text{ es la multiplicación de } x \text{ e } y \\
\mathcal{I}(\leq) &:= x \leq y \text{ si y solo si } x \text{ es menor o igual que } y
\end{aligned}$$

además de contar con el predicado binario $=$ que siempre se interpreta como igualdad.

A continuación, debe definir una serie de predicados compuestos y oraciones en lógica de predicados de manera que sean satisfechos por $\mathcal{I}$ en ciertas condiciones para cada inciso. Puede construir los predicados compuestos que estime conveniente para simplicar su desarrollo. Demuestre la correctitud de sus respuestas.

(a) $C(x)$ es un predicado unario satisfecho si y solo si x toma el valor 0.

(b) φ_1 es una oración satisfecha si y solo si toda celda tiene un valor asignado.

(c) φ_2 es satisfecha si y solo si ninguna fila tiene valores repetidos.

(d) φ_3 es satisfecha si y solo si ninguna de las diagonales principales del tablero tiene valores repetidos. *Sugerencia:* puede serle útil una expresión análoga a (a) para el valor 8.

(e) φ_4 es satisfecha si y solo si ningún subtablero de 3×3 tiene valores repetidos. *Sugerencia:* puede serle útil una expresión para el valor 2.

Problema 2

(a) Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles y demuestre su respuesta.

   (i) $\varphi_1 := \forall x \forall y\, \neg(x = y)$

   (ii) $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z\, [\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$

   (iii) $\varphi_3(x) := \forall y\, S(x, y, y) \wedge S(x, x, y)$

(b) Considere los símbolos de predicados P, A, G, S y R unarios y D binario. Demuestre la siguiente consecuencia lógica.

$$\begin{array}{c}
\forall x (P(x) \to A(x)) \\
\forall x \forall y\, [D(x, y) \wedge G(y) \to \neg \exists z (D(x, z) \wedge R(z))] \\
\forall x\, [S(x) \to \neg \exists y (D(x, y) \wedge A(y))] \\
\exists x\, [D(a, x) \wedge (G(x) \vee P(x))] \\
\hline
S(a) \to \neg \exists z (D(a, z) \wedge R(z))
\end{array}$$