Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 10 - Algoritmos y Grafos

7 de junio de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

  - Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
  - Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
  - Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
  - Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
  - Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \rightarrow S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u | (v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

1. Correctitud de algoritmos

1. Escriba un algoritmo iterativo que resuelva el problema del Mínimo Común Múltiplo. Su algoritmo debe recibir como input dos números y devolver como output el número natural que corresponda al mínimo común múltiplo del input.
2. Demuestre que su algoritmo es correcto.

Solución:

1.

Algorithm 1 Mínimo común multiplo

Data: $a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$
Result: $\text{mcm}(a, b)$

```
init_a = a
init_b = b
k = 0
while a ≠ b do
    if a < b then
        a = a + init_a
    end
    else
        b = b + init_b
    end
    k = k + 1
end
return a
```

2. Como invariante del algoritmo elegimos:

$$\frac{a}{init_a} + \frac{b}{init_b} = k + 2$$

Notemos que k representa el número de iteración del while. BI: Para $k = 0$ tenemos que $init_a = a$ y que $init_b = b$, por ende:

$$\frac{a}{init_a} + \frac{b}{init_b} = 2 = k + 2$$

$$\frac{a_n}{init_a} + \frac{b_n}{init_b} = n + 2$$

TI: En la iteración $k = n + 1$ entonces, existen 2 situaciónes, $a_{n+1} = a_n +\ init_a$ o (excluyente) $b_{n+1} = b_n\ init_b$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_{n+1} = a_n +\ init_a$.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{init_a} + \frac{b_{n+1}}{init_b} &= \frac{a_n + init_a}{init_a} + \frac{b_{n+1}}{init_b}\\ &= \frac{a_n}{init_a} + \frac{b_n}{init_b} + 1\\ &= n + 2 + 1\\ &= (n+1) + 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple que es invariante. Ahora, si el algoritmo termina, sabemos que $a = b$. Por lo tanto, como trivialmente $init_a \mid a$ y $init_b \mid b$, significa que esas divisiones deben ser enteros. Pero, como $a = b$, entonces ambos son divisibles por tanto $init_a$ como $init_b$. Es decir, el valor final de a y b es múltiplo de los valores iniciales. Falta demostrar que es el mínimo.

Digamos, por contradicción, que existe un múltiplo de los valores iniciales que es menor que el que retorna nuestro algoritmo. Entonces, si nuestro algoritmo returna un $v = k_a\ init_a = k_b\ init_b$, y existe un $w = j_a\ init_a = j_b init_b$ tal que $w < v$, entonces necesariamente $k_a > j_a \circ k_b > j_b$. Sin pérdida de generalidad, $k_a > j_a$. Sin embargo, nuestro algoritmo necesariamente pasó por algún a tal que $a = j_a\ init_a$ y tuvo que haber existido una primera iteración en la que se llegó a $a = j_a\ init_a$. Por lo tanto, como el algoritmo no terminó en esa iteración, existen dos situaciones: $a > b$ o $b > a$. Si $a > b$, entonces implica que $b < j_b\ init_b$, por lo que se incrementaría b hasta llegar a j_b, lo cual es una contradiccón ya que implica que w se alcanzó en nuestro algoritmo. Si $b > a$, entonces implica que $b > j_b\ init_b$, por lo que nuestro algoritmo tuvo en alguna iteración $b = j_b\ init_b$, lo que lleva de nuevo a la misma situación. Sin embargo, ahora sólo existe el caso de que $b > a$, lo que genera la misma contradicción que antes.

Para demostrar que el algoritmo termina, sabemos que el peor caso es cuando el mínimo común múltiplo es $a \cdot b$, lo que significa que a a debemos sumarle b veces a y a b debemos sumarle a veces b, esto quiere decir que como dentro del loop siempre se van sumando los valores inciales a las variables x e y, en algún momento debemos llegar a que x y y serán igual a $a \cdot b$.

2. Grafos 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo no-dirigido. Una k-coloración de aristas de G es una función $f : E \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

1. Demuestre que, para toda grafo no-dirigido $G = (V, E)$, si f es una k-coloración de aristas de G, entonces k es mayor o igual que el grado máximo de G, esto es, $k \geq \max_{v \in V} \deg(v)$.
2. Demuestre usando inducción que para toda grafo no-dirigido $G = (V, E)$ y para toda k-coloración de aristas f de G, se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $|V|/2$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

Solución:

1. Si f es una k-coloración de aristas de un grafo $G(V, E)$ se busca demostrar que $k \geq \max_{v \in V} \deg(v)$, lo que es equivalente a demostrar que $\forall v \in V. k \geq \deg(v)$.

   Por contradicción suponemos que $\exists v \in V$ tal que se cumple $m = \deg(v) > k$. Entonces definimos las m aristas incidentes a v como $e_1, \ldots e_m$. Luego como $m > k$, es decir contamos con más aristas que colores, por principio del palomar existen los índices $i \neq j$ tales que $f(e_i) = f(e_j)$, vale decir, dos aristas que comparten un vértice tienen el mismo color. Esto presenta una contradicción sobre f como una k-coloración válida y así queda demostrado.

2. Se busca demostrar por inducción que dada la k-coloración f, para todo color se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

   De formas análogas es posible hacer inducción sobre la cantidad de vértices o aristas, a continuación se plantea según cantidad de vértices buscando demostrar la proposición

$$P(n) := \forall G(V, E) \text{ tal que } |V| = n. \forall f \text{ se cumple } |\{e \in E \mid f(e) = C\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

- Caso base

Dado un grafo $G = (\{v\}, \emptyset)$ de modo que $|V| = 1$ entonces una k-coloración de aristas $f : \emptyset \to \{1, \ldots, k\}$, por ende

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = 0 \leq \frac{1}{2}$$

- Caso inductivo

Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y una k-coloración de aristas $f : E \to \{1, \ldots, k\}$. Luego se tiene un vértice v cualquiera y $e_1, \ldots e_m$ sus aristas incidentes y dos casos:

1) Si $\forall i \leq m. f(e_i) \neq c$, entonces se define

$$G - v = (V', E') = (V - v, E - \{e_1, \ldots e_m\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Además por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 1}{2}$$

Ahora, dado que el color c no se ocupa en ninguna de las aristas $e_1, \ldots, e_m$ se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

2) Si $\exists i \leq m$ tal que $f(e_i) = c$, entonces se define la arista $e_c = \{u, v\}$ tal que $f(e_c) = c$. Luego al considerar el grafo

$$G - e_c = (V', E') = (V \setminus e_c, \{e' \in E \mid e' \cap e_c = \emptyset\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Ahora, por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 2}{2}$$

Finalmente, dado que todas las aristas $e' \neq e_c$ tales que $e' \cap e_c \neq \emptyset$ (esto es, coinciden en un vértice con e_c) no son coloreadas con el color c se tiene que

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| + 1 \leq \frac{|V| - 2}{2} + 1 = \frac{|V|}{2}$$

3. Grafos 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el ancho de G, denotado como $A(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices.

1. Demuestre que si $A(G) \geq 4$ entonces $A(\bar{G}) \leq 2$.
2. Demuestre que si G tiene un vértice de corte y $A(G) = 2$, entonces $\bar{G}$ tiene un vértice sin vecinos.

Solución

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $A(G) \geq 4$. Denotaremos por $d(x, y)$ a la distancia entre los vértices x e y en G y $\bar{d}(x, y)$ a la distancia entre x e y en $\bar{G}$. Sean u, v los vértices de inicio y fin del camino que representa al ancho de G. Demostraremos que para todo par de vértices $x, y \in V$ se tiene que $\bar{d}(x, y) \leq 2$. Consideremos $x, y \in V$ dos vértices cualquiera. En primer lugar notemos que ni x ni y pueden ser adyacentes con u y v a la vez, ya que formarían un camino de largo 2 (por ejemplo $u - x - v$) y disminuirían el ancho de G. Ahora tenemos los siguientes casos:

   - $\{x, y\} \notin E$: Por definición de complemento $\{x, y\} \in \bar{E}$ y por lo tanto $\bar{d}(x, y) = 1$.
   - $\{x, y\} \in E$: Dado que existe una arista $x - y$, no puede darse el caso en que x e y sean adyacentes a u y a v por separado. Esto porque se generaría un ciclo y por ende un camino $u - x - y - v$ de largo 3 , con lo que disminuiría el ancho de G. Ahora tenemos 2 casos:
     - u y v no son adyacentes ni a x ni a y en G : Dado que $\{x, u\}, \{y, u\} \notin E$, en $\bar{G}$ obtenemos el camino $x - u - y$, por ende $\bar{d}(x, y) = 2$.
     - Solo u es adyacente a x o y en G. En este caso $\{v, x\}, \{v, y\} \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - v - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 .
     - Solo v es adyacente a x o y en G. En este caso $\{u, x\}, \{u, y\} \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - u - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 .

   Como no tenemos más casos posibles, y cada caso demostramos que $\bar{d}(x, y) \leq 2$, concluimos que $A(\bar{G}) \leq 2$.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo (Si el grafo no es conexo la demostración aplicará para cada una de sus componentes conexas) con un vértice de corte v y $A(G) = 2$.

   Como v es de corte, si lo removemos aumenta la cantidad de componentes conexas, y por ende el grado de v es al menos 2. Sean u, w dos vértices adyacentes a v en G, y sea C la componente conexa a la que pertenece u. Demostraremos que para todo vértice x de C es adyacente a v, o en otras palabras, demostraremos que $d(v, x) = 1$.

   Por contradicción, suponemos que $d(v, x) = k$ con $k \geq 2$. Luego, debe existir un camino

$(x, c_1, \ldots, c_{k-1}, v)$ de largo k que sólo utiliza sólo aristas de C. Además, como v y w son adyacentes, también tendremos el camino $(x, c_1, \ldots, c_n, v, w)$ de largo $k+1$. Notemos que este camino es el menor camino posible entre x y w, ya que no pueden existir otros caminos que no pasen por v (porque dejaría de ser de corte). Esto contradice el hecho de que $A(G) = 2$ y por ende $d(v, x) = 1$.

Como C es arbitrario, podemos aplicar el mismo argumento para todas las componentes conexas generadas al remover v y concluir que G cumple $\forall x \in V((v, x) \in E)$. Finalmente, por definición de complemento, obtenemos que

$$(\forall x \in V)(\{v, x\} \in E) \text{ si y sólo si } (\forall x \in V)(\{v, x\} \notin \bar{E})$$

Es decir, v es un vértice sin vecinos en $\bar{G}$.