

Relaciones

Clase 12

IIC 1253

Prof. Sebastián Buggedo

Outline

Obertura

Producto cartesiano

Relaciones

Epílogo

Operaciones

Sean A y B conjuntos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o B .

Definición

La **intersección** de A y B se define por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A y en B .

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B .

Definición

El **conjunto potencia** de A se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A .

Observaciones

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

¿Cómo podemos llamar al operador δ ?

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \delta(0) = \delta(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \delta(1) = \delta(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \delta(2) = \delta(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

\vdots

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, \dots , $n = \{0, \dots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de \mathbb{N} :

Definición

El conjunto de los **números naturales**, denotado por \mathbb{N} , es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\emptyset \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a \emptyset , 1 a $\delta(\emptyset)$, y así sucesivamente.

Solo con \emptyset y δ podemos definir todo \mathbb{N} !!!

Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

La **suma** de dos números naturales cumple

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

$$\begin{aligned} \text{sum}(3, 4) &= \text{sum}(3, \delta(3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, 3)) \\ &= \delta(\text{sum}(3, \delta(2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, 2))) \\ &= \delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 1)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, \delta(0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\text{sum}(3, 0))))) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\ &= \delta(\delta(\delta(4))) \\ &= \delta(\delta(5)) \\ &= \delta(6) \\ &= 7 \end{aligned}$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio (propuesto ★)

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $\text{mult}(3, 2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Multiplicación de dos números naturales

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$\begin{aligned} mult(3, 2) &= mult(3, \delta(1)) \\ &= sum(3, mult(3, 1)) \\ &= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\ &= sum(3, sum(3, mult(3, 0))) \\ &= sum(3, sum(3, 0)) \\ &= sum(3, 3) \\ &\vdots \\ &= 6 \end{aligned}$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c :

BI: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), 0) = \text{sum}(a, b) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, 0))$.

HI: Supongamos que se cumple que
 $\text{sum}(\text{sum}(a, b), c) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, c))$ para un natural c .

TI: Por demostrar: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c)))$.

Desarrollamos el lado izquierdo: $\text{sum}(\text{sum}(a, b), \delta(c)) =$

$$\delta(\text{sum}(\text{sum}(a, b), c)) \stackrel{HI}{=} \delta(\text{sum}(a, \text{sum}(b, c))) =$$

$$\text{sum}(a, \delta(\text{sum}(b, c))) = \text{sum}(a, \text{sum}(b, \delta(c)))$$



Leyes

Consideraremos un conjunto universal \mathcal{U} fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, \mathbb{N}).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a \mathcal{U}) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de \mathcal{U}), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Leyes

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Leyes

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}.$

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de \mathcal{S} ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de \mathcal{S} .

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\cap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de \mathcal{S} ; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de \mathcal{S} .

Operaciones generalizadas

Sea \mathcal{S} un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n, \dots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Outline

Obertura

Producto cartesiano

Relaciones

Epílogo

Introducción

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de distintos dominios.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Dana	Scully	Agente del FBI	ISTJ
339	Ludwig	Wittgenstein	Filósofo	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ellen	Ripley	Suboficial de vuelo	INTJ

¿Qué le falta a los conjuntos para poder definir tablas?

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde \mathcal{U} es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Definiciones básicas

Demostración

(\Rightarrow) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

1. $a = b$: En este caso $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\{\{a\}, \{a\}\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\{\{a\}\}$. Luego, tenemos que $\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Definiciones básicas

Demostración

(\Rightarrow)

2. $a \neq b$: Como $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$, y luego por axioma de extensión $\{a, b\} = \{a, d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Definiciones básicas

Demostración

(\Leftarrow) Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. □

Definiciones básicas

Observación (propuesta ★)

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a, b) = \{a, \{b\}\}$$

Esta no es una buena definición. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (\{x\}, y) = \{\{x\}, \{y\}\} \\ (c, d) &= (\{y\}, x) = \{\{y\}, \{x\}\}\end{aligned}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Definiciones básicas

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuádruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una **n -tupla** como:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Definiciones básicas

Definición

Dados dos conjuntos A y B , definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos A_1, \dots, A_n , definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejemplo

Podemos definir producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

$$A_1 \times \dots \times A_n = (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Outline

Obertura

Producto cartesiano

Relaciones

Epílogo

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos A_1, \dots, A_n , diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_N = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{sum}(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_N \qquad (0, 0, 1) \notin +_N$$

Recuerde que *sum* es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

Definiciones básicas

La **aridad** de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación **n -aria**.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Dana	Scully	Agente del FBI	ISTJ
339	Ludwig	Wittgenstein	Filósofo	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ellen	Ripley	Suboficial de vuelo	INTJ

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B , diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B .

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B ?

Relaciones binarias

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A , diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de “potencia”:

$$A \times \underbrace{(n-2 \text{ veces})}_{\vdots} \times A = A^n$$

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$< \subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in < \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1, 3) \in < \quad (10, 4) \notin < \quad (7, 7) \notin <$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: ¿ $(3, 17) \in <$?

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a, b) \in R$
- $R(a, b)$
- aRb
 - Si no están relacionados, podemos escribir $a \not R b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \not< 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación **infija**.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo $=$ ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo $=$ usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación *divide*, denotada por $|$, sobre los naturales sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a :

$a|b$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $b = ka$.

$$3|9$$

$$18|72$$

$$7 \nmid 9$$

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación *equivalencia módulo n* , denotada por \equiv_n , sobre los naturales, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $|a - b|$ es múltiplo de n :

$$a \equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a - b| = kn.$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \quad 8 \equiv_7 1 \quad 19 \not\equiv_7 4$$

De ahora en adelante trabajaremos con relaciones binarias sobre un conjunto, a las que nos referiremos simplemente como relaciones.

Outline

Obertura

Producto cartesiano

Relaciones

Epílogo

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos