

# Teorema de Cantor

Clase 17

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

# Outline

**Cardinalidad**

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

Epílogo

# Cardinalidad

## Definición

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera. Diremos que  $A$  es **equinumeroso** con  $B$  (o que  $A$  tiene el mismo tamaño que  $B$ ) si existe una función biyectiva  $f : A \rightarrow B$ . Lo denotamos como

$$A \approx B$$

$A$  y  $B$  tienen el mismo tamaño si los elementos de  $A$  se pueden poner en correspondencia con los de  $B$ .

# Cardinalidad

## Definición

La **cardinalidad** de un conjunto  $A$  es su clase de equivalencia bajo  $\approx$ :

$$|A| = [A]_{\approx}$$

# Cardinalidad de conjuntos finitos

## Definición

Diremos que  $A$  es un conjunto **finito** si  $A \approx n$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Es decir, si existe una función biyectiva  $f : A \rightarrow n = \{0, \dots, n-1\}$ .

En tal caso, se tiene que  $|A| = [n]_{\approx}$ .

- Por simplicidad, diremos que  $|A| = n$ .
- También podremos decir que  $A$  tiene  $n$  elementos.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Un conjunto  $A$  se dice **enumerable** si  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{Z}$  es enumerable.

Podemos tomar  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Un conjunto  $A$  es **enumerable** si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$$

tal que *todos* los elementos de  $A$  aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:

$$f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ con } f(a_i) = i$$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$  es enumerable.
- $\mathbb{Q}$  es enumerable.

## Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?



# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es enumerable.
- $\mathbb{Q}$  es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable.

Por inducción sobre  $n$ :

**BI:** La base es  $n = 2$ , demostrado anteriormente.

**HI:** Supongamos que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable, con  $n \geq 2$ .

**TI:** PD:  $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$  es enumerable.

Como por HI sabemos que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable, existe una lista  $(a_0, a_1, \dots, a_i, \dots)$  que contiene a todas las tuplas de  $\mathbb{N}^n$  exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , ponemos las tuplas de  $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$  en una matriz, la cual recorreremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de  $\mathbb{N}^n$  más la segunda componente suman  $k$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable.

**TI:** De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \dots)$$

Concluimos entonces que  $\mathbb{N}^n$  es enumerable para todo  $n \in \mathbb{N}$ .



## Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$  si y sólo si existen funciones inyectivas  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ .

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección  
(eso puede ser muy difícil!!)

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

Demuestre que  $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  es enumerable.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

Demuestre que  $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  es enumerable.

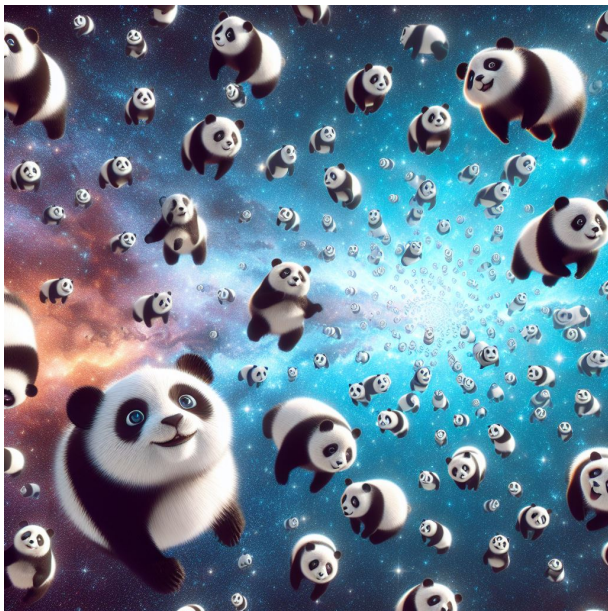
Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(x) = x$ , la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \rightarrow A$  dada por  $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$ .  
 $g(x) = g(y) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$ , y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que  $|A| = |\mathbb{N}|$ .

# Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor





# Outline

Cardinalidad

**Conjuntos no enumerables**

Teorema de Cantor

Epílogo

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  es infinito pero no enumerable.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  es infinito pero no enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Teorema

El intervalo real  $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  es infinito pero no enumerable.

Demostración. Por contradicción, supongamos que  $(0, 1)$  es enumerable.

Entonces existe una lista infinita de los reales en  $(0, 1)$ :

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$$

donde cada real en  $(0, 1)$  aparece exactamente una vez.

Notemos que cada  $r_i$  es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0}d_{i1}d_{i2}d_{i3}\dots, \text{ con } d_{ij} \in \{0, \dots, 9\}$$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
$r_0$	0,	$d_{00}$	$d_{01}$	$d_{02}$	$d_{03}$	$d_{04}$	$\cdots$
$r_1$	0,	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$\cdots$
$r_2$	0,	$d_{20}$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$\cdots$
$r_3$	0,	$d_{30}$	$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34}$	$\cdots$
$r_4$	0,	$d_{40}$	$d_{41}$	$d_{42}$	$d_{43}$	$d_{44}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal					
$r_0$	0,	$d_{00}$	$d_{01}$	$d_{02}$	$d_{03}$	$d_{04} \dots$
$r_1$	0,	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14} \dots$
$r_2$	0,	$d_{20}$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24} \dots$
$r_3$	0,	$d_{30}$	$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34} \dots$
$r_4$	0,	$d_{40}$	$d_{41}$	$d_{42}$	$d_{43}$	$d_{44} \dots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para cada  $i \geq 0$ , definimos  $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real  $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Para cada  $i \geq 0$ , definimos:  $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real  $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$

¿Aparece  $r$  en la lista?

- ¿ $r = r_0$ ? No, porque difieren en el primer dígito decimal.
- ¿ $r = r_1$ ? No, porque difieren en el segundo dígito decimal.
- ...
- ¿ $r = r_i$ ? No, porque el  $i$ -ésimo dígito de  $r$  es distinto al de  $r_i$ :

$$d_i \neq d_{ii}$$

Por lo tanto,  $r$  no aparece en la lista  $\rightarrow \leftarrow$

Como  $(0,1)$  no puede ponerse en una lista, no es enumerable.



# Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?



# Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?
- Es clave para establecer muchos resultados en matemáticas y computación.

Usando estas ideas se puede demostrar que un computador  
no puede resolver todo problema

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Qué otros conjuntos tienen la misma cardinalidad que  $(0, 1)$ ?

Teorema

$$(0, 1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

# Outline

Cardinalidad

Conjuntos no enumerables

**Teorema de Cantor**

Epílogo

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en  $\mathbb{N}$  o en  $\mathbb{R}$ ?

## Definición

Dados conjuntos  $A$  y  $B$ , diremos que  $A \leq B$  ( $A$  **no es más grande** que  $B$ ) si existe una función inyectiva  $f : A \rightarrow B$ .

¿Es  $\leq$  una relación de orden?

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en  $\mathbb{N}$  o en  $\mathbb{R}$ ?

## Definición

Dados conjuntos  $A$  y  $B$ , diremos que  $A \leq B$  ( $A$  **no es más grande** que  $B$ ) si existe una función inyectiva  $f : A \rightarrow B$ .

¿Es  $\leq$  una relación de orden?

Si  $A \leq B$ , diremos que  $|A| \leq |B|$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Dados conjuntos  $A$  y  $B$ , diremos que  $A < B$  ( $A$  es **menos numeroso** que  $B$ ) si  $A \leq B$  pero  $A \not\approx B$ .

¿Cómo se define esta noción usando funciones?

- Existe función inyectiva  $f : A \rightarrow B$ ...
- ...pero no existe función biyectiva  $g : A \rightarrow B$ .

Si  $A < B$ , diremos que  $|A| < |B|$ .

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

$\mathbb{N}$  es menos numeroso que  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto decimos que  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ .

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

$\mathbb{N}$  es menos numeroso que  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto decimos que  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ .

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

## Corolario

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$



# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Ejemplo

$\mathbb{N}$  es menos numeroso que  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto decimos que  $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ .

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

## Corolario

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

Demostramos algo parecido para el caso finito...  
veremos que aplica para **todo conjunto**

# Cardinalidad de $A$ vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto  $A$  (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

$A$  es menos numeroso que su conjunto potencia ( $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ).

# Cardinalidad de $A$ vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto  $A$  (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

$A$  es menos numeroso que su conjunto potencia ( $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ).

¡Podemos repetir este proceso *ad eternum*!

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))| < \dots$$

# Cardinalidad de $A$ vs $\mathcal{P}(A)$

## Teorema (Cantor)

$A$  es menos numeroso que su conjunto potencia ( $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ).

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que  $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ . Basta tomar

$$f : A \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

# Cardinalidad de $A$ vs $\mathcal{P}(A)$

## Teorema (Cantor)

$A$  es menos numeroso que su conjunto potencia ( $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ ).

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que  $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ . Basta tomar

$$f : A \rightarrow \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Ahora mostraremos que no existe una función biyectiva entre  $A$  y  $\mathcal{P}(A)$ .

Por contradicción, supongamos que sí existe una biyección  $f$  entre  $A$  y  $\mathcal{P}(A)$ .

# Diagonalización entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

# Diagonalización entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que  $\bar{D} \subseteq A$ , y por lo tanto  $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$ . Luego, como  $f$  es biyectiva, debe existir  $x \in A$  tal que  $f(x) = \bar{D}$ .

# Diagonalización entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que  $\bar{D} \subseteq A$ , y por lo tanto  $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$ . Luego, como  $f$  es biyectiva, debe existir  $x \in A$  tal que  $f(x) = \bar{D}$ . Considere ahora los siguientes casos:

- Si  $x \in f(x)$ , entonces  $x \in \bar{D}$  (porque  $f(x) = \bar{D}$ ), pero por definición de  $\bar{D}$ ,  $x \notin f(x)$ .
- Si  $x \notin f(x)$ , entonces  $x \notin \bar{D}$  (porque  $f(x) = \bar{D}$ ), pero por definición de  $\bar{D}$ ,  $x \in f(x)$ .



# Diagonalización entre $A$ y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que  $\bar{D} \subseteq A$ , y por lo tanto  $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$ . Luego, como  $f$  es biyectiva, debe existir  $x \in A$  tal que  $f(x) = \bar{D}$ . Considere ahora los siguientes casos:

- Si  $x \in f(x)$ , entonces  $x \in \bar{D}$  (porque  $f(x) = \bar{D}$ ), pero por definición de  $\bar{D}$ ,  $x \notin f(x)$ .
- Si  $x \notin f(x)$ , entonces  $x \notin \bar{D}$  (porque  $f(x) = \bar{D}$ ), pero por definición de  $\bar{D}$ ,  $x \in f(x)$ .

Luego,  $x \in f(x)$  si y sólo si  $x \notin f(x)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una biyección entre  $A$  y  $\mathcal{P}(A)$ . □

# Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen?

# Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen?
- ¿Hay algún infinito entre  $|\mathbb{N}|$  y  $|\mathbb{R}|$ ?

Infinitos!

# Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen?
- ¿Hay algún infinito entre  $|\mathbb{N}|$  y  $|\mathbb{R}|$ ?

Infinitos!

???

# Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen?
- ¿Hay algún infinito entre  $|\mathbb{N}|$  y  $|\mathbb{R}|$ ?

Infinitos!

???

Hipótesis del continuo

No existe conjunto  $A$  tal que  $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

¿Por qué se llama hipótesis?

# Reflexiones finales

- ¿Qué implica todo lo anterior para la computación?
  - ¿Qué cosas es capaz de hacer un computador?
  - ¿Qué cosas **no** es capaz de hacer?
  - ¿Existen problemas computacionales para los cuales no existan algoritmos que los resuelvan?
  - Respuesta: IIC2213 :)

# Outline

Cardinalidad

Conjuntos no enumerables

Teorema de Cantor

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- Comprender la técnica de diagonalización
- Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- Demostrar el teorema de Cantor