Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4 - Repaso I1

12 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

Resumen

1. Lógica de Predicados - I1 2023-2

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente.}$$

Solución

Demostraremos cada dirección de la doble implicancia por separado:

1. $\rightarrow$: Por contrapositivo, supongamso que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Esto significa que existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Por definición de satisfacibilidad, se tiene que $\mathcal{I} \models \Sigma \wedge \mathcal{I} \models \neg\varphi$. Luego, $\mathcal{I} \models \Sigma \wedge \mathcal{I} \not\models \varphi$, con lo que concluímos que $\Sigma \not\models \varphi$, que es lo que queríamos demostrar.

2. $\leftarrow$: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\mathcal{I} \models \Sigma$, necesariamente $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, y luego $\mathcal{I} \models \varphi$. Concluimos entonces que $\Sigma \models \varphi$.

2. Lógica de Predicados - I1 2018-2

Sea $R(\cdot, \cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x \exists y (R(x,y)),\\ &\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z))\}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x (R(x,x))$. Demuestre que $\Sigma \vDash \varphi$.

Solución

Se tiene que $\Sigma \models \varphi$ si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Demostraremos la inconsistencia de este último conjunto por resolución.
En primer lugar, es necesario pasar las fórmulas a CNF para trabajar con resolución. Sea $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists y (R(x,y)) && \in \Sigma', \text{ ya está en CNF}\\
&\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)) && \in \Sigma'\\
\equiv&\forall x \forall y (\neg R(x,y) \lor R(y,x)) && \text{está en CNF}\\
&\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z)) && \in \Sigma'\\
\equiv&\forall x \forall y \forall z ((\neg(R(x,y) \land R(y,z)) \lor R(x,z)) &&\\
\equiv&\forall x \forall y \forall z ((\neg R(x,y) \lor \neg R(y,z) \lor R(x,z)) && \text{está en CNF}\\
&\neg \forall x (R(x,x)) && \in \Sigma'\\
\equiv&\exists x \neg (R(x,x)) &&\\
\equiv&\exists x (\neg R(x,x)) && \text{está en CNF}
\end{aligned}$$

Al aplicar resolución sobre un conjunto de fórmulas en lógica de predicados hay que ser muy cuidadoso. En el proceso se instancian las variables de los cuantificadores gracias a especificación existencial y universal. En la especificación existencial solo se pueden instanciar variables que no han sido utilizadas, mientras que en la especificación universal, como la fórmula respectiva se cumple "para toda" instancia de la variable, se pueden elegir variables ya instanciadas anteriormente, ya sea por especificación existencial o universal. Por esto, en general, es necesario aplicar todas las especificaciones existenciales al inicio de la demostración por resolución, para después tener la libertad de instanciar las variables de las especificaciones universales de manera conveniente y válida.

Por resolución, se tiene que:

(1)$\exists x(\neg R(x,x))$	$\in \Sigma'$
(2)$\neg R(a,a)$	especificación existencial en (1)
(3)$\forall x \exists y(R(x,y))$	$\in \Sigma'$
(4)$R(a,b)$	especificación universal y existencial en (3)
(5)$\forall x \forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$	$\in \Sigma'$
(6)$\neg R(a,b) \vee R(b,a)$	especificación universal doble en (5)
(7)$R(b,a)$	resolución de (4) y (6)
(8)$\forall x \forall y \forall z(\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z))$	$\in \Sigma'$
(9)$\neg R(a,b) \vee \neg R(b,a) \vee R(a,a)$	especificación universal triple en (8)
(10)$\neg R(b,a) \vee R(a,a)$	resolución de (4) y (9)
(11)$R(a,a)$	resolución de (7) y (10)
(12)$\square$	resolución de (2) y (11)

Finalmente, por resolución concluímos que $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, y por teorema, que $\Sigma \models \varphi$.

3. Inducción - I2 2023-1

Para un conjunto finito $D = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que n es impar y $a_1 < ... < a_n$ se define median(D) como la mediana del conjunto D tal que: median(D) $= a_{\frac{n+1}{2}}$. Por ejemplo, si D = {1, 4, 8, 11, 15} entonces median(D) = 8. Además, un intervalo de naturales I = [a, b] es el conjunto de naturales consecutivos entre a y b, incluyéndolos. Por ejemplo, [3, 6] = {3, 4, 5, 6}. Demuestre usando inducción fuerte que para todo conjunto finito D y para todo intervalo de naturales I, si I contiene más de la mitad de los elementos de D, entonces la mediana de D está en el intervalo I. Formalmente, demuestre que si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2}$, entonces median(D) $\in$ I.

Solución

Tenemos que:

$$D = \{a_1, ..., a_n\}$$
$$\text{n es impar}$$
$$a_1 < a_2 < ... < a_n$$
$$\text{median(D)} = a_{\frac{n+1}{2}}$$

Sea I un intervalo en $\mathbb{N}$

PD: Si $|I \cap D| > \frac{|D|}{2} \rightarrow$ median(D)$\in I$
La demostración de esta pregunta se hace con inducción fuerte.

$$P(n) : \text{Para } |D| = n \text{ se tiene que } \forall I.|I \cap D| > \tfrac{|D|}{2} \rightarrow \text{median(D)} \in I$$

Caso base:

$$\begin{gathered} |D| = 1 \\ \text{Si } |I \cap D| > \tfrac{|D|}{2} \text{ entonces tenemos que:} \\ |I \cap D| = 1 \\ D \subseteq I \\ \text{median}(D) = a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 \in I \end{gathered}$$

Caso inductivo: Suponemos que $\forall D$ tal que $|D| < n$ se cumple $P(|D|)$.
Sea D cualquiera tal que $|D| = n$, tenemos los siguientes casos:

1) $a_1 \in I \wedge a_n \in I$

   Es fácil notar que $D \subseteq I$, por lo que median$(D) \in I$ gracias a que todos los elementos de D están contenidos en I.

2) $a_1 \in I \wedge a_n \notin I$

   Como tenemos que $|I \cap D| > \frac{|D|}{2} \wedge a_1 \in I$, debido a que I tiene números consecutivos, se tiene que la intersección entre D e I es, por lo menos, la siguiente:

   $$a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n+1}{2}} \in I$$

   Por lo que median$(D) \in I$.

3) $a_1 \notin I \wedge a_n \in I$

   Análogo al anterior, comenzando desde el final de D.

4) $a_1 \notin I \wedge a_n \notin I$

   Sea $D' = \{a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$
   $|I \cap D'| = |I \cap D| > \frac{|D|}{2} > \frac{|D'|}{2}$
   Por hipótesis inductiva tenemos que median$(D') \in I$. Como se eliminaron a_1 y a_n de D para obtener D', median(D') = median(D), por lo que median$(D) \in I$

4. Lógica Proposicional - I1 2023-1

Para una fórmula proposicional α con variables proposicionales $\{p_1, \ldots, p_n\}$ se define el conjunto:

$$\text{valuaciones}(\alpha) = \{\vec{v} \mid \vec{v}(\alpha) = 1\}$$

En otras palabras, valuaciones(α) es el conjunto de todas las valuaciones que satisfacen a α.

Dadas α_1 y α_2 dos fórmulas en lógica proposicional, decimos que α_1 es #-equivalente a α_2 si se cumple que el número de valuaciones que satisfacen a α_1 es igual al número de valuaciones que satisfacen a α_2. Es decir $|\text{valuaciones}(\alpha_1)| = |\text{valuaciones}(\alpha_2)|$. Si α_1 y α_2 son #-equivalentes, escribiremos $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_2$.

a. Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ una secuencia de fórmulas proposicionales tal que $\alpha_i \vDash \alpha_{i+1}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Demuestre que si $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_n$, entonces $\alpha_i \equiv \alpha_j$, para todo $i \neq j$.

Solución

Como sabemos que $\alpha_i \vDash \alpha_{i+1} \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, por definición de consecuencia lógica se tiene que todas aquellas valuaciones que satisfacen a α_i necesariamente satisfacen a α_{i+1}, entonces se tiene que $|\text{valuaciones}(\alpha_i)| \leq |\text{valuaciones}(\alpha_{i+1})|$.

Luego, por hipótesis tenemos que,

$$|\text{valuaciones}(\alpha_1)| \leq |\text{valuaciones}(\alpha_2)| \leq \cdots \leq |\text{valuaciones}(\alpha_n)| \tag{1}$$

Además como $\alpha_1 \equiv_{\#} \alpha_n$, se tiene que

$$|\text{valuaciones}(\alpha_1)| = |\text{valuaciones}(\alpha_n)|$$

pues todas aquellas valuaciones que satisfacen a α_1 son las mismas que satisfacen a α_n. Por lo cual la desigualdad inicial **??** queda como,

$$|\text{valuaciones}(\alpha_1)| = |\text{valuaciones}(\alpha_2)| = \cdots = |\text{valuaciones}(\alpha_n)|$$

Luego, como $|\text{valuaciones}(\alpha_i)| = |\text{valuaciones}(\alpha_{i+1})|$ y $\alpha_i \vDash \alpha_{i+1}$, entonces necesariamente $\text{valuaciones}(\alpha_i) = \text{valuaciones}(\alpha_{i+1})$ lo que es equivalente a decir que

$$\alpha_i \equiv \alpha_{i+1}$$

Por lo cual de manera generalizada se obtiene que

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \cdots \equiv \alpha_n$$

Obteniendo así que

$$\alpha_i \equiv \alpha_j \forall i \neq j$$

b. Demuestre que $\equiv_{\#}$ no cumple con el teorema de composición. En otras palabras, que no cumple que para todo par de fórmulas $\alpha_1(p_1, \ldots, p_n)$ y $\alpha_2(p_1, \ldots, p_n)$, si $\alpha_1(p_1, \ldots, p_n) \equiv_{\#} \alpha_2(p_1, \ldots, p_n)$, entonces $\alpha_1(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv_{\#} \alpha_2(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ para $\beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas cualquiera.