Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Repaso I1

15 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

1. Inducción Estructural

Sea S el conjunto de palabras formadas por a's y b's recursivamente de la siguiente manera:

1. $a \in S, b \in S$
2. Si $\mu \in S$ y $\nu \in S$, entonces $\mu\nu \in S$.
3. Solo los elementos generados mediante las reglas 1 y 2 pertenecen a S.

También se define la función reverso $R : S \longrightarrow S$ de la siguiente manera:

1. $R(a) = a, R(b) = b$.
2. Si $\mu \in S$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$, y $R(b\mu) = R(\mu)b$.

a) Demuestre que para todo par de palabras $\mu, \nu \in S$ se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$

b) Demuestre que para toda palabra $\mu \in S$ se cumple que

$$R(R(\mu)) = \mu$$

Solución
a)
BI: Con $\mu = a$ y $\nu \in S$, se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(a\nu) = R(\nu)a = R(\nu)R(a) = R(\nu)R(\mu)$$

El caso de $\mu = b$ es análogo. Luego, para todo $\nu \in S$ se cumple el caso base.

HI: Sean $\mu, \nu \in S$. Supongamos que para todo $\xi \in S$ se cumple que $R(\mu\xi) = R(\xi)R(\mu)$, y lo mismo para ν, es decir, que $R(\nu\xi) = R(\xi)R(\mu)$

TI: PD: Para todo $\xi \in S$ se cumple que $R(\mu\nu\xi) = R(\xi)R(\mu\nu)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} R(\mu\nu\xi) &= R(\mu(\nu\xi)) & \\ &= R(\nu\xi)R(\mu) & \text{por HI} \\ &= R(\xi)R(\nu)R(\mu) & \text{por HI} \\ &= R(\xi)(R(\nu)R(\mu)) & \\ &= R(\xi)R(\mu\nu) & \text{por HI} \end{aligned}$$

Luego, para todo $\mu, \nu \in S, R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$.

b)
BI: Con $\mu = a$, la propiedad se cumple trivialmente. Lo mismo para $\mu = b$.

HI: Supongamos que para $\mu, \nu \in S$ se tiene que $R(R(\mu)) = \mu$ y $R(R(\nu)) = \nu$.

TI: PD: $R(R(\mu\nu)) = \mu\nu$. Se tiene que

$$\begin{aligned} R(R(\mu\nu)) &= R(R(\nu)R(\mu)) & \text{demostrado en (a)} \\ R(R(\mu\nu)) &= R(R(\mu))R(R(\nu)) & \text{demostrado en (a)} \\ R(R(\mu\nu)) &= \mu\nu & \text{HI} \end{aligned}$$

Concluímos que para todo $\mu \in S$ se tiene que $R(R(\mu)) = \mu$.

2. Lógica proposicional

Demuestre que el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.

Solución
Consideremos el conjunto de todas las fórmulas construidas con la variable proposicional p. Dentro de este conjunto está, por ejemplo, la fórmula $p \wedge \neg p$, que es una contradicción. Demostraremos que, usando solo los conectivos de $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, no se puede obtener ninguna fórmula equivalente a $p \wedge \neg p$, o en otras palabras, que no se puede expresar la contradicción, y con ello concluiremos que el conjunto no es funcionalmente completo.

Demostraremos que todas las fórmulas que se pueden construir en base a la variable proposicional p con los conectivos de C son equivalentes a p o son tautología. Lo haremos por inducción:

BI: Para $\varphi = p$, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas que solo usan conectivos de C, su única variable proposicional es p, y cumplen la propiedad, es decir, que o son equivalentes a p o son tautología.

TI: PD: $\theta = \varphi \circ \psi$, con $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ es tal que $\theta \equiv p \vee \theta \equiv \top$. Hay 4 casos:

1. $\theta = \varphi \wedge \psi$.

   a) Si $\varphi \equiv \psi \equiv \top$, entonces $\theta \equiv \top$.

   b) Si al menos una de ellas es equivalente a p, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

2. *a*) $\theta = \varphi \vee \psi$. Si al menos una de φ, ψ es equivalente a $\top$, entonces $\theta \equiv \top$.

   b) Si ambas son equivalentes a p, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

3. $\theta = \varphi \rightarrow \psi$.

   a) Si $\psi \equiv \top$, entonces $\theta \equiv \top$.

   b) Si $\varphi \equiv \psi \equiv p$, entonces $\theta \equiv p$.

   c) Si $\varphi \equiv \top$ y $\psi \equiv p$, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

4. $\theta = \varphi \rightarrow \psi$

   a) Si una de φ, ψ es equivalente a $\top$ y la otra es equivalente a p, entonces $\theta \equiv p$.

   b) En otro caso, $\theta \equiv \top$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

Como en todo caso de construcción inductiva se cumple la propiedad, concluímos que toda fórmula construida solo con conectivos de C y en base solo a la variable proposicional p es equivalente a p o es tautología, por lo que ninguna es una contradicción. Con ello, concluímos que la constradicción no se puede expresar, por lo que el conjunto C no es funcionalmente completo.

3. Modelamiento de Lógica de Predicados

Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(\text{dom}) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(=) &:= n = m \text{ si y solo si } n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}(\leq) &:= n \leq m \text{ si y solo si } n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}(P) &:= P(n) \text{ si y solo si } n \text{ es primo}
\end{aligned}
$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

"Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo"

Solución

Considere los siguientes predicados:

- $Entre(x, y, z) := x \leq y \leq z \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(y = z)$ (y está entre x y z).
- $S(x, y) := x \leq y \wedge \neg(x = y) \wedge (\neg\exists z.Entre(x, z, y))$ (y es sucesor de x).
- $0(x) := \forall y.(x \leq y)$ (x es 0).
- $1(x) := \exists y.(0(y) \wedge S(y, x))$ (x es 1).
- $2(x) := \exists y.(1(y) \wedge S(y, x))$ (x es 2).
- $3(x) := \exists y.(2(y) \wedge S(y, x))$ (x es 3).
- $PrimoNo2No3(x) := P(x) \wedge \neg 2(x) \wedge \neg 3(x)$ (x es un número primo distinto de 2 y 3).

Usando estos predicados, la oración pedida es la siguiente:

$$\forall x \forall y.((PrimoNo2No3(x) \wedge PrimoNo2No3(y)) \rightarrow (\exists z.(Entre(x, z, y) \wedge \neg P(z))))$$