



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN  
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

# Ayudantía 8 - Funciones y Cardinalidad

26 de abril de 2024

Martín Atria, Paula Grune, Caetano Borges

---

## Resumen

### Función

Sea  $f \subseteq A \times B$  diremos que  $f$  es una función de  $A$  en  $B$  si dado cualquier elemento  $\forall a \in A \exists b \in B$  tal que:

$$afb \wedgeafc \implies b = c$$

Sea  $f : A \rightarrow B$ . Diremos que  $f$  es

- **Inyectiva** si la función es uno a uno, esto es  $\forall x, y \in A$  se tiene que  $f(x) = f(y) \implies x = y$ .
- **Sobreyectiva** si  $\forall b \in B. \exists a \in A$  tal que  $b = f(a)$
- **Biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

**Función invertible** Dada una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , diremos que  $f$  es invertible si su relación inversa  $f^{-1}$  es una función de  $B$  en  $A$ .

**Composición de funciones** Dadas relaciones  $R$  de  $A$  en  $B$  y  $S$  de  $B$  en  $C$ , la composición de  $R$  y  $S$  es una relación de  $A$  en  $C$  definida como

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } aRb \wedge bSc\}$$

**Principio del palomar** Si se tiene una función  $f : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_n$  con  $m < n$ , la función  $f$  no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán  $x, y \in \mathbb{N}_m$  tales que  $x \neq y$ , pero  $f(x) = f(y)$ .

**Equinumeroso** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualesquiera. Diremos que  $A$  es equinumeroso con  $B$  (o que  $A$  tiene el mismo tamaño que  $B$ ) si existe una función biyectiva  $f : A \rightarrow B$ . Lo denotamos como

$$A \approx B$$

**Video:** Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad [AQUI](#) :)

## 1. Funciones

Sean  $A, B$  y  $C$  subconjuntos de  $\mathbb{N}$ . Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es *creciente* si dados  $x, y \in A$  tales que  $x < y$ , se tiene que  $f(x) < f(y)$ .

1. Demuestre que si  $f$  es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  son crecientes, entonces  $g \circ f$  es inyectiva? Demuestre o de un contarejemplo.

## 2. Numerabilidad

1. Demuestre que si  $A$  es numerable y  $B$  es numerable, entonces  $A \cup B$  es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

## 3. Numerabilidad (hardcore)

Sea  $\mathbb{Z}^\omega$  el conjunto de todas las secuencias infinitas de números en  $\mathbb{Z}$  de la forma  $a_0 a_1 a_2 \dots$

1. Considere el siguiente conjunto:

$$S_1 = \{a_0 a_1 a_2 \dots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}. \forall i \geq 0. a_{i+1} - a_i = c\}$$

Por ejemplo, la secuencia  $7, 10, 13, 16, 19, \dots \in S_1$  ya que  $(a_{i+1} - a_i) = 3$ .

¿Es  $S_1$  un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.

2. Considere el siguiente conjunto:

$$S_2 = \{a_0 a_1 a_2 \dots \in \mathbb{Z}^\omega \mid \exists c \in \mathbb{Z}. \forall i \geq 0. |a_{i+1} - a_i| = c\}$$

Por ejemplo, la secuencia  $7, 10, 7, 4, 1, -2, 1, \dots \in S_2$  ya que  $|a_{i+1} - a_i| = 3$ .

¿Es  $S_2$  un conjunto numerable? Demuestre su afirmación.