PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 9 - Cardinalidad

19 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

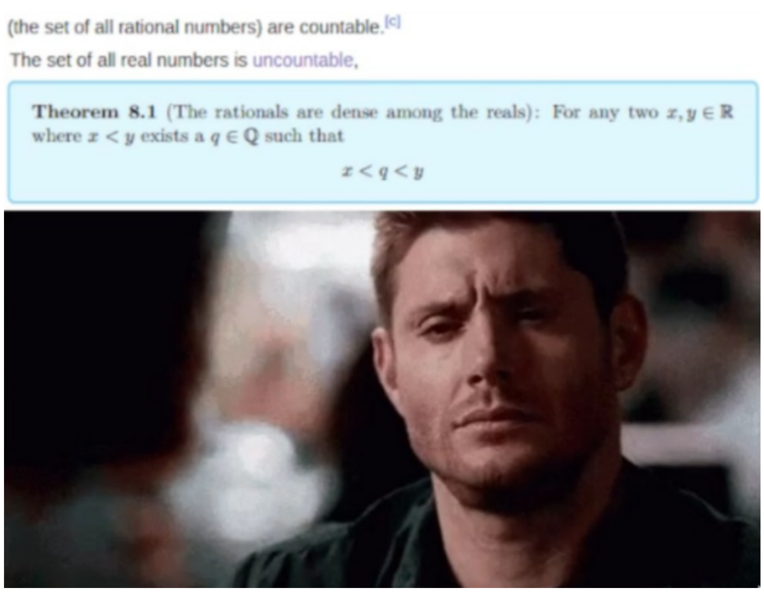
Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

Video: Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad AQUI :)

Meme del día



1. Equinumerosidad

Demuestre que $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donde $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

2. Numerabilidad

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.
3. Demuestre que la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.

3. Numerabilidad (Hardcore)

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales puede ser particionado en dos subconjuntos:

- El primer subconjunto, llamémoslo A, tendrá todos los números reales que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros no todos nulos. En otras palabras,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists q_0, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z} \text{ tales que } \sum_{i=0}^{n} q_i x^i = 0 \wedge \bigvee_{i=0}^{n} q_i \neq 0\}$$

- El segundo subconjunto tendrá todos los números reales que no están en el primer conjunto, esto es, será $\mathbb{R} \setminus A$.

Esta partición de los números reales es conocida y muy famosa. Al conjunto A se le llama números algebraicos, y al conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ se le llama números trascendentes[1].

Demuestre que el conjunto de los números trascendentes no es numerable.

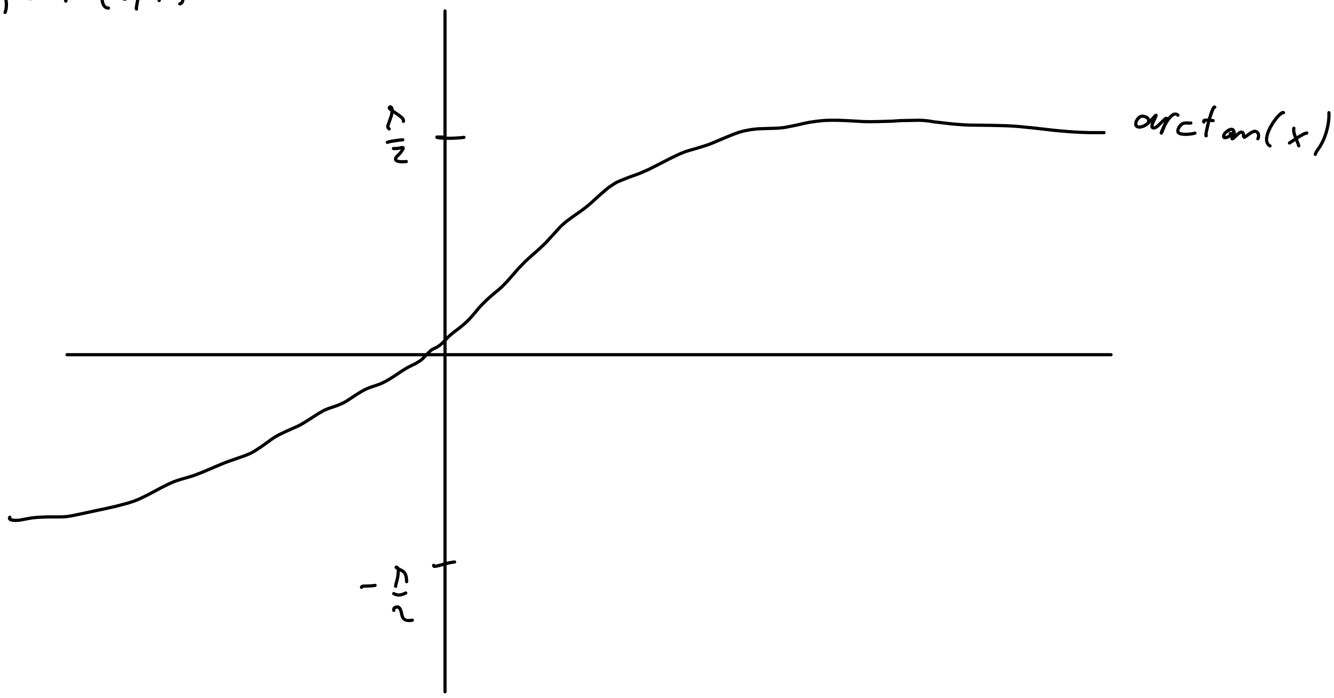
[1]Los números algebraicos y trascendentes también están definidos como partición de los complejos ($\mathbb{C}$). Ambas definiciones son válidas.

1. Equinumerosidad

Demuestre que $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donde $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

$(0,1) \approx \mathbb{R}$:

$F: \mathbb{R} \to (0,1)$



$\arctan(\underbrace{\pi x - \frac{\pi}{2}})$

$x = 0 \to -\frac{\pi}{2}$

$x = 1 \to \frac{\pi}{2}$

Como arctan(x) es biyección en el recorrido $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ al comprimirla con $\cdot\pi$ y desplazarla con $-\frac{\pi}{2}$ es una biyección en $(0,1)$.

2. $[0,1) \approx P(\mathbb{N})$. Sea $f: (0,1) \to P(\mathbb{N})$ definida por

$$f(x) = \{ n \in \mathbb{N} \mid bin(x)[n] == 1 \}$$

- Iny: Supongamos que $f(x) = f(y)$, con $x, y \in (0,1)$

PD: $x = y$. → considerando lo que está a la derecha de la $=$,

$$\{ n \in \mathbb{N} \mid bin(x)[n] == 1 \} = \{ n \in \mathbb{N} \mid bin(y)[n] == 1 \}$$

Supongamos que x e y son distintos.
Esto quiere decir que x e y difieren en al menos un dígito $\leftrightarrow$ sus representaciones binarias difieren en al menos un dígito $\to \exists n \in \mathbb{N}$ tq $bin(x)[n] == 1$ $\wedge$ $bin(y)[n] == 0$ $\to f(x) \neq f(y)$ $\times$
Concluimos que $x = y$.

- Sobre: Sea $A \in P(\mathbb{N})$. $A = \emptyset$

0	1	2	3	4	5		i		n	999
1	0	0	1	0	0	...	0	...	1	1

0, número $(0,1)$

$f(0,\text{número}) = A$ $[0,1) \approx (0,1)$

Finalmente, $[0,1) \approx P(\mathbb{N})$. Con ello, por transitividad, $(0,1) \approx P(\mathbb{N})$.

Concluimos que $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx P(\mathbb{N})$. $\square$

2. Numerabilidad

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.
3. Demuestre que la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.

Como A y B son numerables, existen listas L_A, L_B infinitas en las que todo elemento de A y B respectivamente están listados.

$L_A = a_1, a_2, a_3, \ldots$

$L_B = b_1, b_2, b_3, \ldots$

* si un elemento ya habría aparecido, lo ignoramos.

$L = a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$

Como existe una lista infinita donde todo elemento de $A \cup B$ aparece una vez, $A \cup B$ es numerable.

2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.

Sea A numerable y $S \subseteq A$. Como A es numerable, existe L_A en la que aparece todo elemento de A una vez.

$L_A = a_1, a_2, a_3, \ldots$

Recorremos L_A, si $a_i \in S$, entonces lo agregamos a L_S. Si no lo ignoramos.

L_S es una lista numerada que tiene a todo elemento de S una vez $\therefore S \not\approx \mathbb{N}$.

3. Demuestre que la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.

Sea A un conjunto con una cantidad numerable de elementos. Sea toda $X \in A$ un subconjunto con una cantidad numerable de elementos.

$$\bigcup_{x \in A} x \approx \mathbb{N}.$$

Existe $L_A = X_1, X_2, X_3, \dots$

Para cada X_i, existe $L_{X_i} = x_1, x_2, x_3, \dots$

$$[X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots]$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots \\ \underline{x_{13}} & x_{23} & x_{33} & \ddots \\ & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & \\ 4 & & \\ 5 & & \end{bmatrix} \qquad 1, 3, 2, 4, 5$$

3. Numerabilidad (Hardcore)

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales puede ser particionado en dos subconjuntos:

- El primer subconjunto, llamémoslo A, tendrá todos los números reales que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros no todos nulos. En otras palabras,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists q_0, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z} \text{ tales que } \sum_{i=0}^{n} q_i x^i = 0 \wedge \bigvee_{i=0}^{n} q_i \neq 0\}$$

- El segundo subconjunto tendrá todos los números reales que no están en el primer conjunto, esto es, será $\mathbb{R} \setminus A$.

Esta partición de los números reales es conocida y muy famosa. Al conjunto A se le llama números algebraicos, y al conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ se le llama números trascendentes[1].

Demuestre que el conjunto de los números trascendentes no es numerable.

$$A \cup (\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R}$$

PD: $A \approx \mathbb{N}$.

Observaciones:

- Todo polinomio tiene finitas raíces.
- La unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos es numerable.

PD: $P = \{ \sum_{i=0}^{n} q_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Z} \} \approx \mathbb{N}$.

$P' \subseteq P$ tq $0 \notin P'$.

$x^3 + 7x^2 - 18x + 40$

$(40, -18, 7, 1)$

1. $f: \mathbb{N} \to P$ definida por $f(q) = (q)$

$f(p) = f(q) \to (p) = (q) \to p = q$.

2. $g : P \to \mathbb{N}$

$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = bin(q_1)\, 9\, bin(q_2)\, 9 \dots 9\, bin(q_n)\, 9$

$g(-8, 17, -1) = 91\, bin(8)\, 90\, bin(17)\, 91\, bin(1)$

$g(X) = 9 d_1 q_1\, 9 d_2 q_2\, 9 d_3 \dots 9 d_n q_n$

$g(x) = g(y)$

$P \approx \mathbb{N}$. $\quad P' \subseteq P \qquad P' \approx \mathbb{N}$.

$A \approx \mathbb{N}$.

$\mathbb{R} \setminus A \approx \mathbb{N}$. $\qquad A \cup \mathbb{R} \setminus A \approx \mathbb{N} = \mathbb{R}$ $\quad \divideontimes$

Concluímos que $\mathbb{R} \setminus A \not\approx \mathbb{N}$. $\square$