Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Repaso I2

25 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

1. Lógica de Predicados

Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\text{dom}) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(=) &:= n = m \text{ si y solo si } n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}(\leq) &:= n \leq m \text{ si y solo si } n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}(P) &:= P(n) \text{ si y solo si } n \text{ es primo}
\end{aligned}$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

"Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo"

2. Teoría de Conjuntos

Sean A y B conjuntos y una función $f : A \to B$. Para todo $X \subseteq A$ definimos el siguiente conjunto:

$$F(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b\}$$

Dada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ una colección de subconjuntos de A, demuestre que:

1. $F\left(\bigcup_{D \in S} D\right) = \bigcup_{D \in S} F(D)$
2. $F\left(\bigcap_{D \in S} D\right) = \bigcap_{D \in S} F(D)$

3. Relaciones

3.1. Relaciones de orden

Dados un conjunto A y una relación $\lesssim$ sobre A, diremos que el par $(A, \lesssim)$ es un *preorden* si $\lesssim$ es una relación refleja y transitiva.
Denotramos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ como

$$A \rightsquigarrow B \Leftrightarrow inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B)$$

donde $inf(\cdot)$ y $sup(\cdot)$ son el ínfimo y el supremo de un conjunto respectivamente.

1. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ es un preorden.
2. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.
3. Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

3.2. Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:

$$S \circ T = T \circ S \Leftrightarrow S \circ T \text{ es una relación de equivalencia}$$

4. Cardinalidad

4.1. Numerabilidad

Demuestre que el conjunto de todos los strings ASCII (finitos) que sólo tienen caracteres `a` y `b`, y tales que no contienen el substring `abb` es un conjunto numerable.

4.2. No numerabilidad

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}$ es no numerable.