Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7

4 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

Relación Binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados que establece una conexión o asociación entre elementos de dos conjuntos distintos.

R es una relación binaria entre A y B si $R \subseteq A \times B$.

Propiedades de una Relación Binaria

Refleja

Una relación R es refleja si para todo elemento x en el conjunto, el par (x, x) está en R.

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irrefleja

Una relación R es irrefleja si ningún par (x, x) está en R para cualquier x en el conjunto.

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Simétrica

Una relación R es simétrica si para cada par (x, y) en R, también está presente el par (y, x).

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

Antisimétrica

Una relación R es antisimétrica si para cualquier par (x, y) en R, si $x \neq y$, entonces el par (y, x) no está en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land x \neq y \to (y, x) \notin R$$

Transitiva

Una relación R es transitiva si para cada par (x, y) y (y, z) en R, el par (x, z) también está en R.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \to (x, z) \in R$$

$a = b = c = d = e \qquad a = e$

Conexidad

Una relación R es conexa si para cada par de elementos x,y podemos encontar a (x, y) en R, o a (y, x) en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \lor (y, x) \in R$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$a \not< b \qquad a < a$

$b \not< a$

Relación de Equivalencia

Una relación de equivalencia es una relación binaria que cumple **reflexividad**, **simetría** y **transitividad**.

A la relación se le denota como $x \sim y$.

Clase de equivalencia

Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Conjunto cuociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto cuociente de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$$

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial, y sean $S \subseteq A, x \in A$.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior. Análogamente se define el supremo de un conjunto.

1. Meme del día

2. Relaciones

Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es **bueno para la suma** si satisface las siguientes condiciones:

1. $0 \in X$
2. $\forall x, y \in X, x + y \in X$.

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}_X$ como:

$$x\mathcal{R}_X y \leftrightarrow (x - y) \in X$$

Demuestre que si X es bueno para la suma, entonces $\mathcal{R}_X$ es una relación refleja y transitiva.

3. Conjuntos & Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto cualquiera, y sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que $R_1 \cup R_2$ es una relación de equivalencia si y solo si $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

Nota: La composición de dos relaciones definidas sobre un conjunto A, denotada por $R_1 \circ R_2$, es una relación definida como

$$R_1 \circ R_2 = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \exists a' \in A \text{ tal que } a_1 R_2 a' \wedge a' R_1 a_2\}$$

4. Relaciones de orden

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \leftrightarrow a < c \;\vee\; (a = c \wedge b \leq d)$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$ es un orden parcial.

2. Relaciones

Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es **bueno para la suma** si satisface las siguientes condiciones:

1. $0 \in X$
2. $\forall x, y \in X, x + y \in X$.

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}_X$ como:

$$\underset{a}{x}\mathcal{R}_X \underset{b}{y} \leftrightarrow (\underset{a}{x} - \underset{b}{y}) \in X$$

Demuestre que si X es bueno para la suma, entonces $\mathcal{R}_X$ es una relación refleja y transitiva.

1. Refleja: PD: $\forall a \in \mathbb{R}, \; a R_X a$

Como X es bueno para la suma, $0 \in X$.
$0 = a - a \;\therefore\; a - a \in X \rightarrow a R_X a$. $\square$
Concluímos que es refleja.

2. Transitiva: Supongamos que $a R_X b \wedge b R_X c$. PD: $a R_X c$
Como $a R_X b$, $a - b \in X$. Lo mismo nos dice que $b - c \in X$.
Como X es bueno para la suma, si sumamos dos elementos de X obtenemos otro de X.
$a - b + b - c \in X$
$\rightarrow = a - c \in X \rightarrow a R_X c$. Concluímos que es transitiva.

Es simétrica? Supongamos que $a R_X b$. PD: $b R_X a$
Sea $X = \{0, 1, \ldots\} = \mathbb{N}$. Es claro que es bueno para la suma.
$a - b \in X$ $\quad a = 1 \quad b = 0 \rightarrow a - b = 0 \in X$
$b - a = -1 \notin X$
Por contraejemplo demostramos que R_X no es simétrica.

3. Conjuntos & Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto cualquiera, y sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que $R_1 \cup R_2$ es una relación de equivalencia si y solo si $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

Nota: La composición de dos relaciones definidas sobre un conjunto A, denotada por $R_1 \circ R_2$, es una relación definida como

$$R_1 \circ R_2 = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \exists a' \in A \text{ tal que } a_1 R_2 a' \wedge a' R_1 a_2\}$$

$a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad a_2$

* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$R \subseteq A^2 \qquad (a_1, a_2) \in R_1 \to (a_1, a_2) \in R_1 \cup R_2$

$\to$:

i) $R_1 \cup R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$. Sea $(a_1, a_2) \in R_1 \cup R_2$.
Necesariamente $(a_1, a_2) \in R_1 \vee (a_1, a_2) \in R_2$.
SPDG. digamos que $(a_1, a_2) \in R_1$. Luego, como R_2 es de equivalencia, $\xrightarrow{\text{es refleja}}$ $(a_1, a_1) \in R_2$ y $\therefore$

$$a_1 R_2 a_1 \wedge a_1 R_1 a_2 \equiv a_1 (R_1 \cup R_2) a_2$$

$(a_1, a_2) \in R_1 \circ R_2$.

También podría haber pasado que $(a_1, a_2) \in R_2$.
Este caso es análogo.

ii) $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$: Sea $(a_1, a_2) \in R_1 \circ R_2$
PD: $(a_1, a_2) \in R_1 \cup R_2$.
Por def de $\circ$, $\exists a' \in A$ tq $(a_1, a') \in R_2 \wedge (a', a_2) \in R_1$.
Luego, $(a_1, a') \in R_1 \cup R_2$ y $(a', a_2) \in R_1 \cup R_2$. Como $R_1 \cup R_2$ es de equivalencia, es transitiva, lo que implica que $(a_1, a_2) \in R_1 \cup R_2$. Concluimos que $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$.

Como $R_1 \cup R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$ y $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$, concluimos que $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

2: $\longrightarrow$: Supongamos que $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. PD: $R_1 \cup R_2$ es de equiv.

i) Refleja: Como R_1 es de equivalencia, $\forall a \in A$, $a R_1 a$.
Con ello, $a (R_1 \cup R_2) a$.

ii) Simétrica: Supongamos que $(a, b) \in R_1 \cup R_2$. PD: $(b, a) \in R_1 \cup R_2$
SPDG, digamos que $(a, b) \in R_1$. Como R_1 es de equivalencia, es simétrica, y $\therefore (b, a) \in R_1 \to (b, a) \in R_1 \cup R_2$.

iii) Transitiva: Supongamos que $(a, b) \in R_1 \cup R_2 \wedge (b, c) \in R_1 \cup R_2$.
PD: $(a, c) \in R_1 \cup R_2$.

a) Si $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_1$, como R_1 es de equivalencia, es transitiva, y $\therefore (a, c) \in R_1 \to (a, c) \in R_1 \cup R_2$.

b) Si $(a, b) \in R_2$ y $(b, c) \in R_2$, análogo.

c) Si $(a, b) \in R_1$ y $(b, c) \in R_2$:

$\to b R_2 c \wedge a R_1 b$ / R_1, R_2 equiv $\Rightarrow$ sim

$\to c R_2 b \wedge b R_1 a \Rightarrow c (R_1 \circ R_2) a$

Como $R_1 \cup R_2$ es simétrica y $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$, $R_1 \circ R_2$ es simétrica y $\therefore$ como $c (R_1 \circ R_2) a$ entonces $a (R_1 \circ R_2) c$.

Finalmente, como $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$, $a (R_1 \cup R_2) c$. $\square$

d) Si: $(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_1$:

$$a R_2 b \wedge b R_1 c \rightarrow a (R_1 \circ R_2) c$$
$$\rightarrow a (R_1 \cup R_2) c \quad \square$$

Para terminar, como $R_1 \cup R_2$ es refleja, simétrica y transitiva, es de equivalencia. $\square$

4. Relaciones de orden

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, se define la relación $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \leftrightarrow a < c \ \vee \ (a = c \wedge b \leq d)$$

Demuestre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$ es un orden parcial.

→ conjunto

→ relación binaria definida sobre el conjunto

Props. orden parcial: (1) refleja, (2) antisimétrica, (3) transitiva

Antisim: $a R b \wedge b R a \rightarrow a = b$

1. Refleja: Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que $a = a$ y $b \leq b \therefore (a = a \wedge b \leq b) \vee a < a \equiv a < a \vee (a = a \wedge b \leq b) \equiv (a,b) R (a,b)$. Concluimos que es refleja.

2. Antisimétrica: Suponemos que $((a,b),(c,d)) \in R$ y $((c,d),(a,b)) \in R$. PD: $(a,b) = (c,d) \equiv a = c \wedge b = d$

Se tiene que

$$[a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)] \wedge [c < a \vee (c = a \wedge d \leq b)]$$

Por casos:

i) $a < c \wedge c < a$: imposible

ii) $\underbrace{a < c \wedge (c = a}_{\times} \wedge d \leq b)$

iii) $(a = c \wedge b \leq d) \wedge c < a$ $\quad \times$

iv) $(a = c \wedge b \leq d) \wedge (c = a \wedge d \leq b)$: $a = c \wedge c = a \wedge b \leq d \wedge d \leq b$

Por simetría de $=$ e idempotencia de $\wedge$, $\equiv a = c \wedge b \leq d \wedge d \leq b$.

Por antisimetría de $\leq$, $b \leq d \wedge d \leq b \rightarrow b = d \therefore$

$$\equiv a = c \wedge b = d \equiv (a,b) = (c,d)$$

3) Transitividad: Supongamos que $((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(e,f)) \in R$.
PD: $((a,b),(e,f)) \in R$. Se tiene que

$$[a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)] \wedge [c < e \vee (c = e \wedge d \leq f)]$$

i) $a < c \wedge c < e$: por transitividad de $<$, $a < e$.
Con ello, $a < e \vee (a = e \wedge b \leq f) \equiv ((a,b),(e,f)) \in R$.

ii) $a < c \wedge (c = e \wedge d \leq f)$: como $c = e$, $a < e$ y análogo al anterior

iii) $(a = c \wedge b \leq d) \wedge c < e$: como $a = c$, $a < e$ y análogo.

iv) $(a = c \wedge b \leq d) \wedge (c = e \wedge d \leq f)$: por transitividad de $=$, $a = e$.
Por transitividad de $\leq$, $b \leq f$ $\therefore$ $a = e \wedge b \leq f$
$\rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$. $\square$

Como $(\mathbb{R}^2, R)$ es tal que R es relación binaria sobre $\mathbb{R}^2$ y R es refleja, antisimétrica y transitiva y $\therefore$ de orden parcial, concluimos que $(\mathbb{R}^2, R)$ es un orden parcial. $\blacksquare$

$(a,b) \in R \equiv a R b$