Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6 - Teoría de conjuntos

27 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

1. Conjuntos y Producto Cartesiano

1. Sean A, B y C conjuntos no vacíos.
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.
   a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
2. Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:
   $$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$
   Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.
   $$\text{Si } A \Delta C = B \Delta C \text{ entonces } A = B$$

Solución

1. *a)* ($\leftarrow$) Dado que $A = B$, es claro que $A \times B = A \times A$. Similarmente, también se cumple que $A \times A = B \times A$. Por lo tanto, $A \times B = B \times A$.
   ($\rightarrow$) Dado que $A \times B = B \times A$, demostraremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:
   ($\subseteq$) Sea $a \in A$. Como $B \neq \varnothing$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in A \times B$. Como $A \times B = B \times A$, tenemos que $(a, b) \in B \times A$, y por lo tanto $a \in B$.
   ($\supseteq$) Análoga a lo anterior.
   b) Mostraremos la igualdad demostrando ambas contenciones:
   - $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$:
     Sea $(x, y) \in A \times (B \setminus C)$. Por defininción de producto cartesiano, sabemos que $x \in A$ y que $y \in B \setminus C$, y por definición de diferencia de conjuntos,

sabemos que $y \in B$ e $y \notin C$. Luego, $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin A \times C$, por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$.

- $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$:
  Sea $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. Por definición de diferencia de conjuntos, sabemos que $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \notin A \times C$, y por definición de producto cartesiano, sabemos que $x \in A$ e $y \in B$. Más aún, necesariamente $y \notin C$ (pues en otro caso $(x, y) \in A \times C$), y entonces $y \in B \setminus C$. Concluimos que $(x, y) \in A \times B \setminus C$.

2. Dado que $A \Delta C = B \Delta C$, demostraremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:
   $(\subseteq)$ Sea $x \in A$. Consideremos dos casos:
   - $x \notin C$: tenemos que $x \in A \setminus C$, y entonces $x \in A \setminus C \cup C \setminus A$. Luego, por definición de diferencia simétrica, se cumple que $x \in A \Delta C$, y entonces $x \in B \setminus C$. Esto significa que $x \in B \setminus C \cup C \setminus B$, y como $x \notin C$, necesariamente $x \in B \setminus C$. Concluimos que $x \in B$.
   - $x \in C$: tenemos que $x \notin A \setminus C$ y que $x \notin C \setminus A$. Luego, $x \notin A \Delta C$, y entonces $x \notin B \Delta C$. Por definición de diferencia simétrica, esto último implica que $x \notin C \setminus B$ y como $x \in C$, necesariamente $x \in B$.

   $(\supseteq)$ Análoga a la anterior.

2. Teoría de Conjuntos

Dado un conjunto A, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \setminus X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. $A \in \mathcal{T}(A)$
3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

Solución
a) Por teorema, para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$. Como $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A, se tiene que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$. Por definición de $\mathcal{T}(A)$, $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X = \varnothing) \to X \in \mathcal{T}(A)$, de lo que se concluye que $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$.

b) Como $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A, se tiene que $A \in \mathcal{P}(A)$. Además, $A \setminus A = \varnothing$, y $\varnothing$ es finito. Como $A \in \mathcal{P}(A) \wedge A \setminus A$ es finito, seconcluye que

$A \in \mathcal{T}(A)$.

c) El caso en que $\mathcal{T}(A) = \{\varnothing\}$ es trivial, ya que $\bigcup \mathcal{T}(A) = \varnothing \in \mathcal{T}(A)$.
$\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Como todo $X \in \mathcal{T}(A)$ también es elemento de $\mathcal{P}(A)$, todos los elementos de cualquier X están también en A. Luego, al hacer una unión de cualquier par de conjuntos $X \in \mathcal{T}(A)$, se obtendrá un conjunto que solo tiene elementos de A, y consecuentemente será un elemento de $\mathcal{P}(A)$. Entonces, se tiene que, para cualquier $X_1, X_2 \in \mathcal{T}(A), X_1 \cup X_2 \in \mathcal{P}(A)$.
Por definicion de $\mathcal{T}(A)$ se tiene que $\forall X \in \mathcal{T}(A), X \neq \varnothing$ se cumple que $A \backslash X$ es finito. Sin pérdida de generalidad, digamos que $\mathcal{T}(A)$ es de la forma $\{X_1, X_2, ...\}$, con $X_1, X_2, ... \neq \varnothing$. Para cada X_i se tiene que $A \backslash X_i$ es finito. Como la operación diferencia entre dos conjuntos no agrega elementos, una concatenación de diferencias tampoco lo hace. Luego, si $A \backslash X_i$ es finito, $(A \backslash X_i) \backslash X_j$ para cualquier j también lo es. Además, por definición del operador diferencia, se tiene que $(A \backslash X_i) \backslash X_j = A \backslash (X_i \cup X_j)$.
Por otra parte, se tiene que $\bigcup \{\varnothing, X_1, ...\} = \bigcup \{X_1, ...\}$ ya que $\varnothing$ no tiene elementos. Adicionalmente, es claro que $X_1 \cup X_2 \cup ... \in \mathcal{P}(A)$. Con ello,

$$A \backslash (X_1 \cup X_2 \cup ...) = ((A \backslash X_1) \backslash X_2) \backslash ..$$

es finito, por lo que se concluye que $X_1 \cup X_2 \cup ... = \bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$.

d) Podemos escribir $\mathcal{X} = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ con $n > 0$ y finito. Como $B_i \in \mathcal{T}(A)$ para todo i, se tiene que $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{P}(A)$. Hay dos casos:
Caso 1: A es finito:
Este caso es trivial, ya que la operación diferencia no puede agregar elementos a un conjunto, por lo que $A \backslash (\bigcap \mathcal{X})$ necesariamente es finito.

Caso 2: A es infinito:
Notemos que para cualquier par de conjuntos A, B se tiene la siguiente equivalencia: $A \backslash B = A \cap B^c$
Para este caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
A \backslash (\bigcap \mathcal{X}) &= A \backslash (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) \\
&= A \cap (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)^c \\
&= A \cap (B_1^c \cup B_2^c \cup ... \cup B_n^c) \\
&= (A \cap B_1^c) \cup (A \cap B_2^c) \cup ... \cup (A \cap B_n^c) \\
&= (A \backslash B_1) \cup (A \backslash B_2) \cup ... \cup (A \backslash B_n)
\end{aligned}$$

La unión de un número finito de conjuntos finitos necesariamente es también un conjunto con un número finito de elementos. Como $\mathcal{X}$ es un conjunto finito, es decir, n es finito, y $A \backslash B_i$ es finito por definión de $\mathcal{T}(A)$, entonces $A \backslash (\bigcap \mathcal{X})$ necesariamente es finito.