Teorema de Cantor

Clase 18

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es **equinumeroso** con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

Cardinalidad

Definición

La **cardinalidad** de un conjunto A es su clase de equivalencia bajo $\approx$:

$$|A| = [A]_{\approx}$$

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que un conjunto A es **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que un conjunto A es **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n$. (Recordemos que $n = \{0, \ldots, n-1\}$.)

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que un conjunto A es **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n$. (Recordemos que $n = \{0, \ldots, n-1\}$.)

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

- Por simplicidad, diremos que $|A| = n$.
- También podremos decir que A tiene n elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Ejemplo

Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

- $|A| = 6$
- A tiene 6 elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Lema

Sean A y B dos conjuntos **finitos** tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Lema

Sean A y B dos conjuntos **finitos** tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ejercicio (propuesta ★)

Demuestre el lema.

Cardinalidad

Lema

Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que $|A| = n$ y que $|B| = m$. Sabemos entonces que $A \approx \{0, \ldots, n-1\}$ y que $B \approx \{0, \ldots, m-1\}$, luego existen funciones biyectivas $f : A \to \{0, \ldots, n-1\}$ y $g : B \to \{0, \ldots, m-1\}$. Sea $h : A \cup B \to \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ n + g(x) & x \in B \end{cases}$$

Primero se debe notar que h está bien definida como función ya que no existe un x que pertenezca simultáneamente a A y B.

Cardinalidad

<u>Continuación:</u>

- Sobreyectividad: Sea $k \in \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$, lo demostraremos por casos. Si $k < n$ entonces dado que f es sobreyectiva en $\{0, \ldots, n+1\}$ sabemos que existe un $x \in A$ tal que $k = f(x) = h(x)$. Si $n \leq k < n+m$ entonces dado que g es sobreyectiva en $\{0, \ldots, m-1\}$ sabemos que existe en $x \in B$ tal que $g(x) = k - n$ y por lo tanto $k = n + g(x) = h(x)$, finalmente h es sobreyectiva en $k \in \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$.
- Inyectividad: Otra vez por casos, si $h(x) = h(y) < n$ entonces necesariamente $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$ de donde se concluye que $f(x) = f(y)$ y dado que f es inyectiva obtenemos que $x = y$. Si en cambio $n \leq h(x) = h(y) < n+m$, sabemos que $h(x) = n + g(x) = h(y) = n + g(y)$ de donde se concluye que $g(x) = g(y)$ y dado que g es inyectiva obtenemos que $x = y$, finalmente h es inyectiva.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Obs. Esto implica que si A es un conjunto finito, entonces su cardinalidad es **estrictamente menor** que la de su conjunto potencia.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

<u>Demostración:</u>

Por inducción en la cardinalidad de A.

BI: Si $|A| = 0$ entonces $A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \approx \{0\}$ por lo tanto $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$.

HI: Supongamos que para cualquier conjunto A tal que $|A| = n$ se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

TI: Sea A un conjunto tal que $|A| = n + 1$, sea a un elemento arbitrario de A y sea $B = A - \{a\}$. El conjunto B cumple que $|B| = n$, por lo que $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$. ¿Cómo podemos a partir de $\mathcal{P}(B)$ formar $\mathcal{P}(A)$?

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Demostración:

Por inducción en la cardinalidad de A.

BI: Si $|A| = 0$ entonces $A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \approx \{0\}$ por lo tanto $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$.

HI: Supongamos que para cualquier conjunto A tal que $|A| = n$ se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

TI: Sea A un conjunto tal que $|A| = n + 1$, sea a un elemento arbitrario de A y sea $B = A - \{a\}$. El conjunto B cumple que $|B| = n$, por lo que $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$. ¿Cómo podemos a partir de $\mathcal{P}(B)$ formar $\mathcal{P}(A)$? Notemos que en $\mathcal{P}(B)$ están todos los subconjuntos de B, es decir, todos los subconjuntos de A que no contienen al elemento a.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Continuación:

Llamemos $\mathcal{S}$ al conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \subseteq A \wedge a \in X\}$$

Es decir $\mathcal{S}$ está formado por todos los subconjuntos de A que contienen a a. Podemos notar que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}(B)$. Consideremos entonces la función $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{S}$ dada por

$$f(X) = X \cup \{a\}$$

Notemos que f es una función biyectiva de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{S}$ ($\bigstar$), por lo que concluímos que $\mathcal{P}(B) \approx \mathcal{S}$ y por lo tanto $|\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{S}|$. Luego, dado que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{A}$ y usando el lema anterior concluímos que

$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B) \cup A| = |\mathcal{P}(B)| + |A| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(B)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?
- Ya no podemos contar...
- ...pero sí podemos establecer una correspondencia como la que mostramos, ¡con funciones!

Ejemplo

Sea $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números naturales pares.
¿Cuál conjunto es más grande, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{P}$?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Sea $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números naturales pares.
¿Cuál conjunto es más grande, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{P}$?

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$, la cual es claramente biyectiva, y entonces $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -(\frac{n+1}{2}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

que es biyectiva (se deja como ejercicio), con lo que $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y solo si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y solo si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno. Es decir, si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y solo si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno. Es decir, si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:
$f : A \to \mathbb{N}$ con $f(a_i) = i$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicios

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

- Piense en un computador.

Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

TI: PD: $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

TI: PD: $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ es enumerable.
Como por HI sabemos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, existe una lista $(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ que contiene a todas las tuplas de $\mathbb{N}^n$ exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ponemos las tuplas de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ en una matriz, la cual recorremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de $\mathbb{N}^n$ más la segunda componente suman k.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

TI: De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \ldots)$$

Concluimos entonces que $\mathbb{N}^n$ es enumerable para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

TI: De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \ldots)$$

Concluimos entonces que $\mathbb{N}^n$ es enumerable para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección
(eso puede ser muy difícil!!)

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$, la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \to A$ dada por $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$.
  $g(x) = g(x) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$, y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$.

Objetivos de la clase

- □ Entender el concepto de cardinalidad en conjuntos infinitos
- □ Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- □ Comprender la técnica de diagonalización
- □ Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- □ Demostrar el teorema de Cantor

Outline

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Existen conjuntos infinitos **no** enumerables?

Teorema

El intervalo real $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Teorema

El intervalo real $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es infinito pero no enumerable.

Demostración. Por contradicción, supongamos que $(0,1)$ es enumerable.

Entonces existe una lista infinita de los reales en $(0,1)$:

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$$

donde cada real en $(0,1)$ aparece exactamente una vez.

Notemos que cada r_i es un número decimal de la forma

$$r_i = 0, d_{i0} d_{i1} d_{i2} d_{i3} \ldots, \text{ con } d_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Reales	Representación decimal						
r_0	0,	$\boxed{d_{00}}$	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	0,	d_{10}	$\boxed{d_{11}}$	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	0,	d_{20}	d_{21}	$\boxed{d_{22}}$	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	0,	d_{30}	d_{31}	d_{32}	$\boxed{d_{33}}$	d_{34}	$\cdots$
r_4	0,	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	$\boxed{d_{44}}$	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Para cada $i \geq 0$, definimos $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

Para cada $i \geq 0$, definimos: $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$

Sea ahora el número real $r = 0, d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

¿Aparece r en la lista?

- ¿$r = r_0$? No, porque difieren en el primer dígito decimal.
- ¿$r = r_1$? No, porque difieren en el segundo dígito decimal.
- $\ldots$
- ¿$r = r_i$? No, porque el i-ésimo digito de r es distinto al de r_i:

$$d_i \neq d_{ii}$$

Por lo tanto, r no aparece en la lista $\rightarrow\leftarrow$

Como $(0, 1)$ no puede ponerse en una lista, no es enumerable. $\square$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

El argumento anterior se llama **diagonalización**.

- ¿Por qué?
- Es clave para establecer muchos resultados en matemáticas y computación.

Usando estas ideas se puede demostrar que un computador
no puede resolver todo problema

Cardinalidad de conjuntos infinitos

¿Qué otros conjuntos tienen la misma cardinalidad que $(0,1)$?

Teorema

$(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Outline

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{R}$?

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \leq B$ (A **no es más grande** que B) si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

¿Es $\leq$ una relación de orden?

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Entonces, ¿dónde hay más elementos, en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{R}$?

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \preceq B$ (A **no es más grande** que B) si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

¿Es $\preceq$ una relación de orden?

Si $A \preceq B$, diremos que $|A| \leq |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que $A \prec B$ (A es **menos numeroso** que B) si $A \preceq B$ pero $A \not\approx B$.

¿Cómo se define esta noción usando funciones?

- Existe función inyectiva $f : A \to B$...
- ...pero no existe función biyectiva $g : A \to B$.

Si $A \prec B$, diremos que $|A| < |B|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Corolario

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

$\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$, y por lo tanto decimos que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

¡Hay estrictamente **menos** números naturales que reales!

Corolario

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Demostramos algo parecido para el caso finito...
veremos que aplica para **todo conjunto**

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto A (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Dado un conjunto A (no necesariamente finito):

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

¡Podemos repetir este proceso *ad eternum*!

$$|A| \ < \ |\mathcal{P}(A)| \ < \ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| \ < \ |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))| \ < \ \cdots$$

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Basta tomar

$$f : A \to \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Cardinalidad de A vs $\mathcal{P}(A)$

Teorema (Cantor)

A es menos numeroso que su conjunto potencia ($|A| < |\mathcal{P}(A)|$).

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Demostración. Primero, es claro que $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Basta tomar

$$f : A \to \mathcal{P}(A) \text{ dada por } f(a) = \{a\}$$

la cual es claramente inyectiva.

Ahora mostraremos que no existe una función biyectiva entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Por contradicción, supongamos que sí existe una biyección f entre A y $\mathcal{P}(A)$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$. Considere ahora los siguientes casos:

- Si $x \in f(x)$, entonces $x \in \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \notin f(x)$.
- Si $x \notin f(x)$, entonces $x \notin \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \in f(x)$.

Diagonalización entre A y $\mathcal{P}(A)$

Considere el siguiente conjunto:

Definición (complemento de la diagonal)

$$\bar{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$$

Notemos que $\bar{D} \subseteq A$, y por lo tanto $\bar{D} \in \mathcal{P}(A)$. Luego, como f es biyectiva, debe existir $x \in A$ tal que $f(x) = \bar{D}$. Considere ahora los siguientes casos:

- Si $x \in f(x)$, entonces $x \in \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \notin f(x)$.
- Si $x \notin f(x)$, entonces $x \notin \bar{D}$ (porque $f(x) = \bar{D}$), pero por definición de $\bar{D}, x \in f(x)$.

Luego, $x \in f(x)$ si y sólo si $x \notin f(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe una biyección entre A y $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen?

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$?

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos "infinitos" existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$? ???

Reflexiones finales

Dos preguntas

- ¿Cuántos “infinitos” existen? Infinitos!
- ¿Hay algún infinito entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$? ???

Hipótesis del continuo

No existe conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

¿Por qué se llama hipótesis?

Reflexiones finales

- ¿Qué implica todo lo anterior para la computación?
  - ¿Qué cosas es capaz de hacer un computador?
  - ¿Qué cosas **no** es capaz de hacer?
  - ¿Existen problemas computacionales para los cuales no existan algoritmos que los resuelvan?
  - Respuesta: $\mathrm{IIC2213}$:)

Outline

Objetivos de la clase

- ☐ Entender el concepto de cardinalidad en conjuntos infinitos
- ☐ Demostrar la existencia de conjuntos no enumerables
- ☐ Comprender la técnica de diagonalización
- ☐ Comprender el teorema de Cantor y sus consecuencias sobre la jerarquía de cardinalidades
- ☐ Demostrar el teorema de Cantor