Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Repaso I1

30 de agosto de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

---

1. Meme del día

Se viene la I1. No hay meme. Modo serio.

2. Inducción Estructural

Sea S el conjunto de palabras formadas por a's y b's recursivamente de la siguiente manera:

- $a \in S, b \in S$
- Si $\mu \in S$ y $\nu \in S$, entonces $\mu\nu \in S$.
- Solo los elementos generados mediante las reglas 1 y 2 pertenecen a S.

También se define la función reverso $R : S \longrightarrow S$ de la siguiente manera:

- $R(a) = a, R(b) = b$.
- Si $\mu \in S$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$, y $R(b\mu) = R(\mu)b$.

Considerando las definiciones inductivas de S y R:

1. Demuestre que para todo par de palabras $\mu, \nu \in S$ se tiene que
$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$
2. Demuestre que para toda palabra $\mu \in S$ se cumple que
$$R(R(\mu)) = \mu$$

3. Incompletitud funcional

Demuestre que el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.

4. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$.

5. Modelamiento

El problema de las n reinas consiste en poner n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ sin que se amenacen. Dos reinas se amenazan si están en la misma fila, columna o diagonal.

Dado un conjunto C de coordenadas (i, j) tal que $1 \leq i, j \leq n$ y $(i, j) \in C$ si y solo si hay una reina en la posición (i, j) del tablero, construya una fórmula φ tal que

φ es satisfacible si y solo si C es una asignación válida para el problema de las n reinas

3. Incompletitud funcional

Demuestre que el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.

$$P = \{p\} \rightarrow |L(P)| = 2^{2^1} = 4$$

$$2^{2^2} = 2^4 = 16$$

$p \wedge p \equiv p$ (1)

$p \vee p \equiv p$

$p \rightarrow p \equiv 1 \rightarrow 1$ ✓

$0 \rightarrow 0$ ✓

$\equiv T$ (2)

$p \leftrightarrow p \equiv T$

$(p \rightarrow p) \vee p \equiv T$

Propiedad: Toda fórmula φ construida con conectivos de C y $P=\{p\}$ es tal que $\varphi \equiv p$ o $\varphi \equiv T$

BI: Con $\varphi = p$, se tiene que trivialmente

$\varphi \equiv p$ o $\varphi \equiv T$

HI: Supongamos que se cumple para $\varphi, \psi \in L(P)$

TI: PD: $\theta = \varphi \circ \psi$, con $\circ \in C$, es tal que $\theta \equiv p$ o $\theta \equiv T$

Caso 1: $\theta = \varphi \wedge \psi$: Por HI hay 4 casos

a) $\varphi \equiv \psi \equiv p$: $\theta \equiv p \wedge p \equiv p$ ✓

b) $\varphi \equiv p$ y $\psi \equiv T$: $\theta \equiv p \wedge T \equiv p$ ✓

c) $\varphi \equiv T$ y $\psi \equiv p$: $\theta \equiv T \wedge p \equiv p$ ✓

d) $\varphi \equiv T$ y $\psi \equiv T$: $\theta \equiv T \wedge T \equiv T$ ✓

En todos los casos se cumple la propiedad

Caso 2: $\theta = \varphi \vee \psi$:

a) $\varphi \equiv p \equiv \psi \rightarrow \theta \equiv p \vee p \equiv p$

b, c, d) $\theta \equiv T$

Caso 3: $\theta = \varphi \rightarrow \psi$

a) $\varphi \equiv \psi \equiv p$: $\theta \equiv p \rightarrow p \equiv T$ ✓

b) $\varphi \equiv p$ y $\psi \equiv T$: $\theta \equiv p \rightarrow T \equiv T$ ✓

c) $\varphi \equiv T$ y $\psi \equiv p$: $\theta \equiv T \rightarrow p \equiv p$ ✓

d) $\varphi \equiv T \equiv \psi$: $\theta \equiv T \rightarrow T \equiv T$ ✓

Caso 4: $\theta = \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

a) $\varphi \equiv \psi \equiv p$: $\theta \equiv p \leftrightarrow p \equiv T$

b) $\varphi \equiv p$ y $\psi \equiv T$: $\theta \equiv p \leftrightarrow T \equiv p$

c) $\varphi \equiv T$ y $\psi \equiv p$: análogo

d) $\varphi \equiv \psi \equiv T$: $\theta \equiv T \leftrightarrow T \equiv T$ ✓

Concluímos que toda fórmula en $L(P)$ construida con conectivos de C es $\equiv p$ o $\equiv T$.

Con ello, no existe una fórmula φ en $L(P)$ construida con C tal que $\varphi \equiv \bot$ $\qquad p \wedge \neg p$

$\therefore$ C no es funcionalmente completo.

$\varphi \equiv \neg p$

$|L(P)| = 2 \neq 2^{2^1} = 4$

$\{\neg, \vee\}$ $\qquad$ $\{\neg, \rightarrow\}$

$\{\neg, \wedge\}$ $\qquad$ $\{\neg, \vee, \wedge\}$

5. Modelamiento

El problema de las n reinas consiste en poner n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ sin que se amenacen. Dos reinas se amenazan si están en la misma fila, columna o diagonal.

Dado un conjunto C de coordenadas (i, j) tal que $1 \leq i, j \leq n$ y $(i, j) \in C$ si y solo si hay una reina en la posición (i, j) del tablero, construya una fórmula φ tal que

φ es satisfacible si y solo si C es una asignación válida para el problema de las n reinas

- n reinas ✓
- fila ✓
- columna ✓
- diagonales ✓

p_{ij} : hay una reina en (i,j), es decir, $(i,j) \in C$.

$$\varphi_{n\text{-reinas}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$$

$$\varphi_{fila} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \neg p_{ik} \right)$$

$$\varphi_{columna} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \neg p_{kj} \right)$$

$$\varphi_{ai} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \rightarrow \left(\bigwedge_{i'=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ i-j=i'-j'}}^{n} \neg p_{i'j'} \right)$$

$$\varphi_{ad} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \longrightarrow \left(\bigwedge_{i'=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ i+j=i'+j'}}^{n} \neg p_{i'j'} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 \\ 21 & 22 & 23 \\ 4 & 5 & 6 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}}$$

$$\varphi_{init} = \bigwedge_{(i,j)\in C} p_{ij} \qquad (i,j)\in C \qquad \sigma(p_{ij}) = 1$$

$$\varphi \equiv \varphi_{init} \wedge \varphi_{fila} \wedge \varphi_{columna} \wedge \varphi_{ad} \wedge \varphi_{ai}$$

4. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$.

4. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \wedge q) \to (r \wedge \neg q)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$r \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \to (r \wedge \neg q)$	
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

$\neg[(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)]$

$$\underbrace{\begin{aligned} &(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ \vee\, &(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ \vee\, &(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\ \vee\, &(\neg p \wedge q \wedge r) \\ \vee\, &(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ \vee\, &(p \wedge \neg q \wedge r) \end{aligned}}_{\text{fórmula en DNF}}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \\ &\quad \wedge \neg(p \wedge q \wedge r) \\ &\equiv \underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)}_{\text{CNF}} \end{aligned}$$

2. Inducción Estructural

Sea S el conjunto de palabras formadas por a's y b's recursivamente de la siguiente manera:

- $a \in S, b \in S$
- Si $\mu \in S$ y $\nu \in S$, entonces $\mu\nu \in S$.
- Solo los elementos generados mediante las reglas 1 y 2 pertenecen a S.

También se define la función reverso $R : S \longrightarrow S$ de la siguiente manera:

- $R(a) = a, R(b) = b$.
- Si $\mu \in S$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$, y $R(b\mu) = R(\mu)b$.

Considerando las definiciones inductivas de S y R:

1. Demuestre que para todo par de palabras $\mu, \nu \in S$ se tiene que
$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$

2. Demuestre que para toda palabra $\mu \in S$ se cumple que
$$R(R(\mu)) = \mu$$

1) BI: Cuando $\mu = a$, $R(\mu) = R(a) = a = \mu$ ✓
$\mu = b$ es análogo

HI: Supongamos que la propiedad se cumple para $\alpha, \beta \in S$. $R(\alpha\gamma) = R(\gamma)R(\alpha)$, $\forall \gamma$

TI: PD: $R(\alpha\beta\gamma) = R(\gamma)R(\alpha\beta)$
Por HI:
$$R(\alpha\underbrace{(\beta\gamma)}_{\gamma'}) = R(\alpha\gamma') \overset{HI}{=} R(\gamma')R(\alpha)$$

$$\rightarrow \quad = R(\beta\gamma)R(\alpha) \overset{HI}{=} R(\gamma)R(\beta)R(\alpha)$$
$$= R(\gamma)R(\alpha\beta)$$

2. Propiedad: $R(R(\nu)) = \nu$

BI: $\nu = a$: $R(R(\nu)) = R(R(a)) = R(a) = a = \nu$

$\nu = b$: análogo

HI: Supongamos que se cumple para $\alpha, \beta \in S$

TI: PD: $R(R(\alpha\beta)) = \alpha\beta$

Por (1) : $R(\underbrace{R(\beta)}_{\beta'}\underbrace{R(\alpha)}_{\alpha'})$

Por (1) :

$$R(\alpha')R(\beta')$$

$$\overset{HI}{=} \underbrace{R(R(\alpha))}_{\alpha}\underbrace{R(R(\beta))}_{\beta} \qquad \square$$