PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 1 - Inducción

16 de agosto de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

1. Inducción Simple

Ejercicio A

Demuestre que para todo $n \geq 0$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

En primer lugar, notemos que el interior del paréntesis del lado izquierdo es la suma de 1 a n, para la cual conocemos una expresión:

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 &= (\sum_{i=1}^{n} i)^2 \\ &= (\frac{n(n+1)}{2})^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Con esto en mente, desarrollaremos desde el lado derecho. Demostraremos por inducción simple que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

CB: Con $n = 1$ se tiene que

- LI: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = i^3 = 1$
- LD: $\frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{4} = 1$

Por lo que el caso base se cumple.

HI: Supongamos que la propiedad se cumple para n, es decir, que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

TI: Demostraremos que la propiedad se cumple para $n+1$. Por HI se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} && / + (n+1)^3 \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n^3 + 5n^2 + 8n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Con lo que llegamos a la expresión deseada. Queda demostrado por inducción fuerte que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Con ello, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)
\end{aligned}
$$

por lo que, por transitividad de =, queda demostrado que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \qquad \square$$

Ejercicio B

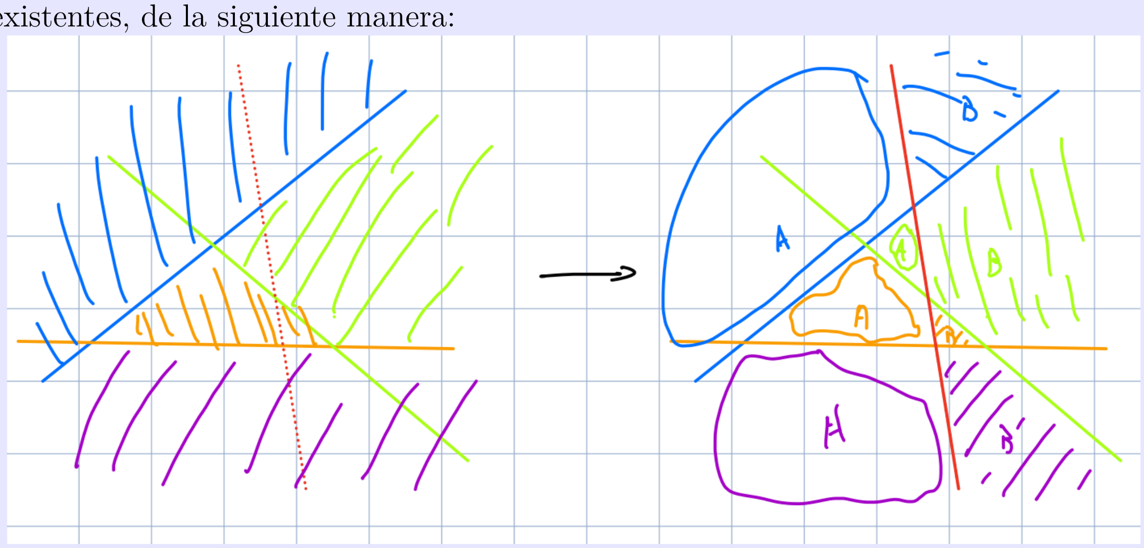
Demuestre que, si se tiene un conjunto de n lineas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes, entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

Solución

BI: n = 0, es decir, no hay ninguna línea en el plano, por lo que éste se divide en exactamente 1 región. Y sabemos que:

$$\frac{0^2+0+2}{2} = 1$$

Por lo tanto, la propiedad se cumple para n = 0
HI: Supongamos que para n líneas, se cumple que la cantidad de regiones es $\frac{n^2+n+2}{2}$, bajo las propiedades del enunciado.
TI: Demostremos que se cumple para n + 1 líneas.
Añadimos una línea tal que esta no es paralela a otra, ni es concurrente a 2 líneas ya existentes, de la siguiente manera:



Al añadir la línea roja, por cada línea que intersecta, se creará 1 nueva región, ya que cada región correspondiente se divide en 2 (regiones azul, verde y naranjo). Además, una última región adicional se divide en 2 (región morada de la imagen). Luego al agregar (n + 1)-ésima línea, la cantidad de regiones aumentaría en n + 1.

$$\begin{aligned}\#R &= \frac{n^2+n+2}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n^2+2n+1)+n+3}{2} \\ &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}\end{aligned}$$

Con lo que la propiedad se cumple para n + 1. Concluimos por PIS que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Inducción Fuerte

Ejercicio A

Teorema: $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.
Demostración por inducción fuerte:
BI: El caso base se cumple claramente ya que $\pi^0 = 1$.
HI: Supongamos que $\pi^k = 1$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
TI: PD: $\pi^n = 1$.
Se tiene que $\pi^n = \frac{\pi^{n-1} \cdot \pi^{n-1}}{\pi^{n-2}}$. Tanto $n-1$ como $n-2$ son valores de k válidos según HI, por lo que se tiene que $\pi^{n-1} = 1$ y $\pi^{n-2} = 1$. Reemplazando en la ecuación anterior, $\pi^n = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Con ello, concluímos por inducción fuerte que $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Salva a las matemáticas de ser destruidas: encuentra el error en la demostración anterior.

Solución

Este ejercicio es un claro ejemplo de que en ciertos ejercicios es necesario demostrar manualmente más de un caso base. Un buen indicador de la necesidad de más de un caso base, es cuando se usa más de un ejemplar en la tesis inductiva.
En este caso particular, para demostrar que $\pi^n = 1$, se utilizan dos ejemplares: π^{n-1} y π^{n-2}, lo que nos dice que debemos demostrar dos casos base, los cuales pueden ser π^0 y π^1, con lo que la demostración sería falsa.

PD: Para cualquier demostración de inducción se pueden demostrar tantos casos base como se quiera, no hace daño demostrar a mano más ejemplos, e incluso es recomendable en algunos ejercicios para generar intuición del comportamiento del problema.

Ejercicio B

Demuestre el teorema fundamental de la aritmética: Todo número natural mayor a 1 puede ser representado de forma única como un producto de números primos.

Solución

Debemos demostrar que todo número natural mayor a 1 puede ser representado como un producto de números primos (existencia), y además que esta representación es única para cada número (unicidad).

Existencia
Se demostrará por inducción fuerte.

BI: Para $n = 2$ se cumple trivialmente, ya que 2 es primo.
HI: Supongamos que para todo número $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k < n$ se cumple la propiedad, es decir, k puede ser representado como un producto de números primos.
TI: Demostraremos que n puede ser representado como un producto de números primos. Hay dos posibilidades:

1. n es primo: es trivialmente representado por un producto de números primos (en el que sólo aparece n).
2. n no es primo: por definición de números primos, esto quiere decir que existe un número $d \in \mathbb{N}$ que divide a n tal que $d \neq 1$ y $d \neq n$. Luego, se tiene que $n = d \cdot \frac{n}{d}$. Sin embargo, como $1 < d < n$ tanto d como $\frac{n}{d}$ cumplen con las características de k en HI, por lo que pueden ser representados como un producto de primos, es decir, $d = p_1 \cdots p_s$ y $\frac{n}{d} = q_1 \cdots q_r$ con $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_r$ números primos. Finalmente, $n = d \cdot \frac{n}{d} = p_1 \cdots p_s \cdot q_i \cdots q_r$, con lo que hemos obtenido una representación de n como producto de primos, demostrando lo deseado.

Con ello, queda demostrado por inducción fuerte que todo natural mayor a 1 puede ser representado como un producto de números primos.

Unicidad
Se demostrará por inducción fuerte.
BI: Para $n = 2$, como no existe ningún número primo menor que 2, es claro que su representación como producto de primos es única.
HI: Supongamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k < n$ se cumple la propiedad, es decir, que la representación de k como producto de primos es única.
TI: Demostraremos que la representación de n como producto de primos es única. Lo haremos por contradicción.
Supongamos que n tiene dos representaciones distintas como producto de primos. Esto quiere decir que

$$n = p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_r$$

con $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_r$ primos, y donde existe algún p_i distinto a todo q_j (i.e. son productos de primos distintos).
En primer lugar, notemos que es imposible que $p_i = q_j$ para algún par i, j, ya que si eso ocurriera, entonces se tendría que

$$p_1 \cdots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdots p_r = q_1 \cdots q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdots q_s = k'$$

donde $1 < k' < n$ y por lo tanto, por HI, su representación como producto de primos es única, por lo que esto es una contradicción. Con ello se tiene que $p_i \neq q_j$ para todo par i, j, es decir, que ningún primo p_i aparece entre los primos q_j.
Como $p_1 \neq q_1$, se tiene que $P = p_2 \cdots p_r \neq q_2 \cdots q_s = Q$. Sin pérdida de generalidad, digamos que $P > Q$. Luego, se tiene que

$$1 < n - p_1 \cdot Q = (q_1 - p_1) \cdot Q = p_1 \cdot (P - Q) < s$$

Como por HI los naturales entre 1 y n tienen representación como producto de primos única, necesariamente p_1 está entre los factores de $(q_1 - p_1) \cdot Q$. Sin embargo, no puede dividir a Q, ya que $p_i \neq q_j$ para todo par i, j, y además no puede dividir a $(q_1 - p_1)$, ya que divide a p_1 y tendría que dividir a q_1, lo que es imposible ya que q_1 es un primo distinto a p_1.

Con ello, hemos llegado a una contradicción, por lo que concluímos que es imposible que n sea representado como un producto de primos de dos maneras distintas.

Finalmente, por inducción fuerte queda demostrado que la representación como producto de primos de todo natural mayor a 1 es única.

3. Inducción Estructural

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $|*| : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $|\bullet| = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$

Solución

Se demostrará la propiedad utilizando el Principio de Inducción Estructural sobre el conjunto de los árboles binarios S.
BI: Para el caso base $t = \bullet$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |\bullet| &\leq 2^{h(\bullet)+1} - 1 \\ 1 &\leq 2^{0+1} - 1 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

por lo que la propiedad se cumple.
HI: Suponemos que la propiedad se cumple para $t_1, t_2 \in S$, es decir, que lo siguiente se cumple:

$$\begin{aligned} |t_1| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 \\ |t_2| &\leq 2^{h(t_2)+1} - 1 \end{aligned}$$

TI: Debemos demostrar que para un árbol binario construido usando las reglas de construcción ($t = \bullet(t_1, t_2)$), se cumple que $|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$. Sumando las desigualdades anteriores, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} |t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} - 1 + 2^{h(t_2)+1} - 1 \\ 1 + |t_1| + |t_2| &\leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1 \end{aligned}$$

Uno de $\{h(t_1),\, h(t_2)\}$ necesariamente será $max\{h(t_1),\, h(t_2)\}$, y el otro necesariamente será $min\{h(t_1),\, (t_2)\}$:

$$
\begin{aligned}
|t| &\leq 2^{max\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} - 1 \\
|t| &\leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Por la definición de $h(t)$,

$$h(t) = max\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Por otro lado, $max\{h(t_1),\, h(t_2)\} \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\}$.
Luego,

$$h(t) \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Teniendo esto en consideración, al volver a la expresión (1), por transitividad, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|t| &\leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{h(t)} \\
|t| &\leq 2 \cdot 2^{h(t)} - 1 \\
|t| &\leq 2^{h(t)+1} - 1
\end{aligned}
$$

con lo que se demuestra lo deseado.$\square$