

# Satisfactibilidad

Clase 5

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

# Outline

**Conectivos funcionalmente completos**

Satisfactibilidad

Epílogo

# Conectivos y fórmulas

Tenemos una fórmula  $\varphi \in L(P)$ , con  $P = \{p, q, r\}$ , y lo único que conocemos de ella es que cumple la siguiente tabla de verdad:

$p$	$q$	$r$	$\varphi$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

¿Podemos construir una fórmula equivalente a  $\varphi$ ?

# Conectores y fórmulas

## Ejemplo

	$p$	$q$	$r$	$\varphi$		$p$	$q$	$r$	$\varphi$
$\sigma_1$	0	0	0	1	$\sigma_5$	1	0	0	1
$\sigma_2$	0	0	1	0	$\sigma_6$	1	0	1	0
$\sigma_3$	0	1	0	0	$\sigma_7$	1	1	0	0
$\sigma_4$	0	1	1	1	$\sigma_8$	1	1	1	1

Estrategia:

- Codificar cada valuación  $\sigma$  tal que  $\sigma(\varphi) = 1$
- Combinar dichas codificaciones mediante disyunción

Con esto, proponemos la siguiente fórmula equivalente a  $\varphi$

$$\underbrace{((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_1} \vee \underbrace{((\neg p) \wedge q \wedge r)}_{\sigma_4} \vee \underbrace{(p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_5} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge r)}_{\sigma_8}$$

Podemos generalizar esta idea para  $n$  variables

# Conectores y fórmulas

Consideremos el conector  $n$ -ario siguiente

	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{n-1}$	$p_n$	$\varphi$
$\sigma_1$	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
$\sigma_2$	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_{2^n}$	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Para cada  $\sigma_j$  con  $j \in \{1, \dots, 2^n\}$  consideremos la siguiente fórmula:

$$\varphi_j = \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right)$$

La fórmula  $\varphi_j$  codifica la  $j$ -ésima valuación

# Conectores y fórmulas

	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{n-1}$	$p_n$	$\varphi$
$\sigma_1$	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
$\sigma_2$	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_{2^n}$	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Ahora tomamos la disyunción de las valuaciones que satisfacen a  $\varphi$

$$\bigvee_{\substack{j=1 \dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \varphi_j = \bigvee_{j=1 \dots 2^n} \left( \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$

La fórmula resultante es equivalente a  $\varphi$

# Conectivos y fórmulas

## Teorema

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente.

## Corolario

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente que solo usa símbolos  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\vee$ .

# Conectivos funcionalmente completos

## Definición

Un conjunto de conectivos lógicos se dice **funcionalmente completo** si toda fórmula en  $\mathcal{L}(P)$  es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

## Ejemplo

El conjunto  $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$  es funcionalmente completo, pues para toda fórmula  $\varphi$ , se tiene que

$$\varphi \equiv \bigvee_{\substack{j=1 \dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left( \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{i=1 \dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$



# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicios

1. Demuestre que  $\{\neg, \wedge\}$ ,  $\{\neg, \vee\}$  y  $\{\neg, \rightarrow\}$  son funcionalmente completos.
2. Demuestre que  $\{\neg\}$  no es funcionalmente completo.
3. ¿Es  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$  funcionalmente completo?

Demostraremos 1.  $\{\neg, \rightarrow\}$  y 2.  
El resto quedan propuestos ★!

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 1.

Demostraremos que  $\{\neg, \rightarrow\}$  es funcionalmente completo.

Como sabemos que  $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$  es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa  $\neg$  y  $\rightarrow$ . Con esto, queda demostrado que  $C' = \{\neg, \rightarrow\}$  es funcionalmente completo.

- **BI:** Si  $\varphi = p$ , con  $p \in P$ , la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que  $\varphi, \psi \in L(P)$ , que sólo usan conectivos en  $C$ , son tales que  $\varphi \equiv \varphi'$  y  $\psi \equiv \psi'$ , donde  $\varphi', \psi'$  sólo usan conectivos en  $C'$ .

Es crucial la dirección. Queremos probar que  $C' = \{\neg, \rightarrow\}$  es F.C. por lo que debemos usar los símbolos de  $C'$  para expresar los de  $C$

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 1.

- **HI:** Supongamos que  $\varphi, \psi \in L(P)$ , que sólo usan conectivos en  $C$ , son tales que  $\varphi \equiv \varphi'$  y  $\psi \equiv \psi'$ , donde  $\varphi', \psi'$  sólo usan conectivos en  $C'$ .
- **TI:** Consideraremos una fórmula  $\theta$  construida con los pasos inductivos para los operadores en  $C$ . Tenemos tres casos que analizar:
  - $\theta = (\neg\varphi)$
  - $\theta = \varphi \wedge \psi$
  - $\theta = \varphi \vee \psi$

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula  $\theta$  construida con los pasos inductivos para los operadores en  $C$ .

- $\theta = (\neg\varphi) \stackrel{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$ , y como  $\varphi'$  sólo usa conectivos en  $C'$ ,  $\theta$  es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en  $C'$ .
- $\theta = \varphi \wedge \psi \stackrel{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi'$

Usando las leyes de doble negación, De Morgan y de implicancia:

$$\theta \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi')) \equiv \neg(\varphi' \rightarrow (\neg\psi'))$$

Y como  $\varphi', \psi'$  sólo usan conectivos en  $C'$ ,  $\theta$  es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en  $C'$ .

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula  $\theta$  construida con los pasos inductivos para los operadores en  $C$ .

- $\theta = \varphi \vee \psi \stackrel{HI}{\equiv} \varphi' \vee \psi'$

Usando la ley de implicancia:

$$\theta \equiv (\neg\varphi') \rightarrow \psi'$$

Y como  $\varphi', \psi'$  sólo usan conectivos en  $C'$ ,  $\theta$  es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en  $C'$ .

Luego, por inducción estructural se concluye que para toda fórmula con símbolos solo de  $C$ , existe una fórmula equivalente con símbolos en  $C'$ .  $\square$

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 2.

Demostraremos que  $\{\neg\}$  no es funcionalmente completo.

Dado  $P = \{p\}$ , demostraremos por inducción que toda fórmula en  $\mathcal{L}(P)$  construida usando sólo  $p$  y  $\neg$  es lógicamente equivalente a  $p$  o a  $\neg p$ . Como ninguna de estas fórmulas es equivalente a  $p \wedge \neg p$ , se concluye que  $\{\neg\}$  no puede ser funcionalmente completo.

Esta demostración es “*negativa*”... daremos un caso en que **no se cumple** la definición de funcionalmente completo

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 2.

Demostraremos la propiedad

$$P(\varphi) := \varphi \text{ es equivalente a } p \text{ o a } \neg p$$

- **BI:** Si  $\varphi = p$ , con  $p \in P$ , la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que  $\varphi \in L(P)$  construida usando sólo  $p$  y  $\neg$  es equivalente a  $p$  o a  $\neg p$ .

Estamos acotando las tablas de verdad que son posibles en  $\{\neg\}$

# Conectivos funcionalmente completos

## Ejercicio 2.

- **TI:** El único caso inductivo que tenemos que demostrar es  $\psi = \neg\varphi$ , pues sólo podemos usar el conectivo  $\neg$ .

Por **HI**, sabemos que para toda valuación  $\sigma$  se cumple que  $\sigma(\varphi) = \sigma(p)$  o  $\sigma(\varphi) = \sigma(\neg p)$ . Podemos hacer una tabla de verdad:

$\varphi$	$\psi = \neg\varphi$
$p$	$\neg p$
$\neg p$	$p$

Concluimos que  $\psi$  es equivalente a  $p$  o a  $\neg p$ .

Como la fórmula  $\psi = p \wedge \neg p$  no es equivalente a ninguna fórmula que solo usa símbolos de  $\{\neg\}$ , tenemos que  $\{\neg\}$  no es funcionalmente completo. □



# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfactibilidad de fórmulas y conjuntos
- Aplicar lógica para modelar problemas

# Outline

Conectivos funcionalmente completos

**Satisfactibilidad**

Epílogo



# Satisfactibilidad

## Definición

Una fórmula  $\varphi$  es **satisfactible** si existe una valuación  $\sigma$  tal que  $\sigma(\varphi) = 1$ .

## Ejemplo

Las siguientes fórmulas son satisfactibles:

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

$$p \rightarrow \neg p$$

Las siguientes fórmulas no son satisfactibles:

$$p \wedge \neg p$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

Una fórmula es satisfactible si hay algún “*mundo*” en el cual es verdadera

# El problema de satisfactibilidad

## Problema de satisfactibilidad (SAT)

Sea  $\varphi$  una fórmula proposicional. El **problema de satisfactibilidad** consiste en determinar si  $\varphi$  es satisfactible o no.

Este es un problema central en computación

- Permite resolver problemas fuera de la lógica...
- ... usando modelación en lógica proposicional

¿Es un problema difícil? ¿Cómo se resuelve?

# Modelación en lógica proposicional

## Ejercicio

Sea  $M$  un mapa conformado por  $n$  países. Decimos que  $M$  es 3-coloreable si se pueden pintar todos los países con 3 colores sin que ningún par de países adyacentes tenga el mismo color. En otras palabras, los países vecinos deben tener colores distintos.

Dado un mapa  $M$ , construya una fórmula  $\varphi \in \mathcal{L}(P)$  tal que  $M$  es 3-coloreable si y sólo si  $\varphi$  es satisfactible.

La fórmula  $\varphi$  debe **codificar** los requisitos y estructura del problema

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Sea  $M$  el mapa. Consideremos la lista de países  $\{1, 2, \dots, n\}$  y una lista de pares de países adyacentes  $A = \{(i, j), (k, m), \dots\}$ .

Seguiremos la siguiente estrategia para resolver el problema

1. Definición de variables proposicionales
  - Variables predefinidas por el problema
  - Variables que hay que asignar
2. Construcción de restricciones a través de fórmulas proposicionales
3. Demostración de que  $\varphi$  cumple lo pedido (si y solo si)

# Satisfactibilidad

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Primero, definimos las variables proposicionales. Usamos dos tipos de variables:

- Para  $1 \leq i, j \leq n$  definimos

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es adyacente con } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observamos que cada  $p_{ij}$  se conoce de antemano una vez que conocemos el mapa  $M$ . Debemos **inicializarlas**.

- Análogamente, para  $1 \leq i \leq n$  definimos

$$r_i \quad b_i \quad g_i$$

que valen 1 si el país  $i$  es pintado rojo, azul o verde respectivamente, y 0 en caso contrario. Estas variables deben ser **determinadas** para resolver el problema.

¿Qué restricciones son naturales para este problema?



## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Para representar el problema vamos a definir  $\varphi$  como la conjunción de las siguientes fórmulas.

- “Cada país tiene exactamente un color”

$$\varphi_C = \bigwedge_{i=1}^n \left( (r_i \vee b_i \vee g_i) \wedge (r_i \rightarrow (\neg b_i \wedge \neg g_i)) \wedge (b_i \rightarrow (\neg r_i \wedge \neg g_i)) \wedge (g_i \rightarrow (\neg r_i \wedge \neg b_i)) \right)$$

- “Países adyacentes tienen colores distintos”

$$\varphi_D = \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n \left( p_{ij} \rightarrow ((r_i \rightarrow \neg r_j) \wedge (b_i \rightarrow \neg b_j) \wedge (g_i \rightarrow \neg g_j)) \right)$$

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

- Inicializamos las variables conocidas por la instancia  $M$  del problema

$$\varphi_M = \bigwedge_{(i,j) \in A} p_{ij} \quad \wedge \quad \bigwedge_{(i,j) \notin A} \neg p_{ij}$$

Entonces, nuestra fórmula será la conjunción de las fórmulas anteriores:

$$\varphi = \varphi_C \wedge \varphi_D \wedge \varphi_M$$

Ahora demostraremos que  $M$  es 3-coloreable si y sólo si  $\varphi$  es satisfactible.

Debemos demostrar dos direcciones

# Satisfactibilidad

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

( $\Rightarrow$ ) **PDQ** Si  $M$  es 3-coloreable, entonces  $\varphi$  es satisfactible.

Supongamos que  $M$  es 3-coloreable. Luego, existe una coloración válida para  $M$ . Construimos una valuación  $\sigma$  según

$$\begin{aligned}\sigma(p_{ij}) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \text{ son adyacentes en } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(r_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es rojo en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(b_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es azul en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(g_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es verde en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}\end{aligned}$$

Esta dirección consiste en construir una valuación que satisface  $\varphi$

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

( $\Rightarrow$ ) (continuación) Ahora verificamos que  $\sigma(\varphi) = 1$ :

- $\sigma(\varphi_C)$ : para cada país  $i$ , se debe cumplir que  $\sigma(r_i) = 1$ , o que  $\sigma(g_i) = 1$ , o que  $\sigma(b_i) = 1$ , y solo una de estas, por construcción de  $\sigma$ . Luego, es claro que  $\sigma(\varphi_C) = 1$ .
- $\sigma(\varphi_D)$ : para cada combinación de países  $i, j$ , sabemos que  $\sigma(p_{ij}) = 1$  solo cuando los países son adyacentes. Entonces, como en  $\varphi_D$  tenemos una implicancia, solo nos preocuparemos de los pares de países adyacentes. En el consecuente de la implicancia, sabemos que si por ejemplo  $\sigma(r_i) = 1$ , se debe cumplir que  $\sigma(r_j) = 0$ , dado que construimos  $\sigma$  a partir de una 3-coloración. Para las otras dos implicancias, sabemos que el lado izquierdo va a ser falso (por la fórmula  $\varphi_C$ ), y por lo tanto todo el lado derecho se hace verdadero, y entonces  $\sigma(\varphi_D) = 1$ . El análisis para cuando  $i$  es de otro color es análogo.

# Satisfactibilidad

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

( $\Rightarrow$ ) (continuación)

- $\sigma(\varphi_M)$ : por construcción de  $\sigma$  es claro que  $\sigma(\varphi_M) = 1$ , dado que la construimos precisamente como esta fórmula, asignando 1 a pares de países adyacentes y 0 a los que no.

Finalmente, como  $\varphi$  es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que  $\sigma(\varphi) = 1$ , y entonces  $\varphi$  es satisfactible.

La dirección opuesta comienza suponiendo que  $\varphi$  es satisfactible

# Satisfactibilidad

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

( $\Leftarrow$ ) **P.D.** Si  $\varphi$  es satisfactible, entonces  $M$  es 3-coloreable.

Supongamos que  $\varphi$  es satisfactible. Luego, existe una valuación  $\sigma$  tal que  $\sigma(\varphi) = 1$ , y por construcción  $\sigma(\varphi_C) = \sigma(\varphi_D) = \sigma(\varphi_M) = 1$ . Usaremos esta valuación para colorear el mapa.

En primer lugar, como  $\sigma(\varphi_C) = 1$ , sabemos que para cada  $i$ ,  $\sigma(r_i \vee g_i \vee b_i) = 1$ , y por lo tanto cada país tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\sigma(r_k) = 1$ , es decir, pintamos el país  $k$  rojo. Como también se cumple que  $\sigma(r_k \rightarrow (\neg g_k \wedge \neg b_k)) = 1$ , necesariamente  $\sigma(g_k) = 0$  y  $\sigma(b_k) = 0$ , y por lo tanto cada país tiene un único color.

Esta dirección busca deducir la **existencia**  
de una coloración a partir de la valuación

## Ejercicio (mapa 3-coloreable)

( $\Leftarrow$ ) (continuación)

En segundo lugar, como  $\sigma(\varphi_M) = 1$ , sabemos que si  $i, j$  son adyacentes en  $M$ ,  $\sigma(p_{ij}) = 1$ , y si no lo son,  $\sigma(p_{ij}) = 0$ . Ahora, en  $\sigma(\varphi_D) = 1$ , solo nos interesa el primer caso (dado que en el segundo no podemos concluir nada de la implicancia). Tomemos entonces  $i, j$  adyacentes, y sin pérdida de generalidad supongamos que  $\sigma(r_i) = 1$ . Como  $\sigma(r_i \rightarrow \neg r_j) = 1$  para todo  $j$  adyacente a  $i$ , necesariamente  $\sigma(r_j) = 0$ , y entonces los países adyacentes no pueden estar pintados del mismo color.

Concluimos que usando los colores asignados por  $\varphi$  a través de  $r_i, g_i, b_i$ , podemos 3-colorear  $M$ .

# Otros conceptos asociados a satisfactibilidad

## Definición

Una fórmula  $\varphi$  es una **contradicción** si no es satisfactible; es decir, para toda valuación  $\sigma$  se tiene que  $\sigma(\varphi) = 0$ .

## Ejemplo

$$p \wedge \neg p$$

## Definición

Una fórmula  $\varphi$  es una **tautología** si para toda valuación  $\sigma$  se tiene que  $\sigma(\varphi) = 1$ .

## Ejemplo

$$p \vee \neg p$$

$$p \leftrightarrow p$$



# Otros conceptos asociados a Satisfactibilidad

## Definición

Una fórmula  $\varphi$  es una **tautología** si para toda valuación  $\sigma$  se tiene que  $\sigma(\varphi) = 1$ .

Podemos definir la equivalencia lógica de una manera alternativa:

## Teorema

Dos fórmulas  $\varphi, \psi \in L(P)$  son lógicamente equivalentes si  $\varphi \leftrightarrow \psi$  es una tautología.

Demuestre el teorema (★)

# Outline

Conectivos funcionalmente completos

Satisfactibilidad

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfactibilidad de fórmulas y conjuntos
- Aplicar lógica para modelar problemas