Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 2

25 de Octubre de 2024

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

- ¿Son ciertas las siguientes equivalencias? Argumente su respuesta.

  (a) (1.5 ptos) $\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\exists x\,(\varphi(x))) \wedge (\exists x\,(\psi(x)))$

  (b) (1.5 ptos) $\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \equiv (\forall x\,(\varphi(x))) \rightarrow (\forall x\,(\psi(x)))$

- Usaremos lógica de predicados para expresar propiedades sobre un conjunto de animales. Estos animales pueden ser perros o gatos, y se pueden perseguir entre ellos. Para esto, considere dos predicados unarios P y G, y dos predicados binarios R y $=$, junto con la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &= \text{un conjunto de animales} \\
\mathcal{I}(P(x)) &= x \text{ es un perro} \\
\mathcal{I}(G(x)) &= x \text{ es un gato} \\
\mathcal{I}(R(x,y)) &= x \text{ persigue a } y \\
\mathcal{I}(x = y) &= x \text{ es igual a } y
\end{aligned}$$

  En cada caso, escriba una fórmula en lógica de predicados que exprese la propiedad pedida.

  (c) (1.5 ptos) Todo animal debe ser un perro o un gato, pero no ambas.

  (d) (1.5 ptos) Todo gato debe perseguir a lo más a dos perros.

Solución

(a) No es cierta. Es posible que la fórmula de la derecha sea verdadera, pero la de la izquierda sea falsa. Esto puede pasar ya que $\exists x\,(\varphi(x))$ se puede hacer verdadero ya que existe cierto elemento a tal que $\varphi(a)$ es verdadero, y $\exists x\,(\psi(x))$ se puede hacer verdadero ya que existe un elemento *distinto* b tal que $\psi(b)$ es verdadero. Esto no implica que exista un elemento c tal que $\varphi(c)$ y $\psi(c)$ sean verdaderos simultáneamente.

Formalmente, podemos tomar dos símbolos de predicados unarios P y Q, y una interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio es $\mathcal{I}(dom) = \{a, b\}$, y la interpretación de los predicados es $\mathcal{I}(P(x)) = (x = a)$ y $\mathcal{I}(Q(x)) = (x = b)$. Tenemos que $\mathcal{I} \models (\exists x\,(P(x))) \wedge (\exists x\,(Q(x)))$ pero $\mathcal{I} \not\models \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$.

(b) No es cierta. Es posible que la fórmula de la derecha sea verdadera, pero la de la izquierda sea falsa. Esto puede pasar ya que $\forall x\,(\varphi(x))$ puede ser falso y luego la implicancia $(\forall x\,(\varphi(x))) \rightarrow (\forall x\,(\psi(x)))$ sería verdadera. El hecho de que $\forall x\,(\varphi(x))$ sea falso sólo nos dice que existe un elemento a tal que $\varphi(a)$ es falso. Podrían existir un elemento distinto b tal que $\varphi(b)$ sea verdadero, y que $\psi(b)$ sea falso, por lo cual $\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ podría ser falsa.

Formalmente, podemos tomar el mismo contraejemplo que en la pregunta anterior. Tenemos dos símbolos de predicados unarios P y Q, y una interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio es $\mathcal{I}(dom) = \{a, b\}$, y la interpretación de los predicados es $\mathcal{I}(P(x)) = (x = a)$ y $\mathcal{I}(Q(x)) = (x = b)$. Tenemos que $\mathcal{I} \models (\forall x\,(P(x))) \rightarrow (\forall x\,(Q(x)))$, ya que $P(b) = 0$, pero $\mathcal{I} \not\models \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$, ya que $P(a) = 1$ y $Q(a) = 0$.

(c) Una posibilidad:

$$\forall x\,((P(x) \wedge \neg G(x)) \vee (G(x) \wedge \neg P(x))).$$

Otra posibilidad:

$$\forall x\,((P(x) \vee G(x)) \wedge \neg(P(x) \wedge G(x))).$$

(d) Una posibilidad:

$$\forall x\,\big(G(x) \rightarrow \neg(\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3\,(P(y_1) \wedge P(y_2) \wedge P(y_3) \wedge R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge R(x, y_3) \wedge y_1 \neq y_2 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge y_1 \neq y_3))\big).$$

Otra posibilidad:

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 \forall y_3\,\big((G(x) \wedge P(y_1) \wedge P(y_2) \wedge P(y_3) \wedge R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge R(x, y_3)) \rightarrow (y_1 = y_2 \vee y_2 = y_3 \vee y_1 = y_3))\big).$$

Pauta (6 ptos)

a) 0.5 pts por decir que no son equivalentes. 1.0 pts por argumentar correctamente. Se acepta que no se dé una interpretación concreta como contraejemplo, siempre y cuando se explique claramente por qué una fórmula puede ser verdadera y la otra no.

b) 0.5 pts por decir que no son equivalentes. 1.0 pts por argumentar correctamente. Se acepta que no se dé una interpretación concreta como contraejemplo, siempre y cuando se explique claramente por qué una fórmula puede ser verdadera y la otra no.

c) 1.5 pts si la fórmula está completamente correcta.

d) 1.5 pts si la fórmula está completamente correcta.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2

(a) (2.0 pts) Sea $f : A \to B$ una función. Para un subconjunto $X \subseteq A$, definimos su *imagen* como $f(X) = \{f(x) \in B \mid x \in X\} \subseteq B$. Por otra parte, para un subconjunto $Y \subseteq B$, definimos su *preimagen* como $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A$. Decimos que un subconjunto $X \subseteq A$ es *estable* si $f^{-1}(f(X)) = X$. Demuestre que

$$f \text{ es inyectiva} \iff \text{para todo subconjunto } X \subseteq A, \text{ se tiene que } X \text{ es estable.}$$

(b) (2.0 pts) Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Sea R una relación de equivalencia en A. Definimos sobre B la relación *imagen de* R, denotada por $f(R)$, como:

$$(b, b') \in f(R) \iff \text{existen } a, a' \in A \text{ tal que } f(a) = b,\ f(a') = b' \text{ y } (a, a') \in R.$$

Demuestre que si f es inyectiva, entonces $f(R)$ es de equivalencia.

(c) (2.0 pts) Siguiendo con la pregunta anterior, muestre un ejemplo en donde f no es inyectiva, y $f(R)$ no es de equivalencia.

Solución

(a) Separemos el si y sólo si en dos implicancias:

($\Rightarrow$):
Supongamos que f es inyectiva. Debemos demostrar que todo subconjunto $X \subseteq A$ es estable. Sea $X \subseteq A$ arbitrario. Primero notemos que por definición se cumple $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Efectivamente, si $x \in X$, por definición de imagen se tiene $f(x) \in f(X)$, y por definición de preimagen se tiene $x \in f^{-1}(f(X))$. Veamos ahora que $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$. Sea $x \in f^{-1}(f(X))$. Por definición de preimagen, se tiene $f(x) \in f(X)$. Por definición de imagen, existe $x' \in X$ tal que $f(x) = f(x')$. Por hipotesis, f es inyectiva, y luego $x = x'$. Concluimos que $x \in X$. Luego $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$. Obtuvimos que $f^{-1}(f(X)) = X$, luego X es estable.

($\Leftarrow$):
Supongamos que todo subconjunto $X \subseteq A$ es estable. Debemos demostrar que f es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(x')$, para $x, x' \in A$. Consideremos el subconjunto $X = \{x\}$. Como $f(X) = \{f(x)\}$, tenemos que $f(x') \in f(X)$. Por definición de preimagen, se cumple que $x' \in f^{-1}(f(X))$. Por hipótesis, X debe ser estable y luego $f^{-1}(f(X)) = X$. Concluimos que $x' \in X$, es decir, $x' = x$.

(b) Supongamos que f es inyectiva. Debemos demostrar que $f(R)$ es una relación de equivalencia sobre B:

<u>Refleja</u>: Sea $b \in B$. Como f es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como R es refleja, tenemos que $(a, a) \in R$, y por definición de $f(R)$, concluimos que $(b, b) \in f(R)$.

<u>Simétrica</u>: Supongamos que $(b, b') \in f(R)$, para $b, b' \in B$. Por definición, existen elementos $a, a' \in A$ tal que $f(a) = b$, $f(a') = b'$ y $(a, a') \in R$. Como R es simétrica, $(a', a) \in R$. Por definición de $f(R)$, obtenemos que $(b', b) \in f(R)$.

<u>Transitiva</u>: Supongamos que $(b_1, b_2) \in f(R)$ y $(b_2, b_3) \in f(R)$, para $b_1, b_2, b_3 \in B$. Como $(b_1, b_2) \in f(R)$, existen elementos $a_1, a_2 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ y $(a_1, a_2) \in R$. Por otra parte,

como $(b_2, b_3) \in f(R)$, existen elementos $a_2', a_3 \in A$ tal que $f(a_2') = b_2$, $f(a_3) = b_3$ y $(a_2', a_3) \in R$. Por hipótesis, f es inyectiva, y luego $a_2 = a_2'$. Por transitividad de R, obtenemos que $(a_1, a_3) \in R$, y por definición de $f(R)$, concluimos que $(b_1, b_3) \in f(R)$.

(c) Notar que sólo usamos la inyectividad para demostrar transitividad. Si f no es inyectiva, efectivamente la transitividad de $f(R)$ puede fallar. Tomemos $A = \{a_1, a_2, a_2', a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, y $f : A \to B$, tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_2') = b_2$, $f(a_3) = b_3$. La relación de equivalencia R sobre A se define de manera que las clases de equivalencia son $\{a_1, a_2\}$ y $\{a_2', a_3\}$. Notar que f es sobreyectiva. Por otra parte, f no es inyectiva. Veamos que $f(R)$ no es transitiva. Tenemos que $(b_1, b_2) \in f(R)$, ya que podemos tomar $a_1, a_2 \in A$, y se cumple $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ y $(a_1, a_2) \in R$. Además, tenemos que $(b_2, b_3) \in f(R)$, ya que podemos tomar $a_2', a_3 \in A$, y se cumple $f(a_2') = b_2$, $f(a_3) = b_3$ y $(a_2', a_3) \in R$. Por otro lado, tenemos que $(b_1, b_3) \notin f(R)$, ya que los únicos elementos que podríamos escoger son $a_1, a_3 \in A$ ya que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_3) = b_3$, pero $(a_1, a_3) \notin R$.

Pauta (6 ptos)

a) 1.0 pts por cada dirección del si y sólo si.

b) 0.5 pts por demostrar que es refleja, 0.5 pts por simétrica, 1.0 pts por transitiva.

c) 1.0 pts por dar el ejemplo. 1.0 pts por demostrar que el ejemplo es correcto.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3

Sea A un conjunto. Recuerde que una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una colección de subconjuntos de A tal que: (i) para todo $X \in \mathcal{P}$, se tiene $X \neq \varnothing$; (ii) $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X = A$; (iii) para todo $X, Y \in \mathcal{P}$, si $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \varnothing$.
Sea $\mathbb{P}(A)$ el conjunto de todas las particiones de A. Definimos la relación *refinamiento* $\preceq$ sobre $\mathbb{P}(A)$ como sigue:

$$\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}' \iff \text{para todo } X \in \mathcal{P}, \text{ existe } Y \in \mathcal{P}' \text{ tal que } X \subseteq Y.$$

(a) (2.0 pts) Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{P}(A)$.

(b) (1.0 pts) ¿Es $\preceq$ un orden total? Argumente su respuesta.

(c) (3.0 pts) Demuestre que para todo par de particiones $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}(A)$, tal que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$, se cumple que el conjunto $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$ tiene un ínfimo con respecto a $\preceq$.
(*Hint:* considere intersecciones entre conjuntos de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$.)

Solución

(a) Veamos que $\preceq$ es orden parcial.

Refleja: Sea $\mathcal{P} \in \mathbb{P}(A)$. Tenemos que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}$ ya que para todo $X \in \mathcal{P}$, podemos tomar el mismo $X \in \mathcal{P}$, el cual cumple que $X \subseteq X$.

Transitiva: Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}', \mathcal{P}'' \in \mathbb{P}(A)$ tal que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}' \preceq \mathcal{P}''$. Sea $X \in \mathcal{P}$ arbitrario. Como $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, existe $Y \in \mathcal{P}'$ tal que $X \subseteq Y$. A su vez, como $\mathcal{P}' \preceq \mathcal{P}''$, existe $Z \in \mathcal{P}''$ tal que $Y \subseteq Z$. Por transitividad de $\subseteq$, obtenemos que $X \subseteq Z$. Concluimos que para todo $X \in \mathcal{P}$, existe $Z \in \mathcal{P}''$, tal que $X \subseteq Z$. Por definición, esto implica que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}''$.

Antisimétrica: Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}(A)$ tal que $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$ y $\mathcal{P}' \preceq \mathcal{P}$. Debemos demostrar que $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$. Probaremos que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$. Aplicando el argumento simétrico obtenemos que $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$. Sea $X \in \mathcal{P}$ arbitrario. Como $\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}'$, existe $Y \in \mathcal{P}'$ tal que $X \subseteq Y$. A su vez, como $\mathcal{P}' \preceq \mathcal{P}$, existe $Z \in \mathcal{P}$ tal que $Y \subseteq Z$. Tenemos que $X \subseteq Z$ y en particular $X \cap Z \neq \varnothing$. Por definición de partición, esto implica que $X = Z$. Concluimos que $Y = X$, y luego $X \in \mathcal{P}'$.

(b) No es un orden total. Por ejemplo, tomemos $A = \{1, 2, 3\}$. Las particiones $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ y $\mathcal{P}' = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ son incomparables. Efectivamente, tenemos que $\mathcal{P} \not\preceq \mathcal{P}'$ ya que $\{1, 2\} \not\subseteq \{1\}$ y $\{1, 2\} \not\subseteq \{2, 3\}$, y $\mathcal{P}' \not\preceq \mathcal{P}$ ya que $\{2, 3\} \not\subseteq \{1, 2\}$ y $\{2, 3\} \not\subseteq \{3\}$.

(c) Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}(A)$ tal que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$. Definamos la siguiente colección de subconjuntos de A:

$$\mathcal{Q} = \{X \cap Y \mid X \in \mathcal{P}, Y \in \mathcal{P}', X \cap Y \neq \varnothing\}.$$

Demostraremos que $\mathcal{Q}$ es el ínfimo de $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$. Primero debemos verificar que $\mathcal{Q}$ es una partición de A. La condición (i) en la definición de partición se cumple por definición de $\mathcal{Q}$. Veamos la condición (ii). Basta ver que $A \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{Q}} W$. Sea $a \in A$ arbitrario. Como $\mathcal{P}$ es partición, existe $X \in \mathcal{P}$ tal que $a \in X$. Como $\mathcal{P}'$ es partición, existe $Y \in \mathcal{P}'$ tal que $a \in Y$. Luego, $a \in X \cap Y$. Tomando $W = X \cap Y$, tenemos que $W \in \mathcal{Q}$ y $a \in W$. Concluimos que $a \in \bigcup_{W \in \mathcal{Q}} W$. Veamos la condición (iii). Sean $W = X \cap Y \in \mathcal{Q}$ y $W' = X' \cap Y' \in \mathcal{Q}$, tal que $W \cap W' \neq \varnothing$, y donde $X, X' \in \mathcal{P}$ e $Y, Y' \in \mathcal{P}'$. Luego, existe $a \in W$ y $a \in W'$. Sigue que $a \in X$, $a \in Y$, $a \in X'$ y $a \in Y'$. En particular, se tiene que $a \in X \cap X'$ y $a \in Y \cap Y'$. Luego, $X \cap X' \neq \varnothing$ y $Y \cap Y' \neq \varnothing$. Como $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones, tenemos que $X = X'$ e $Y = Y'$. Esto implica que $W = W'$.

Veamos que $\mathcal{Q}$ es cota inferior de $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$. Sea $W \in \mathcal{Q}$ arbitrario. Sabemos que W debe tener la forma $W = X \cap Y$, para algún $X \in \mathcal{P}$ y algún $Y \in \mathcal{P}'$. En particular, $W \subseteq X$ y $W \subseteq Y$. Concluimos que $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$ y $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}'$. Veamos que $\mathcal{Q}$ es la cota inferior más grande. Sea $\mathcal{I}$ una cota inferior arbitraria de $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$. Demostraremos que $\mathcal{I} \preceq \mathcal{Q}$. Sea $Z \in \mathcal{I}$ arbitrario. Como $\mathcal{I} \preceq \mathcal{P}$, existe $X \in \mathcal{P}$ tal que $Z \subseteq X$. Como $\mathcal{I} \preceq \mathcal{P}'$, existe $Y \in \mathcal{P}'$ tal que $Z \subseteq Y$. Como $Z \subseteq X$ y $Z \subseteq Y$, tenemos que $Z \subseteq X \cap Y$. Luego, si tomamos $W = X \cap Y$, tenemos que $W \in \mathcal{Q}$ y $Z \subseteq W$. Poniendo todo junto, deducimos que para todo $Z \in \mathcal{I}$, existe $W \in \mathcal{Q}$ tal que $Z \subseteq W$, es decir, $\mathcal{I} \preceq \mathcal{Q}$. Concluimos que $\mathcal{Q}$ es el ínfimo de $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$.

Pauta (6 ptos)

(a) 0.5 pts por refleja, 0.5 pts por transitividad, 1.0 pts por antisimetría.

(b) 0.2 pts por decir que no es orden total. 0.8 pts por dar un argumento correcto.

(c) 0.5 pts por definir correctamente el ínfimo. 0.75 pts por demostrar que es partición. 0.75 pts por demostrar que es cota inferior. 1.0 pts por demostrar que es la cota superior más grande.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4

Considere el conjunto $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ que contiene todos los subconjuntos de los números naturales $\mathbb{N}$ que son *finitos*.

(a) (5.0 pts) Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ es enumerable.

(b) (1.0 pts) Considere el conjunto $\mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ de todos los subconjuntos A de $\mathbb{N}$ tal que $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. ¿Es $\mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ enumerable? Argumente su respuesta.

Observación: En ambas partes puede utilizar resultados de enumerabilidad y no enumerabilidad vistos en clases y ayudantías.

Solución

(a) Daremos primero una solución que utilizan el hecho de que la unión numerable de conjuntos finitos o numerables, sigue siendo numerable (visto en ayudantía). Demostremos que:

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}).$$

Recordar que $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$ es el conjunto potencia de $\{0,\dots,n\}$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, cada subconjunto de $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$ es finito, luego $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Concluimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Por otro lado, sea $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ arbitrario. Como A es finito, debe existir un $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \{0,\dots,n\}$ (por ejemplo, podemos tomar n como el máximo número que aparece en A). En otras palabras, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$. Por definición de unión generalizada, esto es equivalente a decir que $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$. Concluimos que $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\})$ es finito (tiene 2^{n+1} elementos). Luego $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ es la unión numerable de conjuntos finitos, y por lo tanto es numerable.

Una segunda solución es usar el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein y probar que existen funciones inyectivas $f : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$.

Podemos definir $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ como $g(n) = \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta función claramente es inyectiva.

Podemos definir $f : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ como sigue. Sea $A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A = \{a_1,\dots,a_m\}$, donde $a_1 < \cdots < a_m$. Para un número natural n, denotamos por $\text{bin}(n)$ a su notación binaria. Definimos $f(A)$ como el natural dado por la siguiente concatenación de dígitos:

$$f(A) = \text{bin}(a_1)\, 2\, \text{bin}(a_2)\, 2\, \cdots 2\, \text{bin}(a_m).$$

Notar que $f(A)$ sólo ocupa los dígitos $\{0,1,2\}$. A modo de ejemplo,

$$f(\{2,5,7\}) = \text{bin}(2)\, 2\, \text{bin}(5)\, 2\, \text{bin}(7) = 1021012111.$$

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que $f(A) = f(B)$, para $A, B \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Supongamos que $A = \{a_1\, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1\, \dots, b_\ell\}$. Tenemos la siguiente igualdad dígito a dígito:

$$\text{bin}(a_1)\, 2\, \text{bin}(a_2)\, 2\, \cdots 2\, \text{bin}(a_m) = \text{bin}(b_1)\, 2\, \text{bin}(b_2)\, 2\, \cdots 2\, \text{bin}(b_\ell).$$

Notar que el dígito 2 funciona como separador. Como $\text{bin}(a_1)$ y $\text{bin}(b_1)$ no usan el dígito 2, el primer 2 de izquierda a derecha aparece exactamente en la misma posición en $f(A)$ y $f(B)$. Esto implica que $\text{bin}(a_1) = \text{bin}(b_1)$ y luego $a_1 = b_1$. El segundo 2 de izquierda a derecha también aparece exactamente en la misma posición en $f(A)$ y $f(B)$, de lo cual se deduce que $a_2 = b_2$. Repitiendo este argumento, deducimos que $m = \ell$, y que $a_i = b_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. En particular, se tiene que $A = B$.

(b) El conjunto $\mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ es enumerable. Podemos definir una biyección $f : \mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ como $f(A) = \mathbb{N} \setminus A$. Veamos que f es biyección. Primero veamos que f es inyectiva. Supongamos que $f(A) = f(B)$ para $A, B \in \mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$. Luego, $\mathbb{N} \setminus A = \mathbb{N} \setminus B$, y entonces $A = B$. Veamos que f es sobreyectiva. Sea $C \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ arbitrario. Podemos tomar $A = \mathbb{N} \setminus C$. Tenemos que $A \in \mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ y $f(A) = C$.

Pauta (6 ptos)

(a) 1.0 pts por identificar una estrategia correcta para demostrar enumerabilidad (ya sea mediante union numerable de conjuntos numerables o via el Teorema Cantor-Schröder-Bernstein). 4.0 pts por dar una demostración correcta de la enumerabilidad.

(b) 0.2 pts por decir que es enumerable. 0.8 pts por argumentar correctamente que es enumerable (usando la biyección por ejemplo.)