Guía ejercicios - Repaso I2

Pedro Bahamondes

October 23, 2024

1 Teoría de conjuntos

1. Sea $C := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \to \psi\}$ y $D := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \leftrightarrow \psi\}$. Demuestre que $C \subsetneq D$.
2. Considere las relaciones usuales $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ y $=$ sobre los naturales. Demuestre que
   (a) $< \subsetneq \leq$
   (b) $> \subsetneq \geq$
   (c) $< \cap > = \varnothing$
   (d) $\leq \cap \geq = =$
   (e) $< \cup > = \mathbb{N}^2 \setminus =$
   (f) $\leq \cup \geq = \mathbb{N}^2$
3. Sea A un conjunto y R una relación refleja sobre A. Demuestre que $= \subseteq R \subseteq A^2$.

2 Relaciones

1. Sea P un conjunto de variables proposicionales y sea $\leq_{\to} := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(P) \times \mathcal{L}(P) \mid \varphi \to \psi\}$. Demuestre que $\leq_{\to}$ es una relación refleja y transitiva sobre $\mathcal{L}(P)$.
2. Sea P un conjunto de variables proposicionales, sea $\mathbb{L} := \mathcal{L}(P)/\equiv$ y sea $\preceq_{\to}$ definida por
$$\preceq_{\to} := \{(A, B) \in \mathbb{L}^2 \mid \exists \varphi \in A \quad \exists \psi \in B \quad \varphi \to \psi\}$$
   Demuestre que $\preceq_{\to}$ es una relación de orden parcial sobre $\mathbb{L}$.
3. Sea $f : A \to B$ una función y definamos $\equiv_f$ como la relación dada por
$$a \equiv_f a' \text{ si y sólo si } f(a) = f(a')$$
   Demuestre que $\equiv_f$ es una relación de equivalencia.
4. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva y definamos $\leq_f$ como la relación dada por
$$a \leq_f a' \text{ si y sólo si } f(a) \leq f(a')$$
   Demuestre que $\leq_f$ es una relación de orden parcial.
5. Demuestre que la relación $\equiv$ sobre $\mathcal{L}(P)$ es una relación de equivalencia.
6. Demuestre que la relación $\approx$ (equinumerosidad) sobre conjuntos es una relación de equivalencia.
7. Defina $\preceq$ como la siguiente relación binaria sobre funciones de A en B:
$$f \preceq g \text{ si y sólo si } f(A) \subseteq g(A)$$
   Demuestre que $\preceq$ es una relación refleja y transitiva. Demuestre que $\preceq$ no es antisimétrica.

8. Definimos el conjunto de rectas bidimensionales con coeficientes reales como el conjunto de funciones $R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists m \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{R} \quad f = x \mapsto mx + n\}$. Diremos que dos rectas f y g en R son paralelas, lo que denotamos por $f \parallel g$ si existen m, n, n' en $\mathbb{R}$ tales que $f = x \mapsto mx + n$ y $g = x \mapsto mx + n'$. Demuestre que $\parallel$ es una relación de equivalencia sobre R.

9. Definimos el conjunto de triángulos en el plano cartesiano Δ como

$$\Delta := \{\{(a,b),(c,d),(e,f)\} \subsetneq \mathbb{R}^2 \mid (a,b) \neq (c,d) \wedge (c,d) \neq (e,f) \wedge (a,b) \neq (e,f)\}$$

(es decir, un triángulo está definido por exactamente tres puntos distintos en el plano). Diremos que dos triángulos $T_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ y $T_2 = \{q_1, q_2, q_3\}$ son congruentes si el largo de sus aristas son iguales, es decir, si existen r_1, r_2 y r_3 en T_2 tales que $d(r_1, r_2) = d(p_1, p2)$, $d(r_2, r_3) = d(p_2, p_3)$ y $d(r_3, r_1) = d(p_3, p_1)$, donde d es la función de distancia euclidiana entre puntos dada por:

$$d((a,b),(c,d)) := \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Lo denotamos por $T_1 \approx T_2$. Demuestre que $\approx$ es una relación de equivalencia sobre triángulos.

10. Defina de manera similar el conjunto de círculos en el plano y la relación compuesta por los pares de círculos de igual radio. Demuestre que dicha relación es una relación de equivalencia.

11. Sea A un conjunto, $\equiv$ una relación de equivalencia sobre A y $\preceq$ la relación $A/\equiv$ dada por

$$[B]_\equiv \preceq [C]_\equiv \text{ si y sólo si existe una función inyectiva } f : [B]_\equiv \to [C]_\equiv$$

Demuestre que $\preceq$ define un orden parcial sobre $A/\equiv$

12. Sea A un conjunto y $\prec$ una relación binaria sobre A. Decimos que $\prec$ es una relación de orden estricto si es una relación asimétrica y transitiva.

   (a) Dé ejemplos de conjuntos con relaciones de orden estricto.
   (b) Demuestre que $\preceq = \prec \cup =$ es una relación de orden parcial.
   (c) ¿Qué condiciones hay que exigir sobre $\prec$ para que $\preceq$ sea un orden total? Demuéstrelo. Cuando ello ocurre, diremos que la relación es una relación de orden estricto total.

3 Elementos extremos

1. Encuentre elementos minimales y mínimos para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sobre el orden parcial $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$:

   (a) Los números pares
   (b) Los números impares
   (c) Los números primos
   (d) Las potencias de 2

2. Sea A un conjunto. Demuestre que en el orden parcial $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $\mathcal{P}(A)$ tiene mínimo y máximo.

3. Sea k un número natural y $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con exactamente k elementos. Demuestre que todos los elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ son a la vez minimales y maximales.

4. Sea P un conjunto de variables proposicionales y considere la relación de equivalencia $\equiv$ sobre $\mathcal{L}(P)$. Sobre $\mathcal{L}(P)/\equiv$, definimos la relación $\preceq$ dada por

$$\varphi \preceq \psi \text{ si y sólo si para toda valuación } \sigma \text{, se tiene que } \sigma(\varphi) \leq \sigma(\psi)$$

Demuestre que $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{L}(P)/\equiv$ y encuentre los elementos mínimo y máximo para el conjunto $\mathcal{L}(P)$ en el orden parcial que define $(\mathcal{L}(P), \preceq)$.

4 Cardinalidad

1. Sea N un conjunto no enumerable y $E \subseteq N$ un conjunto enumerable. Demuestre que $N \setminus E$ es no enumerable.

2. Demuestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ es enumerable.

3. Demuestre que el conjunto $C := \mathbb{Q} \cup \{\pi + n \mid n \in \mathbb{Q}\}$ es enumerable.

4. Sea $\mathcal{R} = \{R \mid R$ es una relación binaria sobre $\mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es no enumerable.

5. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestre que si $A \approx C$ entonces $B \approx C$.

6. Sea $\mathcal{F} := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{F} \approx \mathbb{R}$.

7. Sea $\mathcal{B} := \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es no enumerable.

8. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Demuestre que $f(\mathbb{N}) := \{y \mid \exists x \in \mathbb{N} \quad f(x) = y\}$ es enumerable.

9. Sea k un número natural y $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ con exactamente k elementos. Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbb{N}, k)$ es enumerable.

10. Considere el juego de 'cachipún' o 'piedra-papel-o-tijera' (PPT), con repetición en caso de empate. Un turno de PPT se puede representar como un elemento del conjunto

$$\mathcal{T} = \{PP, PT, PR, TP, TT, TR, RP, RT, RR\}$$

(donde cada letra representa la tirada del respectivo jugador, siendo P papel, T tijera y R roca o piedra). Una jugada de PPT se puede representar como una secuencia de turnos $(t_1, t_2, ...)$, la que será finita en caso de que alguno de los jugadores gane en alguno de sus turnos, o infinita en caso de que la secuencia consista de infinitos empates sucesivos. Demuestre que las secuencias posibles de 'cachipún' son no enumerables.