Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 8 - Relaciones de Orden

11 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial, y sean $S \subseteq A, x \in A$.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior. Análogamente se define el supremo de un conjunto.

1. Meme del día

Queda como ejercicio para el lector.

2. Relaciones, relaciones, relaciones

Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definimos la relación binaria Ω siguiente:

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$, entonces

$$\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \Longrightarrow x\mathcal{R}_2 y)$$

Demuestre que Ω es una relación de orden, y además que no es un orden total en A.

3. Verdadero y Falso

Sea A un conjunto no vacío y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial. En esta pregunta refiérase siempre a este orden parcial y responda verdadero o falso según corresponda. En caso de ser verdadero, demuéstrelo, y en caso de ser falso, dé un contraejemplo y explíquelo.

1. Si S tiene un mínimo para todo $S \subseteq A$ con $S \neq \varnothing$, entonces $\preceq$ es un orden total.
2. Si $\preceq$ es un orden total, entonces S tiene un mínimo para todo $S \subseteq$ A con $S \neq \varnothing$.
3. Para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.

4. La mezcla

Sea A un conjunto no vacío, $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial, ambos sobre A. Considere el conjunto cuociente $A/\simeq$ y defina la siguiente relación $\ll \subseteq (A/\simeq) \times (A/\simeq)$:

$$(S_1, S_2) \in \ll \text{ si, y solo si, existe } a \in S_1 \text{ tal que } \forall b \in S_2 \text{ se cumple que } a \preceq b$$

La clausura refleja de una relación R aplicada sobre el conjunto A se define como la relación refleja más pequeña aplicada sobre A que contiene a R. Esta se denota como R^r y cumple las siguientes propiedades:

1. $R \subseteq R^r$
2. R^r es refleja
3. Si R' es una relación refleja tal que $R \subseteq R'$, entonces $R^r \subseteq R'$

Dicho de forma sencilla, a la relación R le añadimos las relaciones necesarias para que sea refleja.

1. Demuestre que $\ll^r$ es un orden parcial sobre $A/\simeq$ donde $\ll^r$ es la clausura refleja de $\ll$.
2. ¿Es verdad que A tiene un elemento minimal según $\preceq$ si, y solo si, $A/\simeq$ tiene un elemento minimal según $\ll^r$? Demuestre su afirmación.

5. Funciones

Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \to B$ es *creciente* si dados $x, y \in A$ tales que $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

1. Demuestre que si f es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contraejemplo.