Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 3

23 de septiembre de 2024

2º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - M. Romero

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 02 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

(a) Sean φ, ψ, θ fórmulas proposicionales, y Σ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre que si $\varphi \to \psi$ es tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.

(b) Sean Σ, Σ' conjuntos de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional. Demuestre que si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$.

(c) Nos gustaría demostrar en lógica proposicional la siguiente propiedad conocida:

Suponga que f es una función inyectiva de A a B y que A y B son conjuntos finitos con la misma cantidad de elementos. Entonces f debe ser sobreyectiva.

Formularemos esto para el caso en que A y B tienen dos elementos, digamos que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. Consideremos las siguientes variables proposicionales $P = \{p_{1,a}, p_{1,b}, p_{2,a}, p_{2,b}\}$, y las siguientes fórmulas proposicionales:

$$\begin{aligned}
\varphi_f &= (p_{1,a} \vee p_{1,b}) \wedge (p_{1,a} \to \neg p_{1,b}) \wedge (p_{1,b} \to \neg p_{1,a}) \wedge \\
&\qquad \wedge (p_{2,a} \vee p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \to \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,b} \to \neg p_{2,a}) \\
\varphi_i &= (p_{1,a} \to \neg p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \to \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \to \neg p_{1,a}) \wedge (p_{2,b} \to \neg p_{1,b}) \\
\varphi_s &= (p_{1,a} \vee p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \vee p_{2,b})
\end{aligned}$$

Note que las variables en P representan una posible función de A a B: si $p_{x,y}$ es verdadero, entonces x es asignado a y. La fórmula φ_f expresa que las variables realmente representan una función. Las fórmulas φ_i y φ_s expresan que la función es inyectiva y sobreyectiva, respectivamente. Utilizando el método de resolución visto en clases, demuestre que $\{\varphi_f, \varphi_i\} \models \varphi_s$.

Solución

(a) Separamos el si y sólo si en dos implicancias.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$. Debemos demostrar que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$. Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$. Hay demostrar que $\sigma(\theta) = 1$. Como $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$, tenemos que $\sigma(\varphi) = 1$. Por hipótesis, sabemos que $\varphi \to \psi$ es tautología. Esto implica que $\sigma(\psi) = 1$. Se tiene entonces que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}) = 1$. Como por hipótesis sabemos que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$, concluimos que $\sigma(\theta) = 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$. Debemos demostrar que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$. Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}) = 1$. Hay demostrar que $\sigma(\theta) = 1$. Como $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}) = 1$, tenemos que $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$. Como por hipótesis sabemos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$, concluimos que $\sigma(\theta) = 1$.

(Notar que en esta dirección no necesitamos la hipótesis de que $\varphi \to \psi$ es tautología.)

(b) Supongamos que $\Sigma \models \varphi$. Debemos demostrar que $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$. Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \Sigma') = 1$. Hay demostrar que $\sigma(\varphi) = 1$. Como $\sigma(\Sigma \cup \Sigma') = 1$, sabemos que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como por hipótesis tenemos que $\Sigma \models \varphi$, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$.

(c) Tenemos que $\varphi_f \equiv \Sigma_{\varphi_f}$, $\varphi_i \equiv \Sigma_{\varphi_i}$ y $\neg\varphi_s \equiv \Sigma_{\varphi_s}$, donde Σ_{φ_f}, Σ_{φ_i} y Σ_{φ_s} son los siguientes conjuntos de cláusulas:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\varphi_f} &= \{(p_{1,a} \vee p_{1,b}), (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{1,b} \vee \neg p_{1,a}), (p_{2,a} \vee p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,b} \vee \neg p_{2,a})\}\\
\Sigma_{\varphi_i} &= \{(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,a}), (\neg p_{1,b} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,a}), (\neg p_{2,b} \vee \neg p_{1,b})\}\\
\Sigma_{\varphi_s} &= \{(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{2,b})\}
\end{aligned}$$

Luego debemos demostrar que el siguiente conjunto $\Sigma \equiv \{\varphi_f, \varphi_i, \neg\varphi_s\}$ es inconsistente utilizando el método de resolución:

$$\begin{aligned}
\Sigma = \{&(p_{1,a} \vee p_{1,b}), (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{1,b} \vee \neg p_{1,a}), (p_{2,a} \vee p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,b} \vee \neg p_{2,a}),\\
&(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,a}), (\neg p_{1,b} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,a}), (\neg p_{2,b} \vee \neg p_{1,b}),\\
&(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,b}), (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{2,b})\}
\end{aligned}$$

Una posible demostración por resolución:

$$\begin{array}{ll}
(1) & (p_{1,a} \vee p_{1,b}) \in \Sigma\\
(2) & (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,a}) \in \Sigma\\
(3) & (p_{1,b} \vee \neg p_{2,a}) \quad \text{resolución (1) y (2)}\\
(4) & (\neg p_{1,b} \vee \neg p_{2,b}) \in \Sigma\\
(5) & (p_{1,a} \vee \neg p_{2,b}) \quad \text{resolución (1) y (4)}\\
(6) & (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,b}) \in \Sigma\\
(7) & (\neg p_{2,a} \vee \neg p_{2,a}) \quad \text{resolución (3) y (6)}\\
(8) & (\neg p_{2,a}) \quad \text{factorización (7)}\\
(9) & (\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,b}) \in \Sigma\\
(10) & (\neg p_{2,b} \vee \neg p_{2,b}) \quad \text{resolución (5) y (9)}\\
(11) & (\neg p_{2,b}) \quad \text{factorización (10)}\\
(12) & (p_{2,a} \vee p_{2,b}) \in \Sigma\\
(13) & (p_{2,b}) \quad \text{resolución (8) y (12)}\\
(14) & \square \quad \text{resolución (11) y (13)}
\end{array}$$

Otra alternativa:

(1) $(p_{2,a} \vee p_{2,b}) \in \Sigma$
(2) $(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,a}) \in \Sigma$
(3) $(p_{2,b} \vee \neg p_{1,a})$ resolución (1) y (2)
(4) $(\neg p_{1,b} \vee \neg p_{2,b}) \in \Sigma$
(5) $(p_{2,a} \vee \neg p_{1,b})$ resolución (1) y (4)
(6) $(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{2,b}) \in \Sigma$
(7) $(\neg p_{1,a} \vee \neg p_{1,a})$ resolución (3) y (6)
(8) $(\neg p_{1,a})$ factorización (7)
(9) $(\neg p_{2,a} \vee \neg p_{1,b}) \in \Sigma$
(10) $(\neg p_{1,b} \vee \neg p_{1,b})$ resolución (5) y (9)
(11) $(\neg p_{1,b})$ factorización (10)
(12) $(p_{1,a} \vee p_{1,b}) \in \Sigma$
(13) $(p_{1,b})$ resolución (8) y (12)
(14) $\square$ resolución (11) y (13)

Distribución de puntajes:

(a) 1.5 pts. Se dan 1.0 pts por la implicancia de izquierda a derecha, que es la implicancia que utiliza la hipotesis de que $\varphi \to \psi$ es tautología. Se da 0.5 pts por la otra implicancia. Descuentos y puntajes parciales a criterio del corrector.

(b) 1.5 pts. Descuentos y puntajes parciales a criterio del corrector.

(c) 3.0 pts. Se da 1.0 pts por formular correctamente el problema, es decir, transformar correctamente $\{\varphi_f, \varphi_i, \neg\varphi_s\}$ al conjunto de cláusulas equivalentes. Se dan 2.0 pts por encontrar la demostración por resolución. Para obtener el puntaje completo se deben utilizar las reglas de resolución y de factorización de manera correcta, hasta llegar a la claúsula vacía. Descuentos y puntajes parciales a criterio del corrector.

Pregunta 2

Nos gustaría modelar una situación en donde tenemos usuarios en una red social. Algunos usuarios pueden ser bots. Los usuarios se pueden seguir entre ellos, y también se pueden bloquear. Para esto consideraremos un predicado unario Bot, y tres predicados binarios S, B, $=$. También consideraremos la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ en la lógica de predicados:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &= \text{conjunto de todos los usuarios} \\
\mathcal{I}(Bot(x)) &= x \text{ es un bot} \\
\mathcal{I}(S(x,y)) &= x \text{ sigue a } y \\
\mathcal{I}(B(x,y)) &= x \text{ bloquea a } y \\
\mathcal{I}(x = y) &= x \text{ es igual a } y
\end{aligned}$$

Para cada caso, escriba una fórmula en la lógica de predicados que exprese la propiedad pedida. En cada caso, explique brevemente por qué su fórmula es correcta.

(a) Ninguna persona se puede seguir a sí misma.

(b) Existen dos usuarios con exactamente los mismos seguidores.

(c) Es imposible que un usuario x siga y bloquee, al mismo tiempo, a otro usuario y.

(d) Todo usuario debe seguir a alguien, y debe ser seguido por alguien.

(e) Existe un único bot que no es bloqueado por nadie.

(f) Todo usuario que no es un bot tiene al menos 3 seguidores.

1. Pregunta 2

(a) Ninguna persona se puede seguir a sí misma

$$(\neg \exists x\, S(x,x))$$

Esta fórmula expresa que no existe ningún usuario x tal que x se siga a sí mismo, es decir, que ninguna persona puede seguirse a sí misma.

Otra alternativa es usar la fórmula equivalente:

$$\forall x\ (\neg S(x,x))$$

que establece que para toda persona, esa persona no se puede seguir a sí misma, por lo tanto, que ninguna persona se puede seguir a sí misma.

(b) Existen dos usuarios con exactamente los mismos seguidores

$$\exists x\, \exists y\ ((\neg x = y) \wedge \forall z\, (S(z,x) \leftrightarrow S(z,y)))$$

Esta fórmula establece que existen dos usuarios (x e y) distintos tales que para todo otro usuario z, ese seguidor sigue a uno si y sólo si sigue al otro, es decir que comparten exactamente los mismos seguidores.

(c) Es imposible que un usuario x siga y bloquee, al mismo tiempo, a otro usuario y. Hay varias posibles formulaciones de este enunciado que son equivalentes entre sí. Acá hay algunas:

$$\forall x\, \forall y\, S(x, y) \to \neg B(x, y)$$

Para todo par de usuarios x e y, si x sigue a y no puede haber bloqueado a y.

$$\forall x\, \forall y\, \neg\, (S(x, y) \wedge B(x, y))$$

Para todo par de usuarios x e y, no puede ocurrir que a la vez x siga a y y x haya bloqueado a y.

$$\forall x\, \forall y\, B(x, y) \to \neg S(x, y)$$

Para todo par de usuarios x e y, si x bloqueó a y, no puede a la vez seguir a y.

$$(\neg \exists x\, \exists y\ (S(x, y) \wedge B(x, y)))$$

No existe un par de usuarios x e y, tales que x sigue a y a la vez que lo ha bloqueado.

(d) Todo usuario debe seguir a alguien, y debe ser seguido por alguien. Aquí tenemos también varias alternativas:

$$\forall x\ (\exists y\, S(x, y) \wedge \exists z\, S(z, x))$$

O alternativamente

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\ (S(x, y) \wedge S(z, x))$$

Ambas opciones establecen que para todo usuario x existen al menos un usuario seguido (y) y un seguidor (z). Cabe destacar que podrían ser el mismo.

(e) Existe un único bot que no es bloqueado por nadie.

$$\exists x\, ((Bot(x) \wedge \forall y\, \neg B(y, x)) \wedge \forall z\ (((Bot(z) \wedge \forall w\, \neg B(w, z))) \to z = x))$$

La primera parte establece que existe un bot x que no es bloqueado por nadie (todo usuario y no bloquea a x). La segunda parte establece que solo ese bot x satisface esas condiciones, por lo que es único. Aquí también hay varias alternativas de escritura, especialmente alternando negaciones con los cuantificadores.

(f) Todo usuario que no es bot tiene al menos tres seguidores.

$$\forall x\ (\neg Bot(z) \to \exists y\, \exists z\, \exists w\ ((\neg y = z) \wedge (\neg z = w) \wedge (\neg y = w) \wedge S(y, x) \wedge S(z, x) \wedge S(w, x)))$$

Esta fórmula estable que para todo usuario x, si es que no es un bot, entonces deben existir tres usuarios distintos que lo siguen, es decir, lo que se pide.

Puntaje:

- 1 pto por cada fórmula que exprese correctamente lo solicitado, cuando la justificación esté correcta.
- Descuento parcial a criterio del corrector si la fórmula es correcta pero la justificación es poco clara o no refleja lo que está en la fórmula.
- Descuento de 0.25 en las fórmulas por usar $\neq$ en vez de negar la igualdad (¡no es parte de los predicados entregados!), salvo que se haya explicado que se usará como abreviación de la negación de la igualdad.
- No se acepta el uso del cuantificador "existe un único" ($\exists!$).