Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica Proposicional

23 de agosto de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica** $\equiv$

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

    1. Doble negación:
       $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
    2. De Morgan:
       $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
       $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
    3. Conmutatividad:
       $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
       $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
    4. Asociatividad:
       $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
       $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
    5. Distributividad:
       $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
       $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
    6. Idempotencia:
       $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
       $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
    7. Absorción:
       $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
       $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
    8. Implicancia:
       $\alpha \to \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
    9. Doble implicancia:
       $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

    - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
    - $\{\neg, \wedge\}$
    - $\{\neg, \vee\}$
    - $\{\neg, \to\}$

1. Inducción Estructural

Demuestre que el conectivo $\uparrow$ (también conocido como NAND) es funcionalmente completo. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución
Sabemos que el conjunto $C = \{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo (demostrado en clases, se puede usar). Demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida a partir de los conectivos del conjunto C tiene una fórmula equivalente que solo usa conectivos de $C' = \{\uparrow\}$, con ello demostrando que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.
BI: Con $\varphi = p$, se cumple trivialmente que φ puede ser construida con conectivos de C'.
HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas construidas con los conectivos de C, y que existen $\varphi', \psi' \in \mathcal{L}(P)$ construidas con los conectivos de C' tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$.
TI: Demostraremos que toda fórmula θ construida con los pasos inductivos del conjunto C tiene una fórmula θ' construida con conectivos de C' tal que $\theta \equiv \theta'$. Notemos, en primer lugar, que para dos fórmulas α, β cualquiera se tiene que $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \uparrow \beta$. Como C tiene dos conectivos, hay dos casos:

- $\theta = \neg\varphi \overset{HI}{\equiv} \neg\varphi' \equiv \neg(\varphi' \wedge \varphi') \equiv \varphi' \uparrow \varphi'$. Luego, $\theta' = \varphi' \uparrow \varphi'$ cumple la propiedad.
- $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi' \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg(\varphi' \uparrow \psi') \equiv (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$.
  Luego, $\theta' = (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$ cumple la propiedad.

Concluímos que toda fórmula construida con conectivos de C tiene una equivalente construida con conectivos de C', y con ello que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

B. Lógica

Sea $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ una fórmula construida usando los conectivos del conjunto $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$. Llamamos φ' a la fórmula obtenida desde φ reemplazando todas las ocurrencias de $\wedge$ por $\vee$, las de $\vee$ por $\wedge$, y todas las variables proposicionales por sus negaciones.

Demuestre que φ' es lógicamente equivalente a $\neg\varphi$.

Solución
Demostraremos por inducción estructural.

BI: Con $\varphi = p$ se tiene que $\varphi' \equiv \neg p \equiv \neg \phi$ con lo que la propiedad se cumple.
HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas construidas usando los conectivos de C.
TI: Demostraremos que una fórmula $\theta \in \mathcal{L}(P)$ construida inductivamente a partir de φ y/o ψ también cumple la propiedad. Hay tres casos posibles:

1. $\theta = \neg\varphi$:

   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\neg\varphi)' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} (\varphi')' \equiv \varphi \stackrel{\text{Doble negación}}{\equiv} \neg(\neg\varphi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.
2. $\theta = \varphi \vee \psi$:

   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\varphi \vee \psi)' \equiv \varphi' \wedge \psi' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi \wedge \neg\psi \stackrel{\text{De Morgan}}{\equiv} \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.
3. $\theta = \varphi \wedge \psi$:

   En este caso se tiene que $\theta' \equiv (\varphi \wedge \psi)' \equiv \varphi' \vee \psi' \stackrel{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi \vee \neg\psi \stackrel{\text{De Morgan}}{\equiv} \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\theta$, con lo que la propiedad se cumple.

Concluímos entonces por inducción estructural que para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ construida mediante los conectivos de C se cumple que $\varphi' \equiv \neg\varphi$.

2. Modelamiento

Considere el funcionamiento de un semáforo en instantes discretos de tiempo que llamaremos estados, tal que la cantidad de estados totales es finita.

1. Defina un conjunto P de variables proposicionales adecuadas que permitan definir un lenguaje $\mathcal{L}(P)$ de fórmulas proposicionalnes para modelar este escenario. Explique brevemente el significado de cada variable definida. *Sugerencia:* examine los incisos (2), (3) y (4) para determinar qué necesita incluir en su diseño.

Con el lenguaje definido en (1), proponga una fórmula proposicional φ para cada uno de los siguientes incisos. Su fórmula debe ser satisfacible si y solo si la propiedad descrita se cumple para un semáforo dado. Explique brevemente el significado de las partes de su fórmula. No necesida demostrar la correctitud de su fórmula.

2. La luz del semáforo en todo estado es, o verde, o roja, o amarilla.
3. Los únicos cambios de color de luz del semáforo ocurren entre estados sucesivos y pueden ocurrir de verde a amarilla, de amarilla a roja y de roja a verde.
4. La luz puede tener el mismo color en, a lo más, 3 estados sucesivos.

Solución
a) Vamos a considerar un total de T tiempos o estados, además de los tres colores típicos de un semáforo, verde, rojo y amarillo. Definimos entonces las siguientes variables

proposicionales para modelar un semáforo:

- v_t : 1 si el semáforo es verde en el tiempo $t \in \{1, \ldots, T\}$
- r_t : 1 si el semáforo es rojo en el tiempo $t \in \{1, \ldots, T\}$
- a_t : 1 si el semáforo es amarillo en el tiempo $t \in \{1, \ldots, T\}$

b) Lo denotamos por la siguiente fórmula, que indica lo anterior en todo tiempo

$$\varphi_1 := \bigwedge_{t=1}^{T} (v_t \lor r_t \lor a_t)$$

c) Lo denotamos por la fórmula $\varphi_2 \land \varphi_3$ donde φ_2 denota que solo hay un único estado de un color en un tiempo dado, y φ_3 denota que la transición respeta la secuencia descrita, según las definimos a continuación:

$$\varphi_2 := \bigwedge_{t=1}^{T} ((v_t \to (\neg r_t \land \neg a_t)) \land (r_t \to (\neg v_t \land \neg a_t)) \land (a_t \to (\neg v_t \land \neg r_t)))$$

$$\varphi_3 := \bigwedge_{t=1}^{T} ((v_t \to (v_{t+1} \lor a_{t+1})) \land (r_t \to (r_{t+1} \lor v_{t+1})) \land (a_t \to (a_{t+1} \lor r_{t+1})))$$

d) Lo denotamos por la fórmula φ_4 según definimos a continuación:

$$\varphi_4 := \bigwedge_{t=1}^{T} (((t \land v_{t+1} \land v_{t+2}) \to \neg v_{t+3}) \land ((r_t \land r_{t+1} \land r_{t+2}) \to \neg r_{t+3}) \land ((a_t \land a_{t+1} \land a_{t+2}) \to \neg a_{t+3}))$$

B

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p, q, r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3(q + r) - 5p \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la tabla de verdad de EQ

Solución

p	q	r	$3(q+r)-5p$	$EQ(p,q,r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	3	1
0	1	0	3	1
0	1	1	6	1
1	0	0	-5	0
1	0	1	-2	0
1	1	0	-2	0
1	1	1	1	1

3. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \lor (p \to q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) \equiv p \land q$$

Solución

$$\begin{aligned}
&(p \lor (p \to q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) \\
&\equiv (p \lor (\neg p \lor q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv ((p \lor \neg p) \lor q) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/Asociatividad de } \lor \\
&\equiv \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && /((p \lor \neg p) \lor q) \text{ es una tautología} \\
&\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/De Morgan} \\
&\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (\neg r \lor q) && \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv p \land (\neg r \lor p) \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{/Asociatividad de} \land \\
&\equiv p \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{/Absorción} \land \\
&\equiv p \land ((r \land \neg r) \lor q) && \text{/Distributiva} \\
&\equiv p \land q && /r \land \neg r \text{ es una contradicción}
\end{aligned}$$

$\exists$