Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Repaso I2

25 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

1. Lógica de Predicados

Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\text{dom}) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(=) &:= n = m \text{ si y solo si } n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}(\leq) &:= n \leq m \text{ si y solo si } n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}(P) &:= P(n) \text{ si y solo si } n \text{ es primo}
\end{aligned}$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

"Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo"

2. Teoría de Conjuntos

Sean A y B conjuntos y una función $f : A \to B$. Para todo $X \subseteq A$ definimos el siguiente conjunto:

$$F(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X \text{ tal que } f(a) = b\}$$

Dada $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ una colección de subconjuntos de A, demuestre que:

1. $F\left(\bigcup_{D \in S} D\right) = \bigcup_{D \in S} F(D)$
2. $F\left(\bigcap_{D \in S} D\right) = \bigcap_{D \in S} F(D)$

3. Relaciones

3.1. Relaciones de orden

Dados un conjunto A y una relación $\lesssim$ sobre A, diremos que el par $(A, \lesssim)$ es un *preorden* si $\lesssim$ es una relación refleja y transitiva.
Denotramos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ como

$$A \rightsquigarrow B \Leftrightarrow inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B)$$

donde $inf(\cdot)$ y $sup(\cdot)$ son el ínfimo y el supremo de un conjunto respectivamente.

1. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ es un preorden.
2. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.
3. Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

3.2. Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:

$$S \circ T = T \circ S \Leftrightarrow S \circ T \text{ es una relación de equivalencia}$$

4. Cardinalidad

4.1. Numerabilidad

Demuestre que el conjunto de todos los strings ASCII (finitos) que sólo tienen caracteres `a` y `b`, y tales que no contienen el substring `abb` es un conjunto numerable.

4.2. No numerabilidad

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es inyectiva}\}$. Demuestre que el conjunto $\mathcal{F}$ es no numerable.

1. Lógica de Predicados

Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(\text{dom}) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}(=) &:= n = m \text{ si y solo si } n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}(\leq) &:= n \leq m \text{ si y solo si } n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}(P) &:= P(n) \text{ si y solo si } n \text{ es primo}
\end{aligned}
$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

"Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo"

$0(n) := \forall x\,(n \leq x)$

extra! añadido después

$1(n) := \forall x\,(\neg(0(x)) \rightarrow n \leq x) \wedge \neg 0(n)$

$2(n) := \forall x\,([\neg(0(x)) \wedge \neg(1(x))] \rightarrow n \leq x) \wedge \neg 0(n) \wedge \neg 1(n)$

$3(n) := \forall x\,([\neg(0(x)) \wedge \neg(1(x)) \wedge \neg(2(x))] \rightarrow n \leq x) \wedge \neg 0(n) \wedge \neg 1(n) \wedge \neg 2(n)$

$\varphi := \forall x\,\forall y\,([P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(2(x) \wedge 3(y)) \wedge \neg(3(x) \wedge 2(y))] \rightarrow$

$\exists z\,\{[x \leq z \wedge \neg(x = z) \wedge z \leq y \wedge \neg(z = y)] \vee [y \leq z \wedge \neg(y = z) \wedge z \leq x \wedge \neg(z = x)]\} \wedge \neg P(z))$

3.1. Relaciones de orden

Dados un conjunto A y una relación $\lesssim$ sobre A, diremos que el par $(A, \lesssim)$ es un *preorden* si $\lesssim$ es una relación refleja y transitiva.
Denotramos por $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Definimos la relación $\rightsquigarrow \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ como

$$A \rightsquigarrow B \Leftrightarrow inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B)$$

donde $inf(\cdot)$ y $sup(\cdot)$ son el ínfimo y el supremo de un conjunto respectivamente.

1. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ es un preorden.
2. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.
3. Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

1. Refleja: Sea $A \in P(\mathbb{N})^{\not\infty}$. Se tiene que

$$inf(A) \leq inf(A) \wedge sup(A) \leq sup(A)$$
$$\rightarrow A \rightsquigarrow A \quad \square$$

2. Transitiva: Sean $A, B, C \in P(\mathbb{N})^{\not\infty}$, supongamos que $A \rightsquigarrow B \wedge B \rightsquigarrow C$. PD: $A \rightsquigarrow C$.

$$inf(A) \leq inf(B) \wedge sup(A) \leq sup(B)$$
$$\wedge \; inf(B) \leq inf(C) \wedge sup(B) \leq sup(C)$$
$$\rightarrow inf(A) \leq inf(C) \wedge sup(A) \leq sup(C)$$
$$\rightarrow A \rightsquigarrow C. \quad \square$$

2. Demuestre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}, \rightsquigarrow)$ no es un orden parcial.

$$\neg((A \rightsquigarrow B \wedge B \rightsquigarrow A) \rightarrow A = B)$$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$

$inf(A) = 1$	$inf(B) = 1$	$A \rightsquigarrow B: 1 \leq 1$	$3 \leq 3$
$sup(A) = 3$	$sup(B) = 3$	$B \rightsquigarrow A: 1 \leq 1$	$3 \leq 3$

$A \neq B$ $\therefore$ no es antisim $\rightarrow$ no es orden parcial

3. Encuentre un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tal que $(S, \rightsquigarrow)$ es un orden parcial. Debe demostrar su resultado.

Sea $S \subseteq P(\mathbb{N})^{\not\infty}$ tq $S = \{A \in P(\mathbb{N})^{\not\infty} \mid |A| = 2\}$

viceversa

Sean $A, B \in S$, $\inf(A) \leq \inf(B)$ $\sup(A) \leq \sup(B)$ $\rightarrow$ $\inf(A) = \inf(B)$ $\sup(A) = \sup(B)$

Como $|A| = |B| = 2$, necesariamente $A = B$.

Otro Ej: $S = \{\{0\}\}$

$A \rightsquigarrow B \wedge B \rightsquigarrow A \rightarrow A = B$

3.2. Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:

$$S \circ T = T \circ S \Leftrightarrow S \circ T \text{ es una relación de equivalencia}$$

4.1. Numerabilidad

Demuestre que el conjunto de todos los strings ASCII (finitos) que sólo tienen caracteres `a` y `b`, y tales que no contienen el substring `abb` es un conjunto numerable.

aaa ✓

bbb ✓ $A \approx \mathbb{N}$

abaab ✓ $|A| = |\mathbb{N}|$

aa~~b~~b~~b~~a ✗

aaa ...

1. Recorrer

- Todo elemento tiene que aparecer en la lista.

$A = [\ S_1,\ S_2,\ S_3\ \dots\ ]$

$(0,0)\ (0,1)\ (0,2) \dots$

$(1,0)\ (1,1)$

$(2,0)$ $\ddots$

$\vdots$

$\bigcup_{S \in A} S \approx \mathbb{N}$ $A \approx \mathbb{N}$ S finito o numerable

- Todo elemento aparece una sola vez.

$$f(\underbrace{aa}_{2}b\underbrace{aaa}_{3}b) = 23$$

$$f(c_1 c_2 c_3) = 2 d_1 d_2 d_3 \ldots$$

donde $d_i = \begin{cases} 0 & \text{si } c_i = b \\ 1 & \text{si } c_i = a \end{cases}$

$$f(aa) = 2$$
$$f(aab) = -2$$

$bbbb\,aaa \quad \to \mathbb{Z}$

$\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$-43 \qquad (4, -3)$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$f(x) = f(y)$$
$$2 d_1 d_2 d_3 \ldots = 2 d_1 d_2 d_3 \ldots$$

$$g : \mathbb{N} \to A$$

$$g(x) = \text{"a"} \cdot x$$

Como existen funciones $f : S \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to S$ inyectivas, por TSB existe una biyección entre S y $\mathbb{N}$, y $\therefore S \approx \mathbb{N}$.

$f:(0,1)\to S^{\infty}$ inyectiva $\therefore |(0,1)| \leq S^{\infty}$

$0, d_1 d_2 d_3 \longrightarrow \quad a \cdot d_1\, b \quad a \cdot d_2\, b$