

# Lógica de predicados

Clase 7

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

# Outline

**Obertura**

Sintaxis de predicados

Semántica de predicados

Epílogo

# El problema de consecuencia lógica

El siguiente es un caso de **consecuencia lógica**

Todas las personas son mortales.

Sócrates es persona.

---

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos modelarlo/explicarlo con lógica proposicional?

# Necesitamos más poder...

¿Qué le falta a la lógica proposicional?

- Objetos de un cierto conjunto.
- Predicados sobre objetos.
- Cuantificadores: **para todo** y **existe**.

Estudiaremos una nueva lógica con estos elementos.

Esta lógica nos permitirá expresar **estructuras** complejas.

# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado.
- Comprender sintaxis de predicados compuestos.
- Comprender semántica de la lógica de predicados.

# Outline

Obertura

**Sintaxis de predicados**

Semántica de predicados

Epílogo

# Predicados

## Ejemplos (versión 1.0)

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

■  $x$  es par

■  $x \leq y$

■  $x \triangle y$

(¿qué diablos es  $\triangle$ ?)

■  $x \triangleleft y = z$

(¿qué diablos es  $\triangleleft$ ?)

No admiten valor de verdad hasta ser **evaluados** e **interpretados**.

# Predicados

## Ejemplos (versión 2.0)

Las siguientes son proposiciones:

- 2 es par
- $2 \leq 4$
- 'h'  $\triangle$  'hola' (cuando  $\triangle$  se interpreta como "es substring de")
- $4 \triangleleft 1 = 41$  (cuando  $\triangleleft$  se interpreta como suma de naturales)

El valor de verdad depende de:  
un **dominio** y la **interpretación de los símbolos**.



# Predicados

## Definición

Un **predicado**  $P(x)$  es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

## Ejemplos

- $P(x) := x$  es par
- $R(x) := x$  es primo
- $M(x) := x$  es mortal

# Predicados

## Definición

Para un predicado  $P(x)$  y un valor  $a$ , la **valuación**  $P(a)$  es el valor de verdad del predicado  $P(x)$  en  $a$ .

## Ejemplos

$P(x) := x$  es par     $R(x) := x$  es primo     $M(x) := x$  es mortal

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

# Predicados

## Definición

Un **predicado**  $n$ -ario  $P(x_1, \dots, x_n)$  es una afirmación con  $n$  variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

## Definición

Para un predicado  $n$ -ario  $P(x_1, \dots, x_n)$  y valores  $a_1, \dots, a_n$ , la **valuación**  $P(a_1, \dots, a_n)$  es el valor de verdad de  $P$  sobre  $a_1, \dots, a_n$ .

## Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$ ,  $S(x, y, z) := x + y = z$ ,  $Padre(x, y) := x$  es padre de  $y$

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

# Predicados y Dominio

## Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

## Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$ ,  $S(x, y, z) := x + y = z$ ,  $Padre(x, y) := x$  es padre de  $y$

$O(x, y) \quad := x \leq y \quad \text{sobre } \mathbb{N}$

$S(x, y, z) \quad := x + y = z \quad \text{sobre } \mathbb{Q}$

$Padre(x) \quad := x$  es padre de  $y \quad \text{sobre el conjunto de todas las personas}$

# Predicados y Dominio

## Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

## Notación

- Para un predicado  $P(x_1, \dots, x_n)$  diremos que  $x_1, \dots, x_n$  son **variables libres** de  $P$ .
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación.

# Sintaxis de predicados

## Definición

Un predicado es **compuesto** si inductivamente es:

1. un predicado,
2. la negación ( $\neg$ ) de un predicado compuesto, o
3. conjunción ( $\wedge$ ), disyunción ( $\vee$ ), implicancia ( $\rightarrow$ ) o bidireccional ( $\leftrightarrow$ ) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

Observemos que hasta aquí,  
la sintaxis es análoga al caso de fórmulas proposicionales.

# Valuaciones

## Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación inductiva (recursiva) de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

## Ejemplos

$P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$
- $P'(4) = 0$

# Cuantificador universal

## Definición

Sea  $P(x, y_1, \dots, y_n)$  un predicado compuesto con dominio  $D$ . Definimos el **cuantificador universal**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \forall x (P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde  $x$  es la variable cuantificada e  $y_1, \dots, y_n$  son las variables libres.

## Definición

Para  $b_1, \dots, b_n$  en  $D$ , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **para todo**  $a$  en  $D$  se tiene que  $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$ , y 0 en otro caso.



# Cuantificador universal

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $O'(y) := \forall x(O(x, y)) \quad \dots \quad O'(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \forall y(O(x, y)) \quad \dots \quad O''(0) = \forall y(O(0, y))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P'_0 := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

# Cuantificador existencial

## Definición

Sea  $P(x, y_1, \dots, y_n)$  un predicado compuesto con dominio  $D$ . Definimos el **cuantificador existencial**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) = \exists x(P(x, y_1, \dots, y_n))$$

donde  $x$  es la variable cuantificada y  $y_1, \dots, y_n$  son las variables libres.

## Definición

Para  $b_1, \dots, b_n$  en  $D$ , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **existe**  $a$  en  $D$  tal que  $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$ , y 0 en otro caso.

# Cuanticador existencial

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{N}$ :

- $O'(y) := \exists x(O(x, y)) \quad \dots \quad O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y)) \quad \dots \quad O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \wedge O(z, y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z)) \quad \dots \quad O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Un predicado binario que casi siempre estará disponible es la igualdad:

$$= (x, y) := (x = y).$$

Como notación usaremos simplemente  $x = y$  o también  $x \neq y$  para  $\neg(x = y)$ .

Ojo: el predicado menor estricto se puede definir sin igualdad

$$O_s(x, y) := O(x, y) \wedge \neg O(y, x).$$

# Es posible combinar cuantificadores

## Ejemplos

Para los predicados  $P(x) := x$  es par y  $O(x, y) := x \leq y$  sobre  $\mathbb{Z}$ :

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$  que es distinto de  $\forall y(\exists x(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(x, y)))$

# Sintaxis de predicados (v 2.0)

## (re)Definición

Decimos que un predicado es **compuesto** (o también **fórmula**) si es:

1. un predicado básico,
2. negación ( $\neg$ ) de un predicado compuesto,
3. conjunción ( $\wedge$ ), disyunción ( $\vee$ ), implicancia ( $\rightarrow$ ), bidireccional ( $\leftrightarrow$ ) de predicados compuestos sobre el mismo dominio, o
4. la cuantificación universal ( $\forall$ ) o existencial ( $\exists$ ) de un predicado compuesto.

## (re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación inductiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

# Outline

Obertura

Sintaxis de predicados

**Semántica de predicados**

Epílogo

# Interpretaciones

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \stackrel{?}{=} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del **dominio** y la **interpretación** del símbolo  $\leq$ .

# Interpretaciones

## Notación

Desde ahora, para un dominio  $D$  diremos que:

- $P(x_1, \dots, x_n)$  es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, \dots, x_n)$  es el predicado sobre  $D$ .

## Definición

Sean  $P_1, \dots, P_m$  símbolos de predicados.

Una **interpretación**  $\mathcal{I}$  para  $P_1, \dots, P_m$  está compuesta de:

- un dominio  $D$  que denotaremos  $\mathcal{I}(dom)$  y
- un predicado  $P_i^D$  que denotaremos por  $\mathcal{I}(P_i)$  para cada símbolo  $P_i$ .



# Interpretaciones

## Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos  $P(x)$  y  $O(x, y)$ ?

$$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$$

$$\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x$$

$$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$$

$$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$$

# Interpretaciones

## Definición

Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula e  $\mathcal{I}$  una interpretación de los símbolos en  $\varphi$ . Diremos que  $\mathcal{I}$  **satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(dom)$ :

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  es verdadero al interpretar cada símbolo en  $\varphi$  según  $\mathcal{I}$ .

Si  $\mathcal{I}$  **no satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(dom)$  lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \not\models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Observe que el símbolo  $\models$  en predicados indica satisfacibilidad.

# Interpretaciones

## Definición

Sean  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  una fórmula e  $\mathcal{I}$  una interpretación de los símbolos en  $\varphi$ . Diremos que  $\mathcal{I}$  **satisface**  $\varphi$  sobre  $a_1, \dots, a_n$  en  $\mathcal{I}(dom)$ :

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si  $\varphi(a_1, \dots, a_n)$  es verdadero al interpretar cada símbolo en  $\varphi$  según  $\mathcal{I}$ .

## Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos  $P(x)$  y  $O(x, y)$ ?

$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$	$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$
$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$	$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$
$\mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x$	$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

# Outline

Obertura

Sintaxis de predicados

Semántica de predicados

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado.
- Comprender sintaxis de predicados compuestos.
- Comprender semántica de la lógica de predicados.