1 Verdadero o Falso

Para cada uno de los siguientes enunciados, indique si el enunciado es verdadero (V) o falso (F). Justifique su respuesta.

1. Si A es un conjunto enumerable, entonces $A \times A$ es un conjunto no enumerable.
2. Si (V, E) es un grafo no dirigido, entonces E es una relación asimétrica.
3. Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido, entonces $E = E^{-1}$.
4. Si (V, E) es un grafo simple, entonces E es una relación irrefleja sobre V.
5. Sea P un conjunto de proposiciones y sean φ y ψ fórmulas en $\mathcal{L}(P)$. Si ψ es una tautología, entonces $\varphi \to \psi$ es una tautología.
6. Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son grafos isomorfos, entonces $V1 \approx V2$ y $E_1 \approx E2$.
7. Para todo conjunto A, existe una única relación que es a la vez una relación de orden parcial y una relación de equivalencia.
8. Si $C = (V, E)$ es un ciclo y $e \in E$ es una arista de C, entonces $P = (V, E \setminus \{e\})$ es un árbol.
9. Si un grafo $G = (V, E)$ es un árbol, y $G' = (V', E')$ es un subgrafo de G, entonces G' es un árbol.
10. Sean P y Q dos conjuntos de primos. Entonces,

$$\texttt{MCD}\left(\prod_{p \in P} p, \prod_{q \in Q} q\right) = \prod_{r \in P \cap Q} r$$

11. Si p es primo, entonces la relación $\sim$, definida sobre $\mathbb{N}$ por $a \sim b$ si y sólo si $a^p \equiv_p b$, es de equivalencia.
12. Recuerde el algoritmo de Euclides para calcular el MCD:

```
function MCD(a, b)
    if b = 0 then
        return a
    return MCD(b, a mod b)
```

    El algoritmo de Euclides hace a lo más $\mathcal{O}(\log_2(b))$ llamadas recursivas.

13. Si R es una relación y $R \circ R = R$ entonces R es transitiva.
14. Toda cláusula es también una fórmula en CNF.
15. La relación $\rightsquigarrow$ sobre $\mathcal{L}(P)$, definida por $\varphi \rightsquigarrow \psi$ si y sólo si $\varphi \to \psi$ es una tautología, es una relación de orden parcial sobre $\mathcal{L}(P)$.

16. La relación ! sobre $\mathcal{L}(P)$, definida por $\varphi!\psi$ si y sólo si $\varphi \to \neg\psi$ es una tautología, es irrefleja.

17. Si $G = (V, E)$ es un grafo completo, entonces $E = V \times V$.

18. Una recta es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$, donde diremos que m es la pendiente y n es la ordenada. Decimos que dos rectas f y g son paralelas, lo que denotamos por $f \parallel g$, si tienen la misma pendiente. La relación $\parallel$ define una relación de equivalencia sobre rectas.

19. Sea $\prec$ la relación entre funciones definida por $f \prec g$ si y sólo si $f \in \mathcal{O}(g)$. Entonces, $\prec$ es una relación de orden parcial sobre funciones.

20. $A \times \varnothing = \varnothing$

21. Dado un grafo $G = (V, E)$, la suma de los grados de sus vértices, $\sum_{v \in V} deg(v)$ es par.

22. Todo entero tiene al menos un divisor primo.

23. Dado un conjunto P de n variables proposicionales, el conjunto cuociente $\mathcal{L}(P)/\equiv$ tiene exactamente 2^{2^n} elementos.

24. Si un grafo $G = (V, E)$ es conexo, entonces la relación E es conexa.

2 Respuestas

1. F.

   Dado que A es enumerable, podemos enumerar sus elementos como una lista infinita $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$. Luego, se puede hacer una tabla infinita como en la demostración de que $\mathbb{Z}$ es enumerable, poniendo los elementos de A en cada eje de una tabla y luego recorrerla por las diagonales De esta

   $$\begin{array}{c|cccc} ... & ... & ... & ... & ... \\ a_2 & (a_0, a_2) & (a_1, a_2) & (a_2, a_2) & ... \\ a_1 & (a_0, a_1) & (a_1, a_1) & (a_2, a_1) & ... \\ a_0 & (a_0, a_0) & (a_1, a_0) & (a_2, a_0) & ... \\ \hline & a_0 & a_1 & a_2 & ... \end{array}$$

   manera, podemos construir una lista infinita con los elementos de $A \times A$:

   $$A \times A = \{(a_0, a_0), (a_1, a_0), (a_0, a_1), (a_2, a_0), (a_1, a_1), (a_0, a_2), ...\}$$

   Con lo que concluimos que $A \times A$ es enumerable

2. F.

   Un grafo no dirigido puede tener aristas paralelas, en cuyo caso se tendría una contradicción con que la relación sea asimétrica.

3. V.

   Si $G = (V, E)$ es un grafo no dirigido, entonces la relación binaria E sobre V es simétrica. Si $(a, b) \in E$, entonces por simetría $(b, a) \in E$, y por definición de relación inversa, $(a, b) \in E^{-1}$. Como (a, b) es arbitrario en E, se cumple para todos los elementos de E, luego $E \subseteq R^{-1}$. La demostración de que $E^{-1} \subseteq E$ es idéntica, pues $E = (E^{-1})^{-1}$. Luego, $E = E^{-1}$.

4. V.

   Si (V, E) es simple, E no contiene loops, es decir, elementos de la forma (v, v) para $v \in V$. Esto es la definición de que E sea irrefleja.

5. V.

   Sea σ una valuación. Si $\sigma(\varphi) = 0$, entonces $\sigma(\varphi \to \psi) = 1$, mientras que si $\sigma(\varphi) = 1$, entonces $\sigma(\varphi \to \psi) = \sigma(\psi) = 1$ pues ψ es una tautología. Dado que σ es arbitraria, concluimos que $\sigma(\varphi \to \psi) = 1$ siempre, es decir, que $\varphi \to \psi$ es una tautología.

6. V.
$V_1 \approx V_2$ es inmediato pues por definición de isomorfismo existe una biyección $f : V_1 \to V_2$. Esta biyección además cumple que $(x, y) \in E_1$ si y solo si $(f(x), f(y)) \in E_2$. Luego, la función $h : E_1 \to E_2$ definida por $h((x, y)) = (f(x), f(y))$ es una biyección también (nótese para esto que su inversa está definida por $h^{-1}((x, y)) = (f^{-1}(x), f^{-1}(y)))$.

7. V.

   Si una relación es orden parcial y relación de equivalencia, entonces es refleja, transitiva, y además simétrica y antisimétrica a la vez. Esto último solo es posible para la relación identidad. Para ver esto, sean $a, b \in A$ tales que aRb. Por simetría bRa y por antisimetría, como aRb y bRa, tenemos que $a = b$. Luego solo los elementos iguales se relacionan entre sí, es decir, la relación debe ser la identidad, que es a a la vez refleja y transitiva.

8. V.

   El grafo resultante es un camino que conecta justamente los extremos de e, el cual trivialmente es un árbol.

9. F.
Dado que toda arista de un árbol es una arista de corte, al remover una arista de G, obtenemos un subgrafo G' que no es un árbol, pues tendrá al menos dos partes disconexas (es, en cambio, un bosque).

10. V.

    Sea $r = \texttt{MCD}\left(\prod_{p\in P} p, \prod_{q\in Q} q\right)$ y sean $r_1, ..., r_n$ los factores primos de r. Luego cada $r_i \mid \prod_{p\in P} p$, por lo que $r_i \in P$, y del mismo modo, cada $r_i \mid \prod_{q\in Q} q$, por lo que $r_i \in Q$. Luego, por definición de intersección, $r_i \in P \cap Q$, por lo que r debe escribirse como producto de elementos en $P \cap Q$. Notemos que al menos debe incluir todos sus elementos, pues debe ser el máximo y claramente $\prod_{r\in P\cap Q} r$ es un divisor válido, pues

    $$\frac{\prod_{p\in P} p}{\prod_{r\in P\cap Q} r} = \prod_{p\in P\setminus P\cap Q} p$$

    y

    $$\frac{\prod_{q\in Q} q}{\prod_{r\in P\cap Q} r} = \prod_{q\in Q\setminus P\cap Q} q$$

    así que $r \geq \prod_{r\in P\cap Q} r$. Para mostrar que es el máximo, supongamos que hay algún elemento repetido, $s \in P \cap Q$. En ese caso, se tendría que $s^2 \mid \prod_{p\in P} p$, lo que no es posible puesto que significaría que o bien $s^2 \in P$, lo que no puede ser porque s^2 no es primo, o que s está en $P \setminus \{s\}$, lo que claramente es una contradicción.

11. V.

    - **Refleja**. Es inmediato del teorema de Fermat.
    - **Simétrica**. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \sim b$. Por definición, tenemos que $a^p \equiv_p b$. Por teorema de Fermat, tenemos que $a^p \equiv_p a$ y $b^p \equiv_p b$. Luego por simetría y transitividad de la equivalencia modular, tenemos que $b^p \equiv_p b \equiv_p a^p \equiv a$. Como a, b eran arbitrarios, concluimos que la relación es simétrica.
    - **Transitiva**. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que $a \sim b$ y $b \sim c$. Luego $a^p \equiv_p b$ y $b^p \equiv_p c$. Por teorema de Fermat, tenemos además que $b \equiv_p b^p$, luego por transitividad de la equivalencia módulo, concluimos que $a^p \equiv_p c$. Como a, b, c eran arbitrarios, concluimos que la relación es transitiva.

    Luego, $\sim$ es una relación refleja, simétrica y transitiva, por lo que es de equivalencia.

12. V. El número de llamados a la función está dado por la recurrencia:

$$T(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 1 + T(b, a \bmod b) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

    Esto a la vez se puede escribir como

$$T(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \text{ o } b = 1 \\ 2 + T(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

    Notemos que, o bien $a \bmod b \leq \lfloor b/2 \rfloor$ o bien $a \bmod b > \lfloor b/2 \rfloor$. Notemos que en amboa casos $b \bmod (a \bmod b) \leq \lfloor b/2 \rfloor$. Por lo tanto, si expresamos la recurrencia únicamente en función de b (para cualquier a fijo), obtenemos que:

$$T(b) \leq 2 + T(\lfloor b/2 \rfloor)$$

    Luego, podemos definir la recurrencia auxiliar:

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq n \leq 1 \\ 2 + T(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

    Al aplicar el teorema maestro con $a_1 = 0, a_2 = 1, c = 3, c_0 = 2, d = 0, b = 2$, de manera que $a_1 + a_2 = 0 + 1 = 1 = 2^0 = b^d$. Obtenemos que $T(n) \in \Theta(n^d \cdot \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n))$. Luego, el llamado de funciones es a lo más $T(b)$, es decir $\mathcal{O}(\log(b))$.

13. V.

    Supongamos que $R \circ R = R$ y sean (a, b) y (b, c) elementos de R arbitrarios. Luego, por definición de composición de relaciones se tiene que $(a, c) \in R \circ R$. Como $R \circ R = R$, se tiene que $(a, c) \in R$. Como los elementos fueron tomados arbitrariamente, se cumple para todo par de elementos de esa forma, es decir, R cumple la propiedad transitiva.

14. V.

    Una cláusula es una disyunción de literales, mientras que una fórmula en CNF es una conjunción de cláusulas. Una cláusula sola se considera una una conjunción de una única cláusula, por lo tanto es verdadero.

15. F.

    La relación es refleja y transitiva pero no es antisimétrica. Si tomamos dos fórmulas **distintas** φ y ψ (por ejemplo, $\psi = (\neg(\neg\psi)))$ tales que $\varphi \equiv \psi$, notemos que $\varphi \to \psi$ es una tautología y $\psi \to \varphi$ también lo es, pero $\varphi \neq \psi$.

16. F.

    Sea $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ una contradicción (por ejemplo, $\varphi = p \wedge \neg p$ para algún $p \in P$). Luego, $\varphi \to \neg\varphi$ es una tautología, pues el antecedente siempre es falso. En particular, tendríamos que $\varphi ! \varphi$, por lo que ! no es irrefleja.

17. V.

    Por definición de grafo completo, todo par de nodos están conectados, es decir, $E = V \times V$.

18. V.

    - Refleja: Sea f una recta definida por $f(x) = mx + n$. Luego $m = m$, por lo que $f \parallel f$.
    - Simétrica: Sean f y g rectas con pendientes m y m' tales que $f \parallel g$. Luego $m = m'$, y por simetría de la igualdad, $m' = m$, es decir, $g \parallel f'$.
    - Transitiva: Sean f, g y h rectas con pendientes m_f, m_g y m_h respectivamente tales que $f \parallel g$ y $g \parallel h$. Luego $m_f = m_g$ y $m_g = m_h$, y por transitividad de la igualdad, $m_f = m_h$, es decir, $f \parallel h$.

19. F.

    La relación $\prec$ es refleja y transitiva, pero no antisimétrica. Para ver esto, tomemos como contraejemplo a f como la identidad ($f(x) = x$) y a g como la función lineal tal que $g(x) = 2x$. Es fácil ver que $f \in O(g)$ y $g \in O(f)$, pero $f \neq g$.

20. V.

    Por definición de producto cartesiano, los elementos de $(A \times \varnothing)$ son los pares (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in \varnothing$. Pero no hay elementos b tales que

$b \in \varnothing$, por lo que no hay elementos en el producto $A \times \varnothing$, es decir $A \times \varnothing$ es vacío.

21. V.

    La suma de los grados es exactamente dos veces la cantidad de aristas. Como esta cantidad es entera, la suma es par.

22. F.

    Contraejemplo: El 1.

23. V.

    Cada elemento de $\mathcal{L}(P)/\equiv$ está definido por fórmulas equivalentes entre sí, es decir que comparten la misma tabla de verdad. Por lo tanto, hay tantos elementos en $\mathcal{L}(P)/\equiv$ como tablas de verdad, es decir, 2^{2^n}.

24. F.

    Contraejemplo: Un camino de largo tres es conexo, pero sus dos extremos no están conectados, por lo que la relación E no es conexa. La relación de "estar conectados" en el grafo sí es, en cambio, conexa.