Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 5 - Lógica de Predicados y Demostraciones

13 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica de predicados?**

  La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

  Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

  La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

  - Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
  - Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

    $$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

    si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**
  - Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
  - Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
  - Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).

- Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

  $$\varphi \equiv \psi$$

  si para toda interpretación I y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

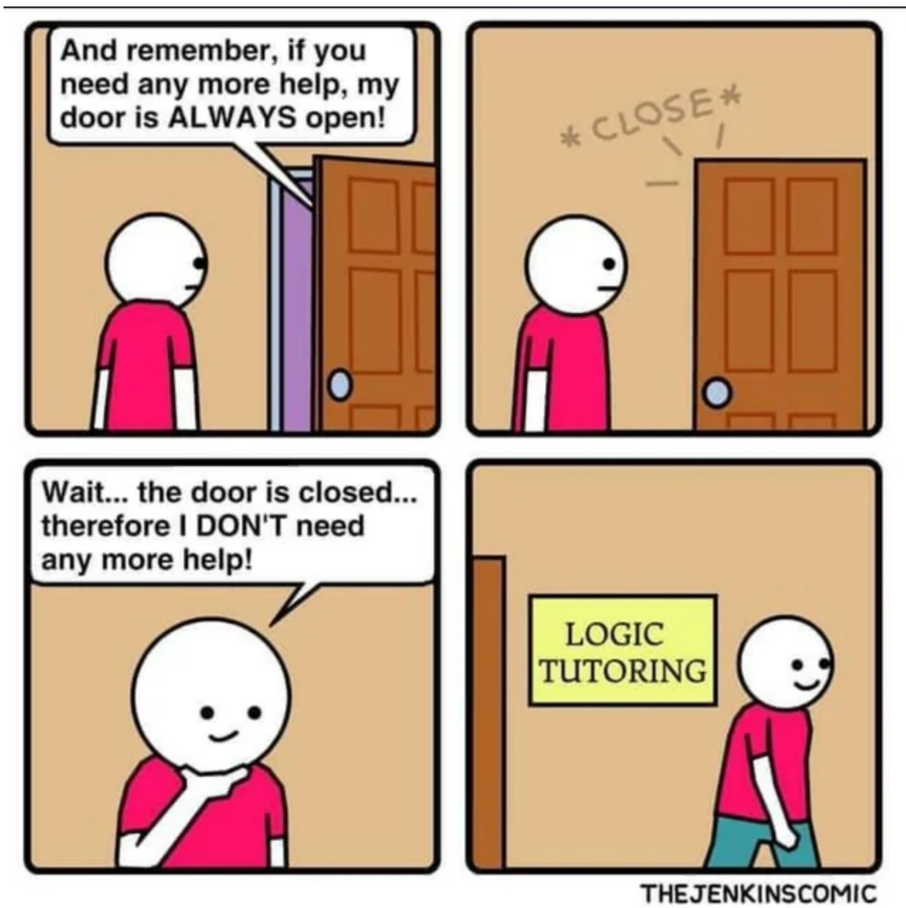
  $$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

  $$\Sigma \models \varphi$$

  si para toda interpretación I y $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

1. Meme del día



$P(t) :=$ puerta abierta en tiempo t

$A(t) :=$ necesita ayuda en el tiempo t

$\varphi(x) := A(x) \to \underbrace{\forall t P(t)}_{0}$

$\mathcal{I} \models \varphi(x)$

necesitamos que

$\mathcal{I} \models \neg A(x)$

2. Lógica de Predicados

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

$A \longleftrightarrow B$

$\equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

3. Lógica de Predicados

Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x \exists y (R(x,y)),\\ &\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x (R(x,x))$. Demuestre que $\Sigma \vDash \varphi$.

4. Modelamiento

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x,y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(dom) &\coloneqq \text{Personas}\\ \mathcal{I}(R(x)) &\coloneqq x \text{ conoce el cahuin}\\ \mathcal{I}(C(x,y)) &\coloneqq x \text{ le contó el cahuin a } y\\ \mathcal{I}(x = y) &\coloneqq x \text{ es igual a } y\end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el cahuin y otra que no" se puede definir con la fórmula $\exists x.\exists y.(R(x) \wedge \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cachuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.

5. Métodos de demostración

1. Demuestre que $\log_2 3$ es irracional.
2. Demuestre que si $x^2 - 6x + 5$ es par entonces x es impar.
3. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $5 \not| \, xy$, entonces $5 \not| \, x$ y $5 \not| \, y$.
   Nota: el símbolo $|$ denota divisibilidad. Con $a, b \in \mathbb{Z}$, si a divide a b, o en otras palabras, si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$, entonces escribimos $a|b$.

2. Lógica de Predicados

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\underbrace{\Sigma \models \varphi}_{P} \text{ si y solo si } \underbrace{\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}}_{Q}$$

$P \to Q$: Supongamos que $\Sigma \models \varphi$.
Toda I tal que $I \models \Sigma$ es tal que $I \models \varphi$.

1. $\Sigma \neq \emptyset$. Sea $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Toda interpretación I es tal que $I \models \alpha \in \Sigma$ entonces $I \models \varphi$.
Como Σ es no vacío, $\forall \alpha \in \Sigma'$ tq $I \models \alpha$, $I \models \varphi$.
Con ello, $I \not\models \neg\varphi$. Como esto se cumple para toda I, concluimos que es imposible satisfacer a α y a $\neg\varphi$ al mismo tiempo, y $\therefore$ Σ' es inconsistente.

2. $\Sigma = \emptyset$: Por def de satisfacibilidad, toda interpretación $\bar{I}$ satisface a Σ. Con ello, para que una formula φ sea tal que $\Sigma \models \varphi$, necesariamente toda interpretación debe satisfacer a φ. Con ello, φ es tautología.

Luego, $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ tiene una contradicción y $\therefore$ es inconsistente. $\square$

$Q \to P$: Supongamos que $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

1. $\Sigma = \emptyset$: $\Sigma' = \{\neg\varphi\}$ y como es inconsistente $\neg\varphi$ es una contradicción. Luego, $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$ es tautología, por lo que es consecuencia lógica de todo conjunto de oraciones. $\square$

2. $\Sigma \neq \emptyset$: $\exists \alpha \in \Sigma$ tal que no hay interpretación I tal que $I \models \alpha$ y $I \models \neg\varphi$. Con ello, para este α $I \models \alpha$ y $I \models \varphi$ para todo I. Esto se cumple para todos los α tal que $I \models \alpha$ y $I \not\models \neg\varphi$. Esos son los únicos para los que hay que demostrar que $I \models \alpha \to I \models \varphi$. Con ello, toda $I \models \Sigma$ es tal que $I \not\models \neg\varphi \to I \models \varphi$. Finalmente, $\Sigma \models \varphi$ por def de $\models$. $\square$

$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente

Toda I tal que $I \models \Sigma$ es tal que $I \not\models \neg\varphi$

$\therefore I \models \varphi \to \Sigma \models \varphi$

3. Lógica de Predicados

Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x \exists y (R(x,y)),\\ &\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z))\}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x (R(x,x))$. Demuestre que $\Sigma \models \varphi$.

$$\begin{aligned}\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\} = \{&\forall x \exists y (R(x,y)),\\ &\forall x \forall y (\neg R(x,y) \lor R(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \lor \neg R(y,z) \lor R(x,z)),\\ &\exists x \neg (R(x,x))\}\end{aligned}$$

$$\boxed{\neg \forall x\, \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)}$$

(1) $\forall x \forall y (\neg R(x,y) \lor R(y,x))$ $\in \Sigma'$

(2) $\neg R(a,b) \lor R(b,a)$ esp univ. de (1)

(3) $\exists x \neg (R(x,x))$ $\in \Sigma'$

(4)

$\varphi(a)$

$\neg \varphi(b)$