



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 5 - Lógica de Predicados y Demostraciones

13 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

■ ¿Qué es la lógica de predicados?

La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ . Diremos que I satisface φ sobre a_1, \dots, a_n en $I(\text{dom})$:

$$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

si $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I .

■ Conceptos importantes de lógica de predicados:

- Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a .
- Predicado n-ario $P(x_1, \dots, x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Cuantificadores: \forall (para todo) o \exists (existe).

- Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación I y para todo a_1, \dots, a_n en $I(\text{dom})$ se cumple:

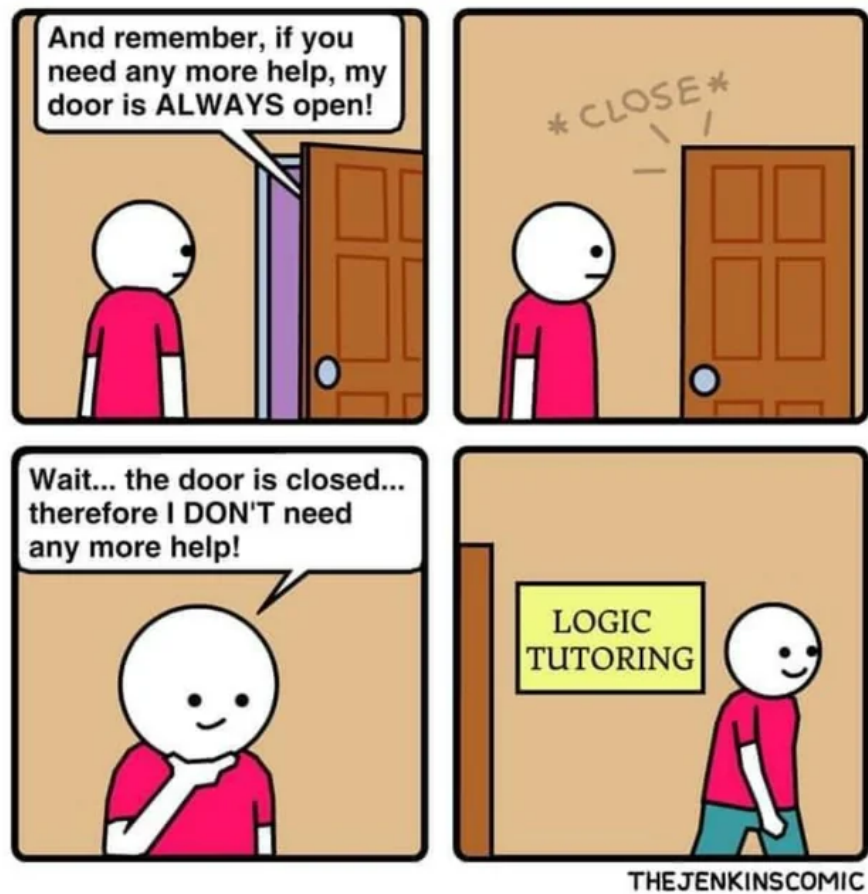
$$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ :

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación I y a_1, \dots, a_n en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

1. Meme del día



2. Lógica de Predicados

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación \mathcal{I} tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ , demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

3. Lógica de Predicados

Sea $R(\cdot, \cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{ & \forall x \exists y (R(x, y)), \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \\ & \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x (R(x, x))$. Demuestre que $\Sigma \models \varphi$.

4. Modelamiento

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x)$, $C(x, y)$, $x = y$.

Además considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\text{dom}) &:= \text{Personas} \\ \mathcal{I}(R(x)) &:= x \text{ conoce el cahuin} \\ \mathcal{I}(C(x, y)) &:= x \text{ le contó el cahuin a } y \\ \mathcal{I}(x = y) &:= x \text{ es igual a } y\end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación “existe una persona que conoce el cahuin y otra que no” se puede definir con la fórmula $\exists x. \exists y. (R(x) \wedge \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando previamente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cahuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un “cahuinero original”, o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen “triángulos de cahuineros”, o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.

5. Métodos de demostración

1. Demuestre que $\log_2 3$ es irracional.
2. Demuestre que si $x^2 - 6x + 5$ es par entonces x es impar.
3. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $5 \nmid xy$, entonces $5 \nmid x$ y $5 \nmid y$.

Nota: el símbolo $|$ denota divisibilidad. Con $a, b \in \mathbb{Z}$, si a divide a b , o en otras palabras, si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$, entonces escribimos $a|b$.