# Interrogación 1

02 de Septiembre de 2024

**Duración:** 2:30 hrs.

## Pregunta 1

(a) **(3 ptos)** Sean $a, b$ números reales tal que $0 < b < a$. Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple:

$$a^n - b^n \leq na^{n-1}(a - b)$$

(b) **(3 ptos)** Definimos la secuencia $a_n$, con $n \geq 1$, como sigue

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 13 \\ a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \qquad \text{para todo } n \geq 3 \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$ se tiene que $a_n = 2^n + 3^n$.

## Solución

(a) Usaremos inducción simple:

**CB:** Para $n = 1$ tenemos que

$$a^1 - b^1 = a - b \leq a - b = 1 \cdot a^0(a - b)$$

**HI:** Supongamos que la propiedad se cumple para $n \geq 1$:

$$a^n - b^n \leq na^{n-1}(a - b)$$

**TI:** Hay que demostrar que la propiedad se cumple para $n + 1$, es decir, que se cumple:

$$a^{n+1} - b^{n+1} \leq (n + 1)a^n(a - b)$$

Comenzaremos por el lado izquierdo y llegaremos al lado derecho acotando superiormente:

$$
\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= aa^n - bb^n \\
&= aa^n - bb^n - ba^n + ba^n \qquad \text{(sumamos 0)} \\
&= a^n(a-b) + b(a^n - b^n) \\
&\leq a^n(a-b) + b(na^{n-1}(a-b)) \qquad \text{(HI)} \\
&\leq a^n(a-b) + a(na^{n-1}(a-b)) \qquad (b < a) \\
&= a^n(a-b) + na^n(a-b) \\
&= (n+1)a^n(a-b)
\end{aligned}
$$

Otra alternativa:

$$
\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= aa^n - bb^n \\
&= aa^n - bb^n - ab^n + ab^n \qquad \text{(sumamos 0)} \\
&= a(a^n - b^n) + b^n(a-b) \\
&\leq a(na^{n-1}(a-b)) + b^n(a-b) \qquad \text{(HI)} \\
&\leq na^n(a-b) + a^n(a-b) \qquad (b^n < a^n \text{ ya que } b < a) \\
&= (n+1)a^n(a-b)
\end{aligned}
$$

(b) Usaremos inducción fuerte:

**CB:** Para $n = 1$ y $n = 2$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5 = 2 + 3 = 2^1 + 3^1 \\
a_2 &= 13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2
\end{aligned}
$$

**HI:** Sea $n \geq 3$. Supongamos que para todo $k$ tal que $1 \leq k < n$ se cumple la propiedad:

$$a_k = 2^k + 3^k$$

**TI:** Hay que demostrar que se cumple la propiedad para $n$, es decir:

$$a_n = 2^n + 3^n$$

Tenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \qquad \text{(por definición)} \\
&= 5(2^{n-1} + 3^{n-1}) - 6(2^{n-2} + 3^{n-2}) \qquad \text{(HI)} \\
&= 5 \cdot \frac{2^n}{2} - 6 \cdot \frac{2^n}{4} + 5 \cdot \frac{3^n}{3} - 6 \cdot \frac{3^n}{9} \\
&= \left(\frac{5}{2} - \frac{6}{4}\right)2^n + \left(\frac{5}{3} - \frac{6}{9}\right)3^n \\
&= 2^n + 3^n
\end{aligned}
$$

**Pauta (6 ptos)**

a)
- 0.5 ptos por el caso base.
- 0.5 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva.
- 2.0 ptos por demostrar correctamente la tesis inductiva.

b)
- 0.5 ptos por los casos bases.
- 0.5 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva.
- 2.0 ptos por demostrar correctamente la tesis inductiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

## Pregunta 2

Definimos inductivamente el conjunto $PV$ de strings de paréntesis válidos como sigue:

1. $\varepsilon \in PV$, donde $\varepsilon$ es el string vacío que no contiene símbolos.
2. Si $x \in PV$, entonces $(x) \in PV$.
3. Si $x, y \in PV$, entonces $xy \in PV$.

Algunos ejemplos de elementos en $PV$:

$$() \qquad ((())) \qquad ()() \qquad (()())()$$

(a) (**1.5 ptos**) Defina inductivamente la función $largo : PV \to \mathbb{N}$ que le asigna a cada string $x \in PV$ la cantidad de símbolos que tiene.

(b) (**1.5 ptos**) Defina inductivamente la función $izq : PV \to \mathbb{N}$ que le asigna a cada string $x \in PV$ la cantidad de paréntesis izquierdos que tiene (símbolos "(").

(c) (**3 ptos**) Demuestre usando inducción estructural que para todo string $x \in PV$ se cumple:

$$largo(x) = 2 \cdot izq(x)$$

*Importante:* En todos los items **debe** usar la definición inductiva de $PV$.

## Solución

(a) Definimos la función $largo$ como sigue:

1. $largo(\varepsilon) = 0$.
2. Si $x \in PV$, entonces $largo((x)) = 2 + largo(x)$.
3. Si $x, y \in PV$, entonces $largo(xy) = largo(x) + largo(y)$.

(b) Definimos la función $izq$ como sigue:

1. $izq(\varepsilon) = 0$.
2. Si $x \in PV$, entonces $izq((x)) = 1 + izq(x)$.
3. Si $x, y \in PV$, entonces $izq(xy) = izq(x) + izq(y)$.

(c) **CB**: Tenemos que $largo(\varepsilon) = 0 = 2 \cdot 0 = 2 \cdot izq(\varepsilon)$.

Tenemos dos reglas de construcción:

- **HI**: Supongamos que $largo(x) = 2 \cdot izq(x)$, para un $x \in PV$.
  **TI**: Hay que demostrar que $largo((x)) = 2 \cdot izq((x))$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} largo((x)) &= 2 + largo(x) \qquad \text{(definición } largo) \\ &= 2 + 2 \cdot izq(x) \qquad \text{(HI)} \\ &= 2(1 + izq(x)) \\ &= 2 \cdot izq((x)) \qquad \text{(definición } izq) \end{aligned}$$

- **HI**: Supongamos que $largo(x) = 2 \cdot izq(x)$ y $largo(y) = 2 \cdot izq(y)$ , para $x, y \in PV$.
  **TI**: Hay que demostrar que $largo(xy) = 2 \cdot izq(xy)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} largo(xy) &= largo(x) + largo(y) \qquad \text{(definición } largo) \\ &= 2 \cdot izq(x) + 2 \cdot izq(y) \qquad \text{(HI)} \\ &= 2(izq(x) + izq(y)) \\ &= 2 \cdot izq(xy) \qquad \text{(definición } izq) \end{aligned}$$

**Pauta (6 ptos)**

a)
- 0.5 ptos por definir correctamente la función en el caso base.
- 0.5 ptos por definir correctamente la función con respecto a la 1era regla de construcción.
- 0.5 ptos por definir correctamente la función con respecto a la 2da regla de construcción.

b)
- 0.5 ptos por definir correctamente la función en el caso base.
- 0.5 ptos por definir correctamente la función con respecto a la 1era regla de construcción.
- 0.5 ptos por definir correctamente la función con respecto a la 2da regla de construcción.

c)
- 0.5 ptos por el caso base.
- 0.25 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva para la 1era regla de construcción.
- 1 pto por demostrar correctamente la tesis inductiva para la 1era regla de construcción.
- 0.25 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva para la 2da regla de construcción.
- 1 pto por demostrar correctamente la tesis inductiva para la 2da regla de construcción.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

## Pregunta 3

(a) (**1.5 ptos**) Encuentre fórmulas en CNF y DNF que sean equivalentes a $(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s)$.

(b) (**1.5 ptos**) Definimos el conectivo ternario $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$ de manera que $\texttt{Mayoria}(p, q, r) = 1$ si y solo si el valor que más aparece entre $p$, $q$ y $r$ es 1. Escriba la tabla de verdad para $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$.

(c) (**3 ptos**) Escriba una fórmula que use sólo los conectivos $\land, \lor, \neg$ y que sea equivalente a $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$.

## Solución

(a) Primero, busquemos una fórmula en DNF equivalente:

$$\begin{aligned}
(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s) &\equiv \neg(p \lor \neg q) \lor (r \lor \neg s) \qquad \text{(ley implicancia)}\\
&\equiv (\neg p \land \neg(\neg q)) \lor (r \lor \neg s) \qquad \text{(ley de Morgan)}\\
&\equiv (\neg p \land q) \lor (r \lor \neg s) \qquad \text{(doble negación)}\\
&\equiv (\neg p \land q) \lor r \lor \neg s \qquad \text{(asociatividad } \lor\text{)}
\end{aligned}$$

Notar que la última fórmula está en DNF. Ahora, busquemos una fórmula en CNF equivalente:

$$\begin{aligned}
(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s) &\equiv (\neg p \land q) \lor (r \lor \neg s) \qquad \text{(desarrollo anterior)}\\
&\equiv (\neg p \lor (r \lor \neg s)) \land (q \lor (r \lor \neg s)) \qquad \text{(distributividad)}\\
&\equiv (\neg p \lor r \lor \neg s) \land (q \lor r \lor \neg s) \qquad \text{(asociatividad } \lor\text{)}
\end{aligned}$$

Notar que la última fórmula está en CNF.

Otra alternativa es hacer la tabla de verdad de $(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s)$, escribir la fórmula en DNF equivalente, según el método visto en clases, y luego utilizar distributividad para obtener una fórmula en CNF equivalente. Omitimos esta solución.

(b) La tabla de verdad de $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

(c) Podemos usar el método visto en clases para obtener una fórmula DNF equivalente desde una tabla de verdad:

$$(\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land \neg r) \lor (p \land q \land r)$$

**Pauta (6 ptos)**

a)
- 0.75 ptos por encontrar la fórmula equivalente en DNF.
- 0.75 ptos por encontrar la fórmula equivalente en CNF.

En ambos casos hay descuentos si la fórmula no está completamente correcta. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje.

b) 1.5 ptos por escribir correctamente la tabla de verdad. Hay descuentos si algunas filas de la tabla son incorrectas.

c) 3.0 ptos por encontrar la fórmula equivalente. Hay descuentos si la fórmula no está completamente correcta. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

## Pregunta 4

Suponga que tenemos un conjunto $T = \{1, \ldots, n\}$ de $n$ torres eléctricas. Algunas torres están conectadas entre sí, vía un cable, y otras no. Las conexiones entre las torres vienen dadas por una conjunto $C$ de parejas de torres que están conectadas vía un cable. Decimos que un subconjunto $X$ de las torres en $T$ es *crítico*, si las torres de $X$ cubren *todos* los cables especificados en $C$. Más precisamente, $X$ es crítico si para toda conexión $(i, j) \in C$, tenemos que $i \in X$ o $j \in X$ (podrían pasar ambas cosas).

Como ejemplo, suponga un conjunto $T = \{1, 2, 3, 4\}$ de 4 torres. Las conexiones via cable están dadas por las parejas $C = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (2, 4)\}$. Se cumple que $X = \{2, 3\}$ es un subconjunto crítico de 2 torres, ya que para cualquier pareja de torres especificada en $C$, alguna de las dos torres está en $X$. Por el contrario, $X = \{1, 3\}$ no es crítico, debido a que la conexión $(2, 4) \in C$ no está siendo cubierta, ya que ni 2 ni 4 estarían en $X$.

Dado un conjunto $T$ de $n$ torres, las conexiones $C$, y un parámetro $k \leq n$, queremos escribir una fórmula $\varphi$ en la lógica proposicional tal que:

Existe un subconjunto crítico de $k$ torres si y solo si $\varphi$ es satisfacible.

Para esto utilizaremos dos tipos de variables proposicionales:

- Variables $p_{ij}$, donde $1 \leq i, j \leq n$, que expresan que las torres $i$ y $j$ están conectadas.
- Variables $z_{hi}$ donde $1 \leq h \leq k$ e $1 \leq i \leq n$, que expresan que la torre $i$ es la $h$-ésima torre en el subconjunto crítico.

La fórmula $\varphi$ es la conjunción de 4 fórmulas que modelan distintas restricciones. A continuación se pide modelar en lógica proposicional estas restricciones (debe usar las variables indicadas arriba):

(a) (**1.5 ptos**) Inicialización de las variables $p_{ij}$.

(b) (**1.5 ptos**) Para toda posición $1 \leq h \leq k$, hay una, y solo una $h$-ésima torre del subconjunto crítico.

(c) (**1.5 ptos**) Si tomamos dos posiciones distintas $1 \leq h, g \leq k$, entonces la $h$-ésima y la $g$-ésima torre del subconjunto crítico son distintas.

(d) (**1.5 ptos**) Si dos torres $i$ y $j$ están conectados, entonces alguna de las dos debe estar en el subconjunto crítico.

*Importante*: Para cada item, puede asumir que las restricciones de los items anteriores se cumplen.

## Solución

(a) Inicialización de las variables $p_{ij}$:

$$\left( \bigwedge_{(i,j) \in C} p_{ij} \right) \wedge \left( \bigwedge_{(i,j) \notin C} \neg p_{ij} \right)$$

(b) Para toda posición $1 \leq h \leq k$, hay una, y solo una $h$-ésima torre del subconjunto crítico.

$$\bigwedge_{h=1}^{k} \left( \left( \bigvee_{i=1}^{n} z_{hi} \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{n} \left( z_{hi} \rightarrow \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \neg z_{hj} \right) \right) \right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{h=1}^{k} \left( \left( \bigvee_{i=1}^{n} z_{hi} \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\neg z_{hi} \vee \neg z_{hj}) \right) \right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{h=1}^{k} \left( \bigvee_{i=1}^{n} \left( z_{hi} \wedge \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \neg z_{hj} \right) \right)$$

(c) Si tomamos dos posiciones distintas $1 \leq h, g \leq k$, entonces la $h$-ésima y la $g$-ésima torre del subconjunto crítico son distintas.

$$\bigwedge_{h=1}^{k} \bigwedge_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^{k} \bigwedge_{i=1}^{n} \left( z_{hi} \rightarrow \neg z_{gi} \right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{h=1}^{k} \bigwedge_{\substack{g=1 \\ g \neq h}}^{k} \bigwedge_{i=1}^{n} \left( z_{hi} \rightarrow \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} z_{gj} \right)$$

(d) Si dos torres $i$ y $j$ están conectados, entonces alguna de las dos debe estar en el subconjunto crítico.

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left( p_{ij} \rightarrow \left( \left( \bigvee_{h=1}^{k} z_{hi} \right) \vee \left( \bigvee_{h=1}^{k} z_{hj} \right) \right) \right)$$

**Pauta (6 ptos)**

1.5 ptos por cada fórmula correcta. Hay descuentos parciales cuando las fórmulas tienen índices incorrectos, si no alcanzan a expresar por completo lo solicitado o si no se justifica alguna suposición importante. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje. Otros puntajes parciales y soluciones alternativas quedan a criterio del corrector.