Grafos (parte 2)

Clase 20

IIC 1253

Prof. Miguel Romero

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de camino, ciclo y componente
- Demostrar resultados de conectividad
- Demostrar resultados para grafos bipartitos

Outline

Caminos y Ciclos

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Caminos y Ciclos

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Conectividad

Definición

Dos vértices x e y en un grafo G están **conectados** si existe un camino en G que empieza en x y termina en y.

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

Conectividad

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

<u>Demostración:</u>

Sea $G = (V, E)$ y $\sim$ la relación "estar conectados".

- **Refleja:** Sea $v \in V$ cualquiera, podemos tomar el camino (v) que une v consigo mismo. Concluímos que $v \sim v$.
- **Simétrica:** Suponemos $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$. Luego, existe un camino $(v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ que conecta v_1 y v_2. Como E es simétrica, debe existir también el camino $(v_2, u_n, \ldots, u_1, v_1)$ y por lo tanto $v_2 \sim v_1$.
- **Transitiva:** Suponemos $v_1, v_2, v_3 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Luego, existen caminos $p = (v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ y $q = (v_2, w_1, \ldots, w_m, v_3)$. Por lo tanto, debe existir el camino $((v_1, u_1, \ldots, u^*, \ldots, w_m, v_3))$ donde u^* es el último vértice del cámino q que comparte con el camino p. Si no tienen vértices en común basta con unir los caminos p y q. Concluímos que $v_1 \sim v_3$.

Conectividad

Definición

Dado un vértice v de un grafo G, su clase de equivalencia bajo la relación "estar conectados" es una **componente conexa** de G.

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

Definición

Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices $x, y \in V$ está conectado. En otro caso, G es **disconexo**.

Un grafo conexo tiene una única componente conexa

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si un grafo G con n vértices es conexo, tiene al menos $n - 1$ aristas.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Demostración:

Un grafo G con n vértices puede tener como máximo n componentes conexas, cuando no tiene ninguna arista, cada nueva arista que se le agregue puede reducir la cantidad de componentes a lo más en 1, por lo que luego de agregar k aristas la cantidad de componentes se ha reducido como máximo en k, por lo que la cantidad de componentes siempre se mantiene mayor o igual a $n - k$.

Conectividad

Definición

Una **arista de corte** en un grafo G es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Definición

Un **vértice de corte** en un grafo G es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

<u>Demostración:</u>

Sin pérdida de generalidad, supondremos que G es conexo.

($\Rightarrow$) Por contrapositivo, mostraremos que al eliminar una arista (u, v) perteneciente a un ciclo C del grafo, este se mantiene conexo. En $G - uv$, los únicos caminos que podrían verse afectados son los que pasan por (u, v). Sea $x, y \in V$ vértices conectados por un camino que contiene a la arista (u, v). Esto quiere decir que x está conectado con u (1) y v está conectado con y (2). Ahora, como (u, v) está en C, si sacamos (u, v) se sigue cumpliendo que u está conectado con v (3), a través del camino que forma la porción restante de C. De (1) y (3) por transitividad tenemos que x está conectado con v (4), y de (4) y (2) por transitividad tenemos que x está conectado con y. Por lo tanto, (u, v) no puede ser de corte.

$(\Leftarrow)$ Por contrapositivo, supongamos ahora que $e = (u, v)$ no es una arista de corte, o sea que al sacarla G sigue siendo conexo. Esto quiere decir que existe un camino, digamos P, entre u y v en $G - e$. Luego, el camino P junto con la arista (u, v) forman un ciclo en G.

Un resultado sobre ciclos

Lema

En un grafo G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Demostración:

Por inducción en el largo de la caminata.

¡Ojo, las caminatas que nos interesan son las de largo impar!

Un resultado sobre ciclos

- **CB.** La caminata cerrada más pequeña de largo impar es un ciclo de tres vértices, esta caminata ya es un ciclo así que el caso base se cumple.
- **HI.** Supongamos que toda caminata cerrada de largo impar menor a ℓ tiene un ciclo de largo impar.
- **TI.** Sea C una caminata cerrada de largo ℓ impar.
  - Si C no repite vértices entonces C ya es un ciclo impar y comprobamos lo que queríamos.
  - Si por otro lado, en C se repite un vértice v, entonces podemos partir C en dos caminatas distintas que comienzan en v, C' y C''. No puede ocurrir que C' y C'' tengan largo par ya que entonces C no podría tener largo impar, por lo que al menos una de ellas es una caminata cerrada de largo impar estrictamente menor a ℓ y por HI contiene un ciclo de largo impar, que también sería un ciclo de largo impar en C comprobando lo que queríamos.

$\square$

Outline

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

- Con esto caracterizamos a los grafos bipartitos.
- ¿Qué pasa si G no es conexo?
- ¿Cómo diseñamos un algoritmo que resuelva el problema de determinar si un grafo es o no bipartito, y dé una muestra de su decisión?

Grafos bipartitos

Teorema

Un grafo conexo G es bipartito si y sólo si no contiene ningún ciclo de largo impar.

<u>Demostración:</u>

($\Rightarrow$) Supongamos que G contiene un ciclo de largo impar, digamos $C = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_1)$, con k un natural impar, demostraremos que G no puede ser bipartito. Supongamos que G es bipartito con particiones V_1 y V_2 y supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 \in V_1$. Dado que C es un ciclo, necesariamente $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i < k$ y $(v_k, v_1) \in E(G)$, por lo que debe ocurrir que $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, v_4 \in V_2$, etc. En general debe ocurrir que para los vértices del ciclo C, $v_i \in V_1$ si i es impar, y $v_i \in V_2$ si i es par, luego $v_k \in V_1$ lo que es una contradicción con el hecho de suponer que V_1 es una partición que contiene a v_1 ya que $(v_k, v_1) \in E(G)$.

Grafos bipartitos

$(\Leftarrow)$ Supongamos que G no contiene ningún ciclo de largo impar, demostraremos que es posible definir una partición de los vértices de G en dos conjuntos independientes. Sea v un vértice cualquiera de $V(G)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo impar de } v \text{ a } u\}$$
$$V_2 = \{u \in V(G) \mid \text{existe un camino de largo par de } v \text{ a } u\}$$

Si existiera una arista entre dos vértices de V_1 digamos u_1 y u_2, entonces, dado que existen caminos $v - u_1$ y $v - u_2$ ambos de largo impar, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista (v_1, v_2) y por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.

Grafos bipartitos

($\Leftarrow$) Si existiera una arista entre dos vértices de V_2 digamos w_1 y w_2, entonces, dado que existen caminos $v - w_1$ y $v - w_2$ ambos de largo par, existiría una caminata cerrada de largo impar formada por los dos caminos anteriores más la arista (w_1, w_2) y nuevamente por el lema visto en clases existiría un ciclo de largo impar contradiciendo nuestra suposición.

Finalmente no existe arista entre vértices de V_1 y no existe aristas entre vértices de V_2 y como G es conexo se tiene que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ por lo que G es bipartito con particiones V_1 y V_2.

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de camino, ciclo y componente
- Demostrar resultados de conectividad
- Demostrar resultados para grafos bipartitos