Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

05 de Septiembre de 2024

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

(a) **(3 ptos)** Demuestre por inducción que para todo $n \geq 3$ se cumple que:

$$n^2 - 7n + 12 \geq 0$$

(b) **(3 ptos)** Definimos la secuencia a_n, con $n \geq 1$, como sigue

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} - n + 4 \qquad \text{para todo } n \geq 3 \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que para todo $n \geq 3$ se tiene que $a_n \geq n$.

Solución

(a) Usaremos inducción simple:

CB: Para $n = 3$ tenemos que

$$3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0 \geq 0$$

HI: Supongamos que la propiedad se cumple para $n \geq 3$:

$$n^2 - 7n + 12 \geq 0$$

TI: Hay que demostrar que la propiedad se cumple para $n + 1$, es decir, que se cumple:

$$(n+1)^2 - 7(n+1) + 12 \geq 0$$

Comenzaremos por el lado izquierdo y llegaremos al lado derecho acotando inferiormente:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - 7(n+1) + 12 &= n^2 + 2n + 1 - 7n - 7 + 12 \\ &= (n^2 - 7n + 12) + 2n - 6 \\ &\geq 0 + 2n - 6 \qquad \text{(HI)} \\ &\geq 0 \qquad (n \geq 3) \end{aligned}$$

(b) Usaremos inducción fuerte:

CB: Para $n = 3$ y $n = 4$ tenemos:

$$a_3 = 1 + 1 - 3 + 4 = 3 \geq 3$$
$$a_4 = 3 + 1 - 4 + 4 = 4 \geq 4$$

HI: Sea $n \geq 5$. Supongamos que para todo k tal que $3 \leq k < n$ se cumple que $a_k \geq k$.
TI: Hay que demostrar que se cumple la propiedad para n, es decir, se cumple $a_n \geq n$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} - n + 4 && \text{(por definición)} \\ &\geq n - 1 + n - 2 - n + 4 && \text{(HI)} \\ &= n + 1 \\ &\geq n \end{aligned}$$

Pauta (6 ptos)

a)
- 0.5 ptos por el caso base.
- 0.5 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva.
- 2.0 ptos por demostrar correctamente la tesis inductiva.

b)
- 0.5 ptos por los casos bases.
- 0.5 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva.
- 2.0 ptos por demostrar correctamente la tesis inductiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 2

Definimos inductivamente el conjunto SF de secuencias finitas de números naturales como el menor conjunto que cumple:

1. $\varnothing \in SF$, donde $\varnothing$ es la secuencia vacía.
2. Si $A \in SF$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $A, n \in SF$.

Algunos ejemplos de elementos en SF:

$$3 \qquad 3, 0, 5 \qquad 1, 1, 1, 4, 1000$$

(a) (**1 pto**) Defina inductivamente la función $largo : SF \to \mathbb{N}$ que le asigna a cada secuencia $A \in SF$ la cantidad números que posee.

(b) (**1 pto**) Defina inductivamente la función $suma : SF \to \mathbb{N}$ que le asigna a cada secuencia $A \in SF$ la suma de los números que posee.

(c) (**1 pto**) Defina inductivamente la función $incr_1 : SF \to \mathbb{N}$ que le asigna a cada secuencia $A \in SF$, la secuencia resultante de sumarle 1 a cada número de la secuencia. A la secuencia vacía se le asigna la misma secuencia vacía. Ejemplos:

$$incr_1(3) = 4 \qquad incr_1(3, 0, 5) = 4, 1, 6 \qquad incr_1(1, 1, 1, 4, 1000) = 2, 2, 2, 5, 1001$$

(d) (**3 ptos**) Demuestre usando inducción estructural que para toda secuencia $A \in SF$ se cumple:

$$suma(incr_1(A)) = suma(A) + largo(A)$$

Importante: En todos los items **debe** usar la definición inductiva de SF.

Solución

(a) Definimos la función *largo* como sigue:

1. $largo(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \in SF$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $largo(A, n) = largo(A) + 1$.

(b) Definimos la función *suma* como sigue:

1. $suma(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \in SF$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $suma(A, n) = suma(A) + n$.

(c) Definimos la función $incr_1$ como sigue:

1. $incr_1(\varnothing) = \varnothing$.
2. Si $A \in SF$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $incr_1(A, n) = incr_1(A), n + 1$.

(d) **CB**: Tenemos que

$$suma(incr_1(\varnothing)) = suma(\varnothing) = 0 = 0 + 0 = suma(\varnothing) + largo(\varnothing)$$

HI: Supongamos que para $A \in SF$ se cumple:

$$suma(incr_1(A)) = suma(A) + largo(A)$$

TI: Sea $n \in \mathbb{N}$. Hay que demostrar que:

$$suma(incr_1(A, n)) = suma(A, n) + largo(A, n)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
suma(incr_1(A, n)) &= suma(incr_1(A), n + 1) \qquad \text{(definición } incr_1\text{)} \\
&= suma(incr_1(A)) + n + 1 \qquad \text{(definición } suma\text{)} \\
&= suma(A) + largo(A) + n + 1 \qquad \text{(HI)} \\
&= (suma(A) + n) + (largo(A) + 1) \\
&= suma(A, n) + largo(A, n) \qquad \text{(definición } suma \text{ y } largo\text{)}
\end{aligned}$$

Pauta (6 ptos)

(a)
- 0.25 ptos por definir correctamente la función en el caso base.
- 0.75 ptos por definir correctamente la función en el caso inductivo.

(b)
- 0.25 ptos por definir correctamente la función en el caso base.
- 0.75 ptos por definir correctamente la función en el caso inductivo.

(c)
- 0.25 ptos por definir correctamente la función en el caso base.
- 0.75 ptos por definir correctamente la función en el caso inductivo.

(d)
- 0.5 ptos por el caso base.
- 0.5 ptos por plantear correctamente la hipótesis inductiva.
- 2 ptos por demostrar correctamente la tesis inductiva.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 3

(a) (**1.5 ptos**) Encuentre fórmulas en CNF y DNF que sean equivalentes a $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$.

(b) (**1.5 ptos**) ¿Son las fórmulas $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ y $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ equivalentes? Argumente su respuesta.

(c) (**1.5 ptos**) ¿Son las fórmulas $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ y $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ equivalentes? Argumente su respuesta.

(d) (**1.5 ptos**) ¿Es cierto que si φ y ψ son satisfacibles, entonces $\varphi \wedge \psi$ es satisfacible? Argumente su respuesta.

Solución

(a) Primero, busquemos una fórmula en DNF equivalente:

$$\begin{aligned}(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s) &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg r \wedge s) \qquad \text{(ley implicancia)}\\ &\equiv (\neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)) \vee (\neg r \wedge s) \qquad \text{(ley de Morgan)}\\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge s) \qquad \text{(doble negación)}\end{aligned}$$

Notar que la última fórmula está en DNF. Ahora, busquemos una fórmula en CNF equivalente:

$$\begin{aligned}(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s) &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge s) \qquad \text{(desarrollo anterior)}\\ &\equiv (p \vee (\neg r \wedge s)) \wedge (q \vee (\neg r \wedge s)) \qquad \text{(distributividad)}\\ &\equiv ((p \vee \neg r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee \neg r) \wedge (q \vee s)) \qquad \text{(distributividad)}\\ &\equiv (p \vee \neg r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (q \vee s) \qquad \text{(asociatividad } \wedge\text{)}\end{aligned}$$

Notar que la última fórmula está en CNF.

Otra alternativa es hacer la tabla de verdad de $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$, escribir la fórmula en DNF equivalente, según el método visto en clases, y luego utilizar distributividad para obtener una fórmula en CNF equivalente. Omitimos esta solución.

(b) No son equivalentes. Por ejemplo, podemos tomar la valuación σ que asigna:

$$\sigma(p) = 0 \qquad \sigma(q) = 0 \qquad \sigma(r) = 0$$

Como $\sigma(p) = 0$, tenemos que $\sigma(p \rightarrow q) = 1$. Esto implica que $\sigma((p \rightarrow q) \rightarrow r) = 0$, ya que $\sigma(r) = 0$. Por otra parte, como $\sigma(p) = 0$, obtenemos que $\sigma(p \rightarrow (q \rightarrow r)) = 1$. Concluimos que $\sigma((p \rightarrow q) \rightarrow r) \neq \sigma(p \rightarrow (q \rightarrow r))$.

(c) Si son equivalentes. Podemos demostrar esto escribiendo las tablas de verdad de ambas fórmulas:

p	q	r	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(d) Falso. Por ejemplo, podemos tomar p y $\neg p$. Tenemos que p es satisfacible, ya que podemos tomar la valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$. Similarmente, tenemos que $\neg p$ es satisfacible, ya que podemos tomar la valuación σ tal que $\sigma(p) = 0$. Pero la fórmula $p \wedge \neg p$ no es satisfacible, ya que cualquier valuación tiene que hacer p o $\neg p$ falsa.

Pauta (6 ptos)

a)
- 0.75 ptos por encontrar la fórmula equivalente en DNF.
- 0.75 ptos por encontrar la fórmula equivalente en CNF.

En ambos casos hay descuentos si la fórmula no está completamente correcta. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje.

b)
- 0.5 ptos por decir que no son equivalentes. Si se dice lo contrario, la pregunta no recibe puntaje.
- 1 pto por argumentar correctamente que no son equivalentes.

c)
- 0.5 ptos por decir que son equivalentes. Si se dice lo contrario, la pregunta no recibe puntaje.
- 1 pto por argumentar correctamente que son equivalentes.

d)
- 0.5 ptos por decir que es falso. Si se dice lo contrario, la pregunta no recibe puntaje.
- 1 pto por argumentar correctamente que es falso.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Pregunta 4

Suponga que tenemos un conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de n personas. Estas personas están conformadas en m grupos $G_1, \ldots, G_m$. Cada grupo G_i puede tener *cualquier* tamaño. Cada persona pertenece a algún grupo, y podría pertenecer a más de un grupo. Adicionalmente, tenemos un conjunto $T = \{1, \ldots, q\}$ de q temas de discusión ($q \leq n$). Una *planificación válida* es una forma de asignarle a cada persona un tema de discusión de manera que se cumplan las siguiente condiciones:

- Cada tema es asignado al menos a una persona.
- Dentro de cada grupo hay al menos dos temas distintos.
- No puede existir un grupo que tenga asignado todos los temas. En otras palabras, dentro de cada grupo hay un tema que no se discute.

Queremos escribir una fórmula φ en la lógica proposicional tal que:

Existe una planificación válida si y solo si φ es satisfacible.

Para esto, utilizaremos dos tipos de variables proposicionales:

- Variables p_{ik}, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq k \leq m$ que expresan que la persona i pertence al k-ésimo grupo, es decir, $i \in G_k$.
- Variables x_{it}, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq t \leq q$, que expresan que la persona i tiene asignado el tema t en la planificación válida.

La fórmula φ es la conjunción de 5 fórmulas que modelan distintas restricciones. A continuación se pide modelar en lógica proposicional estas restricciones (debe usar las variables indicadas arriba):

(a) (**1 pto**) Inicialización de las variables p_{ik}.

(b) (**1 pto**) Para cada persona $1 \leq i \leq n$, hay uno, y solo un tema t asignado a la persona i.

(c) (**1 ptos**) Para cada tema $1 \leq t \leq q$, hay alguna persona i que tiene asignado ese tema.

(d) (**1.5 ptos**) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay dos personas distintas i y j en el k-ésimo grupo G_k (es decir, $i, j \in G_k$) tal que sus temas asignados son distintos.

(e) (**1.5 ptos**) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay algún tema t, tal que no es asignado a ninguna persona dentro del k-ésimo grupo G_k.

Importante: Para cada item, puede asumir que las restricciones de los items anteriores se cumplen.

Solución

(a) Inicialización de las variables p_{ik}:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{k=1 \\ i \in G_k}}^{m} p_{ik} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{\substack{k=1 \\ i \notin G_k}}^{m} \neg p_{ik} \right)$$

(b) Para cada persona $1 \leq i \leq n$, hay uno, y solo un tema t asignado a la persona i.

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\left(\bigvee_{t=1}^{q} x_{it}\right) \wedge \left(\bigwedge_{t=1}^{q}\left(x_{it} \to \bigwedge_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{q} \neg x_{is}\right)\right)\right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\left(\bigvee_{t=1}^{q} x_{it}\right) \wedge \left(\bigwedge_{t=1}^{q}\bigwedge_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{q} (\neg x_{it} \vee \neg x_{is})\right)\right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{t=1}^{q}\left(x_{it} \wedge \bigwedge_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{q} \neg x_{is}\right)\right)$$

(c) Para cada tema $1 \leq t \leq q$, hay alguna persona i que tiene asignado ese tema.

$$\bigwedge_{t=1}^{q}\bigvee_{i=1}^{n} x_{it}$$

(d) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay dos personas distintas i y j en el k-ésimo grupo G_k (es decir, $i, j \in G_k$) tal que sus temas asignados son distintos.

$$\bigwedge_{k=1}^{m}\left(\bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\bigvee_{t=1}^{q}\bigvee_{\substack{s=1\\ s\neq t}}^{q}(p_{ik} \wedge p_{jk} \wedge x_{it} \wedge x_{js})\right)$$

Otra alternativa:

$$\bigwedge_{k=1}^{m}\neg\left(\bigvee_{t=1}^{q}\bigwedge_{i=1}^{n}(p_{ik} \to x_{it})\right)$$

(e) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay algún tema t, tal que no es asignado a ninguna persona dentro del k-ésimo grupo G_k.

$$\bigwedge_{k=1}^{m}\left(\bigvee_{t=1}^{q}\bigwedge_{i=1}^{n}(p_{ik} \to \neg x_{it})\right)$$

Pauta (6 ptos)

1 pto por cada fórmula correcta en los items (a),(b),(c) y 1.5 ptos por cada fórmula correcta en los items (d),(e). Hay descuentos parciales cuando las fórmulas tienen índices incorrectos, si no alcanzan a expresar por completo lo solicitado o si no se justifica alguna suposición importante. Fórmulas totalmente incorrectas no reciben puntaje. Otros puntajes parciales y soluciones alternativas quedan a criterio del corrector.