Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 13 - Grafos

22 de noviembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

- Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
- Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
- Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
- Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u | (v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum\limits_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

1. Homomorfismos

Un homomorfismo desde $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función $h : V_1 \to V_2$ tal que $\{u, v\} \in E_1 \to \{h(u), h(v)\} \in E_2$. Decimos que G_1 es homomorfo a G_2 si existe un homomorfismo desde G_1 a G_2.

1. Se define el grafo línea de largo n como

$$L_n = (\{0, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i \leq n-1\})$$

   Demuestre que, para todo grafo $G = (V, E)$, la línea L_n con $n \geq 2$ es homomorfo a G si y solo si $E \neq \varnothing$.

2. Se define el grafo de clique de tamaño n como

$$K_n = (\{0, \dots, n-1\}, \{\{i, j\} \mid 0 \leq i, j \leq n-1 \wedge i \neq j\})$$

   Demuestre que, para todo grafo $G = (V, E)$, el clique K_n es homomorfo a G si y solo si $\exists H \subseteq G$ tal que $H \cong K_n$, es decir, G contiene a K_n como subgrafo isomorfo.

Solución

1. Sea $\{u, v\} \in E(G)$. La función $h : V(L_n) \to V(G)$ definida por

$$h(i) = \begin{cases} u & 2 \mid i \\ v & 2 \nmid i \end{cases}$$

   Notemos que para todo nodo $i \in V(L_n)$ etiquetado con un número par se tiene que $h(i) = u$, y además que todos sus vecinos $j \in V(L_n), \{i, j\} \in E(L_n)$ están etiquetados con números impares, por lo que para todos sus vecinos $h(j) = v$, y vice versa. Con ello, $\{i, j\} \in V(L_n) \to \{h(i), h(j)\} \in E(G)$, y concluímos que h es un homomorfismo.

2.
   - $\to$: Se tiene que existe un homomorfismo h de K_n a G. Sea $R(h) = \{v \in V(H) \mid \exists v' \in K_n$ tal que $h(v') = v\}$, es decir, R es el conjunto de todos los nodos de G que son imagen del homomorfismo h. Como $|K_n| = n$ y h es función, por definición de función se tiene que $|R| \leq n$. Demostraremos en primer lugar que $|R| = n$. Supongamos, por contradicción, que $R < n$. Por principio del palomar, esto significa que $\exists i, j \in V(K_n)$ tal que $h(i) = h(j)$. Sin embargo, como trabajamos con grafos simples, G no tiene loops, por lo que no existe una arista entre $h(i)$ y $h(j)$. Esto es una contradicción, ya que h es un homomorfismo, por lo que necesariamente $|R| < n \wedge |R| \geq n$, con lo que $|R| = n$. Como h es un homomorfismo desde K_n, necesariamente todos los pares de nodos de su rango están unidos por aristas. Como su rango tiene cardinalidad n y todos sus nodos están unidos entre si, concluímos que h es un homomorfismo de K_n a G.
   - $\leftarrow$: Si $\exists H \subseteq G$ tal que $H \cong K_n$, denotando $V(H) = \{0, \dots, n-1\}$, entonces

la función $h : V(k_n) \to V(G)$ definida por

$$h(v) = v$$

es realmente la identidad $h' : K_n \to K_n$ pero con codominio expandido, por lo que es trivialmente un homomorfismo.

2. Ciclos

Sea G un grafo con un ciclo C, tal que existen dos nodos distintos que forman parte del ciclo C entre los cuales existe un camino P de largo k (no necesariamente contenido en C).

Demuestre que G tiene un ciclo de largo al menos $\sqrt{k}$.

Solución
Sea $v_1, \ldots, v_t$ la secuencia de nodos de P que también están en C. Hay dos posibilidades:

1. $t \geq \sqrt{k}$: como todos los nodos están en C, el tamaño de C es inmediatamente $\geq \sqrt{k}$ y la demostración está completa.
2. $t < \sqrt{k}$: Proposición: para algún i tal que $1 \leq i \leq t$ se tiene que entre v_i y v_{i+1} en P existen al menos $\sqrt{k}$ nodos. Demostraremos esto por contradicción. Supongamos que para todo i, entre v_i y v_{i+1} en P hay un número menor a $\sqrt{k}$ nodos. Si sumamos los largos de todos estos fragmentos deberíamos obtener el largo total del camino, k. Sin embargo, obtenemos un número $< t \cdot \sqrt{k}$, y como $t \leq \sqrt{k}$, el resultado es $< k$, lo que es una contradicción. Luego, la proposición es correcta.
   Con esto en consideración, el camino de largo $\geq \sqrt{k}$ entre v_i y v_{i+1} que es parte de P, unido al camino entre v_i y v_{i+1} que forma parte del ciclo C (hay dos tales caminos, se puede tomar cualquiera), forma un ciclo de largo al menos $\sqrt{k}$, que es lo que se quería demostrar.

3. Ciclos eulerianos

Sea M_n un tablero de ajedrez de $n \times n$ celdas. Considere una pieza especial que puede moverse tanto como un rey o como un caballo. Determine y demuestre para todo valor de n si existe un ciclo euleriano para esta pieza en M_n.

Solución
Con $n = 1$, $M_n = (\{v\}, \varnothing)$ por lo que contiene el ciclo Euleriano trivial.

Recordemos que un grafo tiene un ciclo Euleriano si y solo si es conexo y todos sus nodos tienen grado par.
Con $n = 2$, notemos que todo nodo de M_n tiene 3 aristas, por lo que por teorema M_2 no tiene un ciclo Euleriano.
Con $n \geq 3$, todas las "esquinas" tienen exactamente 5 aristas: 3 que las unen con los vecinos inmediatos del tablero de ajedrez, y otras dos correspondientes a los dos saltos de caballo posibles desde las esquinas. Con ello, por teorema M_n con $n \geq 3$ no puede tener un ciclo Euleriano.