Inducción simple y fuerte

Clase 01

IIC 1253

Prof. Miguel Romero

Outline

Un poco de notación

Lenguaje matemático

¿Qué representan los siguientes símbolos matemáticos?

- $x \in B$ — (x pertenece a B)
- $x \notin B$ — (x no pertenece a B)
- $\exists x$ — (Existe x)
- $\forall x$ — (Para todo x)
- $A \subseteq B$ — (A es subconjunto de B)
- $A \subsetneq B$ — (A es subconjunto propio de B)

Asumiremos como conocidos estos símbolos.
Los estudiaremos en detalle más adelante.

El punto de partida del curso

La matemática discreta se encarga del estudio de **estructuras discretas**

- ¿Cuál es la estructura discreta más sencilla?
- ¿Para qué podemos usarla?

Los **naturales** serán la base de nuestro trabajo

Nuestra primera "*definición*"

Definición (informal)

Los **números naturales**, denotados por $\mathbb{N}$, son los números que sirven para contar los elementos de un conjunto.

¿Qué propiedades tiene este conjunto?

Axiomas de $\mathbb{N}$

Axiomas de Peano (extracto)

1. El número $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n+1) \in \mathbb{N}$ donde $n+1$ es el sucesor de n.
3. Todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$ tiene un antecesor en $\mathbb{N}$.
4. **Principio del buen orden:**
   Todo subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene un menor elemento.

¿El **cero** está en los naturales?

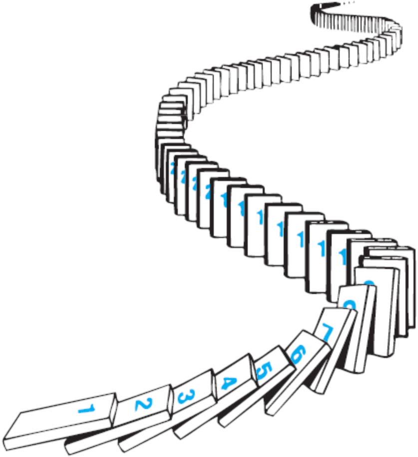
Una propiedad interesante y útil

Hoy nos centraremos en una propiedad **intrínseca** de los naturales

- Se deduce de los axiomas (veremos que es más potente que una simple deducción)
- Nos permitirá demostrar propiedades en $\mathbb{N}$
- Nos permitirá definir objetos

Esta propiedad es el **Principio de inducción**

Inducción



Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción simple
- Conocer diferentes formulaciones del principio
- Aplicar el principio para demostrar propiedades
- Demostrar una de las equivalencias de estos principios

Outline

Principios de inducción: PBO

Principio del buen orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento, i.e.

$$A \neq \varnothing,\ A \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \exists x \in A.\ \forall y \in A.\ (x \leq y)$$

Paréntesis

El símbolo $\Rightarrow$ denota una **implicancia**.

- Lo que está antes de $\Rightarrow$ es el **antecedente**
- Lo que está después, es el **consecuente**

¿Es cierto el PBO en los racionales? ¿Y en los reales?

Principios de inducción: PBO

Proposición

El PBO **no es cierto** en $\mathbb{Q}$.

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Observamos que

- A no es vacío y
- $A \subseteq \mathbb{Q}$

Supongamos por contradicción que $\mathbb{Q}$ cumple el PBO. En tal caso, existe $q_0 \in A$ que es su menor elemento.

Como $q_0 \in A$, entonces $q_0 > 0$ y $q_0/2 \in A$. Como $0 < q_0/2 < q_0$, concluimos que q_0 no es el menor elemento de A. Esto contradice el supuesto del PBO.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ no cumple el PBO. $\square$

Observe que la misma demostración sirve para $\mathbb{R}$

Principio de inducción

Principio de inducción simple (PIS)

Para A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Notación

- La condición 1. se llama el **caso base** o **base de inducción**.
- La condición 2. se llama **paso inductivo**
  - La suposición $n \in A$ es la **hipótesis de inducción**.
  - La demostración de que $n + 1 \in A$ es la **tesis de inducción**.

Principio de inducción

Ejercicio

Demuestre que 0 es el menor número natural.

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$. Usaremos el PIS para demostrar que $A = \mathbb{N}$, con lo que estaremos demostrando que para todo elemento $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \geq 0$, y por lo tanto que 0 es el menor natural.

- **CB:** Es claro que $0 \in A$, puesto que $0 \in \mathbb{N}$ y $0 \geq 0$.
- **HI:** Supongamos que $n \in A$, y por lo tanto $n \geq 0$.
- **TI:** Debemos demostrar que $n + 1 \in A$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $n \geq 0$, y por lo tanto $n + 1 \geq 1$. Concluimos que $n + 1 \geq 0$, y entonces $n + 1 \in A$.

Por PIS, se sigue que $A = \mathbb{N}$. □

Principio de inducción

PIS (Segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (0 cumple la propiedad P)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama **caso base**.
- El punto 2. es el **paso inductivo**
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción**

Ejemplo de demostración por inducción

Teorema

La suma de los primeros n números naturales es igual a

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Demostración

Demostramos que se cumple para $n = 0$:

Caso base $(n = 0)$: $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

Ejemplo de demostración por inducción

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\textbf{Hipótesis:} \quad \sum_{i=0}^{n} i &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
\textbf{Tesis:} \quad \sum_{i=0}^{n+1} i &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i}_{\text{caso n}} + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

Una variación del principio de inducción

Existen propiedades en $\mathbb{N}$ que no se cumplen en todos los naturales, pero sí **desde cierto número**

- Podemos modificar el PIS
- El **CB** ya no es 0

Ejemplo

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple

$$n! \;>\; 2^n$$

Una variación del principio de inducción

Demostración

$$n! \; > \; 2^n \quad \text{es verdadero } \textbf{para todo } n \geq 4$$

1. $\mathbf{P(4)}: 4! \; = \; 24 \; > \; 16 \; = \; 2^4$ ✓
2. si $\mathbf{P(n)}: n! \; > \; 2^n$ es verdadero con $n \geq 4$, entonces:

$$\begin{array}{lrcll} \mathbf{P(n+1)}: & (n+1)! & = & n! \cdot (n+1) & \\ & & > & 2^n \cdot (n+1) & \text{(por HI)} \\ & & > & 2^n \cdot 4 & (\text{como } n \geq 4) \\ & & > & 2^{n+1} & \end{array}$$

✓

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \geq 4$.

Una variación del principio de inducción

PIS (Tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero
2. Para todo $n \geq n_0$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Esta formulación permite demostrar propiedades con un caso base mayor a 0

Outline

El poder de la inducción

La **sucesión de Fibonacci** es una serie de naturales $F(0), F(1), F(2), \ldots$ que cumple la siguiente **recurrencia**

$$\begin{array}{lcll} F(0) & = & 0 & \\ F(1) & = & 1 & \\ F(n) & = & F(n-1) + F(n-2) & \text{para } n \geq 2 \end{array}$$

¿cómo calculamos el valor de $F(n)$ para un n cualquiera?

$$\begin{array}{lclclcl} F(0) & = & 0 & & & & \\ F(1) & = & 1 & & & & \\ F(2) & = & F(1) + F(0) & = & 1 + 0 & = & 1 \\ F(3) & = & F(2) + F(1) & = & 1 + 1 & = & 2 \\ F(4) & = & \ldots & & & & \end{array}$$

¿Basta inducción simple para probar que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$?

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción fuerte (PIF)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A \;\Rightarrow\; n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Observaciones

- La **HI** es la expresión $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A$
- La **TI** es la expresión $n \in A$

¿Dónde está el **caso base** en el principio anterior?

Principio de inducción fuerte

PIF (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si P cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(k) \text{ es verdadero } \textbf{para todo } \mathbf{k < n}, \quad \text{entonces} \quad P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Ejemplo

Demuestre que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

¡Ojo! El **CB** se debe demostrar manualmente igual que en inducción simple

Principio de inducción fuerte

Demostración

$$P(n) := F(n) \leq 2^n \quad \text{para todo } n$$

1. **CB.** $\mathbf{P(0)}: \; F(0) = 0 \leq 2^0$

   $\mathbf{P(1)}: \; F(1) = 1 \leq 2^1$

2. **HI.** Sup. $\mathbf{P(k)}: \; F(k) \leq 2^k$ es verdadero para todo $k < n$, entonces:

$$\begin{aligned} \textbf{TI. } \mathbf{P(n)}: \quad F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-2} \qquad \text{(por HI)} \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &\leq 2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$.

En este caso se debía demostrar 2 casos base

Principio de inducción fuerte

Ejemplo (Propuesto ★)

Demostremos que la siguiente propiedad se cumple para todo natural $n \geq 2$

$$P(n) \;:=\; n \text{ tiene un factor primo}$$

1. **CB.** $\mathbf{P(2)}$ es cierto pues 2 es primo, por lo que tiene un factor primo.
2. **HI.** Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.
3. **TI.** Consideramos $\mathbf{P(n)}$. Tenemos dos casos:
   - Si n es primo, entonces tiene un factor primo.
   - Si no, existen dos naturales k_1, k_2 tales que $n = k_1 \cdot k_2$ y donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por **HI** tiene un factor primo k_3. Como $n = k_1 \cdot k_2$, entonces k_3 también es factor de n.

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$ **tal que** $n \geq 2$.

Equivalencia de principios de inducción

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Principio del buen orden.
2. Principio de inducción simple.
3. Principio de inducción fuerte.

Demostraremos solo que 1. $\Rightarrow$ 2.
Las implicancias 2. $\Rightarrow$ 3. y 3. $\Rightarrow$ 1. quedan propuestas.

ADVERTENCIA: usaremos el método de demostración por **contrapositivo**.
Supondremos falso 2. y probaremos que 1. es falso.

Equivalencia de principios de inducción

Demostración (Propuesta ★)

Supongamos que el PIS es falso; es decir, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple las reglas del PIS, pero $A \neq \mathbb{N}$.

Sea entonces el conjunto $B = \mathbb{N} - A$, el cual cumple que $B \subseteq \mathbb{N}$ y $B \neq \varnothing$. Mostraremos que este conjunto no tiene menor elemento, y por lo tanto el PBO es falso.

Por contradicción, supongamos que B sí tiene un menor elemento al que llamamos b.

$$
\begin{aligned}
0 \in A \quad &\Rightarrow \quad b \neq 0 && (\text{def. de } B) \\
&\Rightarrow \quad b - 1 \in \mathbb{N} && (\text{axioma de } \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow \quad b - 1 \notin B && (b \text{ es el menor de } B) \\
&\Rightarrow \quad b - 1 \in A && (\text{def. de } B) \\
&\Rightarrow \quad b \in A && (A \text{ cumple reglas del } PIS)
\end{aligned}
$$

Esto contradice el hecho de que b sea el menor elemento de B. □

Outline

La dirección de la inducción

No olvidar la **dirección** en que se demuestra por inducción

- Casos base son independientes (se hace *a mano*)
- Se asume verdadera la **Hipótesis**
- A partir de la **HI** se demuestra la **Tesis**

¡No se puede partir la demostración desde lo que se quiere demostrar!

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción simple
- Conocer diferentes formulaciones del principio
- Aplicar el principio para demostrar propiedades
- Demostrar una de las equivalencias de estos principios