Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 6

18 de noviembre de 2024

2º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - M. Romero

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 25 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $k \geq 1$. Un k-coloreo para G es una función $c : V \to \{1, \dots, k\}$ tal que para toda arista $(u, v) \in E$ se cumple que $c(u) \neq c(v)$. Denotamos por $\chi(G)$ al mínimo $k \geq 1$ tal que G tiene un k-coloreo.

Por otra parte, denotamos por $\omega(G)$ al tamaño máximo de un clique en G, y por $\alpha(G)$ al tamaño máximo de un conjunto independiente en G.

(a) (2.0 pts) Demuestre que para todo grafo G, se tiene que $\omega(G) \leq \chi(G)$.

(b) (2.0 pts) Demuestre que existen grafos tal que $\omega(G) < \chi(G)$.

(c) (2.0 pts) Demuestre que para todo grafo G con n vértices, se cumple $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

Solución

a) Por contradicción, suponemos que el número cromático $\chi(G)$ es menor que $\omega(G)$. Sea c el $\chi(G)$-coloreo y consideramos el mayor clique del grafo. Por principio del palomar (más vértices que colores), hay dos vértices distintos u y v en ese clique tal que $c(u) = c(v)$. Sin embargo, como consideramos un clique, (u, v) está en E. Esto es una contradicción con que c sea un $\chi(G)$-coloreo, pues hay vértices adyacentes del mismo color.

b) Basta con notar que un ciclo requiere 2 colores si la cantidad de vértices es par y 3 colores si es impar para ser coloreado. Notamos que en los ciclos todos los vértices pertenecen a cliques de tamaño dos, excepto cuando el ciclo es de largo 3 (porque ahí es a la vez un 3-clique). Así que cualquier ciclo impar de 5 o más vértices tiene número cromático 3 y mayor clique de tamaño 2, es decir $2 = \omega(G) < \chi(G) = 3$.

c) Sea un grafo G y una k-coloración c. Consideramos para cada $i \in \{1, ..., k\}$ el conjunto de los vértices de color i dado por $C_i := \{v \in V \mid c(v) = i\}$. Notamos que C_i siempre es un conjunto independiente (pues en caso contrario c no sería una k-coloración). Además, $A = \{C_i \mid 1 \leq i \leq k, C_i \neq \emptyset\}$ es una partición de V (sólo consideramos los no vacíos por definición de partición) tal que: (i) la intersección es vacía porque cada vértice tiene asignado un único color dado que c es función y (ii) la unión es V porque c está definida para cada vértice y consideramos todos los colores. Se cumple que:

$$
\begin{aligned}
n &= |V| \\
&= \Sigma_{i \in \{1,\dots,k\}} |C_i| && \text{(porque } A \text{ es una partición)} \\
&\leq \Sigma_{i \in \{1,\dots,k\}} \alpha(G) && \text{(porque cada } C_i \text{ es conjunto independiente y } |C_i| \leq \alpha(G)) \\
&= k \cdot \alpha(G)
\end{aligned}
$$

En particular, para $k = \chi(G)$ se cumple lo pedido: $n \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

Pauta (6 pts.)

(a) 2 pts. tal que: 1.0 por reconocer propiedades de k-coloreos y cliques, y 1.0 por usar las propiedades para demostrar lo pedido.

(b) 2 pts. tal que: 1.0 por reconocer propiedades de k-coloreos y cliques, y 1.0 por usar las propiedades para demostrar lo pedido.

(c) 2 pts. tal que: 1.0 por reconocer propiedades de k-coloreos y conjuctos independientes, y 1.0 por usar las propiedades para demostrar lo pedido.

Pregunta 2

(a) (2.0 pts) Demuestre que todo árbol con al menos 2 vértices, tiene al menos 2 vértices de grado 1.

(b) (4.0 pts) En esta pregunta trabajaremos con grafos *dirigidos* sin loops. Un *camino simple* en un grafo dirigido $G = (V, E)$ es un secuencia de vértices distintos $(u_0, \ldots, u_\ell)$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, se cumple que $(u_{i-1}, u_i) \in E$. Notar que la definición de camino simple exige que todos los arcos apunten "hacia adelante" en el camino, es decir, desde u_{i-1} hacia u_i (y no al revés). Un *camino simple Hamiltoneano* en un grafo dirigido G es un camino simple que pasa por *todos* los vértices de G. Un grafo dirigido $G = (V, E)$ es un *torneo* si para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ se tiene que $(u, v) \in E$ o $(v, u) \in E$, pero no ambos.

Demuestre por inducción en la cantidad de vértices que todo torneo tiene un camino simple Hamiltoneano.

(*Hint:* En el paso inductivo, elimine un vértice v arbitrario del torneo y analice los distintos casos en que v se puede relacionar con el resto de los nodos.)

Solución

a) Opción 1: Por inducción simple en la cantidad de vértices:

BI: En un árbol con 2 vértices, ámbos son de grado 1 (solo se tiene 1 arista).

HI: Suponemos que todo árbol con n vértices tiene al menos 2 vértices de grado 1.

TI: Por demostrar que un árbol T de $n+1$ vértices tiene al menos 2 vértices de grado 1. Por Lema visto en clases, $T - v$ con v una de las hojas (vértice de grado 1) sigue siendo un árbol con n vértices que por HI tiene al menos 2 vértices de grado 1. Si al añadir v éste estaba conectado a un vértices de grado 1, entonces la cantidad de vértices de grado 1 se mantiene. Si al añadir v éste estaba conectado a un vértices de grado 2 o mayor, entonces aumenta la cantidad de vértices de grado 1. Así que T tiene al menos 2 vértices de grado 1.

Por principio de inducción simple, todo árbol con al menos 2 vértices tiene al menos 2 vértices de grado 1.

Opción 2 (Sketch): Tomar un camino de largo máximo y argumentar que los extremos tienen que ser hojas. Un extremo no puede tener grado 2 o más por que: (i) estará conectado a un vértice afuera del camino y el camino no sería máximo o (ii) estaría conectado a un vértice dentro del camino y entonces habría un ciclo.

Opción 3 (Sketch): Por el Handshaking Lemmam como un árbol tiene $n-1$ aristas, la suma de los grados es $2n-2$. Por contradicción, si no hubieran al menos dos hojas, entonces habría al menos $n-1$ nodos con grado al menos 2. Luego, la suma total de los grados sería mayor estricto que $2n-2$ (una contradicción).

b) Por inducción simple en la cantidad de vértices:

BI: En un torneo con 2 vértices digamos u y v, siempre estará la arista (u, v) o (v, u). En cualquiera de 2 casos, dicha arista es un camino simple Hamiltoneano.

HI: Suponemos que todo torneo con n vértices tiene un camino simple Hamiltoneano.

TI: Por demostrar que un torneo T de $n+1$ vértices tiene un camino simple Hamiltoneano. Si eliminamos un vértice u junto a sus aristas, por HI tenemos un camino simple Hamiltoneano $(v_1, ..., v_n)$ que incluye todos los otros vértices. Al volver a añadir u al torneo tenemos 3 casos. En el primero tenemos que existe arista (u, v_1) por lo que $(u, v_1, ..., v_n)$ es un camino simple Hamiltoneano. En el segundo tenemos que existe arista (v_n, u) por lo que $(v_1, ..., v_n, u)$ es un camino simple Hamiltoneano.

En el tercer caso tenemos las aristas (v_1, u) y (u, v_n). Una arista que "llega" al vértice u y una arista que "sale" del vértice u. Por ello, debe existir al menos un vértice en el camino donde se produce el cambio de dirección respecto al vértice anterior. Es decir, un i en el camino tal que (v_i, u) y (u, v_{i+1}). Finalmente, usando dichas aristas sabemos que $(v_1, ..., v_i, u, v_{i+1}, ..., v_n)$ es un camino simple Hamiltoneano.

Pauta (6 pts.)

(a) 2 pts. tal que: 0.5 por BI correcto, 0.5 por HI correcto y 1.0 por TI correcto.

(b) 4 pts. tal que: 0.5 por BI correcto, 0.5 por HI correcto y 3.0 por TI correcto.