Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 12 - Grafos

15 de noviembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

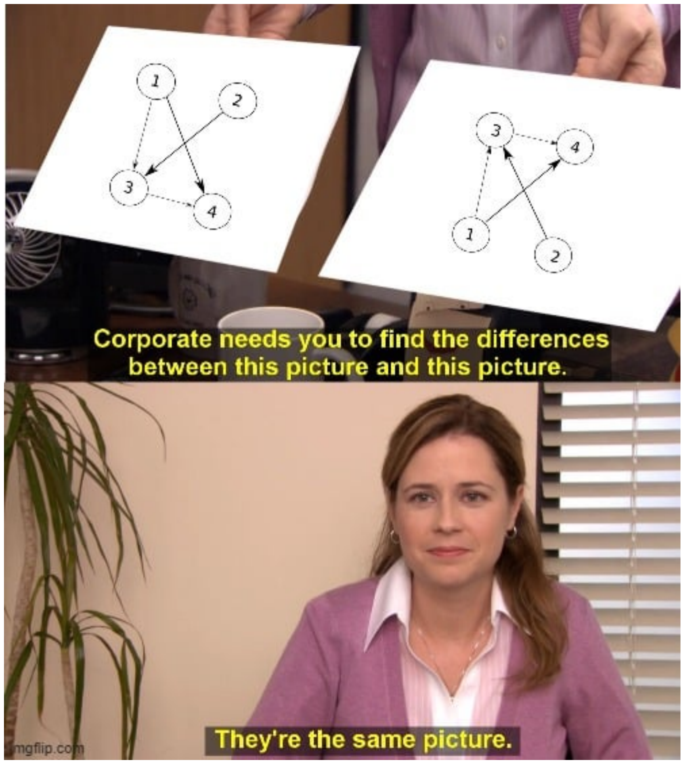
Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

- Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
- Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
- Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
- Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u | (v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum\limits_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

Meme del día



1. Grafos 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Una k-coloración de aristas de G es una función $f : E \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

1. Demuestre que, para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$, si f es una k-coloración de aristas de G, entonces k es mayor o igual que el grado máximo de G, esto es, $k \geq \max_{v \in V} \delta(v)$.

2. Demuestre usando inducción que para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$ y para toda k-coloración de aristas f de G, se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $\frac{|V|}{2}$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

2. Grafos 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el diámetro de G, denotado como $D(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices.

1. Demuestre que si $D(G) \geq 4$ entonces $D(\bar{G}) \leq 2$.
2. Demuestre que si G tiene un vértice de corte y $D(G) = 2$, entonces $\bar{G}$ tiene un vértice sin vecinos.

3. Árboles

Decimos que un grafo no dirigido $T = (V, E)$ es un *árbol* si es conexo y para todo par de vértices distintos existe un único camino que los conecta.

Demuestre que para todo grafo T, si T es un árbol, entonces es 2-coloreable.