Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 9 - Cardinalidad

18 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

Video: Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad AQUI :)

Meme del día

1. Equinumerosidad

Demuestre que $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, donde $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

Solución

1. $(0,1) \approx \mathbb{R}$:
   La función $f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$. Esta es una biyección entre $\mathbb{R}$ y $(0,1)$, ya que $\arctan(x)$ es biyectiva en el recorrido $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por lo que al comprimirla con $\cdot\frac{1}{\pi}$ y desplazarla con $+\frac{1}{2}$ es biyectiva en $(0,1)$.
2. $(0,1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$: Se demostrará por teorema de Schröder-Bernstein, mostrando funciones inyectivas $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$.
   a) Primero notemos que todo $d \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ puede ser escrito como su expansión decimal $d = 0.d_1d_2d_3\ldots$ (escrita con punto en vez de coma para evitar confusiones al listar elementos). Consideremos $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida de la siguiente manera:

   $$f(d) = f(0.d_1d_2d_3\ldots) = \{1d_1, 11d_2, 111d_3, 1111d_4, \ldots, 1^n d_n, \ldots\}$$

   donde los 1s son dígitos 1 puestos a la izquierda de otros dígitos, y 1^n representa varios dígitos 1 puestos uno al lado del otro (no literalmente elevar 1 a n!). Demostraremos que esta función es inyectiva. Supongamos que $f(x) = f(y)$ para $x, y \in (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Expandiendo a notación decimal, se tiene que $f(0.x_1x_2\ldots) = f(0.y_1y_2\ldots)$, es decir,

   $$\{1x_1, 11x_2, \ldots\} = \{1y_1, 11y_2, \ldots\}$$

   Notemos que el único número de dos dígitos del lado izquierdo es $1x_1$. De igual manera, el único número de dos dígitos del lado derecho es $1y_1$. Luego, necesariamente $x_1 = y_1$ para que los conjuntos sean iguales. Similarmente, el único número de tres dígitos del lado izquierdo es $11x_2$, y del lado derecho $11y_2$, con lo que necesariamente $x_2 = y_2$. Más generalmente, el único número de $n+1$ dígitos del lado izquierdo es $1^n x_n$, y del lado derecho $1^n y_n$, por lo que necesariamente $x_n = y_n$. Como esto se cumple para todo n, todos los dígitos de x e y son iguales, con lo que concluímos que $x = y$, y con ello que f es inyectiva.

   b) Por principio de buen orden, todo subconjunto de los naturales tiene un menor elemento. Definiremos una inyección de $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Sea $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Consideremos g tal que

   $$g(A) = g(\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}) = 0.\text{bin}(a_1)2\text{bin}(a_2)2\text{bin}(a_3)2\ldots$$

   donde

- a_1 es el menor elemento de A (que está bien definido por principio de buen orden)
- a_2 es el menor elemento de $A \setminus \{a_1\}$, y por consecuencia el segundo menor elemento de A
- más generalmente, a_i es el i-ésimo menor elemento de A, definido inductivamente de la misma manera que a_1 y a_2
- $\text{bin}(n)$ es la representación binaria del número n, que es única.

Demostraremos que g es inyectiva. Supongamos que $g(M) = g(N)$, esto es, que $g(\{m_1, m_2, \dots\}) = g(\{n_1, n_2, \dots\})$. Se tiene que

$$0.\text{bin}(m_1)2\text{bin}(m_2)2\cdots = 0.\text{bin}(n_1)2\text{bin}(n_2)2\dots$$

Consideremos todos los dígitos del lado izquierdo antes del primer 2. Estos forman un número que solo tiene 0s y 1s, por lo que si lo interpretamos como si fuera binario, obtenemos un número natural en base 10: precisamente m_1. Podemos hacer lo mismo con el lado derecho, y obtendremos n_1. Con ello, $m_1 = n_1$, ya que como el lado izquierdo es igual al lado derecho, sus dígitos son iguales, y por lo tanto todos los dígitos antes del primer 2 son iguales. Podemos repetir esto para el i-ésimo 2, y obtendremos que $m_i = n_i$. Como esto se cumple para todo i, g es inyectiva.

Como existen funciones inyectivas $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$, por Teorema de Schröder-Bernstein, concluímos que $(0,1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Finalmente, como $(0,1) \approx \mathbb{R}$ y $(0,1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y $\approx$ es una relación de equivalencia y por lo tanto es transitiva, concluímos que $(0,1) \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.$\square$

2. Numerabilidad

1. Demuestre que si A es numerable y B es numerable, entonces $A \cup B$ es numerable.
2. Demuestre que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable.
3. Demuestre que la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable.

Solución

- Puesto que A y B son numerables luego secuencias infinitas, sin repetición

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \text{ y } (b_0, b_1, b_2, \dots)$$

de los elementos de A y B respectivamente. Concíderar la matriz infinita definida como:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix}$$

Sobre esta matriz definimos un recorrido siguiendo el orden $a_0 \to a_1 \to b_0 \to a_2 \to b_1 \to \dots$ saltando cualquier elemento que se haya observado previamente. Este recorrido forma una secuencia que pasa por todos los elementos de $A \cup B$ y en la cual no hay elementos repetidos. Luego por definición $A \cup B$ es enumerable.

- Sea A un conjunto enumerable. Sea $B \subseteq A$ un subconjunto infinito de A. Por definición existe una enumeración

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

de A. Considerar entonces la secuencia generada al recorrer la enumeración de A saltando aquellos elementos que no se encuentren en B. Este recorrido representa una secuencia de todos los elementos de B sin repetición por lo que necesariamente B es numerable.

- Sea U un conjunto numerable de conjuntos, tal que para todo conjunto $A \in U$ se cumple que A es numerable. Como U es numerable, existe una enumeración de sus conjuntos para los que a su vez existe una enumeración. Se denotara la enumeración de los elementos del i-ésimo conjunto de A como:

$$(s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, \dots)$$

Concider la matriz infinita formada al enumerar estas enumeraciones

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & \dots \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & \dots \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sobre esta matriz se define el recorrido que pasa por sus elementos siguiendo las diagonales cuyos subindices suman un mismo $k \in \mathbb{N}$, saltando los elementos que se repiten. Este recorrido representa una secuencia que pasa por todos los elementos de $\bigcup U$ sin repetirlos por lo que $\bigcup U$ es enumerable.
El caso con conjuntos finitos es análogo; la única diferencia es que habrá filas finitas, lo que no representa un problema para el acercamiento anterior.

3. Numerabilidad (Hardcore)

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales puede ser particionado en dos subconjuntos:

- El primer subconjunto, llamémoslo A, tendrá todos los números reales que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros no todos nulos. En otras palabras,

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z} \text{ tales que } \sum_{i=0}^{n} q_i x^i = 0 \wedge \bigvee_{i=0}^{n} q_i \neq 0\}$$

- El segundo subconjunto tendrá todos los números reales que no están en el primer conjunto, esto es, será $\mathbb{R} \setminus A$.

Esta partición de los números reales es conocida y muy famosa. Al conjunto A se le llama números algebraicos, y al conjunto $\mathbb{R} \setminus A$ se le llama números trascendentes[1].

Demuestre que el conjunto de los números trascendentes no es numerable.

Solución
Demostraremos que A, el conjunto de los números algebraicos, es numerable, y con ello concluiremos que $\mathbb{R} \setminus A$, el conjunto de los números trascendentes, no es numerable.
Consideremos el conjunto $P = \left\{\sum_{i=0}^{n} q_i x^i \mid n \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Z}\right\}$, es decir, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros. Demostraremos que P es numerable mediante el Teorema de Schröder-Bernstein.

- $\mathbb{N} \to P$: Consideremos $f : \mathbb{N} \to P$ tal que $f(x) = x$. Esta función es claramente inyectiva, y no hay problemas con su dominio o codominio.
- $P \to \mathbb{N}$: Notemos que un polinomio puede ser representado como una secuencia ordenada de enteros: el primer elemento de la secuencia es q_0, el segundo es q_1, y el i-ésimo es q_{i-1}. No nos importan los x; esto basta para representar a un polinomio de manera completa y correcta. Consideremos $g : P \to \mathbb{N}$ tal que

  $$g(q_0, q_1, \dots) = \text{bin}(q_0)d_0\text{bin}(q_1)d_1 \dots$$

  donde $\text{bin}(n)$ es la representación binaria de n, y $d_i = 8$ si $q_i \geq 0$ y $d_i = 9$ si $q_i < 0$. Demostraremos que g es inyectiva. Supongamos que $g(p) = g(q)$, esto es, que $g(p_0, p_1, \dots) = g(q_0, q_1, \dots)$. En otras palabras,

  $$\text{bin}(p_0)d_0\text{bin}(p_1)d_1 \cdots = \text{bin}(q_0)d_0'\text{bin}(q_1)d_1' \dots$$

  como la representación binaria de un número natural es única, es inyectiva. Tomando todos los dígitos hasta la primera aparición de un dígito 8 o 9, podemos reconstruir p_0, a excepción de su signo. Su signo nos lo otorga el separador: será positivo si $d_0 = 8$, y negativo si $d_0 = 9$. De igual manera, podemos reconstruir q_0. Como el lado izquierdo es igual al lado derecho, el primer dígito 8 o 9 debe aparecer en la misma posición a ambos lados, con lo que $p_0 = q_0$. Esto se puede repetir para todo i, por lo que $p_i = q_i$. Concluímos que el polinomio p es igual al polinomio q, con lo que g es inyectiva.

[1] Los números algebraicos y trascendentes también están definidos como partición de los complejos ($\mathbb{C}$). Ambas definiciones son válidas.

Como existen funciones inyectivas en ambas direcciones entre P y $\mathbb{N}$, por Teorema de Schröder-Bernstein concluímos que P es numerable.

Notemos que en P si hay polinomios con todos los coeficientes 0, por lo que debemos restringir el conjunto para llegar al utilizado en la definición de los números algebraicos. Consideremos $P' = P \setminus \{0\}$. Por el inciso (2) de la pregunta 2, sabemos que todo subconjunto infinito de un conjunto numerable es numerable, por lo que P' también es numerable (ya que claramente es infinito).

Como P' es numerable, podemos listar sus elementos, recorrer esta lista, y a medida que pasamos por cada polinomio, consideramos sus raíces. Cada una de estas raíces es un número algebraico; las iremos "metiendo" a un conjunto (vamos sacando la unión de las raíces de cada polinomio a medida que avanzamos por la lista). Como todo polinomio tiene un número finito de raíces, el conjunto resultante sería la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos, que por el inciso (3) de la pregunta 2 sabemos que es numerable. Además, como P' era numerable, y todo polinomio con coeficientes enteros no todos nulos está en P', todos estos aparecían en la lista, con lo que unimos a nuestro conjunto todos los números algebraicos existentes.

Finalmente, por contradicción, supongamos que los números trascendentes son numerables. Por el inciso (1) de la pregunta 2, la unión de dos conjuntos numerables es numerable, por lo que la unión de los algebraicos con los trascendentes, es decir, $A \cup (\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R}$ es numerable. Esto es una contradicción ya que el Teorema de Cantor dice que $\mathbb{R}$ no es numerable, por lo que es imposible que $\mathbb{R} \setminus A$ sea numerable.

Con ello, concluímos que el conjunto de los números trascendentes no es numerable. $\square$