Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía Repaso Examen

7 de diciembre de 2024

Martín Atria, Caetano Borges, José Caraball

---

1 Cardinalidad

Determine si el subconjunto de los números reales que tienen un número infinito de 1s en su representación decimal es numerable o no. Demuestre su respuesta.

2 Algoritmos

1. Demuestre que $n! \in \mathcal{O}(n^n)$ pero que $n^n \notin \mathcal{O}(n!)$
2. Analice las complejidades de tiempo en el peor y mejor caso para el siguiente algoritmo:

Algorithm 1 Insertion Sort

```
for i = 1 to n do
    for j = i to 1 do
        if L[j] < L[j − 1] then
            L[j − 1], L[j] ← L[j], L[j − 1]
        else
            break
        end if
    end for
end for
    return L
```

3 Grafos

1. Demuestre que al menos uno de G y $\bar{G}$ es conexo.
2. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que para toda terna $a, b, c \in V$ se tiene que

$$\delta(a) + \delta(b) + \delta(c) \geq |V| - 2$$

   Demuestre que G tiene a lo más 2 componentes conexas.

4 Teoría de Números

1. Suponga que $a, b, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ son tales que $\gcd(a, m) = \gcd(b, m) = 1$. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ y $a^y \equiv b^y \pmod{m}$. Si $d = \gcd(x, y)$ demuestre que

$$a^d \equiv b^d \pmod{m}$$

2. Sean p, q dos números primos distintos. Demuestre que, si

$$\begin{aligned} a^q &\equiv a \pmod{p} \\ a^p &\equiv a \pmod{q} \end{aligned}$$

   entonces $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.