Equivalencia lógica

Clase 4

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Sintaxis de la lógica proposicional

Sea P un conjunto de variables proposicionales

Definición

Dado P, se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface

1. Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \star \psi) \in \mathcal{L}(P)$

Cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es una **fórmula proposicional**

Notemos que $\mathcal{L}(P)$ se define **inductivamente** a partir de un P fijo

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Una **valuación** o **asignación de verdad** de las variables de P es una función $\sigma : P \to \{0, 1\}$

Extendimos esta noción para evaluar fórmulas...

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Sea P un conjunto y $\sigma : P \to \{0,1\}$ una valuación de las variables de P. Se define la **valuación extendida** $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$
- **Semántica de la negación.** Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$,

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- **Semántica de la conjunción.** Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$,

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (cont.)

- **Semántica de la disyunción.** Si $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$,

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 0 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$,

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la doble implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$,

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = \hat{\sigma}(\psi_2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por simplicidad usaremos σ en vez de $\hat{\sigma}$

Visualizando la semántica: mundos posibles

Cada valuación describe un **mundo posible**. Podemos representarlos de forma exhaustiva en **tablas de verdad**

p	q	φ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Cada fila representa una valuación específica (un mundo posible)
- Cada columna muestra en qué mundos es verdadera una fórmula φ

Una fórmula queda determinada semánticamente por su tabla de verdad: sabemos dónde (en qué σ) es verdadera/falsa

Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ejercicio

Considere un conjunto de variables proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para variables en P?
- ¿Cuántas tablas de verdad diferentes hay en $\mathcal{L}(P)$?

Los números 2^n y 2^{2^n} nos acompañarán por siempre en computación

Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Comparemos con una fórmula particular $\varphi = (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

p	q	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

¿Se parece a alguna tabla de verdad conocida?

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de equivalencia lógica
- Conocer leyes de equivalencia
- Plantear fórmula equivalente a una tabla de verdad cualquiera
- Demostrar que un conjunto es funcionalmente completo

Outline

Equivalencia lógica

La visualización anterior sugiere la existencia de fórmulas con sintaxis diferente, pero misma semántica

Definición

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son **lógicamente equivalentes** si para toda valuación σ, se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$, denotándolo como $\varphi \equiv \psi$.

Las fórmulas equivalentes comparten semántica teniendo diferente sintaxis

Equivalencia lógica

Ejemplo

Demostremos que
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Para esto, podemos mostrar las tablas de verdad de ambas fórmulas con variables en $P = \{p, q, r\}$

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Como sus tablas de verdad son iguales, concluimos que son equivalentes.

Más aún, este resultado muestra que el conectivo $\wedge$ es **asociativo**

Equivalencia lógica

Mediante tablas de verdad se prueba una serie de **leyes de equivalencia**

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

1. **Doble negación**

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

2. **Leyes de De Morgan**

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

3. **Conmutatividad**

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

Equivalencia lógica

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

4. **Asociatividad**

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

5. **Distributividad**

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

6. **Idempotencia**

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

Equivalencia lógica

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

7. **Absorción**

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$$

8. **Implicancia material**

$$\varphi \to \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

9. **Doble implicancia**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Demuestre las leyes enunciadas.
¿Se puede demostrar que $\to$ es asociativo?

Consideraciones...

Desde ahora

- Omitiremos paréntesis externos
- Omitiremos paréntesis asociativos
- Omitiremos cualquier paréntesis que no produzca ambigüedad
- La negación tendrá precedencia sobre los conectivos binarios:

$$((\neg p) \vee q) \wedge (\neg r) \quad \text{lo escribiremos como} \quad (\neg p \vee q) \wedge \neg r$$

- Usaremos operadores generalizados por simplicidad:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

¿Por qué es ilegal usar los operadores generalizados con $n = \infty$?

Outline

Conectivos y fórmulas

Tenemos una fórmula $\varphi \in L(P)$, con $P = \{p, q, r\}$, y lo único que conocemos de ella es que cumple la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

¿Podemos construir una fórmula equivalente a φ?

Conectivos y fórmulas

Ejemplo

	p	q	r	φ
σ_1	0	0	0	1
σ_2	0	0	1	0
σ_3	0	1	0	0
σ_4	0	1	1	1

	p	q	r	φ
σ_5	1	0	0	1
σ_6	1	0	1	0
σ_7	1	1	0	0
σ_8	1	1	1	1

Estrategia:

- Codificar cada valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$
- Combinar dichas codificaciones mediante disyunción

Con esto, proponemos la siguiente fórmula equivalente a φ

$$\underbrace{((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_1} \vee \underbrace{((\neg p) \wedge q \wedge r)}_{\sigma_4} \vee \underbrace{(p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_5} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge r)}_{\sigma_8}$$

Podemos generalizar esta idea para n variables

Conectivos y fórmulas

Consideremos el conectivo n-ario siguiente

	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	φ
σ_1	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
σ_2	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Para cada σ_j con $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ consideremos la siguiente fórmula:

$$\varphi_j = \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right)$$

La fórmula φ_j codifica la j-ésima valuación

Conectivos y fórmulas

	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	φ
σ_1	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
σ_2	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Ahora tomamos la disyunción de las valuaciones que satisfacen a φ

$$\bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \varphi_j \;=\; \bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$

La fórmula resultante es equivalente a φ

Conectivos y fórmulas

Teorema

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente.

Corolario

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente que solo usa símbolos $\neg, \wedge$ y $\vee$.

Conectivos funcionalmente completos

Definición

Un conjunto de conectivos lógicos se dice **funcionalmente completo** si toda fórmula en $\mathcal{L}(P)$ es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

Ejemplo

Ya demostramos que el conjunto $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, pues para toda fórmula φ, se tiene que

$$\varphi \equiv \bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicios

1. Demuestre que $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son funcionalmente completos.
2. Demuestre que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo.
3. ¿Es $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ funcionalmente completo? (propuesto ★)

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

Demostraremos que $\{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo.

Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\to$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo.

- **BI:** Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

Es crucial la dirección. Queremos probar que $C' = \{\neg, \to\}$ es F.C. por lo que debemos usar los símbolos de C' para expresar los de C

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **HI:** Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.
- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C. Tenemos tres casos que analizar:
  - $\theta = (\neg\varphi)$
  - $\theta = \varphi \wedge \psi$
  - $\theta = \varphi \vee \psi$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C.
  - $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.
  - $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi'$

    Usando las leyes de doble negación, De Morgan y de implicancia:

    $\theta \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi')) \equiv \neg(\varphi' \to (\neg\psi'))$

    Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C.
  - $\theta = \varphi \vee \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \vee \psi'$

    Usando la ley de implicancia:

    $\theta \equiv (\neg\varphi') \rightarrow \psi'$

    Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Luego, por inducción estructural se concluye que para toda fórmula con símbolos solo de C, existe una fórmula equivalente con símbolos en C'. $\square$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 2.

Demostraremos que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo.

Dado $P = \{p\}$, demostraremos por inducción que toda fórmula en $L(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es lógicamente equivalente a p o a $\neg p$. Como ninguna de estas fórmulas es equivalente a $p \wedge \neg p$, se concluye que $\{\neg\}$ no puede ser funcionalmente completo.

Demostraremos la propiedad

$$P(\varphi) \ := \ \varphi \text{ es equivalente a } p \text{ o a } \neg p$$

- **BI:** Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que $\varphi \in L(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es equivalente a p o a $\neg p$.

Esta demostración es "*negativa*"... daremos un caso en que **no se cumple** la definición de funcionalmente completo

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 2.

- **TI:** El único caso inductivo que tenemos que demostrar es $\psi = \neg\varphi$, pues sólo podemos usar el conectivo $\neg$.

  Por **HI**, sabemos que para toda valuación σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(p)$ o $\sigma(\varphi) = \sigma(\neg p)$. Podemos hacer una tabla de verdad:

φ	$\psi = \neg\varphi$
p	$\neg p$
$\neg p$	p

Concluimos que ψ es equivalente a p o a $\neg p$.

Por lo tanto, por el argumento dado al principio, tenemos que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo. $\square$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de equivalencia lógica
- Conocer leyes de equivalencia
- Plantear fórmula equivalente a una tabla de verdad cualquiera
- Demostrar que un conjunto es funcionalmente completo