Relaciones de orden

Clase 12

IIC 1253

Prof. Miguel Romero

Outline

Tipos de relaciones

- Las relaciones de equivalencia son relaciones que establecen una noción de equivalencia entre elementos.
- Existen otros tipos de relaciones que no establecen una equivalencia sino que una jerarquía entre los elementos.
  - Muy comunes en ciencia de la computación.
  - Esto es capturado por las **relaciones de orden**.

Objetivos de la clase

- Introducir relaciones de orden
- Estudiar distintas nociones de elementos extremos

Outline

Relaciones de orden

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de orden parcial** si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Generalmente denotaremos una relación de orden parcial con el símbolo $\leq$.

- $(x, y) \in \leq \quad x \leq y$.
- x es "menor o igual" que y.

Notación:
Si $\leq$ es una relación de orden parcial sobre A, diremos que el par $(A, \leq)$ es un **orden parcial**.

Relaciones de orden

Ejemplos

1. Los pares $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son órdenes parciales.
2. El par $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ es un orden parcial.
3. Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre los ejemplos anteriores.

Relaciones de orden

Ejercicio

Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Demostración: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$.

Reflexividad: Por definición de subconjunto, para todo conjunto X se cumple que $X \subseteq X$, por lo que la relación es refleja.

Antisimetría: Por definición de igualdad de conjuntos, si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, se cumple que $X = Y$, y entonces la relación es antisimétrica.

Transitividad: Por definición de subconjunto:

- Si $X \subseteq Y$, entonces $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Y$.
- Si $Y \subseteq Z$, entonces $\forall y \in Y$ se tiene que $y \in Z$.

Combinando las dos aseveraciones, obtenemos que $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Z$, y por lo tanto $X \subseteq Z$. Concluimos que la relación es transitiva.

Relaciones de orden

¿Por qué orden *parcial*?

Definición

Una relación $\preceq$ sobre A es una **relación de orden total** (o lineal) si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Recordar que $\preceq$ es conexa si:

$$\text{Para todo par } x, y \in A, \text{ se tiene que } x \preceq y \text{ o } y \preceq x$$

Igual que antes, diremos que un par $(A, \preceq)$ es un orden total (o lineal).

Outline

Elementos extremos básicos

Definición

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
   Equivalentemente: si $x \in S$ y no existe $y \in S$ que cumple $y \preceq x$ e $y \neq x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Elementos extremos básicos

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ y
$S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

Elementos extremos básicos

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

- 1 es cota inferior, pues $1|2$, $1|3$, etc.
- 2 no es cota inferior, pues $2 \nmid 3$.
- 60 es cota superior, pues $2|60$, $3|60$, ..., $20|60$.
  Nótese que 60 es el mínimo común múltiplo de S.
- También cualquier múltiplo de 60 es cota superior, por ejemplo 120.
- Elementos minimales: $2, 3, 5$, pues ningún elemento en S además de ellos mismos los divide.
- Elementos maximales: $15, 20$, pues no dividen a ningún elemento en S además de ellos mismos.
- No tiene mínimos ni máximos, pues ninguna cota inferior o superior pertenece a S.

Elementos extremos básicos

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}), \subseteq)$ y $S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

- $\{1\}$ es cota inferior, elemento minimal y mínimo.
- $\{1,2,3,4\}$ es cota superior, elemento maximal y máximo.
- $\varnothing$ también es cota inferior.
- No hay más cotas superiores, pues el orden está definido sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

Elementos extremos básicos

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

- En el orden $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ podemos tomar $S = \{2, 3, 5\}$. Como no se dividen entre sí, son todos minimales y maximales.
- En el orden $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ podemos tomar $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Como ninguno de los conjuntos en S es subconjunto de ninguno de los demás, son todos minimales y maximales.

Elementos extremos básicos

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

Demuestre el resultado análogo para el máximo.

Esto nos permite hablar de **el** mínimo o **el** máximo, que denotaremos por $min(S)$ y $max(S)$ respectivamente. (en caso que existan)

Elementos extremos básicos

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

<u>Demostración:</u> Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x, y \in S(x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

Por demostración directa, supongamos que S tiene dos mínimos s_1, s_2. Como son mínimos, $s_1, s_2 \in S$, y también $s_1 \preceq s_2$ y $s_2 \preceq s_1$. Como $\preceq$ es una relación de orden, es antisimétrica, y luego $s_1 = s_2$. Por lo tanto, si hay un mínimo, este es único.

La demostración de unicidad del máximo es completamente análoga.

Outline

Supremos e ínfimos

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un **ínfimo** de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior.

Análogamente se define el supremo de un conjunto.

Supremos e ínfimos

Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

Un ejemplo típico son los intervalos abiertos en el orden $(\mathbb{R}, \leq)$. Por ejemplo, $(0, 1)$ no tiene mínimo pero sí infimo, 0; y no tiene máximo pero sí supremo, 1.

Supremos e ínfimos

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Esto nos permite hablar de **el** supremo o **el** ínfimo, que denotaremos por $sup(S)$ e $inf(S)$ respectivamente. (en caso que existan)

Supremos e ínfimos

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

<u>Demostración:</u> de manera similar a la demostración del mínimo, supongamos que S tiene dos supremos s_1 y s_2. Por definición de supremo, ambos son cotas superiores de S.
Como s_1 es supremo, para toda cota superior s de S se tiene que $s_1 \preceq s$, pues el supremo es la menor cota superior, y en particular, $s_1 \preceq s_2$, pues s_2 es cota superior.
Realizando un razonamiento análogo, obtenemos también que $s_2 \preceq s_1$, y como $\preceq$ es antisimétrica, se tiene que $s_1 = s_2$. Concluimos entonces que si existe un supremo, este es único.

La demostración de unicidad del ínfimo es completamente análoga.

Supremos e ínfimos

¿Existen conjuntos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- En los órdenes $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ no existen.
- En $(\mathbb{Q}, \leq)$ sí, por ejemplo $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Este conjunto está acotado superiormente (por ejemplo por 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Uno podría estar tentado de decir que el supremo es $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. El supremo debe pertenecer al conjunto sobre el cual está definido el orden.

Supremos e ínfimos

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Este se dice **superiormente completo** si para cada $S \subseteq A$ no vacío, si S tiene cota superior, entonces tiene supremo.

De manera similar definimos el concepto de ser **inferiormente completo**.

Supremos e ínfimos

Dado el ejemplo anterior, tenemos que $(\mathbb{Q}, \leq)$ no es superiormente completo. Una observación importante es que tampoco es inferiormente completo: basta tomar $S' = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \geq 2\}$.

Esto motiva el siguiente teorema:

Teorema

$(A, \leq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Supremos e ínfimos

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Demostración: Demostraremos la dirección hacia la derecha; la otra dirección es análoga y se deja como ejercicio.

Supongamos que $(A, \preceq)$ es superiormente completo; es decir, $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado superiormente, tiene supremo. Queremos demostrar que también es inferiormente completo; es decir, $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado inferiormente, tiene ínfimo. Sea entonces $S \subseteq A$ no vacío. Supongamos que está acotado inferiormente. Demostraremos que tiene ínfimo.

Supremos e ínfimos

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Como S está acotado inferiormente, tiene al menos una cota inferior. Tomemos el siguiente conjunto:

$$S_{ci} = \{a \in A \mid a \text{ es cota inferior de } S\}$$

Es decir, S_{ci} es el conjunto de todas las cotas inferiores de S. Es claro que $S_{ci} \neq \varnothing$. Por otra parte, como todos los elementos de S_{ci} son cotas inferiores de S, por definición de cota inferior se cumple que

$$\forall x \in S_{ci} \quad \forall y \in S \quad x \preceq y$$

de donde es claro que S_{ci} está acotado superiormente (por todos los elementos de S). Luego, como $(A, \preceq)$ es superiormente completo, S_{ci} tiene supremo, $sup(S_{ci})$, el que por definición es una cota superior de S_{ci}.

Supremos e ínfimos

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ahora, como todos los elementos de S son cotas superiores de S_{ci}, se cumple que

$$\forall y \in S \quad sup(S_{ci}) \preceq y$$

pues el supremo es la menor cota superior. De esto último se deduce que $sup(S_{ci})$ es una cota inferior de S, y como es una cota superior de S_{ci}, es la mayor cota inferior de S, es decir, es el ínfimo de S:

$$inf(S) = sup(S_{ci})$$

Concluimos entonces que $(A, \preceq)$ es inferiormente completo.

Outline

Objetivos de la clase

- Introducir relaciones de orden
- Estudiar distintas nociones de elementos extremos