Cardinalidad (parte 1)

Clase 14

IIC 1253

Prof. Miguel Romero

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de cardinalidad
- Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- Comprender concepto de numerabilidad
- Demostrar numerabilidad de conjuntos

Outline

Cardinalidad

Queremos resolver el problema de determinar el tamaño de un conjunto.

- Es decir, la cantidad de elementos que contiene.
- ¿Cómo lo hacemos?

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Simplemente contamos... tiene 6.

Cardinalidad

Ejemplo

¿Cuántos elementos tiene el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

$$
\begin{aligned}
a &\to 0 \\
b &\to 1 \\
c &\to 2 \\
d &\to 3 \\
e &\to 4 \\
f &\to 5
\end{aligned}
$$

Estamos estableciendo una *correspondencia* entre los elementos de A y los números naturales. . .

Cardinalidad

Definición

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es **equinumeroso** con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

Cardinalidad

Notemos que $\approx$ es una relación sobre conjuntos.

Teorema

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Cardinalidad

Teorema

La relación $\approx$ es una relación de equivalencia.

Demostración:

- Refleja: Para todo conjunto A existe $f : A \to A$ tal que $f(a) = a$, $\forall a \in A$ es una función biyectiva, por lo que $A \approx A$.
- Simétrica: Sea A, B conjuntos tal que $A \approx B \Rightarrow$ existe $f : A \to B$ biyectiva, entonces la función $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva y por lo tanto $B \approx A$.
- Transitiva: Sea A, B, C conjuntos tal que $A \approx B$ y $B \approx C \Rightarrow$ existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas, luego $g \circ f : A \to C$ es una función biyectiva, por lo que $A \approx C$.

Cardinalidad

Podemos usar conceptos de las relaciones de equivalencia para hablar sobre el tamaño de los conjuntos.

- ¿Por ejemplo?
- Podemos tomar las clases de equivalencia inducidas por $\approx$.

Definición

La **cardinalidad** de un conjunto A es su clase de equivalencia bajo $\approx$:

$$|A| = [A]_{\approx}$$

Cardinalidad

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

Es fácil notar que $A \approx \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Entonces, $|A| = [A]_{\approx} = [\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}]_{\approx}$.
- Pero nosotros le pusimos un nombre al último conjunto...

$$|A| = [6]_{\approx}$$

Formalizaremos esto y simplificaremos la notación.

Outline

Cardinalidad de conjuntos finitos

Definición

Diremos que A es un conjunto **finito** si $A \approx n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si existe una función biyectiva $f : A \to n = \{0, \ldots, n-1\}$.

En tal caso, se tiene que $|A| = [n]_{\approx}$.

- Por simplicidad, diremos que $|A| = n$.
- También podremos decir que A tiene n elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Ejemplo

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

- $|A| = 6$
- A tiene 6 elementos.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Lema

Sean A y B dos conjuntos **finitos** tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Ejercicio (propuesta ★)

Demuestre el lema.

Lema

Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

<u>Demostración:</u>

Supongamos que $|A| = n$ y que $|B| = m$. Sabemos entonces que $A \approx \{0, \ldots, n-1\}$ y que $B \approx \{0, \ldots, m-1\}$, luego existen funciones biyectivas $f : A \to \{0, \ldots, n-1\}$ y $g : B \to \{0, \ldots, m-1\}$. Sea $h : A \cup B \to \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ n + g(x) & x \in B \end{cases}$$

Primero se debe notar que h está bien definida como función ya que no existe un x que pertenezca simultáneamente a A y B.

Cardinalidad

Continuación:

- Sobreyectividad: Sea $k \in \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$, lo demostraremos por casos. Si $k < n$ entonces dado que f es sobreyectiva en $\{0, \ldots, n-1\}$ sabemos que existe un $x \in A$ tal que $k = f(x) = h(x)$. Si $n \leq k < n+m$ entonces dado que g es sobreyectiva en $\{0, \ldots, m-1\}$ sabemos que existe en $x \in B$ tal que $g(x) = k - n$ y por lo tanto $k = n + g(x) = h(x)$, finalmente h es sobreyectiva en $k \in \{0, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m-1\}$.
- Inyectividad: Otra vez por casos, si $h(x) = h(y) < n$ entonces necesariamente $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$ de donde se concluye que $f(x) = f(y)$ y dado que f es inyectiva obtenemos que $x = y$. Si en cambio $n \leq h(x) = h(y) < n+m$, sabemos que $h(x) = n + g(x) = h(y) = n + g(y)$ de donde se concluye que $g(x) = g(y)$ y dado que g es inyectiva obtenemos que $x = y$, finalmente h es inyectiva.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Esto implica que si A es un conjunto finito, entonces su cardinalidad es **estrictamente menor** que la de su conjunto potencia.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Cardinalidad de conjuntos finitos

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces, se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Demostración:

Por inducción en la cardinalidad de A.

BI: Si $|A| = 0$ entonces $A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \approx \{0\}$ por lo tanto $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$.

HI: Supongamos que para cualquier conjunto A tal que $|A| = n$ se cumple que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

TI: Sea A un conjunto tal que $|A| = n + 1$, y sea $B = A - \{a\}$, con a un elemento arbitrario de A. El conjunto B cumple con $|B| = n$, por lo que $|\mathcal{P}(B)| = 2^n$. ¿Cómo podemos a partir de $\mathcal{P}(B)$ formar $\mathcal{P}(A)$? Si nos damos cuenta en $\mathcal{P}(B)$ están todos los subconjuntos de B, es decir, todos los subconjuntos de A que no contienen al elemento a.

Continuación:
Si llamamos $\mathcal{S}$ al conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \subseteq A \wedge a \in X\}$$

Es decir $\mathcal{S}$ está formado por todos los subconjuntos de A que contienen a a, no es difícil notar que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{S} \cup \mathcal{P}(B)$. Ahora, la siguiente función $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{S}$ tal que $f(X) = X \cup \{a\}$, es una función biyectiva de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{S}$, por lo que concluímos que $\mathcal{P}(B) \approx \mathcal{S}$ y por lo tanto $|\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{S}|$. Luego, dado que $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}(B) = \varnothing$ y que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{A}$ y usando el lema anterior concluímos que
$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{S}| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{S}| = |\mathcal{P}(B)| + |\mathcal{P}(B)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1} = 2^{|A|}$.

Outline

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Nuestro problema es un poco fácil cuando el conjunto es finito.

- ¿Qué pasa cuando es infinito?
- Ya no podemos contar. . .
- . . . pero sí podemos establecer una correspondencia como la que mostramos.
- ¿Cómo? ¡Con funciones!

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejemplo

Sea $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los números naturales pares.
¿Cuál conjunto es más grande, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{P}$?

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$, la cual es claramente biyectiva, y entonces $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.

Definición

Un conjunto A se dice **enumerable** si $|A| = |\mathbb{N}|$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{Z}$ es enumerable.

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

La siguiente definición nos permite caracterizar a los conjuntos enumerables de una manera muy práctica.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** si y sólo si todos sus elementos se pueden poner en una lista infinita; es decir, si existe una sucesión infinita

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

tal que *todos* los elementos de A aparecen en la sucesión *una única vez* cada uno.

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:
$f : \mathbb{N} \to A$ con $f(i) = a_i$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

¿Por qué esta definición es *práctica*?

- Piense en un computador.

Ejercicio (propuesto ★)

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Ejercicio

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.
- $\mathbb{Q}$ es enumerable.

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, Teorema 1.6.5, página 52.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

Por inducción sobre n:

BI: La base es $n = 2$, demostrado anteriormente.

HI: Supongamos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, con $n \geq 2$.

TI: PD: $\mathbb{N}^{n+1} = \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ es enumerable.
Como por HI sabemos que $\mathbb{N}^n$ es enumerable, existe una lista $(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ que contiene a todas las tuplas de $\mathbb{N}^n$ exactamente una vez cada una. Luego, de manera similar a la demostración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ponemos las tuplas de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ en una matriz, la cual recorremos por las diagonales, que son los pares en que el índice de la primera componente en la lista de $\mathbb{N}^n$ más la segunda componente suman k.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

TI: De esta manera, la lista sería algo como:

$$((a_0, 0), (a_0, 1), (a_1, 0), (a_0, 2), (a_1, 1), (a_2, 0), \ldots)$$

Concluimos entonces que $\mathbb{N}^n$ es enumerable para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio

¿Cuál es la cantidad de programas válidamente escritos en { INSERTE SU LENGUAJE FAVORITO AQUÍ }?

Solución: Apuntes Jorge Pérez, Sección 1.6.2, páginas 52 y 53.

Cardinalidad de conjuntos infinitos

Un teorema útil (sobre todo para el caso infinito):

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si existen funciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

El teorema CSB es una alternativa a construir una biyección
(eso puede ser muy difícil!!)

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f : A \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$, la cual es claramente inyectiva.
- $g : \mathbb{N} \to A$ dada por $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$.
  $g(x) = g(y) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$, y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$.

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender concepto de cardinalidad
- Demostrar equinumerosidad construyendo biyecciones
- Comprender concepto de numerabilidad
- Demostrar numerabilidad de conjuntos