Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4 - Lógica Proposicional y de Predicados

6 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

---

1. Meme del día

$\underbrace{(\forall x\ P(x))}_{\text{todos los unicornios vuelan}} \rightarrow \underbrace{Q(y)}_{\text{mataré a un hombre}}$

Este meme tiene dos instrucciones:

1. Explicar el meme.
2. Explicar por qué no es válido en lógica de predicados.

2. Satisfacibilidad y consecuencia lógica

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

1. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2. Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante
3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

3. Resolución

1. Sea el conjunto de fórmulas $\Sigma = \{p \vee q \vee s, p \vee \neg q, \neg(p \vee q) \vee s\}$.
   Aplique resolución para demostrar que $\Sigma \models (r \rightarrow s)$.
2. Demuestre por resolución que $(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$.

4. Lógica de predicados

Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles y demuestre su respuesta.

1. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$
2. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
3. $\varphi_3(x) := \forall y(S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

2. Satisfacibilidad y consecuencia lógica

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

1. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2. Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante
3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

P: existen $\alpha, \beta \in \Sigma$, tq $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$

Q: Σ es redundante

PD: $P \rightarrow Q$

Supongamos P. Demostraremos Q.

Consideremos $\Sigma' = \Sigma \setminus \{\alpha\}$. Se tiene que $\beta \in \Sigma'$

Además, toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma') = 1$ cumple que $\sigma(\beta) = 1$. Como $\beta \equiv \alpha$, $\sigma(\alpha)$. Con ello $\Sigma' \models \alpha$

Concluimos que Σ es redundante. $\square$

2. $\underbrace{\text{Si } \Sigma \text{ es redundante de a pares}}_{P}$, entonces $\underbrace{\text{es redundante}}_{Q}$

PD: $P \rightarrow Q$

Consideremos $\Sigma' = \Sigma \setminus \{\beta\}$. Se tiene que $\alpha \in \Sigma'$.

Además, toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma') = 1$ es tal que $\sigma(\alpha) = 1$. Como $\{\alpha\} \models \beta$, toda valuación σ que satisface a α también satisface a β. Con ello, $\Sigma' \models \beta$. Concluimos que Σ es redundante. $\square$

3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

Buscamos Σ tal que $\alpha \in \Sigma$ tq $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$ y sin embargo $\neg \exists\, \alpha, \beta \in \Sigma$ tq $\{\alpha\} \models \beta$.

$\Sigma = \{p, \neg p, q\}$ $\cancel{\{\neg p\} \models p}$ $\cancel{\{p\} \models \neg p}$

$\{p, \neg p\} \models q$

1. ¿$\{p\} \models \neg p$? ✗
2. $\{\neg p\} \models p$ ✗
3. $\{p\} \models q$ ✗ $\sigma(p) = 1,\ \sigma(q) = 0$
4. $\{q\} \models p$ ✗ análogo
5. $\{\neg p\} \models q$ ✗ análogo
6. $\{q\} \models \neg p$ ✗ análogo

Concluímos que Σ es redundante pero no redundante de a pares. $\square$

3. Resolución

1. Sea el conjunto de fórmulas $\Sigma = \{p \vee q \vee s, p \vee \neg q, \underbrace{\neg(p \vee q) \vee s}\}$.
   Aplique resolución para demostrar que $\Sigma \models (r \to s)$.
2. Demuestre por resolución que $(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \equiv p \wedge q$.

Teorema: $\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ es inconsistente

$\alpha \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee s \equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$

Un conjunto es lógicamente equivalente a la conjunción de sus fórmulas, $\therefore$

$$\Sigma \equiv (p \vee q \vee s) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$$
$$\equiv \{p \vee q \vee s, \ p \vee \neg q, \ \neg p \vee s, \ \neg q \vee s\}$$

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg(r \to s)\} = \Sigma \cup \{r \wedge \neg s\}$$
$$= \{p \vee q \vee s, \ p \vee \neg q, \ \neg p \vee s, \ \neg q \vee s, \ r, \ \neg s\}$$

Aplicamos resolución

(1)	$p \vee q \vee s$	$\in \Sigma'$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma'$
(3)	$q \vee s \vee s$	por resolución de (1) y (2)
(4)	$q \vee s$	idempotencia
(5)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma'$
(6)	s	resolución de (4) con (5)
(7)	$\neg s$	$\in \Sigma'$
(8)	$\square$	resolución de (6) y (7)

Por resolución, Σ' es inconsistente y por teorema, $\Sigma \models \varphi$. $\square$

2. Demuestre por resolución que $(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \equiv p \wedge q$.

$\varphi \equiv \psi \leftrightarrow (\{\varphi\} \models \psi \wedge \{\psi\} \models \varphi)$

1. $\{\varphi\} \models \psi . \leftrightarrow \{\varphi, \neg\psi\}$ es inconsistente.

$\neg\psi \equiv \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\varphi \equiv (p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (p) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$

$\equiv (\neg r \vee p) \wedge p \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q)$

Sea $\Sigma = \{\neg r \vee p, p, r \vee q, \neg r \vee q, \neg p \vee \neg q\}$

(1) $\neg r \vee q$	$\in \Sigma$
(2) $\neg p \vee \neg q$	$\in \Sigma$
(3) $\neg r \vee \neg p$	res (1) y (2)
(4) p	$\in \Sigma$
(5) $\neg r$	res (3) y (4)
(6) $r \vee q$	$\in \Sigma$
(7) q	res 5 y 6
(8) $\neg p \vee \neg q$	$\in \Sigma$
(9) $\neg p$	res 7 y 8
(10) $\square$	res 9 y 4

Por resolución, Σ es inconsistente, y $\therefore$

$\{\varphi\} \models \psi$. $\square$

4. Lógica de predicados

Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles y demuestre su respuesta.

1. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$
2. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
3. $\varphi_3(x) := \forall y(S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

$\varphi = \forall x \; \exists y \neg (x = y)$

$I(dom) = \mathbb{N}$

$I'(dom) = \{1\}$

$I \models \varphi$

$I' \not\models \varphi$

1. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$

No es sat porque los dominios tienen que ser no vacíos, y para todo $a \in I(dom)$, $a = a$.

2. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$

$I(dom) = \mathbb{N}$ $\quad I \models \varphi_2$ ✓

3. $\varphi_3(x) := \forall y(S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

$I(dom) = \{1\}$, $\quad I(S) = S(x, y, z) \leftrightarrow x = y = z$

Tomemos $\varphi_3(1) \equiv \forall y(S(1, y, y) \wedge S(1, 1, y))$

Claramente el único valor que puede tomar y es $y = 1$ $\therefore$ $\varphi_3(1)$ se cumple trivialmente. $\square$