Caminos en grafos

Clase 20

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Tercer Acto: Aplicaciones

Algoritmos, grafos y números

Objetivos de la clase

- Conocer formas de representación de grafos.
- Comprender el concepto de grado.
- Comprender concepto de camino y componente.
- Demostrar resultados de conectividad.

Outline

Representación matricial

Dado un grafo $G = (V, E)$, como E es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a M_G la **matriz de adyacencia** de G.

Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces $M_G = M_G^T$.
- ¿Cómo puedo obtener $M_{\overline{G}}$?

Estas construcciones solo necesitan operar con los **bits** en la matriz.

Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia** A_G.

- Etiquetamos las aristas de G.
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

Ejemplo

$G = (V, E)$, donde $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1),$
$(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grado de un vértice

Dado un grafo G y un vértice v de él:

Definición

El **grado** de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.

Definición

La **vecindad** de v es el conjunto de vecinos de v:

$$N_G(v) = \{u \mid (v, u) \in E\}.$$

En un grafo simple (sin rulos), $\delta_G(v) = |N_G(v)|$.

Propiedades

Un teorema muy importante:

Teorema (Handshaking lemma)

Si $G = (V, E)$ es un grafo simple, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Es decir, la suma de los grados de los vértices es dos veces la cantidad de aristas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Propiedades

Teorema (Handshaking lemma)

Si $G = (V, E)$ es un grafo simple, entonces

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|.$$

Demostración:

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Supongamos $|V| = n$ y $|E| = m$. Sea M la matriz de incidencia de este grafo. Una representación general de esta matriz sería de la forma:

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccc} e_1 & \dots & e_j & \dots & e_m & \\ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right. & \begin{array}{c} \cdots \\ \ddots \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \ddots \end{array} & \begin{array}{c} \cdots \\ \\ \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array}\right) & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Con v_i representando los nodos y e_j representando las aristas entre nodos.

Propiedades

A partir de la representación es posible notar que la suma de los valores en una fila cualquiera i, equivale al grado del vértice v_i. En otras palabras:

$$\delta(v_1) = \sum_{j=1}^{m} M_{1j}$$

$$\delta(v_2) = \sum_{j=1}^{m} M_{2j}$$

$$\vdots$$

$$\delta(v_i) = \sum_{j=1}^{m} M_{ij}$$

Propiedades

Luego la suma de todos los grados del grafo está dada por:

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}$$

Por otra, parte, si sumamos los valores de columna cualquiera j, obtendremos la cantidad de vértices en los que incide la arista e_j, o bien dicho: 2. En otras palabras:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 2$$

Propiedades

Ahora, si agregamos esta sumatoria por sobre todas las columnas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij} &= \sum_{j=1}^{m} 2\\ &= 2m\\ &= 2|E|\end{aligned}$$

Dado que la suma es conmutativa, cambiar el orden de las sumatorias no altera el resultado. Luego:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}\delta_G(v) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}\\ &= 2|E|\end{aligned}$$

Propiedades

Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Ejercicio

En el departamento de informática de una empresa trabajan 15 empleados. Uno de ellos es la secretaria del departamento y otro es el jefe del departamento. Ambos se saludan todos los días y saludan a todos los demás empleados. Cada uno de los restantes empleados del departamento asegura que diariamente se saluda con exactamente 3 de sus compañeros (sin contar a la secretaria y el jefe). ¿Es esto posible?

Propiedades

Corolario

En un grafo sin rulos siempre hay una cantidad par de vértices de grado impar.

<u>Demostración:</u>
Sea $G = (V, E)$ un grafo sin rulos. Separemos V en dos conjuntos V_I y V_P, tales que

$$V_I = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es impar}\}$$
$$V_P = \{v \in V \mid \delta_G(v) \text{ es par}\}$$

Es simple observar que $V = V_I \cup V_P$ y a su vez $V_I \cap V_P = \varnothing$. Utilizando esto, y el resultado del *Handshaking lemma*, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{v \in V} \delta_G(v) = \sum_{v \in V_I} \delta_G(v) + \sum_{v \in V_P} \delta_G(v) = 2|E| \tag{1}$$

Propiedades

Notemos que la segunda sumatoria actúa sólo sobre números pares, en consecuncia, debe ser par. En otras palabras, existe un entero no negativo k tal que:

$$\sum_{v \in V_P} \delta_G(v) = 2k \tag{2}$$

Usando (2) en (1) y despejando:

$$\sum_{v \in V_I} \delta_G(v) = 2 \cdot (|E| - k)$$

Donde $|E| - k$ es un entero no negativo. En consecuencia, el valor de esta sumatoria debe ser un número par. Por las definición de V_I, sabemos que esta sumatoria actúa solo sobre números impares, luego, debe ser cierto que existe una cantidad par de estas sumas. En consecuencia $|V_I| = 2i$ para algún entero no negativo i, o en otras palabras, existe una cantidad par de vértices con grado impar.

Outline

Caminos y Ciclos

Definición

Una **caminata** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, con $v_0, \ldots, v_k \in V$, tal que $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k.

Una **caminata cerrada** en un grafo es una caminata que empieza y termina en el mismo vértice: $v_0 = v_k$.

Caminos y Ciclos

Definición

Un **camino** en un grafo es una caminata en la que no se repiten aristas.

Un **ciclo** en un grafo es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.

Definición

El **largo** de una caminata, camino o ciclo es la cantidad de aristas que lo componen. Si está compuesto por un único vértice (sin aristas), diremos que tiene largo 0.

Conectividad

Definición

Dos vértices x e y en un grafo G están **conectados** si existe un camino en G que empieza en x y termina en y.

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

¿Qué pasa si tomamos las clases de equivalencia?

Conectividad

Ejercicio

Muestre que "estar conectados" es una relación de equivalencia.

Demostración:

Sea $G(V, E)$ y $\sim$ la relación "estar conectados".

- **Refleja:** Sea $v \in V$ cualquiera, podemos tomar el camino (v) que une v consigo mismo. Concluímos que $v \sim v$.
- **Simétrica:** Suponemos $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$. Luego, existe un camino $(v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ que conecta v_1 y v_2. Como E es simétrica, debe existir también el camino $(v_2, u_n, \ldots, u_1, v_1)$ y por lo tanto $v_2 \sim v_1$.
- **Transitiva:** Suponemos $v_1, v_2, v_3 \in V$ tales que $v_1 \sim v_2$ y $v_2 \sim v_3$. Luego, existen caminos $p = (v_1, u_1, \ldots, u_n, v_2)$ y $q = (v_2, w_1, \ldots, w_m, v_3)$. Por lo tanto, debe existir el camino $(v_1, u_1, \ldots, u^*, \ldots, w_m, v_3)$ donde u^* es el último vértice del cámino q que comparte con el camino p. Siempre existe un vértice en común ya que v_2 está en ambos. Concluímos que $v_1 \sim v_3$.

Conectividad

Definición

Dado un vértice v de un grafo G, su clase de equivalencia bajo la relación "estar conectados" es una **componente conexa** de G.

En general, diremos que la componente conexa también contiene a las aristas entre los vértices de ella.

Definición

Un grafo G se dice **conexo** si todo par de vértices $x, y \in V$ está conectado. En otro caso, G es **disconexo**.

Un grafo conexo tiene una única componente conexa.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si un grafo G con n vértices es conexo, tiene al menos $n - 1$ aristas.

Conectividad

Teorema

Un grafo G con n vértices y k aristas tiene al menos $n - k$ componentes conexas.

<u>Demostración:</u>

Un grafo G con n vértices puede tener como máximo n componentes conexas, cuando no tiene ninguna arista, cada nueva arista que se le agregue puede reducir la cantidad de componentes a lo más en 1, por lo que luego de agregar k aristas la cantidad de componentes se ha reducido a lo más en k, por lo que la cantidad de componentes siempre se mantiene mayor o igual a $n - k$.

Conectividad

Definición

Una **arista de corte** en un grafo G es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Definición

Un **vértice de corte** en un grafo G es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.

Conectividad

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorema

Una arista en un grafo G es de corte si y sólo si no pertenece a ningún ciclo en G.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supondremos que G es conexo.

($\Rightarrow$) Por contrapositivo, mostraremos que al eliminar una arista (u, v) perteneciente a un ciclo C del grafo, este se mantiene conexo. En $G - uv$, los únicos caminos que podrían verse afectados son los que pasan por (u, v). Sea $x, y \in V$ vértices conectados por un camino que contiene a la arista (u, v). Esto quiere decir que x está conectado con u (1) y v está conectado con y (2). Ahora, como (u, v) está en C, si sacamos (u, v) se sigue cumpliendo que u está conectado con v (3), a través del camino que forma la porción restante de C. De (1) y (3) por transitividad tenemos que x está conectado con v (4), y de (4) y (2) por transitividad tenemos que x está conectado con y. Por lo tanto, (u, v) no puede ser de corte.

$(\Leftarrow)$ Por contrapositivo, supongamos ahora que $e = (u, v)$ no es una arista de corte, o sea que al sacarla G sigue siendo conexo. Esto quiere decir que existe un camino, digamos P, entre u y v en $G - e$. Luego, el camino P junto con la arista (u, v) forman un ciclo en G.

Grafos bipartitos

Lema

En un grafo simple G, toda caminata cerrada de largo impar contiene un ciclo de largo impar.

Ejercicio

Demuestre el lema.

Demostración:

Por inducción en el largo de la caminata.

¡Ojo, las caminatas que nos interesan son las de largo impar!

Grafos bipartitos

- **CB.** La caminata cerrada más pequeña de largo impar es un ciclo de tres vértices, esta caminata ya es un ciclo así que el caso base se cumple.
- **HI.** Supongamos que toda caminata cerrada de largo impar menor a ℓ tiene un ciclo de largo impar.
- **TI.** Sea C una caminata cerrada de largo ℓ impar.
    - Si C no repite vértices entonces C ya es un ciclo impar y comprobamos lo que queríamos.
    - Si por otro lado, en C se repite un vértice v, entonces podemos partir C en dos caminatas distintas que comienzan en v, C' y C''. No puede ocurrir que C' y C'' tengan largo par ya que entonces C no podría tener largo impar, por lo que al menos una de ellas es una caminata cerrada de largo impar estrictamente menor a ℓ y por HI contiene un ciclo de largo impar, que también sería un ciclo de largo impar en C comprobando lo que queríamos.

$\square$

Outline

Objetivos de la clase

- Conocer formas de representación de grafos.
- Comprender el concepto de grado.
- Comprender concepto de camino y componente.
- Demostrar resultados de conectividad.