Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 8 - Relaciones de Orden

11 de octubre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial, y sean $S \subseteq A, x \in A$.

Ínfimo y supremo

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un ínfimo de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior. Análogamente se define el supremo de un conjunto.

1. Meme del día

Queda como ejercicio para el lector.

2. Relaciones, relaciones, relaciones

Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definimos la relación binaria Ω siguiente:

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$, entonces

$$\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \iff (\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \implies x\mathcal{R}_2 y)$$

Demuestre que Ω es una relación de orden, y además que no es un orden total en A.

3. Verdadero y Falso

Sea A un conjunto no vacío y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial. En esta pregunta refiérase siempre a este orden parcial y responda verdadero o falso según corresponda. En caso de ser verdadero, demuéstrelo, y en caso de ser falso, dé un contraejemplo y explíquelo.

1. Si S tiene un mínimo para todo $S \subseteq A$ con $S \neq \varnothing$, entonces $\preceq$ es un orden total.
2. Si $\preceq$ es un orden total, entonces S tiene un mínimo para todo $S \subseteq$ A con $S \neq \varnothing$.
3. Para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.

4. La mezcla

Sea A un conjunto no vacío, $\simeq \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial, ambos sobre A. Considere el conjunto cuociente $A/\simeq$ y defina la siguiente relación $\ll \subseteq (A/\simeq) \times (A/\simeq)$:

$$(S_1, S_2) \in \ll \text{ si, y solo si, existe } a \in S_1 \text{ tal que } \forall b \in S_2 \text{ se cumple que } a \preceq b$$

La clausura refleja de una relación R aplicada sobre el conjunto A se define como la relación refleja más pequeña aplicada sobre A que contiene a R. Esta se denota como R^r y cumple las siguientes propiedades:

1. $R \subseteq R^r$
2. R^r es refleja
3. Si R' es una relación refleja tal que $R \subseteq R'$, entonces $R^r \subseteq R'$

Dicho de forma sencilla, a la relación R le añadimos las relaciones necesarias para que sea refleja.

1. Demuestre que $\ll^r$ es un orden parcial sobre $A/\simeq$ donde $\ll^r$ es la clausura refleja de $\ll$.
2. ¿Es verdad que A tiene un elemento minimal según $\preceq$ si, y solo si, $A/\simeq$ tiene un elemento minimal según $\ll^r$? Demuestre su afirmación.

5. Funciones

Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \to B$ es *creciente* si dados $x, y \in A$ tales que $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

1. Demuestre que si f es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contraejemplo.

2. Relaciones, relaciones, relaciones

Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definimos la relación binaria Ω siguiente:

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$, entonces

$$\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \iff (\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \implies x\mathcal{R}_2 y)$$

Demuestre que Ω es una relación de orden, y además que no es un orden total en A.

2. Antisimétrica: Supongamos que $R_1 \Omega R_2$ y $R_2 \Omega R_1$

PD: $R_1 = R_2$

- $\rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x R_1 y \rightarrow x R_2 y$

  $\rightarrow R_1 \subseteq R_2$
- $\rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x R_2 y \rightarrow x R_1 y$

  $\rightarrow R_2 \subseteq R_1$

Como $R_1 \subseteq R_2$, $R_2 \subseteq R_1$, $R_1 = R_2$.

Concluimos que es antisimétrico.

3. Transitiva: Supongamos que $R_1 \Omega R_2$ y $R_2 \Omega R_3$.

PD: $R_1 \Omega R_3$.

- $\rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x R_1 y \rightarrow x R_2 y$

  $\rightarrow R_1 \subseteq R_2$
- $\rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, \; x R_2 y \rightarrow x R_3 y$

  $\rightarrow R_2 \subseteq R_3$

Como $\subseteq$ es transitivo, $R_1 \subseteq R_3 \rightarrow \forall x, y \; \mathbb{R}, \; x R_1 y \rightarrow x R_3 y$

$\rightarrow R_1 \Omega R_3$. Concluimos que es transitiva. $\square$

Como es refleja, antisimétrica y transitiva, Ω es de orden parcial. $\square$

no Conexa $\leftrightarrow \neg(\forall x \forall y (xRy \vee yRx))$

$$\equiv \exists x \neg \forall y (xRy \vee yRx)$$

$$\equiv \exists x \exists y \neg (xRy \vee yRx)$$

$$\equiv \exists x \exists y (\neg(xRy) \wedge \neg(yRx))$$

$$\equiv \exists x \exists y ((x,y) \notin R \wedge (y,x) \notin R))$$

$xR_1y \leftrightarrow x<y$ $\qquad x<y \rightarrow \neg(x>y)$

$xR_2y \leftrightarrow x>y$ $\qquad (x,y) \in R_1 \rightarrow (x,y) \notin R_2$

$$R_1 \not\subseteq R_2 \qquad R_2 \not\subseteq R_1$$

Con ello, $(R_1, R_2) \notin \Omega$ y $(R_2, R_1) \notin \Omega$.

$\therefore$ no es conexa.

Sea $R_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ una relación arbitraria.

Definimos $R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad R_2 = \mathbb{R}^2 \setminus R_1$

Se tiene que $R_1 \not\subseteq R_2$, $R_2 \not\subseteq R_1$ $\therefore$

$(R_1, R_2) \notin \Omega$ y $(R_2, R_1) \notin \Omega$.

3. Verdadero y Falso

Sea A un conjunto no vacío y $\preceq \subseteq A \times A$ un orden parcial. En esta pregunta refiérase siempre a este orden parcial y responda verdadero o falso según corresponda. En caso de ser verdadero, demuéstrelo, y en caso de ser falso, dé un contraejemplo y explíquelo.

1. Si S tiene un mínimo para todo $S \subseteq A$ con $S \neq \varnothing$, entonces $\preceq$ es un orden total.
2. Si $\preceq$ es un orden total, entonces S tiene un mínimo para todo $S \subseteq$ A con $S \neq \varnothing$.
3. Para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.

Cota inferior: un $a \in A$ tq $a \preceq x \quad \forall x \in S$.

Mínimo: cota inferior $\in S$.

$\forall x, y \in A \ (x \preceq y \ \vee \ y \preceq x)$

Sean $x, y \in A$ elementos arbitrarios. PD: $x \preceq y \ \vee \ y \preceq x$.

Sea $S = \{x, y\}$. Notemos que $S \subseteq A$ y $S \neq \phi$.

Si x es el mínimo de S, entonces $x \preceq y$.

" y " " " " $y \preceq x$.

En cualquier caso, $x \preceq y \ \vee \ y \preceq x \ \therefore$ es cierta $\therefore$ orden total.

2. Si $\preceq$ es un orden total, entonces S tiene un mínimo para todo $S \subseteq$ A con $S \neq \varnothing$.

2. $A = ?$ $\qquad A = \mathbb{R}$

$S = ?$ $\qquad S = \mathbb{R}$

$\preceq = ?$ $\qquad \preceq := \leqslant$

Tenemos que $\preceq$ es orden total. Sin embargo, $\exists S \subseteq A$ tq $S \neq \phi$ y S no tiene mínimo $\therefore$ es falso.

3. Para todo $S \subseteq A$, si existe x que es minimal y maximal de S, entonces S tiene un único elemento.

minimal: $x \in S$ tq $\forall y \in S,\ y \preceq x \rightarrow y = x$

$$\varphi(x) := \forall y\,(y \preceq x \rightarrow y = x)$$
$$\equiv \forall y\ \neg\neg(y \preceq x \rightarrow y = x)$$
$$\equiv \neg \exists y\ \neg(\neg(y \preceq x) \vee y = x)$$
$$\equiv \neg \exists y\,(y \preceq x \wedge y \neq x)$$

$A := \mathbb{Z}$

$S := \{2, 3\}$

$\preceq := |$

$2 \nmid 3$

$3 \nmid 2$

Contraejemplo válido ✓

$a | a$

$a | b \wedge b | a$

$a = k_1 b$

$b = k_2 a$

$a = k_1(k_2 a)$

$k_1 k_2 = 1$

$k_1 = k_2 = 1$

$a = b$

$a | b \wedge b | c$

$a = k_1 b$

$b = k_2 c$

$a = k_1 k_2 c = k' c \qquad k' \in \mathbb{Z}$ ∴ transitiva.

5. Funciones

Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{N}$. Diremos que una función $f : A \to B$ es *creciente* si dados $x, y \in A$ tales que $x < y$, se tiene que $f(x) < f(y)$.

1. Demuestre que si f es creciente, entonces es inyectiva.
2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contraejemplo.

1. PD: f es inyectiva

$$\leftrightarrow (f(x) = f(y) \to x = y)$$

Sean $x, y \in A$. Supongamos que $f(x) = f(y)$.
Por contradicción, digamos que $x \neq y$. SPDG, digamos que $x<y$
Como f es creciente, $x < y \to f(x) < f(y)$ $\times$
Caso $y < x$ es análogo. Concluimos que $x = y$ $\therefore$ f es inyectiva.

2. ¿Es cierto que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son crecientes, entonces $g \circ f$ es inyectiva? Demuestre o de un contraejemplo.

$$* \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Supongamos que para $x, y \in A$, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$

$$\leftrightarrow g(\underbrace{f(x)}_{a}) = g(\underbrace{f(y)}_{b}) \qquad (g(a) = g(b)) \to a = b$$

Como g es creciente, por el inciso (1) es inyectiva y $\therefore$ se tiene que $f(x) = f(y)$. Como f es creciente, por (1), $x = y$. Concluimos que $(g \circ f)$ es inyectiva.