Relaciones

Clase 12

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Conjuntos

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

Estábamos viendo axiomas que permitían formalizar esta idea y sus propiedades básicas

Axiomas

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$ tal que $\forall x,\ x \notin X$.

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por $\emptyset$ o $\{\}$.
- Vimos que era único

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Ejemplo

Definamos el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Axiomas

Este axioma es bastante "permisivo".

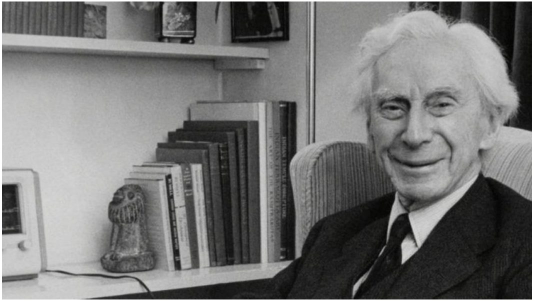
- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Ejemplo

$\varphi_1(x)$: x es un conjunto con más de 3 elementos
$\varphi_2(x)$: x es un conjunto con una cantidad finita de elementos
$\varphi_3(x)$: x es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos
$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos
$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

Axiomas



Bertrand Russell (1872–1970)

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA!

Esta es la **paradoja de Russell**.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \land \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto A se obtiene *separando* de C los elementos que cumplen la propiedad φ.

Axiomas

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto "universal sano" que llamaremos $\mathcal{U}$.
- Entonces, cuando escribamos $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$.

Típicamente el conjunto $\mathcal{U}$ se deduce del contexto.

Operaciones

Sean A y B conjuntos. Definiremos algunas operaciones sobre ellos.

Operaciones

Sean A y B conjuntos. Definiremos algunas operaciones sobre ellos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o en B.

Operaciones

Sean A y B conjuntos. Definiremos algunas operaciones sobre ellos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o en B.

Definición

La **intersección** de A y B se define por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A y en B.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Definición

El **conjunto potencia** de A se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A.

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

¿Cómo podemos llamar al operador δ?

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \delta(0) = \delta(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \delta(1) = \delta\left(\{\varnothing\}\right) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \delta(2) = \delta\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, $\ldots$, $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de $\mathbb{N}$:

Definición

El conjunto de los **números naturales**, denotado por $\mathbb{N}$, es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a $\varnothing$, 1 a $\delta(\varnothing)$, y así sucesivamente.

Solo con $\varnothing$ y δ podemos definir todo $\mathbb{N}$!!!

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

La **suma** de dos números naturales cumple

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

$$
\begin{aligned}
sum(3,4) &= sum(3,\delta(3)) \\
&= \delta(sum(3,3)) \\
&= \delta(sum(3,\delta(2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,\delta(1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,\delta(0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(sum(3,0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(4))) \\
&= \delta(\delta(5)) \\
&= \delta(6) \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio (propuesto ★)

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $mult(3, 2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Multiplicación de dos números naturales

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$
\begin{aligned}
mult(3,2) &= mult(3, \delta(1)) \\
&= sum(3, mult(3,1)) \\
&= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\
&= sum(3, sum(3, mult(3,0))) \\
&= sum(3, sum(3,0)) \\
&= sum(3,3) \\
&\vdots \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c:

BI: $sum(sum(a,b),0) = sum(a,b) = sum(a,sum(b,0))$.

HI: Supongamos que se cumple que
$sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$ para un natural c.

TI: Por demostrar: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = sum(a,sum(b,\delta(c)))$.
Desarrollamos el lado izquierdo: $sum(sum(a,b),\delta(c)) =$
$\delta(sum(sum(a,b),c)) \overset{HI}{=} \delta(sum(a,sum(b,c))) =$
$sum(a,\delta(sum(b,c))) = sum(a,sum(b,\delta(c)))$ $\square$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de $\mathcal{U}$), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Leyes

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Leyes

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}$.

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.
Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Objetivos de la clase

- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos
- Entender el producto cartesiano y las relaciones
- Conocer ejemplos de relaciones binarias

Outline

Introducción

Las **relaciones** son un concepto muy usado en computación.

- Principalmente en Bases de Datos.
- ¿Bases de datos *relacionales*?

Intuitivamente, una relación matemática puede verse como una *correspondencia* entre elementos de dominios posiblemente distintos.

- En una base de datos, esta correspondencia está dada por una tabla.

Introducción

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Angela	Merkel	Política	ISTJ
339	Johann Wolfgang	Von Goethe	Escritor	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ada	Lovelace	Metmática	ENTP

¿Qué le falta a los conjuntos para poder definir tablas?

Definiciones básicas

Definición

Sean $a, b \in \mathcal{U}$ (donde $\mathcal{U}$ es un conjunto universal). Definimos el **par ordenado** (a, b) como

$$(a, b) = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

¿Por qué lo definimos así?

- Para establecer la igualdad entre dos pares ordenados.

Propiedad

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$.

Ejercicio

Demuestre la propiedad anterior.

Demostración

($\Rightarrow$) Debemos demostrar que si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c \wedge b = d$. Por definición de par ordenado, tenemos que $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Para facilitar la demostración veremos dos casos:

1. $a = b$: En este caso $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}, \{a, a\}\big\}$, y por axioma de extensión esto es igual a $\big\{\{a\}, \{a\}\big\}$. Nuevamente por axioma de extensión, obtenemos $\big\{\{a\}\big\}$. Luego, tenemos que $\big\{\{a\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Por axioma de extensión, tenemos que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$. De lo primero, por axioma de extensión obtenemos que $a = c$, y aplicando esto último en lo segundo tenemos que $\{c\} = \{c, d\}$, y por lo tanto por axioma de extensión $c = d$. Como $a = b$, $a = c$ y $c = d$, se deduce también que $b = d$, y queda demostrado lo que queríamos.

Demostración

($\Rightarrow$)

2. $a \neq b$: Como $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{c\},\{c,d\}\big\}$, por axioma de extensión se debe cumplir que $\{a\} = \{c\}$ o $\{a,b\} = \{c\}$. Como $a \neq b$, por axioma de extensión no puede ser posible la segunda opción (pues los conjuntos tienen distinta cantidad de elementos), y entonces necesariamente $\{a\} = \{c\}$. Aplicando nuevamente el axioma de extensión, concluimos que $a = c$. Aplicando este resultado a la igualdad inicial obtenemos que $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{a\},\{a,d\}\big\}$, y luego por axioma de extensión $\{a,b\} = \{a,d\}$. Finalmente, aplicando nuevamente el axioma de extensión, se deduce que $b = d$, quedando demostrado lo deseado.

Demostración

($\Leftarrow$) Debemos demostrar que si $a = c \wedge b = d$, entonces $(a, b) = (c, d)$. Si se cumplen tales igualdades, entonces la siguiente igualdad también se cumple: $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{c\}, \{c, d\}\big\}$. Aplicando la definición de par ordenado, obtenemos entonces que $(a, b) = (c, d)$. $\square$

Definiciones básicas

Observación (propuesta ★)

Considere la siguiente definición alternativa de un par ordenado:

$$(a,b) = \big\{a, \{b\}\big\}$$

Esta no es una buena definición. Tomemos por ejemplo los siguientes elementos:

$$a = \{x\}, b = y, c = \{y\}, d = x, \text{ con } x \neq y.$$

Es claro que $a \neq c$ y $b \neq d$. Sin embargo, si construimos los pares ordenados con esta definición alternativa:

$$\begin{array}{rcccl} (a,b) & = & (\{x\},y) & = & \{\{x\},\{y\}\} \\ (c,d) & = & (\{y\},x) & = & \{\{y\},\{x\}\} \end{array}$$

Estos conjuntos son iguales por axioma de extensión, y luego la propiedad de igualdad de pares ordenados no se cumple con esta definición.

Podemos extender el concepto a tríos ordenados:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

o a cuadruplas ordenadas:

$$(a, b, c, d) = ((a, b, c), d) = (((a, b), c), d)$$

En general:

Definición

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{U}$. Definimos una ***n*-tupla** como:

$$(a_1, \ldots, a_n) = ((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Definiciones básicas

Definición

Dados dos conjuntos A y B, definimos el **producto cartesiano** entre A y B como

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Definiciones básicas

También podemos extender esta noción.

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, definimos el **producto cartesiano** entre los A_i como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$$

Ejemplo

Podemos definir producto cartesiano de dimensión n usando la definición de producto cartesiano entre dos conjuntos.

$$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Note que esta definición es recursiva: para calcular $A_1 \times \ldots \times A_{n-1}$ se debe aplicar de nuevo la definición hasta llegar a un producto cartesiano entre dos conjuntos.

Outline

Definiciones básicas

Definición

Dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, diremos que R es una **relación** sobre tales conjuntos si $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3, 4, 7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0, 0, 1) \notin +_{\mathbb{N}}$$

Recuerde que *sum* es la suma que definimos en el capítulo de teoría de conjuntos.

Definiciones básicas

La **aridad** de una relación R es el tamaño de las tuplas que la componen.

- Equivalentemente, diremos que R es una relación ***n*-aria**.

Ejemplo

La tabla que vimos al inicio:

id	Nombre	Apellido	Ocupación	MBTI
154	Dana	Scully	Agente del FBI	ISTJ
339	Ludwig	Wittgenstein	Filósofo	INFJ
271	Luke	Skywalker	Jedi	INFP
404	Ellen	Ripley	Suboficial de vuelo	INTJ

representa una relación 5-aria.

Relaciones binarias

Un caso particular de suma importancia:

Definición

Dados conjuntos A y B, diremos que R es una **relación binaria** de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$, entonces $R = \{(1, 3), (2, 4)\}$ es una relación binaria de A en B.

¿Cuántas posibles relaciones binarias hay sobre dos conjuntos A y B?

Relaciones binarias

Podemos tener una relación sobre un solo conjunto:

Definición

Dado un conjunto A, diremos que R es una **relación binaria** sobre A si $R \subseteq A \times A = A^2$.

Notación: cuando tengamos productos cartesianos entre un mismo conjunto, usaremos una notación de "potencia":

$$A \times \overset{(n-2 \text{ veces})}{\cdots} \times A = A^n$$

Ejemplo

La relación binaria *menor que* :

$$<\subseteq \mathbb{N}^2,$$

definida como sigue: dados $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(m, n) \in < \text{ si y sólo si } m \in n.$$

$$(1,3) \in < \qquad (10,4) \notin < \qquad (7,7) \notin <$$

Relaciones binarias

La notación de conjuntos es un poco incómoda: ¿$(3, 17) \in <$?

Dados $a, b \in A$, para indicar que están relacionados a través de R usamos cualquiera de las siguientes notaciones:

- $(a, b) \in R$
- $R(a, b)$
- aRb
  - Si no están relacionados, podemos escribir $a\not{R}b$.

Nuestra elección dependerá del contexto.

Ejemplo

Ahora podríamos escribir:

$$3 < 17 \qquad 7 \not< 6$$

Paréntesis: notación infija

La última forma de escribir relaciones se llama notación **infija**.

Podemos extender tal notación a relaciones de mayor aridad. Por ejemplo, podríamos escribir $n_1 + n_2 = n_3$ si $(n_1, n_2, n_3) \in +_{\mathbb{N}}$:

$$3 + 4 = 7$$

y por lo tanto $n_1 + n_2 = n_3$ si y sólo si $sum(n_1, n_2) = n_3$.

¡Cuidado! El símbolo = ocupado en la primera parte es sólo un símbolo que forma parte de nuestra notación, y no debe ser confundido con el símbolo = usado en la segunda parte, que representa la igualdad de conjuntos definida en el capítulo anterior.

Relaciones binarias

Ejemplo

La relación *divide a*, denotada por $|$, sobre los naturales sin el 0, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si b es múltiplo de a:

$$a|b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = ka.$$

$$3|9 \qquad 18|72 \qquad 7\nmid 9$$

Ejemplo

La relación *equivalencia módulo n*, denotada por $\equiv_n$, sobre los naturales, es una relación tal que a está relacionado con b si y sólo si $|a - b|$ es múltiplo de n:

$$a \equiv_n b \text{ si y sólo si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a - b| = kn.$$

Por ejemplo, dado $n = 7$:

$$2 \equiv_7 23 \qquad 8 \equiv_7 1 \qquad 19 \not\equiv_7 4$$

De ahora en adelante trabajaremos con relaciones binarias sobre un conjunto, a las que nos referiremos simplemente como relaciones.

Outline

Objetivos de la clase

- □ Comprender operaciones de conjuntos
- □ Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos
- □ Entender el producto cartesiano y las relaciones
- □ Conocer ejemplos de relaciones binarias