Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Repaso I1

30 de agosto de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

1. Inducción Estructural

Sea S el conjunto de palabras formadas por a's y b's recursivamente de la siguiente manera:

- $a \in S, b \in S$
- Si $\mu \in S$ y $\nu \in S$, entonces $\mu\nu \in S$.
- Solo los elementos generados mediante las reglas 1 y 2 pertenecen a S.

También se define la función reverso $R : S \longrightarrow S$ de la siguiente manera:

- $R(a) = a, R(b) = b$.
- Si $\mu \in S$, entonces $R(a\mu) = R(\mu)a$, y $R(b\mu) = R(\mu)b$.

Considerando las definiciones inductivas de S y R:

1. Demuestre que para todo par de palabras $\mu, \nu \in S$ se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$$

2. Demuestre que para toda palabra $\mu \in S$ se cumple que

$$R(R(\mu)) = \mu$$

Solución

a)

BI: Con $\mu = a$ y $\nu \in S$, se tiene que

$$R(\mu\nu) = R(a\nu) = R(\nu)a = R(\nu)R(a) = R(\nu)R(\mu)$$

El caso de $\mu = b$ es análogo. Luego, para todo $\nu \in S$ se cumple el caso base.

HI: Sean $\mu, \nu \in S$. Supongamos que para todo $\xi \in S$ se cumple que $R(\mu\xi) = R(\xi)R(\mu)$, y lo mismo para ν, es decir, que $R(\nu\xi) = R(\xi)R(\mu)$

TI: PD: Para todo $\xi \in S$ se cumple que $R(\mu\nu\xi) = R(\xi)R(\mu\nu)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
R(\mu\nu\xi) &= R(\mu(\nu\xi)) \\
&= R(\nu\xi)R(\mu) && \text{por HI} \\
&= R(\xi)R(\nu)R(\mu) && \text{por HI} \\
&= R(\xi)(R(\nu)R(\mu)) \\
&= R(\xi)R(\mu\nu) && \text{por HI}
\end{aligned}$$

Luego, para todo $\mu, \nu \in S, R(\mu\nu) = R(\nu)R(\mu)$.
b)
BI: Con $\mu = a$, la propiedad se cumple trivialmente. Lo mismo para $\mu = b$.
HI: Supongamos que para $\mu, \nu \in S$ se tiene que $R(R(\mu)) = \mu$ y $R(R(\nu)) = \nu$.
TI: PD: $R(R(\mu\nu)) = \mu\nu$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
R(R(\mu\nu)) &= R(R(\nu)R(\mu)) && \text{demostrado en (a)} \\
R(R(\mu\nu)) &= R(R(\mu))R(R(\nu)) && \text{demostrado en (a)} \\
R(R(\mu\nu)) &= \mu\nu && \text{HI}
\end{aligned}$$

Concluímos que para todo $\mu \in S$ se tiene que $R(R(\mu)) = \mu$.

2. Incompletitud funcional

Demuestre que el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.

Solución
Consideremos el conjunto de todas las fórmulas construidas con la variable proposicional p. Dentro de este conjunto está, por ejemplo, la fórmula $p \wedge \neg p$, que es una contradicción. Demostraremos que, usando solo los conectivos de $C = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, no se puede obtener ninguna fórmula equivalente a $p \wedge \neg p$, o en otras palabras, que no se puede expresar la contradicción, y con ello concluiremos que el conjunto no es funcionalmente completo.
Demostraremos que todas las fórmulas que se pueden construir en base a la variable proposicional p con los conectivos de C son equivalentes a p o son tautología. Lo haremos por inducción:
BI: Para $\varphi = p$, la propiedad se cumple trivialmente.
HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas que solo usan conectivos de C, su única variable proposicional es p, y cumplen la propiedad, es decir, que o son equivalentes a p o son tautología.
TI: PD: $\theta = \varphi \circ \psi$, con $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ es tal que $\theta \equiv p \vee \theta \equiv \top$. Hay 4 casos:

1. $\theta = \varphi \wedge \psi$.

   a) Si $\varphi \equiv \psi \equiv \top$, entonces $\theta \equiv \top$.
   b) Si al menos una de ellas es equivalente a p, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

2. a) $\theta = \varphi \lor \psi$. Si al menos una de φ, ψ es equivalente a $\top$, entonces $\theta \equiv \top$.
   b) Si ambas son equivalentes a p, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

3. $\theta = \varphi \to \psi$.
   a) Si $\psi \equiv \top$, entonces $\theta \equiv \top$.
   b) Si $\varphi \equiv \psi \equiv p$, entonces $\theta \equiv p$.
   c) Si $\varphi \equiv \top$ y $\psi \equiv p$, entonces $\theta \equiv p$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

4. $\theta = \varphi \leftrightarrow \psi$
   a) Si una de φ, ψ es equivalente a $\top$ y la otra es equivalente a p, entonces $\theta \equiv p$.
   b) En otro caso, $\theta \equiv \top$.

   En todos los casos se cumple la propiedad.

Como en todo caso de construcción inductiva se cumple la propiedad, concluímos que toda fórmula construida solo con conectivos de C y en base solo a la variable proposicional p es equivalente a p o es tautología, por lo que ninguna es una contradicción. Con ello, concluímos que la constradicción no se puede expresar, por lo que el conjunto C no es funcionalmente completo.

3. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \land q) \to (r \land \neg q)$.

Solución

a) DNF

Usaremos el método de la tabla de verdad para pasar la fórmula a DNF. A continuación vemos la tabla de verdad de la fórmula, con una columna adicional correspondiente a la subfórmula resultante de esa valuación:

p	q	r	$(p \land q)$	$(r \land \neg q)$	$(p \land q) \to (r \land \neg q)$	subfórmula
0	0	0	0	0	1	$\neg p \land \neg q \land \neg r$
0	0	1	0	1	1	$\neg p \land \neg q \land r$
0	1	0	0	0	1	$\neg p \land q \land \neg r$
0	1	1	0	0	1	$\neg p \land q \land r$
1	0	0	0	0	1	$p \land \neg q \land \neg r$
1	0	1	0	1	1	$p \land \neg q \land r$
1	1	0	1	0	0	$-$
1	1	1	1	0	0	$-$

Finalmente, tomamos la disyunción de todas estas subfórmulas y tenemos una fórmula equivalente en DNF:
$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$
Notemos que esta fórmula puede ser simplificada significativamente, pero que para efectos de esta pregunta es válida.

b) CNF

Para encontrar una fórmula equivalente en CNF podemos aprovechar la Ley de De Morgan junto a la tabla de verdad y realizar un procedimiento similar, pero con las valuaciones que hacen a la fórmula falsa, y finalmente negar la fórmula resultante. Esto termina con la negación de una fórmula en DNF, lo que por Ley de De Morgan entrega una fórmula en CNF. Nuevamente, la tabla de verdad con las respectivas subfórmulas es:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(r \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \neg q)$	subfórmula
0	0	0	0	0	1	–
0	0	1	0	1	1	–
0	1	0	0	0	1	–
0	1	1	0	0	1	–
1	0	0	0	0	1	–
1	0	1	0	1	1	–
1	1	0	1	0	0	$p \wedge q \wedge \neg r$
1	1	1	1	0	0	$p \wedge q \wedge r$

La fórmula DNF en este caso es $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$. Sin embargo, tomamos las valuaciones falsas, por lo que nos interesa la negación de esta fórmula: $\neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r))$. Con ello, por De Morgan, obtenemos $\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(p \wedge q \wedge r) \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$, que es una fórmula en CNF equivalente a la original.

4. Modelamiento

El problema de las n reinas consiste en poner n reinas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ sin que se amenacen. Dos reinas se amenazan si están en la misma fila, columna o diagonal. Sea $C \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ tal que para todo $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ se tiene que $(i, j) \in C$ si y solo si hay una reina en la posición (i, j) del tablero. Construya una fórmula φ tal que:

φ es satisfacible si y solo si C es una asignación válida para el problema de las n reinas

Solución

Definimos las variables p_{ij} con $1 \leq i, j \leq n$ tal que p_{ij} es verdadera si $(i, j) \in C$ y falsa en otro caso.
En primer lugar, definimos una fórmula de inicialización para capturar los elementos

del conjunto en su significado en la variable p_{ij}:

$$\varphi_{\text{init}} = \bigwedge_{(i,j)\in C} p_{ij}$$

Además, tenemos que asegurarnos de que hayan n reinas, ya que una asignación de menos de n reinas en un tablero de $n \times n$ no es una solución válida al problema de las n reinas:

$$\varphi_{\text{fila-presencia}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} p_{ij}$$
$$\varphi_{\text{col-presencia}} = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{n} p_{ij}$$

Debemos asegurarnos de que no haya dos reinas en una misma fila o columna:

$$\varphi_{\text{fila}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(p_{ij} \to \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \neg p_{ik} \right)$$
$$\varphi_{\text{col}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \left(p_{ij} \to \bigwedge_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \neg p_{kj} \right)$$

Finalmente, no puede haber dos reinas en una misma diagonal. Tenemos que considerar las diagonales que van de arriba-izquierda a abajo derecha:

$$\varphi_{\text{arriba-izquierda}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{i'=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ i-j=i'-j'}}^{n} \neg(p_{ij} \land p_{i'j'})$$

y las que van de arriba-derecha a abajo-izquierda:

$$\varphi_{\text{arriba-derecha}} = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} p_{ij} \to \bigwedge_{i'=1}^{n} \bigwedge_{\substack{j'=1 \\ i+j=i'+j'}}^{n} \neg p_{i'j'}$$

Notemos que aunque parezcan distintas, las dos fórmulas anteriores son equivalentes (a excepción de la dirección de la diagonal).
Finalmente, la fórmula φ será la conjunción de todas las subfórmulas:

$$\varphi = \varphi_{\text{init}} \land \varphi_{\text{fila-presencia}} \land \varphi_{\text{col-presencia}} \land \varphi_{\text{fila}} \land \varphi_{\text{col}} \land \varphi_{\text{arriba-izquierda}} \land \varphi_{\text{arriba-derecha}}$$