Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 6

18 de noviembre de 2024

2º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - M. Romero

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 25 de noviembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $k \geq 1$. Un k-coloreo para G es una función $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ tal que para toda arista $(u, v) \in E$ se cumple que $c(u) \neq c(v)$. Denotamos por $\chi(G)$ al mínimo $k \geq 1$ tal que G tiene un k-coloreo.

Por otra parte, denotamos por $\omega(G)$ al tamaño máximo de un clique en G, y por $\alpha(G)$ al tamaño máximo de un conjunto independiente en G.

(a) (2.0 pts) Demuestre que para todo grafo G, se tiene que $\omega(G) \leq \chi(G)$.

(b) (2.0 pts) Demuestre que existen grafos tal que $\omega(G) < \chi(G)$.

(c) (2.0 pts) Demuestre que para todo grafo G con n vértices, se cumple $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

Pregunta 2

(a) (2.0 pts) Demuestre que todo árbol con al menos 2 vértices, tiene al menos 2 vértices de grado 1.

(b) (4.0 pts) En esta pregunta trabajaremos con grafos *dirigidos* sin loops. Un *camino simple* en un grafo dirigido $G = (V, E)$ es un secuencia de vértices distintos $(u_0, \ldots, u_\ell)$ tal que para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, se cumple que $(u_{i-1}, u_i) \in E$. Notar que la definición de camino simple exige que todos los arcos apunten "hacia adelante" en el camino, es decir, desde u_{i-1} hacia u_i (y no al revés). Un *camino simple Hamiltoneano* en un grafo dirigido G es un camino simple que pasa por *todos* los vértices de G. Un grafo dirigido $G = (V, E)$ es un *torneo* si para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ se tiene que $(u, v) \in E$ o $(v, u) \in E$, pero no ambos.

Demuestre por inducción en la cantidad de vértices que todo torneo tiene un camino simple Hamiltoneano.

(*Hint:* En el paso inductivo, elimine un vértice v arbitrario del torneo y analice los distintos casos en que v se puede relacionar con el resto de los nodos.)