Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 12 - Grafos

15 de noviembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

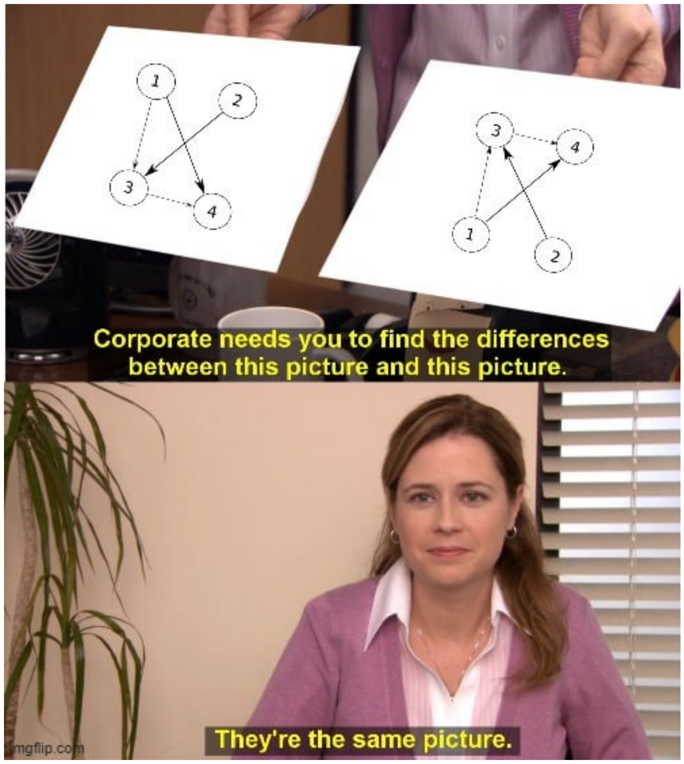
Resumen

- **Grafo** Un grafo $G = (V, E)$ es un par donde V es un conjunto, cuyos elementos llamaremos vértices o nodos, y E es una relación binaria sobre V (es decir, $E \subseteq V \times V$), cuyos elementos llamaremos aristas.
- **Tipos de vértices(V)**:
  - Vertices adyacentes Dado un grafo G = (V, E), dos vértices $x, y \in V$ son adyacentes o vecinos si $(x, y) \in E$.
  - Vertice de corte: es un vértice tal que al eliminarlo (junto con todas sus aristas incidentes) aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de aristas (E)**
  - Rulo: es una arista que conecta un vértice con sí mismo.
  - Arista paralela: Dos aristas son paralelas si conectan a los mismos vértices.
  - Arista de corte: es una arista tal que al eliminarla aumenta la cantidad de componentes conexas de G.
- **Tipos de subgrafos:** (También pueden ser grafos, pero es más común verlos como subgrafos).
  - Ciclo: es una caminata cerrada en la que no se repiten aristas.
  - Clique: es un subgrafo en el que cada vértice está conectado a todos los demás vértices del subgrafo.
- **Tipos de grafos**
  - Grafo no dirigido: Un grafo es no dirigido si toda arista tiene una arista paralela.

- Grafos isomorfos: Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que $(x, y) \in E_1$ si y sólo si $(f(x), f(y)) \in E_2$.
- Grafo completo: es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.
- Grafo conexo: Un grafo G se dice conexo si todo par de vértices está conectado por un camino.
- Grafo bipartito: es un grafo tal que su conjunto de vértices puede particionarse en dos conjuntos independientes
- Multigrafo $G = (V, E, f)$: es un trío ordenado donde $f : E \to S$ es una función que asigna un par de vértices a cada arista en E.

- **Grado de un vértice:** El grado de v (denotado como $\delta_G(v)$) es la cantidad de aristas que inciden en v.
- **Vecindad de un vértice:** La vecindad de v es el conjunto de vecinos de v: $N_G(v) = \{u | (v, u) \in E\}$.
- **Teoremas importantes**
  - Handshaking lemma: $\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|$.
- **Tipos de ciclos:**
  - Ciclo euleriano: es un ciclo que contiene a todas las aristas y vértices del grafo.
  - Ciclo hamiltoniano: es un ciclo en el grafo que contiene a todos sus vértices una única vez cada uno (excepto por el inicial y final).

Meme del día



1. Grafos 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Una k-coloración de aristas de G es una función $f : E \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

1. Demuestre que, para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$, si f es una k-coloración de aristas de G, entonces k es mayor o igual que el grado máximo de G, esto es, $k \geq \max_{v \in V} \delta(v)$.

2. Demuestre usando inducción que para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$ y para toda k-coloración de aristas f de G, se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $\frac{|V|}{2}$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

Solución:

1. Si f es una k-coloración de aristas de un grafo $G(V, E)$ se busca demostrar que

$k \geq \max_{v \in V} \deg(v)$, lo que es equivalente a demostrar que $\forall v \in V.k \geq \deg(v)$. Por contradicción suponemos que $\exists v \in V$ tal que se cumple $m = \deg(v) > k$. Entonces definimos las m aristas incidentes a v como $e_1, \dots e_m$. Luego como $m > k$, es decir contamos con más aristas que colores, por principio del palomar existen los índices $i \neq j$ tales que $f(e_i) = f(e_j)$, vale decir, dos aristas que comparten un vértice tienen el mismo color. Esto presenta una contradicción sobre f como una k-coloración válida y así queda demostrado.

2. Se busca demostrar por inducción que dada la k-coloración f, para todo color se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

De formas análogas es posible hacer inducción sobre la cantidad de vértices o aristas, a continuación se plantea según cantidad de vértices buscando demostrar la proposición

$$P(n) := \forall G(V, E) \text{ tal que } |V| = n.\forall f \text{ se cumple } |\{e \in E \mid f(e) = C\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

- Caso base

Dado un grafo $G = (\{v\}, \emptyset)$ de modo que $|V| = 1$ entonces una k-coloración de aristas $f : \emptyset \to \{1, \dots, k\}$, por ende

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = 0 \leq \frac{1}{2}$$

- Caso inductivo

Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y una k-coloración de aristas $f : E \to \{1, \dots, k\}$. Luego se tiene un vértice v cualquiera y $e_1, \dots e_m$ sus aristas incidentes y dos casos:

1) Si $\forall i \leq m.f(e_i) \neq c$, entonces se define

$$G - v = (V', E') = (V - v, E - \{e_1, \dots e_m\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Además por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 1}{2}$$

Ahora, dado que el color c no se ocupa en ninguna de las aristas $e_1, \dots, e_m$ se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

2) Si $\exists i \leq m$ tal que $f(e_i) = c$, entonces se define la arista $e_c = \{u, v\}$ tal que $f(e_c) = c$. Luego al considerar el grafo

$$G - e_c = (V', E') = (V \setminus e_c, \{e' \in E \mid e' \cap e_c = \emptyset\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Ahora, por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 2}{2}$$

Finalmente, dado que todas las aristas $e' \neq e_c$ tales que $e' \cap e_c \neq \emptyset$ (esto es, coinciden en un vértice con e_c) no son coloreadas con el color c se tiene que

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = C\}| + 1 \leq \frac{|V| - 2}{2} + 1 = \frac{|V|}{2}$$

2. Grafos 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $u, v \in V$. La distancia entre u y v, denotada por $d(u, v)$, es el largo del camino más corto entre u y v, mientras que el diámetro de G, denotado como $D(G)$, es la mayor distancia entre dos de sus vértices.

1. Demuestre que si $D(G) \geq 4$ entonces $D(\bar{G}) \leq 2$.
2. Demuestre que si G tiene un vértice de corte y $D(G) = 2$, entonces $\bar{G}$ tiene un vértice sin vecinos.

Solución

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que $A(G) \geq 4$. Denotaremos por $d(x, y)$ a la distancia entre los vértices x e y en G y $\bar{d}(x, y)$ a la distancia entre x e y en $\bar{G}$. Sean u, v los vértices de inicio y fin del camino que representa al ancho de G. Demostraremos que para todo par de vértices $x, y \in V$ se tiene que $\bar{d}(x, y) \leq 2$. Consideremos $x, y \in V$ dos vértices cualquiera. En primer lugar notemos que ni x ni y pueden ser adyacentes con u y v a la vez, ya que formarían un camino de largo 2 (por ejemplo $u - x - v$) y disminuirían el ancho de G. Ahora tenemos los siguientes casos:
   - $(x, y) \notin E$: Por definición de complemento $xy \in \bar{E}$ y por lo tanto $\bar{d}(x, y) = 1$.
   - $(x, y) \in E$: Dado que existe una arista $x - y$, no puede darse el caso en que x e y sean adyacentes a u y a v por separado. Esto porque se generaría un ciclo y por ende un camino $u - x - y - v$ de largo 3 , con lo que disminuiría el ancho de G. Ahora tenemos 2 casos:

- u y v no son adyacentes ni a x ni a y en G : Dado que $xu, yu \notin E$, en $\bar{G}$ obtenemos el camino $x - u - y$, por ende $\bar{d}(x, y) = 2$.
- Solo u es adyacente a x o y en G. En este caso $vx, vy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - v - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 .
- Solo v es adyacente a x o y en G. En este caso $ux, uy \notin E$ y por ende tenemos un camino $x - u - y$ en $\bar{G}$ de largo 2 .

Como no tenemos más casos posibles, y cada caso demostramos que $\bar{d}(x, y) \leq 2$, concluimos que $A(\bar{G}) \leq 2$.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo (Si el grafo no es conexo la demostración aplicará para cada una de sus componentes conexas) con un vértice de corte v y $A(G) = 2$. Como v es de corte, si lo removemos aumenta la cantidad de componentes conexas, y por ende el grado de v es al menos 2. Sean u, w dos vértices adyacentes a v en G, y sea C la componente conexa a la que pertenece u. Demostraremos que para todo vértice x de C es adyacente a v, o en otras palabras, demostraremos que $d(v, x) = 1$.
   Por contradicción, suponemos que $d(v, x) = k$ con $k \geq 2$. Luego, debe existir un camino $(x, c_1, \ldots, c_{k-1}, v)$ de largo k que sólo utiliza sólo aristas de C. Además, como v y w son adyacentes, también tendremos el camino $(x, c_1, \ldots, c_n, v, w)$ de largo $k + 1$. Notemos que este camino es el menor camino posible entre x y w, ya que no pueden existir otros caminos que no pasen por v (porque dejaría de ser de corte). Esto contradice el hecho de que $A(G) = 2$ y por ende $d(v, x) = 1$.
   Como C es arbitrario, podemos aplicar el mismo argumento para todas las componentes conexas generadas al remover v y concluir que G cumple $\forall x \in V((v, x) \in E)$. Finalmente, por definición de complemento, obtenemos que

$$\forall x \in V((v, x) \in E) \text{ si y sólo si } \forall x \in V((v, x) \notin \bar{E})$$

   Es decir, v es un vértice sin vecinos en $\bar{G}$.

3. Árboles

Decimos que un grafo no dirigido $T = (V, E)$ es un *árbol* si es conexo y para todo par de vértices distintos existe un único camino que los conecta.

Demuestre que para todo grafo T, si T es un árbol, entonces es 2-coloreable.

Solución

Queremos demostrar que existe una 2-coloración $C : V \to \{0, 1\}$, para un árbol cualquiera $T = (V, E)$. Sea $v_0 \in V$ cualquiera, y definamos $C(v_0) \coloneqq 0$. Luego, tomemos un $u \in V$ tal que $u \neq v_0$. Como tenemos un árbol, sabemos que existe un único camino entre u y v_0 de la forma

$$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, u$$

Con esto, y considerando que el largo del camino es n, definamos

$$C(u) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Como tenemos que $u \in V$ es arbitrario y que el camino es único, tenemos una función $C : V \to \{0, 1\}$ bien definida. Veamos que efectivamente tenemos una 2-coloración. Sean $u_0, u_1 \in V$ cualesquiera tales que $\{u_0, u_1\} \in E$. Nuevamente, sabemos que existe un único camino entre v_0 y u_1, de la forma

$$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, u_0, u_1$$

Por definición, tenemos dos casos:

1. $C(u_0) = 0$: Es decir, el largo del camino entre v_0 y u_0 es un número par, como el largo del camino a u_1 tiene que ser un número impar, $C(u_1) = 1$, por lo que u_0 y u_1 tienen distinto color.
2. $C(u_0) = 1$: Análogo al anterior.

Por lo tanto, queda demostrado que dados dos vértices adjacentes cualquiera del árbol, ambos tienen coloración distinta, por lo que el árbol es 2-coloreable.