Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4 - Lógica Proposicional y de Predicados

6 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

1. Satisfacibilidad y consecuencia lógica

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

1. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

> **Solucion** Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera y sean α, β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$.
> *Por demostrar:* $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.
> Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \alpha$.
> Como β está en Σ, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$ (son lógicamente equivalentes), entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
> Por esto, queda demostrado que para cualquier vector de valuaciones $\vec{v}$ se cumple que $\Sigma \backslash \alpha \models \alpha$, es decir, Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2. Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante.

> **Solucion** La afirmación es correcta y lo demostraremos de la siguiente forma. Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera tal que Σ es redundante de a pares.
> *Por demostrar*: Σ es redundante

Suponga que Σ es redundante a pares, entonces sabemos que existen α y β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \models \beta$.
Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \{\beta\}$.
Dado que α está en $\Sigma \backslash \{\beta\}$, entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por definición de consecuencia lógica, como $\alpha \models \beta$ y $\alpha(\vec{v}) = 1$, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$.
Por lo tanto, queda demostrado que si Σ es redundante a pares, entonces Σ es redundante.

3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares.

Solucion En este caso la afirmación es falsa. Para demostrar que no se cumple lo propuesto se propondrá un posible contraejemplo que deja en evidencia que existe un caso donde no se cumple lo pedido.
Considere el conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Debemos demostrar que este conjunto es redundante y no es redundante de a pares.
Su tabla de verdad que se utilizará para la demostración es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para que sea redundante se tiene que cumplir que existe α tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.
Si consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$ nos podemos dar cuenta que $\{p, q\} \models p \leftrightarrow q$. Esto es fácilmente visible mediante la fila 4 de la tabla de verdad. Por lo tanto, Σ es redundante.
Ahora, para demostrar que Σ no es redundante de a pares debemos demostrar que para todo par α, β en Σ con $\alpha \neq \beta$ no se cumple que $\alpha \models \beta$. Como Σ tiene 3 fórmulas proposicionales, debemis ver los 6 casos y demostrar para cada uno que no es cierto que $\alpha \models \beta$.

- $p \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 3)
- $p \models q$: no se cumple (fila 3)
- $p \leftrightarrow p \models q$: no se cumple (fila 1)
- $p \leftrightarrow q \models q$: no se cumple (fila 1)
- $q \models p$: no se cumple (fila 2)
- $q \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 2)

Ya que para todos los pares no se cumple la consecuencia lógica, entonces Σ no es redundante a pares.

2. Resolución

2.1.

Sea el conjunto de fórmulas $\Sigma = \{p \vee q \vee s, p \vee \neg q, \neg(p \vee q) \vee s\}$.
Aplique resolución proposicional para demostrar que $\Sigma \models (r \to s)$.

Solución
Considerar el conjunto auxiliar

$$\Sigma' = \Sigma \cup \neg(r \to s).$$

Luego basta con probar que $\Sigma' \vdash \square$ para probar la proposición. Notar que

$$\begin{aligned} \neg(r \to s) &\equiv \neg(\neg r \vee s) && \text{(Ley de Implicancia)} \\ &\equiv r \wedge \neg s && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

Y que

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) \vee s &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee s && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s) && \text{(Distribución)} \end{aligned}$$

Por equivalencia de conjuntos se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \{p \vee q \vee s,\ p \vee \neg q,\ (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s),\ r \wedge \neg s\} \\ &\equiv \{p \vee q \vee s,\ p \vee \neg q,\ \neg p \vee s, \neg q \vee s, r, \neg s\} \end{aligned}$$

Aplicando resolución

$$\begin{array}{lll} (1) & p \vee q \vee s & \in \Sigma' \\ (2) & \neg q \vee s & \in \Sigma' \\ (3) & s \vee s \vee p & \text{Resolución de (1) y (2)} \\ (4) & s \vee p & \text{Factorización de (3)} \\ (5) & \neg p \vee s & \in \Sigma' \\ (6) & s \vee s & \text{Resolución de (4) y (5)} \\ (7) & s & \text{Factorización de (6)} \\ (8) & \neg s & \in \Sigma' \\ (9) & \square & \text{Resolución de (8) y (9)} \end{array}$$

Como $\Sigma' \vdash \square$ queda entonces demostrado que $\Sigma \models (r \to s)$.

2.2.

Demuestre por resolución que $(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q) \equiv p \wedge q$.

Solución
Para demostrar equivalencia por resolución se utiliza el siguiente razonamiento:
$\phi \equiv \psi \leftrightarrow (\{\phi\} \models \psi \wedge \{\psi\} \models \phi)$
Es decir, dos fórmulas son equivalentes si la primera es consecuencia lógica de la primera y vice versa.
Para resolver este problema desarrollaremos ambas consecuencias lógicas:
1.

$$\{(p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q)\} \models (p \wedge q)$$

Primero desarrollamos la fórmula para que queden conjunciones de sub fórmulas:

$$\equiv \{(p \vee (p \to q)) \wedge (\neg r \vee p) \wedge p \wedge (r \vee q) \wedge (r \to q)\} \models (p \wedge q)$$

Y consideramos el conjunto de fórmulas: $\Sigma = \{p \vee (p \to q), \neg r \vee p, p, r \vee q, r \to q\}$.

PD: $\Sigma = \{p \vee (p \to q), \neg r \vee p, p, r \vee q, r \to q\} \models (p \wedge q)$

Al igual que el ejercicio anterior, definimos Σ' como $\Sigma \cup \neg(p \wedge q)$ y debemos demostrar que $\Sigma' \models \square$

Notar que

$$\begin{aligned} p \vee (p \to q) &\equiv p \vee (\neg p \vee q) && \text{(Ley de Implicancia)} \\ &\equiv p \vee \neg p \vee q && \text{(Asociatividad)} \\ &\equiv \mathbf{T} && (p \vee \neg p) \end{aligned}$$

Las tautologías las sacamos del conjunto ya que no aportan en conjunciones de fórmulas.
Y las siguientes dos equivalencias conocidas:

$$r \to q \equiv \neg r \vee q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Por equivalencia se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \{p \vee (p \to q), \neg r \vee p, p, r \vee q, r \to q, \neg(p \wedge q)\} \\ &\equiv \{\neg r \vee p, p, r \vee q, \neg r \vee q, \neg p \vee \neg q\} \end{aligned}$$

Aplicando resolución:

$$\begin{array}{lll}
(1) & r \vee q & \in \Sigma' \\
(2) & \neg r \vee q & \in \Sigma' \\
(3) & q \vee q & \text{Resolución de (1) y (2)} \\
(4) & q & \text{Factorización de (3)} \\
(5) & p & \in \Sigma' \\
(6) & \neg p \vee \neg q & \in \Sigma' \\
(7) & \neg q & \text{Resolución de (5) y (6)} \\
(8) & \square & \text{Resolución de (4) y (7)}
\end{array}$$

Como $\Sigma' \vdash \square$ queda entonces demostrado que $\Sigma \models (p \wedge q)$.
2. Ahora demostramos el otro lado.

$$\{p \wedge q\} \models (p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q)$$

Nuevamente definimos el conjunto $\Sigma = \{p, q\}$ y debemos demostrar que $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg((p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q))\} \models \square$.
Primero debemos desarrollar la fórmula negada.

$$\begin{aligned}
&\neg((p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q)) \\
&\equiv \neg((\neg r \vee p) \wedge p \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q)) \\
&\equiv \neg(\neg r \vee p) \vee \neg p \vee \neg(r \vee q) \vee \neg(\neg r \vee q) \\
&\equiv (r \wedge \neg p) \vee \neg p \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q)
\end{aligned}$$

Ahora podemos escribir la tabla de verdad de la fórmula y obtener su forma CNF, tres doritos después:

$$\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

Con lo que $\Sigma' = \{p, q, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$.
Aplicando resolución: Aplicando resolución:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \neg p \vee \neg q \vee r & \in \Sigma' \\
(2) & \neg p \vee \neg q \vee \neg r & \in \Sigma' \\
(3) & \neg p \vee \neg q & \text{Resolución de (1) y (2)} \\
(4) & p & \in \Sigma' \\
(5) & \neg q & \text{Resolución de (3) y (4)} \\
(6) & q & \in \Sigma \\
(7) & \square & \text{Resolución de (5) y (6)}
\end{array}$$

Como $\Sigma' \vdash \square$ queda entonces demostrado que $\Sigma \models (p \vee (p \to q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \to q)$.
Como se demostraron ambas consecuencias lógicas, ambas fórmulas son equivalentes.

3. Lógica de predicados

Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine si las siguientes fórmulas son satisfacibles y demuestre su respuesta.

1. $\varphi_1 := \forall x \forall y \neg(x = y)$
2. $\varphi_2 := \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
3. $\varphi_3(x) := \forall y(S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

Solución

1. No es satisfactible. Recordemos que todos los predicados están restringidos al dominio no vacío de evaluación dado por la interpretación. Para una interpretación arbitraria, sea a en ese dominio. Se tiene que $a = a$, lo que da un contraejemplo para $x = a, y = a$. Como la interpretación es arbitraria, ninguna interpretación satisface φ_1.
2. Es satisfactible. Basta con tomar cualquier interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio tenga al menos dos elementos, como por ejemplo. $D = \mathcal{I}(\text{ dom }) = \{0, 1\}$ (no nos importa la interpretación de S pues no se utiliza en esta fórmula). Sea a un elemento arbitrario del dominio (por ejemplo, 0 o 1 en D). Por generalización universal, basta demostrar que $\exists y \exists z[\neg(a = y) \wedge (a = z \vee y = z)]$. Como el dominio tiene al menos dos elementos distintos, sea b algún otro elemento del dominio (por ejemplo, $1 - a$ en D). Luego, notemos que $\neg(a = b)$ por cómo lo escogimos, y además trivialmente $(b = b)$, por lo que también es cierto que $(a = b \vee b = b)$. Aplicando generalización existencial dos veces, obtenemos lo mencionado.
3. Es satisfactible. Consideremos una interpretación $\mathcal{I}$ dada por $\mathcal{I}$ donde $D = I(\text{ dom }) = \{0\}$ y el predicado S^D satisfecho por $\{(0, 0, 0)\}$. Se tiene entonces que $\mathcal{I} \models \varphi_3(0)$, por lo que φ_3 es satisfactible.