Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 1 - Inducción

16 de agosto de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

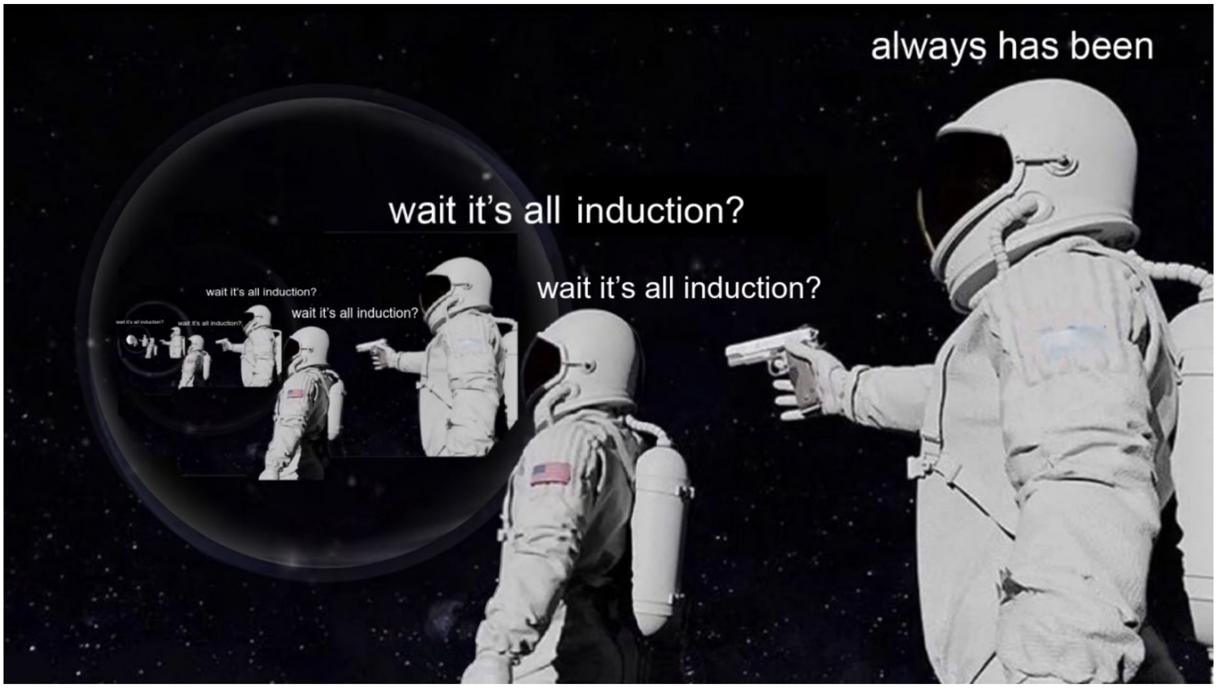
- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propieddad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1) es verdadero$"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.

3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $k+1$. $(p(i)\forall i \leq k) \implies p(k+1)$.

- Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

- **Inducción Estructural:** Se utiliza cuando se quiere demostrar una propiedad en una estructura que está definida inductivamente (la inducción simple es un caso particular de inducción estructural), por ejemplo en listas enlazadas, en arboles, grafos, etc. Se utiliza BI, HI y TI de la misma forma que en la inducción simple.

1. El meme del día



2. Inducción Simple

Ejercicio A

Demuestre que para todo $n \geq 0$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Ejercicio B

Demuestre que, si se tiene un conjunto de n lineas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes, entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.

3. Inducción Fuerte

Ejercicio A

Teorema: $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.
Demostración por inducción fuerte:
BI: El caso base se cumple claramente ya que $\pi^0 = 1$.
HI: Supongamos que $\pi^k = 1$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

TI: PD: $\pi^n = 1$.
Se tiene que $\pi^n = \frac{\pi^{n-1} \cdot \pi^{n-1}}{\pi^{n-2}}$. Tanto $n-1$ como $n-2$ son valores de k válidos según HI, por lo que se tiene que $\pi^{n-1} = 1$ y $\pi^{n-2} = 1$. Reemplazando en la ecuación anterior, $\pi^n = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Con ello, concluímos por inducción fuerte que $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Salva a las matemáticas de ser destruidas: encuentra el error en la demostración anterior.

Ejercicio B

Demuestre el teorema fundamental de la aritmética: Todo número natural mayor a 1 puede ser representado de forma única como un producto de números primos.

4. Inducción Estructural

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $| * | : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $| \bullet | = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$