



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 3

23 de septiembre de 2024

2º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - M. Romero

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega:** Hasta las 23:59 del 02 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
 - Esta tarea debe ser hecha completamente en \LaTeX . Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
 - Debe usar el template \LaTeX publicado en la página del curso.
 - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. **Hint:** Utilice `\newpage`
 - Los archivos que debe entregar son el archivo PDF correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un zip con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

- (a) Sean φ, ψ, θ fórmulas proposicionales, y Σ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.
- (b) Sean Σ, Σ' conjuntos de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional. Demuestre que si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$.
- (c) Nos gustaría demostrar en lógica proposicional la siguiente propiedad conocida:

Suponga que f es una función inyectiva de A a B y que A y B son conjuntos finitos con la misma cantidad de elementos. Entonces f debe ser sobreyectiva.

Formularemos esto para el caso en que A y B tienen dos elementos, digamos que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. Consideremos las siguientes variables proposicionales $P = \{p_{1,a}, p_{1,b}, p_{2,a}, p_{2,b}\}$, y las siguientes fórmulas proposicionales:

$$\begin{aligned}\varphi_f &= (p_{1,a} \vee p_{1,b}) \wedge (p_{1,a} \rightarrow \neg p_{1,b}) \wedge (p_{1,b} \rightarrow \neg p_{1,a}) \wedge \\ &\quad \wedge (p_{2,a} \vee p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \rightarrow \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,b} \rightarrow \neg p_{2,a}) \\ \varphi_i &= (p_{1,a} \rightarrow \neg p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \rightarrow \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \rightarrow \neg p_{1,a}) \wedge (p_{2,b} \rightarrow \neg p_{1,b}) \\ \varphi_s &= (p_{1,a} \vee p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \vee p_{2,b})\end{aligned}$$

Note que las variables en P representan una posible función de A a B : si $p_{x,y}$ es verdadero, entonces x es asignado a y . La fórmula φ_f expresa que las variables realmente representan una función. Las fórmulas φ_i y φ_s expresan que la función es inyectiva y sobreyectiva, respectivamente. Utilizando el método de resolución visto en clases, demuestre que $\{\varphi_f, \varphi_i\} \models \varphi_s$.

Pregunta 2

Nos gustaría modelar una situación en donde tenemos usuarios en una red social. Algunos usuarios pueden ser bots. Los usuarios se pueden seguir entre ellos, y también se pueden bloquear. Para esto consideraremos un predicado unario Bot , y tres predicados binarios S , B , $=$. También consideraremos la siguiente interpretación \mathcal{I} en la lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(dom) &= \text{conjunto de todos los usuarios} \\ \mathcal{I}(Bot(x)) &= x \text{ es un bot} \\ \mathcal{I}(S(x, y)) &= x \text{ sigue a } y \\ \mathcal{I}(B(x, y)) &= x \text{ bloquea a } y \\ \mathcal{I}(x = y) &= x \text{ es igual a } y\end{aligned}$$

Para cada caso, escriba una fórmula en la lógica de predicados que exprese la propiedad pedida. En cada caso, explique brevemente por qué su fórmula es correcta.

- (a) Ninguna persona se puede seguir a sí misma.
- (b) Existen dos usuarios con exactamente los mismos seguidores.
- (c) Es imposible que un usuario x siga y bloquee, al mismo tiempo, a otro usuario y .
- (d) Todo usuario debe seguir a alguien, y debe ser seguido por alguien.
- (e) Existe un único bot que no es bloqueado por nadie.
- (f) Todo usuario que no es un bot tiene al menos 3 seguidores.