Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 5 - Lógica de Predicados y Demostraciones

13 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica de predicados?**

  La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

  Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

  La lógica de predicados tiene dos componentes clave: el dominio y la interpretación.

  - Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
  - Interpretadores: sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula e I una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que I satisface φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$:

    $$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

    si $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según I.

- **Conceptos importantes de lógica de predicados:**
  - Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
  - Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
  - Cuantificadores: $\forall$ (para todo) o $\exists$ (existe).

- Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

  $$\varphi \equiv \psi$$

  si para toda interpretación I y para todo $a_1, \dots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

  $$I \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

  $$\Sigma \models \varphi$$

  si para toda interpretación I y $a_1, \dots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

1. Lógica de Predicados

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

Solución
Demostraremos cada dirección de la doble implicancia por separado:

1. $\rightarrow$: Por contrapositivo, supongamso que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible. Esto significa que existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Por definición de satisfacibilidad, se tiene que $\mathcal{I} \models \Sigma \wedge \mathcal{I} \models \neg\varphi$. Luego, $\mathcal{I} \models \Sigma \wedge \mathcal{I} \not\models \varphi$, con lo que concluímos que $\Sigma \not\models \varphi$, que es lo que queríamos demostrar.
2. $\leftarrow$: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\mathcal{I} \models \Sigma$, necesariamente $\mathcal{I} \not\models \neg\varphi$, y luego $\mathcal{I} \models \varphi$. Concluimos entonces que $\Sigma \models \varphi$.

2. Lógica de Predicados

Sea $R(\cdot,\cdot)$ un predicado binario. Considere el siguiente conjunto de fórmulas en lógica de predicados:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\forall x \exists y(R(x,y)),\\ &\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x)),\\ &\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z))\}\end{aligned}$$

y la fórmula $\varphi = \forall x(R(x,x))$. Demuestre que $\Sigma \models \varphi$.

Solución
Por teorema, se tiene que $\Sigma \models \varphi$ si y solo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente. Demostraremos la inconsistencia de este último conjunto por resolución.
En primer lugar, es necesario pasar las fórmulas a CNF para trabajar con resolución.

Sea $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\forall x \exists y (R(x,y)) && \in \Sigma', \text{ ya está en CNF}\\
&\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)) && \in \Sigma'\\
\equiv &\forall x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)) && \text{está en CNF}\\
&\forall x \forall y \forall z ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)) && \in \Sigma'\\
\equiv &\forall x \forall y \forall z ((\neg (R(x,y) \wedge R(y,z)) \vee R(x,z)) && \\
\equiv &\forall x \forall y \forall z ((\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)) && \text{está en CNF}\\
&\neg \forall x (R(x,x)) && \in \Sigma'\\
\equiv &\exists x \neg (R(x,x)) && \\
\equiv &\exists x (\neg R(x,x)) && \text{está en CNF}
\end{aligned}
$$

Al aplicar resolución sobre un conjunto de fórmulas en lógica de predicados hay que ser muy cuidadoso. En el proceso se instancian las variables de los cuantificadores gracias a especificación existencial y universal. En la especificación existencial solo se pueden instanciar variables que no han sido utilizadas, mientras que en la especificación universal, como la fórmula respectiva se cumple "para toda" instancia de la variable, se pueden elegir variables ya instanciadas anteriormente, ya sea por especificación existencial o universal. Por esto, en general, es necesario aplicar todas las especificaciones existenciales al inicio de la demostración por resolución, para después tener la libertad de instanciar las variables de las especificaciones universales de manera conveniente y válida.
Por resolución, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&(1) \exists x (\neg R(x,x)) && \in \Sigma'\\
&(2) \neg R(a,a) && \text{especificación existencial en (1)}\\
&(3) \forall x \exists y (R(x,y)) && \in \Sigma'\\
&(4) R(a,b) && \text{especificación universal y existencial en (3)}\\
&(5) \forall x \forall y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)) && \in \Sigma'\\
&(6) \neg R(a,b) \vee R(b,a) && \text{especificación universal doble en (5)}\\
&(7) R(b,a) && \text{resolución de (4) y (6)}\\
&(8) \forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \vee \neg R(y,z) \vee R(x,z)) && \in \Sigma'\\
&(9) \neg R(a,b) \vee \neg R(b,a) \vee R(a,a) && \text{especificación universal triple en (8)}\\
&(10) \neg R(b,a) \vee R(a,a) && \text{resolución de (4) y (9)}\\
&(11) R(a,a) && \text{resolución de (7) y (10)}\\
&(12) \square && \text{resolución de (2) y (11)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, por resolución concluímos que $\Sigma' = \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, y por teorema, que $\Sigma \models \varphi$.

3. Modelación

Para esta pregunta considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x,y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &\coloneqq \text{Personas}\\
\mathcal{I}(R(x)) &\coloneqq x \text{ conoce el cahuin}\\
\mathcal{I}(C(x,y)) &\coloneqq x \text{ le contó el cahuin a } y\\
\mathcal{I}(x = y) &\coloneqq x \text{ es igual a } y
\end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el cahuin y otra que no" se puede definir con la fórmula $\exists x.\exists y.(R(x) \wedge \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cachuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.

Solución

1. Si una persona conoce el cachuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
$$\forall x \forall y (R(x) \wedge C(x,y) \rightarrow R(y))$$
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
$$\neg \exists x (R(x) \wedge C(x,x))$$
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
$$\exists x (R(x) \wedge \forall y \neg C(y,x))$$
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.
$$\neg \exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x) \wedge C(x,y) \wedge C(y,z) \wedge C(z,x))$$

4. Métodos de demostración

1. Demuestre que $\log_2 3$ es irracional.
2. Demuestre que si $x^2 - 6x + 5$ es par entonces x es impar.
3. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $5 \nmid xy$, entonces $5 \nmid x$ y $5 \nmid y$.
   Nota: el símbolo | denota divisibilidad. Con $a, b \in \mathbb{Z}$, si a divide a b, o en otras palabras, si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$, entonces escribimos $a|b$.

Solución

1. Sabemos que el que un número sea racional significa que puede ser expresado como una fracción de enteros. Es claro que si $\log_2 3$ no es irracional entonces es racional. Luego, podemos usar demostración por contradicción, asumiendo que es racional, utilizando nuestro conocimiento sobre los racionales, y llegando a algo absurdo.
   Supongamos que $\log_2 3$ es racional. Esto quiere decir que $\exists a, b \in \mathbb{Q}$ tal que $\log_2 3 = \frac{a}{b}$. Notemos que, por definición de log, necesariamente $\log_2 3 > 0$, por lo que $a > 0$ y $b > 0$ en la forma irreducible de la fracción. Se tiene que
   $$\begin{aligned} \log_2 3 &= \frac{a}{b} && \text{/ elevamos 2 a ambos lados} \\ 3 &= 2^{\frac{a}{b}} && / \quad \hat{}\, b \\ 3^b &= 2^a \end{aligned}$$
   Como $b \in \mathbb{Z}, b > 0$, el lado izquierdo es un número impar. Sin embargo, como $a \in \mathbb{Z}, a > 0$, el lado derecho es un número par, con lo que se obtiene una contradicción. Concluímos que $\log_2 3$ no puede ser racional, y como por definición de logaritmo es un número real, debe ser irracional.

2. Hacerlo por demostración directa sería trabajoso: habría que despejar x, llevando a una ecuación con una raíz de cuyo argumento no se sabe nada. Como se quiere demostrar una implicancia, una opción es hacerlo por contrapositivo.
   Queremos demostrar que $(\neg(x \text{ es impar})) \to \neg(x^2 - 6x + 5 \text{ es par})$. Supongamos que x es par, i.e. $\exists a \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2a$. Luego, $x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 5 = 2(2a^2 - 6a + 4) + 1$, que es impar, i.e. no es par, con lo que se termina la demostración.
3. Nuevamente, tenemos una implicancia, por lo que el contrapositivo es una opción. Notemos que si hicieramos una demostración directa, nuestra suposición sería que 5 no divide a xy. Esto significa que no existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot 5 = xy$. Matemáticamente, es difícil usar el hecho de que algo no existe para una demostración directa.
   Con esto en consideración, notemos que si demostraramos por contrapositivo obtendríamos la negación de dos afirmaciones de no-divisibilidad, es decir,

nociones de divisibilidad. Esto nos entregaría información de la *existencia* de un $k \in \mathbb{Z}$, algo mucho más concreto para usar en nuestra demostración.
Por contrapositivo, tenemos que demostrar que $\neg(5 \not| x \wedge 5 \not| y) \rightarrow (5 \not| xy)$. Por De Morgan, el lado izquierdo es equivalente a $(\neg(5 \not| x) \vee \neg(5 \not| y)) \equiv (5|x \vee 5|y)$. Por otra parte, el lado derecho queda $(5|xy)$. Como tenemos una disyunción en el lado izquierdo de la implicancia, debemos hacer una demostración por casos.

- $5|x$: en este caso, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \cdot 5 = x$. Multiplicando a ambos lados por y, se obtiene que $(ky) \cdot 5 = xy$, con lo que, tomando $k' = ky$, por definición de divisibilidad concluímos que $5|xy$.
- $5|y$: análogo por conmutatividad de la multiplicación.

Estos son todos los casos posibles, y con ello finaliza la demostración por contrapositivo.