Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

12 de agosto de 2024

2º semestre 2024 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - M. Romero

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 19 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

(a) Demuestre por inducción que para todo número natural $n \geq 0$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

(b) Demuestre por inducción que para todo natural $n \geq 1$ y para todo natural $m \geq 1$, se tiene que:

$$(m+1)^n > mn$$

(*Hint:* Aplique inducción sobre n, tomando un m arbitrario.)

Solución

(a) Demostraremos por inducción simple que para todo número natural $n \geq 0$ se cumple que:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

BI: Para $n = 0$, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{0} 2^i \\
&= 2^0 \\
&= 1 \\
&= 2 - 1 \\
&= 2^{0+1} - 1 \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple la propiedad.

HI: Sea $n \geq 0$ y supongamos que cumple la propiedad, es decir, que

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

TI: Queremos demostrar que la propiedad también se cumple para $n+1$, es decir, que

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} && \text{(HI)} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Concluimos que la propiedad se cumple para todo $n \geq 0$.

(b) Sea $m \geq 1$. Demostraremos por inducción simple sobre n que para todo natural $n \geq 1$ y para todo natural $m \geq 1$ se cumple que

$$(m+1)^n > m \cdot n$$

BI: Para $n = 1$, notemos que

$$\begin{aligned}
(m+1)^n &= (m+1)^1 \\
&= (m+1) \\
&> m \\
&= m \cdot 1 \\
&= m \cdot n
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple la propiedad.

HI: Sea $n \geq 1$ y supongamos que cumple la propiedad, es decir, que

$$(m+1)^n > m \cdot n$$

TI: Queremos demostrar que la propiedad también se cumple para $n+1$, es decir, que

$$(m+1)^{n+1} > m \cdot (n+1)$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned}
(m+1)^{n+1} &= (m+1)^n \cdot (m+1) \\
&> mn \cdot (m+1) && \text{(HI)} \\
&= m \cdot (m \cdot n + n) \\
&\geq m \cdot (n+n) && (\text{Pues } m \geq 1) \\
&\geq m \cdot (n+1) && (\text{Pues } n \geq 1)
\end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. Como escogimos $m \geq 1$ arbitrario, concluimos que para todo natural $n \geq 1$ y para todo natural $m \geq 1$ se cumple la desigualdad

$$(m+1)^n > m \cdot n$$

Pauta (6 pts.)

(a)

- 0.5 pt. por demostrar la base de inducción
- 0.5 pt. por plantear correctamente la hipótesis de inducción
- 1.75 pts. por demostrar correctamente la tesis de inducción
- 0.25 pt por concluir correctamente que la propiedad se cumple para todos los naturales

(b)

- 0.5 pt. por demostrar la base de inducción (nótese que comienza en $n = 1$).
- 0.5 pt. por plantear correctamente la hipótesis de inducción
- 1.75 pts. por demostrar correctamente la tesis de inducción
- 0.25 pt por concluir correctamente que la propiedad se cumple para todos los naturales n y m con $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio de los correctores.

Pregunta 2

Sea $b \geq 2$ un número natural fijo. Decimos que un número natural $n \geq 0$ *se puede escribir en base* b si existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que

$$n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$$

Demuestre por inducción fuerte que todo número natural $n \geq 0$ se puede escribir en base b.

Solución

Existen posibles soluciones (sólo se corregirá una por tarea por lo que los puntos no son acumulables):

Opción 1

Sea b un natural mayor o igual a 2.

(a) **BI:** Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$).

Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.

(b) **HI:** Sea n natural. Suponemos que para todo natural p tal que $p < n$, existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $p = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.

(c) **TI:** El natural n se puede escribir $n = p \cdot b + r$ donde p es el resultado de la división entera entre n y b. Es decir, el mayor p que cumple con $n = p \cdot b + r$ (porque $b \geq 2$). Así, tenemos que el resto r cumple con $r < b$.

Luego, utilizando la **HI**, se tiene que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \left(b \cdot \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i\right) + r \cdot 1 = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^{i+1} + r \cdot b^0$. Notar que en la sumatoria el exponente de b más chico es b^1, por lo que no comparte términos con el resto acompañado por b^0.

Finalmente, utilizando los casos base para el resto y las constantes de la hipótesis, existen $\ell + 1$ números naturales $k'_0, \ldots, k'_\ell \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que:

- $k'_0 = r$,
- para $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, $k'_i = k_{i-1}$ y
- $n = \sum_{i=0}^{\ell} k'_i \cdot b^i$.

Se concluye por principio de inducción fuerte que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$. $\square$

Opción 2

Sea b un natural mayor o igual a 2.

(a) **BI:** Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$).

Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$. (En esta solución basta demostrar sólo el caso del $n = 0$.)

(b) **HI:** Sea n natural. Suponemos que para todo natural p tal que $p < n$, existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $p = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.

(c) **TI:** Desde el natural n se puede obtener el mayor j que cumple con $n >= b^j$ (porque $b \geq 2$). Luego, tomando el mayor k que cumple con $n >= k \cdot b^j$. Si $n = k \cdot b^j$, ya encontramos como escribirlo en base b.

Si $n > k \cdot b^j$, tomamos p que cumple con $n = k \cdot b^j + p$. Notar que $p < b^j$ ya que en otro caso se podría tomar un k mayor.

Utilizando la **HI**, se tiene que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = k \cdot b^j + \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$. Como $p < b^j$, necesariamente $l \leq j$ por lo que b^j no aparece en la sumatoria.

Finalmente, existen $j+1$ números naturales $k'_0, \ldots, k'_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que:

- $k'_j = k$,
- para $i \in \{\ell, \ldots, j-1\}$, $k'_i = 0$,
- para $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$, $k'_i = k_i$ y
- $n = \sum_{i=0}^{j} k'_i \cdot b^i$.

Se concluye por principio de inducción fuerte que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$. $\square$

Opción 3

Sea b un natural mayor o igual a 2.

(a) **BI:** Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$).

Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$. (En esta solución basta demostrar sólo el caso del $n = 0$ y $n = 1$.)

(b) **HI:** Sean n un natural. Suponemos que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.

(c) **TI:** Por **BI**, el natural $n+1$ se puede escribir como $n+1 = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i + 1 \cdot b^0$. Sin embargo, puede ocurrir que $k_0 + 1 = b$ por lo que no se puede definir una nueva constante como $k_0' = k_0 + 1$. Debemos demostrar que apesar de que hay un acarreo (carry), el número se puede escribir en base b. Tenemos que para cualquier exponente j se cumple que si $k = b$, entonces $k \cdot b^j = b^{j+1}$.

Dadas las constantes $k_0, \ldots, k_{\ell-1}$, el algoritmo de propagación de carry que calcula el sucesor es tal que: si $k_0 + 1 < b$ termina. Si $k_0 + 1 = b$, la constante que acompaña a b^0 se define como 0 y se le suma 1 a k_1. Luego, iterativamente si para algún i que recibe el acarreo se tiene que $k_i + 1 = b$, entonces la constante que acompaña a b^i se define como 0 y se propaga el acarreo a $i+1$. Si $k_i + 1 < b$, el algoritmo termina.

Un algoritmo siempre debe terminar y debe producir el output correcto. Sabemos que es correcto porque siempre se cumple que $k \cdot b^j = b^{j+1}$. Y sabemos que siempre termina porque en el peor caso el acarreo se debe propagar hasta $k_\ell = 1$.

Sean $k_0', \ldots, k_{\ell-1}', k_\ell'$ las constantes resultantes de propagar el acarreo utilizando el algoritmo de sucesor en las constantes $k_0, \ldots, k_{\ell-1}$. Notar que k_ℓ' sólo puede valer 0 o 1. Finalmente, existen $l+1$ constantes tal que $n+1 = \sum_{i=0}^{\ell} k_i' \cdot b^i$.

Se concluye por principio de inducción simple que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$. $\square$

Pauta (6 pts.)

(a) 2 pts.

(b) 1 pts.

(c) 3 pts.