

# Teoría de grafos

Clase 19

IIC 1253

Prof. Miguel Romero

# Outline

**Introducción**

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

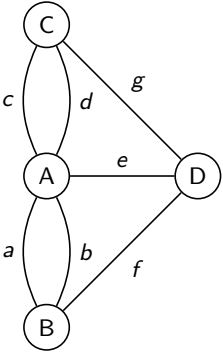
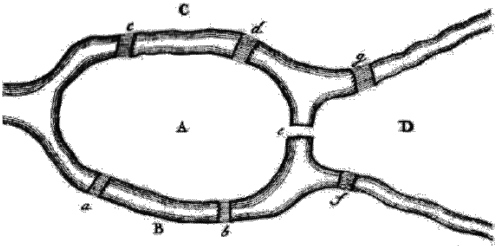
Representación de grafos

Epílogo

# ¿Por qué aprender grafos?

- Problemas de conectividad
- Optimización
- Bases de datos
- Redes sociales
- Manejo de concurrencia
- En general, **todo lo que se representa con relaciones binarias!**

# Redes



# Motivación

Una línea aérea tiene una lista de vuelos entre ciudades del mundo, y desea saber cuáles son los posibles viajes que se pueden realizar combinando vuelos. La lista de vuelos es la siguiente:

Origen	Destino
Stgo	BsAs
Stgo	Miami
Stgo	Londres
BsAs	Stgo
Miami	Stgo
Miami	Londres
Londres	Stgo
Londres	Paris
Frankfurt	Paris
Frankfurt	Moscu
Paris	Moscu
Moscu	Frankfurt

# Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos

# Outline

Introducción

**Definiciones básicas**

Isomorfismo de grafos

Representación de grafos

Epílogo

# Grafos

## Definición

Un **grafo**  $G = (V, E)$  es un par donde  $V$  es un conjunto, cuyos elementos llamaremos **vértices** o **nodos**, y  $E$  es una relación binaria sobre  $V$  (es decir,  $E \subseteq V \times V$ ), cuyos elementos llamaremos **aristas** o **arcos**.

Esta definición es bastante general.

- Los grafos así definidos son llamados **grafos dirigidos**.

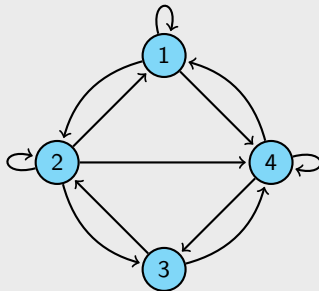
Si un grafo es dirigido, las aristas se dibujan con flechas.



# Grafos

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$ .



# Grafos

Dado un grafo  $G = (V, E)$ :

## Definición

Un **rufo** (o *loop*) es una arista  $(x, y) \in E$  tal que  $x = y$ . Es decir, es una arista que conecta un vértice con sí mismo.

## Definición

Dos aristas  $(x, y) \in E$  y  $(z, w) \in E$  son **paralelas** si  $x = w$  e  $y = z$ . Es decir, si conectan a los mismos vértices.

El ejemplo anterior tiene rulos y aristas paralelas.

# Grafos

## Definición

Un grafo  $G = (V, E)$  es **no dirigido** si toda arista tiene una arista paralela.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación  $E$ ?

## Definición (alternativa)

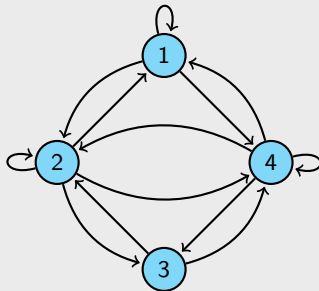
Un grafo  $G = (V, E)$  es **no dirigido** si  $E$  es simétrica.

Si un grafo es no dirigido, se dibuja con trazos en lugar de flechas.

# Grafos

## Ejemplo

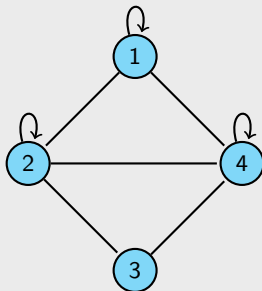
$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ .



# Grafos

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ .



# Grafos

## Definición

Un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  es **simple** si no tiene rulos.

¿Cómo se expresa esto en términos de la relación  $E$ ?

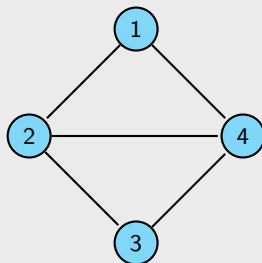
## Definición (alternativa)

Un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  es **simple** si  $E$  es irrefleja.

# Grafos

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ .



# Grafos

De ahora en adelante (a menos que se explicita otra cosa), cuando hablemos de grafos estaremos refiriéndonos a grafos simples, no dirigidos, no vacíos y finitos.

- $V \neq \emptyset$  y  $|V| = n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .
- $E$  es simétrica e irrefleja.

Una pequeña definición:

## Definición

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , dos vértices  $x, y \in V$  son **adyacentes** o **vecinos** si  $(x, y) \in E$ .



# Outline

Introducción

Definiciones básicas

**Isomorfismo de grafos**

Representación de grafos

Epílogo

# Isomorfismo

## Definición

Dos grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  son **isomorfos** si existe una función biyectiva  $f : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $(x, y) \in E_1$  si y sólo si  $(f(x), f(y)) \in E_2$ .

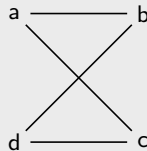
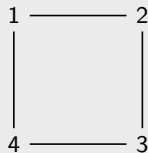
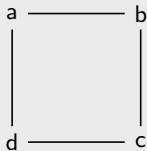
En tal caso:

- Diremos que  $f$  es un **isomorfismo** entre  $G_1$  y  $G_2$ .
- Escribiremos  $G_1 \cong G_2$ .

Dos grafos son isomorfos cuando tienen "*la misma forma*"

# Isomorfismo

## Ejemplo



# Isomorfismo

## Teorema

$\cong$  es una relación de equivalencia.

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

# Isomorfismo

## Teorema

$\cong$  es una relación de equivalencia.

### Demostración:

- **Refleja:** Sea  $G = (V, E)$  tomemos la función  $f : V \rightarrow V$  dada por  $f(x) = x$ . Luego, de manera trivial podemos inferir que  $G \cong G$ .
- **Simétrica:** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  tales que  $G_1 \cong G_2$ . Por definición existe  $f : V_1 \rightarrow V_2$  biyectiva tal que todo  $(u, v) \in E_1$  si y sólo si  $(f(u), f(v)) \in E_2$  (\*). Además, como  $f$  es biyectiva, sabemos que es invertible. Ahora mostraremos que  $f^{-1}$  cumple la definición de isomorfismo.
  - ( $\Rightarrow$ ) Sea  $(u_2, v_2) \in E_2$  como  $f$  es biyectiva podemos expresarlo como  $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$  con  $u_1, v_1 \in V_1$ . Luego, por (\*) obtenemos  $(u_1, v_1) \in E_1$ . Como  $f^{-1}$  es inversa obtenemos que  $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$ .
  - ( $\Leftarrow$ ) Sea  $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$ , podemos reescribirlo como  $(u_1, v_1) \in E_1$  con  $u_1, v_1 \in V_1$ . Luego por (\*) obtenemos  $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$  lo que es equivalente a  $(u_2, v_2) \in E_2$ .

# Isomorfismo

## Teorema

$\cong$  es una relación de equivalencia.

- **Transitiva:** Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  y  $G_3 = (V_3, E_3)$  tales que  $G_1 \cong G_2$  y  $G_2 \cong G_3$ . Por definición, sabemos que existen  $f : V_1 \rightarrow V_2$  y  $g : V_2 \rightarrow V_3$  biyectivas tales que

$$(u_1, v_1) \in E_1 \text{ si y sólo si } (f(u_1), f(v_1)) \in E_2 \text{ (i)}$$

$$(u_2, v_2) \in E_2 \text{ si y sólo si } (g(u_2), g(v_2)) \in E_3 \text{ (ii)}$$

Sea  $u_1, v_1 \in V_1$  tales que  $(u_1, v_1) \in E_1$ , por (i) sabemos que  $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ . Luego, si aplicamos (ii) obtenemos  $(g(f(u_1)), g(f(v_1))) \in E_3$ . Por lo tanto, podemos utilizar  $g \circ f$  como la función biyectiva y concluimos que  $G_1 \cong G_3$ .

# Isomorfismo

El concepto de isomorfismo nos permite concentrarnos en la estructura subyacente de los grafos.

- Podemos independizarnos de los nombres de los vértices.
- No importa cómo dibujemos los grafos.

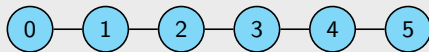
Definiremos familias de grafos a partir de isomorfismos

# Clases de grafos

## Definición (informal)

Un **camino** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en una línea tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en la línea.

## Ejemplo





# Clases de grafos

## Definición (formal)

Considere un grafo  $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$ , donde  $V_n^P = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\} \wedge j = i+1\}$ .

Un **camino** (de  $n$  vértices) es un grafo isomorfo a  $G_n^P$ .

Llamaremos  $P_n$  a la clase de equivalencia  $[G_n^P]_{\cong}$   
Los caminos con  $n$  vértices.

Observación:

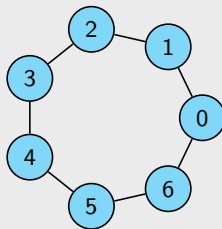
- Asumimos que  $G_n^P$  es no dirigido, a pesar de su definición

# Clases de grafos

## Definición (informal)

Un **ciclo** es un grafo cuyos vértices pueden dibujarse en un círculo tal que dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivos en él.

## Ejemplo



# Clases de grafos

## Definición (formal)

Considere un grafo  $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$ , donde  $V_n^C = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\} \wedge j = i+1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$ .

Un **ciclo** (de  $n$  vértices) es un grafo isomorfo a  $G_n^C$ .

Llamaremos  $C_n$  a la clase de equivalencia  $[G_n^C]_{\cong}$   
Los ciclos con  $n$  vértices.

Observación:

- Asumimos que  $G_n^C$  es no dirigido, a pesar de su definición

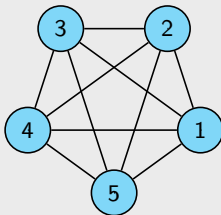
# Clases de grafos

## Definición

Un **grafo completo** es un grafo en el que todos los pares de vértices son adyacentes.

Llamaremos  $K_n$  a la clase de equivalencia de los grafos completos de  $n$  vértices.

## Ejemplo



# Clases de grafos

## Definición

Un grafo  $G = (V, E)$  se dice **bipartito** si  $V$  se puede particionar en dos conjuntos no vacíos  $V_1$  y  $V_2$  tales que para toda arista  $(x, y) \in E$ ,  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ , o  $x \in V_2$  e  $y \in V_1$ .

Es decir:

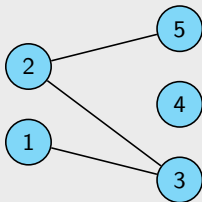
- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- Cada arista une a dos vértices en conjuntos distintos de la partición.

# Clases de grafos

## Definición

Un grafo  $G = (V, E)$  se dice **bipartito** si  $V$  se puede particionar en dos conjuntos no vacíos  $V_1$  y  $V_2$  tales que para toda arista  $(x, y) \in E$ ,  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ , o  $x \in V_2$  e  $y \in V_1$ .

## Ejemplo



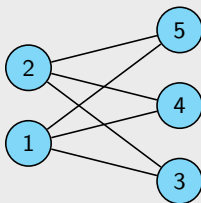
# Clases de grafos

## Definición

Un **grafo bipartito completo** es un grafo bipartito en que cada vértice es adyacente a todos los de la otra partición.

Llamaremos  $K_{n,m}$  a la clase de los grafos bipartitos completos, donde  $n$  y  $m$  son los tamaños de las particiones.

## Ejemplo



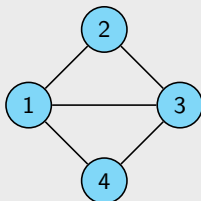
# Más definiciones

Dado un grafo  $G = (V_G, E_G)$ :

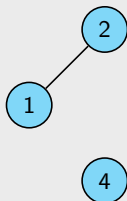
## Definición

Un grafo  $H = (V_H, E_H)$  es un **subgrafo** de  $G$  (denotado como  $H \subseteq G$ ) si  $V_H \subseteq V_G$  y  $E_H \subseteq E_G$ .

## Ejemplo



$G$



$H \subseteq G$



# Más definiciones

Dado un grafo  $G = (V_G, E_G)$ :

## Definición

Un **clique** en  $G$  es un conjunto de vértices  $K \subseteq V_G$  tal que

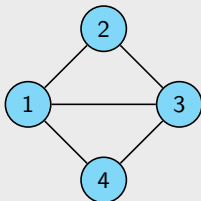
$\forall v_1, v_2 \in K, (v_1, v_2) \in E_G$ .

## Definición

Un **conjunto independiente** en  $G$  es un conjunto de vértices  $K \subseteq V_G$  tal

que  $\forall u, v \in K, (u, v) \notin E_G$ .

## Ejemplo



$G$

$K = \{1, 2, 3\}$  es **clique** en  $G$

$K' = \{2, 4\}$  es un **conj. indep.** en  $G$

# Más definiciones

## Definición

El **complemento** de  $G$  es el grafo  $\overline{G} = (V_G, \overline{E_G})$ , donde  $(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (u, v) \notin \overline{E_G}$ .

## Definición

Un grafo  $G$  se dice **autocomplementario** si  $G \cong \overline{G}$ .

# Más definiciones

## Teorema

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un conjunto  $V' \subseteq V$  es un clique en  $G$  si y sólo si es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .

## Ejercicio

Demuestre el teorema.

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente? Demuestre usando grafos.

# Más definiciones

## Teorema

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , un conjunto  $V' \subseteq V$  es un clique en  $G$  si y sólo si es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .

### Demostración:

- ( $\Rightarrow$ ) Sea  $V' \subseteq V$  un clique en  $G$ . Por definición sabemos que para todo par de vértices  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \in E$ . Por otro lado, por definición de  $\overline{G}$  sabemos que para todo  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \notin \overline{E}$ , y por lo tanto  $V'$  es un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .
- ( $\Leftarrow$ ) Sea  $V' \subseteq V$  un conjunto independiente en  $\overline{G}$ . Por definición sabemos que para todo par de vértices  $u, v \in V'$  ocurre que  $(u, v) \notin \overline{E}$ . Por otro lado, por definición de  $\overline{G}$  sabemos que para todo  $u, v \notin V'$  ocurre que  $(u, v) \in E$ , y por lo tanto  $V'$  es un clique en  $G$ .

# Más definiciones

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

### Demostración:

Sea  $G(V, E)$  con  $|V| = 6$ , buscamos demostrar que  $G$  tiene un clique o un conjunto independiente de tamaño 3. Por el teorema anterior, esto es equivalente a mostrar que  $G$  tiene un clique o que  $\overline{G}$  lo tiene. Por contradicción, suponemos que ni  $G$  ni  $\overline{G}$  tiene el clique. Sea  $v \in V$  tenemos 2 casos:

- **$v$  tiene por lo menos 3 vecinos:** Sean  $x, y, z \in V$  los vecinos de  $v$  tales que  $(v, x), (v, y), (v, z) \in E$ . Una observación importante es que no pueden existir aristas entre  $x, y, z$  dado que de otra manera de generaría un clique de tamaño 3, contradiciendo nuestra hipótesis. Luego,  $x, y, z$  forman un conjunto independiente en  $G$  y por el teorema anterior estos vértices mismos forman un clique en  $\overline{G}$ .

# Más definiciones

## Ejercicio

¿Es cierto que en un conjunto cualquiera de 6 personas, siempre hay 3 que se conocen mutuamente o 3 que se desconocen mutuamente?

- **$v$  tiene menos de 3 vecinos:** En este caso  $v$  no es adyacente con por lo menos 3 vertices de  $G$ . Sean  $x, y, z$  estos vértices tales que  $(v, x), (v, y), (v, z) \notin E$ . Luego,  $x, y, z$  son vecinos de  $v$  en  $\overline{G}$  y podemos aplicar el mismo razonamiento del caso anterior para concluir que  $x, y, z$  forman un clique de tamaño 3 en  $G$ .

Como en ambos casos llegamos a que  $G$  o  $\overline{G}$  cuentan con un clique, esto contradice nuestra hipótesis y por ende  $G$  debe ser tal que tiene un clique de tamaño 3 o un conjunto independiente de tamaño 3.

# Outline

Introducción

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

**Representación de grafos**

Epílogo

# Representación matricial

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , como  $E$  es una relación binaria podemos representarla en una matriz.

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ .

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a  $M_G$  la **matriz de adyacencia** de  $G$ .



# Representación matricial

- Si el grafo es simple, la diagonal sólo contiene ceros.
- Si el grafo es no dirigido, entonces  $M_G = M_G^T$ .
- ¿Cómo puedo obtener  $M_{\overline{G}}$ ?

Estas construcciones solo necesitan operar con los **bits** en la matriz

# Representación matricial

También podemos usar una **matriz de incidencia**  $A_G$ .

- Etiquetamos las aristas de  $G$ .
- Cada fila de la matriz representará a un vértice, y cada columna a una arista.
- Cada posición de la matriz tendrá un 1 si la arista de la columna *incide* en el vértice de la fila.

## Ejemplo

$G = (V, E)$ , donde  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ .

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Outline

Introducción

Definiciones básicas

Isomorfismo de grafos

Representación de grafos

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- Conocer definiciones básicas de grafos
- Aplicar nociones básicas de isomorfismo y subgrafos