Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6

27 de septiembre de 2024

Martín Atria, José Thomas Caraball, Caetano Borges

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de obejtos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B\text{)}$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de A (relativo a $\mathcal{U}$) es

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B,\ A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

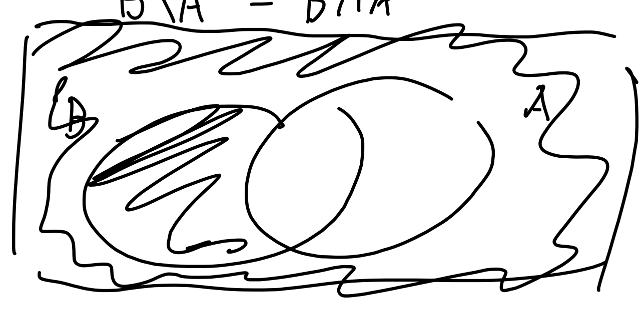
V
x

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x,\ x \notin X$. $X = \varnothing$.

$B \setminus A = B \cap A^c$

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.



Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

$$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

$$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

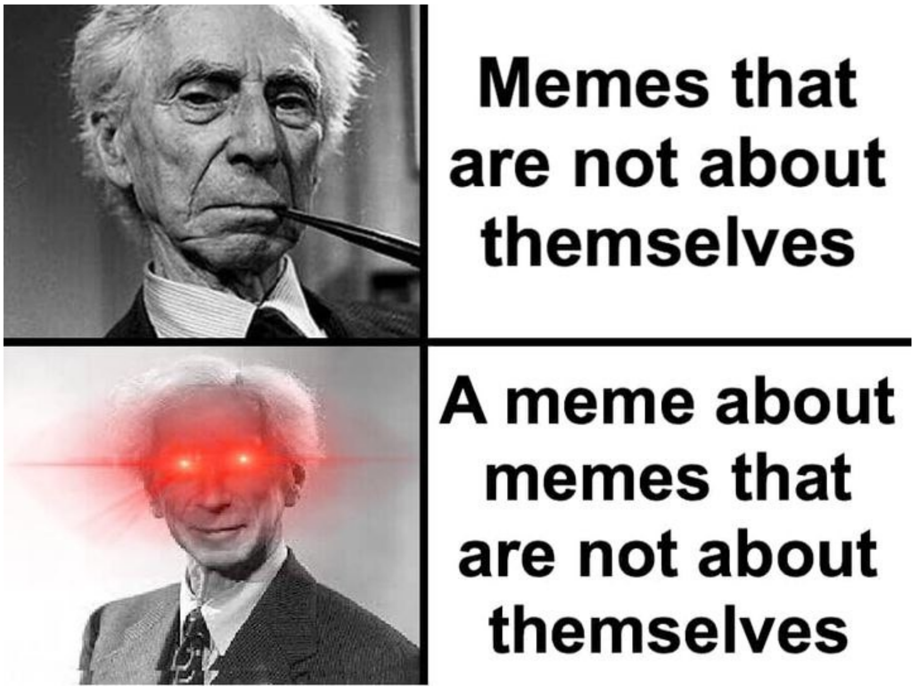
- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Leyes $A \cap B \subseteq A$ $A \cup A' = A$ $A' \subseteq A$

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$
2. Elemento neutro:
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$
3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
7. Leyes de De Morgan:
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. Elemento inverso:
   $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \varnothing$
9. Dominación:
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$

1. Meme del día



M

$M' = \{M \mid \underline{M \notin M}\}$

2. Conjuntos y Producto Cartesiano

1. Sean A, B y C conjuntos no vacíos.
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.
   a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$
2. Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:
   $$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$
   Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.
   $$\text{Si } A\Delta C = B\Delta C \text{ entonces } A = B$$

3. Teoría de Conjuntos

Dado un conjunto A, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \backslash X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. $A \in \mathcal{T}(A)$
3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

2. Conjuntos y Producto Cartesiano

1. Sean A, B y C conjuntos no vacíos.
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.
   a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$
   b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

$A \times B = \{(a,b) / a \in A \wedge b \in B\}$

$\{1,2\} \times \{3,4\}$
$= \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
$(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

a) a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$

$A = \emptyset$ $\quad A \times B = \emptyset$
$B \neq \emptyset$ $\quad B \times A = \emptyset$ $\Big\} =$ $\quad A \neq B$

i) $\leftarrow$: Se tiene que $A = B$.
$A \times B = A \times A = B \times A$

ii) $\rightarrow$: $A \times B = B \times A$. PD: $A = B \equiv A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
Sea $(x,y) \in A \times B$. Por def de $\times$, $x \in A$, $y \in B$
Como $A \times B = B \times A$, $(x,y) \in B \times A$. Con ello, $x \in B$.
Con ello, $y \in A$
$A \subseteq B$. $\wedge$ $B \subseteq A$
$\equiv A = B$. $\blacksquare$

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ $\qquad A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

i) $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C) = \{(x,y) | (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)\}$
Sea $(x,y) \in A \times (B \setminus C)$ un elemento arbitrario.
$x \in A \wedge y \in B \setminus C \equiv x \in A \wedge y \in (B \cap C^c) \equiv x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C^c$

$\equiv x \in A \land y \in B \land y \notin C \equiv x \in A \land x \in A \land y \in B \land y \notin C$

$\equiv (x \in A \land y \in B) \land (x \in A \land y \notin C)$

$\equiv (x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$

$\therefore \quad A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$

ii) $(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$

Sea $(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. PD: $(x,y) \in A \times (B \setminus C)$

$(x,y) \in A \times B \land (x,y) \in (A \times C)$.

Como $(x,y) \in A \times B$, $x \in A$. Como $(x,y) \notin A \times C$ y $x \in A$, necesariamente $y \notin C$ ya que si $y \in C$ entonces $(x,y) \in A \times C$ lo cual es falso. Luego, se tiene que

$x \in A \land y \in B \land y \notin C$

$\equiv x \in A \land y \in (B \setminus C)$

$\equiv (x,y) \in A \times (B \setminus C)$ $\square$

$(A \times B) \setminus (A \times C) \subseteq A \times (B \setminus C)$.

Finalmente, como $A \times (B \setminus C) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times C)$ y $\supseteq$ concluimos que son iguales. $\square$

3. Teoría de Conjuntos

Dado un conjunto A, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \backslash X \text{ es finito}\}$$

$X \subseteq A$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. $A \in \mathcal{T}(A)$
3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

$A = \{1,2\}$ $\qquad \varnothing \subseteq A$

$\varnothing \notin A$

$P(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing$

1 elem $\qquad$ 0 elem $\qquad \varnothing = \{\}$

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$

$\varnothing \subseteq T(A)$. Por teo sabemos que $\varnothing \subseteq A$ y $\therefore \varnothing \in P(A)$

Además, por definición de $T(A)$, si $X \in P(A)$ y $X = \varnothing$ entonces $X \in T(A)$. Concluímos que $\varnothing \in T(A)$

2. $A \in \mathcal{T}(A)$

Se tiene que $A \subseteq A \rightarrow A \in P(A)$

Además es claro que $A \setminus A = \varnothing$ que es finito

concluímos que $A \in T(A)$.

3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$

$$Z = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

$$\bigcup Z = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigwedge_{x \in X}$$

todo $X \in T(A)$ es tales que $X \in P(A)$

$\therefore$ $X \subseteq A$, lo que quiere decir que todo elemento $p \in X$ es tal que $p \in A$.

$\bigcup T(A) \subseteq A$. Por def de $P(A)$,

$\bigcup T(A) \in P(A)$

PD: $\bigcup T(A) = A$ ya que $A \in T(A)$

Por contradicción, digamos que $A \not\subseteq T(A)$.

$\exists y (y \in A \wedge y \notin T(A))$

$X \in T(A)$, $X \neq \emptyset$

$X \cup \{y\} \subseteq A$ ya que $X \subseteq A$ y $y \in A$.

Además, $A \setminus X$ es finito por def de $T(A)$

Consecuentemente, $A \setminus (X \cup \{y\}) = A \setminus X \cap A \setminus \{y\}$

$A \setminus (X \cup \{y\})$ es finito. Por lo tanto,

$X \cup \{y\} \in T(A)$

$y \in \bigcup T(A)$ $\divideontimes$

Por contradicción, $A \subseteq T(A)$. Como también $T(A) \subseteq A$, concluimos que $\bigcup T(A) = A$. Por (2), $A \in T(A)$, y por lo tanto $\bigcup T(A) \in T(A)$ $\square$

4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.

$X = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$

$\bigcap X = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$

Como $B_i \in T(A)$, todo $b \in B_i$ es tal que $b \in A$. Por def de $\cap$, $\bigcap X \subseteq A$. $\bigcap X \in P(A)$.

PD: $A \setminus \bigcap X$ es finito.

$$\begin{aligned}
A \setminus \bigcap X &= A \cap (\bigcap X)^c \\
&= A \cap (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)^c \\
&= A \cap (B_1^c \cup B_2^c \cup \dots \cup B_n^c) \\
&= (A \cap B_1^c) \cup (A \cap B_2^c) \cup \dots \cup (A \cap B_n^c) \\
&= (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2) \cdots (A \setminus B_n)
\end{aligned}$$

Como $B_i \in T(A)$, $A \setminus B_i$ es finito.

Entonces tenemos una unión de un número finito (n) de conjuntos finitos ($A \setminus B_i$)

La unión de un número finito de conjuntos finitos es necesariamente finita.

Concluimos que $A \setminus \bigcap X$ es finito.

Y como $\bigcap X \in P(A)$ y $A \setminus \bigcap X$ es finito, concluimos que $\bigcap X \in T(A)$. ∎