

Inducción simple y fuerte

Clase 1

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Obertura

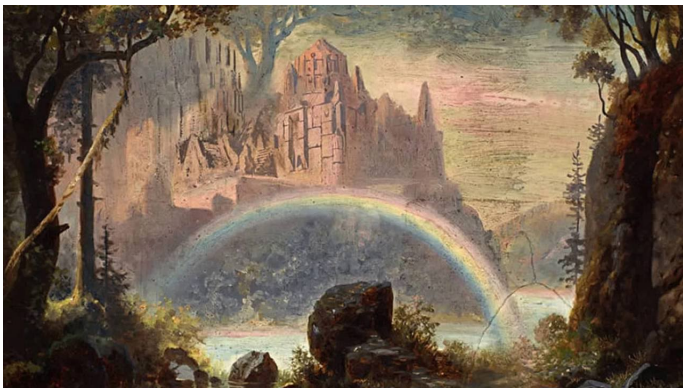
Inducción simple

Inducción fuerte

Epílogo

Fundamentos

Inducción y lógica



Diagnóstico

Lenguaje matemático

¿Qué representan los siguientes símbolos matemáticos?

- $x \in B$ (x pertenece a B)
- $x \notin B$ (x no pertenece a B)
- $\exists x$ (Existe x)
- $\forall x$ (Para todo x)
- $A \subseteq B$ (A es subconjunto de B)
- $A \subsetneq B$ (A es subconjunto propio de B)

Asumiremos como conocidos estos símbolos.

Los estudiaremos en detalle más adelante.

El punto de partida del curso

Las matemáticas discretas se encargan del estudio de **estructuras discretas**.

- ¿Cuál es la estructura discreta más sencilla?
- ¿Para qué podemos usarla?

Los **naturales** serán la base de nuestro trabajo.

Nuestra primera “definición”

Definición (*en chileno*)

Los **números naturales**, denotados por \mathbb{N} , son los números que sirven para contar los elementos de un conjunto.

¿Qué propiedades tiene este conjunto?

Axiomas de \mathbb{N}

Axiomas de Peano (extracto)

1. El número $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n + 1) \in \mathbb{N}$ donde $n + 1$ es el sucesor de n .
3. Todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$ tiene un antecesor en \mathbb{N} .
4. **Principio del buen orden:**
Todo subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene un menor elemento.

¿El **cero** está en los naturales?

Una propiedad interesante y útil

Hoy nos centraremos en una propiedad **intrínseca** de los naturales:

- Se deduce de los axiomas (veremos que es más potente que una simple deducción).
- Nos permitirá demostrar propiedades en \mathbb{N} .
- Nos permitirá definir objetos.

Esta propiedad es el **Principio de inducción**.

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción simple.
- Conocer diferentes formulaciones del principio.
- Aplicar el principio para demostrar propiedades.
- Demostrar una de las equivalencias de estos principios.

Outline

Obertura

Inducción simple

Inducción fuerte

Epílogo

Principios de inducción: PBO

Principio del buen orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento, i.e.

$$A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A. \forall y \in A. (x \leq y)$$

Paréntesis

El símbolo \Rightarrow denota una **implicancia**.

- Lo que está antes de \Rightarrow es el **antecedente**
- Lo que está después de \Rightarrow es el **consecuente**

¿Es cierto el PBO en los racionales? ¿Y en los reales?

Principios de inducción: PBO

Proposición

El PBO **no es cierto** en \mathbb{Q} .

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Observamos que:

- A no es vacío y
- $A \subseteq \mathbb{Q}$

Supongamos por contradicción que \mathbb{Q} cumple el PBO. En tal caso, existe $q_0 \in A$ que es su menor elemento.

Como $q_0 \in A$, entonces $q_0 > 0$ y $q_0/2 \in A$. Como $0 < q_0/2 < q_0$, concluimos que q_0 no es el menor elemento de A . Esto contradice el supuesto del PBO.

Por lo tanto, \mathbb{Q} no cumple el PBO. □

Observe que la misma demostración sirve para \mathbb{R}

Principio de inducción

Principio de inducción simple (PIS)

Para A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que:

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Notación

- La condición 1. se llama el **caso base** o **base de inducción**.
- La condición 2. se llama **paso inductivo**.
 - La suposición $n \in A$ es la **hipótesis de inducción**.
 - La demostración de que $n + 1 \in A$ es la **tesis de inducción**.

Principio de inducción

Ejercicio

Demuestre que 0 es el menor número natural.

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$. Usaremos el PIS para demostrar que $A = \mathbb{N}$, con lo que estaremos demostrando que para todo elemento $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \geq 0$, y por lo tanto que 0 es el menor natural.

- **CB:** Es claro que $0 \in A$, puesto que $0 \in \mathbb{N}$ y $0 \geq 0$.
- **HI:** Supongamos que $n \in A$, y por lo tanto $n \geq 0$.
- **TI:** Debemos demostrar que $n + 1 \in A$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $n \geq 0$, y por lo tanto $n + 1 \geq 1$. Concluimos que $n + 1 \geq 0$, y entonces $n + 1 \in A$.

Por PIS, se sigue que $A = \mathbb{N}$.



Principio de inducción

PIS (Segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (0 cumple la propiedad P)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama **caso base**.
- El punto 2. es el **paso inductivo**.
 - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
 - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción**.

Ejemplo de demostración por inducción

Teorema

La suma de los primeros n números naturales es igual a

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Demostración

Demostramos que se cumple para $n = 0$:

$$\text{Caso base } (n = 0): \quad \sum_{i=0}^0 i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

Ejemplo de demostración por inducción

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n + 1$:

$$\text{Hipótesis:} \quad \sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Tesis:} \quad \sum_{i=0}^{n+1} i &= \underbrace{\sum_{i=0}^n i}_{\text{caso } n} + (n + 1) \\ &= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{2 \cdot (n + 1)}{2} \\ &= \frac{((n + 1) + 1) \cdot (n + 1)}{2} \end{aligned}$$



Una variación del principio de inducción

Existen propiedades en \mathbb{N} que no se cumplen en todos los naturales, pero sí **desde cierto número**.

- Podemos modificar el PIS
- El **CB** ya no es 0

Ejemplo

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple

$$n! > 2^n$$

Una variación del principio de inducción

Demostración

$n! > 2^n$ es verdadero **para todo** $n \geq 4$

1. $P(4) : 4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

2. si $P(n) : n! > 2^n$ es verdadero con $n \geq 4$, entonces:

$$\begin{aligned} P(n+1) : (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \\ &> 2^n \cdot (n+1) && \text{(por HI)} \\ &> 2^n \cdot 4 && \text{(como } n \geq 4) \\ &> 2^{n+1} \end{aligned}$$



Por lo tanto, $P(n)$ es verdadero **para todo** $n \geq 4$.

Una variación del principio de inducción

PIS (Tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Esta formulación permite demostrar propiedades con un caso base mayor a 0.

Outline

Obertura

Inducción simple

Inducción fuerte

Epílogo

El poder de la inducción

La **sucesión de Fibonacci** es una serie de naturales $F(0), F(1), F(2), \dots$ que cumple la siguiente **recurrencia**

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para } n \geq 2$$

¿cómo calculamos el valor de $F(n)$ para un n cualquiera?

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = F(1) + F(0) = 1 + 0 = 1$$

$$F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(4) = \dots$$

¿Basta inducción simple para probar que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$?

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción por curso de valores (PICV)

Sea A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Observaciones

- También es conocido como **Principio de Inducción Fuerte**
- La **HI** es la expresión $\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq A$
- La **TI** es la expresión $n \in A$

¿Dónde está el **caso base** en el principio anterior?

Principio de inducción fuerte

PICV (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre \mathbb{N} . Si P cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$P(k)$ es verdadero **para todo** $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Ejemplo

Demuestre que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

¡Ojo! El **CB** se debe demostrar manualmente igual que en inducción simple.

Principio de inducción fuerte

Demostración

$$P(n) := F(n) \leq 2^n \quad \text{para todo } n$$

1. **CB.** $P(0): F(0) = 0 \leq 2^0$

$$P(1): F(1) = 1 \leq 2^1$$

2. **HI.** Sup. $P(k): F(k) \leq 2^k$ es verdadero para todo $k < n$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{TI. } P(n): F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-2} && \text{(por HI)} \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &\leq 2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

En este caso se debía demostrar 2 casos base.

Principio de inducción fuerte

Ejemplo (Propuesto ★)

Demostremos que la siguiente propiedad se cumple para todo natural $n \geq 2$

$$P(n) := n \text{ tiene un factor primo}$$

1. **CB.** $P(2)$ es cierto pues 2 es primo, por lo que tiene un factor primo.
2. **HI.** Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.
3. **TI.** Consideramos $P(n)$. Tenemos dos casos:
 - Si n es primo, entonces tiene un factor primo.
 - Si no, existen dos naturales k_1, k_2 tales que $n = k_1 \cdot k_2$ y donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por **HI** tiene un factor primo k_3 . Como $n = k_1 \cdot k_2$, entonces k_3 también es factor de n .

Por lo tanto, $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

Notemos que en **TI**, cuando n es primo en realidad es un **caso base**.

Equivalencia de principios de inducción

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Principio del buen orden.
2. Principio de inducción simple.
3. Principio de inducción fuerte.

Demostraremos solo que $1. \Rightarrow 2.$

Las implicancias $2. \Rightarrow 3.$ y $3. \Rightarrow 1.$ quedan propuestas.

ADVERTENCIA: usaremos el método de demostración por **contrapositivo**.
Supondremos falso 2. y probaremos que 1. es falso.

Recordatorio: PBO y PIS

Principio del buen orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento, i.e.

$$A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \in A. \forall y \in A. (x \leq y)$$

Principio de inducción simple (PIS)

Para A un subconjunto de \mathbb{N} . Si se cumple que

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Equivalencia de principios de inducción

Demostración (Propuesta ★)

Supongamos que el PIS es falso; es decir, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple las reglas del PIS, pero $A \neq \mathbb{N}$.

Sea entonces el conjunto $B = \mathbb{N} - A$, el cual cumple que $B \subseteq \mathbb{N}$ y $B \neq \emptyset$. Mostraremos que este conjunto no tiene menor elemento, y por lo tanto el PBO es falso.

Por contradicción, supongamos que B sí tiene un menor elemento al que llamamos b .

$$\begin{aligned} 0 \in A &\Rightarrow b \neq 0 && (\text{def. de } B) \\ &\Rightarrow b - 1 \in \mathbb{N} && (\text{axioma 3 sobre antecesores de } \mathbb{N}) \\ &\Rightarrow b - 1 \notin B && (b \text{ es el menor de } B) \\ &\Rightarrow b - 1 \in A && (\text{def. de } B) \\ &\Rightarrow b \in A && (A \text{ cumple reglas del PIS}) \end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que b sea el menor elemento de B . □

Outline

Obertura

Inducción simple

Inducción fuerte

Epílogo

La dirección de la inducción

No olvidar la **dirección** en que se demuestra por inducción:

- Casos base son independientes (se hace *a mano*).
- Se asume verdadera la **Hipótesis**.
- A partir de la **HI** se demuestra la **Tesis**.

¡No se puede partir la demostración desde lo que se quiere demostrar!