



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 5 - Teoría de Conjuntos

19 de abril de 2024

Héctor Nuñez, Paula Grune, Manuel Irarrazabal

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de objetos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A , el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de A (relativo a \mathcal{U}) es

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B, A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x, x \notin X$. $X = \emptyset$.

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B , el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

$$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B , el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

$$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B , el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \setminus B$),

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Leyes

- | | | |
|---|---|--|
| 1. Absorción:
$A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$ | 4. Asociatividad:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | 7. Leyes de De Morgan:
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ |
| 2. Elemento neutro:
$A \cup \emptyset = A$
$A \cap \mathcal{U} = A$ | 5. Conmutatividad:
$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$ | 8. Elemento inverso:
$A \cup A^c = \mathcal{U}$
$A \cap A^c = \emptyset$ |
| 3. Distributividad:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 6. Idempotencia:
$A \cup A = A$
$A \cap A = A$ | 9. Dominación:
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
$A \cap \emptyset = \emptyset$ |

1. Pregunta 1

- Sean A, B y C conjuntos no vacíos.
¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.

a) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$

b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

- Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.

$$\text{Si } A \Delta C = B \Delta C \text{ entonces } A = B$$

2. Pregunta 2

Dado un conjunto A , definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \emptyset \vee A \setminus X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A .

Demuestre que:

- $\emptyset \in \mathcal{T}(A)$
- $A \in \mathcal{T}(A)$
- $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
- Si \mathcal{X} es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.