Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Ayudantía 5 - Teoría de Conjuntos

19 de abril de 2024

Héctor Nuñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

---

## Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de obejtos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean $A$ y $B$ conjuntos. Diremos que $A$ es subconjunto de $B$ ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto $A$, el conjunto de todos los subconjuntos de $A$ corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$
- Complemento: Dado un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el complemento de $A$ (relativo a $\mathcal{U}$) es

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A = \{x | x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B,\ A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$. $X = \varnothing$.

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto $A$ se tiene que $\varnothing \subseteq A$.
- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos $A$ y $B$, el conjunto de los elementos que están en $A$ o en $B$ corresponde a la unión de $A$ y $B$ ($A \cup B$),

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Dado un conjunto de conjuntos $S$ se define la **unión generalizada** como

$$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos $A$ y $B$, el conjunto de los elementos que están en $A$ y en $B$ corresponde a la intersección de $A$ y $B$ ($A \cap B$),

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Dado un conjunto de conjuntos $S$ se define la **intersección generalizada** como

$$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos $A$ y $B$, el conjunto de los elementos que están en $A$ pero no en $B$ corresponde a la diferencia de $A$ y $B$ ($A \backslash B$),

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

**Leyes**

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$
2. Elemento neutro:
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$
3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
7. Leyes de De Morgan:
   $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. Elemento inverso:
   $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   $A \cap A^c = \varnothing$
9. Dominación:
   $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$

# 1. Pregunta 1

1. Sean $A, B$ y $C$ conjuntos no vacíos.
   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Demuestre o dé un contraejemplo.

   *a*) $A \times B = B \times A$ si y sólo si $A = B$

   *b*) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

2. Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:

   $$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

   Demuestre que si $A, B$ y $C$ son no vacíos, se cumple que.

   $$\text{Si } A\Delta C = B\Delta C \text{ entonces } A = B$$

# 2. Pregunta 2

Dado un conjunto $A$, definimos

$$\mathcal{T}(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X = \varnothing \vee A \backslash X \text{ es finito}\}$$

Recuerde que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto potencia de A.

Demuestre que:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}(A)$
2. $A \in \mathcal{T}(A)$
3. $\bigcup \mathcal{T}(A) \in \mathcal{T}(A)$
4. Si $\mathcal{X}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{T}(A)$, entonces $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{T}(A)$.