

Satisfactibilidad, modelación y formas normales

Clase 5

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Satisfactibilidad

Modelando con lógica

Formas normales

Epílogo

Satisfactibilidad

Definición

Una fórmula φ es **satisfactible** si existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

Las siguientes fórmulas son satisfactibles:

$$(p \vee q) \rightarrow r$$

$$p \rightarrow \neg p$$

Las siguientes fórmulas no son satisfactibles:

$$p \wedge \neg p$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

Una fórmula es satisfactible si hay algún “*mundo*” en el cual es verdadera

El problema de satisfactibilidad

Problema de satisfactibilidad (SAT)

Sea φ una fórmula proposicional. El **problema de satisfactibilidad** consiste en determinar si φ es satisfactible o no.

Este es un problema central en computación

- Permite resolver problemas fuera de la lógica...
- ... usando modelación en lógica proposicional

¿Es un problema difícil? ¿Cómo se resuelve?



Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfactibilidad de fórmulas y conjuntos
- Aplicar lógica para modelar problemas
- Conocer las formas normales

Outline

Satisfactibilidad

Modelando con lógica

Formas normales

Epílogo

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio

Sea M un mapa conformado por n países. Decimos que M es 3-coloreable si se pueden pintar todos los países con 3 colores sin que ningún par de países adyacentes tenga el mismo color. En otras palabras, los países vecinos deben tener colores distintos.

Dado un mapa M , construya una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfactible.

La fórmula φ debe **codificar** los requisitos y estructura del problema

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Sea M el mapa. Consideremos la lista de países $\{1, 2, \dots, n\}$ y una lista de pares de países adyacentes $A = \{(i, j), (k, m), \dots\}$.

Seguiremos la siguiente estrategia para resolver el problema

1. Definición de variables proposicionales
 - Variables predefinidas por el problema
 - Variables que hay que asignar
2. Construcción de restricciones a través de fórmulas proposicionales
3. Demostración de que φ cumple lo pedido (si y solo si)

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Primero, definimos las variables proposicionales. Usamos dos tipos de variables:

- Para $1 \leq i, j \leq n$ definimos

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es adyacente con } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observamos que cada p_{ij} se conoce de antemano una vez que conocemos el mapa M . Debemos **inicializarlas**.

- Análogamente, para $1 \leq i \leq n$ definimos

$$r_i \quad b_i \quad g_i$$

que valen 1 si el país i es pintado rojo, azul o verde respectivamente, y 0 en caso contrario. Estas variables deben ser **determinadas** para resolver el problema.

¿Qué restricciones son naturales para este problema?

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Para representar el problema vamos a definir φ como la conjunción de las siguientes fórmulas.

- “Cada país tiene exactamente un color”

$$\varphi_C = \bigwedge_{i=1}^n \left((r_i \vee b_i \vee g_i) \wedge (r_i \rightarrow (\neg b_i \wedge \neg g_i)) \wedge (b_i \rightarrow (\neg r_i \wedge \neg g_i)) \wedge (g_i \rightarrow (\neg r_i \wedge \neg b_i)) \right)$$

- “Países adyacentes tienen colores distintos”

$$\varphi_D = \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n \left(p_{ij} \rightarrow ((r_i \rightarrow \neg r_j) \wedge (b_i \rightarrow \neg b_j) \wedge (g_i \rightarrow \neg g_j)) \right)$$

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

- Inicializamos las variables conocidas por la instancia M del problema

$$\varphi_M = \bigwedge_{(i,j) \in A} p_{ij} \quad \wedge \quad \bigwedge_{(i,j) \notin A} \neg p_{ij}$$

Entonces, nuestra fórmula será la conjunción de las fórmulas anteriores:

$$\varphi = \varphi_C \wedge \varphi_D \wedge \varphi_M$$

Ahora demostraremos que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfactible.

Debemos demostrar dos direcciones

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

(\Rightarrow) **PDQ** Si M es 3-coloreable, entonces φ es satisfactible.

Supongamos que M es 3-coloreable. Luego, existe una coloración válida para M . Construimos una valuación σ según

$$\begin{aligned}\sigma(p_{ij}) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \text{ son adyacentes en } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(r_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es rojo en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(b_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es azul en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \sigma(g_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es verde en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}\end{aligned}$$

Esta dirección consiste en construir una valuación que satisface φ

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

(\Rightarrow) (continuación) Ahora verificamos que $\sigma(\varphi) = 1$:

- $\sigma(\varphi_C)$: para cada país i , se debe cumplir que $\sigma(r_i) = 1$, o que $\sigma(g_i) = 1$, o que $\sigma(b_i) = 1$, y solo una de estas, por construcción de σ . Luego, es claro que $\sigma(\varphi_C) = 1$.
- $\sigma(\varphi_D)$: para cada combinación de países i, j , sabemos que $\sigma(p_{ij}) = 1$ solo cuando los países son adyacentes. Entonces, como en φ_D tenemos una implicancia, solo nos preocuparemos de los pares de países adyacentes. En el consecuente de la implicancia, sabemos que si por ejemplo $\sigma(r_i) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(r_j) = 0$, dado que construimos σ a partir de una 3-coloración. Para las otras dos implicancias, sabemos que el lado izquierdo va a ser falso (por la fórmula φ_C), y por lo tanto todo el lado derecho se hace verdadero, y entonces $\sigma(\varphi_D) = 1$. El análisis para cuando i es de otro color es análogo.

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

(\Rightarrow) (continuación)

- $\sigma(\varphi_M)$: por construcción de σ es claro que $\sigma(\varphi_M) = 1$, dado que la construimos precisamente como esta fórmula, asignando 1 a pares de países adyacentes y 0 a los que no.

Finalmente, como φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$, y entonces φ es satisfactible.

La dirección opuesta comienza suponiendo que φ es satisfactible

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

(\Leftarrow) **P.D.** Si φ es satisfactible, entonces M es 3-coloreable.

Supongamos que φ es satisfactible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$, y por construcción $\sigma(\varphi_C) = \sigma(\varphi_D) = \sigma(\varphi_M) = 1$. Usaremos esta valuación para colorear el mapa.

En primer lugar, como $\sigma(\varphi_C) = 1$, sabemos que para cada i , $\sigma(r_i \vee g_i \vee b_i) = 1$, y por lo tanto cada país tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(r_k) = 1$, es decir, pintamos el país k rojo. Como también se cumple que $\sigma(r_k \rightarrow (\neg g_k \wedge \neg b_k)) = 1$, necesariamente $\sigma(g_k) = 0$ y $\sigma(b_k) = 0$, y por lo tanto cada país tiene un único color.

Esta dirección busca deducir la **existencia** de una coloración a partir de la valuación

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

(\Leftarrow) (continuación)

En segundo lugar, como $\sigma(\varphi_M) = 1$, sabemos que si i, j son adyacentes en M , $\sigma(p_{ij}) = 1$, y si no lo son, $\sigma(p_{ij}) = 0$. Ahora, en $\sigma(\varphi_D) = 1$, solo nos interesa el primer caso (dado que en el segundo no podemos concluir nada de la implicancia). Tomemos entonces i, j adyacentes, y sin pérdida de generalidad supongamos que $\sigma(r_i) = 1$. Como $\sigma(r_i \rightarrow \neg r_j) = 1$ para todo j adyacente a i , necesariamente $\sigma(r_j) = 0$, y entonces los países adyacentes no pueden estar pintados del mismo color.

Concluimos que usando los colores asignados por φ a través de r_i, g_i, b_i , podemos 3-colorear M .

Modelación en lógica proposicional

En general, para modelar con lógica, consideramos:

- **Variables proposicionales de decisión:** Típicamente, modelan la decisión a tomar o la asignación a realizar. Ej: Colores de los países r_i, b_i, g_i
- **Variables auxiliares:** Típicamente, modelan datos conocidos del problema, se fuerza que adquieran cierto valor de verdad. Ej: Vecindad entre países p_{ij}
- **Inicialización de variables:** Fuerzan el valor de verdad de las variables auxiliares. Ej: Inicialización de los p_{ij}
- **Restricciones:** Relacionan las variables del problema de manera que reflejen las restricciones naturales y especificadas del problema. Ej: Distintos colores para países vecinos φ_D

Típicamente, la modelación viene acompañada de una demostración.

Otros conceptos asociados a satisfactibilidad

Definición

Una fórmula φ es una **contradicción** si no es satisfactible; es decir, para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 0$.

Ejemplo

$$p \wedge \neg p$$

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

$$p \vee \neg p$$

$$p \leftrightarrow p$$

Otros conceptos asociados a Satisfactibilidad

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Podemos definir la equivalencia lógica de una manera alternativa:

Teorema

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in L(P)$ son lógicamente equivalentes si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología.

Demuestre el teorema (★)

Outline

Satisfactibilidad

Modelando con lógica

Formas normales

Epílogo

Formas normales

Definición

Un literal es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplo

Para el conjunto de variables $P = \{p, q, r\}$, las fórmulas p y $\neg r$ son literales.

Los literales son los átomos de la construcción que mostraremos

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$

Ejemplo

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$$

¿Hemos visto fórmulas en DNF antes?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Ya demostramos esto y ¡mostramos cómo construir tal fórmula!

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik_i})$

Observaciones

- Una disyunción de literales se llama una **cláusula**.
 - Los C_i anteriores son cláusulas.
- Una fórmula en CNF es una conjunción de cláusulas.

Ejemplo

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

¿Podríamos obtener una fórmula en CNF para una tabla de verdad?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

Demuestre el teorema (★○)

Formas normales

Demostración

Como sabemos que toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF, demostraremos que toda fórmula en DNF es equivalente a una fórmula en CNF por inducción en la cantidad de disyunciones de la primera fórmula. Dado un conjunto de variables proposicionales P , tenemos la siguiente propiedad sobre los naturales:

Prop(n) : toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).

Demostraremos esta propiedad por inducción.

Formas normales

Prop(n) : toda fórmula $\varphi \in L(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).

BI: *Prop*(0) : una fórmula en DNF con 0 disyunciones es de la forma

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_k$$

por lo que está trivialmente en CNF.

HI: Suponemos que *Prop*($n - 1$) es cierta; es decir, toda fórmula φ en DNF con a lo más $n - 1$ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF.

Formas normales

TI: Debemos demostrar que toda fórmula φ' en DNF con n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ' en CNF. Cualquier φ' será de la forma

$$\varphi' = B_0 \vee B_1 \vee \dots \vee B_{n-1} \vee B_n$$

donde los B_i son conjunciones de literales. Por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (B_0 \vee B_1 \vee \dots \vee B_{n-1}) \vee B_n$$

y por HI $\varphi' \stackrel{HI}{\equiv} \psi \vee B_n$, con ψ una fórmula en CNF. Expandiendo la conjunción B_n :

$$\varphi' \equiv \psi \vee (l_{n,1} \wedge \dots \wedge l_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Por distributividad:

$$\varphi' \equiv (\psi \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (\psi \vee I_{n,k_n})$$

Como ψ está en CNF, podemos expandirla:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \wedge \dots \wedge C_m) \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge ((C_1 \wedge \dots \wedge C_m) \vee I_{n,k_n})$$

con C_i cláusulas. Por distributividad:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,1})) \wedge \dots \wedge ((C_1 \vee I_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,k_n}))$$

Y por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (C_1 \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_1 \vee I_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Como los C_i son cláusulas, es claro que $(C_i \vee l_{n,j})$ es una cláusula.
Luego, tenemos que

$$\psi' = (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

está en CNF y es tal que $\varphi' \equiv \psi'$. \square

Outline

Satisfactibilidad

Modelando con lógica

Formas normales

Epílogo

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfactibilidad de fórmulas y conjuntos
- Aplicar lógica para modelar problemas
- Conocer las formas normales