Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía extra: Repaso I1

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

---

1. Lógica de predicados

Definimos el cuantificador de existencia y unicidad ($!\exists$) de la siguiente manera:

$\exists!x.P(x)$ va a ser verdadero si es que existe solamente un elemento x tal que se cumpla $P(x)$.

Defina formalmente $\exists!x.P(x)$ usando los quantificadores $\forall$ y $\exists$ y determine si las siguientes afirmaciones son correctas:

1. $\exists!x \in \mathbb{N}.(x + 3 = 5)$
2. $\exists!x \in \mathbb{N}.(x^2 = 4)$
3. $\exists!x \in \mathbb{Z}.\forall y \in \mathbb{Z}.(x + y = 0 \rightarrow y = -x)$
4. $\exists!x \in \mathbb{N}.\forall y \in \mathbb{N}.(xy = x \implies y = 1)$

2. Lógica Proposicional:

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

2.a

Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2.b.1

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante

2.b.2

Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

3. Inducción Fuerte

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre usando inducción que para $n \geq 3$ se cumple que

$$T(n) \leq 3n \log_2(n-1)$$

Si lo necesita en su desarrollo, considere $\log_2(3) = 1{,}585$

Hint: Para este ejercicio, las siguientes propiedades pueden ser útiles:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \qquad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}, \qquad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2}$$