Repaso I1

Clase 10

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Se viene la I1...

Se viene la I1...

Outline

Outline

Interrogación 1

Información relevante

- La interrogación 1 se realizará hoy **miércoles 09 de abril desde las 17:30 horas**.
- Casos particulares (alumnos PIANE, tope de horarios) tienen horario diferenciado y se les hizo llegar la información relevante.
- Temario:
  - Inducción simple y fuerte
  - Definiciones inductivas e inducción estructural
  - Sintaxis y semántica de la lógica proposicional
  - Equivalencia lógica y conectivos funcionalmente completos
  - Satisfactibilidad y modelación con lógica
  - Formas normales y consecuencia lógica
  - Lógica de predicados

Política e integridad

Información relevante

- La interrogación es **individual**
- Durante la evaluación, **no podrán** hacer uso de apuntes o material del curso
- En caso de copia se aplicará:

POLÍTICA DE INTEGRIDAD ACADÉMICA
DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Outline

¿Cómo enfrentar una pregunta nueva?

De forma general, tenemos los siguientes pasos:

1. Lectura global de la pregunta
2. Identificación de contenidos involucrados
3. Identificar tipo de pregunta (demostración, cálculo, definición, construcción de ejemplo...)

Según el tipo de pregunta hay opciones

Preguntas de calcular/algoritmos

Buscan medir manejo de “recetas” vistas. Ejemplos:

- Mostrar por tablas de verdad
- Construcción de fórmulas en CNF
- Calcular utilizando un operador definido inductivamente
- ...

Ejemplo

Obtenga una fórmula equivalente a $p \vee (p \leftrightarrow q)$ en CNF

Pueden ser subpreguntas dentro de preguntas más grandes

Importante

- No se salten pasos
- Si hacen supuestos, explicítenlos

Preguntas de construir definiciones

Buscan medir formalidad y manejo de tipos de definiciones

- Estructuras recursivas
- Operadores sobre estructuras recursivas

Ejemplo

Defina el conjunto T de los árboles binario sobre los naturales de manera recursiva. Defina recursivamente el tamaño de un árbol como la cantidad de los números que almacena.

Generalmente acompañadas de demostraciones por inducción estructural

Importante

- Definir cuidadosamente casos base
- Las reglas de construcción definen elementos nuevos desde elementos preexistentes y los utilizan o modifican

Preguntas de modelación

Buscan medir manejo de sintaxis lógica y capacidad de representar conocimiento

- Lógica proposicional (variables binarias)

Ejemplo

Mapa 3-coloreable

Pueden ir acompañadas de demostraciones de correctitud

Importante

- Identificar qué tipo de fórmula se pide (proposicional o predicado)
- Escoger variables/predicados adecuados
- Usar fórmulas auxiliares para mejor legibilidad (para ustedes y nosotros)
- Inicializar variables

Preguntas de construir ejemplos

Buscan medir comprensión de definiciones nuevas

- Análogos de definiciones conocidas
- Extensiones de definiciones conocidas

Ejemplo

Definimos una expresión algebraica como (...). Dé un ejemplo de expresión algebraica.

Generalmente acompañada demostraciones que usan la nueva definición.

Importante

- Pensar en casos pequeños y básicos
- ¿Cuál es el ejemplo más simple que cumple lo pedido?

Preguntas de demostraciones

Buscan medir comprensión de definiciones nuevas y antiguas, a través de técnicas de demostración

- Identificar estructura de la propiedad a demostrar (implicancia, doble implicancia, existencial, ...)
- Identificar partes de la propiedad a demostrar

Luego de identificar estos elementos, podemos elegir método de demostración

Outline

¿Dudas de materia?

Outline

Repaso: Inducción simple

Definición (Naturales)

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es el menor conjunto que cumple:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Principio de inducción simple (PIS)

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $0 \in A$ (**BI**)
2. Si $n \in A$ (**HI**) entonces $n + 1 \in A$ (**TI**)

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Repaso: Inducción simple

Principio de inducción simple (PIS) - Alt. 2

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (**BI**)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero (**HI**) entonces $P(n+1)$ es verdadero (**TI**)

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Principio de inducción simple (PIS) - Alt. 3

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero (**BI**)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, si $P(n)$ es verdadero (**HI**) entonces $P(n+1)$ es verdadero (**TI**)

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Repaso: Inducción fuerte

Principio de inducción fuerte (PICV)

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \subseteq \mathbb{N}$:

$$\{0, 1, ..., n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

Entonces $A = \mathbb{N}$.

Principio de inducción fuerte (PICV) - Alt.

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

1. Si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$ (**HI**) entonces $P(n)$ es verdadero

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

¡El caso base está implícito! Para $n = 0$ hay que demostrar $P(0)$

Repaso: Inducción estructural

Definición inductiva, forma general

El conjunto S es el **menor conjunto** que cumple que:

- $B \subseteq S$ donde B tiene los elementos base (**BI**)
- Si $s_1, \dots, s_n \in S$ (**HI**) entonces $f_1(s_1, \dots, s_n) \in S, \dots, f_m(s_1, \dots, s_n) \in S$, donde los f_j son las reglas que nos permiten construir nuevos elementos a partir de los que ya conocemos (**TI**).

Siempre tenemos uno o más casos base y una o más reglas constructivas, que luego son las que nos permiten ir construyendo nuevos elementos a partir de los que ya conocemos.

Repaso: Inducción estructural

Principio de inducción estructural

Sea S definido inductivamente como en la definición general anterior y P una propiedad sobre los elementos de S. Si se cumple que:

- Para todo $s \in B$, se tiene que $P(s)$ (**BI**)
- Si $P(s_1), ..., P(s_n)$ (**HI**) entonces $P(f_1(s_1, ..., s_n)), ..., P(f_m(s_1, ..., s_n))$ (**TI**).

Entonces todos los elementos de S cumplen la propiedad P.

¡Por tener una definición inductiva es que podemos aplicar inducción estructural!

Repaso: Inducción estructural

Ejemplos

- Naturales
- Palíndromos
- Fórmulas de lógica proposicional
- Fórmulas de lógica de predicados
- Listas ligadas
- Expresiones algebraicas
- Producto cartesiano n-dimensional
- ¿Demostraciones por resolución?
- ...

Repaso: Inducción estructural

Operadores en estructuras inductivas

Sea S definido inductivamente como en la definición general anterior. Definimos un operador O sobre S como:

- Para todo $s \in B$, definimos $O(s)$.
- Para $O(s_1), ..., O(s_n)$, definimos $O(f_1(s_1, ..., s_n)), ..., O(f_m(s_1, ..., s_n))$.

Esto nos permite definir O para todo elemento de S.

Ejemplos

- Valuación de una fórmula
- Largo de un palíndromo
- Paridad de un natural
- Profundidad de una expresión algebraica
- ...

Repaso: Lógica proposicional

Sintaxis (¡Definición inductiva!)

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface:

- Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$.
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\varphi \star \psi \in \mathcal{L}(P)$.

Semántica (¡Operador inductivo!)

Sea P un conjunto de variables proposicionales y $\sigma : P \to \{0,1\}$. Se define la valuación extendida $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según:

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces:

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(p)$$

- Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces:

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- Si $\varphi = \psi_1 \star \psi_2$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, entonces ...

¡La definición es inductiva! Podemos hacer inducción estructural y evaluar recursivamente.

Repaso: Lógica proposicional

Otros puntos importantes a revisar

- **Tablas de verdad**: Representación de valuaciones, cuántas hay para cada fórmula, cuántas tablas distintas podemos hallar, cómo usarlas para demostrar equivalencia, cómo demostrar por contraejemplo, ...
- **Equivalencia lógica**: Por tablas de verdad, por leyes de equivalencia (doble negación, de Morgan, conmutatividad, asociatividad, distributividad, idempotencia, absorción, implicancia material, doble implicancia).
- **Conjuntos funcionalmente completos**: Ya conocemos varios, notablemente, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$. Podemos partir desde estos para encontrar otros (ver ayudantías).
- **Modelación con lógica**: Hemos visto distintas opciones, pueden ir desde cosas simples (semáforo) a complejas (asignación de recursos). ¡En la tarea y las ayudantías hemos visto ejemplos!
- **Tautologías y contradicciones**: Nos ayudan a simplificar y razonar.
- **Formas normales**: Tener claro CNF, DNF y cómo construir las fórmulas equivalentes en esas formas.

Repaso: Consecuencia lógica

Satisfacción de un conjunto de fórmulas

Dado $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$, decimos que σ satisface a Σ ($\sigma(\Sigma) = 1$) si para toda $\varphi \in \Sigma$ se cumple que $\sigma(\varphi) = 1$.

Si existe tal σ, diremos que Σ es satisfactible. En caso contrario, diremos que es inconsistente.

Consecuencia lógica

Decimos que $\psi \in \mathcal{L}(P)$ es consecuencia lógica de $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ si para toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

Lo denotamos por $\Sigma \vDash \psi$

Teorema

$\Sigma \vDash \psi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\psi\}$ es inconsistente

Este teorema fundamental nos lleva a la resolución proposicional

Repaso: Resolución proposicional

Demostración por resolución

Una demostración por resolución de que σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, ..., C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$:
  - $C_i \in \Sigma$, o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j y C_k usando la **regla de resolución**
  - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la **regla de factorización**
- $C_n = \square$

Lo denotamos por $\Sigma \vdash \square$

Teorema

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \vDash \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Repaso: Resolución proposicional

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica:

1. Tomamos $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ y convertimos sus fórmulas a CNF.
2. Separamos las fórmulas en CNF en sus cláusulas para construir Σ'.
3. Aplicamos resolución proposicional para mostrar $\Sigma' \vdash \square$.
4. Concluimos que $\Sigma \vDash \varphi$.

Repaso: Lógica de predicados

A diferencia de la lógica proposicional, tomamos predicados (aserciones interpretables) en lugar de proposiciones. Los predicados pueden tener variables libres (no determinadas) o determinadas, y pueden tener distintas aridades (cantidad de variables libres). Estos predicados nos permiten definir las fórmulas de predicados de manera inductiva también.

Predicado compuesto

Diremos que φ es un predicado compuesto (o fórmula) si es:

- Un predicado básico
- La negación ($\neg$) de un predicado compuesto
- La conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o dobleimplicancia ($\leftrightarrow$) de predicados del mismo dominio
- La cuantificación existencial ($\exists$) o universal ($\forall$) de un predicario compuesto

Podemos escribir esto más formalmente, es un buen ejercicio. ¿Cómo se ve la semántica?

Repaso: Lógica de predicados

A diferencia de la lógica proposicional, tomamos predicados (aserciones interpretables) en lugar de proposiciones. Los predicados pueden tener variables libres (no determinadas) o determinadas, y pueden tener distintas aridades (cantidad de variables libres).

Predicado compuesto

Diremos que φ es un predicado compuesto (o fórmula) si es:

- Un predicado básico
- La negación ($\neg$) de un predicado compuesto
- La conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o dobleimplicancia ($\leftrightarrow$) de predicados del mismo dominio
- La cuantificación existencial ($\exists$) o universal ($\forall$) de un predicario compuesto

Podemos escribir esto más formalmente, es un buen ejercicio. ¿Cómo se ve la semántica?

Repaso: Lógica de predicados

Semántica de un predicado compuesto

La valuación de un predicado compuesto corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados sobre un dominio

Para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, ..., x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, ..., x_n)$ es el predicado sobre D.

Interpretación

Sean $P_1, ..., P_m$ símbolos de predicados. Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $P_1, ..., P_m$ está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i.

Repaso: Lógica de predicados

Otros puntos importantes a revisar

- **Equivalencia lógica**: Extendemos las leyes de equivalencia (doble negación, de Morgan, conmutatividad, asociatividad, distributividad, idempotencia, absorción, implicancia material, doble implicancia) con leyes sobre la cuantificación existencial y universal.
- **Modelación con lógica**: Similar a la proposicional, en algunos casos más compacta y más fácil de leer, especialmente en casos infinitos.
- **Particularidades**: Satisfactibilidad, consecuencia lógica son similares, pero ¡ojo con las definiciones y la notación!
- **Inferencia**: Extendemos la resolución proposicional con especificación universal, generalización universal, especificación existencial y generalización existencial.

Outline

Inducción simple

Ejercicio:

Demuestre por inducción que para todo $n \geq 4$ se cumple que

$$2^n \leq n! \leq n^n$$

Inducción fuerte

Ejercicio:

Definimos la sucesión $\{a_n\}_{\mathbb{N}}$ por:

- $a_0 = 1$
- $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ para todo $n \geq 1$.

Demuestre que para todo $n \geq 1$, se tiene que $a_n = 2^{n-1}$.

Inducción estructural

Ejercicio:

Definimos las fracciones continuas finitas $\mathcal{F}$ como el menor conjunto que satisface:

- Si a es un entero, entonces $a \in \mathcal{F}$
- Si a es un entero y $F \in \mathcal{F}$, entonces $a + \frac{1}{F} \in \mathcal{F}$

Demuestre que si F es una fracción continua finita, entonces su valor es un número racional.

Lógica proposicional

Ejercicio:

Demuestre cada una de las siguientes equivalencias lógicas usando tablas de verdad

- $\varphi \rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \theta)$
- $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \theta)$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio:

Se define el conectivo lógico NOR ($\downarrow$) como:

$$\varphi \downarrow \psi \equiv \neg(\varphi \vee \psi)$$

- Escriba la tabla de verdad de NOR.
- Demuestre que $\{\downarrow\}$ es funcionalmente completo.

Satisfactibilidad y modelación con lógica proposicional

Ejercicio:

Un estudiante quiere planificar su carrera en 12 semestres. Sea R el conjunto de ramos, con $M \subseteq R$ el subconjunto de ramos obligatorios y $O \subseteq R$ el de ramos optativos. Consideramos además el conjunto $P = \{(i,j) |$ el ramo i es prerrequisito del ramo $j\}$. Finalmente, consideramos que hay un conjunto precalculado de ramos compatibles $C = \{(i,j,k) |$ el ramo i es compatible con el ramo j en el semestre $k\}$. El estudiante quiere planificar de manera ideal su carrera satisfaciendo que:

1. Debe tomar todos los ramos obligatorios y (al menos) 10 ramos optativos.
2. En un semestre dado, solo puede tomar un ramo con prerrequisitos si ya ha tomado antes los ramos que son prerrequisito del ramo.
3. En cada semestre puede tomar exactamente 5 ramos.
4. Cada ramo se puede tomar a lo más una vez.
5. Si dos ramos se toman el mismo semestre, deben ser compatibles.

Ejercicio (continuación):

Una planificación de un estudiante se ve como una secuencia de 12 conjuntos de 5 ramos. La planificación es válida si satisface los requisitos anteriores.

Dada una planificación, construya una fórmula φ tal que φ es satisfactible si y sólo si la planificación es válida.

Formas normales

Ejercicio:

Demuestre que:

- Una fórmula en CNF es satisfactible si y sólo si cada cláusula en ella es satisfactible
- Una fórmula en DNF es insatisfactible si y sólo si cada disyunción en ella es insatisfactible

Lógica de predicados

En una pequeña ciudad hay tres personas: Ana, Beatriz y Carla. Sabemos lo siguiente:

- Todos los amigos de Ana son también amigos de Beatriz.
- Carla es amiga de alguien que no es amigo de Beatriz.
- La amistad es una relación simétrica (si X es amigo de Y, entonces Y es amigo de X).

Modele lo anterior usando lógica de predicados.

Se viene la I1...