Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica Proposicional

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica $\equiv$**

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

  1. Doble negación:
     $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  2. De Morgan:
     $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
     $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
  3. Conmutatividad:
     $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
     $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  4. Asociatividad:
     $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
     $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
  5. Distributividad:
     $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
     $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
  6. Idempotencia:
     $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
     $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  7. Absorción:
     $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
     $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
  8. Implicancia:
     $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
  9. Doble implicancia:
     $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

  - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \rightarrow\}$

1. Tabla de Verdad

Sean p, q y r variables lógicas. Construya la tabla de verdad de las siguientes fórmulas lógicas:

a) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

b) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$

2. Interpretación

Capítulo 1.2 de Ross (ejercicio 16)
Sea p, q y r las siguientes proposiciones:

- p: "Sacarse un 7 en el examen final."
- q: "Asistir a todas las ayudantías."
- r: "Sacarse un 7 en la ramo."

Expresa las siguientes proposiciones utilizando p, q y r, junto con conectivos lógicos (incluyendo negaciones):

1. Se saca un 7 en el ramo, pero no asiste a todas las ayudantías.
2. Se saca un 7 en el examen final, asiste a todas las ayudantías y se saca un 7 en el ramo.
3. Para sacarse un 7 en el ramo, es necesario sacarse un 7 en el examen final.
4. Se saca un 7 en el examen final, pero no asiste a todas las ayudantías; sin embargo, se saca un 7 en el ramo.
5. Sacarse un 7 en el examen final y asistir a todas las ayudantías es suficiente para sacarse un 7 en el ramo.
6. Se sacará un 7 en el ramo si y solo si asiste a todas las ayudantías o se saca un 7 en el examen final.

3. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$$