Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Satisfactibilidad y modelacíon

Hector Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

1. Funcionalidad completa

Demuestre que el conectivo $\uparrow$ (también conocido como NAND) es funcionalmente completo. Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución

Sabemos que el conjunto $C = \{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo (demostrado en clases, se puede usar). Demostraremos por inducción estructural que toda fórmula construida a partir de los conectivos del conjunto C tiene una fórmula equivalente que solo usa conectivos de $C' = \{\uparrow\}$, con ello demostrando que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

BI: Con $\varphi = p$, se cumple trivialmente que φ puede ser construida con conectivos de C'.

HI: Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son fórmulas construidas con los conectivos de C, y que existen $\varphi', \psi' \in \mathcal{L}(P)$ construidas con los conectivos de C' tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$.

TI: Demostraremos que toda fórmula θ construida con los pasos inductivos del conjunto C tiene una fórmula θ' construida con conectivos de C' tal que $\theta \equiv \theta'$. Notemos, en primer lugar, que para dos fórmulas α, β cualquiera se tiene que $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha \uparrow \beta$. Como C tiene dos conectivos, hay dos casos:

- $\theta = \neg\varphi \overset{HI}{\equiv} \neg\varphi' \equiv \neg(\varphi' \wedge \varphi') \equiv \varphi' \uparrow \varphi'$. Luego, $\theta' = \varphi' \uparrow \varphi'$ cumple la propiedad.

- $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi' \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg(\varphi' \uparrow \psi') \equiv (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$.
  Luego, $\theta' = (\varphi' \uparrow \psi') \uparrow (\varphi' \uparrow \psi')$ cumple la propiedad.

Concluímos que toda fórmula construida con conectivos de C tiene una equivalente construida con conectivos de C', y con ello que $\{\uparrow\}$ es funcionalmente completo.

2. DNF y CNF

La fórmula es:

$$(p \lor q) \to (r \leftrightarrow q)$$

Paso 1: Reescribir Implicaciones y Bicondicionales

Reescribimos la implicación y el bicondicional:

$$\neg(p \lor q) \lor ((r \to q) \land (q \to r))$$

Sustituyendo el bicondicional:

$$\neg(p \lor q) \lor ((\neg r \lor q) \land (\neg q \lor r))$$

Paso 2: Aplicar la Ley de De Morgan

Aplicamos la Ley de De Morgan a $\neg(p \lor q)$:

$$(\neg p \land \neg q) \lor ((\neg r \lor q) \land (\neg q \lor r))$$

Paso 3: Distribución

Distribuyendo:

$$(\neg p \land \neg q) \lor (q \land \neg q) \lor (q \land r) \lor (\neg q \land \neg r) \lor (r \land \neg r)$$

Simplificando, obtenemos la DNF:

$$(\neg p \land \neg q) \lor (q \land r) \lor (\neg q \land \neg r)$$

Ahora pasamos a CNF utilizando la fórmula en DNF.

Paso 1: Agrupar

Agrupamos por $\neg q$:

$$(\neg q \land (\neg p \lor \neg r)) \lor (q \land r)$$

Paso 2: Distribución

Distribuimos $(q \land \neg r)$:

$$(\neg q \lor (q \land r)) \land (\neg p \lor \neg r \lor (q \land r))$$

Distribuimos $\neg q$ y simplificamos:

$$(\neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg r \lor (q \land r))$$

Distribuimos $\neg r$ y simplificamos, llegando a CNF:

$$(\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)$$

3. Equivalencia lógica e inconsistencia

Demuestre que $\Sigma = \{p \leftrightarrow q, p \vee q\}$, con '$\vee$' la disyunción exclusiva, es inconsistente.

Observación: La disyunción exclusiva es similar a la disyunción, la única diferencia es que cuando los dos valores $(p \wedge q)$ son verdad, esta es falsa.

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución:

Podemos demostrar con resolución que Σ es inconsistente. Para ello podemos reescribir $\{p \leftrightarrow q\}$ y $\{p \vee q\}$ como,

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &= (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) = \{\neg p \vee q, \neg q \vee p\} \\
p \vee q &= p \vee q
\end{aligned}
$$

Luego, demostrar que $\Sigma' = \{\neg p \vee q, \neg q \vee p, p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente es equivalente a demostrar que Σ es inconsistente (pues $\Sigma' \supseteq \Sigma$). Por resolución,

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \neg q \vee p & \in \Sigma \\
(2) & p \vee q & \in \Sigma \\
(3) & p \vee q & \text{resolución de (1) y (2)} \\
(4) & \neg p \vee q & \in \Sigma \\
(5) & q & \text{resolución de (3) y (4)} \\
(6) & \neg p \vee \neg q & \in \Sigma \\
(7) & \neg p & \text{resolución de (5) y (6)} \\
(8) & p & \text{resolución de (4) y (8)} \\
(9) & \square & \text{contradicción}
\end{array}
$$

Obteniendo así que Σ' es inconsistente, por lo cual Σ es inconsistente.

4. Modelación

Considere M médicos, P pabellones y C cirugías agendadas para un día dado. Queremos asignar a los médicos disponibles a las distintas cirugías, suponiendo que el día tiene 24 bloques de 1 hora, durante los cuales los pabellones están disponibles y que las cirugías duran una cantidad entera de horas dada por T_c para cada cirugía c, con $1 \leq c \leq C$. Además, contamos con una tabla de compatibilidad cirugía-pabellón. Para cada cirugía c, con $1 \leq c \leq C$, y pabellón p, con $1 \leq p \leq P$, definimos:

$$K_{c,p} := \begin{cases} 1 & \text{si la cirugía } c \text{ puede ser realizada en el pabellón } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para construir una fórmula φ tal que φ sea satisfactible si y sólo si existe una calendarización adecuada de todas las cirugías, considere las siguientes variables proposicionales:

- $x_{m,c,p,t}$: Será verdadera si el médico m realiza la cirugía c en el pabellón p durante la hora t.
- $k_{c,p}$: Deberá representar nuestras constantes $K_{c,p}$.

Modele las siguientes restricciones en lógica proposicional:

(a) Inicialización de las variables $k_{c,p}$.

(b) Las cirugías solo pueden ser realizadas en pabellones adecuados para ellas.

(c) Los médicos solo pueden ser asignados a una cirugía a la vez.

(d) Si un médico es asignado a una cirugía, debe seguir asignado a la cirugía durante toda su duración.

(e) Si un médico es asignado a una cirugía, no podrá realizar otra cirugía por al menos 8 horas desde el término de la cirugía.

(f) Todas las cirugías deben tener exactamente un médico asignado durante su duración.

Solución

a) Inicialización de las variables $k_{c,p}$

Utilizamos la fórmula φ_K para la inicialización de las variables $k_{c,p}$ dada por

$$\varphi_K := \bigwedge_{c=1}^{C} \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq p \leq P \\ K_{c,p}=1}}^{P} k_{c,p} \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq p \leq P \\ K_{c,p}=0}}^{P} \neg k_{c,p} \right)$$

(*) Otras notaciones como $(c, p) : K_{c,p} = 1$ también deberían ser aceptadas para los subíndices de las conjunciones.

b) Las cirugías solo pueden ser realizadas en pabellones adecuadas para ellas.

Utilizamos la fórmula φ_P dada por

$$\varphi_P := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{24} (x_{m,c,p,t} \to k_{c,p})$$

(*) Nótese que la expresión entre paréntesis también puede escribirse como cualquiera de sus equivalencias, como $(\neg x_{m,c,p,t} \vee k_{c,p})$, incluyendo su contraposición $(\neg k_{c,p} \to \neg x_{m,c,p,t})$.

c) Los médicos solo pueden ser asignados a una cirugía a la vez.

Lo expresamos con la fórmula φ_U dada por

$$\varphi_U := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{24} \left(x_{m,c,p,t} \to \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq c' \leq C \\ c' \neq c}} \neg x_{m,c',p,t} \right) \right)$$

(*) Acá igualmente hay varias escrituras de la fórmula que son válidas, notablemente separar la conjunción del consecuente en dos partes, para $1 \leq c' \leq c - 1$ y para $c + 1 \leq c' \leq C$.

d) Si un médico es asignado a una cirugía, debe seguir asignado a la cirugía durante toda su duración

Para esta pregunta asumiremos que $T_c \leq 24$, pues en caso contrario la fórmula es trivialmente insatisfacible. Utilizaremos la fórmula φ_C dada por

$$\varphi_C := \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \left(\bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,t,p} \to \bigvee_{t=1}^{(T-T_c+1)} \bigwedge_{t'=t}^{(t+T_c-1)} x_{m,c,p,t} \right)$$

Intuitivamente, esta fórmula nos permite expresar que si el médico m está asignado a la cirugía c, entonces debe estar asignado a los T_c periodos comprendidos entre t y $t + T_c - 1$ para la cirugía y pabellón dados, para un comienzo dado en el tiempo t, que puede ser a lo más $T - T_c + 1$ (para empezar a tiempo)

e) Si un médico es asignado a una cirugía, no podrá realizar otra cirugía por al menos 8 horas desde el término de la cirugía.

Utilizamos la fórmula dada por φ_L:

$$\varphi_L = \bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \bigwedge_{p=1}^{P} \bigwedge_{t=1}^{T-1} \left((x_{m,c,p,t} \wedge \neg x_{m,c,p,t+1}) \rightarrow \bigwedge_{c'=1}^{C} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=t+1}^{min\{T,t+8\}} \neg x_{m,c',p',t'} \right)$$

(*) Aquí también varias otras fórmulas son posibles, pero esta versión es suficientemente simple. Nótese que los índices deben ser todos válidos. Acá se usa la función mín por simplicidad, pero otras formas de lograrlo pueden ser válidas.

f) Todas las cirugías deben tener exactamente un médico asignado durante su duración

Utilizamos la fórmula dada por $\varphi_M = \varphi_R \wedge \varphi_X$ donde:

$$\varphi_R := \left(\bigwedge_{c=1}^{C} \bigvee_{m=1}^{M} \bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right)$$

$$\varphi_X := \left(\bigwedge_{m=1}^{M} \bigwedge_{c=1}^{C} \left(\left(\bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right) \rightarrow \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=1}^{T} \neg x_{m',c,p',t'} \right) \right) \right)$$

Intuitivamente, la fórmula φ_M nos dice que toda cirugía debiera ser realizada al menos por algún médico en algún pabellón en algún tiempo, y la fórmula φ_X nos dice que si la cirugía c es realizada por el médico m en alguno de los pabellones en algún tiempo, entonces no puede ser realizada por ningún otro médico, en ningún pabellón ni tiempo.

Otra alternativa razonable de solución es juntar ambas como sigue:

$$\varphi_M := \left(\bigwedge_{c=1}^{C} \bigvee_{m=1}^{M} \left(\left(\bigvee_{p=1}^{P} \bigvee_{t=1}^{T} x_{m,c,p,t} \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{1 \leq m' \leq M \\ m' \neq m}} \bigwedge_{p'=1}^{P} \bigwedge_{t'=1}^{T} \neg x_{m',c,p',t'} \right) \right) \right)$$

Intuitivamente, la fórmula nos dice que para toda cirugía, hay algún médico tal que en algún período y en algún pabellón, ese médico realiza la cirugía y ningún otro médico puede realizarla en ningún pabellón o tiempo