Relaciones de orden

Clase 12

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Objetivos de la clase

- Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia.
- Comprender concepto de orden parcial y total.

Outline

Construcción de conjuntos

Una de las aplicaciones más importantes de las relaciones de equivalencia es la definición de nuevos conjuntos. Lo que haremos será:

- Tomar un conjunto ya conocido (¿por ejemplo?).
- Calcular su conjunto cuociente respecto a alguna relación de equivalencia.
- Nombrar al conjunto y sus elementos.
- Definir operaciones sobre el nuevo conjunto, basándonos en los operadores del conjunto original.

Construcción de conjuntos

Definición

El conjunto de los **números naturales módulo 4** será el conjunto cuociente de $\mathbb{N}$ respecto a $\equiv_4$:

$$\mathbb{N}_4 = \mathbb{N}/{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}.$$

¿Cómo definimos las operaciones en este nuevo "*mundo*"?

Definimos la suma módulo 4 según:

$$[i] +_4 [j] = [i + j]$$

Ejemplos

$$[3] +_4 [2] = [3 + 2] = [5] = [1] \qquad [1] +_4 [3] = [1 + 3] = [4] = [0]$$

Análogamente, definimos la multiplicación módulo 4 según:

$$[i] \cdot_4 [j] = [i \cdot j]$$

Ejemplo

$$[2] \cdot_4 [3] = [2 \cdot 3] = [6] = [2]$$

Ahora simplificaremos notación renombrando elementos de $\mathbb{N}_4$.

Construcción de conjuntos

Podríamos renombrar los elementos de $\mathbb{N}_4$:

$$[0] \leftrightarrow 0 \quad [1] \leftrightarrow 1 \quad [2] \leftrightarrow 2 \quad [3] \leftrightarrow 3$$

Y ocupar simplemente + y $\cdot$, obteniendo un nuevo conjunto con operadores bien definidos:

$$\mathbb{N}_4 = \{0, 1, 2, 3\} \text{ con operadores } + \text{ y } \cdot$$

tal que, por ejemplo, $1 + 1 = 2$, $3 + 3 = 2$, $3 \cdot 3 = 1$, etc.

Del contexto se entiende que estamos sumando/multiplicando elementos de $\mathbb{N}_4$.

Una relación de equivalencia fundamental

Veamos una relación de equivalencia más interesante.

Definición

La relación $\downarrow$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como:

$$\begin{array}{rcl} (m, n) \downarrow (r, s) & \Leftrightarrow & m + s = n + r \\ & (\Leftrightarrow & m - n = r - s) \end{array}$$

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

<u>Reflexividad:</u> Dado un par (m, n), es claro que $m + n = m + n$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(m, n) \downarrow (m, n)$.

<u>Simetría:</u> Dados dos pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$, por definición de $\downarrow$ se tiene que $m + s = n + r$. Es claro que $r + n = s + m$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(r, s) \downarrow (m, n)$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Demuestre que $\downarrow$ es una relación de equivalencia.

Transitividad: Dados tres pares tales que $(m, n) \downarrow (r, s)$ y $(r, s) \downarrow (t, u)$, debemos demostrar que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por definición de $\downarrow$, tenemos que $m + s = n + r$ (1) y $r + u = s + t$ (2). Despejando r en (2), obtenemos que $r = s + t - u$, y reemplazando esto último en (1), se tiene que $m + s = n + s + t - u$. Reordenando, obtenemos que $m + u = n + t$, y por definición de $\downarrow$, concluimos que $(m, n) \downarrow (t, u)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.

Una relación de equivalencia fundamental

¿Cuáles son las clases de equivalencia inducidas por $\downarrow$?

$$
\begin{gathered}
[(0,0)] = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}\\
[(0,1)] = \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}\\
[(1,0)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\}\\
[(0,2)] = \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}\\
[(2,0)] = \{(2,0),(3,1),(4,2),\ldots\}\\
\vdots\\
[(0,n)] = \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),\ldots\}\\
[(n,0)] = \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),\ldots\}\\
\vdots
\end{gathered}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$(0,4)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$\cdots$
$(0,3)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$\cdots$
$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$\cdots$
$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$\cdots$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$\cdots$

¿Qué tienen en común las diagonales?
¿Qué podrían representar los elementos de $\mathbb{N}^2/{\downarrow}$?

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

El conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cuociente de $\mathbb{N}^2$ respecto a $\downarrow$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\!\downarrow\ = \{[(0,0)],[(0,1)],[(1,0)],[(0,2)],[(2,0)],\ldots\}.$$

¿Qué representan las clases de equivalencia?

- $[(0,0)]$ será el entero 0.
- $[(0,i)]$ será el entero i.
- $[(i,0)]$ será el entero $-i$.

Una relación de equivalencia fundamental

Renombramos los elementos de $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &\leftrightarrow 0 \\
[(0,1)] &\leftrightarrow 1 \\
[(1,0)] &\leftrightarrow -1 \\
[(0,2)] &\leftrightarrow 2 \\
[(2,0)] &\leftrightarrow -2 \\
&\vdots \\
[(0,i)] &\leftrightarrow i \\
[(i,0)] &\leftrightarrow -i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Una relación de equivalencia fundamental

Y obtenemos entonces el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Importante: "-1" es sólo un **nombre** para la clase de equivalencia $[(1,0)]$. El símbolo "$-$" no significa nada por sí solo para nosotros.

Intentemos definir los operadores $+_{\downarrow}$ y $\cdot_{\downarrow}$, teniendo en cuenta que deben "*captar la estructura*" de los números enteros.

Una relación de equivalencia fundamental

Definición

$[(m,n)] +_{\downarrow} [(r,s)] = [(m+r, n+s)]$

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

Definición

$[(m,n)] \cdot_{\downarrow} [(r,s)] = [(m \cdot s + n \cdot r, m \cdot r + n \cdot s)]$

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

$+$ y $\cdot$ son las que vimos en $\mathbb{N}$, por lo que están bien definidas en $\mathbb{Z}$.

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $7 +_{\downarrow} -5$, $-18 +_{\downarrow} 4$ y $-3 +_{\downarrow} -6$.

$$7 +_{\downarrow} -5 = \big[(0,7)\big] +_{\downarrow} \big[(5,0)\big] = \big[(0+5, 7+0)\big] = \big[(5,7)\big] = \big[(0,2)\big] = 2$$

$$-18 +_{\downarrow} 4 = \big[(18,0)\big] +_{\downarrow} \big[(0,4)\big] = \big[(18+0, 0+4)\big] = \big[(18,4)\big] = \big[(14,0)\big]$$
$$= -14$$

$$-3 +_{\downarrow} -6 = \big[(3,0)\big] +_{\downarrow} \big[(6,0)\big] = \big[(3+6, 0+0)\big] = \big[(9,0)\big] = -9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_{\downarrow} -4$ y $3 \cdot_{\downarrow} 3$.

$$-3 \cdot_{\downarrow} -4 = [(3,0)] \cdot_{\downarrow} [(4,0)] = [(3 \cdot 0 + 0 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0)] = [(0,12)] = 12$$

$$3 \cdot_{\downarrow} 3 = [(0,3)] \cdot_{\downarrow} [(0,3)] = [(0 \cdot 3 + 3 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3)] = [(0,9)] = 9$$

Una relación de equivalencia fundamental

Finalmente, podemos renombrar las operaciones anteriores, y obtenemos el conjunto de los números enteros con sus dos operaciones habituales:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\} \text{ con las operaciones } + \text{ y } \cdot.$$

Outline

Relaciones de orden

Definición

Una relación R sobre A es una **relación de orden parcial** si es refleja, antisimétrica y transitiva.

Generalmente denotaremos una relación de orden parcial con el símbolo $\preceq$.

- $(x, y) \in \preceq$ denotado por $x \preceq y$.
- x es menor (o menor-igual) que y.

Si $\preceq$ es una relación de orden parcial sobre A, diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Esto último enfatiza que el orden requiere especificar un dominio...
Quizás en otro dominio no es orden parcial.

Relaciones de orden

Ejemplos

1. Los pares $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son órdenes parciales.
2. El par $(\mathbb{N} \backslash \{0\}, |)$ es un orden parcial.
3. Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre los ejemplos anteriores.

Relaciones de orden

Ejercicio

Si A es un conjunto cualquiera, el par $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un orden parcial.

Demostración: Sean $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$.

Reflexividad: Por definición de subconjunto, para todo conjunto X se cumple que $X \subseteq X$, por lo que la relación es refleja.

Antisimetría: Por definición de igualdad de conjuntos, si $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, se cumple que $X = Y$, y entonces la relación es antisimétrica.

Transitividad: Por definición de subconjunto:

- Si $X \subseteq Y$, entonces $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Y$.
- Si $Y \subseteq Z$, entonces $\forall y \in Y$ se tiene que $y \in Z$.

Combinando las dos aseveraciones, obtenemos que $\forall x \in X$ se tiene que $x \in Z$, y por lo tanto $X \subseteq Z$. Concluimos que la relación es transitiva.

Relaciones de orden

¿Por qué orden *parcial*?

Definición

Una relación $\leq$ sobre A es una **relación de orden total** (o lineal) si es una relación de orden parcial y además es conexa.

¿Qué quiere decir esto?

$$\text{Para todo par } x, y \in A, \text{ se tiene que } x \leq y \text{ o } y \leq x$$

Similarmente al caso anterior, diremos que un par $(A, \leq)$ es un orden total.

Definición

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$ se cumple que $x \preceq y$.
2. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
3. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos de cota superior, elemento maximal y máximo.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ y
$S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\} \subseteq \mathbb{N}$.
Estudie los conceptos anteriores.

- 1 es cota inferior, pues $1|2$, $1|3$, etc.
- 2 no es cota inferior, pues $2 \not| \ 3$.
- 60 es cota superior, pues $2|60$, $3|60$, ..., $20|60$.
  Nótese que 60 es el mínimo común múltiplo de S.
- También cualquier múltiplo de 60 es cota superior, por ejemplo 120.
- Elementos minimales: $2, 3, 5$, pues ningún elemento en S además de ellos mismos los divide.
- Elementos maximales: $15, 20$, pues no dividen a ningún elemento en S además de ellos mismos.
- No tiene mínimos ni máximos, pues ninguna cota inferior o superior pertenece a S.

Ejercicio

Sea el orden parcial $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}),\subseteq)$ y
$S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,4\}\}$. Estudie los conceptos anteriores.

- $\{1\}$ es cota inferior, elemento minimal y mínimo.
- $\{1,2,3,4\}$ es cota superior, elemento maximal y máximo.
- $\varnothing$ también es cota inferior.
- No hay más cotas superiores, pues el orden está definido sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$.

Ejercicio

En cada caso, ¿podemos encontrar un S tal que todos sus elementos sean minimales y maximales a la vez?

- En el orden $(\mathbb{N}\backslash\{0\}, |)$ podemos tomar $S = \{2, 3, 5\}$. Como no se dividen entre sí, son todos minimales y maximales.
- En el orden $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ podemos tomar $S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Como ninguno de los conjuntos en S es subconjunto de ninguno de los demás, son todos minimales y maximales.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Ejercicio

Demuestre el resultado análogo para el máximo.

Esto nos permite hablar de **el** mínimo o **el** máximo, que denotaremos por $min(S)$ y $max(S)$ respectivamente.

Relaciones de orden

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ no vacío. Si S tiene un elemento mínimo, este es único.

<ins>Demostración:</ins> Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall x, y \in S(x \text{ es mínimo} \wedge y \text{ es mínimo} \rightarrow x = y)$$

Por demostración directa, supongamos que S tiene dos mínimos s_1, s_2. Como son mínimos, $s_1, s_2 \in S$, y también $s_1 \preceq s_2$ y $s_2 \preceq s_1$. Como $\preceq$ es una relación de orden, es antisimétrica, y luego $s_1 = s_2$,. Por lo tanto, si hay un mínimo, este es único.

La demostración de unicidad del máximo es completamente análoga.

Vimos que hay conjuntos sin mínimo o máximo. La siguiente definición extiende estos conceptos.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Diremos que s es un **ínfimo** de S si es una cota inferior, y para cualquier otra cota inferior s' se tiene que $s' \preceq s$. Es decir, el ínfimo es la mayor cota inferior.

Análogamente se define el **supremo** de un conjunto.

Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

Un ejemplo típico son los intervalos abiertos en el orden $(\mathbb{R}, \leq)$. Por ejemplo, $(0, 1)$ no tiene mínimo pero sí infimo, 0; y no tiene máximo pero sí supremo, 1.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Esto nos permite hablar de **el** supremo o **el** ínfimo, que denotaremos por $sup(S)$ e $inf(S)$ respectivamente.

Teorema

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$. Si S tiene supremo o ínfimo, estos son únicos.

<u>Demostración:</u> de manera similar a la demostración del mínimo, supongamos que S tiene dos supremos s_1 y s_2. Por definición de supremo, ambos son cotas superiores de S.
Como s_1 es supremo, para toda cota superior s de S se tiene que $s_1 \preceq s$, pues el supremo es la menor cota superior, y en particular, $s_1 \preceq s_2$, pues s_2 es cota superior.
Realizando un razonamiento análogo, obtenemos también que $s_2 \preceq s_1$, y como $\preceq$ es antisimétrica, se tiene que $s_1 = s_2$. Concluimos entonces que si existe un supremo, este es único.

La demostración de unicidad del ínfimo es completamente análoga.

¿Existen conjuntos no vacíos acotados inferiormente (superiormente) que no tengan ínfimo (supremo)?

- Los órdenes $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ siempre tienen si están acotados.
- En $(\mathbb{Q}, \leq)$ sí, por ejemplo $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Este conjunto está acotado superiormente (por ejemplo por 2), pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Uno podría estar tentado de decir que el supremo es $\sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. El supremo debe pertenecer al conjunto sobre el cual está definido el orden.

Relaciones de orden

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Este se dice **superiormente completo** si para cada $S \subseteq A$ no vacío, si S tiene cota superior, entonces tiene supremo.

De manera similar definimos el concepto de ser **inferiormente completo**.

Dado el ejemplo anterior, tenemos que $(\mathbb{Q}, \leq)$ no es superiormente completo por el contraejemplo $S = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$. Una observación importante es que tampoco es inferiormente completo: basta tomar $S' = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \geq 2\}$.

Esto motiva el siguiente teorema:

Teorema

$(A, \leq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ejercicio (Propuesto ★)

Demuestre el teorema.

Teorema

$(A, \preceq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Demostración: Demostraremos la dirección hacia la derecha; la otra dirección es análoga y se deja como ejercicio.

Supongamos que $(A, \preceq)$ es tal que $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado superiormente, tiene supremo. Queremos demostrar que $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S está acotado inferiormente, tiene ínfimo. Sea entonces $S \subseteq A$ no vacío. Supongamos que está acotado inferiormente. Demostraremos que tiene ínfimo.

Teorema

$(A, \leq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Bajo nuestro supuesto, S está acotado inferiormente, es decir, tiene al menos una cota inferior. Tomemos el siguiente conjunto:

$$S_{ci} = \{a \in A \mid a \text{ es cota inferior de } S\}$$

Es claro que $S_{ci} \neq \emptyset$. Por otra parte, como todos los elementos de S_{ci} son cotas inferiores de S, por definición de cota inferior se cumple que

$$\forall x \in Sci \quad \forall y \in S \quad x \leq y$$

de donde es claro que S_{ci} está acotado superiormente (por todos los elementos de S). Luego, como $(A, \leq)$ es superiormente completo, S_{ci} tiene supremo, $sup(S_{ci})$, el que también es una cota superior de S_{ci}.

Teorema

$(A, \leq)$ es superiormente completo si y sólo si es inferiormente completo.

Ahora, como todos los elementos de S son cotas superiores de S_{ci} y $sup(S_{ci})$ es la menor cota superior de S_{ci}, se cumple que

$$\forall y \in S \quad sup(S_{ci}) \leq y.$$

De esto último se deduce que $sup(S_{ci})$ es una cota inferior de S, por lo que $sup(S_{ci}) \in S_{ci}$ y es el máximo porque es cota superior. Entonces, $sup(S_{ci})$ es la mayor cota inferior de S, es decir, es el ínfimo de S:

$$inf(S) = sup(S_{ci})$$

Concluimos entonces que $(A, \leq)$ es inferiormente completo.

Outline

Objetivos de la clase

- Construir nuevos conjuntos a partir de relaciones de equivalencia.
- Comprender concepto de orden parcial y total.