Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

18 de marzo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - P. Barceló

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 25 de marzo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Se define la siguiente función:

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 0 \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n \geq 2 \end{cases}$$

Se le pide realizar lo siguiente:

(1) Demostrar que $A(m, 2) = 4$ para todo $m \geq 1$.

(2) Demostrar que $A(1, n) = 2^n$ para todo $n \geq 1$.

(3) Demostrar que $A(m, n+1) > A(m, n)$ para todo $m, n \geq 0$.

(4) Demostrar que $A(m+1, n) \geq A(m, n)$ para todo $m, n \geq 0$.

Pregunta 2

Considere un punto (dimension 0). Si duplica el punto, lo dezplaza una distancia d y los une, generará una linea de largo d. Considere una linea de largo d (dimension 1). Si la duplica, desplaza paralelamente una distancia d y la une, generará un cuadrado. Considere un cuadrado de lado d (dimensión 2). Si lo duplica, desplaza paralelamente una distancia d y los une, generará un cubo. Ésta construcción le permite construir hipercubos de la dimensión que desee[1].

Sea n la dimensión de su hipercubo, si desea saber cuántos elementos de dimension m posee puede usar la expresión inductiva de $P(n, m)$:

(a) $P(0, 0) = 1$

(b) $P(n, m) = 0, \quad$ si $n < m$

(c) $P(n + 1, m) = 2 \cdot P(n, m), \quad$ si $m = 0$

(d) $P(n + 1, m + 1) = 2 \cdot P(n, m + 1) + P(n, m), \quad$ en otro caso

Donde (a) es el caso base es que un punto posee un punto. (b) Establece que al fijar una dimensión, no hay elementos de dimensiones más grandes. (c) Establece que los puntos simplemente se duplican al aumentar la dimensión. Y (d) establece que en el caso general se copia la dimensión anterior y se suman las nuevas conexiones tras el desplazamiento.

Considere la fórmula para calcular el número de elementos:

$$P'(n, m) = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$$

Demuestre por inducción simple sobre n que si $0 \leq m \leq n$, entonces $P(n, m) = P'(n, m)$.

[1]Visualización en: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31380489`