Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 1 - Inducción

15 de marzo de 2024

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propieddad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1) es verdadero$"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).

2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.

3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $k+1$. $(p(i)\forall i \leq k) \implies p(k+1)$.

- Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

- **Inducción Estructural:** Se utiliza cuando se quiere demostrar una propiedad en una estructura que está definida inductivamente (la inducción simple es un caso particular de inducción estructural), por ejemplo en listas enlazadas, en arboles, grafos, etc. Se utiliza BI, HI y TI de la misma forma que en la inducción simple.

1. Inducción Simple

Capítulo 5.1 de Ross (ejercicios 24 y 31)

1.1. Ejercicio A

Demuestre, utilizando inducción simple, que para todo número natural n la expresión

$$n^2 + n$$

es par.

Solución:

- **CB:** Para $n = 0$:
$$0^2 + 0 = 0,$$
y 0 es par.
- **HI:** Supongamos que para algún n se cumple que $n^2 + n$ es par.
- **TI:** Se debe demostrar que:
$$(n+1)^2 + (n+1)$$
es par. Expandamos:
$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 2.$$
Podemos reescribirlo como:
$$(n^2 + n) + 2(n+1).$$
Por HI, $n^2 + n$ es par, y claramente $2(n+1)$ es par. Por lo que $(n+1)^2 + (n+1)$ es par.

Por el principio de inducción, se concluye que $n^2 + n$ es par para todo número natural n.

1.2. Ejercicio B

Encuentre los números naturales n que satisfacen la desigualdad

$$2n + 3 \leq 2^n.$$

Demuestre que, a partir de cierto número natural, la desigualdad se cumple para todos los números posteriores, utilizando inducción simple.

Solución:

Sea

$$P(n) : \quad 2n + 3 \leq 2^n.$$

- Para $n = 0$: $2(0) + 3 = 3$ y $2^0 = 1$; como $3 \not\leq 1$, $P(0)$ es falsa.
- Para $n = 1$: $2(1) + 3 = 5$ y $2^1 = 2$; $5 \not\leq 2$ (falsa).
- $\vdots$
- Para $n = 4$: $2(4) + 3 = 11$ y $2^4 = 16$; como $11 \leq 16$, $P(4)$ es verdadera.

Se observa que la desigualdad se cumple a partir de $n = 4$.

Demostración por Inducción:

- **CB:** Verificamos $P(4)$:
$$2(4) + 3 = 11 \leq 16 = 2^4.$$
- **HI:** Supongamos que para algún $n \geq 4$ se cumple:
$$2n + 3 \leq 2^n.$$
- **TI:** Se debe demostrar que:
$$2(n + 1) + 3 \leq 2^{n+1}.$$
Partiendo de la hipótesis, tenemos:
$$2n + 3 \leq 2^n.$$
Además, para $n \geq 4$ se verifica que $2 \leq 2^n$. Sumando estas desigualdades:
$$(2n + 3) + 2 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$
es decir,
$$2(n + 1) + 3 \leq 2^{n+1}.$$

Por lo que podemos concluir que la desigualdad se cumple para todos los $n \geq 4$

2. Inducción Fuerte

Sea $b \geq 2$ un número natural fijo. Decimos que un número natural $n \geq 0$ se puede escribir en base b si existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b - 1\}$ tal que

$$n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$$

Demuestre por inducción fuerte que todo número natural $n \geq 0$ se puede escribir en base b.

Solución:

Existen varias posibles soluciones:

Opción 1
Sea b un natural mayor o igual a 2 .

- **CB**: Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$). Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.
- **HI**: Sea n natural. Suponemos que para todo natural p tal que $p < n$, existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $p = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.
- TI: El natural n se puede escribir $n = p \cdot b + r$ donde p es el resultado de la división entera entre n y b. Es decir, el mayor p que cumple con $n = p \cdot b + r$ (porque $b \geq 2$). Así, tenemos que el resto r cumple con $r < b$

Luego, utilizando la HI, se tiene que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que

$$n = \left(b \cdot \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i\right) + r \cdot 1 = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^{i+1} + r \cdot b^0$$

Notar que en la sumatoria el exponente de b más chico es b^1, por lo que no comparte términos con el resto acompañado por b^0.

Finalmente, utilizando los casos base para el resto y las constantes de la hipótesis, existen $\ell + 1$ números naturales $k'_0, \ldots, k'_\ell \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que:

- $k'_0 = r$,
- para $i \in \{1, \ldots, \ell\}, k'_i = k_{i-1}$y
- $n = \sum_{i=0}^{\ell} k'_i \cdot b^i$.

Se concluye por principio de inducción fuerte que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$.

Opción 2
Sea b un natural mayor o igual a 2 .

- BI: Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$). Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$. (En esta solución basta demostrar sólo el caso del $n = 0$.)

- HI: Sea n natural. Suponemos que para todo natural p tal que $p < n$, existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $p = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.
- TI: Desde el natural n se puede obtener el mayor j que cumple con $n >= b^j$ (porque $b \geq 2$). Luego, tomando el mayor k que cumple con $n >= k \cdot b^j$. Si $n = k \cdot b^j$, ya encontramos como escribirlo en base b.

  Si $n > k \cdot b^j$, tomamos p que cumple con $n = k \cdot b^j + p$. Notar que $p < b^j$ ya que en otro caso se podría tomar un k mayor.

Utilizando la **HI**, se tiene que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que

$$n = k \cdot b^j + \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$$

Como $p < b^j$, necesariamente $l \leq j$ por lo que b^j no aparece en la sumatoria.

Finalmente, existen $j+1$ números naturales $k'_0, \ldots, k'_j \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que:

- $k'_j = k$,
- para $i \in \{\ell, \ldots, j-1\}, k'_i = 0$,
- para $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}, k'_i = k_i$y
- $n = \sum_{i=0}^{j} k'_i \cdot b^i$.

Se concluye por principio de inducción fuerte que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$.

Opción 3
Sea b un natural mayor o igual a 2 .

- BI: Sea n un natural menor que b. Luego, n se puede escribir con un sólo dígito en base b de la forma $n = n \cdot 1 = k_0 \cdot b^0$ (porque $b \geq 1$). Se concluye que existe $l = 1$ natural $k_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$. (En esta solución basta demostrar sólo el caso del $n = 0$ y $n = 1$.)
- HI: Sean n un natural. Suponemos que existen $\ell \geq 1$ números naturales $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ tal que $n = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i$.
- TI: Por BI, el natural $n+1$ se puede escribir como $n+1 = \sum_{i=0}^{\ell-1} k_i \cdot b^i + 1 \cdot b^0$. Sin embargo, puede ocurrir que $k_0 + 1 = b$ por lo que no se puede definir una nueva constante como $k'_0 = k_0 + 1$. Debemos demostrar que apesar de que hay un acarreo (carry), el número se puede escribir en base b. Tenemos que para cualquier exponente j se cumple que si $k = b$, entonces $k \cdot b^j = b^{j+1}$.

Dadas las constantes $k_0, \ldots, k_{\ell-1}$, el algoritmo de propagación de carry que calcula el sucesor es tal que: si $k_0 + 1 < b$ termina. Si $k_0 + 1 = b$, la constante que acompaña a b^0 se define como 0 y se le suma 1 a k_1. Luego, iterativamente si para algún i que recibe el acarreo se tiene que $k_i + 1 = b$, entonces la constante que acompaña a b^i se define como 0 y se propaga el acarreo a $i + 1$. Si $k_i + 1 < b$, el algoritmo termina.

Un algoritmo siempre debe terminar y debe producir el output correcto. Sabemos que es correcto porque siempre se cumple que $k \cdot b^j = b^{j+1}$. Y sabemos que siempre termina porque en el peor caso el acarreo se debe propagar hasta $k_\ell = 1$.
Sean $k'_0, \ldots, k'_{\ell-1}, k'_\ell$ las constantes resultantes de propagar el acarreo utilizando el algoritmo de sucesor en las constantes $k_0, \ldots, k_{\ell-1}$. Notar que k'_ℓ sólo puede valer 0 o 1 . Finalmente, existen $l + 1$ constantes tal que $n + 1 = \sum_{i=0}^{\ell} k'_i \cdot b^i$.
Se concluye por principio de inducción simple que cualquier natural se puede escribir en base b y además en cualquier base $b \geq 2$.

3. Inducción Estructural

Considere la siguiente definición inductiva:

El conjunto de los árboles binarios S es el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\bullet \in S$
2. Si $t_1, t_2 \in S$, entonces $\bullet(t_1, t_2) \in S$.

Definimos el tamaño $| * | : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $| \bullet | = 1$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $|t| = 1 + |t_1| + |t_2|$

Asimismo, definimos la altura $h : S \to \mathbb{N}$ de un árbol inductivamente como:

1. $h(\bullet) = 0$
2. Si $t_1, t_2 \in S$ y $t = \bullet(t_1, t_2)$, entonces $h(t) = 1 + max\{h(t_1), h(t_2)\}$.

Demuestre que para todo árbol binario $t \in S$ se cumple que

$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$

Solución

Se demostrará la propiedad utilizando el Principio de Inducción Estructural sobre el conjunto de los árboles binarios S.

BI: Para el caso base $t = \bullet$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} | \bullet | &\leq 2^{h(\bullet)+1} - 1 \\ 1 &\leq 2^{0+1} - 1 \\ 1 &\leq 1 \end{aligned}$$

por lo que la propiedad se cumple.

HI: Suponemos que la propiedad se cumple para $t_1, t_2 \in S$, es decir, que lo siguiente se cumple:

$$|t_1| \leq 2^{h(t_1)+1} - 1$$
$$|t_2| \leq 2^{h(t_2)+1} - 1$$

TI: Debemos demostrar que para un árbol binario construido usando las reglas de construcción ($t = \bullet(t_1, t_2)$), se cumple que $|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$. Sumando las desigualdades anteriores, se tiene lo siguiente:

$$|t_1| + |t_2| \leq 2^{h(t_1)+1} - 1 + 2^{h(t_2)+1} - 1$$
$$1 + |t_1| + |t_2| \leq 2^{h(t_1)+1} + 2^{h(t_2)+1} - 1$$

Uno de $\{h(t_1),\, h(t_2)\}$ necesariamente será $max\{h(t_1),\, h(t_2)\}$, y el otro necesariamente será $min\{h(t_1),\, (t_2)\}$:

$$|t| \leq 2^{max\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} - 1$$
$$|t| \leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \tag{1}$$

Por la definición de $h(t)$,

$$h(t) = max\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Por otro lado, $max\{h(t_1),\, h(t_2)\} \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\}$.
Luego,

$$h(t) \geq min\{h(t_1),\, h(t_2)\} + 1$$

Teniendo esto en consideración, al volver a la expresión (1), por transitividad, se tiene que

$$|t| \leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{min\{h(t_1),\, h(t_2)\}+1} \leq 2^{h(t)} - 1 + 2^{h(t)}$$
$$|t| \leq 2 \cdot 2^{h(t)} - 1$$
$$|t| \leq 2^{h(t)+1} - 1$$

con lo que se demuestra lo deseado.$\square$