Satisfacibilidad y modelación

Clase 5

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfacibilidad de fórmulas.
- Aplicar lógica para modelar problemas.
- Conocer las formas normales.

Outline

Satisfacibilidad

Definición

Una fórmula φ es **satisfacible** si existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

Las siguientes fórmulas son satisfacibles:

$$(p \vee q) \to r$$
$$p \to \neg p$$

Las siguientes fórmulas no son satisfacibles:

$$p \wedge \neg p$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

Una fórmula es satisfacible si hay algún "*mundo*" en el cual es verdadera.

El problema de satisfacibilidad

Problema de satisfacibilidad (SAT)

Sea φ una fórmula proposicional. El **problema de satisfacibilidad** consiste en determinar si φ es satisfacible o no.

Este es un problema central en computación.

- Permite resolver problemas fuera de la lógica...
- ... usando modelación en lógica proposicional.

¿Es un problema difícil? ¿Cómo se resuelve?

Modelación en lógica proposicional

Ejercicio

Sea M un mapa conformado por n países. Decimos que M es 3-coloreable si se pueden pintar todos los países con 3 colores sin que ningún par de países adyacente tenga el mismo color. En otras palabras, los países vecinos deben tener colores distintos.

Dado un mapa M, construya una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

La fórmula φ debe **codificar** los requisitos y estructura del problema.

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Sea M el mapa. Consideremos la lista de países $\{1, 2, \ldots, n\}$ y una lista de pares de países adyacentes $A = \{(i, j), (k, m), \ldots\}$.

Seguiremos la siguiente estrategia para resolver el problema:

1. Definición de variables proposicionales:
   - Variables predefinidas por el problema.
   - Variables que hay que asignar.
2. Construcción de restricciones a través de fórmulas proposicionales.
3. Demostración de que φ cumple lo pedido (si y solo si).

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Primero, definimos las variables proposicionales. Usamos dos tipos de variables:

- Para $1 \leq i, j \leq n$ (con $i \neq j$) definimos

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es adyacente con } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

  Observamos que cada p_{ij} se conoce de antemano una vez que conocemos el mapa M. Debemos **inicializarlas**.

- Análogamente, para $1 \leq i \leq n$ definimos

$$r_i \quad b_i \quad g_i$$

  que valen 1 si el país i es pintado rojo, azul o verde respectivamente, y 0 en caso contrario. Estas variables deben ser **determinadas** para resolver el problema.

¿Qué restricciones son naturales para este problema?

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

Para representar el problema vamos a definir φ como la conjunción de las siguientes fórmulas.

- "*Cada país tiene uno y solo un color.*"

$$\varphi_C = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big((r_i \vee b_i \vee g_i) \wedge \neg(b_i \wedge g_i) \wedge \neg(r_i \wedge g_i) \wedge \neg(r_i \wedge b_i) \Big)$$

- "*Países adyacentes deben tener colores distintos*"

$$\varphi_D = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1, i\neq j}^{n} \left(p_{ij} \rightarrow \Big(\neg(r_i \wedge r_j) \wedge \neg(b_i \wedge b_j) \wedge \neg(g_i \wedge g_j) \Big) \right)$$

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

- Inicializamos las variables conocidas por la instancia M del problema

$$\varphi_M = \bigwedge_{(i,j)\in A} p_{ij} \quad \wedge \bigwedge_{(i,j)\notin A} \neg p_{ij}$$

Entonces, nuestra fórmula será la conjunción de las fórmulas anteriores:

$$\varphi = \varphi_C \wedge \varphi_D \wedge \varphi_M$$

Ahora demostraremos que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfacible. Es decir, existe una coloración si y sólo si existe una valuación que hace verdadera la fórmula.

Debemos demostrar dos direcciones.

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

($\Rightarrow$) **P.D.** Si M es 3-coloreable, entonces φ es satisfacible.

Supongamos que M es 3-coloreable. Luego, existe una coloración válida para M. Construimos una valuación σ según:

$$
\begin{aligned}
\sigma(p_{ij}) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i,j \text{ son adyacentes en } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\sigma(r_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es rojo en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\sigma(b_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es azul en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
\sigma(g_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es verde en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Esta dirección consiste en construir una valuación que satisface φ.

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

($\Rightarrow$) (continuación) Ahora verificamos que $\sigma(\varphi) = 1$:

- $\sigma(\varphi_C)$: para cada país i, se debe cumplir que $\sigma(r_i) = 1$, o que $\sigma(g_i) = 1$, o que $\sigma(b_i) = 1$, y solo una de estas, por construcción de σ a partir de una coloración. Luego, es claro que $\sigma(\varphi_C) = 1$.
- $\sigma(\varphi_D)$: para cada combinación de países i, j, sabemos que $\sigma(p_{ij}) = 1$ solo cuando los países son adyacentes. Entonces, como en φ_D tenemos una implicancia, solo nos preocuparemos de los pares de países adyacentes. En el consecuente de la implicancia, si $\sigma(r_i) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(r_j) = 0$, dado que son adyacentes y construimos σ a partir de una coloración. El análisis para cuando i es de otro color es análogo.

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

($\Rightarrow$) (continuación)

- $\sigma(\varphi_M)$: por construcción de σ es claro que $\sigma(\varphi_M) = 1$ (inicialización válida), dado que la construimos precisamente como esta fórmula, asignando 1 a pares de países adyacentes y 0 a los que no.

Finalmente, como φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$, y entonces φ es satisfacible.

La dirección opuesta comienza suponiendo que φ es satisfacible.

Satisfacibilidad

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

($\Leftarrow$) **P.D.** Si φ es satisfacible, entonces M es 3-coloreable.

Supongamos que φ es satisfacible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$, y por construcción $\sigma(\varphi_C) = \sigma(\varphi_D) = \sigma(\varphi_M) = 1$. Usaremos esta valuación para colorear el mapa.

En primer lugar, como $\sigma(\varphi_C) = 1$, sabemos que para cada i, $\sigma(r_i \vee g_i \vee b_i) = 1$, y por lo tanto cada país tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(r_k) = 1$, es decir, pintamos el país k rojo. Como también se cumple que $\sigma(\neg(r_k \wedge g_k)) = 1$ y $\sigma(\neg(r_k \wedge b_k)) = 1$, necesariamente $\sigma(g_k) = 0$ y $\sigma(b_k) = 0$, y por lo tanto cada país tiene un único color.

Esta dirección busca deducir la **existencia** de una coloración a partir de la valuación.

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

($\Leftarrow$) (continuación)

En segundo lugar, como $\sigma(\varphi_M) = 1$, sabemos que si i, j son adyacentes en M, $\sigma(p_{ij}) = 1$, y si no lo son, $\sigma(p_{ij}) = 0$. Ahora, en $\sigma(\varphi_D) = 1$, solo nos interesa el primer caso (dado que en el segundo no podemos concluir nada de la implicancia). Tomemos entonces i, j adyacentes, y sin pérdida de generalidad supongamos que $\sigma(r_i) = 1$. Como $\sigma(\neg(r_i \wedge r_j)) = 1$ para todo j adyacente a i, necesariamente $\sigma(r_j) = 0$, y entonces los países adyacentes no pueden estar pintados del mismo color.

Concluimos que usando los colores asignados por σ sobre φ a través de r_i, g_i, b_i, podemos 3-colorear M.

Otros conceptos asociados a satisfacibilidad

Definición

Una fórmula φ es una **contradicción** si no es satisfacible; es decir, para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 0$.

Ejemplo

$p \wedge \neg p$

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

$p \vee \neg p$

$p \leftrightarrow p$

Otros conceptos asociados a satisfacibilidad

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Podemos definir la equivalencia lógica de una manera alternativa:

Teorema

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in L(P)$ son lógicamente equivalentes si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología.

Demuestre el teorema ($\bigstar$).

Outline

Formas normales

Definición

Un literal es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplo

Para el conjunto de variables $P = \{p, q, r\}$, las fórmulas p y $\neg r$ son literales.

Los literales son los átomos de la construcción que mostraremos.

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma:

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

Donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$.

Ejemplo

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

¿Hemos visto fórmulas en DNF antes?

Recordatorio: Conectivos y fórmulas

	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	φ
σ_1	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
σ_2	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Ahora tomamos la disyunción de las valuaciones que satisfacen a φ:

$$\bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \varphi_j \;=\; \bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$

La fórmula resultante es equivalente a φ.

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma:

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

Donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$.

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Ya demostramos esto y ¡mostramos cómo construir tal fórmula!

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

Donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$.

Observaciones:

- Una disyunción de literales se llama una **cláusula**. Los C_i anteriores son cláusulas.
- Una fórmula en CNF es una conjunción de cláusulas.

Ejemplo

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$

¿Podríamos obtener una fórmula en CNF para una tabla de verdad?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

Donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$.

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

Demuestre el teorema (★○).

Formas normales

Demostración

Como sabemos que toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF, demostraremos que toda fórmula en DNF es equivalente a una fórmula en CNF por inducción en la cantidad de disyunciones de la primera fórmula. Dado un conjunto de variables proposicionales P, tenemos la siguiente propiedad sobre los naturales:

$$\textit{Prop}(n): \text{toda fórmula } \varphi \in \mathcal{L}(P) \text{ en DNF con a lo más } n \text{ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula } \psi \text{ en CNF } (\varphi \equiv \psi).$$

Demostraremos esta propiedad por inducción fuerte.

Formas normales

$Prop(n)$: toda fórmula $\varphi \in L(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).
BI: $Prop(0)$: una fórmula en DNF con 0 disyunciones es de la forma

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k$$

por lo que está trivialmente en CNF.

HI: Suponemos que $Prop(n-1)$ es cierta; es decir, toda fórmula φ en DNF con a lo más $n-1$ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF.

Formas normales

TI: Debemos demostrar que toda fórmula φ' en DNF con n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ' en CNF. Cualquier φ' será de la forma

$$\varphi' = B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_{n-1} \vee B_n$$

donde los B_i son conjunciones de literales. Por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_{n-1}) \vee B_n$$

y por HI $\varphi' \overset{HI}{\equiv} \psi \vee B_n$, con ψ una fórmula en CNF. Expandiendo la conjunción B_n:

$$\varphi' \equiv \psi \vee (l_{n,1} \wedge \ldots \wedge l_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Por distributividad:

$$\varphi' \equiv (\psi \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (\psi \vee l_{n,k_n})$$

Como ψ está en CNF, podemos expandirla:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge ((C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \vee l_{n,k_n})$$

con C_i cláusulas. Por distributividad:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1})) \wedge \ldots \wedge ((C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n}))$$

Y por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

TI: Como los C_i son cláusulas, es claro que $(C_i \vee l_{n,j})$ es una cláusula.
Luego, tenemos que

$$\psi' = (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

está en CNF y es tal que $\varphi' \equiv \psi'$. $\square$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de satisfacibilidad de fórmulas.
- Aplicar lógica para modelar problemas.
- Conocer las formas normales.