Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía extra - Repaso I1

5 de abril de 2024

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázal

---

1. Lógica de predicados

Definimos el cuantificador de existencia y unicidad ($\exists!$) de la siguiente manera:

$\exists! x.P(x)$ va a ser verdadero si es que existe solamente un elemento x tal que se cumpla $P(x)$.

Formalmente, podemos definirlo usando los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ de la siguiente manera:

$$\exists! x.P(x) \equiv (\exists x.P(x)) \wedge (\forall y \forall z.(P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z))$$

o de forma equivalente:

$$\exists! x.P(x) \equiv (\exists x.P(x) \wedge \forall y.(P(y) \rightarrow y = x))$$

Determine si las siguientes afirmaciones son correctas:

1. $\exists! x \in \mathbb{N}.(x + 3 = 5)$
2. $\exists! x \in \mathbb{N}.(x^2 = 4)$
3. $\exists! x \in \mathbb{Z}.\forall y \in \mathbb{Z}.(x + y = 0 \rightarrow y = -x)$
4. $\exists! x \in \mathbb{N}.\forall y \in \mathbb{N}.(xy = x \implies y = 1)$

Respuestas:

1. **Verdadero.** Existe un único $x = 2$ que satisface $x + 3 = 5$.

   Formalmente: Se cumple existencia ya que $2 + 3 = 5$ y se cumple unicidad ya que $y + 3 = 5 \implies y = 2 = x$

2. **Verdadero.** $x^2 = 4$ tiene dos soluciones reales ($x = \pm 2$), pero sólo $x = 2$ está en $\mathbb{N}$, así que la unicidad se mantiene.
3. **Falso.** La propiedad se cumple para todos los enteros x; no hay unicidad.

   Formalmente, plantearemos el contrajemplo $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Notemos que con $y = -1$ se cumple que $x_1 + y = 0 \implies x_1 = -y$, por lo que se cumple el predicado para x_1. Analogamente para x_2, si tomamos $y = -2$ se cumple que $x_2 + y = 0$ y $x_2 = -y$. Finalmente, podemos ver que la propocision se cumple para x_1 y x_2, pero $x_1 \neq x_2$.
4. **Falso.** Notemos que, si $x \neq 0$, entonces $xy = x \implies y = 1$ al dividir por x a ambos lados. Por lo tanto, la propocision se va a cumplir para todo $x \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

2. Lógica Proposicional:

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

2.a

Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Solucion Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera y sean α, β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$.
Por demostrar: $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.

Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \alpha$.
Como β está en Σ, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$ (son lógicamente equivalentes), entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por esto, queda demostrado que para cualquier vector de valuaciones $\vec{v}$ se cumple que $\Sigma \backslash \alpha \models \alpha$, es decir, Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2.b.1

Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante

Solucion La afirmación es correcta y lo demostraremos de la siguiente forma. Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera tal que Σ es redundante de a pares.

Por demostrar: Σ es redundante
Suponga que Σ es redundante a pares, entonces sabemos que existen α y β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \models \beta$.
Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \{\beta\}$. Dado que α está en $\Sigma \backslash \{\beta\}$, entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por definición de consecuencia lógica, como $\alpha \models \beta$ y $\alpha(\vec{v}) = 1$, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$. Por lo tanto, queda demostrado que si Σ es redundante a pares, entonces Σ es redundante.

2.b.2

Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares

Solucion En este caso la afirmación es falsa. Para demostrar que no se cumple lo propuesto se propondrá un posible contraejemplo que deja en evidencia que existe un caso donde no se cumple lo pedido.
Considere el conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Debemos demostrar que este conjunto es redundante y no es redundante de a pares.
Su tabla de verdad que se utilizará para la demostración es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para que sea redundante se tiene que cumplir que existe α tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$. Si consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$ nos podemos dar cuenta que $\{p, q\} \models p \leftrightarrow q$. Esto es fácilmente visible mediante la fila 4 de la tabla de verdad. Por lo tanto, Σ es redundante.
Ahora, para demostrar que Σ no es redundante de a pares debemos demostrar que para todo par α, β en Σ con $\alpha \neq \beta$ no se cumple que $\alpha \models \beta$. Como Σ tiene 3 fórmulas proposicionales, debemis ver los 6 casos y demostrar para cada uno que no es cierto que $\alpha \models \beta$.

- $p \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 3)
- $p \models q$: no se cumple (fila 3)
- $p \leftrightarrow p \models q$: no se cumple (fila 1)
- $p \leftrightarrow q \models q$: no se cumple (fila 1)
- $q \models p$: no se cumple (fila 2)
- $q \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 2)

Ya que para todos los pares no se cumple la consecuencia lógica, entonces Σ no es redundante a pares.

3. Inducción Fuerte

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre usando inducción que para $n \geq 3$ se cumple que

$$T(n) \leq 3n \log_2(n-1)$$

Si lo necesita en su desarrollo, considere $\log_2(3) = 1{,}585$

Hint: Para este ejercicio, las siguientes propiedades pueden ser útiles:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \qquad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \frac{n}{2}, \qquad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2}$$

Solución:

CB: Los casos base son $n \in \{3, 4, 5\}$, ya que en esos casos la recurrencia depende de $T(1)$ y $T(2)$.

- Para $n = 3$, tenemos $T(3) = T(1) + T(2) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \log_2(2) = 9$.
- Para $n = 4$, tenemos $T(4) = T(2) + T(2) + 4 = 4 + 4 + 4 = 12 \leq 3 \cdot 4 \cdot \log_2(3) \approx 19{,}019$.
- Para $n = 5$, tenemos $T(5) = T(2) + T(3) + 5 = 4 + 8 + 5 = 17 \leq 3 \cdot 5 \cdot \log_2(4) = 30$.

HI: Sea $n \geq 6$. Para todo $k \in \{3, \ldots, n-1\}$, entonces $T(k) \leq 3k \log_2(k-1)$.

TI: Hay que demostrar que $T(n) \leq 3n \log_2(n-1)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\
&\leq 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) + 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n \quad \text{(HI)} \\
&\leq 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \log_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + n \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ y } \log_2 \text{ es no decreciente}\right) \\
&= 3n\log_2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) \quad \left(\text{factorizamos y } n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \\
&\leq 3n\log_2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) + n \quad \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n+1}{2} \text{ y } \log_2 \text{ no decreciente}\right) \\
&= 3n\log_2\left(\frac{n-1}{2}\right) + n \\
&= 3n(\log_2(n-1) - \log_2(2)) + n \\
&= 3n\log_2(n-1) - 3n\log_2(2) + n \\
&= 3n\log_2(n-1) - 2n \\
&\leq 3n\log_2(n-1)
\end{aligned}$$