Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

18 de marzo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - P. Barceló

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 25 de marzo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Se define la siguiente función:

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 0 \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n \geq 2 \end{cases}$$

Se le pide realizar lo siguiente:

(1) Demostrar que $A(m,2) = 4$ para todo $m \geq 1$.

(2) Demostrar que $A(1,n) = 2^n$ para todo $n \geq 1$.

(3) Demostrar que $A(m,n+1) > A(m,n)$ para todo $m,n \geq 0$.

(4) Demostrar que $A(m+1,n) \geq A(m,n)$ para todo $m,n \geq 0$.

Pregunta 2

Considere un punto (dimension 0). Si duplica el punto, lo dezplaza una distancia d y los une, generará una linea de largo d. Considere una linea de largo d (dimension 1). Si la duplica, desplaza paralelamente una distancia d y la une, generará un cuadrado. Considere un cuadrado de lado d (dimensión 2). Si lo duplica, desplaza paralelamente una distancia d y los une, generará un cubo. Ésta construcción le permite construir hipercubos de la dimensión que desee[1].

Sea n la dimensión de su hipercubo, si desea saber cuántos elementos de dimension m posee puede usar la expresión inductiva de $P(n, m)$:

(a) $P(n, m) = 1, \quad$ si $n = m$

(b) $P(n, m) = 0, \quad$ si $n < m$

(c) $P(n + 1, m) = 2 \cdot P(n, m), \quad$ si $m = 0$

(d) $P(n + 1, m + 1) = 2 \cdot P(n, m + 1) + P(n, m), \quad$ en otro caso

Donde (a) es el caso base es que un hipercubo de dimensión n contiene 1 hipercubo de dimensión n. (b) Establece que al fijar una dimensión, no hay elementos de dimensiones más grandes. (c) Establece que los puntos simplemente se duplican al aumentar la dimensión. Y (d) establece que en el caso general se copia la dimensión anterior y se suman las nuevas conexiones tras el desplazamiento.

Considere la fórmula para calcular el número de elementos:

$$P'(n, m) = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$$

Demuestre por inducción simple sobre n que si $0 \leq m \leq n$, entonces $P(n, m) = P'(n, m)$.

[1] Visualización en: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31380489`