Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

9 de Abril de 2025

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

Uno puede dividir el plano en regiones utilizando cículos. Por ejemplo, (i) 1 cículo en el plano lo divide en una región interior y otra exterior, (ii) 2 círculos no intersectados lo dividen en 3 regiones y (iii) 2 círculos intersectados en 4 regiones.
Use inducción para demostrar que si $n > 0$ círculos dividen el plano en regiones, entonces estas regiones pueden ser coloreadas con dos colores diferentes de tal forma que no hayan dos regiones con un borde en común que reciban el mismo color.

Solución

Se demuestra por inducción en n.

CB: Si hay un círculo, entonces podemos pintar el interior negro y el exterior blanco, por lo que la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Sea $n > 0$ y supongamos que si hay n círculos que dividen el plano en regiones, las regiones obtenidas pueden ser pintadas con dos colores (s.p.g. negro y blanco) de manera que no haya regiones con un borde común que reciban el mismo color.

TI: Si hay $n+1$ círculos, sacamos un círculo cualquiera. Como quedan n círculos, por HI se puede colorear con dos colores de manera que no haya regiones con un borde común que reciban el mismo color. A este plano agregamos el círculo sacado y cambiamos el color de cada región nueva al interior de este círculo (de blanco a negro y de negro a blanco).

Notemos entonces que las regiones formadas al interior son las mismas que ya existían, y si antes estaban pintadas de dos colores sin que las regiones con borde común del interior reciban el mismo color, siguen sin tener el mismo color (aunque ahora tienen los colores invertidos). Por otra parte, ahora tenemos adicionalmente los bordes adicionales que aparecen de agregar la circunferencia que divide regiones anteriores en dos, la parte interior del círculo y la parte exterior del círculo de la región original, y justamente son estas las que tienen ese borde común. Notemos finalmente que dado que al interior del círculo invertimos los colores, las áreas colindantes tendrán colores distintos.

Esta coloración cumple la propiedad original, por lo que por inducción, concluimos que para todo $n > 0$, cuando n círculos dividen el plano en regiones, estas regiones pueden ser coloreadas con dos colores diferentes de tal forma que no haya dos regiones con un borde común que reciban el mismo color.

Pauta (6 ptos)

- 1.5 puntos por **CB**
- 1.5 puntos por **HI**
- 3.0 puntos por **TI**

Pregunta 2

Considere la función $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $A(0,0) = 0$ y:

$$A(m,n) \;=\; \begin{cases} A(m-1,n)+1 & \text{si } n = 0 \text{ y } m > 0 \\ A(m,n-1)+n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Demuestre por inducción fuerte que $A(m,n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $m, n \geq 0$.

Solución

Por inducción en el orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $(m_1, n_1) < (m_2, n_2)$ si y solo si $m_1 < m_2$ o $m_1 = m_1$ y $n_1 < n_2$.

CB: Para $m = n = 0$ se cumple trivialmente, pues por definición

$$A(0,0) = 0 = 0 + \frac{0(0+1)}{2}$$

HI: Sean $n, m \in \mathbb{N}$, y supongamos que $A(j,k) = j + \frac{k(k+1)}{2}$ se cumple para todo (j,k) tal que $(j,k) < (m,n)$.

TI: Consideramos dos casos:

- $n = 0$: Por definición, tenemos que $A(m,n) = A(m,0) = A(m-1,0)+1$. Por HI se cumple que $A(m-1,0) = m-1$, entonces $A(m,0) = m-1+1 = m$ y se cumple la propiedad.
- $n > 0$: Por definición, tenemos que $A(m,n) = A(m,n-1)+n$. Por HI se cumple $A(m,n-1) = m + \frac{n(n-1)}{2}$. Entonces $A(m,n) = m + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2 \cdot n}{2} = m + \frac{n(n+1)}{2}$.

Por principio de inducción fuerte, concluimos que para todo $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se cumple que $A(m,n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$.

Pauta (6 ptos)

- 1.0 puntos por **CB**
- 2.0 puntos por **HI**
- 3.0 puntos por **TI**

Pregunta 3

En esta pregunta tratamos con Lógica Proposicional. Sea P un conjunto finito de proposiciones (también llamadas variables proposicionales) y $\sigma : P \to \{0, 1\}$ una valuación para P. Defina Δ_σ como el conjunto de todas las fórmulas α sobre P tales que $\sigma(\alpha) = 1$. Demuestre que para cualquier conjunto Δ de fórmulas sobre P, si (i) $\Delta_\sigma \subseteq \Delta$ y (ii) Δ es satisfacible, entonces $\Delta_\sigma = \Delta$.

Solución

(1) Note que Δ_σ contiene al menos una fórmula α_σ que solo es cierta en la valuación σ. Esta fórmula es

$$\alpha_\sigma := \bigwedge_{\{p \in P \mid \sigma(p)=1\}} p \wedge \bigwedge_{\{q \in P \mid \sigma(q)=0\}} \neg q$$

(o alguna fórmula equivalente).

(2) Luego, como $\Delta_\sigma \subseteq \Delta$ y $\alpha_\sigma \in \Delta_\sigma$, deducimos que en particular $\alpha_\sigma \in \Delta$. Luego, cualquier valuación que satisface a Δ, debe satisfacer a α_σ, por lo que debe ser σ (la única que la satisface). Como Δ es satisfactible, y solo σ puede satisfacerlo, se tiene que Δ es satisfecho por σ ($\sigma(\Delta) = 1$). Esto quiere decir que para toda fórmula $\alpha \in \Delta$, se cumple que $\sigma(\alpha) = 1$.

(3) Por lo tanto, para toda fórmula $\alpha \in \Delta$, también se tiene que \$$\alpha \in \Delta_\sigma$ por definición, con lo que $\Delta \subseteq \Delta_\sigma$ y concluimos que $\Delta_\sigma = \Delta$.

Pauta (6 ptos)

- 2.0 puntos por (1), notar que hay fórmulas cuya única valuación que la satisface es σ.
- 2.0 puntos por (2), mostrar que toda fórmula en Δ es entonces satisfacible por σ.
- 2.0 puntos por (3), concluir que ambos conjuntos son iguales.

Pregunta 4

En esta pregunta tratamos con la lógica de primer orden. Asuma que nuestro vocabulario μ contiene un solo predicado, la relación R de aridad tres (relación ternaria).

1. Sea A un dominio. Decimos que una relación ternaria $R \subseteq A \times A \times A$ sobre A *codifica* una función binaria, si para todo par $(a, b) \in A \times A$ existe un, y solo un, $c \in A$ tal que $(a, b, c) \in R$.

   Escriba una fórmula ϕ sobre el vocabulario μ, tal que para toda estructura/interpretación $\mathcal{A}$ sobre μ se cumple lo siguiente:

   $$\mathcal{A} \models \phi \iff R^{\mathcal{A}} \text{ codifica una función binaria.}$$

   Recuerde que $R^{\mathcal{A}}$ es la interpretación de R en $\mathcal{A}$.

2. Construya una fórmula ψ sobre el vocabulario μ, tal que para toda estructura/interpretación $\mathcal{A}$ sobre μ, donde $R^{\mathcal{A}}$ codifica una función binaria $f^{\mathcal{A}} : A \times A \to A$, se cumple lo siguiente:

   $$\mathcal{A} \models \psi \iff f^{\mathcal{A}} \text{ es asociativa.}$$

Recuerde que una función binaria f sobre A es *asociativa*, si para todo $a, b, c, \in A$ se cumple que $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$.

Solución

1. La fórmula es

$$\forall x \forall y \left(\exists z R(x, y, z) \ \wedge \ \neg \exists z_1 \exists z_2 (R(x, y, z_1) \wedge R(x, y, z_2) \wedge \neg (z_1 = z_2)) \right)$$

   (o alguna alternativa equivalente).

2. La fórmula es

$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w \left(R(x, y, u) \wedge R(u, z, v) \wedge R(y, z, w) \ \rightarrow \ R(x, w, v) \right)$$

   (o alguna alternativa equivalente).

Pauta (6 ptos)

- 3.0 puntos por la primera fórmula.
- 3.0 puntos por la segunda fórmula.