Teoría de conjuntos

Clase 09

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Introducción

- Hasta ahora hemos usado conjuntos de una manera intuitiva pero razonable.
- Vamos a estudiar la teoría de conjuntos desde un punto de vista **axiomático**.
- Esta teoría se considera la base de las matemáticas.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

- ¿Conjunto?
- ¿Elemento?
- ¿Pertenencia?

Introducción

Ejemplos

$x \in A$

- x pertenece a A.
- x es un elemento de A.

$0 \in \mathbb{N}$

- 0 pertenece a los naturales.

$2 \in \{1,2\} \in \big\{\{1,2\},\{2,3\}\big\}$

- 2 es un elemento de $\{1,2\}$, el que a su vez es un elemento de $\big\{\{1,2\},\{2,3\}\big\}$.

Introducción

Definición

Un **conjunto** es una colección *bien definida* de objetos. Estos objetos se llaman **elementos** del conjunto, y diremos que **pertenecen** a él.

Enunciaremos algunos *axiomas* con los que definiremos formalmente la teoría de conjuntos

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos

Outline

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \to x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✓

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{\, \{1, 2\}, \{2, 3\} \,\}$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto** de B si

$$\forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

En otras palabras, A es subconjunto de B si cada elemento de A está también en B. En tal caso, escribimos

$$A \subseteq B$$

Ejemplo

¿Son ciertas las siguientes contenciones?

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ ✓
- $\{1, 2\} \subseteq \big\{ \{1, 2\}, \{2, 3\} \big\}$ ✗

Axiomas

Definición

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Axiomas

Definición

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Si escribimos esto formalmente:

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

Y si ahora aplicamos la definición de subconjunto y equivalencias lógicas:

$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \land \forall x(x \in B \to x \in A)$$
$$A = B \leftrightarrow \forall x((x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A))$$
$$A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Axiomas

Definición equivalente

Dos conjuntos A y B son **iguales** si y sólo si

$$\forall A \forall B \quad A = B \leftrightarrow \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Este se conoce como **Axioma de extensión**.

- Nos dice que dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos.

Un conjunto queda completamente definido por los elementos que contiene

Axiomas

En conclusión, lo único que define a un conjunto son los elementos que contiene.

Observación

$\{x, x\} = \{x\}$

Los conjuntos no pueden tener elementos repetidos

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

Notación: $A \subsetneq B$.

¿Qué significa que $A \neq B$?

$$\begin{aligned} A = B &\quad\leftrightarrow\quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\ A \neq B &\quad\leftrightarrow\quad A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A \end{aligned}$$

¿Y que $B \nsubseteq A$?

$$\begin{aligned} B \subseteq A &\quad\leftrightarrow\quad \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) &\quad\leftrightarrow\quad \forall x(x \notin B \vee x \in A) \\ B \nsubseteq A &\quad\leftrightarrow\quad \neg\forall x(x \notin B \vee x \in A) &\quad\leftrightarrow\quad \exists x(x \in B \wedge x \notin A) \end{aligned}$$

Axiomas

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que A es **subconjunto propio** de B si

$$A \subseteq B \wedge A \neq B \text{ , o alternativamente, } A \subseteq B \wedge B \nsubseteq A.$$

Notación: $A \subsetneq B$.

Corolario

$B \nsubseteq A$ si y sólo si $\exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axiomas

Nuestra teoría parte de algunas nociones “primitivas” intuitivas.

¿Sabemos si existe algún conjunto?

Axioma del conjunto vacío

$\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$.

- A tal conjunto lo llamaremos el **conjunto vacío**.
- Lo denotaremos por $\varnothing$ o $\{\}$.

Veremos algunas propiedades importantes del conjunto vacío

Axiomas

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Axiomas

Teorema

Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

Demostración

Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \varnothing \to x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\varnothing \subseteq A$. $\square$

Axiomas

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Axiomas

Teorema

Existe un único conjunto vacío.

Demostración

Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \rightarrow A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos A y B vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que A y B son conjuntos, tenemos que $A \subseteq B$, ya que estamos suponiendo que A es vacío. Recíprocamente, se tiene que $B \subseteq A$. Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que $A = B$. $\square$

Axiomas

¿Como podemos definir un conjunto?

- Por extensión (listando sus elementos):

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Podemos hacer algo más *comprensivo*:

$$\mathbb{Z}_5 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 5\}$$

De hecho, necesitamos ser muy específicos... ¿por qué?

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Axiomas

Axioma de abstracción

Si φ es una propiedad sobre objetos, entonces $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es un conjunto.

A sería el conjunto de todos los objetos que cumplen la propiedad φ:

$$x \in A \leftrightarrow \varphi(x).$$

Observación

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.

Ejemplo

Definamos el conjunto vacío usando el axioma de abstracción.

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$$

Axiomas

Este axioma es bastante “permisivo”.

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Axiomas

Este axioma es bastante "permisivo".

- A cada propiedad le corresponde un conjunto.
- **Cualquier** propiedad.

Ejemplo

$\varphi_1(x)$: x es un conjunto con más de 3 elementos
$\varphi_2(x)$: x es un conjunto con una cantidad finita de elementos
$\varphi_3(x)$: x es un conjunto con una cantidad infinita de elementos

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos
$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos
$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

Axiomas

Siguiendo con el ejemplo:

Ejemplo

$\mathcal{A}_1 = \{x \mid \varphi_1(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con más de 3 elementos.

Dado que $\mathcal{A}_1$ es un conjunto que tiene conjuntos adentro, ¿es $\mathcal{A}_1$ un elemento de sí mismo? ¿$\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$?

- En $\mathcal{A}_1$ están todos los conjuntos con más de 3 elementos.
- ¡Son muchos! Definitivamente más de 3...
- Entonces, $\mathcal{A}_1$ tiene más de 3 elementos.
- Luego, $\mathcal{A}_1$ cumple φ_1.
- Concluimos que $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_1$.

Axiomas

Ejemplo

$\mathcal{A}_2 = \{x \mid \varphi_2(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad finita de elementos

¿$\mathcal{A}_2 \in \mathcal{A}_2$? No.

Ejemplo

$\mathcal{A}_3 = \{x \mid \varphi_3(x)\}$, el conjunto de todos los conjuntos con una cantidad infinita de elementos

¿$\mathcal{A}_3 \in \mathcal{A}_3$? Sí.

Axiomas

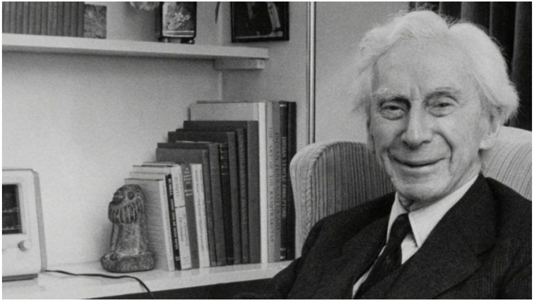
Luego de toda esta discusión, tiene sentido preguntarse si un conjunto pertenece a sí mismo. Tomemos la siguiente propiedad:

$$\varphi(x) \leftrightarrow x \notin x$$

La propiedad φ es satisfecha por todos los conjuntos que **no pertenecen a sí mismos.** Por ejemplo, $\mathcal{A}_2$ cumple φ, mientras que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_3$ no.

¿Qué más podemos hacer? ¡Ocupar el axioma de abstracción!

Axiomas



Bertrand Russell (1872–1970)

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos... ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

Axiomas

Definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$$

$\mathcal{R}$ será el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos.Al igual que antes, podríamos preguntarnos. . . ¿Es $\mathcal{R}$ un elemento de $\mathcal{R}$? ¿$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- El conjunto $\mathcal{R}$ pertenece a sí mismo si y sólo si cumple la propiedad φ.
- Es decir, sólo si cumple que $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$$

¡Contradicción! ¡EN LA MATEMÁTICA!

Esta es la **paradoja de Russell**.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

Axiomas

El axioma de abstracción es demasiado permisivo... restrinjámoslo

Axioma de separación

Si φ es una propiedad y C es un conjunto "*sano*", entonces $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

¿Qué significa que C sea un conjunto "*sano*"?

- Que no fue creado usando el axioma de abstracción.

¿Por qué axioma de *separación*?

- Porque el conjunto A se obtiene *separando* de C los elementos que cumplen la propiedad φ.

Axiomas

- En general para definir un conjunto sólo explicitaremos la propiedad.
- En tales casos, estaremos tomando los objetos de un conjunto "universal sano" que llamaremos $\mathcal{U}$.
- Entonces, cuando escribamos $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ en realidad nos estaremos refiriendo al conjunto $A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge \varphi(x)\}$.

Típicamente el conjunto $\mathcal{U}$ se deduce del contexto.

Outline

Operaciones

Sean A y B conjuntos.

Operaciones

Sean A y B conjuntos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o B.

Operaciones

Sean A y B conjuntos.

Definición

La **unión** de A y B se define por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A o B.

Definición

La **intersección** de A y B se define por

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A y en B.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Definición

El **conjunto potencia** de A se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A.

Operaciones

Diferencia

La **diferencia** de A y B se define por

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

El conjunto de los elementos que están en A pero no en B.

Definición

El **conjunto potencia** de A se define por

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

El conjunto de todos los subconjuntos de A.

Observaciones

- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Construcción de conjuntos

Hasta ahora el único conjunto que sabemos con certeza que existe es el conjunto vacío. A partir de él y las operaciones que vimos podemos generar otros conjuntos.

Ejemplo

Considere el siguiente operador:

$$\delta(x) = x \cup \{x\}$$

Definiremos los números naturales.

¿Cómo podemos llamar al operador δ?

Construcción de conjuntos

Intuitivamente, lo que haremos será llamar 0 al conjunto vacío, y luego usar el operador δ (que será nuestro operador *sucesor*) para construir los demás naturales, a los cuales pondremos su respectivo nombre.

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \delta(0) = \delta(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \delta(1) = \delta\left(\{\varnothing\}\right) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \delta(2) = \delta\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Observación

Note que $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, ..., $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Construcción de conjuntos

Formalmente, haremos la siguiente definición inductiva de $\mathbb{N}$:

Definición

El conjunto de los **números naturales**, denotado por $\mathbb{N}$, es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $\varnothing \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Y teniendo esta definición, *llamamos* 0 a $\varnothing$, 1 a $\delta(\varnothing)$, y así sucesivamente.

Solo con $\varnothing$ y δ podemos definir todo $\mathbb{N}$!!!

Construcción de conjuntos

Definiremos ahora formalmente la suma de dos números naturales.

Definición

La **suma** de dos números naturales cumple

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \delta(n)) = \delta(sum(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3, 4) = 7$.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

$$
\begin{aligned}
sum(3,4) &= sum(3,\delta(3)) \\
&= \delta(sum(3,3)) \\
&= \delta(sum(3,\delta(2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,\delta(1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,\delta(0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(sum(3,0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(4))) \\
&= \delta(\delta(5)) \\
&= \delta(6) \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio (propuesto ★)

Defina la multiplicación de dos números naturales y demuestre que $mult(3,2) = 6$.

Ejercicio

Demuestre que la suma es asociativa.

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Multiplicación de dos números naturales

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \delta(n)) = sum(m, mult(m, n))$

$$
\begin{aligned}
mult(3,2) &= mult(3, \delta(1)) \\
&= sum(3, mult(3,1)) \\
&= sum(3, mult(3, \delta(0))) \\
&= sum(3, sum(3, mult(3,0))) \\
&= sum(3, sum(3,0)) \\
&= sum(3,3) \\
&\vdots \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Construcción de conjuntos

Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c:

BI: $sum(sum(a,b),0) = sum(a,b) = sum(a,sum(b,0))$.

HI: Supongamos que se cumple que $sum(sum(a,b),c) = sum(a,sum(b,c))$ para un natural c.

TI: Por demostrar: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = sum(a,sum(b,\delta(c)))$.
Desarrollamos el lado izquierdo: $sum(sum(a,b),\delta(c)) =$
$\delta(sum(sum(a,b),c)) \overset{HI}{=} \delta(sum(a,sum(b,c))) =$
$sum(a,\delta(sum(b,c))) = sum(a,sum(b,\delta(c)))$ $\square$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Leyes

Consideraremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ fijo (por ejemplo, como ya lo definimos, $\mathbb{N}$).

Definición

Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto cualquiera. El **complemento** de A (relativo a $\mathcal{U}$) es el conjunto

$$A^c = \mathcal{U} \backslash A = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}.$$

Teorema

Si A, B y C son conjuntos cualquiera (subconjuntos de $\mathcal{U}$), entonces se cumplen las leyes siguientes:

Leyes

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Leyes

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Unión generalizada: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{S} \text{ tal que } x \in A\}$.

Representa a la unión de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a algún conjunto de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Definición

Intersección generalizada: $\bigcap \mathcal{S} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{S} \text{ se cumple que } x \in A\}$.

Representa a la intersección de todos los conjuntos componentes de $\mathcal{S}$; es decir, contiene a todos los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de $\mathcal{S}$.

Operaciones generalizadas

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de conjuntos.

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Operaciones generalizadas

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Operaciones generalizadas

Podemos extender lo anterior al caso infinito.

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de conjunto y sus operaciones elementales
- Conocer axiomas básicos de conjuntos
- Comprender operaciones de conjuntos
- Demostrar propiedades a partir de las definiciones de conjuntos