Inducción simple y fuerte

Clase 1

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Teoría de conjuntos: algunas nociones básicas

Lenguaje matemático

¿Qué representan los siguientes símbolos matemáticos?

- $x \in B$ (x pertenece a B)
- $x \notin B$ (x no pertenece a B)
- $\exists x$ (Existe x)
- $\forall x$ (Para todo x)
- $A \subseteq B$ (A es subconjunto de B)
- $A \subsetneq B$ (A es subconjunto propio de B)

Asumiremos como conocidos estos símbolos.
Los estudiaremos en detalle más adelante en el curso.

El punto de partida del curso

La matemática discreta se encarga del estudio de **estructuras discretas**

- ¿Cuál es la estructura discreta más sencilla?
- ¿Para qué podemos usarla?

Los **naturales** serán la base de nuestro trabajo

Nuestra primera “*definición*”

“Definición” (intuitiva)

Los **números naturales**, denotados por $\mathbb{N}$, son los números que sirven para contar. Los naturales parten en el 0 y aumentan de uno en uno.

¿El **cero** está en los naturales?

Axiomas de $\mathbb{N}$

Axiomas de Peano

1. El número $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n+1) \in \mathbb{N}$. A $(n+1)$ se le llama el *sucesor* de n.
3. Todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$ tiene un *antecesor* $(n-1) \in \mathbb{N}$
4. **Principio del buen orden:**
   Todo subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene un menor elemento

¿Qué propiedades tiene este conjunto?

Una propiedad interesante y útil

Hoy nos centraremos en una propiedad *intrínseca* de los naturales

- Se deduce de los axiomas anteriores
- Nos permitirá demostrar propiedades en $\mathbb{N}$
- Nos permitirá definir objetos

Esta propiedad es el **Principio de inducción matemática**

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción simple
- Conocer diferentes formulaciones del principio
- Aplicar el principio para demostrar propiedades
- Demostrar una de las equivalencias de estos principios

Outline

Principios de inducción: PBO

Principio del buen orden (PBO)

Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento, i.e.

$$A \neq \emptyset,\ A \subseteq \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \exists x \in A.\ \forall y \in A.\ (x \leq y)$$

Paréntesis

El símbolo $\Rightarrow$ denota una **implicancia**.

- Lo que está antes de $\Rightarrow$ es el **antecedente**
- Lo que está después, es el **consecuente**

¿Es cierto el PBO en los racionales? ¿Y en los reales?

Principios de inducción: PBO

Proposición

El PBO **no es cierto** en $\mathbb{Q}$.

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Observamos que

- A no es vacío y
- $A \subseteq \mathbb{Q}$

Supongamos por contradicción que $\mathbb{Q}$ cumple el PBO. En tal caso, existe $q_0 \in A$ que es su menor elemento.

Como $q_0 \in A$, entonces $q_0 > 0$ y $q_0/2 \in A$. Como $0 < q_0/2 < q_0$, concluimos que q_0 no es el menor elemento de A. Esto contradice el supuesto del PBO.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ no cumple el PBO. $\square$

Observe que la misma demostración sirve para $\mathbb{R}$

Principio de inducción

Principio de inducción simple (PIS)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Notación

- La condición 1. se llama el **caso base** (CB) o **base de inducción** (BI).
- La condición 2. se llama **paso inductivo**
  - La suposición $n \in A$ es la **hipótesis de inducción** (HI).
  - La demostración de que $n + 1 \in A$ es la **tesis de inducción** (TI).

Principio de inducción

Ejercicio

Demuestre que 0 es el menor número natural.

Demostración

Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$. Usaremos el PIS para demostrar que $A = \mathbb{N}$, con lo que estaremos demostrando que para todo elemento $x \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \geq 0$, y por lo tanto que 0 es el menor natural.

- **CB:** Es claro que $0 \in A$, puesto que $0 \in \mathbb{N}$ y $0 \geq 0$.
- **HI:** Supongamos que $n \in A$, y por lo tanto $n \geq 0$.
- **TI:** Debemos demostrar que $n + 1 \in A$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $n \geq 0$, y por lo tanto $n + 1 \geq 1$. Concluimos que $n + 1 \geq 0$, y entonces $n + 1 \in A$.

Por PIS, se sigue que $A = \mathbb{N}$. $\square$

Principio de inducción

PIS (Segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero (0 cumple la propiedad P)
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama **caso base** (CB).
- El punto 2. es el **paso inductivo**
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción** (HI).
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción** (TI).

Ejemplo de demostración por inducción

Teorema

La suma de los primeros n números naturales es igual a

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Demostración

Demostramos que se cumple para $n = 0$:

Caso base ($n = 0$): $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$$

Ejemplo de demostración por inducción

Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un n cualquiera y demostramos para $n+1$:

$$
\begin{aligned}
\textbf{Hipótesis:} \quad \sum_{i=0}^{n} i &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
\textbf{Tesis:} \quad \sum_{i=0}^{n+1} i &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i}_{\text{caso n}} + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot ((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Una variación del principio de inducción

Existen propiedades en $\mathbb{N}$ que no se cumplen en todos los naturales, pero sí **desde cierto número**

- Podemos modificar el PIS
- El **CB** ya no es 0

Ejemplo

Demuestre que para todo natural $n \geq 4$ se cumple

$$n! \;>\; 2^n$$

Una variación del principio de inducción

Demostración

PDQ. $n! > 2^n$ es verdadero **para todo** $n \geq 4$

1. $\mathbf{P(4)}: 4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

2. si $\mathbf{P(n)}: n! > 2^n$ es verdadero con $n \geq 4$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P(n+1)}: \quad (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \\
&> 2^n \cdot (n+1) \qquad \text{(por HI)} \\
&> 2^n \cdot 4 \qquad \text{(como } n \geq 4\text{)} \\
&> 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

✓

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \geq 4$.

Una variación del principio de inducción

PIS (Tercera formulación)

Sea P una propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(n_0)$ es verdadero
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Esta formulación permite demostrar propiedades con un caso base mayor a 0

Outline

El poder de la inducción

La **sucesión de Fibonacci** es una serie de naturales $F(0), F(1), F(2), \ldots$ que cumple la siguiente **recurrencia**

$$\begin{array}{lcl} F(0) & = & 0 \\ F(1) & = & 1 \\ F(n) & = & F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para } n \geq 2 \end{array}$$

¿cómo calculamos el valor de $F(n)$ para un n cualquiera?

$$\begin{array}{lcccccc} F(0) & = & 0 & & & & \\ F(1) & = & 1 & & & & \\ F(2) & = & F(1) + F(0) & = & 1 + 0 & = & 1 \\ F(3) & = & F(2) + F(1) & = & 1 + 1 & = & 2 \\ F(4) & = & \ldots & & & & \end{array}$$

¿Basta inducción simple para probar que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$?

Principio de inducción fuerte

Principio de inducción por curso de valores (PICV)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si se cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

Observaciones

- También es conocido como **Principio de Inducción Fuerte**
- La **HI** es la expresión $\{0, 1, \ldots, n-1\} \subseteq A$
- La **TI** es la expresión $n \in A$

¿Dónde está el **caso base** en el principio anterior?

Principio de inducción fuerte

PICV (segunda formulación)

Sea P una propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si P cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(k) \text{ es verdadero } \textbf{para todo k} < \mathbf{n}, \quad \text{entonces} \quad P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Ejemplo

Demuestre que $F(n) \leq 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

¡Ojo! El **CB** se debe demostrar manualmente igual que en inducción simple

Principio de inducción fuerte

Demostración

$$P(n) := F(n) \leq 2^n \quad \text{para todo } n$$

1. **CB.** $\mathbf{P(0)}: \; F(0) = 0 \leq 2^0$
   $\mathbf{P(1)}: \; F(1) = 1 \leq 2^1$

2. **HI.** Sup. $\mathbf{P(k)}: \; F(k) \leq 2^k$ es verdadero para todo $k < n$, entonces:

   TI. $\mathbf{P(n)}:$
   $$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-2} && \text{(por HI)} \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ &\leq 2^n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$.

En este caso se debía demostrar 2 casos base

Principio de inducción fuerte

Ejemplo (Propuesto ★)

Demostremos que la siguiente propiedad se cumple para todo natural $n \geq 2$

$$P(n) := \quad n \text{ tiene un factor primo}$$

1. **CB.** $\mathbf{P(2)}$ es cierto pues 2 es primo, por lo que tiene un factor primo.
2. **HI.** Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.
3. **TI.** Consideramos $\mathbf{P(n)}$. Tenemos dos casos:
   - Si n es primo, entonces tiene un factor primo.
   - Si no, existen dos naturales k_1, k_2 tales que $n = k_1 \cdot k_2$ y donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por **HI** tiene un factor primo k_3. Como $n = k_1 \cdot k_2$, entonces k_3 también es factor de n.

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$ **tal que** $n \geq 2$.

Notemos que en **TI**, cuando n es primo en realidad es un **caso base**!

Equivalencia de principios de inducción

Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Principio del buen orden.
2. Principio de inducción simple.
3. Principio de inducción fuerte.

Demostraremos solo que 1. $\Rightarrow$ 2.
Las implicancias 2. $\Rightarrow$ 3. y 3. $\Rightarrow$ 1. quedan propuestas.

ADVERTENCIA: usaremos el método de demostración por **contrapositivo**. Supondremos falso 2. y probaremos que 1. es falso.

Equivalencia de principios de inducción

Demostración (Propuesta ★)

Supongamos que el PIS es falso; es decir, existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ que cumple las reglas del PIS, pero $A \neq \mathbb{N}$.

Sea entonces el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$, el cual cumple que $B \subseteq \mathbb{N}$ y $B \neq \varnothing$. Mostraremos que este conjunto no tiene menor elemento, y por lo tanto el PBO es falso.

Por contradicción, supongamos que B sí tiene un menor elemento al que llamamos b.

$$\begin{array}{rcll} 0 \in A & \Rightarrow & b \neq 0 & \text{(def. de } B\text{)} \\ & \Rightarrow & b - 1 \in \mathbb{N} & \text{(axioma de } \mathbb{N}\text{)} \\ & \Rightarrow & b - 1 \notin B & (b \text{ es el menor de } B) \\ & \Rightarrow & b - 1 \in A & \text{(def. de } B\text{)} \\ & \Rightarrow & b \in A & (A \text{ cumple reglas del } PIS) \end{array}$$

Esto contradice el hecho de que b sea el menor elemento de B. □

Outline

La dirección de la inducción

No olvidar la **dirección** en que se demuestra por inducción

- Casos base son independientes (se hacen *a mano*)
- Se asume verdadera la **Hipótesis** (simple o fuerte)
- A partir de la **HI** se demuestra la **Tesis**

¡No se puede partir la demostración desde lo que se quiere demostrar!

Objetivos de la clase

- Comprender el principio de inducción simple
- Conocer diferentes formulaciones del principio
- Aplicar el principio para demostrar propiedades
- Demostrar una de las equivalencias de estos principios