PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Tarea 1

18 de marzo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores P. Bahamondes - D. Bustamante - P. Barceló

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 25 de marzo a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
    - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
    - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
    - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
    - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas (salvo que utilice su cupón `#problemaexcepcional`).
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Pregunta 1

Se define la siguiente función:

$$A(m,n) = \begin{cases} 2n & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 0 \\ 2 & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{si } m \geq 1 \text{ y } n \geq 2 \end{cases}$$

Se le pide realizar lo siguiente:

(1) Demostrar que $A(m,2) = 4$ para todo $m \geq 1$.

(2) Demostrar que $A(1,n) = 2^n$ para todo $n \geq 1$.

(3) Demostrar que $A(m,n+1) > A(m,n)$ para todo $m,n \geq 0$.

(4) Demostrar que $A(m+1,n) \geq A(m,n)$ para todo $m,n \geq 0$.

Pauta (6 pts.)

(i) 1 pts. por demostrar (1).

(ii) 1 pts. por demostrar (2).

(iii) 2 pts. por demostrar (3).

(iv) 2 pts. por demostrar (4).

Solución

(1) **CB:** Si $m = 1$, entonces $A(1, 2) = A(0, A(1, 1)) = A(0, 2) = 4$.

HI: Para $m \geq 2$, asuma que $A(m, 2) = 4$, por demostrar que $A(m + 1, 2) = 4$.

TI: Observe que por definición $A(m + 1, 2) = A(m, A(m + 1, 1)) = A(m, 2) \overset{\textbf{HI}}{=} 4$. $\square$

(2) **CB:** Si $n = 1$, entonces $A(1, 1) = 2 = 2^1$.

HI: Para $n \geq 1$, asuma que $A(1, n) = 2^n$, por demostrar que $A(1, n + 1) = 2^{n+1}$.

TI: Observe que por def. $A(1, n + 1) = A(0, A(1, n)) \overset{\textbf{HI}}{=} A(0, 2^n) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

(3) Note que en la propiedad $A(m, n+1) > A(m, n)$ el valor m no cambia, considere $m \geq 0$ fijo (no sabemos exactamente cual es así que habrán varios casos). Demostraremos por inducción en $n \geq 0$ que $A(m, n + 1) > A(m, n)$.

CB1: Si $m = 0$, entonces $A(0, n + 1) = 2(n + 1) > 2n = A(0, n)$.

CB2: Si $m \geq 1$ y $n = 0$, entonces $A(m, 1) = 2 > 0 = A(m, 0)$.

CB3: Si $m \geq 1$ y $n = 1$, entonces por ítem (1) se cumple $A(m, 2) = 4 > 2 = A(m, 1)$.

HI: Para $m \geq 1$ y $n \geq 2$, asuma $A(m, n+1) > A(m, n)$ y $A(m-1, n+1) > A(m-1, n)$.

TI: Por def. $A(m, n+2) = A(m-1, A(m, n+1)) \overset{\textbf{HI}}{>} A(m-1, A(m, n)) = A(m, n+1)$. $\square$

(4) Note que en la propiedad $A(m+1, n) \geq A(m, n)$ el valor n no cambia, considere $n \geq 0$ fijo (no sabemos exactamente cual es así que habrán varios casos). Demostraremos por inducción en $m \geq 0$ que $A(m + 1, n) \geq A(m, n)$.

CB1: Si $n = 0$, consideramos dos casos: (a) $m = 0$, en cuyo caso la propiedad queda $A(1, 0) = 0 = A(0, 0)$. (b) $m \geq 1$, en cuyo caso tenemos que $A(m+1, 0) = 0 = A(m, 0)$.

CB2: Si $n = 1$, entonces de nuevo consideramos dos casos: (a) $m = 0$, en cuyo caso $A(1, 1) = 2 = A(0, 1)$. (b) $m \geq 1$, en cuyo caso $A(m + 1, 1) = 2 = A(m, 1)$.

CB3: Si $n \geq 2$ y $m = 0$, entonces por ítem (2), $A(1, n) = 2^n \geq 2n = A(0, n)$

HI: Para $n \geq 2$ y $m \geq 1$, asuma $A(m+1, n) \geq A(m, n)$ y $A(m+1, n-1) \geq A(m, n-1)$.

TI: Por def. $A(m + 2, n) = A(m + 1, A(m + 2, n - 1)) \overset{\textbf{HI}}{\geq} A(m, A(m + 2, n - 1))$. Por HI en n, tenemos que $A(m + 2, n - 1) \geq A(m + 1, n - 1)$, y por el item (3) obtenemos que $A(m, A(m + 2, n - 1)) > A(m, A(m + 1, n - 1)) = A(m + 1, n)$. $\square$

Pregunta 2

Considere un punto (dimension 0). Si duplica el punto, lo dezplaza una distancia d y los une, generará una linea de largo d. Considere una linea de largo d (dimension 1). Si la duplica, desplaza paralelamente una distancia d y la une, generará un cuadrado. Considere un cuadrado de lado d (dimensión 2). Si lo duplica, desplaza paralelamente una distancia d y los une, generará un cubo. Ésta construcción le permite construir hipercubos de la dimensión que desee[1].

Sea n la dimensión de su hipercubo, si desea saber cuántos elementos de dimension m posee puede usar la expresión inductiva de $P(n, m)$:

(a) $P(n, m) = 1, \quad \text{si } n = m$

(b) $P(n, m) = 0, \quad \text{si } n < m$

(c) $P(n+1, m) = 2 \cdot P(n, m), \quad \text{si } m = 0$

(d) $P(n+1, m+1) = 2 \cdot P(n, m+1) + P(n, m), \quad \text{en otro caso}$

Donde (a) es el caso base es que un hipercubo de dimensión n contiene 1 hipercubo de dimensión n. (b) Establece que al fijar una dimensión, no hay elementos de dimensiones más grandes. (c) Establece que los puntos simplemente se duplican al aumentar la dimensión. Y (d) establece que en el caso general se copia la dimensión anterior y se suman las nuevas conexiones tras el desplazamiento.

Considere la fórmula para calcular el número de elementos:

$$P'(n, m) = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}$$

Demuestre por inducción simple sobre n que si $0 \leq m \leq n$, entonces $P(n, m) = P'(n, m)$.

Pauta (6 pts.)

(i) 2 pts. por **BI**.

(ii) 1 pts. por **HI**.

(iii) 3 pts. por **TI**.

[1] Visualización en: `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31380489`

Solución

El problema pide considerar solo los casos donde se cumple

$$0 \leq m \leq n \tag{1}$$

BI: El **primer caso base** es la regla (a), donde $n = m$ y se cumple la inecuación en (1). Usando la fórmula y la igualdad se obtiene lo mismo que establece (a):

$$P'(n,m) = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m} = \binom{n}{n} \cdot 2^0 = 1 = P(0,0).$$

El **segundo caso base** es la regla (b), pero en ese caso se tiene que $n < m$ y como no se cumple la inecuación en (1) no es necesario que cumpla la fórmula. Ahora se realizarán 2 casos de inducción, uno por cada regla inductiva.

HI: Supongamos que para un natural n, con $0 \leq m < n$ (el caso $n = m$ fue caso base), se cumple

$$P(n,m) = P'(n,m)$$

TI: El **primer caso inductivo** es la regla (c), donde $m = 0$ y se cumple la inecuación en (1). Partiendo por la regla (c) deduciremos la fórmula.

$$\begin{aligned}
P(n+1,0) &= 2 \cdot P(n,0) && \text{por (c)} \\
&= 2 \cdot P'(n,0) && \text{por } \textbf{HI} \\
&= 2 \cdot \binom{n}{0} \cdot 2^{n-0} \\
&= 1 \cdot 2^{n+1-0} \\
&= \binom{n+1}{0} \cdot 2^{n+1-0} \\
&= P'(n+1,0) && \text{por definición}
\end{aligned}$$

El **segundo caso inductivo** es la regla (d), donde asumimos $0 \leq m < n$. Partiendo por la regla (d) deduciremos la fórmula. (Notar que en el subcaso $n = m + 1$, el desarrollo sería lo mismo por el primer caso base):

$$
\begin{aligned}
P(n+1, m+1) &= 2 \cdot P(n, m+1) + P(n, m) && \text{por (d)} \\
&= 2 \cdot P'(n, m+1) + P'(n, m) && \text{por } \textbf{HI} \\
&= 2 \cdot \binom{n}{m+1} \cdot 2^{n-m-1} + \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m} \\
&= \left[\binom{n}{m+1} + \binom{n}{m}\right] \cdot 2^{n-m} \\
&= \left[\frac{n!}{(n-m-1)! \cdot (m+1)!} + \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}\right] \cdot 2^{n-m} \\
&= \left[\frac{n-m}{(n-m)! \cdot (m+1)!} + \frac{(m+1)}{(n-m)! \cdot (m+1)!}\right] \cdot n! \cdot 2^{n-m} && \text{factorizando y amplificando} \\
&= \left[\frac{n+1}{(n-m)! \cdot (m+1)!}\right] \cdot n! \cdot 2^{n-m} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-m)! \cdot (m+1)!} \cdot 2^{n-m} \\
&= \binom{n+1}{m+1} \cdot 2^{(n+1)-(m+1)} \\
&= P'(n+1, m+1) && \text{por definición}
\end{aligned}
$$

Por Principio de Inducción Simple, queda demostrado que la fórmula describe la construcción.