Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 - Lógica Proposicional

22 de marzo de 2024

Héctor Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
1	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica** $\equiv$

Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

1. Doble negación:
   $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
2. De Morgan:
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
3. Conmutatividad:
   $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
   $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
4. Asociatividad:
   $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
5. Distributividad:
   $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
6. Idempotencia:
   $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
   $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
7. Absorción:
   $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
   $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
8. Implicancia:
   $\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
9. Doble implicancia:
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Conectivos funcionalmente completos**

Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

Ejemplos:

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$

1. Tabla de Verdad

Sean p, q y r variables lógicas. Construya la tabla de verdad de las siguientes fórmulas lógicas:

a) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p \to q}$	$\mathbf{\neg p \to r}$	$\mathbf{(p \to q) \wedge (\neg p \to r)}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

b) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{\neg q \leftrightarrow r}$	$\mathbf{(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

2. Interpretación

Sea p, q y r las siguientes proposiciones:

- p: "Sacarse un 7 en el examen final."
- q: "Asistir a todas las ayudantías."
- r: "Sacarse un 7 en el ramo."

Las proposiciones se expresan de la siguiente manera:

a) Se saca un 7 en el ramo, pero no asiste a todas las ayudantías:

$$r \wedge \neg q$$

b) Se saca un 7 en el examen final, asiste a todas las ayudantías y se saca un 7 en el ramo:

$$p \wedge q \wedge r$$

c) Para sacarse un 7 en el ramo, es necesario sacarse un 7 en el examen final:

$$r \rightarrow p$$

d) Se saca un 7 en el examen final, pero no asiste a todas las ayudantías; sin embargo, se saca un 7 en el ramo:

$$(p \wedge \neg q) \wedge r$$

e) Sacarse un 7 en el examen final y asistir a todas las ayudantías es suficiente para sacarse un 7 en el ramo:

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

f) Se sacará un 7 en el ramo si y solo si asiste a todas las ayudantías o se saca un 7 en el examen final:

$$r \leftrightarrow (q \vee p)$$

3. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$$

Solución

$$\begin{aligned}
&(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) & \\
&\equiv (p \vee (\neg p \vee q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) & \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv ((p \vee \neg p) \vee q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) & \text{/Asociatividad de } \vee \\
&\equiv \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) & /((p \vee \neg p) \vee q) \text{ es una tautología} \\
&\equiv (\neg r \vee p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) & \text{/De Morgan} \\
&\equiv (\neg r \vee p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (\neg r \vee q) & \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv p \wedge (\neg r \vee p) \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q) & \text{/Asociatividad de} \wedge \\
&\equiv p \wedge (r \vee q) \wedge (\neg r \vee q) & \text{/Absorción} \wedge \\
&\equiv p \wedge ((r \wedge \neg r) \vee q) & \text{/Distributiva} \\
&\equiv p \wedge q & /r \wedge \neg r \text{ es una contradicción}
\end{aligned}$$