Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Ayudantía 3 - Satisfactibilidad y modelacíon

Hector Núñez, Paula Grune, Manuel Irarrázaval

---

## Resumen

- **Conceptos importantes de lógica proposicional:**
  - Tautología: Una fórmula es una tautología si su valor de verdad es siempre 1, para cualquier valuación.
  - Contradicción: Una fórmula es una contradicción si su valor de verdad es siempre 0, para cualquier valuación.
  - Forma normal conjuntiva (CNF): Una fórmula está en forma normal conjuntiva si es una conjunción de disyunciones de literales. Es decir, es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$, donde cada $C_i$ es una disyunción de literales, es decir, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{iki})$.
  - Forma normal disyuntiva (DNF): Una fórmula está en forma normal disyuntiva si es una disyunción de conjunciones de literales. Es decir, es de la forma $B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$, donde cada $B_i$ es una conjunción de literales, es decir, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{iki})$.
- **Satisfacibilidad:** Un conjunto de fórmulas $\Sigma$ es satisfacible si existe una valuación $\sigma$ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, $\Sigma$ es inconsistente.

# 1. Funcionalidad completa

Demuestre que el conectivo $\uparrow$ (también conocido como NAND) es funcionalmente completo. Su tabla de verdad es la siguiente:

| $p$ | $q$ | $p \uparrow q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# 2. DNF y CNF

Encuentre fórmulas en DNF y CNF que sean lógicamente equivalentes a $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)$.

# 3. Equivalencia lógica e inconsistencia

Demuestre que $\Sigma = \{p \Leftrightarrow q, p \veebar q\}$, con '$\veebar$' la disyunción exclusiva, es inconsistente.

**Observación:** La disyunción exclusiva es similar a la disyunción, la única diferencia es que cuando los dos valores ($p$ y $q$) son verdad, esta es falsa.

Tabla de verdad de la disyunción exclusiva:

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# 4. Modelación

Considere $M$ médicos, $P$ pabellones y $C$ cirugías agendadas para un día dado. Queremos asignar a los médicos disponibles a las distintas cirugías, suponiendo que el día tiene 24 bloques de 1 hora, durante los cuales los pabellones están disponibles y que las cirugías duran una cantidad entera de horas dada por $T_c$ para cada cirugía $c$, con $1 \leq c \leq C$. Además, contamos con una tabla de compatibilidad cirugía-pabellón. Para cada cirugía $c$, con $1 \leq c \leq C$, y pabellón $p$, con $1 \leq p \leq P$, definimos:

$$K_{c,p} := \begin{cases} 1 & \text{si la cirugía } c \text{ puede ser realizada en el pabellón } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para construir una fórmula $\varphi$ tal que $\varphi$ sea satisfactible si y sólo si existe una calendarización adecuada de todas las cirugías, considere las siguientes variables proposicionales:

- $x_{m,c,p,t}$: Será verdadera si el médico $m$ realiza la cirugía $c$ en el pabellón $p$ durante la hora $t$.
- $k_{c,p}$: Deberá representar nuestras constantes $K_{c,p}$.

Modele las siguientes restricciones en lógica proposicional:

(a) Inicialización de las variables $k_{c,p}$.

(b) Las cirugías solo pueden ser realizadas en pabellones adecuados para ellas.

(c) Los médicos solo pueden ser asignados a una cirugía a la vez.

(d) Si un médico es asignado a una cirugía, debe seguir asignado a la cirugía durante toda su duración.

(e) Si un médico es asignado a una cirugía, no podrá realizar otra cirugía por al menos 8 horas desde el término de la cirugía.

(f) Todas las cirugías deben tener exactamente un médico asignado durante su duración.