Lógica de predicados

Clase 7

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

El problema de consecuencia lógica

El siguiente es un caso de **consecuencia lógica**

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todas las personas son mortales.}\\ \text{Sócrates es persona.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

¿Podemos modelarlo/explicarlo con lógica proposicional?

Necesitamos más poder...

¿Qué le falta a la lógica proposicional?

- Objetos de un cierto conjunto.
- Predicados sobre objetos.
- Cuantificadores: **para todo** y **existe**.

Estudiaremos una nueva lógica con estos elementos.

Esta lógica nos permitirá expresar **estructuras** complejas.

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado.
- Comprender sintaxis de predicados compuestos.
- Comprender semántica de la lógica de predicados.

Outline

Predicados

Ejemplos (versión 1.0)

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

- x es par
- $x \leq y$
- $x \bigtriangleup y$ (¿qué diablos es $\bigtriangleup$?)
- $x \lhd y = z$ (¿qué diablos es $\lhd$?)

No admiten valor de verdad hasta ser **evaluados** e **interpretados**.

Predicados

Ejemplos (versión 2.0)

Las siguientes son proposiciones:

- 2 es par
- $2 \leq 4$
- $\texttt{'h'} \bigtriangleup \texttt{'hola'}$ (cuando $\bigtriangleup$ se interpreta como "es substring de")
- $4 \lhd 1 = 41$ (cuando $\lhd$ se interpreta como suma de naturales)

El valor de verdad depende de:
un **dominio** y la **interpretación de los símbolos**.

Predicados

Definición

Un **predicado** $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicados

Definición

Para un predicado $P(x)$ y un valor a, la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

Ejemplos

$$P(x) := x \text{ es par} \quad R(x) := x \text{ es primo} \quad M(x) := x \text{ es mortal}$$

- $P(2) = 1$
- $P(3) = 0$
- $R(7) = 1$
- $M(\text{Socrates}) = 1$
- $M(\text{Zeus}) = 0$

Predicados

Definición

Un **predicado** n-ario $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

Definición

Para un predicado n-ario $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P sobre $a_1, \ldots, a_n$.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

- $O(2, 3) = 1$
- $S(5, 10, 15) = 1$
- $S(4, 12, 1) = 0$
- $Padre(\text{Homero}, \text{Bart}) = 1$

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos

$O(x, y) := x \leq y$, $S(x, y, z) := x + y = z$, $Padre(x, y) := x$ es padre de y

$O(x, y)$	$:= x \leq y$	sobre $\mathbb{N}$
$S(x, y, z)$	$:= x + y = z$	sobre $\mathbb{Q}$
$Padre(x)$	$:= x$ es padre de y	sobre el conjunto de todas las personas

Predicados y Dominio

Observación

Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, ..., x_n)$ diremos que $x_1, ..., x_n$ son **variables libres** de P.
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdadero o falso sin importar la valuación (pero sí del dominio).

Sintaxis de predicados

Definición

Un predicado es **compuesto** si inductivamente es:

1. un predicado,
2. la negación ($\neg$) de un predicado compuesto, o
3. conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$) o bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

Observemos que hasta aquí,
la sintaxis es análoga al caso de fórmulas proposicionales.

Valuaciones

Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación inductiva (recursiva) de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

$P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x,y,z) := O(x,y) \wedge O(y,z)$
- $P''(x,y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x,y)$
- $P'(4) = 0$

Cuantificador universal

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el **cuantificador universal**:

$$P'(y_1, ..., y_n) = \forall x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada e $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) := \forall y(O(x, y)) \quad \cdots \quad O'(0) = \forall y(O(0, y))$
- $O''(y) := \forall x(O(x, y)) \quad \cdots \quad O''(2) = \forall x(O(x, 2))$
- $P_0 := \forall x(P(x))$
- $P_0' := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

Cuantificador existencial

Definición

Sea $P(x, y_1, ..., y_n)$ un predicado compuesto con dominio D. Definimos el **cuantificador existencial**:

$$P'(y_1, ..., y_n) = \exists x(P(x, y_1, ..., y_n))$$

donde x es la variable cuantificada e $y_1, ..., y_n$ son las variables libres.

Definición

Para $b_1, ..., b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, ..., b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, ..., b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x(O(x,y)) \quad \cdots \quad O'(2) = \exists x(O(x,2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x,y)) \quad \cdots \quad O''(0) = \exists y(O(0,y))$
- $O'''(x,y) := \exists z(O(x,z) \wedge O(z,y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z)) \cdots O'''(1,2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Un predicado binario que casi siempre estará disponible es la igualdad:

$$= (x,y) := (x = y).$$

Como notación usaremos simplemente $x = y$ o también $x \neq y$ para $\neg(x = y)$.

Ojo: el predicado menor estricto se puede definir sin igualdad
$O_s(x,y) := O(x,y) \wedge \neg O(y,x)$.

Es posible combinar cuantificadores

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$ que es distinto de $\forall y(\exists x(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(x, y)))$

Sintaxis de predicados (v 2.0)

(re)Definición

Decimos que un predicado es **compuesto** (o también **fórmula**) si es:

1. un predicado básico,
2. negación ($\neg$) de un predicado compuesto,
3. conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$), bidireccional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio, o
4. la cuantificación universal ($\forall$) o existencial ($\exists$) de un predicado compuesto.

(re)Definición

La **valuación** de un predicado compuesto corresponde a la valuación inductiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Outline

Interpretaciones

¿Son estas fórmulas equivalentes?

$$\forall x(\exists y(x \leq y)) \stackrel{?}{\equiv} \exists x(\forall y(x \leq y))$$

Depende del **dominio** y la **interpretación** del símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, ..., x_n)$ es un **símbolo de predicado** y
- $P^D(x_1, ..., x_n)$ es el predicado sobre D.

Definición

Sean $P_1, ..., P_m$ símbolos de predicados.
Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $P_1, ..., P_m$ está compuesta de:

- un dominio D que denotaremos $\mathcal{I}(dom)$ y
- un predicado P_i^D que denotaremos por $\mathcal{I}(P_i)$ para cada símbolo P_i.

Interpretaciones

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **no satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo denotamos como:

$$\mathcal{I} \nvDash \varphi(a_1, .., a_n)$$

Observe que el símbolo $\vDash$ en predicados indica satisfacibilidad.

Interpretaciones

Definición

Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula e $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en φ. Diremos que $\mathcal{I}$ **satisface** φ sobre $a_1, ..., a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \varphi(a_1, .., a_n)$$

si $\varphi(a_1, ..., a_n)$ es verdadero al interpretar cada símbolo en φ según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$$\begin{array}{cc} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_1(P) := x \neq 1 & \mathcal{I}_2(P) := x < 0 \\ \mathcal{I}_1(O) := y \text{ es múltiplo de } x & \mathcal{I}_2(O) := x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de predicado.
- Comprender sintaxis de predicados compuestos.
- Comprender semántica de la lógica de predicados.