Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

27 de marzo de 2024

1º semestre 2025 - Profesores P. Barceló - P. Bahamondes - D. Bustamante

---

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59 del 03 de abril a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Github (issues) es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

(a) [1 pt.] Sea P un conjunto de variables proposicionales. Defina inductivamente el conjunto de variables proposicionales mencionadas en φ, denotado como P_φ, para toda fórmula φ en $\mathcal{L}(P)$.

(b) [5 pts.] Sea P un conjunto de variables proposicionales y sean φ y ψ fórmulas en $\mathcal{L}(P)$. Suponga que $P_\varphi \cap P_\psi \neq \emptyset$.

Demuestre que si $\varphi \to \psi$ es una tautología, entonces existe una fórmula θ tal que $P_\theta = P_\varphi \cap P_\psi$ y que cumple que tanto $\varphi \to \theta$ como $\theta \to \psi$ son tautologías.

Solución

(a) Definimos inductivamente a P_φ para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ como

- Si $\varphi = p$ para alguna variable proposicional $p \in P$, entonces $P_\varphi = \{p\}$
- Si $\varphi = (\neg\psi)$ para alguna fórmula $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $P_\varphi = P_\psi$
- Si $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$ para dos fórmulas $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$, entonces $P_\varphi = P_{\psi_1} \cup P_{\psi_2}$

(b) Sea Θ la fórmula sobre $P_\varphi \cap P_\psi$ que es cierta precisamente en aquellas valuaciones $\sigma : P_\varphi \cap P_\psi \to \{0,1\}$ que cumplen que toda valuación $\sigma' : P_\psi \to \{0,1\}$ que extiende a σ cumple que $\sigma'(\psi) = 1$. Observemos que $\Theta \to \psi$ es una tautología. Para mostrar esto, consideremos una valuación $\sigma' : P_\psi \to \{0,1\}$ tal que $\sigma'(\Theta) = 1$. Entonces la restricción σ de σ' a $P_\varphi \cap P_\psi$ también satisface $\sigma(\Theta) = 1$, y entonces $\sigma'(\psi) = 1$ ya que σ' es una extensión de σ.

Observamos además que $\varphi \to \Theta$. Para mostrar esto, consideremos una valuación $\sigma : P_\varphi \to \{0,1\}$ tal que $\sigma(\varphi) = 1$. Luego, toda valuación $\sigma' : P_\varphi \cup P_\psi \to \{0,1\}$ que extiende a σ satisface $\sigma'(\psi) = 1$, ya que $\varphi \to \psi$ es una tautología. Esto quiere decir que la restricción σ'' de σ' a $P_\varphi \cap P_\psi$ satisface a Θ por definición. Luego, σ también satisface a Θ.

Pauta (6 pts.)

(a) 1.0 pt. por definir correctamente a P_φ

(b)
- 1.0 pt. por explicar cómo construir la fórmula Θ que cumple lo pedido
- 4.0 pts. por demostrar que efectivamente cumple lo pedido.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.

Problema 2

Definimos el conectivo binario de disyunción exclusiva $\oplus$ (XOR), definido por la siguiente tabla de verdad:

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Definimos de igual modo el operador de disyunción exclusiva generalizada $\bigoplus$ de manera análoga a la conjunción generalizada y la disyunción generalizada, es decir:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n$$

(a) [1 pt.] Dé dos fórmulas equivalentes a $p \oplus q$ en DNF y CNF respectivamente.

(b) [3 pts.] Demuestre que $\{\oplus\}$ **no** es un conjunto funcionalmente completo.

(c) [2 pts.] Demuestre la siguiente propiedad distributiva para $\oplus$:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \wedge \psi \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} (\varphi_i \wedge \psi)$$

Solución

(a)
- DNF: Podemos construirla directamente a partir de la tabla

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

- CNF: Tomamos la fórmula anterior y usamos distributividad

$$\begin{aligned} p \oplus q &\equiv (p \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q)) \\ &\equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \wedge q)) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)) \\ &\equiv (p \wedge q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \end{aligned}$$

(b) Consideraremos el conjunto $P = \{p\}$ y mostraremos que no es posible encontrar una fórmula en $\mathcal{L}(P)$ que solo use $\oplus$ como conectivo que sea equivalente a la tautología $p \vee p$. Para esto, notemos que para una única variable proposicional, solo hay $2^{2^1} = 4$ tablas de verdad posibles, es decir, toda fórmula en $\mathcal{L}(P)$ es equivalente a p, $\bar{p} := \neg p$, $\tau := p \vee \neg p$ o $\perp := p \wedge \neg p$. Por inducción estructural, mostraremos que toda fórmula que solo utiliza $\oplus$ como conectivo será equivalente a p o $\perp$.

BI: Si $\varphi = p$, la propiedad es trivial pues $p \equiv p$ (identidad).

HI: Sean ψ_1 y ψ_2 dos fórmulas que solo usan el conectivo $\oplus$ y supongamos que son equivalentes a p o a $\perp$.

TI: Queremos demostrar que $\varphi = \psi_1 \oplus \psi_2$ también es equivalente a p o a $\perp$. Hay 4 posibilidades:

1. $\psi_1 \equiv p$ y $\psi_2 \equiv p$, en cuyo caso $\varphi \equiv \perp$
2. $\psi_1 \equiv p$ y $\psi_2 \equiv \perp$, en cuyo caso $\varphi \equiv p$
3. $\psi_1 \equiv \perp$ y $\psi_2 \equiv p$, en cuyo caso $\varphi \equiv p$
4. $\psi_1 \equiv \perp$ y $\psi_2 \equiv p$, en cuyo caso $\varphi \equiv \perp$

Por el principio de inducción estructural, concluimos que toda fórmula que solo utiliza el conectivo $\oplus$ será necesariamente equivalente a p o $\perp$. En particular, esto implica que ninguna fórmula construida solo con este conectivo es equivalente a $\neg p$, por lo que el conjunto $\oplus$ **no** es funcionalmente completo.

(c) Lo demostraremos por inducción sobre la cantidad de fórmulas en la disyunción exclusiva generalizada.

BI: Para $n = 1$ fórmulas, la propiedad se cumple trivialmente.

HI: Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \wedge \psi \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} (\varphi_i \wedge \psi)$$

TI: Queremos demostrar que:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} \varphi_i\right) \wedge \psi \equiv \bigoplus_{i=1}^{n+1} (\varphi_i \wedge \psi)$$

Utilizaremos la siguiente

$$(A \oplus B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \oplus (B \wedge C)$$

Podemos demostrarla con la siguiente tabla de verdad:

A	B	C	$A \oplus B$	$(A \oplus B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \oplus (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} \varphi_i\right) \wedge \psi &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \oplus \varphi_{i+1}\right) \wedge \psi && \text{(def.)} \\
&\equiv \left(\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i\right) \wedge \psi\right) \oplus (\varphi_{i+1} \wedge \psi) && \text{(propiedad)} \\
&\equiv \left(\bigoplus_{i=1}^{n} (\varphi_i \wedge \psi)\right) \oplus (\varphi_{i+1} \wedge \psi) && \text{(H.I.)} \\
&\equiv \left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} (\varphi_i \wedge \psi)\right)
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Por principio de inducción simple, concluimos la propiedad distributiva generalizada.

Pauta (6 pts.)

(a)
- 0.5 pt. por la fórmula en DNF
- 0.5 pt. por la fórmula en CNF

(b) 3 pts. por la inducción correctamente demostrada

(c) 2 pts. por la inducción correctamente demostrada. Se debe descontar 1 punto si se usa pero no se demuestra la propiedad distributiva simple usada en la inducción.

Puntajes parciales y soluciones alternativas a criterio del corrector.