

Consecuencia lógica y resolución proposicional

Clase 6

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Resolución proposicional

Epílogo

Formas normales

Definición

Un literal es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplo

Para el conjunto de variables $P = \{p, q, r\}$, las fórmulas p y $\neg r$ son literales.

Los literales son los átomos de la construcción que mostraremos

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$

Ejemplo

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$$

¿Hemos visto fórmulas en DNF antes?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Ya demostramos esto y ¡mostramos cómo construir tal fórmula!

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik_i})$

Observaciones

- Una disyunción de literales se llama una **cláusula**.
 - Los C_i anteriores son cláusulas.
- Una fórmula en CNF es una conjunción de cláusulas.

Ejemplo

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

¿Podríamos obtener una fórmula en CNF para una tabla de verdad?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

Demuestre el teorema (★)

Formas normales

Demostración

Como sabemos que toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF, demostraremos que toda fórmula en DNF es equivalente a una fórmula en CNF por inducción en la cantidad de disyunciones de la primera fórmula. Dado un conjunto de variables proposicionales P , tenemos la siguiente propiedad sobre los naturales:

Prop(n) : toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).

Demostraremos esta propiedad por inducción.

Formas normales

Prop(n) : toda fórmula $\varphi \in L(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).

BI: *Prop*(0) : una fórmula en DNF con 0 disyunciones es de la forma

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_k$$

por lo que está trivialmente en CNF.

HI: Suponemos que *Prop*($n - 1$) es cierta; es decir, toda fórmula φ en DNF con a lo más $n - 1$ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF.

Formas normales

TI: Debemos demostrar que toda fórmula φ' en DNF con n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ' en CNF. Cualquier φ' será de la forma

$$\varphi' = B_0 \vee B_1 \vee \dots \vee B_{n-1} \vee B_n$$

donde los B_i son conjunciones de literales. Por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (B_0 \vee B_1 \vee \dots \vee B_{n-1}) \vee B_n$$

y por HI $\varphi' \stackrel{HI}{\equiv} \psi \vee B_n$, con ψ una fórmula en CNF. Expandiendo la conjunción B_n :

$$\varphi' \equiv \psi \vee (l_{n,1} \wedge \dots \wedge l_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Por distributividad:

$$\varphi' \equiv (\psi \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (\psi \vee I_{n,k_n})$$

Como ψ está en CNF, podemos expandirla:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \wedge \dots \wedge C_m) \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge ((C_1 \wedge \dots \wedge C_m) \vee I_{n,k_n})$$

con C_i cláusulas. Por distributividad:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,1})) \wedge \dots \wedge ((C_1 \vee I_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,k_n}))$$

Y por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (C_1 \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_1 \vee I_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee I_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Como los C_i son cláusulas, es claro que $(C_i \vee l_{n,j})$ es una cláusula.
Luego, tenemos que

$$\psi' = (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \dots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \dots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

está en CNF y es tal que $\varphi' \equiv \psi'$. \square

Objetivos de la clase

- Conocer las formas normales
- Comprender concepto de consecuencia lógica
- Demostrar consecuencias lógicas sencillas

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Resolución proposicional

Epílogo



Conjuntos de fórmulas

Notación

Dado un conjunto de fórmulas Σ en $L(P)$, diremos que una valuación σ **satisface** Σ , denotado por $\sigma(\Sigma) = 1$, si para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Definición

Un conjunto de fórmulas Σ es **satisfactible** si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es **inconsistente**.

¿Cuándo decimos que una fórmula se **deduce** de un conjunto?

Consecuencia lógica

Definición

ψ es **consecuencia lógica** de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

Lo denotamos por $\Sigma \models \psi$.

ψ debe ser satisfecha en cada “*mundo*” donde Σ es verdadero

Consecuencia lógica

Ejemplo

La regla de inferencia llamada **Modus ponens** es $\{p, p \rightarrow q\} \models q$

p	q	p	$p \rightarrow q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Nos tenemos que fijar en las valuaciones que satisfacen al conjunto...
En esos mundos, la fórmula “*objetivo*” también debe ser satisfecha

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre las siguientes reglas de inferencia

- **Modus tollens:** $\{\neg q, p \rightarrow q\} \models \neg p$
- **Demostración por partes:** $\{p \vee q \vee r, p \rightarrow s, q \rightarrow s, r \rightarrow s\} \models s$

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Este teorema combina dos mundos:
la **consecuencia lógica** y la **satisfactibilidad**

Demostración

(\Rightarrow) Supongamos que $\Sigma \models \varphi$. Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfactible, luego existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$. Esto implica que $\sigma(\Sigma) = 1$ y que $\sigma(\neg\varphi) = 1$, y por lo tanto $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \models \varphi$.

(\Leftarrow) Sea $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente. Debemos demostrar que dada una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\sigma(\Sigma) = 1$, necesariamente $\sigma(\neg\varphi) = 0$, y luego $\sigma(\varphi) = 1$. Hemos demostrado que si σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$, por lo que concluimos que $\Sigma \models \varphi$. □

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \models \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

- Podemos usar tablas de verdad para esto último. . .
- . . . pero es muy lento!

Estudiaremos un método alternativo que no requiere tablas de verdad más adelante

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Resolución proposicional

Epílogo

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Notación

Denotaremos por \square una contradicción cualquiera. La llamaremos **cláusula vacía**

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \square$.

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \square$.

Demostración (propuesta ★)

(\Rightarrow) Dado que Σ es inconsistente, debemos demostrar que $\Sigma \models \square$. Como Σ es inconsistente, sabemos que toda valuación σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 0$, y luego se cumple trivialmente que $\Sigma \models \square$.

(\Leftarrow) Dado que $\Sigma \models \square$, debemos demostrar que Σ es inconsistente. Por contradicción, supongamos que Σ es satisfactible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como \square es una contradicción, tenemos que $\sigma(\square) = 0$, y por lo tanto obtenemos que $\sigma(\Sigma) = 1$ pero $\sigma(\square) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \models \square$.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Observaciones

- Diremos que Σ es lógicamente equivalente a una fórmula φ si

$$\Sigma \equiv \{\varphi\}$$

- Para todo Σ se cumple

$$\Sigma \equiv \left\{ \bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi \right\}$$

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(q \rightarrow r)\} \equiv \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}$$

obteniendo un **conjunto de cláusulas** que es equivalente al original.

Para determinar si $\Sigma \models \varphi$, construiremos un conjunto de cláusulas

$$\Sigma' \equiv \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$$

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y un literal ℓ ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \quad C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Observaciones

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2, C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4\} \models C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$
- ℓ y $\bar{\ell}$ se llaman literales **complementarios**

La regla de resolución

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y un literal ℓ ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Ejemplo

Algunos casos particulares de resolución

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ \bar{\ell} \end{array}}{C_1 \vee C_2} \qquad \frac{\begin{array}{c} \ell \\ \bar{\ell} \end{array}}{\square}$$

La regla de factorización

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3 y un literal ℓ ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3}{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3}$$

Observación

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3\} \models C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3$

Demostraciones por resolución

Definición

Una **demostración por resolución** de que Σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas C_1, \dots, C_n tal que

- Para cada $i \leq n$
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j, C_k usando la regla de resolución o
 - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la regla de factorización
- $C_n = \square$

Lo denotamos por $\Sigma \vdash \square$.

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

- (1) $p \vee q \vee r \in \Sigma$
- (2) $\neg p \vee s \in \Sigma$
- (3) $s \vee q \vee r$ resolución de (1), (2)
- (4) $\neg q \vee s \in \Sigma$
- (5) $s \vee s \vee r$ resolución de (3), (4)
- (6) $s \vee r$ factorización de (5)
- (7) $\neg r \vee s \in \Sigma$
- (8) $s \vee s$ resolución de (6), (7)
- (9) s factorización de (8)
- (10) $\neg s \in \Sigma$
- (11) \square resolución de (9), (10)

Es decir, existe una demostración por resolución de que Σ es inconsistente

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ , se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Compleitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Corolario (forma alternativa)

Un conjunto de cláusulas Σ es inconsistente si y sólo si existe una demostración por resolución de que es inconsistente.

¡Resolución resuelve nuestro problema!

Resolución proposicional

¡Resolución resuelve nuestro problema de consecuencia lógica!

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r)\} \models q \rightarrow r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto
2. Transformar todo en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a CNF y separar cláusulas
3. Obtener una secuencia de cláusulas por resolución para llegar a \square

El desarrollo se deja propuesto ★

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(q \rightarrow r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\psi = \neg(q \rightarrow r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad

$$\varphi = q \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv \neg q \vee (p \rightarrow r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$

- Para ψ usamos implicancia y de Morgan

$$\psi = \neg(q \rightarrow r) \equiv \neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r \equiv \{q, \neg r\}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

- | | | |
|-----|-----------------------------|------------------------|
| (1) | p | $\in \Sigma$ |
| (2) | $\neg q \vee \neg p \vee r$ | $\in \Sigma$ |
| (3) | $\neg q \vee r$ | resolución de (1), (2) |
| (4) | q | $\in \Sigma$ |
| (5) | r | resolución de (3), (4) |
| (6) | $\neg r$ | $\in \Sigma$ |
| (7) | \square | resolución de (5), (6) |

Outline

Formas normales

Consecuencia lógica

Resolución proposicional

Epílogo

Objetivos de la clase

- Conocer las formas normales
- Comprender concepto de consecuencia lógica
- Demostrar consecuencias lógicas sencillas