Lógica proposicional

Clase 3

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Primer Acto: Fundamentos

Inducción y lógica

¿?¿¿Lógica??¿?

Lógica como **sistema formal** para determinar **validez** de argumentos.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todas las personas son mortales.}\\ \text{Sócrates es persona.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

¿Es válido este argumento/conclusión?

Lógica en la historia

Ha estado presente en grandes revoluciones del pensamiento.

1. Lógica simbólica
2. Lógica algebraica
3. Lógica matemática
4. Lógica en computación
5. ...

Es central en nuestra disciplina.

¿Qué lógicas existen?

Una lógica puede verse como un **lenguaje formal** para modelar cierto tipo de problema.

- Proposicional
- De predicados
- De Primer Orden
- De Segundo Orden
- Temporal
- Trivalente
- ...

En este curso estudiaremos 1. y 2.
Para más información:
IIC2213 - Lógica para ciencia de la computación

Objetivos de la clase

- Comprender la definición inductiva de la sintaxis proposicional.
- Demostrar propiedades sintácticas en lógica proposicional.
- Conocer la semántica proposicional.
- Demostrar equivalencias lógicas sencillas.

Outline

Lógica proposicional

Nuestra primera lógica formal es la **lógica proposicional**, que se basa en **proposiciones**.

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

Ejemplos

- Sócrates es mortal. 1
- La luna es una estrella. 0
- Lo escrito en esta frase es falso. ?

Una proposición debe admitir alguno de los dos **valores de verdad**.

Lógica proposicional

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

¿Cuáles son proposiciones y cuáles no?

- cuatro más nueve es igual a once ✓
- $4 + 9 = 11$ ✓
- $4 + 9 = 10$ ✓
- $34 + 59$ ✗
- ¿es el cielo azul? ✗

Una proposición debe admitir alguno de los dos **valores de verdad**.

Sintaxis de la lógica proposicional

Sea P un conjunto de variables proposicionales.

Definición

Dado P, se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface

1. Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \star \psi) \in \mathcal{L}(P)$

Cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es una **fórmula proposicional**.

Notemos que $\mathcal{L}(P)$ se define **inductivamente** a partir de un P fijo.

Definiciones inductivas

Ejemplo

1. Defina la función $\mathit{largo}(\varphi)$ como el largo de una fórmula en lógica proposicional (cuenta variables, conectivos y paréntesis).
2. Defina la función $\mathit{var}(\varphi)$ como el número de ocurrencias de variables proposicionales en φ.
3. Demuestre que si φ no contiene el símbolo $\neg$, se cumple que $\mathit{largo}(\varphi) \leq 2 \cdot \mathit{var}(\varphi)^2$.
   - ¿Qué pasa si contiene el símbolo $\neg$? Podríamos construir la fórmula $...(\neg(\neg(\neg p)))$ arbitrariamente larga.

Nos aprovechamos de la estructura inductiva de $\mathcal{L}(P)$.

Ejercicio

Definimos la función $largo(\varphi) : \mathcal{L}(P) \to \mathbb{N}$ como el largo de una fórmula mediante

1. $largo(p) = 1$, con $p \in P$.
2. $largo((\neg\varphi)) = 3 + largo(\varphi)$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $largo((\varphi \star \psi)) = 3 + largo(\varphi) + largo(\psi)$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

Sintaxis de la Lógica proposicional

Ejercicio

Similarmente definimos $var(\varphi) : \mathcal{L}(P) \to \mathbb{N}$ como el número de ocurrencias de variables proposicionales según

1. $var(p) = 1$, con $p \in P$.
2. $var((\neg\varphi)) = var(\varphi)$, con $\varphi \in L(P)$.
3. $var((\varphi \star \psi)) = var(\varphi) + var(\psi)$, con $\varphi, \psi \in L(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$.

Ejercicio

Demostraremos que si φ no contiene el símbolo $\neg$, se cumple que

$$largo(\varphi) \leq 2 \cdot var(\varphi)^2$$

Usaremos inducción estructural.

- **BI:** $largo(p) = 1 \leq 2 = 2 \cdot var(p)^2$.
- **HI:** Supongamos que la propiedad se cumple para $\varphi, \psi \in L(P)$ tales que no tienen el símbolo $\neg$. Es decir,

$$largo(\varphi) \leq 2 \cdot var(\varphi)^2$$
$$largo(\psi) \leq 2 \cdot var(\psi)^2$$

- **TI:** Debemos probar la propiedad para $(\varphi \star \psi)$, i.e. que

$$largo((\varphi \star \psi)) \leq 2 \cdot var((\varphi \star \psi))^2$$

Sintaxis de la Lógica proposicional

Ejercicio

- **TI:** Debemos probar la propiedad para $(\varphi \star \psi)$, i.e. que

$$largo((\varphi \star \psi)) \leq 2 \cdot var((\varphi \star \psi))^2$$

Usando las definiciones anteriores,

$$
\begin{aligned}
largo((\varphi \star \psi)) &= 3 + largo(\varphi) + largo(\psi) && \text{def.}\\
&\leq 3 + 2 \cdot var(\varphi)^2 + 2 \cdot var(\psi)^2 && \textbf{HI}\\
&= 3 + 2(var(\varphi)^2 + var(\psi)^2)\\
&= 3 + 2((var(\varphi) + var(\psi))^2 - 2 \cdot var(\varphi) \cdot var(\psi))\\
&= 3 - 4 \cdot var(\varphi) \cdot var(\psi) + 2 \cdot (var(\varphi) + var(\psi))^2\\
&\leq 3 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (var(\varphi) + var(\psi))^2 && 1 \leq var(\phi)\\
&\leq 2 \cdot (var(\varphi) + var(\psi))^2\\
&\leq 2 \cdot var((\varphi \star \psi))^2 && \text{def.}
\end{aligned}
$$

Por inducción estructural, se sigue que la propiedad es cierta para toda fórmula que no contiene $\neg$. $\square$

Ejercicio (Propuesto ★)

¿Qué pasa si contiene el símbolo $\neg$?

Como la regla que permite ocupar el conectivo $\neg$ no agrega variables pero sí aumenta el largo, podríamos ocuparla y aumentar arbitrariamente el largo de una fórmula sin aumentar el número de variables, con lo que la propiedad no se cumpliría luego de algún número de $\neg$ agregadas. Una idea para limitar esto es no permitir el uso de más de una negación; i.e., no permitir fórmulas del tipo $(\neg(\neg\varphi))$ y sucesivas. Esto se fundamenta más adelante.

Outline

Semántica de la lógica proposicional

Ya sabemos construir y verificar fórmulas bien formadas en lógica proposicional.

Pero, necesitamos determinar si una fórmula es **verdadera** o **falsa**.

- ¿Una fórmula siempre tiene un mismo valor de verdad?
- ¿De qué depende su valor de verdad?

La **semántica** se preocupa del **significado** de los símbolos que presentamos en la **sintaxis**.

> Antes de la semántica, las fórmulas son solo secuencias de símbolos **sin significado** en términos de valor de verdad.

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Una **valuación** o **asignación de verdad** de las variables de P es una función $\sigma : P \to \{0, 1\}$.

Notemos que:

- 0 representa el valor de verdad **falso**.
- 1 representa **verdadero**.
- La valuación solo asigna valor de verdad a variables (fórmulas atómicas).
- Si $|P| = n$, existen 2^n valuaciones diferentes para P.

¿Cómo podemos extender el valor de verdad a fórmulas compuestas?

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Sea P un conjunto y $\sigma : P \to \{0,1\}$ una valuación de las variables de P. Se define la **valuación extendida** $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$.
- **Semántica de la negación.** Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- **Semántica de la conjunción.** Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¡Le estamos dando **significado** a los conectivos lógicos!

Semántica de la lógica proposicional

Definición (cont.)

- **Semántica de la disyunción.** Si $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 0 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la doble implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = \hat{\sigma}(\psi_2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por simplicidad usaremos σ en vez de $\hat{\sigma}$.

Semántica de la lógica proposicional

Ejercicio

Dado $P = \{p, q\}$ y la valuación $\sigma : P \to \{0,1\}$ dada por

$$\sigma(p) = 1 \qquad \sigma(q) = 0$$

determine el valor de verdad de $\sigma(\varphi)$ para $\varphi = ((\neg(\neg p)) \leftrightarrow ((\neg p) \land q))$.

Visualizando la semántica: mundos posibles

Cada valuación describe un **mundo posible**. Podemos representarlos de forma exhaustiva en **tablas de verdad**.

p	q	φ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- Cada fila representa una valuación específica (un mundo posible).
- Cada columna muestra en qué mundos es verdadera una fórmula φ.

Una fórmula queda determinada semánticamente por su tabla de verdad: sabemos dónde (en qué σ) es verdadera/falsa.

Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad.

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ejercicio

Considere un conjunto de variables proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

- ¿Cuántas valuaciones diferentes existen para variables en P?
- ¿Cuántas tablas de verdad diferentes hay en $\mathcal{L}(P)$?

Los números 2^n y 2^{2^n} nos acompañarán por siempre en computación.

Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Comparemos con una fórmula particular $\varphi = (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

p	q	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

¿Se parece a alguna tabla de verdad conocida?

Equivalencia lógica

La visualización anterior sugiere la existencia de fórmulas con sintaxis diferente, pero misma semántica.

Definición

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son **lógicamente equivalentes** si para toda valuación σ, se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$, denotándolo como $\varphi \equiv \psi$.

Las fórmulas equivalentes comparten semántica teniendo diferente sintaxis.

Equivalencia lógica

Ejemplo

Demostremos que

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Para esto, podemos mostrar las tablas de verdad de ambas fórmulas con variables en $P = \{p, q, r\}$.

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Como sus tablas de verdad son iguales, concluimos que son equivalentes.

Más aún, este resultado muestra que el conectivo $\wedge$ es **asociativo**.

Equivalencia lógica

Mediante tablas de verdad se prueba una serie de **leyes de equivalencia**.

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

1. **Doble negación**

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

2. **Leyes de De Morgan**

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

3. **Conmutatividad**

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

Equivalencia lógica

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

4. **Asociatividad**

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

5. **Distributividad**

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

6. **Idempotencia**

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

Equivalencia lógica

Proposición (leyes de equivalencia)

Para fórmulas proposicionales $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$ se cumple

7. **Absorción**

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$$

8. **Implicancia material**

$$\varphi \to \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

9. **Doble implicancia**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Demuestre las leyes enunciadas.
¿Se puede demostrar que $\to$ es asociativo?

Consideraciones...

Hoy estudiamos la versión formal de la sintaxis en $\mathcal{L}(P)$. Desde ahora

- Omitiremos paréntesis externos.
- Omitiremos paréntesis asociativos.
- Omitiremos cualquier paréntesis que no produzca ambigüedad.
- Usaremos operadores generalizados por simplicidad:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

¿Por qué es ilegal usar los operadores generalizados con $n = \infty$?

Outline

Objetivos de la clase

- Comprender la definición inductiva de la sintaxis proposicional.
- Demostrar propiedades sintácticas en lógica proposicional.
- Conocer la semántica proposicional.
- Demostrar equivalencias lógicas sencillas.