Formas normales y consecuencia lógica

Clase 6

IIC 1253

Prof. Pedro Bahamondes

Outline

Formas normales

Definición

Un literal es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplo

Para el conjunto de variables $P = \{p, q, r\}$, las fórmulas p y $\neg r$ son literales.

Los literales son los átomos de la construcción que mostraremos

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$

Ejemplo

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

¿Hemos visto fórmulas en DNF antes?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es una disyunción de conjunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_k$$

donde cada B_i es una conjunción de literales, $B_i = (l_{i1} \wedge \ldots \wedge l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Ya demostramos esto y ¡mostramos cómo construir tal fórmula!

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$

Observaciones

- Una disyunción de literales se llama una **cláusula**.
  - Los C_i anteriores son cláusulas.
- Una fórmula en CNF es una conjunción de cláusulas.

Ejemplo

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$

¿Podríamos obtener una fórmula en CNF para una tabla de verdad?

Formas normales

Definición

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es una conjunción de disyunciones de literales; o sea, si es de la forma

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k$$

donde cada C_i es una disyunción de literales, $C_i = (l_{i1} \vee \ldots \vee l_{ik_i})$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

Demuestre el teorema (★)

Formas normales

Demostración

Como sabemos que toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF, demostraremos que toda fórmula en DNF es equivalente a una fórmula en CNF por inducción en la cantidad de disyunciones de la primera fórmula. Dado un conjunto de variables proposicionales P, tenemos la siguiente propiedad sobre los naturales:

$$Prop(n): \text{toda fórmula } \varphi \in \mathcal{L}(P) \text{ en DNF con a lo más } n \text{ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula } \psi \text{ en CNF } (\varphi \equiv \psi).$$

Demostraremos esta propiedad por inducción.

Formas normales

$Prop(n)$: toda fórmula $\varphi \in L(P)$ en DNF con a lo más n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF ($\varphi \equiv \psi$).
BI: $Prop(0)$: una fórmula en DNF con 0 disyunciones es de la forma

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k$$

por lo que está trivialmente en CNF.

HI: Suponemos que $Prop(n-1)$ es cierta; es decir, toda fórmula φ en DNF con a lo más $n-1$ disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ en CNF.

Formas normales

TI: Debemos demostrar que toda fórmula φ' en DNF con n disyunciones es lógicamente equivalente a una fórmula ψ' en CNF. Cualquier φ' será de la forma

$$\varphi' = B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_{n-1} \vee B_n$$

donde los B_i son conjunciones de literales. Por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_{n-1}) \vee B_n$$

y por HI $\varphi' \overset{HI}{\equiv} \psi \vee B_n$, con ψ una fórmula en CNF. Expandiendo la conjunción B_n:

$$\varphi' \equiv \psi \vee (l_{n,1} \wedge \ldots \wedge l_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Por distributividad:

$$\varphi' \equiv (\psi \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (\psi \vee l_{n,k_n})$$

Como ψ está en CNF, podemos expandirla:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge ((C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \vee l_{n,k_n})$$

con C_i cláusulas. Por distributividad:

$$\varphi' \equiv ((C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1})) \wedge \ldots \wedge ((C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n}))$$

Y por asociatividad:

$$\varphi' \equiv (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

Formas normales

TI: Como los C_i son cláusulas, es claro que $(C_i \vee l_{n,j})$ es una cláusula. Luego, tenemos que

$$\psi' = (C_1 \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,1}) \wedge \ldots \wedge (C_1 \vee l_{n,k_n}) \wedge \ldots \wedge (C_m \vee l_{n,k_n})$$

está en CNF y es tal que $\varphi' \equiv \psi'$. $\square$

Outline

Conjuntos de fórmulas

Notación

Dado un conjunto de fórmulas Σ en $L(P)$, diremos que una valuación σ **satisface** Σ, denotado por $\sigma(\Sigma) = 1$, si para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Definición

Un conjunto de fórmulas Σ es **satisfactible** si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es **inconsistente**.

¿Cuándo decimos que una fórmula se **deduce** de un conjunto?

Consecuencia lógica

Definición

ψ es **consecuencia lógica** de Σ si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

Lo denotamos por $\Sigma \vDash \psi$.

ψ debe ser satisfecha en cada "*mundo*" donde Σ es verdadero

Consecuencia lógica

Ejemplo

La regla de inferencia llamada **Modus ponens** es $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	p	$p \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Nos tenemos que fijar en las valuaciones que satisfacen al conjunto...
En esos mundos, la fórmula "*objetivo*" también debe ser satisfecha

Ejercicio (propuesto ★)

Demuestre las siguientes reglas de inferencia

- **Modus tollens:** $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$
- **Demostración por partes:** $\{p \vee q \vee r, p \to s, q \to s, r \to s\} \models s$

Un resultado fundamental

Teorema

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Este teorema combina dos mundos:
la **consecuencia lógica** y la **satisfactibilidad**

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma \models \varphi$. Por contradicción, supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfactible, luego existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$. Esto implica que $\sigma(\Sigma) = 1$ y que $\sigma(\neg\varphi) = 1$, y por lo tanto $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \models \varphi$.

($\Leftarrow$) Sea $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistente. Debemos demostrar que dada una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. Como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente y $\sigma(\Sigma) = 1$, necesariamente $\sigma(\neg\varphi) = 0$, y luego $\sigma(\varphi) = 1$. Hemos demostrado que si σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, entonces $\sigma(\varphi) = 1$, por lo que concluimos que $\Sigma \models \varphi$. □

Un resultado fundamental

El teorema anterior nos permite chequear $\Sigma \vDash \varphi$ estudiando la satisfactibilidad de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$

- Podemos usar tablas de verdad para esto último...
- ...pero es muy lento!

Estudiaremos un método alternativo que no requiere tablas de verdad más adelante

Outline

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Recordemos: una **cláusula** es una disyunción de literales

Notación

Denotaremos por $\square$ una contradicción cualquiera. La llamaremos **cláusula vacía**

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vDash \square$.

Primer ingrediente: Cláusula vacía

Teorema

Un conjunto de fórmulas Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \square$.

Demostración (propuesta ★)

($\Rightarrow$) Dado que Σ es inconsistente, debemos demostrar que $\Sigma \models \square$. Como Σ es inconsistente, sabemos que toda valuación σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 0$, y luego se cumple trivialmente que $\Sigma \models \square$.

($\Leftarrow$) Dado que $\Sigma \models \square$, debemos demostrar que Σ es inconsistente. Por contradicción, supongamos que Σ es satisfactible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como $\square$ es una contradicción, tenemos que $\sigma(\square) = 0$, y por lo tanto obtenemos que $\sigma(\Sigma) = 1$ pero $\sigma(\square) = 0$, lo que contradice que $\Sigma \models \square$.

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Definición

Los conjuntos de fórmulas Σ_1 y Σ_2 son **lógicamente equivalentes** ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$.

Observaciones

- Diremos que Σ es lógicamente equivalente a una fórmula φ si

$$\Sigma \equiv \{\varphi\}$$

- Para todo Σ se cumple

$$\Sigma \equiv \left\{ \bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi \right\}$$

Segundo ingrediente: conjuntos equivalentes

Teorema

Todo conjunto de fórmulas Σ es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \rightarrow (p \rightarrow r), \neg(q \rightarrow r)\} \equiv \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}$$

obteniendo un **conjunto de cláusulas** que es equivalente al original.

Para determinar si $\Sigma \vDash \varphi$, construiremos un conjunto de cláusulas

$$\Sigma' \equiv \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$$

La regla de resolución

Notación

Si un literal $\ell = p$, entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$, entonces $\bar{\ell} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Observaciones

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2,\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4\} \vDash C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$
- ℓ y $\bar{\ell}$ se llaman literales **complementarios**

La regla de resolución

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y un literal ℓ,

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

Ejemplo

Algunos casos particulares de resolución

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee \ell \vee C_2 \\ \bar{\ell} \end{array}}{C_1 \vee C_2} \qquad \frac{\begin{array}{c} \ell \\ \bar{\ell} \end{array}}{\square}$$

La regla de factorización

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3 y un literal ℓ,

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3}{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3}$$

Observación

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3\} \models C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3$

Demostraciones por resolución

Definición

Una **demostración por resolución** de que Σ es inconsistente es una secuencia de cláusulas $C_1, \ldots, C_n$ tal que

- Para cada $i \leq n$
  - $C_i \in \Sigma$ o
  - existen $j, k < i$ tales que C_i se obtiene de C_j, C_k usando la regla de resolución o
  - existe $j < i$ tal que C_i se obtiene de C_j usando la regla de factorización
- $C_n = \square$

Lo denotamos por $\Sigma \vdash \square$.

Resolución proposicional

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de $(1), (2)$
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de $(3), (4)$
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de $(6), (7)$
(9)	s	factorización de (8)
(10)	$\neg s$	$\in \Sigma$
(11)	$\square$	resolución de $(9), (10)$

Es decir, existe una demostración por resolución de que Σ es inconsistente

Resolución proposicional

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas Σ, se tiene que:

- **Correctitud:** Si $\Sigma \vdash \square$ entonces $\Sigma \models \square$.
- **Completitud:** Si $\Sigma \models \square$ entonces $\Sigma \vdash \square$.

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Corolario (forma alternativa)

Un conjunto de cláusulas Σ es inconsistente si y sólo si existe una demostración por resolución de que es inconsistente.

¡Resolución resuelve nuestro problema!

Resolución proposicional

¡Resolución resuelve nuestro problema de consecuencia lógica!

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica

Resolución proposicional

Ejemplo

Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Seguiremos la estrategia planteada

1. Agregar $\neg\varphi$ al conjunto
2. Transformar todo en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a CNF y separar cláusulas
3. Obtener una secuencia de cláusulas por resolución para llegar a $\square$

El desarrollo se deja propuesto ★

Resolución proposicional

Ejemplo

Consideremos el conjunto $\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\}$ y llamamos

- $\varphi = q \to (p \to r)$
- $\psi = \neg(q \to r)$

Transformamos cada una a conjuntos de cláusulas

- Para φ usamos ley de implicancia material (dos veces) y asociatividad
$$\varphi = q \to (p \to r) \equiv \neg q \vee (p \to r) \equiv \neg q \vee (\neg p \vee r) \equiv \{\neg q \vee \neg p \vee r\}$$
- Para ψ usamos implicancia y de Morgan
$$\psi = \neg(q \to r) \equiv \neg(\neg q \vee r) \equiv q \wedge \neg r \equiv \{q,\ \neg r\}$$

Resolución proposicional

Ejemplo

Tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Sigma = \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}.$$

Basta demostrar que Σ es inconsistente, y como es un conjunto de cláusulas, lo haremos mostrando que $\Sigma \vdash \square$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & p & \in \Sigma \\
(2) & \neg q \vee \neg p \vee r & \in \Sigma \\
(3) & \neg q \vee r & \text{resolución de } (1), (2) \\
(4) & q & \in \Sigma \\
(5) & r & \text{resolución de } (3), (4) \\
(6) & \neg r & \in \Sigma \\
(7) & \square & \text{resolución de } (5), (6)
\end{array}$$

Outline

Objetivos de la clase

- Conocer las formas normales
- Comprender concepto de consecuencia lógica
- Demostrar consecuencias lógicas sencillas