Equivalencia en lógica proposicional

Clase 4

IIC 1253

Prof. Diego Bustamante

Outline

Objetivos de la clase

- Determinar si un conjunto es funcionalmente completo.

Outline

Recordatorio: Sintaxis de la Lógica Proposicional

Sea P un conjunto de variables proposicionales.

Definición

Dado P, se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface:

1. Si $p \in P$, entonces $p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \star \psi) \in \mathcal{L}(P)$

Cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es una **fórmula proposicional**.

Recordatorio: Semántica de la Lógica Proposicional

Dada una valuación, el valor de verdad de una fórmula se puede calcular propagando los valores de verdad.

Los conectivos quedan determinados completamente por su tabla de verdad:

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tenemos una fórmula $\varphi \in L(P)$, con $P = \{p, q, r\}$, y lo único que conocemos de ella es que cumple la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

¿Podemos construir una fórmula equivalente a φ?

Conectivos y fórmulas

Ejemplo

	p	q	r	φ
σ_1	0	0	0	1
σ_2	0	0	1	0
σ_3	0	1	0	0
σ_4	0	1	1	1

	p	q	r	φ
σ_5	1	0	0	1
σ_6	1	0	1	0
σ_7	1	1	0	0
σ_8	1	1	1	1

Estrategia:

- Codificar cada valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$.
- Combinar dichas codificaciones mediante disyunción.

Con esto, proponemos la siguiente fórmula equivalente a φ:

$$\underbrace{((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_1} \vee \underbrace{((\neg p) \wedge q \wedge r)}_{\sigma_4} \vee \underbrace{(p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))}_{\sigma_5} \vee \underbrace{(p \wedge q \wedge r)}_{\sigma_8}$$

Podemos generalizar esta idea para n variables.

Conectivos y fórmulas

Consideremos el conectivo n-ario siguiente

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n & \varphi \\
\hline
\sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1(\varphi) \\
\sigma_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \sigma_2(\varphi) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sigma_{2^n} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \sigma_{2^n}(\varphi)
\end{array}
$$

Para cada σ_j con $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ consideremos la siguiente fórmula:

$$
\varphi_j = \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right)
$$

La fórmula φ_j codifica la j-ésima valuación.

Conectivos y fórmulas

	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	φ
σ_1	0	0	$\dots$	0	0	$\sigma_1(\varphi)$
σ_2	0	0	$\dots$	0	1	$\sigma_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	1	$\dots$	1	1	$\sigma_{2^n}(\varphi)$

Ahora tomamos la disyunción de las valuaciones que satisfacen a φ

$$\bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n\\ \sigma_j(\varphi)=1}} \varphi_j \quad = \quad \bigvee_{\substack{j=1\dots 2^n\\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n\\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\dots n\\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i)\right)\right)$$

La fórmula resultante es equivalente a φ.

Conectivos y fórmulas

Teorema

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente.

Corolario

Para toda tabla de verdad existe una fórmula equivalente que solo usa símbolos $\neg, \wedge$ y $\vee$.

¡Lo acabamos de demostrar!

Conectivos funcionalmente completos

Definición

Un conjunto de conectivos lógicos se dice **funcionalmente completo** si toda fórmula en $\mathcal{L}(P)$ es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

Ejemplo

Ya demostramos que el conjunto $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, pues para toda fórmula φ, se tiene que:

$$\varphi \equiv \bigvee_{\substack{j=1\ldots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\ldots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{\substack{i=1\ldots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i) \right) \right)$$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicios

1. Demuestre que $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \rightarrow\}$ son funcionalmente completos.
2. Demuestre que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo. (propuesto ★)
3. ¿Es $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ funcionalmente completo? (propuesto ★)

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

Demostraremos que $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\rightarrow$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

- **BI:** Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

Es crucial la dirección. Queremos probar que $C' = \{\neg, \rightarrow\}$ es F.C. por lo que debemos usar los símbolos de C' para expresar los de C.

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **HI:** Supongamos que $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.
- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C. Tenemos tres casos que analizar:
  - $\theta = (\neg\varphi)$
  - $\theta = \varphi \vee \psi$
  - $\theta = \varphi \wedge \psi$

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C.
  - $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.
  - $\theta = \varphi \vee \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \vee \psi'$

    Usando la ley de implicancia, $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$:

    $\theta \equiv (\neg\varphi') \to \psi'$

    Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 1.

- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C.
  - $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi'$

    Usando las leyes de doble negación, De Morgan y de implicancia:

    $$\theta \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi')) \equiv \neg(\varphi' \rightarrow (\neg\psi'))$$

    Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Luego, por inducción estructural se concluye que para toda fórmula con símbolos solo de C, existe una fórmula equivalente con símbolos en C'. □

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 2. (propuesto ★)

Demostraremos que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo.

Dado $P = \{p\}$, demostraremos por inducción que toda fórmula en $\mathcal{L}(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es lógicamente equivalente a p o a $\neg p$. Como ninguna de estas fórmulas es equivalente a $p \land \neg p$, se concluye que $\{\neg\}$ no puede ser funcionalmente completo.

Demostraremos la propiedad

$$P(\varphi) \;:=\; \varphi \text{ es equivalente a } p \text{ o a } \neg p$$

- **BI:** Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ construida usando sólo p y $\neg$ es equivalente a p o a $\neg p$.

Esta demostración es por contraejemplo, daremos un caso ($p \land \neg p$) en que **no se cumple** la definición de funcionalmente completo.

Conectivos funcionalmente completos

Ejercicio 2. (propuesto ★)

- **TI:** El único caso inductivo que tenemos que demostrar es $\psi = \neg\varphi$, pues sólo podemos usar el conectivo $\neg$.

  Por **HI**, sabemos que para toda valuación σ se cumple que $\sigma(\varphi) = \sigma(p)$ o $\sigma(\varphi) = \sigma(\neg p)$. Podemos hacer una tabla de verdad:

φ	$\psi = \neg\varphi$
p	$\neg p$
$\neg p$	p

Concluimos que ψ es equivalente a p o a $\neg p$. Sin pérdida de generalidad, sean las fórmulas ψ y φ tal que $\sigma(p) = \sigma(\varphi) \neq \sigma(\psi)$, se cumple que:

p	φ	ψ	$p \wedge \neg p$
0	0	1	0
1	1	0	0

Por lo tanto, tenemos que $\{\neg\}$ no es funcionalmente completo. □

Outline

Objetivos de la clase

- Determinar si un conjunto es funcionalmente completo.