Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Interrogación 1

9 de Abril de 2025

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

Uno puede dividir el plano en regiones utilizando cículos. Por ejemplo, (i) 1 círculo en el plano lo divide en una región interior y otra exterior, (ii) 2 círculos no intersectados lo dividen en 3 regiones y (iii) 2 círculos intersectados en 4 regiones.
Use inducción para demostrar que si $n > 0$ círculos dividen el plano en regiones, entonces estas regiones pueden ser coloreadas con dos colores diferentes de tal forma que no hayan dos regiones con un borde en común que reciban el mismo color.

Pregunta 2

Considere la función $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $A(0, 0) = 0$ y:

$$A(m,n) \;=\; \begin{cases} A(m-1,n)+1 & \text{si } n=0 \text{ y } m>0 \\ A(m,n-1)+n & \text{si } n>0 \end{cases}$$

Demuestre por inducción fuerte que $A(m, n) = m + \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $m, n \geq 0$.

Pregunta 3

En esta pregunta tratamos con Lógica Proposicional. Sea P un conjunto finito de proposiciones (también llamadas variables proposicionales) y $\sigma : P \to \{0, 1\}$ una valuación para P. Defina Δ_σ como el conjunto de todas las fórmulas α sobre P tales que $\sigma(\alpha) = 1$. Demuestre que para cualquier conjunto Δ de fórmulas sobre P, si (i) $\Delta_\sigma \subseteq \Delta$ y (ii) Δ es satisfacible, entonces $\Delta_\sigma = \Delta$.

Pregunta 4

En esta pregunta tratamos con la lógica de primer orden. Asuma que nuestro vocabulario μ contiene un solo predicado, la relación R de aridad tres (relación ternaria).

1. Sea A un dominio. Decimos que una relación ternaria $R \subseteq A \times A \times A$ sobre A *codifica* una función binaria, si para todo par $(a, b) \in A \times A$ existe un, y solo un, $c \in A$ tal que $(a, b, c) \in R$.

   Escriba una fórmula ϕ sobre el vocabulario μ, tal que para toda estructura/interpretación $\mathcal{A}$ sobre μ se cumple lo siguiente:

   $$\mathcal{A} \models \phi \quad \iff \quad R^{\mathcal{A}} \text{ codifica una función binaria.}$$

Recuerde que $R^{\mathcal{A}}$ es la interpretación de R en $\mathcal{A}$.

2. Construya una fórmula ψ sobre el vocabulario μ, tal que para toda estructura/interpretación $\mathcal{A}$ sobre μ, donde $R^{\mathcal{A}}$ codifica una función binaria $f^{\mathcal{A}} : A \times A \to A$, se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad f^{\mathcal{A}} \text{ es asociativa.}$$

   Recuerde que una función binaria f sobre A es *asociativa*, si para todo $a, b, c, \in A$ se cumple que $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$.