La noción de sucesor

Sea $\text{Suc}(A, B)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\,(x \in B \leftrightarrow (x \in A \vee x = A))$$

La noción de sucesor

Sea $\text{Suc}(A, B)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x \, (x \in B \leftrightarrow (x \in A \vee x = A))$$

Intuitivamente estamos diciendo que $\text{Suc}(A, B)$ es cierto si y sólo si $B = A \cup \{A\}$.

La noción de sucesor

Sea $\text{Suc}(A, B)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x \, (x \in B \leftrightarrow (x \in A \vee x = A))$$

Intuitivamente estamos diciendo que $\text{Suc}(A, B)$ es cierto si y sólo si $B = A \cup \{A\}$.

- ¿Cómo sabemos que este conjunto existe?

La noción de sucesor

Proposición

$\Sigma_{ZFC} \models \forall A \exists B \, Suc(A, B)$

La noción de sucesor

Proposición

$\Sigma_{ZFC} \models \forall A \exists B \, Suc(A, B)$

Ejercicio

Demuestre la proposición.

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\text{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío:

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\text{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\mathrm{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$:

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\mathrm{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\text{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\text{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que Suc$(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$:

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\mathrm{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

¿Que conjuntos estamos construyendo?

Comencemos con el vacío: $\emptyset$

¿Cuál es el conjunto B tal que $\text{Suc}(\emptyset, B)$? Llamamos a este conjunto el sucesor del vacío: $\{\emptyset\}$

Sucesor de $\{\emptyset\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Sucesor de $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

$\ldots$

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$		
$\{\emptyset\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$		
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$		

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	4	

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	4	$4 = \{0, 1, 2, 3\}$

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	4	$4 = \{0, 1, 2, 3\}$
	$\ldots$	

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	4	$4 = \{0, 1, 2, 3\}$
	$\ldots$	

Están apareciendo los números naturales.

Pongamos nombres a estos conjuntos

conjunto	nombre	identidad
$\emptyset$	0	
$\{\emptyset\}$	1	$1 = \{0\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$	2	$2 = \{0, 1\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$	3	$3 = \{0, 1, 2\}$
$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$	4	$4 = \{0, 1, 2, 3\}$
	$\ldots$	

Están apareciendo los números naturales.

- ¿Pero qué nos asegura que existe el conjunto de todos los sucesores?

La noción de conjunto inductivo

Sea $\mathrm{Ind}(A)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\,(\mathrm{Vac}(x) \to x \in A) \land \forall x \forall y((x \in A \land \mathrm{Suc}(x, y)) \to y \in A)$$

La noción de conjunto inductivo

Sea $\mathrm{Ind}(A)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\,(\mathrm{Vac}(x) \to x \in A) \land \forall x \forall y((x \in A \land \mathrm{Suc}(x, y)) \to y \in A)$$

Recuerde que el conjunto vacío existe y es único, así que $\mathrm{Ind}(A)$ también se podría escribir de la siguiente forma:

$$\exists x\,(\mathrm{Vac}(x) \land x \in A) \land \forall x \forall y((x \in A \land \mathrm{Suc}(x, y)) \to y \in A)$$

El axioma de infinitud

Intuitivamente $\text{Ind}(A)$ nos dice que A es un conjunto inductivo.

El axioma de infinitud

Intuitivamente $\mathsf{Ind}(A)$ nos dice que A es un conjunto inductivo.

El axioma de infinitud φ_{I} se define como:

$$\exists A \, \mathsf{Ind}(A)$$

El axioma de infinitud

Intuitivamente $\text{Ind}(A)$ nos dice que A es un conjunto inductivo.

El axioma de infinitud φ_{I} se define como:

$$\exists A \, \text{Ind}(A)$$

φ_{I} es otro axioma que incluimos en Σ_{ZFC}.

La definición formal de los números naturales

Sea Nat(A) la siguiente fórmula:

$$\forall x \, (x \in A \leftrightarrow \forall B \, (\mathrm{Ind}(B) \rightarrow x \in B))$$

La definición formal de los números naturales

Sea $\mathrm{Nat}(A)$ la siguiente fórmula:

$$\forall x\,(x \in A \leftrightarrow \forall B\,(\mathrm{Ind}(B) \rightarrow x \in B))$$

Esta fórmula define al conjunto de los números naturales.

La definición formal de los números naturales

El siguiente teorema nos dice que los naturales están bien definidos en Σ_{ZFC}.

La definición formal de los números naturales

El siguiente teorema nos dice que los naturales están bien definidos en Σ_{ZFC}.

Teorema

$$\Sigma_{ZFC} \quad \models \quad \exists A \, Nat(A)$$

La definición formal de los números naturales

El siguiente teorema nos dice que los naturales están bien definidos en Σ_{ZFC}.

Teorema

$$\begin{aligned} \Sigma_{ZFC} &\models \exists A\, Nat(A) \\ \Sigma_{ZFC} &\models \forall A \forall B\, ((Nat(A) \wedge Nat(B)) \rightarrow A = B) \end{aligned}$$

La demostración del teorema

Por esquema de separación tenemos que:

$$\Sigma_{\mathrm{ZFC}} \models \forall A \exists B \forall x \,(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \forall C\,(\mathrm{Ind}(C) \rightarrow x \in C))) \qquad (\ddagger)$$

La demostración del teorema

Por esquema de separación tenemos que:

$$\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \models \forall A \exists B \forall x \, (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \forall C \, (\mathrm{Ind}(C) \rightarrow x \in C))) \qquad (\ddagger)$$

Por axioma de infinitud sabemos que:

$$\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \models \exists I \, \mathrm{Ind}(I)$$

La demostración del teorema

Por esquema de separación tenemos que:

$$\Sigma_{\mathrm{ZFC}} \models \forall A \exists B \forall x \, (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \forall C \, (\mathrm{Ind}(C) \rightarrow x \in C))) \qquad (\ddagger)$$

Por axioma de infinitud sabemos que:

$$\Sigma_{\mathrm{ZFC}} \models \exists I \, \mathrm{Ind}(I)$$

Reemplazando A por I en $(\ddagger)$ obtenemos:

$$\Sigma_{\mathrm{ZFC}} \models \exists B \forall x \, (x \in B \leftrightarrow \forall C \, (\mathrm{Ind}(C) \rightarrow x \in C))$$

La demostración del teorema

Vale decir, obtenemos que:

$$\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \quad \models \quad \exists A\, \mathsf{Nat}(A)$$

La demostración del teorema

Vale decir, obtenemos que:

$$\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \quad \models \quad \exists A \, \mathsf{Nat}(A)$$

Finalmente, por axioma de extensionalidad obtenemos que:

$$\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \quad \models \quad \forall A \forall B \, ((\mathsf{Nat}(A) \wedge \mathsf{Nat}(B)) \rightarrow A = B)$$

¿Pero cuáles son los números naturales?

Considerando la forma en que definimos sucesor, la notación usual para los números naturales corresponde a lo siguiente:

¿Pero cuáles son los números naturales?

Considerando la forma en que definimos sucesor, la notación usual para los números naturales corresponde a lo siguiente:

- $0 = \emptyset$

¿Pero cuáles son los números naturales?

Considerando la forma en que definimos sucesor, la notación usual para los números naturales corresponde a lo siguiente:

- $0 = \emptyset$
- $n = \{0, \ldots, n - 1\}$ para cada $n > 0$

¿Pero cuáles son los números naturales?

Considerando la forma en que definimos sucesor, la notación usual para los números naturales corresponde a lo siguiente:

- $0 = \emptyset$
- $n = \{0, \ldots, n-1\}$ para cada $n > 0$

En particular, tenemos que:

$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$$

¿Pero cuáles son los números naturales?

En la teoría de conjuntos podemos definir la suma y multiplicación de números naturales.

¿Pero cuáles son los números naturales?

En la teoría de conjuntos podemos definir la suma y multiplicación de números naturales.

- Estas definiciones están basadas en la notación que acabamos de definir y coinciden con las definiciones usuales.

¿Pero cuáles son los números naturales?

En la teoría de conjuntos podemos definir la suma y multiplicación de números naturales.

- Estas definiciones están basadas en la notación que acabamos de definir y coinciden con las definiciones usuales.
- Además se puede definir todas las funciones *usuales*.

¿Pero cuáles son los números naturales?

En la teoría de conjuntos podemos definir la suma y multiplicación de números naturales.

- Estas definiciones están basadas en la notación que acabamos de definir y coinciden con las definiciones usuales.
- Además se puede definir todas las funciones *usuales*.

Desde ahora en adelante usamos $\mathbb{N}$ para denotar al conjunto de los números naturales que define la teoría de conjuntos.

La noción de inducción

Considere un conjunto P tal que $P \subseteq \mathbb{N}$.

La noción de inducción

Considere un conjunto P tal que $P \subseteq \mathbb{N}$.

- P es una propiedad de los números naturales que estamos tratando de demostrar que es cierta.

La noción de inducción

Considere un conjunto P tal que $P \subseteq \mathbb{N}$.

- P es una propiedad de los números naturales que estamos tratando de demostrar que es cierta.

Ejemplo

Considere el siguiente conjunto

$$P = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right\}$$

Sabemos que $P \subseteq \mathbb{N}$, y nos gustaría demostrar que $P = \mathbb{N}$.

La noción de inducción

¿Qué podemos concluir si demostramos que P es un conjunto inductivo? Vale decir,

La noción de inducción

¿Qué podemos concluir si demostramos que P es un conjunto inductivo? Vale decir,

- $0 \in P$

La noción de inducción

¿Qué podemos concluir si demostramos que P es un conjunto inductivo?
Vale decir,

- $0 \in P$
- Si $n \in P$, entonces $n + 1 \in P$

La noción de inducción

¿Qué podemos concluir si demostramos que P es un conjunto inductivo?
Vale decir,

- $0 \in P$
- Si $n \in P$, entonces $n + 1 \in P$

Como $\mathbb{N}$ está contenido en todos los conjuntos inductivos, concluimos que $P = \mathbb{N}$.

La noción de inducción

¿Qué podemos concluir si demostramos que P es un conjunto inductivo? Vale decir,

- $0 \in P$
- Si $n \in P$, entonces $n + 1 \in P$

Como $\mathbb{N}$ está contenido en todos los conjuntos inductivos, concluimos que $P = \mathbb{N}$.

- La propiedad P es cierta para todos los números naturales.

La noción de inducción

Tenemos entonces un método para demostrar que una propiedad P se cumple para todos los números naturales.

La noción de inducción

Tenemos entonces un método para demostrar que una propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- Caso base: demuestre que $0 \in P$

La noción de inducción

Tenemos entonces un método para demostrar que una propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- Caso base: demuestre que $0 \in P$
- Caso inductivo: suponiendo que $n \in P$, demuestre que $n + 1 \in P$

La noción de inducción

Tenemos entonces un método para demostrar que una propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- Caso base: demuestre que $0 \in P$
- Caso inductivo: suponiendo que $n \in P$, demuestre que $n + 1 \in P$

Esto es lo que se llama una demostración por inducción.

La noción de inducción

Tenemos entonces un método para demostrar que una propiedad P se cumple para todos los números naturales.

- Caso base: demuestre que $0 \in P$
- Caso inductivo: suponiendo que $n \in P$, demuestre que $n + 1 \in P$

Esto es lo que se llama una demostración por inducción.

- Esta es una herramienta muy poderosa que vamos a estudiar en detalle.

Comentarios finales

Comentarios finales

- La teoría de conjuntos contiene otros axiomas.

Comentarios finales

- La teoría de conjuntos contiene otros axiomas.

- En particular contiene al axioma de regularidad que nos dice que $A \notin A$ para todo conjunto A.

Comentarios finales

- La teoría de conjuntos contiene otros axiomas.
- En particular contiene al axioma de regularidad que nos dice que $A \notin A$ para todo conjunto A.
  - Este axioma nos dice más, en particular que no podemos tener cadenas de la forma:

$$
\begin{gathered}
A \in B \text{ y } B \in A \\
A \in B,\ B \in C \text{ y } C \in A \\
\ldots
\end{gathered}
$$