Unidad V: Relaciones

Relaciones: definiciones y relaciones de equivalencia.

Clase 13 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Sean A y B dos conjuntos.

El producto cartesiano $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, entonces:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4)\}$$

Sean A y B dos conjuntos.

El producto cartesiano $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Comentarios:

- (a, b) es un **par ordenado**.
- La igualdad de pares ordenados es coordenada a coordenada:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos.

El producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ se define como:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ \ldots \ , a_n \in A_n\}.$$

Ejemplo:

Si $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$ y $A_3 = \{3, 5\}$ entonces:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 = \{&(1,1,3),(1,1,5),(1,2,3),(1,2,5),(1,4,3),(1,4,5),\\ &(2,1,3),(2,1,5),(2,2,3),(2,2,5),(2,4,3),(2,4,5)\} \end{aligned}$$

Sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos.

El producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ se define como:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Comentarios:

- $(a_1, \dots, a_n)$ es una **tupla ordenada** (o simplemente **tupla**).
- La igualdad de tuplas ordenadas es coordenada a coordenada:

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$$

Sean A y B dos conjuntos.

Definición:

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, entonces:

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)\}$$

Posibles relaciones binarias de A en B:

- $R_1 = \{(1,2),(1,4),(2,2)\}$
- $R_2 = \varnothing$
- $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)\}$

Sea A un conjunto.

Definición:

R es una relación binaria sobre A, si R es una relación de A en A.
Es decir, si $R \subseteq A \times A$.

Ejemplo:

Sea $A = \mathbb{N}$ las siguientes son posibles relaciones binarias sobre A:

- $R_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = j\}$
- $R_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$

Sea A un conjunto y $n \geq 1$.

Notación:

A^n denota el producto cartesiano $A \times \cdots \times A$, donde A se repite n veces.

Definición:

R es una relación n-aria sobre A, si $R \subseteq A^n$.

Ejemplo:

Sea $A = \mathbb{N}$ las siguientes son posibles relaciones 3-aria y 4-aria sobre A:

- $R_1 = \{(i, j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k = i + j\}$
- $R_2 = \{(i, j, k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j < k + \ell\}$

En lo que viene nos enfocaremos en relaciones binarias sobre un conjunto A.
Le llamaremos simplemente **relaciones sobre** A.

Sea R una relación sobre A y sean $a, b \in A$.

Para indicar que $(a, b) \in R$ también usaremos la siguiente notación:

- $R(a, b)$
- $a \, R \, b$

Definición:

Una relación R sobre A es:

- **Refleja:**
  Para cada $a \in A$, se cumple $R(a, a)$.

- **Irrefleja (o antirefleja):**
  Para cada $a \in A$, **no** se cumple $R(a, a)$.

Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

Definición:

Una relación R sobre A es:

- **Simétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces **no** se cumple $R(b, a)$.
- **Antisimétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$ entonces $a = b$.

Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones simétrica e asimétrica sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

Definición:

Una relación R sobre A es:

- **Transitiva:**
  Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa:**
  Para cada $a, b \in A$, si tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

- De un ejemplo de una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.
- De un ejemplo de una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.
- De un ejemplo de una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.

Definición:

Una relación R sobre A es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

- La relación $\{(i,i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ sobre $\mathbb{N}$.
- La relación equivalencia lógica sobre $L(P)$.
  (recordar que $L(P)$ denota el conjunto de fórmulas proposicionales sobre P.)

Sea $n \geq 2$ un natural.

Definimos la relación $\equiv_n$ (equivalencia modulo n) sobre $\mathbb{Z}$ como:

$$a \equiv_n b \iff (a - b) \text{ es divisible por } n$$

Recordatorio: m es divisible por n si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = k \cdot n$.

Proposición:

$\equiv_n$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

Observación: $(a, b) \sim (c, d) \iff a - b = c - d$

Proposición:

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Definición:

Sea R una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$ un elemento.

La **clase de equivalencia** de a bajo R se define como:

$$[a]_R = \{b \in A \mid R(a,b)\}.$$

Ejemplos:

- ¿Cómo se van las clases de equivalencia bajo $\equiv_n$ sobre $\mathbb{Z}$?
- ¿Qué pasa para $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

El siguiente resultado nos dice que las clases de equivalencia **particionan** al conjunto A.

Proposición:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Se cumple lo siguiente:

- Para cada $a \in A$, se tiene $[a]_\sim \neq \varnothing$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ **no** se cumple, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Proposición:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Se cumple lo siguiente:

- Para cada $a \in A$, se tiene $[a]_\sim \neq \varnothing$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ **no** se cumple, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

Demostración:

Item (1):

Sea $a \in A$. Como $\sim$ es refleja se tiene $a \sim a$.

Concluimos que $a \in [a]_\sim$, y entonces, $[a]_\sim \neq \varnothing$.

Proposición:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Se cumple lo siguiente:

- Para cada $a \in A$, se tiene $[a]_\sim \neq \emptyset$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ **no** se cumple, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

Demostración:

Sean $a, b \in A$ tal que $a \sim b$.
Veamos que $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$. (la dirección $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$ es análoga.)

Sea $c \in [a]_\sim$. Por definición de clase de equivalencia, se tiene que $a \sim c$.

Por hipótesis, sabemos que $a \sim b$ y como $\sim$ es simétrica, tenemos que $b \sim a$.

Tenemos que $b \sim a$ y $a \sim c$, luego por transitividad de $\sim$, deducimos que $b \sim c$.

Concluimos que $c \in [b]_\sim$.

Proposición:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A. Se cumple lo siguiente:

- Para cada $a \in A$, se tiene $[a]_\sim \neq \emptyset$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ **no** se cumple, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

Demostración:

Sean $a, b \in A$ tal que $a \sim b$ no se cumple.

Por contradicción, supongamos que $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$.
Es decir, existe un elemento $c \in A$ tal que $c \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$.

Por definición de clases de equivalencia, se tiene que $a \sim c$ y $b \sim c$.

Por simetría de $\sim$, obtenemos que $c \sim b$.

Por transitividad de $\sim$, concluimos que $a \sim b$.
Esto es una contradicción.

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (un conjunto de subconjuntos de A).

Definición:

Decimos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si:

- Para cada $X \in \mathcal{S}$, se tiene que $X \neq \varnothing$. (cada X en $\mathcal{S}$ es no vacío.)
- $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = A$. (la unión de todos los X en $\mathcal{S}$ es A.)
- Para cada $X, Y \in \mathcal{S}$, se tiene que $X \cap Y = \varnothing$.
  (los conjuntos en $\mathcal{S}$ son disjuntos par a par.)

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ¿Cuáles son particiones?

- $\{ \ \{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6\} \ \}$ ✓
- $\{ \ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{3, 6\} \ \}$ ✗
- $\{ \ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\} \ \}$ ✓
- $\{ \ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\} \ \}$ ✗

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A.

La proposición anterior nos dice que las clases de equivalencia bajo $\sim$, forman una partición de A.

Considere $\equiv_4$, ¿Cuáles son sus clases de equivalencia?

$$a \equiv_4 b \iff (a-b) \text{ es divisible por } 4 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ (a-b) = 4 \cdot k$$

$$
\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{0, 4, 8, 12, \ldots, \text{-}4, \text{-}8, \text{-}12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{1, 5, 9, 13, \ldots, \text{-}3, \text{-}7, \text{-}11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{2, 6, 10, 14, \ldots, \text{-}2, \text{-}6, \text{-}10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{3, 7, 11, 15, \ldots, \text{-}1, \text{-}5, \text{-}9, \ldots\} \\
[4]_{\equiv_4} &= [0]_{\equiv_4} \\
[5]_{\equiv_4} &= [1]_{\equiv_4} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Considere $\equiv_4$, ¿Cuáles son sus clases de equivalencia?

$$a \equiv_4 b \iff (a-b) \text{ es divisible por } 4 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ (a-b) = 4 \cdot k$$

$$\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{0,4,8,12,\ldots,\text{-}4,\text{-}8,\text{-}12,\ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{1,5,9,13,\ldots,\text{-}3,\text{-}7,\text{-}11,\ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{2,6,10,14,\ldots,\text{-}2,\text{-}6,\text{-}10,\ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{3,7,11,15,\ldots,\text{-}1,\text{-}5,\text{-}9,\ldots\} \\
[4]_{\equiv_4} &= [0]_{\equiv_4} \\
[5]_{\equiv_4} &= [1]_{\equiv_4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definición:

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre A.

El **conjunto cuociente** de A dado $\sim$ se define como:

$$A/\sim \; = \; \{[a]_\sim \mid a \in A\}.$$

Comentarios:

- El conjunto cuociente es una partición de A.
- Muchas construcciones comunes se basan ele conjunto cuociente, por ejemplo, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Recuerde la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

Definimos:

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim \; = \; \{[(a, b)]_\sim \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- n es representado por $[(n, 0)]_\sim$.
- $-n$ es representado por $[(0, n)]_\sim$.

Definamos la suma sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim + [(c,d)]_\sim = [(a+c, b+d)]_\sim$$

Debemos asegurarnos de que la suma está **bien definida**:

Si $[(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim$ y $[(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim$, entonces
$$[(a_1,b_1)]_\sim + [(c_1,d_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim + [(c_2,d_2)]_\sim.$$

Ejercicio: Demuestre que la suma está bien definida.

La construcción de $\mathbb{Z}$: operaciones

Definamos la multiplicación sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_\sim + [(c, d)]_\sim = [(ac + bd, ad + bc)]_\sim$$

Debemos asegurarnos de que la multiplicación está **bien definida**:

Si $[(a_1, b_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim$ y $[(c_1, d_1)]_\sim = [(c_2, d_2)]_\sim$, entonces
$$[(a_1, b_1)]_\sim \cdot [(c_1, d_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim \cdot [(c_2, d_2)]_\sim.$$

Ejercicio: Demuestre que la multiplicación está bien definida.

Definamos la relación $<$ sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim < [(c,d)]_\sim \iff a+d < c+b$$

Debemos asegurarnos de la relación $<$ está **bien definida**:

$$\text{Si } [(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim \text{ y } [(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim, \text{ entonces}$$
$$[(a_1,b_1)]_\sim < [(c_1,d_1)]_\sim \text{ si y sólo si } [(a_2,b_2)]_\sim < [(c_2,d_2)]_\sim.$$

Ejercicio: Demuestre que $<$ está bien definida.

- Defina $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ usando una relación de equivalencia y el espacio cuociente.
- Defina las operaciones suma y multiplicación sobre $\mathbb{Q}$ y demuestre que están bien definidas.