Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 5 - Lógica de Predicados

29 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach Caetano Borges

Resumen

¿Qué es la lógica de predicados?

La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado. En otras palabras un predicado sobre un conjunto D es una proposición parametrizada por elementos del conjunto D.

La lógica de predicados tiene varios componentes clave:

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
- Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Usaremos operadores lógicos para construir nuestros predicados $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Paréntesis: ( )
- Predicado binario $=$
- Predicados n-arios sobre un dominio
- Variables $x, y, z, \cdot$

- Cuantificadores $\forall$ y $\exists$
- **Fórmulas:** Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

  Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.

  Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.

  Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.

  Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\, \varphi)$ y $(\forall x\, \varphi)$ son fórmulas.

- **Oración** es una fórmula donde todas las variables están cuantificadas
- **Interpretadores:** Dado que cada sección tiene su propia sintaxis para este apartado mostraremos las tres notaciones usadas en el curso:

  Sección 1:

  > Definición
  >
  > Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ un vocabulario, donde la aridad de R_i es n_i; para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.
  >
  > Una interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ es una tupla $\langle A, R_1^{\mathcal{I}}, \ldots, R_k^{\mathcal{I}} \rangle$ tal que:
  > - A es el dominio $\mathcal{I}$, el cual es no vacío.
  > - $R_i^{\mathcal{I}} \subseteq A^{n_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

  Sección 2:

  > Definición
  >
  > Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** $\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Se explicita

  Sección 3:

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_k\}$ un vocabulario.
Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $\mathcal{L}$ se compone de:

- un dominio $\mathcal{I}(dom)$,
- para cada nombre P_i, un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$. (de la misma aridad.)

- Finalmente, definimos una nocion de evaluacion

Definición

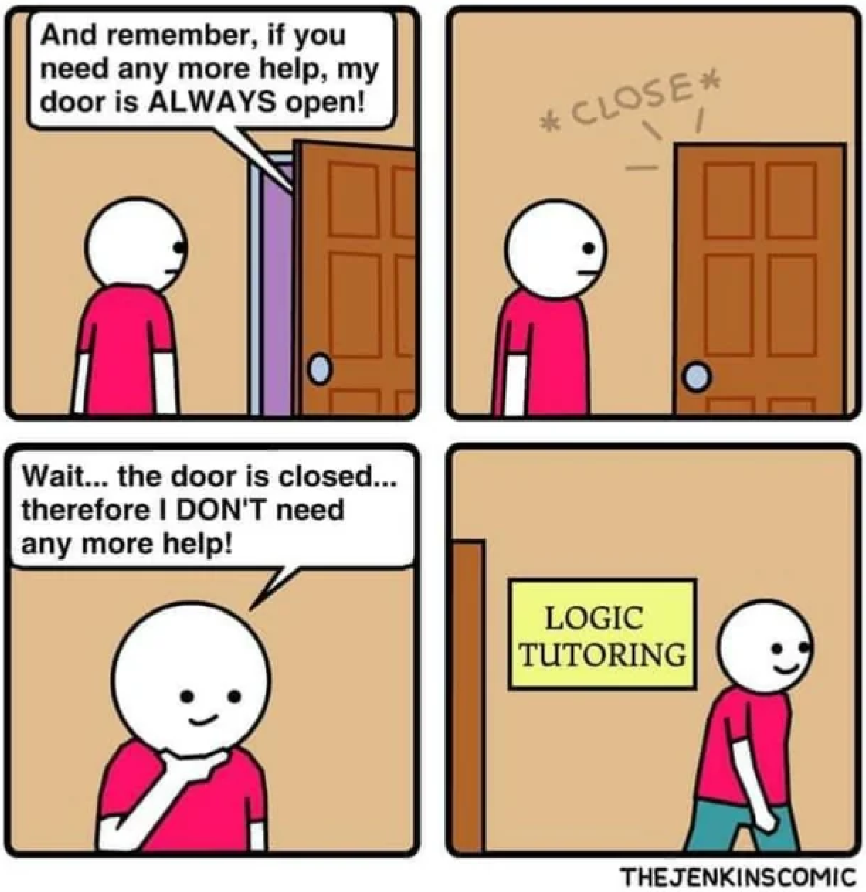
Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una fórmula sobre $\mathcal{L}$ con n variables libres y sea $\mathcal{I}$ una interpretación para $\mathcal{L}$.
La **evaluación** de φ sobre $\mathcal{I}$ es el **predicado** n**-ario** que se obtiene de la siguiente manera:

- Reemplazar cada nombre de predicado $P \in \mathcal{L}$, por el predicado $\mathcal{I}(P)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$.
- Evaluar φ como si fuera un **predicado compuesto**.

Notación

- La evaluación de φ sobre $\mathcal{I}$ se denota por $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}$.
- Dado valores $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{I}(dom)$, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}(a_1, \dots, a_n)$ toma valor 0 o 1.

1. Meme del día



2. Lógica de Predicados

1. Considere el símbolo de predicado binario $=$ que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Explique por qué la siguiente fórmula no es verdadera sin importar la interpretación:

$$\varphi = \forall x \forall y \neg (x = y)$$

2. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine el valor de verdad de las siguientes oraciones bajo las interpretaciones dadas, eligiendo libremente los valores de las variables libres. ¿Puede entregar alguna interpretación con la que cambie el valor de verdad?

- $\mathcal{I}(dom) = \{0\}, \mathcal{I}(\varphi) = \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
- $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}, \mathcal{I}(S(x, y, z)) = x < y < z, \mathcal{I}(\varphi(x)) = \forall y (S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

3. Lógica de Predicados

Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar una arista en un grafo. Escriba una oración en logica de predicados que represente cada una de las siguientes propiedades.

1. El grafo es un clique[1]
2. El grafo contiene un clique con 4 nodos
3. El grafo tiene un ciclo con 4 nodos
4. Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4
5. La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3
6. El grafo contiene exactamente 3 nodos

4. Modelamiento

Considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x, y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación[2]:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(dom) &\coloneqq \text{Personas}\\ \mathcal{I}(R(x)) &\coloneqq x \text{ conoce el cahuin}\\ \mathcal{I}(C(x,y)) &\coloneqq x \text{ le contó el cahuin a } y\\ \mathcal{I}(x = y) &\coloneqq x \text{ es igual a } y\end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el cahuin y otra que no" se puede definir con la fórmula $\varphi(y) = \exists x \exists y (R(x) \wedge \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cahuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.

[1]Un clique es un subgrafo, donde cada nodo del subgrafo está conectado a todo el resto de nodos del subgrafo.

[2]Esto también se puede denotar $R^{\mathcal{I}} = \ldots$, o simplemente $R(x) = \ldots$. Significa exactamente lo mismo.