IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

18.08.2025

Hoy...

Lógica de predicados: predicados y operaciones sobre ellos.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable."
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \wedge B) \to C$ – no!

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable."
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \wedge B) \to C$ – no!
- intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable."
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \wedge B) \to C$ – no!
- intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.
- necesitamos algo con conecciones más intrincadas entre proposiciones atómicas

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x|y$ (2 parámetros);

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x|y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x|y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);
- 0, 1 (0 parámetros).

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x|y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);
- 0, 1 (0 parámetros).
- $x + y$ – no es un predicado.

Predicados – definición

Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minusculas, posiblemente con indices).

Definición

Un **predicado** *P con parametros $x_1, \ldots, x_n$ sobre un conjunto D (llamado el* **dominio** *de P) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D.*

Predicados – definición

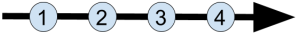
Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minusculas, posiblemente con indices).

Definición

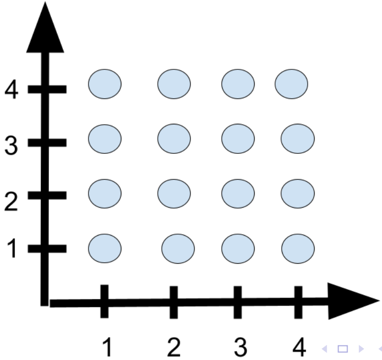
Un **predicado** P *con parametros* $x_1, \ldots, x_n$ *sobre un conjunto* D *(llamado el* **dominio** *de* P*) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de* $x_1, \ldots, x_n$ *a elementos de* D*.*
La aridad *de* P *es el número de parametros de* P*.*

Presentación gráfica de los predicados

$D = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P(x) = \text{“}x\text{ es impar”}.$



$$D = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}.$$



Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ *un predicado n-ario sobre el conjunto* D*.* **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de* $x_1, \ldots, x_n$ *a elementos de* D *donde* P *toma valor 1.*

Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ *un predicado n-ario sobre el conjunto* D*.* **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de* $x_1, \ldots, x_n$ *a elementos de* D *donde* P *toma valor 1.*

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado n-ario sobre el conjunto D. **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D donde P toma valor 1.*

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

¿Cuál es el tamaño del soporte de $x + y = z$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$?

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Definición

Sean P, Q *dos predicados con parametros* $x_1, \ldots, x_n$ *sobre un conjunto* D*. Entonces,* $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$ *son los siguientes predicados:*

$$(\neg P)(x_1, \ldots, x_n) = \neg(P(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \wedge (Q(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \vee (Q(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(P \rightarrow Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow (Q(x_1, \ldots, x_n)).$$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Preguntas

$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x))$

Preguntas

$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x))$

¿Como expresar

$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

Preguntas

$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x))$

¿Como expresar

$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

¿Como expresar el predicado $x = y$ a través de $x|y$ y conectivos lógicos?

Conectivos y soportes

Proposición

Sean P, Q dos predicados n-arios sobre el conjunto A. Entonces,

- $sop(P \wedge Q) =$
- $sop(P \vee Q) =$
- $sop(\neg P) =$

Dibujos

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.
- ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.
- ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado n-ario sobre un conjunto D. Sea $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ una función. Entonces, el siguiente predicado k-ario sobre D:

$$R(y_1, \ldots, y_k) = P(y_{\alpha(1)}, \ldots, y_{\alpha(n)}),$$

es el resultado de identificación de los parámetros, dada por α.

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Cuantificador existencial

- "existe" $= \exists$.

Cuantificador existencial

- “existe” $= \exists$.
- $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

Cuantificador existencial

- "existe" $= \exists$.
- $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

- "x es par" a través de $a + b = c$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

Cuantificador existencial

- "existe" $= \exists$.
- $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;
- "x es par" a través de $a + b = c$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, $\exists x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario sobre D:

$$(\exists x_i P)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{a \in A} P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Ejemplos cuantificador existencial

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x \; x < y, \qquad Q(x) = \exists y \; x < y$$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

Ejemplos cuantificador existencial

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x\ x < y, \qquad Q(x) = \exists y\ x < y$$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

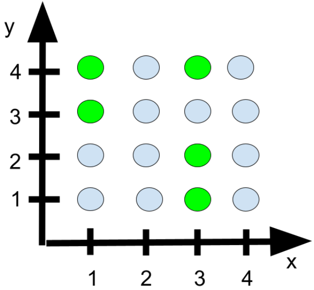
Define el siguiente predicado

$$\exists x \exists y \exists z\ x + y + z = a$$

sobre $D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

Interpretación geométrica de $\exists$

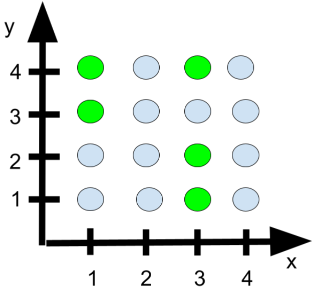
Para el siguiente predicado $A(x, y)$:



dibujar $\exists x A(x, y)$, $\exists y A(x, y)$.

Interpretación geométrica de $\exists$

Para el siguiente predicado $A(x, y)$:



dibujar $\exists x A(x, y)$, $\exists y A(x, y)$.

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto A. Entonces, $sop(\exists x_i P)$ es la proyección del $sop(P)$ paralelo a la dirección del eje x_i.

Ejemplos

Sea $D = \mathbb{N}$. Expresar los siguientes predicados a través de predicados $x = y, x + y = z, x \cdot y = z$, conectivos lógicos, identificación de los parámetros y $\exists$:

- $\mathbb{I}\{x = 0\}$
- $\mathbb{I}\{x = 1\}$
- $\mathbb{I}\{x = 2\}$
- $x|y$
- "x es par"
- "x es primo"
- "x es una potencia de 2".

Espacio

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador $\forall$ (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bigwedge_{a \in A} P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador $\forall$ (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \dots, x_n$. Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigwedge_{a \in A} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

... aunque se expresa a través de $\neg, \exists$

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Demostración.

$\square$

¡Gracias!