IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

24.09.2025

Hoy...

inducción matemática: el método de inducción, inducción fuerte, principio del número mínimo.

El método de inducción

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada* $n \in A$, *tenemos* $n + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

El método de inducción

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada* $n \in A$, *tenemos* $n + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Método (de inducción)

Sea $\Phi(n)$ *una propiedad de números naturales. Para mostrar que* $\Phi(n)$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$, *basta*

- *(base de inducción) mostrar* $\Phi(0)$.
- *(paso inductivo) mostrar* $\Phi(n) \to \Phi(n + 1)$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo

Proposición

$2^n \geq n$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2

Proposición

Sea $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ *la sequencia de los números de Fibonacci. Mostrar:*

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

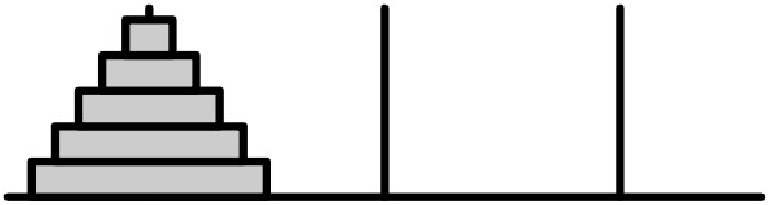
para todos los números naturales n*.*

Torres de Hanói

Proposición

El juguete ("Torres de Hanó") tiene tres varillas. En una de ellas se encuentra una pirámide formada por varios aros (que disminuyen de tamaño de abajo hacia arriba). Esta pirámide debe trasladarse a otra varilla respetando las reglas del juego: no se pueden mover varios aros a la vez y no se puede colocar un aro más grande sobre uno más pequeño.

Demostrar que es posible trasladar a otra varilla una pirámide de cualquier número de aros, respetando las reglas del juego



Empezar no con 0

Proposición

Sea $\Phi(n)$ *una propiedad de números naturales y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *un número natural tal que*

a) $\Phi(n_0)$;

b) $\Phi(n) \to \Phi(n+1)$ *para todos* $n \geq n_0$.

Entonces, $\Phi(n)$ *para todos* $n \geq n_0$.

Ejemplo

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 3$, el número 1 se puede representar cómo una suma de n distintas fracciones unitarias.

Ejemplo

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 3$, el número 1 se puede representar cómo una suma de n distintas fracciones unitarias.

- (base de inducción) $n = 3$, $1 =$

Fortalecer la afirmación

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 0$, *tenemos:*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$$

Fortalecer la afirmación 2

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 1$, tenemos:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$$

Inducción fuerte – ejemplo

Proposición

En un polígono convexo de n lados se han trazado d diagonales de modo que diagonales distintas no se cruzan, salvo en los vértices. Demuestre que $d \leq n - 3$.

Inducción fuerte – formalización

Proposición

Sea $\Phi(n)$ *una propiedad de números naturales y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *un número natural tal que*

a) $\Phi(n_0)$;

b) $\Phi(n_0) \wedge \ldots \wedge \Phi(n-1) \rightarrow \Phi(n)$ *para todos* $n > n_0$.

Entonces, $\Phi(n)$ *para todos* $n \geq n_0$.

Inducción fuertre – cuando la base es más interesante

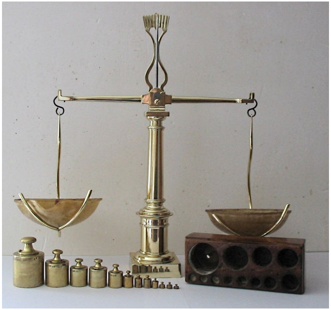
Proposición

Demuestre que un cuadrado se puede cortar en n cuadrados (no necesariamente iguales), para cada número natural $n \geq 6$.

Inducción fuertre – ejemplo 3

Proposición

Se dispone de masas con 1, 3, 9, 27, 81, . . . gramos (cada una es tres veces más pesada que la anterior). Demuestre que para cada $n \geq 0$ *entero, con ellas se puede equilibrar cualquier objeto cuyo peso sea* n *gramos, siempre que se permita colocar las masas en ambos platillos de la balanza.*



El principio del número mínimo – ejemplo

Proposición

Cada número natural $n \geq 2$ *es un producto de números primos.*

El principio del número mínimo – formalización

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$. *Entonces,* A *tiene el* **elemento mínimo**, *es decir, existe* $m \in A$ *tal que* $m \leq n$ *para todos* $n \in A$.

El principio del número mínimo – ejemplo

Proposición

El número $\sqrt{2}$ *es irracional.*

¡Gracias!