PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 8 - Inducción

3 de octubre de 2024

Elías Ayaach, Manuel Villablanca, Caetano Borges

---

1. Inducción Simple

1. Demuestre que para todo $n \geq 0$

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

Solución

En primer lugar, notemos que el interior del paréntesis del lado izquierdo es la suma de 1 a n, para la cual conocemos una expresión:

$$\begin{aligned}(1+2+3+\cdots+n)^2 &= (\sum_{i=1}^{n} i)^2 \\ &= (\frac{n(n+1)}{2})^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

Con esto en mente, desarrollaremos desde el lado derecho. Demostraremos por inducción simple que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

CB: Con $n = 1$ se tiene que

- LI: $\sum\limits_{i=1}^{1} i^3 = i^3 = 1$
- LD: $\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = \frac{1\cdot 4}{4} = 1$

Por lo que el caso base se cumple.

HI: Supongamos que la propiedad se cumple para n, es decir, que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

TI: Demostraremos que la propiedad se cumple para $n+1$. Por HI se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} && / + (n+1)^3 \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4)}{4} \\
&= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)(n^3 + 5n^2 + 8n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Con lo que llegamos a la expresión deseada. Queda demostrado por inducción fuerte que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Con ello, se tiene que

$$\begin{aligned}
(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)
\end{aligned}$$

por lo que, por transitividad de $=$, queda demostrado que

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \qquad \square$$

2. La sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots$ que cumple la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Demuestre que si n es múltiplo de 5, entonces F_n es divisible por 5.

Solución
Los múltiplos de 5 son de la forma $n = 5k$ con $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos por inducción simple sobre k que F_{5k} es divisible por 5.
BI: Tenemos $k = 0$, y $F_{5k} = F_0 = 0$ que es divisible por 5.
HI: Supongamos que F_{5k} es divisible por 5.
TI: PD: $F_{5(k+1)}$ es divisible por 5. Tenemos que

$$\begin{aligned} F_{5(k+1)} &= F_{5k+5} = F_{5k+4} + F_{5k+3} = (F_{5k+3} + F_{5k+2}) + F_{5k+3} = 2 \cdot F_{5k+3} + F_{5k+2} \\ &= 2 \cdot (F_{5k+2} + F_{5k+1}) + F_{5k+2} = 3 \cdot F_{5k+2} + 2 \cdot F_{5k+1} \\ &= 3 \cdot (F_{5k+1} + F_{5k}) + 2 \cdot F_{5k+1} = 5 \cdot F_{5k+1} + 3 \cdot F_{5k} \end{aligned}$$

Luego, como por hipótesis de inducción sabemso que F_{5k} es divisible por 5, tenemos que $F_{5(k+1)}$ es divisible por 5.
Entonces, por inducción concluímos que todo número de la sucesión de Fibonacci F_n tal que n es múltiplo de 5 es divisible por 5.

2. Inducción Fuerte

1. Considere la siguiente demostración

Teorema: $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.
Demostración por inducción fuerte:
BI: El caso base se cumple claramente ya que $\pi^0 = 1$.
HI: Supongamos que $\pi^k = 1$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
TI: PD: $\pi^n = 1$.
Se tiene que $\pi^n = \frac{\pi^{n-1} \cdot \pi^{n-1}}{\pi^{n-2}}$. Tanto $n-1$ como $n-2$ son valores de k válidos según HI, por lo que se tiene que $\pi^{n-1} = 1$ y $\pi^{n-2} = 1$. Reemplazando en la ecuación anterior, $\pi^n = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Con ello, concluímos por inducción fuerte que $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.

Salva a las matemáticas de ser destruidas: encuentra el error en la demostración anterior.

Solución
Este ejercicio es un claro ejemplo de que en ciertos ejercicios es necesario demostrar manualmente más de un caso base. Un buen indicador de la necesidad de más de un caso base, es cuando se usa más de un ejemplar en la tesis inductiva.
En este caso particular, para demostrar que $\pi^n = 1$, se utilizan dos ejemplares: π^{n-1} y π^{n-2}, lo que nos dice que debemos demostrar dos casos base, los cuales pueden ser π^0 y π^1, con lo que la demostración sería falsa.

PD: Para cualquier demostración de inducción se pueden demostrar tantos casos base como se quiera, no hace daño demostrar a mano más ejemplos, e incluso es recomendable en algunos ejercicios para generar intuición del comportamiento del problema.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Una k-coloración de aristas de G es una función $f : E \to \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

   Demuestre usando inducción que para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$ y para toda k-coloración de aristas f de G, se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $\frac{|V|}{2}$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

Solución:

1. Se busca demostrar por inducción que dada la k-coloración f, para todo color se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

   De formas análogas es posible hacer inducción sobre la cantidad de vértices o aristas, a continuación se plantea según cantidad de vértices buscando demostrar la proposición

$$P(n) := \forall G(V, E) \text{ tal que } |V| = n. \forall f \text{ se cumple } |\{e \in E \mid f(e) = C\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

   - Caso base
   Dado un grafo $G = (\{v\}, \emptyset)$ de modo que $|V| = 1$ entonces una k-coloración de aristas $f : \emptyset \to \{1, \ldots, k\}$, por ende

$$|\{e \in E \mid f(e) = C\}| = 0 \leq \frac{1}{2}$$

- Caso inductivo

Sea $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$ y una k-coloración de aristas $f : E \to \{1, \dots, k\}$. Luego se tiene un vértice v cualquiera y $e_1, \dots e_m$ sus aristas incidentes y sea c un color arbitrario. Luego se tienen los siguientes 2 casos:

1) Si $\forall i \leq m. f(e_i) \neq c$, entonces se define

$$G - v = (V', E') = (V - v, E - \{e_1, \dots e_m\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Además por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = c\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 1}{2}$$

Ahora, dado que el color c no se ocupa en ninguna de las aristas $e_1, \dots, e_m$ se cumple que

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$

2) Si $\exists i \leq m$ tal que $f(e_i) = c$, entonces se define la arista $e_c = \{u, v\}$ tal que $f(e_c) = c$. Luego al considerar el grafo

$$G - e_c = (V', E') = (V \setminus e_c, \{e' \in E \mid e' \cap e_c = \emptyset\})$$

y f' como la restricción de f sobre E'. Ahora, por hipótesis inductiva se tiene que

$$|\{e \in E' \mid f'(e) = c\}| \leq \frac{|V'|}{2} = \frac{|V| - 2}{2}$$

Finalmente, dado que todas las aristas $e' \neq e_c$ tales que $e' \cap e_c \neq \emptyset$ (esto es, coinciden en un vértice con e_c) no son coloreadas con el color c se tiene que

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| = |\{e \in E' \mid f'(e) = c\}| + 1 \leq \frac{|V| - 2}{2} + 1 = \frac{|V|}{2}$$