Unidad II: Lógica de predicados

Lógica de predicados: Satisfacibilidad, equivalencia y consecuencia lógica

Clase 07 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Definición:

Una oración φ es **satisfacible** si **existe** una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

¿Cuáles de las siguientes oraciones son satisfacibles?

- $\exists x \forall y \, O(x, y)$. ✓
- $\exists x \, (P(x) \wedge \neg P(x))$. ✗
- $\big(\exists x \, P(x)\big) \wedge \big(\forall x \forall y \, ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y)\big)$. ✓
- $\big(\forall x \exists y \, R(x, y)\big) \wedge \big(\forall x \forall y \forall z \, ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z)\big)$. ✓

Considere el siguiente problema:

Dada una oración φ de la lógica de predicados, verificar si es satisfacible.

¿Puede dar un algoritmo para este problema?

El problema de satisfacibilidad es indecidible:

- No existe un algoritmo para este problema.
- Sin importar la cantidad de tiempo que le permitamos usar al algoritmo.

Esto es un teorema que se puede demostrar formalmente:

- Requiere formalizar la noción de algoritmo (Máquinas de Turing).

On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem.
Alan Turing (1936).

El problema de satisfacibilidad es indecidible:

- No existe un algoritmo para este problema.
- Sin importar la cantidad de tiempo que le permitamos usar al algoritmo.

Esto es un teorema que se puede demostrar formalmente:

- Requiere formalizar la noción de algoritmo (Máquinas de Turing).

Como consecuencia, **no** se puede escribir un programa en Python (ni cualquier otro lenguaje de programación) que resuelva este problema.

Definición:

Una oración φ es una **tautología** si **para toda** interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

¿Cuáles de las siguientes oraciones son tautología?

- $\forall x\,(x = x)$ ✓
- $\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ ✓
- $\big(\exists x\, P(x)\big) \wedge \big(\forall x \forall y\,((P(x) \wedge P(y)) \to x = y)\big)$. ✗

Contradicciones en lógica de predicados

Definición:

Una oración φ es una **contradicción** si **para toda** interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$.

¿Cuáles de las siguientes oraciones son contradicción?

- $\exists x \, \neg(x = x)$ ✓
- $\big(\forall x \, P(x)\big) \wedge \big(\exists x \, \neg P(x)\big)$ ✓
- $\big(\exists x \, P(x)\big) \wedge \big(\forall x \forall y \, \big((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y\big)\big)$. ✗

Al igual que en lógica proposicional, tenemos las siguientes propiedades:

- Una oración φ es contradicción si y sólo si φ **no** es satisfacible.
- Una oración φ es tautología si y sólo si $\neg\varphi$ **no** es satisfacible.

Ejercicio: verifique las propiedades.

Definición:

Dos oraciones φ y ψ son **equivalentes** si **para toda** interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}.$$

Notación: $\varphi \equiv \psi$.

Equivalencias que vienen de la lógica proposicional:

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi \qquad \text{(doble negación)}$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$

$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi \qquad \text{(conmutatividad)}$$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$

$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta \qquad \text{(asociatividad)}$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta) \qquad \text{(distributividad)}$$

$$\varphi \to \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi \qquad \text{(implicancia)}$$

Nuevas equivalencias:

$$\begin{aligned} \neg\forall x\,\varphi &\equiv \exists x\,\neg\varphi \\ \neg\exists x\,\varphi &\equiv \forall x\,\neg\varphi \\ \forall x\,(\varphi \wedge \psi) &\equiv (\forall x\,\varphi) \wedge (\forall x\,\psi) \\ \exists x\,(\varphi \vee \psi) &\equiv (\exists x\,\varphi) \vee (\exists x\,\psi) \end{aligned}$$

Equivalencia: ejercicios

1. ¿Se cumple la equivalencia $\forall x\,(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x\,\varphi) \vee (\forall x\,\psi)$?

2. ¿Se cumple la equivalencia $\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x\,\varphi) \wedge (\exists x\,\psi)$?

3. Demuestre que $\varphi \equiv \psi$ si y sólo si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es tautología.

Sea Σ un conjunto de oraciones.
Decimos que una interpretación $\mathcal{I}$ satisface a Σ si:

$$\text{para cada } \varphi \in \Sigma, \text{ se tiene que } [\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1.$$

Notación: $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

Definición:

Una oración φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones Σ, si para cada interpretación $\mathcal{I}$:

$$\text{si } [\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1, \text{ entonces } [\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1.$$

Notación: $\Sigma \vDash \varphi$.

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

$$\{\forall x\, P(x)\} \models \exists x\, P(x)$$
$$\{\exists x\, P(x)\} \models \forall x\, P(x)$$
$$\{\exists x \forall y\, R(x,y)\} \models \forall x \exists y\, R(x,y)$$
$$\{\forall x \exists y\, R(x,y)\} \models \exists x \forall y\, R(x,y)$$
$$\{\forall x(P(x) \wedge Q(x))\} \models \forall x\, P(x)$$
$$\{\forall x(P(x) \vee Q(x))\} \models \forall x\, P(x)$$
$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)),\, \forall x\, P(x)\} \models \forall x\, Q(x)$$

2. Un conjunto de oraciones Σ es satisfacible si **existe** interpretación $\mathcal{I}$ tal que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. En caso contrario, Σ es inconsistente.

   Demuestre que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.