Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Tarea 3

10 de septiembre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Pregunta 1

Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas. Justifique su respuesta con una demostración.

(a) (3.0 pts)

$$\{\forall x \forall y \left(R(x,y) \to R(y,x)\right),\ \forall x \forall y \forall z \left((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\right)\} \ \models\ \forall x\, R(x,x)$$

(b) (3.0 pts)

$$\{\forall x \exists y\, R(x,y),\ \forall x \forall y \left(R(x,y) \to R(y,x)\right),\ \forall x \forall y \forall z \left((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\right)\} \ \models\ \forall x\, R(x,x)$$

Solución

Por simplicidad, definamos:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \exists y\, R(x,y) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y \left(R(x,y) \to R(y,x)\right) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z \left((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)\right) \\
\varphi &= \forall x\, R(x,x)
\end{aligned}$$

(a) La afirmación es falsa. Debemos mostrar que $\{\varphi_2, \varphi_3\} \not\models \varphi$. Para esto, basta mostrar una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $[\![\{\varphi_2, \varphi_3\}]\!]_{\mathcal{I}} = 1$, pero $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$. Podemos tomar la interpretación $\mathcal{I}$ con dominio $\{1\}$ y tal que:

$$R^{\mathcal{I}} = \emptyset$$

Es decir, el predicado $R^{\mathcal{I}}$ siempre es falso. La fórmula $\forall x \forall y \left(R(x,y) \to R(y,x)\right)$ es verdadera sobre $\mathcal{I}$, ya que los únicos posibles valores para x e y son $x = 1$ e $y = 1$, y el antecedente de la implicación es falso. Similarmente para $\forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big)$. Deducimos que $[\![\{\varphi_2, \varphi_3\}]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. Por otro lado, tenemos que $\forall x\, R(x,x)$ es falsa sobre $\mathcal{I}$ ya que $(1,1) \notin R^{\mathcal{I}}$. Concluimos que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$.

Notar que el argumento funciona si escogemos cualquier dominio para $\mathcal{I}$ y hacemos que el predicado $R^{\mathcal{I}}$ sea falso para todos los posibles valores de x e y.

(b) La afirmación es verdadera. Debemos demostrar que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi$. Sea $\mathcal{I}$ una interpretación arbitraria tal que $[\![\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. Debemos demostrar que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. Como $\varphi = \forall x\, R(x,x)$, tomemos un elemento a arbitrario en el dominio de $\mathcal{I}$. Debemos verificar que $(a,a) \in R^{\mathcal{I}}$. Como $\varphi_1 = \forall x \exists y\, R(x,y)$ es verdadera sobre $\mathcal{I}$, para el elemento $x = a$, existe un elemento b en el dominio de $\mathcal{I}$ tal que $(a,b) \in R^{\mathcal{I}}$. Como $\varphi_2 = \forall x \forall y \big(R(x,y) \rightarrow R(y,x)\big)$ es verdadera sobre $\mathcal{I}$, tomando $x = a, y = b$, obtenemos que la implicación $R(a,b) \rightarrow R(b,a)$ debe ser verdadera. Como ya sabemos que $(a,b) \in R^{\mathcal{I}}$ es verdadero, entonces se debe cumplir que $(b,a) \in R^{\mathcal{I}}$. Finalmente, como $\varphi_3 = \forall x \forall y \forall z \big((R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\big)$ es verdadera sobre $\mathcal{I}$, tomando $x = a, y = b, z = a$, obtenemos que la implicación $(R(a,b) \wedge R(b,a)) \rightarrow R(a,a)$ debe ser verdadera. Como ya sabemos que $R(a,b) \wedge R(b,a)$ es cierto, concluimos que $(a,a) \in R^{\mathcal{I}}$.

Distribución de puntaje

En ambos ítems, 3.0 pts por dar la respuesta correcta y justificar con una demostración correcta. Sólo decir si es consecuencia lógica o no, sin ninguna justificación, no recibe puntaje. Se aplican descuentos o puntaje parciales a criterio del corrector.

Pregunta 2

Dado dos conjuntos A y B se define la *intersección* $A \cap B$ y la *diferencia* $A \setminus B$ como:

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \,\wedge\, c \in B\}.$$
$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \,\wedge\, c \notin B\}.$$

¿Son ciertas las siguientes igualdades para todos los conjuntos A, B y C? Justifique su respuesta con una demostración.

(a) (3.0 pts)

$$(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \emptyset$$

(b) (3.0 pts)

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$$

Solución

(a) La igualdad es cierta. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Por el axioma de extensionalidad, basta ver que $(A \setminus C) \cap (C \setminus B)$ no tiene elementos. Por contradicción, supongamos que $u \in (A \setminus C) \cap (C \setminus B)$, para cierto u. Por la definición de intersección, tenemos que $u \in (A \setminus C)$ y $u \in (C \setminus B)$. Por la definición de la diferencia, obtenemos que $u \in A$ y $u \notin C$, y $u \in C$ y $u \notin B$. En particular, deducimos que $u \in C$ y $u \notin C$, lo cual es una contradicción.

(b) La igualdad es falsa. Para demostrar esto, podemos tomar $A = \{a\}$, $B = \emptyset$, $C = \{a\}$, donde a es cualquier conjunto (por ejemplo $a = \emptyset$). Por un lado, tenemos que:

$$(A \setminus B) \setminus C = (\{a\} \setminus \emptyset) \setminus \{a\} = \{a\} \setminus \{a\} = \emptyset$$

Por otra parte, tenemos que:

$$A \setminus (B \setminus C) = \{a\} \setminus (\emptyset \setminus \{a\}) = \{a\} \setminus \emptyset = \{a\}$$

Luego $(A \setminus B) \setminus C$ y $A \setminus (B \setminus C)$ son distintos.

Distribución de puntaje

En ambos ítems, 3.0 pts por dar la respuesta correcta y justificar con una demostración correcta. Sólo decir si se cumple o no la igualdad, sin ninguna justificación, no recibe puntaje. Se aplican descuentos o puntajes parciales a criterio del corrector.