Unidad IV: Inducción

# Inducción fuerte.

Clase 12 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

## Inducción fuerte: motivación

Demostremos que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$$P(n): \quad n \text{ se puede escribir como el producto de números primos.}$$

**Recordatorio:** Un número $p$ es primo si $p \geq 2$ y sus únicos divisores son 1 y $p$.

**Caso base:** $P(2)$ es verdadero.

**Paso inductivo:** $\forall n \geq 2 \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.

Sea $n \geq 2$. Suponga que $P(n)$ es verdadero:

$$n \text{ se puede escribir como un producto de primos } p_1 \cdots p_m. \quad \textbf{(HI)}$$

**Por demostrar:** $P(n+1)$ es verdadero.

Hay dos posibles casos:

- $n+1$ es primo:

  En este caso estamos listos. (¿por qué?)
- $n+1$ no es primo:

  Podemos escribir $n+1$ como $n+1 = c \cdot d$, donde $1 < c, d < n+1$.

¿Cómo aplicamos la hipótesis inductiva en el segundo caso?

**Principio de inducción fuerte:**

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales.

Si la propiedad $P$ cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(0)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > 0$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

# Inducción fuerte: variante caso base mayor a 0

## Principio de inducción fuerte (variante):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y $b \geq 0$ un natural.

Si la propiedad $P$ cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > b$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $b \leq k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Demostremos usando inducción fuerte que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$$P(n): \; n \text{ se puede escribir como el producto de números primos.}$$

También se puede probar que esta descomposición es única para todo $n \geq 2$.

- Esto se conoce como el **teorema fundamental de la aritmética**.

# Inducción fuerte: ejemplo

Demostremos usando inducción fuerte que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$P(n)$ : $n$ se puede escribir como el producto de números primos.

**Caso base:** $P(2)$ es verdadero.

**Paso inductivo:**

Sea $n > 2$. Suponga que $P(k)$ es verdadero, para todo $2 \leq k < n$. **(HI)**

**Por demostrar:** $P(n)$ es verdadero.

Hay dos posibles casos:

- $n$ es primo: En este caso estamos listos. (¿por qué?)
- $n$ no es primo: Podemos escribir $n$ como $n = c \cdot d$, donde $2 \leq c, d < n$.

  Podemos aplicar la **HI** a $c$ y $d$, luego ambos se pueden escribir como producto de primos:

  $$c = p_1 \cdots p_m \qquad d = q_1 \cdots q_\ell.$$

  Luego $n$ se puede escribir como producto de primos $n = p_1 \cdots p_m \cdot q_1 \cdots q_\ell$.

El principio de inducción fuerte es consecuencia de inducción simple.

Suponga que $P(n)$ es una propiedad de los naturales y se cumple que:

- $P(0)$ es verdadero.
- Para todo $n > 0$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Inducción fuerte nos dice que para todo $n$ se cumple $P(n)$.

¿Cómo podemos derivamos esto usando inducción simple?

Podemos tomar la siguiente propiedad $P'(n)$ sobre los naturales:

$$P'(n): \quad P(k) \text{ es verdadero para todo } k \leq n.$$

Basta aplicar inducción simple a la propiedad $P'$. (¿por qué?)

### Principio de inducción fuerte (variante general):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y $b \leq \ell$ naturales.

Si la propiedad $P$ cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b), \ldots, P(\ell)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > \ell$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $b \leq k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

La sucesión de Fibonacci se define como:

$$\begin{array}{rcl} F(0) & = & 0 \\ F(1) & = & 1 \\ F(n) & = & F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{array}$$

Demuestre que para todo $n \geq 2$ se cumple $F(n) \leq 2^n$.

**Caso base:** $P(0)$ y $P(1)$ son verdaderos.

$$F(0) = 0 \leq 1 = 2^0 \qquad\qquad F(1) = 1 \leq 2 = 2^1$$

**Paso inductivo:**
Sea $n \geq 2$ y supongamos que $F(k) \leq 2^k$, para todo $0 \leq k < n$. **(HI)**

**Por demostrar:** $F(n) \leq 2^n$

Como $n \geq 2$, tenemos que:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \overset{\textbf{HI}}{\leq} 2^{n-1} + 2^{n-2} \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

Demuestre que todo natural $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de los números 3 y 5.

**Caso base:** $P(8)$ es verdadero:

$$8 = 3 + 5$$

**Paso inductivo:**
Sea $n \geq 9$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $8 \leq k < n$. **(HI)**

**Por demostrar:** $P(n)$ es verdadero.

Como $n - 3 < n$, podemos aplicar la **HI** a $n - 3$ y
obtenemos que $n - 3$ se puede escribir como la suma de números 3 y 5.

Como $n = (n - 3) + 3$ concluimos que $n$ cumple la propiedad.

¿Algún problema con este argumento?

Demuestre que todo natural $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de los números 3 y 5.

**Caso base:** $P(8)$, $P(9)$ y $P(10)$ son verdaderos:

$$8 = 3 + 5 \qquad 9 = 3 + 3 + 3 \qquad 10 = 5 + 5$$

**Paso inductivo:**
Sea $n \geq 11$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $8 \leq k < n$. **(HI)**

**Por demostrar:** $P(n)$ es verdadero.

Como $8 \leq n - 3 < n$, podemos aplicar la **HI** a $n - 3$ y obtenemos que $n - 3$ se puede escribir como la suma de números 3 y 5.

Como $n = (n - 3) + 3$ concluimos que $n$ cumple la propiedad.

El paso inductivo asume que $n \geq 11$,
luego hay que probar los casos base 8, 9 y 10.

Demuestre que $\sqrt{2}$ no es racional.

Es decir, no existen dos naturales $a, b \geq 1$ tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

¿Cómo formulamos esto en términos de una propiedad $P(n)$?

Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\sqrt{2} \neq \frac{n}{b}, \text{ para todo } b \geq 1$$

Necesitaremos las siguientes proposiciones:

Proposición: Si $a$ es impar, entonces $a^2$ es impar.

Corolario: Si $a^2$ es par, entonces $a$ es par.

Ejercicio: demuestre las proposiciones y que $\sqrt{2}$ no es racional.