PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE COMPPUTACIÓN
MATEMÁTICAS DISCRETAS- IIC1253

Guía 1 – Lógica proposicional

Problema 1 Define si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (o que no se puede definir): :

a) (18.09.25 lloverá) $\to$ ((19.09.25 nevará) $\to$ (18.09.25 lloverá))

b) $\bigwedge_{i=1}^{990} \bigvee_{j=i}^{i+9}(j$ es primo).

c) ((Hipótesis de Riemann) $\to$ (P = NP))$\wedge$((P=NP) $\to$ (Hipótesis de Riemann))

d) ((Hipótesis de Riemann) $\to$ (P = NP))$\vee$((P=NP) $\to$ (Hipótesis de Riemann))

Problema 2 ¿Son las siguientes fórmulas equivalentes?

a) $\phi = (A \wedge B) \vee C, \qquad \psi = A \wedge (B \vee C)$

b) $\phi = (A \to B) \to C, \qquad \psi = A \to (B \to C)$

c) $\phi = A \to (B \to C), \qquad \psi = B \to (A \to C)$

d) $\phi = A \to B, \qquad \psi = (\neg A) \to (\neg B)$

e) $\phi = (x \vee a) \wedge (x \vee \neg a) \wedge (\neg x \vee y), \qquad \psi = x \wedge y.$

Problema 3 ¿Verdadero o falso? La siguiente DNF siempre toma valor 1, independiente del valor de verdad de sus variables:

a) $(x \wedge a) \vee (x \wedge \neg a) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

b) $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z) \vee (z \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg x)$

Problema 4 Define la funcíón booleana de 3 variables

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & x + y + z \text{ es impar}, \\ 0 & x + y + z \text{ es par}. \end{cases}$$

a) Construye una DNF para f.
b) Demuestre que no existe una DNF para f con menor que 4 cláusulas.

Problema 5 Muestre que no existe una fórmula proposicional que usa solo $\wedge, \vee$ y es equivalente a $A \to B$.

Problema 6 Construye la tabla de verdad y una CNF para la función:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & x_1 \geq x_2 \geq x_3, \\ 0 & \text{si no}. \end{cases}$$

Problema 7 Demuestre que cualquier función Booleana de n variables tiene una DNF con no más que 2^{n-1} cláusulas o una CNF con no más que 2^{n-1} cláusulas.

Problema 8 Demuestre que:
a) $\{1, \oplus, \wedge\}$, $\{\neg(x \vee y)\}$ son funcionalmente completos;
b) $\{\neg(x \to y)\}$ no son funcionalmente completos.

Problema 9 ¿Para que n la CNF

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_{i+1}) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_{i+1})\right) \wedge (x_n \vee x_1) \wedge (\neg x_n \vee \neg x_1)$$

es satisfacible?

Problema 10 Una CNF se llama Horn-CNF si cada cláusula incluye no más que una variable sin negación. Encuentre un algoritmo polinomial (por lo menos, un algoritmo más rápido que probar todas las asignaciones) para el problema de satisfacibilidad para Horn-CNFs (*hint: ¿qué sucede si cada cláusula incluye por lo menos una variable negada? ¿Y si no?*)

Problema 11 El principio de palomar dice que no se puede distribuir n palomas en $n-1$ palomares tal que cada palomar contiene no más que 1 paloma. Construye una CNF insatisfacible que codifica este principio. Más precisamente, hay que usar variables:

$$x_{i,j}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

donde $x_{i,j}$ se interpreta como "la paloma i está colocada en palomar j".

Agregue cláusulas que dicen que cada paloma tiene que ser colocada por lo menos en un palomar, y cada palomar no puede contener 2 palomas distintas.

Después, corra este CNF resultante en z3-solver para $n = 9, 10, 11, 12$. ¿Qué conclusión se puede sacar?

Problema 12 ¿Se puede colorear vértices de este grafo usando 3 colores tal que vértices adyacentes tengan colores distintos? Si se necesita, use SAT solver.