Ordenes parciales y totales

Dado: Relación R sobre un conjunto A

Ordenes parciales y totales

Dado: Relación R sobre un conjunto A

Definición

R es un orden parcial sobre A si R es refleja, antisimétrica y transitiva. Si R es además conexa, entonces en un orden total (u orden lineal) sobre A.

Ordenes parciales y totales

Dado: Relación R sobre un conjunto A

Definición

R es un orden parcial sobre A si R es refleja, antisimétrica y transitiva. Si R es además conexa, entonces en un orden total (u orden lineal) sobre A.

Ejercicio

El orden usual $\leq$ sobre los naturales es un orden total.

Ordenes parciales y totales

Dado: Relación R sobre un conjunto A

Definición

R es un orden parcial sobre A si R es refleja, antisimétrica y transitiva. Si R es además conexa, entonces en un orden total (u orden lineal) sobre A.

Ejercicio

El orden usual $\leq$ sobre los naturales es un orden total.

- También $\leq$ es un orden total para los casos de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Ejercicios

1. Dado un conjunto A, ¿qué tipo de orden es $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$?

Ejercicios

1. Dado un conjunto A, ¿qué tipo de orden es $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$?

2. ¿Qué tipo de orden es $|$ (divide a) sobre $\mathbb{N}$?

Ejercicios

1. Dado un conjunto A, ¿qué tipo de orden es $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$?
2. ¿Qué tipo de orden es $|$ (divide a) sobre $\mathbb{N}$?
3. Dados pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, defina la relación $\leq_{\text{coord}}$ como:

   $$(a, b) \leq_{\text{coord}} (c, d) \text{ si y sólo si } a \leq c \text{ y } b \leq d.$$

   ¿Qué tipo de orden es $\leq_{\text{coord}}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

En los ejercicios vimos que $\leq_{\mathsf{coord}}$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

En los ejercicios vimos que $\leq_{\text{coord}}$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

¿Cómo podemos construir un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ basado en el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{N}$?

Un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

En los ejercicios vimos que $\leq_{\text{coord}}$ es un orden parcial sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

¿Cómo podemos construir un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ basado en el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{N}$?

- Usamos el orden del diccionario, al cual llamamos orden lexicográfico.

El orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Dado un orden total $\leq$, desde ahora en adelante usamos la notación:

$$a < b \text{ si y sólo si } a \leq b \text{ y } a \neq b$$

El orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Dado un orden total $\leq$, desde ahora en adelante usamos la notación:

$$a < b \text{ si y sólo si } a \leq b \text{ y } a \neq b$$

Dados pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, defina la relación $\leq_{\text{lex}}$ como:

$$(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d) \text{ si y sólo si } a < c \text{ o } (a = c \text{ y } b \leq d).$$

El orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Dado un orden total $\leq$, desde ahora en adelante usamos la notación:

$$a < b \text{ si y sólo si } a \leq b \text{ y } a \neq b$$

Dados pares $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, defina la relación $\leq_{\text{lex}}$ como:

$$(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d) \text{ si y sólo si } a < c \text{ o } (a = c \text{ y } b \leq d).$$

Ejercicio

Demuestre que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

El orden lexicográfico sobre las palabras

Para cada par de palabras, ¿cuál aparece antes en el diccionario?

árbol	zapato
árbol	alimento
casa	caso
panal	pan

El orden lexicográfico sobre las palabras

Para cada par de palabras, ¿cuál aparece antes en el diccionario?

árbol	zapato
árbol	alimento
casa	caso
panal	pan

El orden lexicográfico sobre las palabras

Para cada par de palabras, ¿cuál aparece antes en el diccionario?

árbol	zapato
árbol	alimento
casa	caso
panal	pan

El orden lexicográfico sobre las palabras

Para cada par de palabras, ¿cuál aparece antes en el diccionario?

árbol	zapato
árbol	alimento
casa	caso
panal	pan

El orden lexicográfico sobre las palabras

Para cada par de palabras, ¿cuál aparece antes en el diccionario?

árbol	zapato
árbol	alimento
casa	caso
panal	pan

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

- Por ejemplo, para el caso del inglés:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

- Por ejemplo, para el caso del inglés:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Además, suponga que tiene un orden total $\leq$ sobre Σ.

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

- Por ejemplo, para el caso del inglés:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Además, suponga que tiene un orden total $\leq$ sobre Σ.

- Para el caso del inglés: $a \leq b \leq c \leq \cdots \leq x \leq y \leq z$

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

- Por ejemplo, para el caso del inglés:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Además, suponga que tiene un orden total $\leq$ sobre Σ.

- Para el caso del inglés: $a \leq b \leq c \leq \cdots \leq x \leq y \leq z$

Finalmente, sea Σ^+ el conjunto de todas las palabras construidas con símbolos del alfabeto Σ.

El orden lexicográfico sobre las palabras

Suponga que tiene un alfabeto Σ.

- Por ejemplo, para el caso del inglés:

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

Además, suponga que tiene un orden total $\leq$ sobre Σ.

- Para el caso del inglés: $a \leq b \leq c \leq \cdots \leq x \leq y \leq z$

Finalmente, sea Σ^+ el conjunto de todas las palabras construidas con símbolos del alfabeto Σ.

- Cada palabra en Σ^+ tiene al menos un símbolo de Σ.

El orden lexicográfico sobre las palabras

Definición

Sean $u, v \in \Sigma^+$ *tales que* $u = u_1 \dots u_k$*, donde* $k \geq 1$ *y* $u_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \dots, k\}$*, y* $v = v_1 \dots v_\ell$*, donde* $\ell \geq 1$ *y* $v_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \dots, \ell\}$*. Además, sea* m *el máximo entre* k *y* ℓ*.*

El orden lexicográfico sobre las palabras

Definición

Sean $u, v \in \Sigma^+$ *tales que* $u = u_1 \ldots u_k$, *donde* $k \geq 1$ *y* $u_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$, *y* $v = v_1 \ldots v_\ell$, *donde* $\ell \geq 1$ *y* $v_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. *Además, sea* m *el máximo entre* k *y* ℓ. *Entonces se tiene que* $u \leq_{lex} v$ *si y sólo si* $u = v$ *o existe* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que:*

El orden lexicográfico sobre las palabras

Definición

Sean $u, v \in \Sigma^+$ *tales que* $u = u_1 \ldots u_k$*, donde* $k \geq 1$ *y* $u_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$*, y* $v = v_1 \ldots v_\ell$*, donde* $\ell \geq 1$ *y* $v_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$*. Además, sea* m *el máximo entre* k *y* ℓ*. Entonces se tiene que* $u \leq_{lex} v$ *si y sólo si* $u = v$ *o existe* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que:*

1. *para cada* $j \in \{1, \ldots, i-1\}$*:* $u_j = v_j$

El orden lexicográfico sobre las palabras

Definición

Sean $u, v \in \Sigma^+$ *tales que* $u = u_1 \ldots u_k$, *donde* $k \geq 1$ *y* $u_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$, *y* $v = v_1 \ldots v_\ell$, *donde* $\ell \geq 1$ *y* $v_i \in \Sigma$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. *Además, sea* m *el máximo entre* k *y* ℓ. *Entonces se tiene que* $u \leq_{lex} v$ *si y sólo si* $u = v$ *o existe* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que:*

1. *para cada* $j \in \{1, \ldots, i - 1\}$: $u_j = v_j$
2. $u_i < v_i$ *o* $(i = k + 1$ *y* $v_i \in \Sigma)$

El orden lexicográfico sobre las palabras

Definición

Sean $u, v \in \Sigma^+$ tales que $u = u_1 \dots u_k$, donde $k \geq 1$ y $u_i \in \Sigma$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, y $v = v_1 \dots v_\ell$, donde $\ell \geq 1$ y $v_i \in \Sigma$ para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Además, sea m el máximo entre k y ℓ. Entonces se tiene que $u \leq_{lex} v$ si y sólo si $u = v$ o existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que:

1. *para cada $j \in \{1, \dots, i-1\}$: $u_j = v_j$*
2. *$u_i < v_i$ o $(i = k+1$ y $v_i \in \Sigma)$*

Ejercicio

Demuestre que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden lexicográfico sobre Σ^+.

El orden lexicográfico en Python: ASCII

El alfabeto ordenado:

Caracteres ASCII de control		
00	NULL	(carácter nulo)
01	SOH	(inicio encabezado)
02	STX	(inicio texto)
03	ETX	(fin de texto)
04	EOT	(fin transmisión)
05	ENQ	(consulta)
06	ACK	(reconocimiento)
07	BEL	(timbre)
08	BS	(retroceso)
09	HT	(tab horizontal)
10	LF	(nueva línea)
11	VT	(tab vertical)
12	FF	(nueva página)
13	CR	(retorno de carro)
14	SO	(desplaza afuera)
15	SI	(desplaza adentro)
16	DLE	(esc.vínculo datos)
17	DC1	(control disp. 1)
18	DC2	(control disp. 2)
19	DC3	(control disp. 3)
20	DC4	(control disp. 4)
21	NAK	(conf. negativa)
22	SYN	(inactividad sínc)
23	ETB	(fin bloque trans)
24	CAN	(cancelar)
25	EM	(fin del medio)
26	SUB	(sustitución)
27	ESC	(escape)
28	FS	(sep. archivos)
29	GS	(sep. grupos)
30	RS	(sep. registros)
31	US	(sep. unidades)
127	DEL	(suprimir)

Caracteres ASCII imprimibles					
32	**espacio**	64	**@**	96	**`**
33	**!**	65	**A**	97	**a**
34	**"**	66	**B**	98	**b**
35	**#**	67	**C**	99	**c**
36	**$**	68	**D**	100	**d**
37	**%**	69	**E**	101	**e**
38	**&**	70	**F**	102	**f**
39	**'**	71	**G**	103	**g**
40	**(**	72	**H**	104	**h**
41	**)**	73	**I**	105	**i**
42	*****	74	**J**	106	**j**
43	**+**	75	**K**	107	**k**
44	**,**	76	**L**	108	**l**
45	**-**	77	**M**	109	**m**
46	**.**	78	**N**	110	**n**
47	**/**	79	**O**	111	**o**
48	**0**	80	**P**	112	**p**
49	**1**	81	**Q**	113	**q**
50	**2**	82	**R**	114	**r**
51	**3**	83	**S**	115	**s**
52	**4**	84	**T**	116	**t**
53	**5**	85	**U**	117	**u**
54	**6**	86	**V**	118	**v**
55	**7**	87	**W**	119	**w**
56	**8**	88	**X**	120	**x**
57	**9**	89	**Y**	121	**y**
58	**:**	90	**Z**	122	**z**
59	**;**	91	**[**	123	**{**
60	**<**	92	****	124	**|**
61	**=**	93	**]**	125	**}**
62	**>**	94	**^**	126	**~**
63	**?**	95	**_**		

ASCII extendido (Página de código 437)							
128	**Ç**	160	**á**	192	└	224	**Ó**
129	**ü**	161	**í**	193	┴	225	**ß**
130	**é**	162	**ó**	194	┬	226	**Ô**
131	**â**	163	**ú**	195	├	227	**Ò**
132	**ä**	164	**ñ**	196	─	228	**õ**
133	**à**	165	**Ñ**	197	┼	229	**Õ**
134	**å**	166	**ª**	198	**ã**	230	**µ**
135	**ç**	167	**º**	199	**Ã**	231	**þ**
136	**ê**	168	**¿**	200	╚	232	**Þ**
137	**ë**	169	**®**	201	╔	233	**Ú**
138	**è**	170	**¬**	202	╩	234	**Û**
139	**ï**	171	**½**	203	╦	235	**Ù**
140	**î**	172	**¼**	204	╠	236	**ý**
141	**ì**	173	**¡**	205	═	237	**Ý**
142	**Ä**	174	**«**	206	╬	238	**¯**
143	**Å**	175	**»**	207	**¤**	239	**´**
144	**É**	176	░	208	**ð**	240	**≡**
145	**æ**	177	▒	209	**Ð**	241	**±**
146	**Æ**	178	▓	210	**Ê**	242	‗
147	**ô**	179	│	211	**Ë**	243	**¾**
148	**ö**	180	┤	212	**È**	244	**¶**
149	**ò**	181	**Á**	213	**ı**	245	**§**
150	**û**	182	**Â**	214	**Í**	246	**÷**
151	**ù**	183	**À**	215	**Î**	247	**¸**
152	**ÿ**	184	**©**	216	**Ï**	248	**°**
153	**Ö**	185	╣	217	┘	249	**¨**
154	**Ü**	186	║	218	┌	250	**·**
155	**ø**	187	╗	219	█	251	**¹**
156	**£**	188	╝	220	▄	252	**³**
157	**Ø**	189	**¢**	221	¦	253	**²**
158	**×**	190	**¥**	222	**Ì**	254	■
159	**ƒ**	191	┐	223	▀	255	**nbsp**

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

- Vale decir, existe $b \in B$ tal que para todo $c \in B$ se tiene que bRc.

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

- Vale decir, existe $b \in B$ tal que para todo $c \in B$ se tiene que bRc.

1. ¿Es el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$ un buen orden?

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

- Vale decir, existe $b \in B$ tal que para todo $c \in B$ se tiene que bRc.

1. ¿Es el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$ un buen orden?
2. Defina la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \leq_{\text{bo}} b \text{ si y sólo si } |a| < |b| \text{ o } (|a| = |b| \text{ y } a \leq b).$$

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

- Vale decir, existe $b \in B$ tal que para todo $c \in B$ se tiene que bRc.

1. ¿Es el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$ un buen orden?

2. Defina la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \leq_{\text{bo}} b \text{ si y sólo si } |a| < |b| \text{ o } (|a| = |b| \text{ y } a \leq b).$$

   Demuestre que $\leq_{\text{bo}}$ es un orden total.

Ejercicios: buen orden

Un orden total R sobre un conjunto A se dice un buen orden si cada subconjunto B de A no vacío tiene un menor elemento.

- Vale decir, existe $b \in B$ tal que para todo $c \in B$ se tiene que bRc.

1. ¿Es el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$ un buen orden?
2. Defina la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \leq_{\mathrm{bo}} b \text{ si y sólo si } |a| < |b| \text{ o } (|a| = |b| \text{ y } a \leq b).$$

   Demuestre que $\leq_{\mathrm{bo}}$ es un orden total.
3. Demuestre que $\leq_{\mathrm{bo}}$ en un buen orden en $\mathbb{Z}$.