Operaciones entre relaciones

Definición

- **Inverso**: *dada una relación R de A en B, la relación R^{-1} de B en A se define como*

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

Operaciones entre relaciones

Definición

- **Inverso**: *dada una relación R de A en B, la relación R^{-1} de B en A se define como*

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: *dada una relación R_1 de A en B y una relación R_2 de B en C, la relación $R_1 \circ R_2$ de A en C se define como*

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \textit{existe } z \in B \textit{ tal que } (x, z) \in R_1 \textit{ y } (z, y) \in R_2\}$$

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

  La composición de dos funciones.

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

  La composición de dos funciones.

Ejercicio

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$, entonces para todo $a \in A$ y $c \in C$:

$$(a, c) \in f_1 \circ f_2 \quad \text{si y sólo si} \quad f_2(f_1(a)) = c$$

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial de B en A.*

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial de B en A.*
2. *f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = B$.*

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ *una función. Entonces:*

1. f *es inyectiva si y sólo si* f^{-1} *es una función parcial de* B *en* A.
2. f *es sobreyectiva si y sólo si* $\mathrm{img}(f) = B$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Caracterización de funciones

Corolario

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

$$f \text{ es biyectiva si y sólo si } f^{-1} \text{ es una función.}$$

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- *Si f_1 y f_2 son inyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es inyectiva.*

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ *y* $f_2 : B \to C$*. Entonces:*

- *Si* f_1 *y* f_2 *son inyectivas, entonces* $f_1 \circ f_2$ *es inyectiva.*
- *Si* f_1 *y* f_2 *son sobreyectivas, entonces* $f_1 \circ f_2$ *es sobreyectiva.*

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- *Si f_1 y f_2 son inyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es inyectiva.*
- *Si f_1 y f_2 son sobreyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva.*

Ejercicios

1. Demuestre el teorema.

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- *Si f_1 y f_2 son inyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es inyectiva.*
- *Si f_1 y f_2 son sobreyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva.*

Ejercicios

1. Demuestre el teorema.
2. Demuestre que el inverso de cada implicación es falso.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
3. Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
3. Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.
4. Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.
   - Denotamos la cardinalidad del conjunto S como $|S|$

Principio del palomar

Principio del palomar

Si N palomas se distribuyen en M palomares y tengo mas palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar

Principio del palomar

Si N palomas se distribuyen en M palomares y tengo mas palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar (en nuestros términos)

Si $f : A \to B$ y $|B| < |A|$, entonces f **no** puede ser inyectiva. Vale decir, existen $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$ y $f(a_1) = f(a_2)$.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.500.000$

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.500.000$
  cantidad de pelos en un cabeza ≤ 200.000

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

  Demostración:

  Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$
Función:	$f(a_i) \ = \$ el conjunto que contiene a a_i.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

  Palomas: $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Palomas:	$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$
Palomares:	$1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

Demostración:

- Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
- Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Palomas:	$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$
Palomares:	$1, 3, 5, \ldots, 2n-3, 2n-1$
Función:	$F(a_i) \ = \ m$