IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

29.10.2025

Hoy...

Enumerabilidad: conjuntos enumerables, teorema de Cantor.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Hemos visto que $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ son enumerables.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Hemos visto que $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ son enumerables.

Proposición

a) *Todo conjunto infinito tiene un subconjunto enumerable.*
b) *Sea A un conjunto enumerable y $B \subseteq A$. Entonces, B es finito o enumerable.*

Propiedades

Teorema

a) *Sean* A, B *dos conjuntos enumerables. Entonces,* $A \times B$ *es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos un conjunto* A_n *enumerable. Entonces,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es enumerable.

Propiedades

Teorema

a) *Sean* A, B *dos conjuntos enumerables. Entonces,* $A \times B$ *es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos un conjunto* A_n *enumerable. Entonces,*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

es enumerable.

Demostración.

Parte a): recuerde el lema:

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$*. Entonces,* $A \times X \approx B \times Y$*.*

Propiedades

Teorema

a) *Sean* A, B *dos conjuntos enumerables. Entonces,* $A \times B$ *es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos un conjunto* A_n *enumerable. Entonces,*
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
es enumerable.

Demostración.

Parte a): recuerde el lema:

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$. *Entonces,* $A \times X \approx B \times Y$.

Tenemos $A \approx \mathbb{N}$, $B \approx \mathbb{N}$, por lo tanto $A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. $\square$

Demostración.
Parte b):

Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Por teorema Schröder–Bernstein, basta mostrar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \preceq \mathbb{N}$.

Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Por teorema Schröder–Bernstein, basta mostrar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \preceq \mathbb{N}$.

$\square$

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ *un conjunto. Definimos* $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, *y* $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ *para todo* $n \geq 1$ *natural, y*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ *un conjunto. Definimos* $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, *y* $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ *para todo* $n \geq 1$ *natural, y*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ un conjunto. Definimos $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, y $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ para todo $n \geq 1$ natural, y

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Teorema

Sea Σ un conjunto enumerable. Entonces, Σ^* es enumerable.

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ *un conjunto. Definimos* $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, *y* $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ *para todo* $n \geq 1$ *natural, y*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Teorema

Sea Σ *un conjunto enumerable. Entonces,* Σ^* *es enumerable.*

Nota: si $\Sigma \neq \varnothing$ es finito, Σ^* también es enumerable.

Corolarios

Corolario

a) *el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es enumerable*

b) *el conjunto de los números algebraicos es enumerable.*

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?

Notación: $A \prec B$ si $A \preceq B$ y $A \not\approx B$.

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?
Notación: $A \prec B$ si $A \preceq B$ y $A \not\approx B$.

Teorema (Cantor)

Para todo conjunto A, tenemos $A \prec \mathcal{P}(A)$

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Hipótesis (de continuo)

Si $A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces A es enumerable o $A \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Hipótesis (de continuo)

Si $A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces A es enumerable o $A \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- (Gödel, 1940) no se puede refutar, (Cohen, 1963) no se puede probar...

¡Gracias!