

Unidad VI: Funciones y Cardinalidad

Conjuntos no enumerables

Clase 18 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Conjuntos no enumerables

¿Existen conjuntos no enumerables?

Teorema:

\mathbb{R} **no** es enumerable.

\mathbb{R} no es enumerable

- Como $\mathbb{R} \approx (0, 1)$ entonces basta probar que $(0, 1)$ no es enumerable.
 - No existe biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$.
- Cada real $r \in (0, 1)$ se puede representar con una **secuencia infinita** de dígitos entre $\{0, \dots, 9\}$.
 - Esto es la representación decimal de r .

$$r = 0. d_0 d_1 d_2 d_3 \dots$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} = 0. 5 0 0 0 0 \dots & \frac{1}{3} = 0. 3 3 3 3 3 \dots & \frac{1}{4} = 0. 2 5 0 0 0 \dots \\ \frac{\pi}{4} = 0. 7 8 5 3 9 \dots & \frac{e}{4} = 0. 6 7 9 5 7 \dots & \end{array}$$

- Algunos reales en $(0, 1)$ tienen dos posibles representaciones decimales.
Por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = 0. 2 5 0 0 0 \dots = 0. 2 4 9 9 9 \dots$$

- En este caso escogemos la representación que termina con 0's.

\mathbb{R} no es enumerable

Por contradicción, supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$.

Luego, existe una enumeración $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $(0, 1)$:

- La secuencia no tiene repeticiones.
- **Todos** los reales en $(0, 1)$ aparecen en la secuencia.

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	\dots
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	\dots
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	\dots
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	\dots
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	\dots
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	\dots
\vdots					\vdots			\ddots

\mathbb{R} no es enumerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	\dots
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	\dots
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	\dots
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	\dots
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	\dots
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	\dots
\vdots					\vdots			\ddots

Para cada $i \geq 0$, definamos:

$$e_i = \begin{cases} 4 & d_{ii} \neq 4 \\ 5 & d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Defina el número real $s = 0.e_0 e_1 e_2 e_3 \dots$

¿Puede aparecer s en la lista r_0, r_1, r_2, \dots ?

\mathbb{R} no es enumerable

Para cada $i \geq 0$, definamos:

$$e_i = \begin{cases} 4 & d_{ii} \neq 4 \\ 5 & d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Defina el número real $s = 0. e_0 e_1 e_2 e_3 \dots$

Tenemos que:

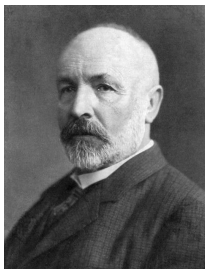
- $s \neq r_0$ ya que difieren en el 0-ésimo dígito.
- $s \neq r_1$ ya que difieren en el 1-ésimo dígito.
- ...

Para cada $i \geq 0$, tenemos $s \neq r_i$ ya que difieren en el i -ésimo dígito.

Encontramos un real $s \in (0, 1)$ que **no** aparece en la enumeración $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Esto es una contradicción.

Diagonalización de Cantor

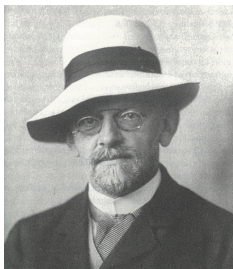


Georg Cantor (1845 - 1918)

Teorema (de Cantor):

Para todo conjunto A , se cumple que $A < \mathcal{P}(A)$.

El paraíso de Cantor



David Hilbert (1862 - 1943)

Hilbert (1926):

"No one shall expel us from the paradise that Cantor has created for us."

Teorema de Cantor: demostración

- Si A es finito, el teorema se cumple. (¿por qué?)
- Asumiremos que A es infinito.
- Demostraremos que **no** existe una biyección de A en $\mathcal{P}(A)$.
- Demostraremos primero el caso de $A = \mathbb{N}$, y luego el caso general.

Teorema de Cantor: demostración

Por contradicción, suponga que existe una biyección $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Considere la siguiente tabla:

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f(0)$	1	1	0	1	0	0	1	1	
$f(1)$	0	0	1	1	1	0	0	1	
$f(2)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$f(3)$	1	0	1	0	0	1	0	1	
$f(4)$	0	0	1	1	0	0	1	0	...
$f(5)$	1	1	0	1	0	1	1	1	
$f(6)$	1	0	0	0	0	0	1	0	
$f(7)$	1	0	0	1	0	1	1	1	
\vdots					\vdots				\ddots

Cada fila i , representa al conjunto $f(i)$.

- La coordenada (i, j) de la tabla es igual a 1 si y sólo si $j \in f(i)$.

Como f es biyección, **cada** conjunto $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una fila en la tabla.

Teorema de Cantor: demostración

Considere la diagonal de la tabla:

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f(0)$	1	1	0	1	0	0	1	1	
$f(1)$	0	0	1	1	1	0	0	1	
$f(2)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$f(3)$	1	0	1	0	0	1	0	1	
$f(4)$	0	0	1	1	0	0	1	0	...
$f(5)$	1	1	0	1	0	1	1	1	
$f(6)$	1	0	0	0	0	0	1	0	
$f(7)$	1	0	0	1	0	1	1	1	
\vdots					\vdots				\ddots

Conjunto diagonal D :

1 0 1 0 0 1 1 1 ...

En general:

$$D = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in f(i)\}.$$

Teorema de Cantor: demostración

Considere la diagonal de la tabla:

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$f(0)$	1	1	0	1	0	0	1	1	
$f(1)$	0	0	1	1	1	0	0	1	
$f(2)$	1	1	1	1	0	0	0	0	
$f(3)$	1	0	1	0	0	1	0	1	
$f(4)$	0	0	1	1	0	0	1	0	...
$f(5)$	1	1	0	1	0	1	1	1	
$f(6)$	1	0	0	0	0	0	1	0	
$f(7)$	1	0	0	1	0	1	1	1	
\vdots					\vdots				\ddots

Conjunto complemento de la diagonal \overline{D} :

0 1 0 1 1 0 0 0 ...

En general:

$$\overline{D} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}.$$

¿Puede aparecer \overline{D} en alguna fila?

Teorema de Cantor: demostración

Conjunto complemento de la diagonal \overline{D} :

$$\overline{D} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}.$$

El conjunto \overline{D} no aparece en **ninguna** fila $f(i)$ de la tabla !!

Para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $\overline{D} \neq f(i)$:

$$\begin{aligned} i \in f(i) &\implies i \notin \overline{D} \\ i \notin f(i) &\implies i \in \overline{D} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos:

$$(i \in f(i) \text{ y } i \notin \overline{D}) \text{ o } (i \notin f(i) \text{ y } i \in \overline{D})$$

Esto contradice que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es biyección.

Teorema de Cantor: demostración

¿Cómo aplicamos este argumento para un A arbitrario?

Por contradicción, suponga que existe una biyección $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

- Ya no podemos visualizar f como una tabla, ya que A podría ser no enumerable. (piense por ejemplo en $A = \mathbb{R}$.)

Pero aún podemos definir el conjunto complemento de la diagonal \overline{D} :

$$\overline{D} = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$$

Para cada $a \in A$, se cumple que $\overline{D} \neq f(a)$:

$$\begin{aligned} a \in f(a) &\implies a \notin \overline{D} \\ a \notin f(a) &\implies a \in \overline{D} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos: $(a \in f(a) \text{ y } a \notin \overline{D})$ o $(a \notin f(a) \text{ y } a \in \overline{D})$

Esto nos dice que $\overline{D} \in \mathcal{P}(A)$ **no** tiene preimagen con respecto a f .

- En otras palabras, la función f **no** es sobreyectiva.

Esto contradice que $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ es biyección.

¿Cuántos infinitos hay?

$$\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N}) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \dots$$

Hay una cantidad **infinita** de **infinitos** !!

¿Dónde se ubica la cardinalidad de los reales \mathbb{R} ?

Teorema:

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Como $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, basta demostrar que $(0, 1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Veamos que $(0, 1) \leq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Defina $f : (0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como sigue.

Para cada $r \in (0, 1)$ cuya representación decimal es

$$r = 0. d_0 d_1 d_2 d_3 \dots$$

definimos $f(r)$ como

$$f(r) = \{d_i \cdot 10^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Ejercicio: Demuestre que f es una función inyectiva.

$$\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Como $\mathbb{R} \approx (0, 1)$, basta demostrar que $(0, 1) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Veamos que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq (0, 1)$.

Defina $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow (0, 1)$ como sigue.

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos

$$f(A) = 0.1 d_0 d_1 d_2 d_3 \dots$$

donde para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$d_i = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

Ejercicio: Demuestre que g es una función inyectiva.

Consecuencias: números irracionales

Una propiedad muy útil:

Proposición:

Si A **no** es enumerable y $B \subseteq A$ es enumerable, entonces $A \setminus B$ **no** es enumerable.

Demostración:

Por contradicción, suponga que $A \setminus B$ es enumerable.

Recuerde que la unión de dos conjuntos enumerables es enumerable.

Obtenemos que $(A \setminus B) \cup B = A$ es enumerable. Contradicción.

Consecuencias: números irracionales

Los **números irracionales** son los números reales que **no** son racionales, es decir, que **no** se pueden escribir como una fracción $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$.

- Denotamos por \mathbb{I} al conjunto de los números irracionales.
- Por definición, se tiene que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- **Ejemplos:** $\sqrt{2}$, π , e , ...

Como \mathbb{R} no es enumerable, \mathbb{Q} es enumerable, y por la proposición anterior, obtenemos:

Corolario:

\mathbb{I} no es enumerable.