Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 8 - Inducción

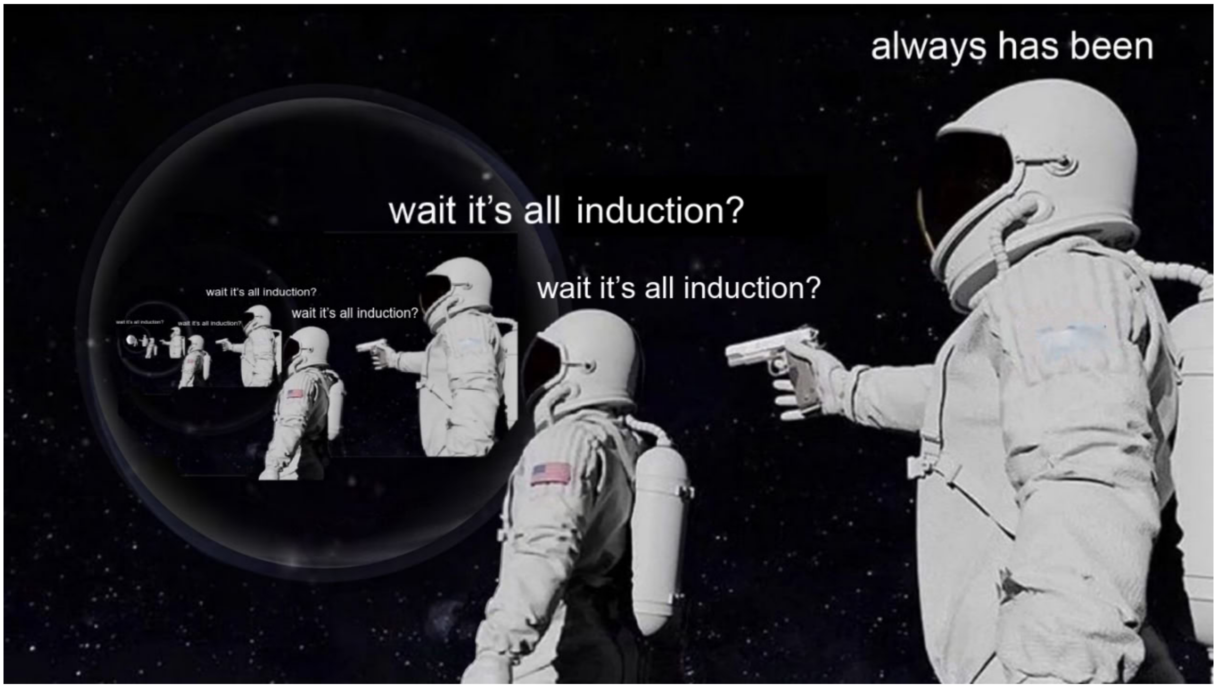
3 de octubre de 2025

Elías Ayaach, Manuel Villablanca, Caetano Borges

Resumen

- **Inducción Simple:**
  - Se utiliza para demostrar propiedades que dependen de los números naturales. Ej: $3n \geq 2n$ para todo n número natural.
  - Se demuestra que "si $p(n)$ es verdadero entonces $p(n+1)$ es verdadero"
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso, el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propieddad se cumple para el número natural n. Asumir que $p(n)$ es verdadero.
    3. **TI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para $n+1$. $p(n) \implies p(n+1)$.
- **Inducción Fuerte:**
  - También se utiliza para los números naturales.
  - Se demuestra que "si $p(i)$ es verdadero para todos los $i \leq k$ entonces $p(k+1)$".
  - Se divide en tres partes:
    1. **BI:** Se demuestra que la propiedad se cumple para el caso base. Demostrar que $p(0)$ es verdadero (a veces la propiedad por demostrar puede estar definida para los naturales n tales que $j \leq n$, en ese caso el caso base sería $p(j)$).
    2. **HI:** Se supone que la propiedad se cumple para todo número natural menor a k. Asumir que $p(i)$ es verdadero para todo $i \leq k$.
    3. **TI:** Se demuestra que se cumple para $k+1$. $(p(i)\forall i \leq k) \implies p(k+1)$.
  - Cualquier problema de inducción simple se puede resolver con inducción fuerte.

1. El meme del día



2. Inducción Simple

1. Demuestre que para todo $n \geq 0$

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

2. La sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}, \ldots$ que cumple la siguiente recurrencia:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Demuestre que si n es múltiplo de 5, entonces F_n es divisible por 5.

3. Inducción Fuerte

1. Considere la siguiente demostración:

   Teorema: $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.
   Demostración por inducción fuerte:
   BI: El caso base se cumple claramente ya que $\pi^0 = 1$.
   HI: Supongamos que $\pi^k = 1$ para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
   TI: PD: $\pi^n = 1$.
   Se tiene que $\pi^n = \frac{\pi^{n-1} \cdot \pi^{n-1}}{\pi^{n-2}}$. Tanto $n-1$ como $n-2$ son valores de k válidos según HI, por lo que se tiene que $\pi^{n-1} = 1$ y $\pi^{n-2} = 1$. Reemplazando en la ecuación anterior, $\pi^n = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Con ello, concluímos por inducción fuerte que $\pi^n = 1$ para todo $n \geq 0$.

   Salva a las matemáticas de ser destruidas: encuentra el error en la demostración anterior.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Una k-coloración de aristas de G es una función $f : E \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que $f(e) \neq f(e')$ para todo par de aristas distintas $e, e' \in E$ que comparten un mismo vértice.

   Demuestre usando inducción que para todo grafo no dirigido $G = (V, E)$ y para toda k-coloración de aristas f de G, se tiene que un mismo color puede ser usado por f en a lo más $\frac{|V|}{2}$ aristas, esto es, para todo color $c \in \{1, \ldots, k\}$ se cumple que:

$$|\{e \in E \mid f(e) = c\}| \leq \frac{|V|}{2}$$