Funciones - IIC1253

Marcelo Arenas

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{(3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

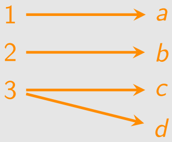
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{(3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

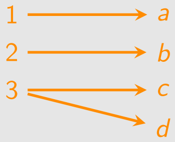
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{(3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\} \quad \times$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{(1, a), \ (3, b)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

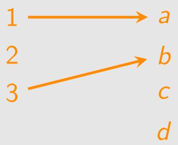
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{(1, a), \ (3, b)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

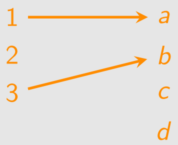
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$f_2 = \{(1, a),\ (3, b)\}$ ✗



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

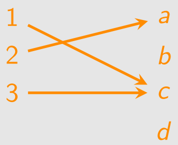
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

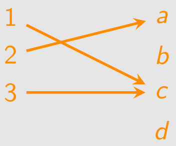
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\} \quad \checkmark$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - b es **la imagen** de a en f.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - b es **la imagen** de a en f.
  - a es **una preimagen** de b en f.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Funciones parciales

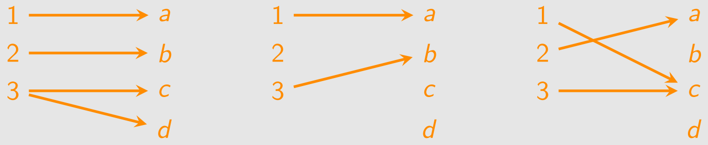
Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones parciales?



Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función parcial, entonces escribiremos:

- $f : A \rightharpoonup B$ para decir que f es una función parcial de A a B.

  (notar la diferencia en la flecha)

- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

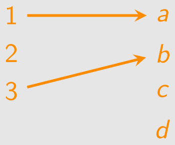
Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a,b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a,b) \in f\} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.



Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & a \\ 2 & b \\ 3 \arrow[ru] & c \\ & d \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{1, 3\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{a, b\} \end{aligned}$$

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Proposición

Sea $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial. Entonces:

$$f \textit{ es una función} \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \mathit{dom}(f) = A$$

Ejemplos de funciones

Ejemplos

Sea $A = B = \mathbb{R}$.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \lfloor\, x + \sqrt{x}\, \rfloor$$

$$f_3(x) = 0$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿Qué es $\mathrm{dom}(f)$?

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿Qué es $\text{dom}(f)$?

Tanto el **dominio** como la **imagen** de una función pueden ser números, conjuntos, relaciones, grafos,. . .

Mas ejemplos de funciones

Ejemplos

Las siguientes son funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

Mas ejemplos de funciones

Ejemplos

Las siguientes son funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$
\begin{array}{ll}
g_1 : A \to 2^A & g_1(a) = \{a\} \\
g_2 : A \to 2^A & g_2(a) = A \setminus \{a\} \\
g_3 : A \to 2^A & g_3(a) = \emptyset
\end{array}
$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una *secuencia* *S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.*

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$$1 \, , \; -\frac{1}{2} \, , \; \frac{1}{3} \, , \; -\frac{1}{4} \, , \; \ldots \, , \; \frac{(-1)^n}{n+1} \, , \; \ldots$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \dots$$
- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \dots$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \ldots$$
- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$
- $S_3 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$
$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ 9, \ldots$$

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*

Ejercicios

Tipos de funciones

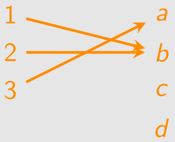
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*

Ejercicios



Tipos de funciones

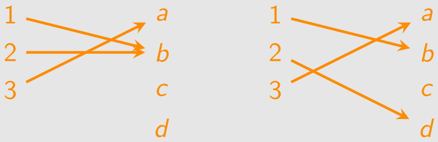
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*

Ejercicios



Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*

Tipos de funciones

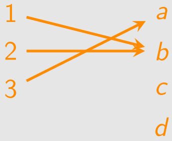
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*

Ejercicios



Tipos de funciones

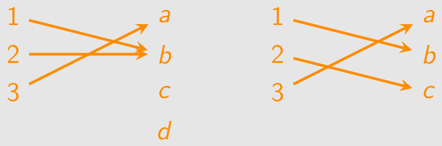
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva* si no existen dos elementos en A con la misma imagen.
2. *sobreyectiva* si todo elemento en B tienen una preimagen.

Ejercicios



Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

- Una función inyectiva es llamada 1-a-1.

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \rightarrow B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

- Una función inyectiva es llamada 1-a-1.
- Una función sobreyectiva es llamada sobre.

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) \quad = \quad \{a\}$$

  ¿Es f_1 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

  ¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:
  $$f_1(a) = \{a\}$$
  ¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:
  $$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$
  ¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) \quad = \quad \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) \quad = \quad A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_3(r) \quad = \quad |\lfloor r \rfloor|$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_3(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

¿Es f_3 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

  $$f_1(a) = \{a\}$$

  ¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

  $$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

  ¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

  $$f_3(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

  ¿Es f_3 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?