IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

29.10.2025

Hoy...

Enumerabilidad: conjuntos enumerables, teorema de Cantor.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Conjuntos enumerables

$\{0,1,2\}$ es finito pero no es enumerable.

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Hemos visto que $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ son enumerables.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Hemos visto que $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ son enumerables.

Proposición

$\forall A$ infinito $\mathbb{N} \lesssim A$.

a) *Todo conjunto infinito tiene un subconjunto enumerable.*

b) *Sea A un conjunto enumerable y $B \subseteq A$. Entonces, B es finito o enumerable.*

Demostración a) A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ voy a definir $a_n \in A$ tal que $a_n \neq a_m$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $m \neq n$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$B = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\} \simeq \mathbb{N}$ $\quad f: \mathbb{N} \to B$ $\quad f(n) = a_n$

$A \neq \emptyset$ ya que A es infinito. Tomamos a_0 como algún elemento de a.

Si ya hemos definido $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, podemos definir a_n como algún elemento de $A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$.

Si $A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\} \neq \emptyset$, porque si $A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\} = \emptyset \Rightarrow A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ es finito, una contradicción.

c) Sea A enumerable y $B \subseteq A$. Si B es finito, listo. Si B es infinito, hay que $B \approx \mathbb{N}$. Usaremos T. de S-B.

$B \lesssim A \approx \mathbb{N}$. Por el otro lado, del parte a) sale $\exists B_1 \subseteq B$ enumerable. $\mathbb{N} \approx B_1 \lesssim B$. $\Rightarrow B \approx \mathbb{N}$

Propiedades

Teorema

a) *Sean A, B dos conjuntos enumerables. Entonces, $A \times B$ es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un conjunto A_n enumerable. Entonces,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es enumerable.

Propiedades

Teorema

a) *Sean* A, B *dos conjuntos enumerables. Entonces,* $A \times B$ *es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos un conjunto* A_n *enumerable. Entonces,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

es enumerable.

Demostración.

Parte a): recuerde el lema:

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$*. Entonces,* $A \times X \approx B \times Y$*.*

Propiedades

Teorema

a) *Sean A, B dos conjuntos enumerables. Entonces, $A \times B$ es enumerable.*

b) *Suponemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un conjunto A_n enumerable. Entonces,*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \approx \mathbb{N}$$

es enumerable.

Demostración.

Parte a): recuerde el lema:

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$. Entonces, $A \times X \approx B \times Y$.

Tenemos $A \approx \mathbb{N}, B \approx \mathbb{N}$, por lo tanto $A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. $\square$

Demostración.

Parte b):

Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

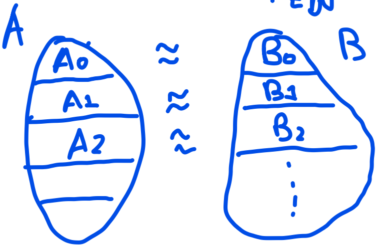
Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Por teorema Schröder–Bernstein, basta mostrar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \preceq \mathbb{N}$.

Basta mostrar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \precsim \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\qquad \mathbb{N} \approx \mathbb{N}\times\mathbb{N}$



$A_0' = A_0$, $A_1' = A_1 \setminus A_0$,

$\dots$ $A_n' = A_n \setminus (A_0 \cup \dots \cup A_{n-1})$

$A_n' \subseteq A_n$.

Cada A_n' es finito o enumerable.

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$A_0', A_1', A_2', \dots$ son disjuntos. (como un subconjunto de conjunto A_n enumerable).

Demostración.

Parte b):

$\mathbb{N} \preceq A_0 \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Por teorema Schröder–Bernstein, basta mostrar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \preceq \mathbb{N}$.

Si A_n' es enumerable

$A_n' \approx \mathbb{N} \approx \{n\} \times \mathbb{N} = B_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Si A_n' es finito $A_n' \approx \{(n,0), \dots, (n, |A_n'|-1)\}$

$\overset{\shortparallel}{B_n} \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n' \approx \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

¿$\approx$? $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$A_n' \approx B_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$B_0, B_1, B_2, \dots$ no tienen elementos en común.

$\square$

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ *un conjunto. Definimos* $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, *y* $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ *para todo* $n \geq 1$ *natural, y*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ *un conjunto. Definimos* $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, *y* $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ *para todo* $n \geq 1$ *natural, y*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ un conjunto. Definimos $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, y $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ para todo $n \geq 1$ natural, y

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Teorema

Sea Σ un conjunto enumerable. Entonces, Σ^* es enumerable.

Secuencias finitas

Definición

Sea Σ un conjunto. Definimos $\Sigma^0 = \{\epsilon\}, \Sigma^1 = \Sigma$, y $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ para todo $n \geq 1$ natural, y

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Elementos de Σ^* son *palabras* o *secuencias* finitas sobre Σ.

Teorema

Sea Σ un conjunto enumerable. Entonces, Σ^* es enumerable.

Nota: si $\Sigma \neq \varnothing$ es finito, Σ^* también es enumerable.

Demostración: 1 Se puede probar que Σ^n $n \geq 1$ es enumerable por inducción

2 Base Σ es enumerable.

paso inductivo. Si ya sabemos que Σ^n es enumerable, $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \times \Sigma$ es también enumerable.

Σ^0 es finito.

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$$

Por el teorema anterior, Σ^* es enumerable como ~~la~~ una unión enumerable de conjuntos enumerables. □

Corolarios

Corolario

a) *el conjunto de las programas en Python es enumerable*
b) *el conjunto de los polinomios con coeficientes enteros es enumerable*
c) *el conjunto de los números algebraicos es enumerable.*

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?

Notación: $A \prec B$ si $A \preceq B$ y $A \not\approx B$.

Teorema de Cantor

¿Todos los conjuntos infinitos son enumerables?
Notación: $A \prec B$ si $A \preceq B$ y $A \not\approx B$.

Teorema (Cantor)

Para todo conjunto A, tenemos $A \prec \mathcal{P}(A)$

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Hipótesis (de continuo)

Si $A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces A es enumerable o $A \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Discusión

- En particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.
- La próxima vez, vamos a ver que $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$;

Corolario

Existe un número real que no es algebraico.

- No existe "infinitud más grande".

Hipótesis (de continuo)

Si $A \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces A es enumerable o $A \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- (Gödel, 1940) no se puede refutar, (Cohen, 1963) no se puede probar...

¡Gracias!