Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Guía 4 – relaciones

Problema 1 Sean $X = \{1,2,3\}$, $Y = (X \times X) \setminus \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

a) Demuestre que no existen conjuntos A, B tal que $Y = A \times B$.

b) ¿Existen conjuntos A_1, B_1, A_2, B_2 tales que $Y = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$?

Problema 2 Sean $x \in A, y \in B$. Demuestre que $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

Problema 3 Sea $A = \{1,2,3\}$. ¿Es $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia sobre A si

a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$?

b) $R = \{(2,2),(3,3)\}$?

c) $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2)\}$?

d) $R = A \times A$?

Problema 4 En un torneo, cada equipo jugó una vez contra cada uno de los demás, sin empates, y cada equipo perdió al menos un partido. Demuestre que existen tres equipos A, B y C que rompen la transitividad: A ganó a B, B ganó a C y C ganó a A.

Problema 5 Demuestre que una relación R sobre un conjunto A es refleja, simétrica y antisimétrica si y sólo si R es la relación de igualdad.

Problema 6 Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A tal que la relación $\not\sim$ es transitiva. Demuestre que $x \sim y$ para todos $x, y \in A$.

Problema 7 Sea R una relación sobre $(0, +\infty)$ tal que

$$xRy \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \qquad \forall x, y \in (0, +\infty).$$

a) demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) demuestre que $[x]_R \cap (10, 11) \neq \varnothing$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

c) demuestre que el producto $\cdot$ respete R pero la suma $+$ no respete R.

Problema 8 Sea $\preceq$ la siguiente relación sobre $\mathbb{R}[x]$ (conjunto de polinomios reales de una variable x):

$$p \preceq q \iff \exists c \in \mathbb{R}\ p(x) \leq q(x) \text{ para todo } x \geq c.$$

Demuestre que $\preceq$ es un orden lineal (*hint: use el hecho de que todo polinomio no cero tiene un número finito de raíces*).

Problema 9 ?Verdadero o falso? Sean R_1, R_2 dos órdenes sobre un conjunto A. Entonces, $R_1 \cap R_2$ es un orden sobre A.

Problema 10 Sea R un orden sobre $\{1,2,3,4\}$. ¿Cuál es el tamaño máximo posible de R?

Problema 11 Sean $\preceq_1$ y $\preceq_2$ dos órdenes sobre los conjuntos A_1 y A_2, respectivamente. Definimos el "producto Cartesiano" de $\preceq_1$ y $\preceq_2$ como la siguiente relación sobre $A_1 \times A_2$:

$$(x, y)(\preceq_1 \times \preceq_2)(u, v) \iff (x \preceq_1 u) \wedge (y \preceq_2 v),$$

para todos $x, u \in A, y, v \in B$. Demuestre que $\preceq_1 \times \preceq_2$ es un orden.

Problema 12 Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto de tamaño $mn+1$. Demuestre que existen $m+1$ elementos comparables entre sí o existen $n+1$ elementos, no comparables entre sí.

Hint: saque todos los elementos minimales. Después saque todos los elementos que son minimales entre elementos que quedaron. Repita hasta que no quedan elementos. Cada vez sacamos elementos incomparables. Así que si cada vez sacamos no más que n elementos, haremos ese proceso por lo menos $m+1$ veces. Demuestre cómo construir $m+1$ elementos comparables a partir de eso.

Problema 13 Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{-1, 0, 1\}$.
a) ¿$\{(1, 0), (3, 0), (2, 0)\} \colon A \to B$?
b) ¿$\{(1, 0), (3, 0), (3, 1)\} \colon A \to B$?
c) ¿$\{(1, 0)\} \colon A \to B$?

Problema 14 Sea $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde $f(x)$ es la mínima potencia de 3 mayor que x^2 para todo $x \in \mathbb{N}$. Definir $f(\mathbb{N})$.

Problema 15 Sean $f \colon A \to B$ sobreyectiva y $Y \subseteq B$. Demuestre que $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Problema 16 Sea $f \colon A \to B$. Demuestre que
a) f es inyectiva si y sólo si existe $g \colon B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$;
b) f es sobreyectiva si y sólo si existe $g \colon B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Problema 17 Sean $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ tal que $f \circ g$ es inyectiva. Demuestre que f es inyectiva, pero g puede ser no inyectiva.
(recuerde que usamos la notación $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.)

Problema 18 ¿Bajo qué condiciones sobre los números $a, b, c \in \mathbb{R}$ la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es inyectiva, bajo cuáles es sobreyectiva y bajo cuáles es biyectiva?