PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía de lógica de predicados

1. ¿Son ciertas las siguientes equivalencias? Justifique su respuesta con una demostración.

   a) $\exists x\,(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\exists x\,(\varphi(x))) \wedge (\exists x\,(\psi(x)))$

   b) $\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \equiv (\forall x\,(\varphi(x))) \rightarrow (\forall x\,(\psi(x)))$

2. Para cada par φ_1, φ_2 de fórmulas en lógica de predicados, responda si $\{\varphi_1\} \models \varphi_2$ o no. Justifique su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   a) $\varphi_1 = \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ y $\varphi_2 = \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$.

   b) $\varphi_1 = \forall y\,\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(y))$ y $\varphi_2 = \exists x\,\forall y\,(P(x) \rightarrow Q(y))$.

3. Usaremos lógica de predicados para expresar propiedades sobre un conjunto de animales. Estos animales pueden ser perros o gatos, y se pueden perseguir entre ellos. Para esto, considere dos predicados unarios P y G, y un predicado binario R, junto con la siguiente interpretación $\mathcal{I}$. El dominio A de la interpretación es un conjunto de animales, y

$$P^{\mathcal{I}} = \{x \in A \mid x \text{ es un perro}\}$$
$$G^{\mathcal{I}} = \{x \in A \mid x \text{ es un gato}\}$$
$$R^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ persigue a } y\}$$

   En cada caso, escriba una oración en lógica de predicados que exprese la propiedad pedida.

   a) Todo animal debe ser un perro o un gato, pero no ambas.

   b) Todo gato debe perseguir a lo más a dos perros.

4. Nos gustaría modelar una situación donde tenemos usuarios en una red social. Algunos usuarios pueden ser bots. Los usuarios se pueden seguir entre ellos, y también se pueden bloquear. Para esto consideraremos un predicado unario Bot, y dos predicados binarios S y B. También consideraremos la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ en la lógica de predicados. El dominio A de $\mathcal{I}$ es el conjunto de todos los usuarios, y

$$Bot^{\mathcal{I}} = \{x \in A \mid x \text{ es un bot}\}$$
$$S^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ sigue a } y\}$$
$$B^{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ bloquea a } y\}$$

   Para cada caso, escriba una oración en la lógica de predicados que exprese la propiedad pedida.

   a) Ninguna persona se puede seguir a sí misma.

   b) Existen dos usuarios con exactamente los mismos seguidores.

c) Es imposible que un usuario x siga y bloquee, al mismo tiempo, a otro usuario y.

d) Todo usuario debe seguir a alguien, y debe ser seguido por alguien.

e) Existe un único bot que no es bloqueado por nadie.

f) Todo usuario que no es un bot tiene al menos 3 seguidores.

5. Los mobs son entidades que simulan criaturas en el juego Discreticraft. Estos poseen diferentes naturalezas e interactúan entre sí de acuerdo con ellas. Para modelar estas interacciones, considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{P, N, H, A, M\}$, donde P, N, H son unarios y A, M son binarios. Además considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$. El dominio D de $\mathcal{I}$ es el conjunto de mobs de Discreticraft, y

$$\begin{aligned}
P^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza pacífica}\} \\
N^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza neutral}\} \\
H^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza hostil}\} \\
A^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in D^2 \mid x \text{ ataca a } y\} \\
M^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in D^2 \mid x \text{ le tiene miedo a } y\}
\end{aligned}$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados:

a) Todo mob tiene una y solo una naturaleza.

b) Todo mob pacífico le tiene miedo a los mobs que lo atacan.

c) Existe un mob hostil tal que todos los mobs a los que él les tiene miedo, le tienen miedo a algún mob pacífico en común.

d) Existen exactamente dos mobs hostiles que le tienen miedo a exactamente los mismos mobs.

6. Suponga un contexto simplificado de exportación e importación de minerales entre distintos países. Para modelar este problema considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{O, P, C, V, E\}$, donde O, P, C son unarios y V, E son binarios. Además considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$. El dominio A de $\mathcal{I}$ es el conjunto de los países, y

$$\begin{aligned}
O^{\mathcal{I}} &= \{x \in A \mid x \text{ produce oro}\} \\
P^{\mathcal{I}} &= \{x \in A \mid x \text{ produce plata}\} \\
C^{\mathcal{I}} &= \{x \in A \mid x \text{ produce cobre}\} \\
V^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ es vecino de } y \text{ (esto es, comparten frontera terrestre)}\} \\
E^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ exporta todos los tipos de minerales que él produce a } y\}
\end{aligned}$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados:

a) Todo país exporta uno o más minerales a algún vecino si, y solo si, produce al menos un mineral.

b) Existe al menos un país que exporta cobre a todos los países (excluyendo a él mismo) y que además importa oro y plata de algún vecino.

c) Existe más de un país que produce más de un mineral.

Para la siguiente afirmación considere $k > 1$:

d) Existe un conjunto de k países que forma un monopolio, esto es, existen k países distintos que cumplen las siguientes propiedades simultáneamente:

- Cada uno de los k países produce al menos un mineral.
- El resto de los países (distinto a los k países) no produce ningún mineral.

- Cada país importa mineral solo de estos k países y solo en caso que sea su vecino.
- Para todo par de vecinos de un mismo país, ellos no producen el mismo mineral (en otras palabras, no hay competencia).

Notar que en esta pregunta, para cada k debe entregar una fórmula distinta que dependerá de k.

(*Recomendación:* Escriba esta fórmula para $k = 2$ y $k = 3$ y generalice después para un k cualquiera.)

4. Para esta pregunta considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{F, P, A, N, E, H\}$, donde F, P, A, N son símbolos unarios, E es binario, y H es ternario. Además, considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$. El dominio de D de $\mathcal{I}$ es el conjunto de los pokemon, y

$$
\begin{aligned}
F^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza fuego}\} \\
A^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza agua}\} \\
P^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza planta}\} \\
N^{\mathcal{I}} &= \{x \in D \mid x \text{ es de naturaleza normal}\} \\
E^{\mathcal{I}} &= \{(x, y) \in D \mid \text{los ataques de } x \text{ son efectivos contra } y\} \\
H^{\mathcal{I}} &= \{(x, y, z) \in D \mid z \text{ fue procreado entre } x \text{ e } y\}
\end{aligned}
$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados:

a) Todos los pokemon son de alguna naturaleza.

b) Algunos pokemon poseen 2 naturalezas.

c) Los ataques de naturaleza agua son efectivos contra pokemon de naturaleza fuego, los de naturaleza fuego son efectivos contra pokemon de naturaleza planta y los ataques de naturaleza planta son efectivos contra pokemon de naturaleza agua.

d) Si dos pokemon son de la misma naturaleza, entonces sus hijos son de aquella naturaleza.

e) Los pokemon que son hermanos comparten las mismas naturalezas.

5. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ con $<$ símbolo de predicado binario. Para cada una de las siguientes oraciones φ en lógica de predicados, demuestre que φ es satisfacible por una interpretación con dominio finito (no vacío), es decir, que existe una interpretación $\mathcal{I}$, con dominio finito, tal que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$.

a) $\varphi_1 = \big(\forall x\, \neg(x < x)\big) \ \wedge \ \big(\forall x\, \exists y\, x < y\,\big)$

b) $\varphi_2 = \big(\forall x\, \neg(x < x)\big) \ \wedge \ \big(\forall x\, \exists y\, x < y\,\big) \ \wedge \ \big(\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow \neg(y < x))\big)$

c) $\varphi_3 = \big(\forall x\, \neg(x < x)\big) \wedge \big(\forall x\, \exists y\, x < y\,\big) \wedge \big(\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow \neg(y < x))\big) \wedge \big(\exists x\, \forall y\, (\neg(x = y) \rightarrow x < y)\big)$

No es necesario demostrar formalmente que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ pero si explicar en palabras por qué φ es verdadera sobre $\mathcal{I}$.

6. Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de predicado binario, y las siguientes oraciones en lógica de predicados:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y \forall z\, \big(R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \wedge R(x, z))\big) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z\, \big((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)\big) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z\, \big((R(x, y) \rightarrow R(y, z)) \wedge (R(x, y) \rightarrow R(x, z))\big)
\end{aligned}
$$

Para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$ con $i \neq j$ diga si $\varphi_i \equiv \varphi_j$, o si $\{\varphi_i\} \models \varphi_j$ y $\{\varphi_j\} \not\models \varphi_i$, o si $\{\varphi_j\} \models \varphi_i$ y $\{\varphi_i\} \not\models \varphi_j$. Para cada caso, justifique su respuesta con una demostración o contraejemplo.

7. Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \emptyset$.

a) Construya un conjunto infinito de oraciones $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ tal que $\{\varphi_0\} \models \varphi_1$, $\{\varphi_1\} \models \varphi_2$, $\{\varphi_2\} \models \varphi_3, \ldots$ y para todo i, j con $i \neq j$ se tiene que $\varphi_i \not\equiv \varphi_j$. Demuestre su respuesta.

b) Construya un conjunto infinito de oraciones $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ tal que para todo i, j con $i \neq j$ se tiene que $\{\varphi_i\} \not\models \varphi_j$ y $\{\varphi_j\} \not\models \varphi_i$. Demuestre su respuesta.

c) Haga lo mismo que en las partes (a) y (b), pero ahora sus oraciones sólo pueden usar un símbolo de predicado binario E (el símbolo $=$ no está permitido).

(*Observación:* en las preguntas (a) y (b), como el vocabulario es vacío, el único símbolo de predicado disponible es $=$)

8. Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{F\}$, donde F es un predicado ternario. Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente equivalencia lógica:

$$\exists x \forall y \forall z\, F(x, y, z) \equiv \forall x \exists y \forall z\, \neg F(x, y, z).$$

9. Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{R, S\}$ con dos predicados unarios R, S y considere las siguientes oraciones en lógica de predicados:

$$\alpha = (\forall x\, R(x)) \leftrightarrow (\forall x\, S(x)) \qquad \beta = \forall x\, (R(x) \leftrightarrow S(x))$$

a) ¿Es verdadero o falso que $\{\alpha\} \models \beta$? Demuestre su afirmación.

b) ¿Es verdadero o falso que $\{\beta\} \models \alpha$? Demuestre su afirmación.

10. ¿Es la siguiente afirmación cierta?

$$\begin{aligned}&\{\forall x \forall y\, R(x, y) \rightarrow R(y, x),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z),\\ &\qquad\qquad \forall x \forall y \forall z\, (R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow y = z\} \ \models\ \forall x \forall y\, R(x, y) \rightarrow x = y\end{aligned}$$

Demuestre o de un contraejemplo.

11. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y sea Σ un conjunto formado por las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x\, \neg(x < x)\\ \varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\\ \varphi_3 &= \forall x \forall y\, (x < y \vee y < x \vee x = y).\end{aligned}$$

Conteste las siguientes preguntas.

(a) Construya una interpretación $\mathcal{I}_1$ tal que $[\![\Sigma]\!]_{\mathcal{I}_1} = 1$.

(b) Construya una interpretación $\mathcal{I}_2$ tal que $[\![\Sigma \cup \{\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}]\!]_{\mathcal{I}_2} = 1$, donde:

$$\begin{aligned}\varphi_4 &= \forall x \exists y\, (x < y)\\ \varphi_5 &= \forall x \exists y\, (y < x)\\ \varphi_6 &= \forall x \forall y\, (x < y \rightarrow \exists z\, (x < z \wedge z < y)).\end{aligned}$$

(c) Construya una interpretación $\mathcal{I}_3$ tal que $[\![\Sigma \cup \{\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8\}]\!]_{\mathcal{I}_3} = 1$, donde φ_6 es la oración definida en (b) y:

$$\begin{aligned}\varphi_7 &= \exists x \forall y\, (y < x \vee y = x)\\ \varphi_8 &= \exists x \forall y\, (x < y \vee y = x)\end{aligned}$$

(d) Construya una interpretación $\mathcal{I}_4$ tal que $[\![\Sigma \cup \{\varphi_7, \varphi_8, \varphi_9\}]\!]_{\mathcal{I}_4} = 1$, donde φ_7 y φ_8 son las oraciones definidas en (c) y:

$$\varphi_9 \quad = \quad \forall x\, (\exists y\, (x < y) \to \exists z\, (x < z \land \neg \exists w\, (x < w \land w < z))).$$

12. Demuestre que ninguna de las siguientes oraciones es implicada por las otras dos:

$$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z)) \to R(x,z)$$
$$\forall x \forall y\, (R(x,y) \land R(y,x)) \to x = y$$
$$(\forall x \exists y\, R(x,y)) \to (\exists y \forall x\, R(x,y))$$

13. Demuestre que la siguiente oración es una tautología:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\, (x_1 = y_1 \land x_2 = y_2 \land P(x_1, x_2)) \to P(y_1, y_2)$$

14. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de relación binaria. Construya una oración Φ tal que Φ es satisfacible y para toda interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$:

$$\text{si } [\![\Phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1, \text{ entonces el dominio de } \mathcal{I} \text{ es infinito.}$$

15. Dado un grafo $G = (V, E)$, una secuencia de nodos $a_1, \ldots, a_n$ es un *camino en G* si para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in E$. Además, decimos que un camino $a_1, \ldots, a_n$ va desde b a c si $a_1 = b$ y $a_n = c$, y decimos que el largo del camino $a_1, \ldots, a_n$ es $n - 1$ (vale decir, el largo es el número de arcos del camino). Finalmente, decimos que la distancia en G entre dos nodos b y c es k si existe un camino de b a c en G de largo k, y no existe un camino más corto en G desde b a c.

    Suponga que utiliza el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$ para representar grafos, donde E es una relación binaria. Dado un número natural k, defina una fórmula $\varphi_k(x, y)$ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A:

$$[\![\varphi_k]\!]_{\mathcal{I}} \quad = \quad \{(a, b) \in A^2 \mid \text{la distancia entre } a \text{ y } b \text{ en el grafo representado por } \mathcal{I} \text{ es } k\}$$

16. Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{S, M\}$ donde S y M son símbolos ternarios. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ tal que el dominio de $\mathcal{I}$ son los números reales $\mathbb{R}$, y

$$S^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$$
$$M^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = z\}$$

    a) Construya fórmulas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ tal que $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} = \{0\}$ y $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} = \{1\}$.
    b) Construya una fórmula $\gamma(x)$ tal que $[\![\gamma]\!]_{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
    c) Sea n un número natural arbitrario. Construya una fórmula $\varphi_n(x)$ tal que $[\![\varphi_n]\!]_{\mathcal{I}} = \{n\}$.
    d) Sea m un número entero arbitrario. Construya una fórmula $\varphi_m(x)$ tal que $[\![\varphi_m]\!]_{\mathcal{I}} = \{m\}$.
    e) Sea $r = p/q$ un número racional arbitrario. Construya una fórmula $\varphi_r(x)$ tal que $[\![\varphi_r]\!]_{\mathcal{I}} = \{r\}$.

17. Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{S, M\}$ donde S y M son símbolos ternarios. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ tal que el dominio de $\mathcal{I}$ son los números naturales $\mathbb{N}$, y

$$S^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x + y = z\}$$
$$M^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x \cdot y = z\}$$

    a) Construya una fórmula $\varphi(x, y)$ tal que $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$.
    b) Construya una fórmula $\alpha(x)$ tal que $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es primo}\}$.

c) Construya una fórmula $\beta(x)$ tal que $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$.

d) Construya una fórmula $\gamma(x, y)$ tal que $[\![\gamma]\!]_{\mathcal{I}} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ es divisor de } y\}$.

e) Construya una fórmula $\psi(x, y, z)$ tal que $[\![\psi]\!]_{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z \text{ es el máximo común divisor de } x \text{ e } y\}$.

f) Construya una fórmula $\phi(x, y, z)$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z \text{ es el resto de la división entera de } x \text{ dividido por } y\}$.