PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía de teoría de conjuntos

1. Recuerde que el *axioma del conjunto potencia* dice que:

   Para todo conjunto A, existe un conjunto $\mathcal{P}(A)$ cuyos elementos son exactamente todos los subconjuntos de A.

   Escriba este axioma en lógica de predicados (recuerde que sólo puede usar los predicados $\in$ e $=$).

2. El *axioma de regularidad* (o también conocido como el *axioma de fundación*) dice lo siguiente:

   Todo conjunto A no vacío tiene un elemento $c \in A$ tal que $c \cap A = \emptyset$.
   (es decir, tal que c y A no tienen elementos en común.)

   Escriba este axioma en lógica de predicados (recuerde que sólo puede usar los predicados $\in$ e $=$).

3. Demuestre que no existe un conjunto A tal que $A \in A$.
   (*Hint:* Razone por contradicción, y aplique el axioma de regularidad a algún conjunto que le convenga.)

4. Demuestre que no puede existir un conjunto universo. Es decir, demuestre que no existe un conjunto que contenga a todos los conjuntos.

5. Demuestre que no existe un conjunto que contenga a todos los singletons (recuerde que un singleton es un conjunto de la forma $\{A\}$).
   (*Hint:* recuerde el axioma de la unión.)

6. Sean A, B y U conjuntos tal que $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$. Demuestre que $A \subseteq B$ si y sólo si $U \setminus B \subseteq U \setminus A$.

7. Sean A, B y X conjuntos. Demuestre que si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, entonces $X \subseteq A \cap B$.

8. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
   b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
   c) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
   d) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
   e) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus C$.

9. Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:

   $$A \,\Delta\, B \;=\; A \setminus B \;\cup\; B \setminus A$$

   Demuestre que para todo conjunto A, B y C se cumple lo siguiente:

a) $A \,\Delta\, B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
b) $A \,\Delta\, B \;=\; B \,\Delta\, A$

10. Sean A y B conjuntos. Demuestre las siguientes afirmaciones:

    a) $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
    b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
    c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
    d) $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.
    e) Si $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, entonces $A = B$.

11. Sea A un conjunto. Decimos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es un *álgebra* si:

    (i) $A \in \mathcal{M}$.
    (ii) Para todo $X, Y \in \mathcal{M}$, se cumple que $X \cup Y \in \mathcal{M}$.
    (iii) Para todo $X \in \mathcal{M}$, se cumple que $A \setminus X \in \mathcal{M}$.

    Sea A un conjunto y $\mathcal{M}$ un álgebra. Demuestre lo siguiente:

    a) $\emptyset \in \mathcal{M}$.
    b) Para todo $X, Y \in \mathcal{M}$, se cumple que $X \cap Y \in \mathcal{M}$.
    c) Para todo $X, Y \in \mathcal{M}$, se cumple que $X \,\Delta\, Y \in \mathcal{M}$.