



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN  
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

# Ayudantía 10

17 de octubre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

---

## 1. Calentando Motores

Una relación  $R$  se llama **circular** si  $aRb$  y  $bRc$  implican que  $cRa$ . Demuestre que  $R$  es reflexiva y circular si, y sólo si, es una relación de equivalencia.

**Solución:**

$\Rightarrow$ : Supongamos que  $R$  es una relación reflexiva y circular, es decir, que es una relación circular. Debemos demostrar que  $R$  también es de equivalencia.

**Reflexividad.** Como supusimos,  $R$  es reflexiva.

Concluimos que  $R$  es reflexiva.

**Simetría.** Sean  $a, b$  tales que  $aRb$ , tenemos:

$$aRa \text{ (Por reflexividad de } R) \quad (1)$$

$$aRa \wedge aRb \Rightarrow bRa \text{ (Por definición de relación circular)} \quad (2)$$

Concluimos que  $R$  es simétrica.

**Transitividad.** Sean  $a, b, c$  tales que  $aRb$  y  $bRc$ . Entonces

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow cRa \text{ (definición de relación circular)} \quad (1)$$

$$cRa \Rightarrow aRc \text{ (Definición de relación simétrica)} \quad (2)$$

Concluimos que  $R$  es transitiva y, por lo tanto, también una relación de equivalencia.

$\Leftarrow$ : Supongamos que  $R$  es una relación de equivalencia, debemos demostrar que es reflexiva y circular:

**Reflexividad.** Como supusimos,  $R$  es de equivalencia, luego también es reflexiva.

Concluimos que  $R$  es reflexiva.

**Transitividad.** Sean  $a, b, c$  tales que  $aRb$  y  $bRc$ . Entonces

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc \text{ (definición de relación transitiva)} \quad (1)$$

$$aRc \Rightarrow cRa \text{ (Definición de relación simétrica)} \quad (2)$$

Así concluimos que  $R$  es circular.

Así queda demostrada la doble implicancia.

## 2. Relaciones

Sea  $A$  un conjunto. Una relación binaria  $\prec$  sobre  $A$  se dice *orden estricto* si es asimétrica y transitiva.

- (a) Demuestre que si  $\prec$  es un orden estricto, entonces  $\prec^{-1}$  es un orden estricto.
- (b) Considere  $\preceq$  y  $\succeq$  definidas según

$$\preceq := \prec \cup I_A \quad \text{y} \quad \succeq := \prec^{-1} \cup I_A$$

donde  $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$  es la relación identidad. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- $\prec^{-1} \subseteq \succeq$
- $\preceq \cap \succeq = I_A$
- $\prec \cup \prec^{-1} = A \setminus I_A$

**Parte a)**

**Solución:** Supongamos que  $\prec$  es un orden estricto, es decir, que es una relación asimétrica y transitiva. Debemos demostrar que  $\prec^{-1}$  también es asimétrica y transitiva.

**Asimetría.** Sean  $a, b \in A$  tales que  $a \prec^{-1} b$ . Entonces

$$\begin{aligned} a \prec^{-1} b &\Rightarrow b \prec a && \text{(definición de relación inversa)} \\ &\Rightarrow \neg(a \prec b) && \text{(asimetría de } \prec) \\ &\Rightarrow \neg(b \prec^{-1} a) && \text{(definición de relación inversa)} \end{aligned}$$

Concluimos que  $\prec^{-1}$  es asimétrica.

**Transitividad.** Sean  $a, b, c \in A$  tales que  $a \prec^{-1} b$  y  $b \prec^{-1} c$ . Entonces

$$\begin{aligned} b \prec^{-1} c &\Rightarrow c \prec b && \text{(definición de relación inversa)} \quad (1) \\ a \prec^{-1} b &\Rightarrow b \prec a && \text{(definición de relación inversa)} \quad (2) \\ (1) \text{ y } (2) &\Rightarrow c \prec a && \text{(transitividad de } \prec) \quad (3) \\ &\Rightarrow a \prec^{-1} c && \text{(definición de relación inversa)} \quad (4) \end{aligned}$$

Concluimos que  $\prec^{-1}$  es transitiva y, por lo tanto, también un orden estricto.

**Parte b)**

**Solución b.1)**  $\prec^{-1} \subseteq \succeq$ : Asumiremos  $A$  no vacío, pues en caso contrario la propiedad es falsa y todas las propiedades sobre las relaciones descritas se vuelven triviales. Debemos demostrar que

$$\forall x (x \in \prec^{-1} \rightarrow x \in \succeq)$$

o, dicho de otro modo, que

$$\forall a \in A \forall b \in A (a \prec^{-1} b \rightarrow a \succeq b)$$

Sean entonces  $a, b \in A$  tales que  $a \prec^{-1} b$ . Por una parte, por definición de unión, tenemos que

$$\begin{aligned} \succeq &= \prec^{-1} \cup I_A \\ &= \{x \mid x \in \prec^{-1} \vee x \in I_A\} \\ &= \{(a, b) \in A \times A \mid (a \prec^{-1} b) \vee (a = b)\} \end{aligned}$$

Notemos entonces que  $(a, b) \in \succeq$ , pues satisfacen  $(a \prec^{-1} b) \vee (a = b)$ . Por generalización universal, concluimos que  $\prec^{-1} \subseteq \succeq$ .

Para demostrar inclusión estricta, debemos demostrar que  $\prec^{-1} \neq \succeq$ , es decir, que existe algún par en  $\succeq$  que no esté en  $\prec^{-1}$ . Es fácil notar que basta tomar cualquier  $a \in A$  y  $a \succeq a$  pero no  $a \prec^{-1} a$ . Lo primero es directo de la definición de unión anteriormente explicada. Para lo segundo, dado que  $\prec$  es asimétrica, se tiene que  $a \prec a$  es falso, lo que implica  $\neg(a \prec^{-1} a)$ , lo que se quería demostrar.

**Solución b.2)**  $\preceq \cap \succeq = I_A$ : Sea  $(a, b) \in \preceq \cap \succeq$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in \preceq \cap \succeq &\Leftrightarrow (a \preceq b) \wedge (a \succeq b) && \text{(definición de } \cap \text{)} \\
 &\Leftrightarrow ((a, b) \in \prec \cup I_A) \wedge ((a, b) \in \prec^{-1} \cup I_A) && \text{(definición de } \preceq \text{ y } \succeq \text{)} \\
 &\Leftrightarrow ((a \prec b) \vee (a = b)) \wedge ((a \prec^{-1} b) \vee (a = b)) && \text{(definición de } \cup, \prec \in I_A \text{)} \\
 &\Leftrightarrow (a = b) \vee (a \prec b \wedge a \prec^{-1} b) && \text{(ley de distribución)} \\
 &\Leftrightarrow (a = b) \vee (a \prec b \wedge b \prec a) && \text{(def relación inversa)}
 \end{aligned}$$

Como ya argumentamos anteriormente,  $(a \prec b \wedge b \prec a)$  es una contradicción, puesto que  $\prec$  es una relación antisimétrica (en realidad, asimétrica), por lo que  $a \prec b$  implica  $\neg(b \prec a)$ , lo que contradice  $b \prec a$ .

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in \preceq \cap \succeq &\Leftrightarrow (a = b) \vee (a \prec b \wedge b \prec a) \\
 &\Leftrightarrow a = b && \text{(ley de identidad)} \\
 &\Leftrightarrow (a, b) \in I_A
 \end{aligned}$$

De lo que concluimos que

$$\preceq \cap \succeq = I_A.$$

**Solución b.3)**  $\prec \cup \prec^{-1} = (A \times A) \setminus I_A$ : Esta afirmación es falsa y daremos un contraejemplo de relación de orden estricto que no cumple con la igualdad. Sea  $A = \mathbb{N}$  y sea  $\prec$  la relación de divisor estrictamente menor definida por

$$a \prec b \Leftrightarrow a < b \text{ y } a \mid b$$

Se deja como demostración al lector que  $\prec$  es un orden estricto, pero esencialmente esto proviene del hecho de que  $<$  y  $\mid$  son transitivos, y que  $<$  es asimétrico.

En dicha relación, notemos que  $(3, 5) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus I_A$  pero no es cierto que  $(3, 5) \in \prec \cup \prec^{-1}$ , pues  $\neg(3 \mid 5)$  y  $\neg(5, 3)$ .

Por tanto, la igualdad no se cumple.

Para que la afirmación sea cierta, se requiere que  $\preceq$  (o equivalentemente  $\succeq$ ) sea una relación conexa.

### 3. Relaciones, relaciones, relaciones

Sea  $A$  el conjunto de todas las relaciones binarias en  $\mathbb{R}$ . Sobre  $A$  definimos la relación binaria  $\Omega$  siguiente:

Sean  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$ , entonces

$$\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \iff (\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R}_1 y \implies x \mathcal{R}_2 y)$$

Demuestre que  $\Omega$  es una relación de orden parcial, y además que no es un orden total en  $A$ , es decir que no es conexa.

### Solución

Primero se demostrará que es relación de orden.

- Refleja: Para una relación  $\mathcal{R} \in A$  arbitraria, la expresión  $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}y$  es una tautología, por lo que la relación es refleja.
- Antisimétrica: Sean  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$  arbitrarias. Supongamos que  $\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2 \Omega \mathcal{R}_1$ . Debemos demostrar que  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ . Cambiando la notación del supuesto realizado:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_2$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_1$$

Lo primero es equivalente, por definición de subconjunto, a  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$ , y lo segundo a  $\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1$ . Por definición de igualdad de conjuntos, esto quiere decir que  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ , con lo que se demuestra lo deseado.

- Transitiva: Sean  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \in A$ . Supongamos que  $\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2 \Omega \mathcal{R}_3$ . Debemos demostrar que  $\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_3$ . Por el mismo argumento que en el apartado anterior se tiene que  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2 \wedge \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_3$ . Como  $\subseteq$  es una relación de orden parcial, es transitiva, por lo que  $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_3$  y equivalentemente,  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1y \Rightarrow x\mathcal{R}_3y$ , con lo que  $\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_3$ .