

IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

13.08.2025

Hoy...

Lógica proposicional: tautologías y consecuencias lógicas.

Tautologías

Definición

*Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Tautologías

Definición

*Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias y satisfacibilidad)

- ▶ *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si*

Tautologías

Definición

*Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias y satisfacibilidad)

- *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ es una tautología.*

Tautologías

Definición

*Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias y satisfacibilidad)

- ▶ *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ es una tautología.*
- ▶ *Una fórmula proposicional ϕ es una tautología (si y sólo si)*

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.

Lema (relación con equivalencias y satisfacibilidad)

- ▶ Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ es una tautología.
- ▶ Una fórmula proposicional ϕ es una tautología (si y sólo si) ϕ y 1 son equivalentes (si y sólo si) $\neg\phi$ no es satisfacible.

Pregunta tautología

¿Es una tautología?

$$(A \vee B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee A)$$

Pregunta tautología

¿Es una tautología?

$$(A \vee B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee A)$$

¿Es una tautología?

$$(B \rightarrow A) \vee (A \rightarrow B)$$

Ejemplos

Las formulas

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow A \quad (3)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow B \quad (4)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (5)$$

$$A \rightarrow (A \vee B) \quad (6)$$

$$B \rightarrow (A \vee B) \quad (7)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \quad (8)$$

$$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (9)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)) \quad (10)$$

$$A \vee \neg A \quad (11)$$

son tautologías que se llaman *axiomas del sistema de Frege*.

¿Cómo generar más tautologías? – Sustitución

Lema (Sustitución)

Si ϕ es una tautología, X_1, X_2, \dots, X_n son sus variables, y ψ_1, \dots, ψ_n son fórmulas proposicionales, entonces la fórmula, donde en ϕ , para cada $i = 1, \dots, n$, sustituimos cada ocurrencia de X_i por ψ_i , también es una tautología.

¿Cómo generar más tautologías? – Sustitución

Lema (Sustitución)

Si ϕ es una tautología, X_1, X_2, \dots, X_n son sus variables, y ψ_1, \dots, ψ_n son fórmulas proposicionales, entonces la fórmula, donde en ϕ , para cada $i = 1, \dots, n$, sustituimos cada ocurrencia de X_i por ψ_i , también es una tautología.

Ejemplo:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \implies (x \wedge \neg y) \rightarrow ((x \vee z) \rightarrow (x \wedge \neg y))$$

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- ▶ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (axioma 1)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- ▶ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (axioma 1)
- ▶ $A \vee \neg A$ (axioma 11)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- ▶ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (axioma 1)
- ▶ $A \vee \neg A$ (axioma 11)
- ▶ $(A \vee \neg A) \rightarrow (\psi \rightarrow (A \vee \neg A))$ (sustitución)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \rightarrow \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- ▶ $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (axioma 1)
- ▶ $A \vee \neg A$ (axioma 11)
- ▶ $(A \vee \neg A) \rightarrow (\psi \rightarrow (A \vee \neg A))$ (sustitución)
- ▶ $\psi \rightarrow (A \vee \neg A)$ (modus ponens)

completitud del sistema Frege

Teorema

Cada tautología ϕ se puede obtener a partir de

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow A \quad (3)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow B \quad (4)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (5)$$

$$A \rightarrow (A \vee B) \quad (6)$$

$$B \rightarrow (A \vee B) \quad (7)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \quad (8)$$

$$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (9)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)) \quad (10)$$

$$A \vee \neg A \quad (11)$$

a través de un finito número de aplicaciones de sustitución y modus ponens.

Ejemplo Frege

Cómo mostrar $A \rightarrow A$ en sistema Frege?

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow A \quad (3)$$

$$(A \wedge B) \rightarrow B \quad (4)$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \quad (5)$$

$$A \rightarrow (A \vee B) \quad (6)$$

$$B \rightarrow (A \vee B) \quad (7)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \quad (8)$$

$$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (9)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)) \quad (10)$$

$$A \vee \neg A \quad (11)$$

Ejemplo Frege

Cómo mostrar $A \rightarrow A$ en sistema Frege?

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (2)$$

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- ▶ Probar todas las asignaciones...

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- ▶ Probar todas las asignaciones... *método exponencial*

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- ▶ Probar todas las asignaciones... *método exponencial*
- ▶ ¿Sistema Frege?

Problema

¿Existe una constante $C > 0$ tal que cada tautología ϕ puede ser mostrada en sistema Frege en no más que m^C pasos, donde m es el largo de ϕ ?

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- ▶ Probar todas las asignaciones... *método exponencial*
- ▶ ¿Sistema Frege?

Problema

¿Existe una constante $C > 0$ tal que cada tautología ϕ puede ser mostrada en sistema Frege en no más que m^C pasos, donde m es el largo de ϕ ?

¿Tienen todas las leyes lógicas demostraciones cortas? (NP = coNP).

Consecuencias lógicas

A veces, nos interesa que las proposiciones salgan de proposiciones que ya sabemos que son verdaderas.

Definición (Consecuencia lógica)

Sea Φ un conjunto de fórmulas. La fórmula ψ es una **consecuencia lógica** de Φ (se denota eso $\Phi \models \psi$) si para cada asignación de las variables a 0s y 1s que hace tal que todas las fórmulas en Φ toman valor 1, la fórmula ψ también toma valor 1..

Definición (Satisfacibilidad)

Sea Φ un conjunto de fórmulas. Entonces, Φ es **satisfacible** si existe una asignación de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en Φ toma valor 1.

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models A$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow \neg B\} \models A \rightarrow B$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow \neg B\} \models A \rightarrow B$

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg B \rightarrow \neg A\} \models A \rightarrow B$

Métodos de demostración

Ejercicio: dar ejemplos de demostraciones matemáticas que usan estas consecuencias lógicas.

$$\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$$

$$\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$$

$$\{\neg B \rightarrow \neg A\} \models A \rightarrow B$$

Tautologías, consecuencias, satisfacibilidad

Teorema

Sea Φ un conjunto de fórmulas proposicionales y ψ una fórmula proposicional. Entonces, la siguientes condiciones son equivalentes:

- ▶ $\Phi \models \psi$
- ▶ $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ no es satisfacible.

Tautologías, consecuencias, satisfacibilidad

Teorema

Sea Φ un conjunto de fórmulas proposicionales y ψ una fórmula proposicional. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- ▶ $\Phi \models \psi$
- ▶ $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ no es satisfacible.

*Si Φ es **finito**, estas dos condiciones son equivalentes a este:*

- ▶ $(\bigwedge_{\phi \in \Phi} \phi) \rightarrow \psi$ es una tautología.

compacidad

¿Qué hacer cuando Φ es *infinito*? ¿Se puede reducir a las tautologías?

compacidad

¿Qué hacer cuando Φ es *infinito*? ¿Se puede reducir a las tautologías?

Teorema (Compacidad)

Sean Φ un conjunto de fórmulas proposicionales (posiblemente, **infinito**) y ψ una fórmula proposicional tal que $\Sigma \models \phi$. Entonces, existe un **subconjunto finito** $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma' \models \phi$.

¡Gracias!