

IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

25.08.2025

Hoy...

Lógica de predicados: fórmulas de la
lógica de predicados, su evaluación,
interpretaciones.

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ (1)

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (2)

$\exists x_i, \quad \forall x_i$ (3)

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ (1)

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (2)

$\exists x_i, \quad \forall x_i$ (3)

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados (*a.k.a.* **fórmulas de primer orden**) *se construyen de*

- ▶ *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- ▶ *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ (1)

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (2)

$\exists x_i, \quad \forall x_i$ (3)

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados (*a.k.a.* **fórmulas de primer orden**) se construyen de

- ▶ *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- ▶ *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Si sustituimos *símbolos* de predicados por predicados particulares (sobre un dominio particular), la fórmula nos calcula, según (4–6), un predicado resultante.

Lógica de proposiciones \subseteq lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ (4)

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (5)

$\exists x_i, \quad \forall x_i$ (6)

Lógica de proposiciones \subseteq lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ (4)

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (5)

$\exists x_i, \quad \forall x_i$ (6)

- ▶ Fórmulas de la lógica proposicional son caso particular de las fórmulas cuando todos símbolos de predicados son 0-arios.
- ▶ En ese caso (5–6) no son aplicables.
- ▶ Podemos sustituir cada símbolo de predicado 0-ario por 0 o 1. Dominio D no es importante en ese caso.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \quad (7)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \quad (7)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = [0, +\infty)$ y

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en (7)?}$$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \quad (7)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = [0, +\infty)$ y

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en (7)? Si}$$

$$D = \mathbb{N} \text{ y } A(x, y) = \begin{cases} 1 & 2x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en (7)?}$$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \quad (8)$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \quad (8)$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\text{y } B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en} \\ (8)?$$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \quad (8)$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$

y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (8)? Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

$B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & (x+1)(y+1)z = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (8)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \left((\exists x A(x, y)) \vee (\neg A(y, y)) \right) \quad (9)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \left((\exists x A(x, y)) \vee (\neg A(y, y)) \right) \quad (9)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 29371982 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en} \\ (9)?$$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \left((\exists x A(x, y)) \vee (\neg A(y, y)) \right) \quad (9)$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$. Si $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ y

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 29371982 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en} \\ (9)?$$

Definición

*Fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones** de la lógica de predicados.*

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists u \exists v ((\neg A(u, v)) \wedge B(x, u, v) \wedge B(y, u, v) \wedge B(z, u, v)) \quad (10)$$

usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot, \cdot)$ y *ternario* $B(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists u \exists v ((\neg A(u, v)) \wedge B(x, u, v) \wedge B(y, u, v) \wedge B(z, u, v)) \quad (10)$$

usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot, \cdot)$ y *ternario* $B(\cdot, \cdot, \cdot)$.

$$\text{Si } D = \mathbb{R}^2 \quad A(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases},$$

$$B(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \|x - y\| = \|x - z\| \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \text{ ¿qué predicado obtenemos en (10)?}$$

Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados S_1, \dots, S_n de aridades a_1, \dots, a_n , respectivamente. Una **interpretación** \mathcal{I} de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados P_1, \dots, P_n sobre D con aridades a_1, \dots, a_n , respectivamente.

Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados S_1, \dots, S_n de aridades a_1, \dots, a_n , respectivamente. Una **interpretación** \mathcal{I} de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados P_1, \dots, P_n sobre D con aridades a_1, \dots, a_n , respectivamente.

$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}}$ denota el predicado sobre D que obtenemos si sustituimos S_1 por P_1 , ..., S_n por P_n .

Ejemplo notación de interpretaciones

► $\phi = \forall a \exists b A(b, b, a)$

Ejemplo notación de interpretaciones

► $\phi = \forall a \exists b A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0, 1), x \cdot y = z)$$

$$\mathcal{I}_4 = ((0, 1), x \cdot y = z)$$

Ejemplo notación de interpretaciones

► $\phi = \forall a \exists b A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0, 1), x \cdot y = z)$$

$$\mathcal{I}_4 = ((0, 1), x \cdot y = z)$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_1} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_2} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_3} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_4} =$$

Ejemplo notación de interpretaciones

► $\phi = \forall a \exists b A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0, 1), x \cdot y = z)$$

$$\mathcal{I}_4 = ((0, 1), x \cdot y = z)$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_1} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_2} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_3} =$$

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}_4} =$$

► $\iota \llbracket \exists b A(b, b, a) \rrbracket_{\mathcal{I}_1}?$

¡Gracias!