Cardinalidad - IIC1253

Marcelo Arenas

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

¿Cuándo decimos que la cardinalidad de A es menor que la de B?

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

¿Cuándo decimos que la cardinalidad de A es menor que la de B? ¿Cuándo decimos que tienen la misma cardinalidad?

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

¿Cuándo decimos que la cardinalidad de A es menor que la de B? ¿Cuándo decimos que tienen la misma cardinalidad?

- Para responder esta preguntas simplemente comparamos el número de elementos de A con el número de elementos de B.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

¿Cuándo decimos que la cardinalidad de A es menor que la de B? ¿Cuándo decimos que tienen la misma cardinalidad?

- Para responder esta preguntas simplemente comparamos el número de elementos de A con el número de elementos de B.

Pero cómo respondemos las preguntas anteriores si A y B son conjuntos infinitos.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Suponga que los conjuntos A y B son finitos.

¿Cuándo decimos que la cardinalidad de A es menor que la de B? ¿Cuándo decimos que tienen la misma cardinalidad?

- Para responder esta preguntas simplemente comparamos el número de elementos de A con el número de elementos de B.

Pero cómo respondemos las preguntas anteriores si A y B son conjuntos infinitos.

- O si A es finito y B es infinito.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Definición

Decimos que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, denotado como $A \preceq B$, si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Definición

Decimos que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, denotado como $A \preceq B$, si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

Ejemplos

$\{a, b, c, d\} \preceq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{R}$.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

Definición

Decimos que la cardinalidad de un conjunto A es menor o igual que la cardinalidad de un conjunto B, denotado como $A \preceq B$, si existe una función inyectiva $f : A \to B$.

Ejemplos

$\{a, b, c, d\} \preceq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{R}$.

Utilizamos la notación $A \prec B$ para indicar que $A \preceq B$ y que **no** es cierto que $B \preceq A$.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

1. Demuestre que la relación $\preceq$ es refleja y transitiva.

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

1. Demuestre que la relación $\preceq$ es refleja y transitiva.

2. ¿Es $\preceq$ un orden parcial?

Comparando la cardinalidad de dos conjuntos

1. Demuestre que la relación $\preceq$ es refleja y transitiva.
2. ¿Es $\preceq$ un orden parcial?
3. Demuestre que para cualquier conjunto finito A, se tiene que $A \preceq \mathbb{N}$.

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \to B$.

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \to B$.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{N} \approx \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \to B$.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{N} \approx \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
2. Demuestre que $\mathbb{R} \approx (0, 1)$

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \to B$.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{N} \approx \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
2. Demuestre que $\mathbb{R} \approx (0, 1)$
   - Haga la demostración considerando la función: $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

Conjuntos con la misma cardinalidad

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son equinumerosos, denotado como $A \approx B$, si existe una biyección $f : A \to B$.

Ejercicios

1. Demuestre que $\mathbb{N} \approx \{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
2. Demuestre que $\mathbb{R} \approx (0, 1)$
   - Haga la demostración considerando la función: $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
3. Demuestre que $\approx$ es una relación de equivalencia.

Un teorema muy útil

Teorema (Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ *si y sólo si* $A \preceq B$ *y* $B \preceq A$.

Un teorema muy útil

Teorema (Schröder-Bernstein)

$A \approx B$ si y sólo si $A \preceq B$ y $B \preceq A$.

Ejercicio

Demuestre que $\mathbb{N}$ es equinumeroso con $\{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto infinito A se dice enumerable si $A \approx \mathbb{N}$.

Conjuntos enumerables

Definición

Un conjunto infinito A se dice enumerable si $A \approx \mathbb{N}$.

Ejemplo

Los conjuntos $\{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $\{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ son enumerables.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

Esta función f nos da una enumeración de A.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

Esta función f nos da una enumeración de A.

- El primero elemento de A es $f(0)$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

Esta función f nos da una enumeración de A.

- El primero elemento de A es $f(0)$.
- El segundo elemento de A es $f(1)$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

Esta función f nos da una enumeración de A.

- El primero elemento de A es $f(0)$.
- El segundo elemento de A es $f(1)$.
- ...

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

Si $A \approx \mathbb{N}$, entonces existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$.

Esta función f nos da una enumeración de A.

- El primero elemento de A es $f(0)$.
- El segundo elemento de A es $f(1)$.
- ...
- El i-ésimo elemento de A es $f(i-1)$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$,

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
2. $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, y

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
2. $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, y
3. para cada $a \in A$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
2. $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, y
3. para cada $a \in A$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

Dada la enumeración $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A, tenemos que la función $f(i) = a_i$ es una biyección de $\mathbb{N}$ en A.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

De hecho, podemos demostrar que un conjunto es enumerable dando una enumeración de los elementos de A.

Una enumeración de los elementos de A es una secuencia $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_i \in A$ para cada $i \in \mathbb{N}$,
2. $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \neq j$, y
3. para cada $a \in A$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

Dada la enumeración $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A, tenemos que la función $f(i) = a_i$ es una biyección de $\mathbb{N}$ en A.

- Concluimos que $A \approx \mathbb{N}$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

1. De una enumeración de $\mathbb{Z}$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

1. De una enumeración de $\mathbb{Z}$.
    - De esto concluimos que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

¿Por qué llamamos a estos conjuntos enumerables?

1. De una enumeración de $\mathbb{Z}$.
   - De esto concluimos que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

2. ¿Puede dar una enumeración de $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Ya demostramos que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ mediante la técnica de enumeración.

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Ya demostramos que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ mediante la técnica de enumeración.

Vamos a hacer una segunda demostración de que $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$ usando una técnica que va a ser muy útil para otros conjuntos.

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Z}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

- ¿Por qué?

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Z}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

- ¿Por qué?

De hecho, se puede demostrar que $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ utilizando la siguiente función:

$$f(n) = \begin{cases} (n, 0) & n \geq 0 \\ (0, |n|) & n < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Z}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

- ¿Por qué?

De hecho, se puede demostrar que $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ utilizando la siguiente función:

$$f(n) \quad = \quad \begin{cases} (n, 0) & n \geq 0 \\ (0, |n|) & n < 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es inyectiva.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable:

- primero ordenamos los pares según la suma de sus valores, de menor a mayor;

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable:

- primero ordenamos los pares según la suma de sus valores, de menor a mayor;
- luego ordenamos los pares con la misma suma por el primer componente, de menor a mayor; y

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable:

- primero ordenamos los pares según la suma de sus valores, de menor a mayor;
- luego ordenamos los pares con la misma suma por el primer componente, de menor a mayor; y
- finalmente asignamos un número natural a cada par según el orden obtenido

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

$$(0,0) \quad \rightarrow \quad 0$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \to & 0 \\ (0,1) & \to & 1 \\ (1,0) & \to & 2 \end{array}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

$$\begin{aligned}
(0,0) &\quad \rightarrow \quad 0\\
(0,1) &\quad \rightarrow \quad 1\\
(1,0) &\quad \rightarrow \quad 2\\
(0,2) &\quad \rightarrow \quad 3\\
(1,1) &\quad \rightarrow \quad 4\\
(2,0) &\quad \rightarrow \quad 5
\end{aligned}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

$$\begin{array}{rcl}
(0,0) & \rightarrow & 0 \\
(0,1) & \rightarrow & 1 \\
(1,0) & \rightarrow & 2 \\
(0,2) & \rightarrow & 3 \\
(1,1) & \rightarrow & 4 \\
(2,0) & \rightarrow & 5 \\
(0,3) & \rightarrow & 6 \\
(1,2) & \rightarrow & 7 \\
(2,1) & \rightarrow & 8 \\
(3,0) & \rightarrow & 9 \\
 & \cdots &
\end{array}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Fórmula obtenida:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} k+1 \right) + i & i+j>0 \end{cases}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Fórmula obtenida:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} k+1\right)+i & i+j>0 \end{cases}$$

Vale decir:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+i & i+j>0 \end{cases}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable

Fórmula obtenida:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} k+1\right) + i & i+j>0 \end{cases}$$

Vale decir:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i & i+j>0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $f(1,1) = 4$ y $f(3,0) = 9$

$\mathbb{Z}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Z}$ es enumerable.

$\mathbb{Z}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Z}$ es enumerable.

Demostración: la proposición es consecuencia de que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Z}$ es enumerable.

Demostración: la proposición es consecuencia de que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$.

- Puesto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Para demostrar que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, suponga que para cada número $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $b \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Para demostrar que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, suponga que para cada número $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $b \in \mathbb{N}$.

- 0 es representado por la fracción $\frac{0}{1}$.

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Para demostrar que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, suponga que para cada número $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $b \in \mathbb{N}$.

- 0 es representado por la fracción $\frac{0}{1}$.

Entonces defina la función f como:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} (a, 0, b) & a \geq 0 \\ (0, |a|, b) & a < 0 \end{cases}$$

$\mathbb{Q}$ es enumerable

Para demostrar que $\mathbb{Q}$ es enumerable, basta demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Para demostrar que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, suponga que para cada número $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible y $b \in \mathbb{N}$.

- 0 es representado por la fracción $\frac{0}{1}$.

Entonces defina la función f como:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} (a, 0, b) & a \geq 0 \\ (0, |a|, b) & a < 0 \end{cases}$$

Tenemos que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es inyectiva.

$\mathbb{N}^k$ es enumerable

Para $k \geq 2$, sea

$$\mathbb{N}^k \quad = \quad \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{k \text{ veces}}.$$

$\mathbb{N}^k$ es enumerable

Para $k \geq 2$, sea

$$\mathbb{N}^k \quad = \quad \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{k \text{ veces}}.$$

El hecho de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable es consecuencia de un teorema más general:

Teorema

Para cada $k \geq 2$ se tiene que $\mathbb{N}^k$ es enumerable.

$\mathbb{N}^k$ es enumerable

Para $k \geq 2$, sea

$$\mathbb{N}^k \quad = \quad \underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{k \text{ veces}}.$$

El hecho de que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable es consecuencia de un teorema más general:

Teorema

Para cada $k \geq 2$ se tiene que $\mathbb{N}^k$ es enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema generalizando la construcción para $k = 2$.

$\mathbb{Q}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Q}$ *es enumerable.*

$\mathbb{Q}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Q}$ *es enumerable.*

Demostración: la proposición es consecuencia de que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}^3$ y $\mathbb{N}^3 \preceq \mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ es enumerable: demostración

Proposición

$\mathbb{Q}$ es enumerable.

Demostración: la proposición es consecuencia de que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}^3$ y $\mathbb{N}^3 \preceq \mathbb{N}$.

- Puesto que $\mathbb{N}^3 \approx \mathbb{N}$.

Una propiedad útil

Teorema

Si para la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *se tiene que* $A_i \preceq \mathbb{N}$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces:*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}.$$

Una propiedad útil

Teorema

Si para la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *se tiene que* $A_i \preceq \mathbb{N}$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces:*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}.$$

Algunos conjuntos enumerables:

Una propiedad útil

Teorema

Si para la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *se tiene que* $A_i \preceq \mathbb{N}$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces:*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}.$$

Algunos conjuntos enumerables: la unión de dos conjuntos enumerables,

Una propiedad útil

Teorema

Si para la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se tiene que $A_i \preceq \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}.$$

Algunos conjuntos enumerables: la unión de dos conjuntos enumerables, la unión enumerable de conjuntos enumerables.

Una propiedad útil

Teorema

Si para la secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se tiene que $A_i \preceq \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}.$$

Algunos conjuntos enumerables: la unión de dos conjuntos enumerables, la unión enumerable de conjuntos enumerables.

Ejercicio

Demuestre el teorema considerando que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Teorema

Si A es un conjunto infinito, entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Teorema

Si A es un conjunto infinito, entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1.

2.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1. Si A es infinito, entonces por el teorema anterior existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

2.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1. Si A es infinito, entonces por el teorema anterior existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

- Concluimos que $\mathbb{N} \preceq A$ puesto que $\mathbb{N} \preceq B$ y $B \preceq A$.

2.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1. Si A es infinito, entonces por el teorema anterior existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

- Concluimos que $\mathbb{N} \preceq A$ puesto que $\mathbb{N} \preceq B$ y $B \preceq A$.

2. Por contradicción, suponga que $A \prec \mathbb{N}$ y A es infinito.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1. Si A es infinito, entonces por el teorema anterior existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

- Concluimos que $\mathbb{N} \preceq A$ puesto que $\mathbb{N} \preceq B$ y $B \preceq A$.

2. Por contradicción, suponga que $A \prec \mathbb{N}$ y A es infinito.

Por 1. sabemos que $\mathbb{N} \preceq A$.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario

1. *Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.*
2. *Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.*

Demostración: 1. Si A es infinito, entonces por el teorema anterior existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

- Concluimos que $\mathbb{N} \preceq A$ puesto que $\mathbb{N} \preceq B$ y $B \preceq A$.

2. Por contradicción, suponga que $A \prec \mathbb{N}$ y A es infinito.

Por 1. sabemos que $\mathbb{N} \preceq A$.

- Lo cual contradice la hipótesis $A \prec \mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de todos los strings construidos con los símbolos 0 y 1 es enumerable.

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de todos los strings construidos con los símbolos 0 y 1 es enumerable.
2. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. Demuestre que el conjunto de todos los strings construidos con los símbolos de Σ es enumerable.

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de todos los strings construidos con los símbolos 0 y 1 es enumerable.

2. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. Demuestre que el conjunto de todos los strings construidos con los símbolos de Σ es enumerable.

3. Utilice el resultado anterior para concluir que el conjunto de todos los programas en Python es enumerable.