IIC1253 - Inducción

Marcelo Arenas

Inducción en los números naturales

Si P es una propiedad tal que:

Caso base	:	P se cumple para 0,
Caso inductivo	:	si P se cumple para n,
		entonces P se cumple para $n+1$,

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales.

Un primer ejemplo

Demuestre usando inducción que $2^{2\cdot n} - 1$ es divisible por 3.

- Recuerde que un número natural m es divisible por 3 si existe otro número natural k tal que $m = k \cdot 3$.

Un primer ejemplo

Demuestre usando inducción que $2^{2 \cdot n} - 1$ es divisible por 3.

- Recuerde que un número natural m es divisible por 3 si existe otro número natural k tal que $m = k \cdot 3$.

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

Un primer ejemplo

Demuestre usando inducción que $2^{2\cdot n} - 1$ es divisible por 3.

- Recuerde que un número natural m es divisible por 3 si existe otro número natural k tal que $m = k \cdot 3$.

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

$$P \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2\cdot n} - 1 \text{ es divisible por } 3\}$$

Un primer ejemplo: solución

Caso base:

Un primer ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que $2^{2n} - 1 = 2^0 - 1 = 0$.

Un primer ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que $2^{2n} - 1 = 2^0 - 1 = 0$.

Sabemos que 0 es divisible por 3 puesto que $0 = 0 \cdot 3$.

Un primer ejemplo: solución

Caso inductivo:

Un primer ejemplo: solución

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir, $2^{2n} - 1$ es divisible por 3.

Un primer ejemplo: solución

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir, $2^{2n} - 1$ es divisible por 3.

- Existe k tal que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Un primer ejemplo: solución

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir, $2^{2n} - 1$ es divisible por 3.

- Existe k tal que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Tenemos que demostrar que la propiedad es cierta para $n + 1$, vale decir, $2^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 3.

Un primer ejemplo: solución

Tenemos que $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n}$.

Un primer ejemplo: solución

Tenemos que $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n}$.

Por hipótesis de inducción sabemos que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Un primer ejemplo: solución

Tenemos que $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n}$.

Por hipótesis de inducción sabemos que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Por lo tanto $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n} = k \cdot 3 + 3 \cdot 2^{2n} = (k + 2^{2n}) \cdot 3$.

Un primer ejemplo: solución

Tenemos que $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n}$.

Por hipótesis de inducción sabemos que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Por lo tanto $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n} = k \cdot 3 + 3 \cdot 2^{2n} = (k + 2^{2n}) \cdot 3$.

Concluimos que $2^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 3, puesto que $2^{2(n+1)} - 1 = k' \cdot 3$ para $k' = k + 2^{2n}$

Un primer ejemplo: solución

Tenemos que $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1 = 4 \cdot 2^{2n} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n}$.

Por hipótesis de inducción sabemos que $2^{2n} - 1 = k \cdot 3$.

Por lo tanto $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n} - 1 + 3 \cdot 2^{2n} = k \cdot 3 + 3 \cdot 2^{2n} = (k + 2^{2n}) \cdot 3$.

Concluimos que $2^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 3, puesto que $2^{2(n+1)} - 1 = k' \cdot 3$ para $k' = k + 2^{2n}$

- Con esto terminamos la demostración por inducción.

Un segundo ejemplo

Demuestre usando inducción que todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Un segundo ejemplo

Demuestre usando inducción que todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

Un segundo ejemplo

Demuestre usando inducción que todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{todo subconjunto con } n \text{ elementos tiene } 2^n \text{ subconjuntos}\}$$

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que considerar el conjunto con 0 elementos.

- Vale decir, tenemos que considerar el conjunto vacío $\emptyset$.

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que considerar el conjunto con 0 elementos.

- Vale decir, tenemos que considerar el conjunto vacío $\emptyset$.

¿Cuáles son los subconjuntos de $\emptyset$?

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que considerar el conjunto con 0 elementos.

- Vale decir, tenemos que considerar el conjunto vacío $\emptyset$.

¿Cuáles son los subconjuntos de $\emptyset$? El único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$.

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que considerar el conjunto con 0 elementos.

- Vale decir, tenemos que considerar el conjunto vacío $\emptyset$.

¿Cuáles son los subconjuntos de $\emptyset$? El único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$.

- Por lo tanto, tenemos que el número de subconjuntos del conjunto con 0 elementos es 1.

Un segundo ejemplo: solución

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que considerar el conjunto con 0 elementos.

- Vale decir, tenemos que considerar el conjunto vacío $\emptyset$.

¿Cuáles son los subconjuntos de $\emptyset$? El único subconjunto de $\emptyset$ es $\emptyset$.

- Por lo tanto, tenemos que el número de subconjuntos del conjunto con 0 elementos es 1.

Concluimos que el caso base se cumple puesto que $1 = 2^0$.

Un segundo ejemplo: solución

Caso inductivo:

Un segundo ejemplo: solución

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir, todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Un segundo ejemplo: solución

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir, todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Tenemos que demostrar que la propiedad es cierta para $n + 1$, vale decir, que todo conjunto con $n + 1$ elementos tiene 2^{n+1} subconjuntos.

Un segundo ejemplo: solución

Considere un conjunto A con $n + 1$ elementos.

Un segundo ejemplo: solución

Considere un conjunto A con $n + 1$ elementos.

- Suponemos que $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.

Un segundo ejemplo: solución

Considere un conjunto A con $n + 1$ elementos.

- Suponemos que $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.

Defina $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Un segundo ejemplo: solución

Considere un conjunto A con $n+1$ elementos.

- Suponemos que $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.

Defina $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

- Por hipótesis de inducción sabemos que B tiene 2^n subconjuntos.

Un segundo ejemplo: solución

Considere un conjunto A con $n+1$ elementos.

- Suponemos que $A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.

Defina $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

- Por hipótesis de inducción sabemos que B tiene 2^n subconjuntos.

Podemos dividir a los subconjuntos de A en dos grupos disjuntos.

(1) Los subconjuntos C de A tales que $a_{n+1} \notin C$.

(2) Los subconjuntos D de A tales que $a_{n+1} \in D$.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

- Los subconjuntos en el grupo (1) son los subconjuntos de B.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

- Los subconjuntos en el grupo (1) son los subconjuntos de B.
- El grupo (1) tiene 2^n elementos.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

- Los subconjuntos en el grupo (1) son los subconjuntos de B.
- El grupo (1) tiene 2^n elementos.

Si $D \subseteq A$ y $a_{n+1} \in D$, entonces $D = D' \cup \{a_{n+1}\}$ con $D' \subseteq B$.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

- Los subconjuntos en el grupo (1) son los subconjuntos de B.
- El grupo (1) tiene 2^n elementos.

Si $D \subseteq A$ y $a_{n+1} \in D$, entonces $D = D' \cup \{a_{n+1}\}$ con $D' \subseteq B$.

- Cada subconjunto en el grupo (2) se construye agregando el elemento a_{n+1} a un subconjunto de B.

Un segundo ejemplo: solución

Si $C \subseteq A$ y $a_{n+1} \notin C$, entonces $C \subseteq B$.

- Los subconjuntos en el grupo (1) son los subconjuntos de B.
- El grupo (1) tiene 2^n elementos.

Si $D \subseteq A$ y $a_{n+1} \in D$, entonces $D = D' \cup \{a_{n+1}\}$ con $D' \subseteq B$.

- Cada subconjunto en el grupo (2) se construye agregando el elemento a_{n+1} a un subconjunto de B.
- El grupo (2) tiene 2^n elementos.

Un segundo ejemplo: solución

Concluimos que A tiene $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

Un segundo ejemplo: solución

Concluimos que A tiene $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

- Dado que los grupos (1) y (2) tienen 2^n elementos cada uno, y estos grupos son disjuntos.

Un segundo ejemplo: solución

Concluimos que A tiene $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos.

- Dado que los grupos (1) y (2) tienen 2^n elementos cada uno, y estos grupos son disjuntos.

Con esto terminamos la demostración por inducción.

Sobre la hipótesis de inducción

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Queremos demostrar por inducción que:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

Sobre la hipótesis de inducción

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Queremos demostrar por inducción que:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

¿Cuál es la propiedad P en este caso?

$$P \quad = \quad \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1}{1-r} \right\}$$

Un intento de demostración

Caso base:

Un intento de demostración

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

Un intento de demostración

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

Como $0 < r < 1$, tenemos que $0 < 1 - r < 1$. De esto se concluye que

$$1 \quad < \quad \frac{1}{1 - r}$$

Un intento de demostración

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

Como $0 < r < 1$, tenemos que $0 < 1 - r < 1$. De esto se concluye que

$$1 \quad < \quad \frac{1}{1-r}$$

Concluimos entonces que se cumple el caso base puesto que:

$$\sum_{i=0}^{0} r^i \;=\; 1 \;\leq\; \frac{1}{1-r}$$

Un intento de demostración

Caso inductivo:

Un intento de demostración

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

Un intento de demostración

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

Tenemos que demostrar que la propiedad es cierta para $n+1$, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

Un intento de demostración

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

Un intento de demostración

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1}{1-r}$$

Un intento de demostración

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \;=\; \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \;\leq\; \frac{1}{1-r}$$

Concluimos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \;\leq\; \frac{1}{1-r} + r^{n+1}$$

Un intento de demostración

Para concluir la demostración tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{1-r} + r^{n+1} \;\leq\; \frac{1}{1-r} \tag{‡}$$

Un intento de demostración

Para concluir la demostración tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{1-r} + r^{n+1} \;\leq\; \frac{1}{1-r} \tag{‡}$$

¿Pero es posible hacer esto?

Un intento de demostración

Para concluir la demostración tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{1-r} + r^{n+1} \ \leq \ \frac{1}{1-r} \qquad (\ddagger)$$

¿Pero es posible hacer esto? No, puesto que ($\ddagger$) no es cierto dado que $0 < r$.

Un intento de demostración

Para concluir la demostración tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{1-r} + r^{n+1} \;\leq\; \frac{1}{1-r} \tag{‡}$$

¿Pero es posible hacer esto? No, puesto que (‡) no es cierto dado que $0 < r$.

Que haya fallado la demostración por inducción no significa que la propiedad sea falsa.

Un intento de demostración

Para concluir la demostración tenemos que demostrar que

$$\frac{1}{1-r} + r^{n+1} \;\leq\; \frac{1}{1-r} \qquad (\ddagger)$$

¿Pero es posible hacer esto? No, puesto que ($\ddagger$) no es cierto dado que $0 < r$.

Que haya fallado la demostración por inducción no significa que la propiedad sea falsa.

- ¿Podemos hacer algo para resolver el problema con la inducción?

Haciendo la hipótesis de inducción más fuerte

Solucionamos el problema haciendo más fuerte el teorema.

Haciendo la hipótesis de inducción más fuerte

Solucionamos el problema haciendo más fuerte el teorema.

- Lo que hace más simple la demostración puesto que tenemos una hipótesis de inducción más fuerte.

Haciendo la hipótesis de inducción más fuerte

Solucionamos el problema haciendo más fuerte el teorema.

- Lo que hace más simple la demostración puesto que tenemos una hipótesis de inducción más fuerte.

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Vamos a demostrar que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Haciendo la hipótesis de inducción más fuerte

Solucionamos el problema haciendo más fuerte el teorema.

- Lo que hace más simple la demostración puesto que tenemos una hipótesis de inducción más fuerte.

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Vamos a demostrar que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Note que de esto se concluye que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \ \leq \ \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \ \leq \ \frac{1}{1 - r}$$

La demostración correcta

Caso base:

La demostración correcta

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

La demostración correcta

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

Como $0 < r < 1$, tenemos que $0 < 1 - r < 1$. Entonces, dado que $r^{n+1} = r^1 = r$, concluimos que

$$1 \quad = \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

La demostración correcta

Caso base:

Para $n = 0$ tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad = \quad 1$$

Como $0 < r < 1$, tenemos que $0 < 1 - r < 1$. Entonces, dado que $r^{n+1} = r^1 = r$, concluimos que

$$1 \quad = \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Deducimos que se cumple el caso base puesto que:

$$\sum_{i=0}^{0} r^i \; = \; 1 \; \leq \; \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r}$$

La demostración correcta

Caso inductivo:

La demostración correcta

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

La demostración correcta

Caso inductivo:

Suponemos que la propiedad es cierta para n, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Tenemos que demostrar que la propiedad es cierta para $n + 1$, vale decir,

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

La demostración correcta

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

La demostración correcta

Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

La demostración correcta

Concluimos que

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i \quad \leq \quad \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1}$$

La demostración correcta

Concluimos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} r^i &\leq \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r}\end{aligned}$$

La demostración correcta

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} r^i &\leq \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r}
\end{aligned}
$$

La demostración correcta

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} r^i &\leq \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}
\end{aligned}$$

La demostración correcta

Concluimos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} r^i &\leq \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}(1-r)}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+1}+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r} \\
&= \frac{1-r^{n+2}}{1-r}
\end{aligned}
$$

Entonces se cumple el caso inductivo, y concluimos nuestra demostración por inducción.

Un ejercicio sobre grafos

Ejercicio

Considere los grafos no-dirigidos sin loops, vale decir, sin aristas de la forma (u, u).

Un ejercicio sobre grafos

Ejercicio

Considere los grafos no-dirigidos sin loops, vale decir, sin aristas de la forma (u, u).

- Para un grafo $G = (N, A)$ en esta clase, definimos el grado de un nodo u como la cantidad de aristas en A de la forma (u, v).

Un ejercicio sobre grafos

Ejercicio

Considere los grafos no-dirigidos sin loops, vale decir, sin aristas de la forma (u, u).

- Para un grafo $G = (N, A)$ en esta clase, definimos el grado de un nodo u como la cantidad de aristas en A de la forma (u, v).

Demuestre que para cada grafo no-dirigido G sin loops, hay un número par de nodos de grado impar.

Un ejercicio sobre grafos

Ejercicio

Considere los grafos no-dirigidos sin loops, vale decir, sin aristas de la forma (u, u).

- Para un grafo $G = (N, A)$ en esta clase, definimos el grado de un nodo u como la cantidad de aristas en A de la forma (u, v).

Demuestre que para cada grafo no-dirigido G sin loops, hay un número par de nodos de grado impar.

- Haga la demostración por inducción en el número de aristas del grafo.