Satisfacibilidad

Satisfacción de una fórmula

Definición

Una fórmula φ *es satisfacible si existe una valuación* σ *tal que* $\sigma(\varphi) = 1$.

Satisfacción de una fórmula

Definición

Una fórmula φ es satisfacible si existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

Las siguientes fórmulas son satisfacibles:

$$(p \vee q) \wedge r$$
$$p \to \neg p$$

Las siguientes fórmulas no son satisfacibles:

$$p \wedge \neg p$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

El problema de satisfacción

Problema: Dada una fórmula φ, queremos verificar si φ es satisfacible.

El problema de satisfacción

Problema: Dada una fórmula φ, queremos verificar si φ es satisfacible.

¿Puede dar un algoritmo para resolver este problema?

El problema de satisfacción

Problema: Dada una fórmula φ, queremos verificar si φ es satisfacible.

¿Puede dar un algoritmo para resolver este problema?

- ¿Cuántas operaciones realiza su algoritmo para una fórmula proposicional con n variables?

El problema de satisfacción

Problema: Dada una fórmula φ, queremos verificar si φ es satisfacible.

¿Puede dar un algoritmo para resolver este problema?

- ¿Cuántas operaciones realiza su algoritmo para una fórmula proposicional con n variables?
- ¿Puede dar un algoritmo que realice n^k operaciones para un k fijo, vale decir, un algoritmo de tiempo polinomial?

El problema de satisfacción

¿Por qué nos interesa este problema?

El problema de satisfacción

¿Por qué nos interesa este problema?

- Es un problema fundamental en ciencia de la computación.

El problema de satisfacción

¿Por qué nos interesa este problema?

- Es un problema fundamental en ciencia de la computación.
- De hecho, entender si existe un algoritmo polinomial para este problema es considerado el problema abierto más importante en ciencia de la computación.

El problema de satisfacción

¿Por qué nos interesa este problema?

- Es un problema fundamental en ciencia de la computación.
- De hecho, entender si existe un algoritmo polinomial para este problema es considerado el problema abierto más importante en ciencia de la computación.
  - ¿Ha escuchado alguna vez del problema $P = NP$?

El problema de satisfacción

¿Por qué nos interesa este problema?

- Es un problema fundamental en ciencia de la computación.
- De hecho, entender si existe un algoritmo polinomial para este problema es considerado el problema abierto más importante en ciencia de la computación.
  - ¿Ha escuchado alguna vez del problema $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$?
- Y también es considerado un problema fundamental en matemáticas.

El problema de satisfacción y el poder expresivo de la lógica proposicional

Muchos problemas pueden ser resueltos usando el problema de satisfacibilidad para la lógica proposicional.

El problema de satisfacción y el poder expresivo de la lógica proposicional

Muchos problemas pueden ser resueltos usando el problema de satisfacibilidad para la lógica proposicional.

- Tanto en ciencia de la computación y matemáticas, como en ingeniería.

El problema de satisfacción y el poder expresivo de la lógica proposicional

Muchos problemas pueden ser resueltos usando el problema de satisfacibilidad para la lógica proposicional.

- Tanto en ciencia de la computación y matemáticas, como en ingeniería.

¡La lógica proposicional es un lenguaje muy expresivo!

Modelación con lógica proposicional

Un primer ejemplo: coloración de un mapa

Queremos pintar un mapa con tres colores de manera tal que dos países limítrofes tengan colores distintos

Un primer ejemplo: coloración de un mapa

Queremos pintar un mapa con tres colores de manera tal que dos países limítrofes tengan colores distintos

Un primer ejemplo: coloración de un mapa

Queremos pintar un mapa con tres colores de manera tal que dos países limítrofes tengan colores distintos

- ¿Puede dar un algoritmo para este problema?

Un primer ejemplo: coloración de un mapa

Queremos pintar un mapa con tres colores de manera tal que dos países limítrofes tengan colores distintos

- ¿Puede dar un algoritmo para este problema?
- ¿Cuántas operaciones realiza su algoritmo para un mapa con n países?

Coloración de un mapa en lógica proposicional

Vamos a representar el problema de coloración como un problema de satisfacción de una fórmula proposicional.

Coloración de un mapa en lógica proposicional

Vamos a representar el problema de coloración como un problema de satisfacción de una fórmula proposicional.

Coloración de un mapa en lógica proposicional

Vamos a representar el problema de coloración como un problema de satisfacción de una fórmula proposicional.

- $L_{i,j}$: los países i y j son limítrofes, donde $i < j$.

Coloración de un mapa en lógica proposicional

Vamos a representar el problema de coloración como un problema de satisfacción de una fórmula proposicional.

- $L_{i,j}$: los países i y j son limítrofes, donde $i < j$.
- $C_{i,A}$: el país i se pinta de color azul.

Coloración de un mapa en lógica proposicional

Vamos a representar el problema de coloración como un problema de satisfacción de una fórmula proposicional.

- $L_{i,j}$: los países i y j son limítrofes, donde $i < j$.
- $C_{i,A}$: el país i se pinta de color azul.
- $C_{i,R}$ y $C_{i,V}$: se definen de la misma forma para los colores rojo y verde.

Coloración de un mapa en lógica proposicional

¿Qué fórmulas necesitamos incluir para representar el problema de coloración?

Coloración de un mapa en lógica proposicional

¿Qué fórmulas necesitamos incluir para representar el problema de coloración?

- A cada país i se le tiene que asignar un color:

Coloración de un mapa en lógica proposicional

¿Qué fórmulas necesitamos incluir para representar el problema de coloración?

- A cada país i se le tiene que asignar un color:

$$C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}$$

Coloración de un mapa en lógica proposicional

¿Qué fórmulas necesitamos incluir para representar el problema de coloración?

- A cada país i se le tiene que asignar un color:

$$C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}$$

- No se puede asignar más de un color a un país i:

Coloración de un mapa en lógica proposicional

¿Qué fórmulas necesitamos incluir para representar el problema de coloración?

- A cada país i se le tiene que asignar un color:

$$C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}$$

- No se puede asignar más de un color a un país i:

$$(\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,R}) \wedge (\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,V} \vee \neg C_{i,R})$$

Coloración de un mapa en lógica proposicional

- Si los países i y j son limítrofes $(i < j)$, entonces no pueden tener el mismo color:

Coloración de un mapa en lógica proposicional

- Si los países i y j son limítrofes $(i < j)$, entonces no pueden tener el mismo color:

$$
\begin{aligned}
&(L_{i,j} \to \neg(C_{i,A} \wedge C_{j,A})) \wedge \\
&\qquad (L_{i,j} \to \neg(C_{i,R} \wedge C_{j,R})) \wedge \\
&\qquad\qquad (L_{i,j} \to \neg(C_{i,V} \wedge C_{j,V}))
\end{aligned}
$$

Coloración de un mapa en lógica proposicional

- Si los países i y j son limítrofes ($i < j$), entonces no pueden tener el mismo color:

$$(L_{i,j} \to \neg(C_{i,A} \land C_{j,A})) \land$$
$$(L_{i,j} \to \neg(C_{i,R} \land C_{j,R})) \land$$
$$(L_{i,j} \to \neg(C_{i,V} \land C_{j,V}))$$

- Si los países i y j son limítrofes ($i < j$) entonces se debe agregar la fórmula $L_{i,j}$.

La fórmula completa para el mapa de América del Sur

La fórmula completa para el mapa de América del Sur

$$\bigwedge_{i=0}^{12} \Big((C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,R}) \wedge$$

$$(\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,V} \vee \neg C_{i,R}) \Big) \;\wedge$$

La fórmula completa para el mapa de América del Sur

$$\bigwedge_{i=0}^{12}\Big((C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,R}) \wedge$$

$$(\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,V} \vee \neg C_{i,R})\Big) \ \wedge$$

$$\bigwedge_{i=0}^{12}\ \bigwedge_{j=i+1}^{12}\Big((L_{i,j} \rightarrow \neg(C_{i,A} \wedge C_{j,A})) \wedge (L_{i,j} \rightarrow \neg(C_{i,R} \wedge C_{j,R})) \wedge$$

$$(L_{i,j} \rightarrow \neg(C_{i,V} \wedge C_{j,V}))\Big) \ \wedge$$

La fórmula completa para el mapa de América del Sur

$$\bigwedge_{i=0}^{12}\Big((C_{i,A} \vee C_{i,R} \vee C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,R}) \wedge$$

$$(\neg C_{i,A} \vee \neg C_{i,V}) \wedge (\neg C_{i,V} \vee \neg C_{i,R})\Big) \;\wedge$$

$$\bigwedge_{i=0}^{12}\;\bigwedge_{j=i+1}^{12}\Big((L_{i,j} \to \neg(C_{i,A} \wedge C_{j,A})) \wedge (L_{i,j} \to \neg(C_{i,R} \wedge C_{j,R})) \wedge$$

$$(L_{i,j} \to \neg(C_{i,V} \wedge C_{j,V}))\Big) \;\wedge$$

$$\Big(L_{0,1} \wedge L_{0,3} \wedge L_{0,4} \wedge L_{0,11} \wedge L_{0,12} \wedge L_{1,2} \wedge L_{1,4} \wedge L_{2,4} \;\wedge$$

$$L_{2,5} \wedge L_{2,6} \wedge L_{3,12} \wedge L_{4,6} \wedge L_{4,11} \wedge L_{5,11} \wedge L_{6,11} \wedge L_{7,8} \;\wedge$$

$$L_{7,10} \wedge L_{7,11} \wedge L_{8,9} \wedge L_{8,11} \wedge L_{9,11} \wedge L_{10,11} \wedge L_{10,12} \wedge L_{11,12}\Big)$$

SAT solvers

¿Y qué hacemos una vez que hemos representado nuestro problema en lógica proposicional?

SAT solvers

¿Y qué hacemos una vez que hemos representado nuestro problema en lógica proposicional?

Utilizamos un programa para verificar si una fórmula proposicional es satisfacible: un **SAT solver**

SAT solvers

¿Y qué hacemos una vez que hemos representado nuestro problema en lógica proposicional?

Utilizamos un programa para verificar si una fórmula proposicional es satisfacible: un **SAT solver**

- Esta es una tecnología que funciona muy bien, y que ha avanzado mucho en los últimos años.

SAT solvers

¿Y qué hacemos una vez que hemos representado nuestro problema en lógica proposicional?

Utilizamos un programa para verificar si una fórmula proposicional es satisfacible: un **SAT solver**

- Esta es una tecnología que funciona muy bien, y que ha avanzado mucho en los últimos años.

Usemos el SAT solver **Z3** para trata de pintar el mapa de América del Sur.

Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Paréntesis de teoría de conjuntos

Dados conjuntos A y B:

$$A \times B \quad = \quad \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Paréntesis de teoría de conjuntos

Dados conjuntos A y B:

$$A \times B \quad = \quad \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4)\} \\ B \times A &= \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\} \end{aligned}$$

Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Paréntesis de teoría de conjuntos

Dados conjuntos A y B:

$$A \times B \quad = \quad \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4)\} \\ B \times A &= \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\} \end{aligned}$$

Note que $A \times B \neq B \times A$

Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Un grafo es una tupla $G = (N, A)$, donde:

- N es un conjunto de nodos
- $A \subseteq (N \times N)$ es un conjunto de arcos

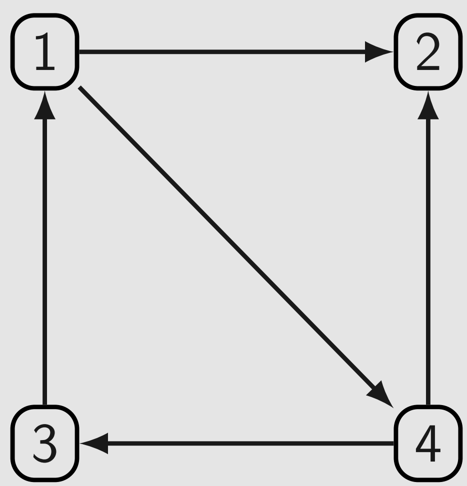
Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Un grafo es una tupla $G = (N, A)$, donde:

- N es un conjunto de nodos
- $A \subseteq (N \times N)$ es un conjunto de arcos

Ejemplo

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1,2), (1,4), (3,1), (4,2), (4,3)\}$:



Un segundo ejemplo: problemas en grafos

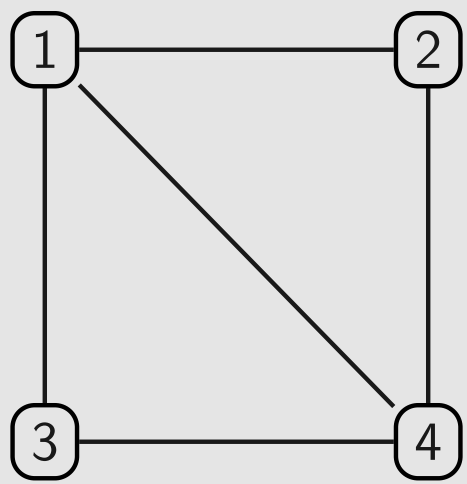
Un grafo $G = (N, A)$ es no-dirigido si para cada $(u, v) \in A$, se tiene que $(v, u) \in A$.

Un segundo ejemplo: problemas en grafos

Un grafo $G = (N, A)$ es no-dirigido si para cada $(u, v) \in A$, se tiene que $(v, u) \in A$.

Ejemplo

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (3, 1), (1, 3),$
$(4, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 4)\}$:



El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Un grafo no-dirigido $G = (N, A)$ es k-coloreable si existe una función $f : N \to \{1, \ldots, k\}$ tal que:

$$\text{Para cada } (u, v) \in A\text{: } f(u) \neq f(v)$$

Vale decir, nodos adyacentes tienen que ser pintados con colores distintos.

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

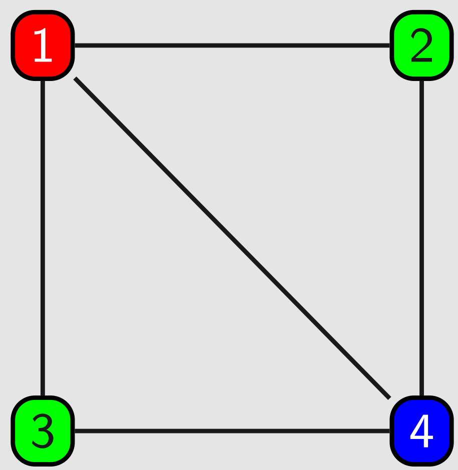
Un grafo no-dirigido $G = (N, A)$ es k-coloreable si existe una función $f : N \to \{1, \ldots, k\}$ tal que:

$$\text{Para cada } (u, v) \in A\text{: } f(u) \neq f(v)$$

Vale decir, nodos adyacentes tienen que ser pintados con colores distintos.

Ejemplo

Una 3-coloración:



Mapas y grafos no dirigidos

¿Cómo se puede representar un mapa como un grafo no dirigido?

- De manera tal que el mapa es 3-coloreable si y sólo si el grafo es 3-coloreable.

Mapas y grafos no dirigidos

¿Cómo se puede representar un mapa como un grafo no dirigido?

- De manera tal que el mapa es 3-coloreable si y sólo si el grafo es 3-coloreable.

¿Todo grafo no dirigido corresponde a un mapa?

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Vamos a mostrar como codificar el problema de k-coloración de un grafo como un problema de satisfacción de una fórmula.

- Es una generalización del problema de 3-coloración para mapas.

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Supongamos que $G = (N, A)$, donde $N = \{1, \ldots, n\}$.

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Supongamos que $G = (N, A)$, donde $N = \{1, \dots, n\}$.

Para codificar el problema de k-coloración de G consideramos las siguientes variables proposicionales:

$E_{i,j}$	:	indica que hay un arco de i a j, donde $i, j \in \{1, \dots, n\}$
$C_{i,d}$	:	indica que el color asignado al nodo i es d, donde $i \in \{1, \dots, n\}$ y $d \in \{1, \dots, k\}$

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Utilizamos las siguientes fórmulas para codificar el problema:

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Utilizamos las siguientes fórmulas para codificar el problema:

- Fórmula que representa G:

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Utilizamos las siguientes fórmulas para codificar el problema:

- Fórmula que representa G:

$$\bigwedge_{(i,j)\in A} E_{i,j}$$

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Utilizamos las siguientes fórmulas para codificar el problema:

- Fórmula que representa G:

$$\bigwedge_{(i,j)\in A} E_{i,j}$$

- Fórmula que indica que cada nodo debe tener asociado un único color:

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

Utilizamos las siguientes fórmulas para codificar el problema:

- Fórmula que representa G:

$$\bigwedge_{(i,j)\in A} E_{i,j}$$

- Fórmula que indica que cada nodo debe tener asociado un único color:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{d=1}^{k} \left(C_{i,d} \wedge \bigwedge_{e\in\{1,\ldots,k\}\,:\,e\neq d} \neg C_{i,e} \right)$$

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

- Fórmula que indica que dos nodos adyacentes deben ser pintados con colores distintos:

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

- Fórmula que indica que dos nodos adyacentes deben ser pintados con colores distintos:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{\ell=1}^{k} \Big((E_{i,j} \wedge C_{i,\ell}) \rightarrow \neg C_{j,\ell} \Big)$$

El problema de satisfacción y la coloración de grafos

- Fórmula que indica que dos nodos adyacentes deben ser pintados con colores distintos:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{\ell=1}^{k} \Big((E_{i,j} \wedge C_{i,\ell}) \to \neg C_{j,\ell} \Big)$$

Si la fórmula φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, entonces:

G es k-coloreable si y sólo si φ es satisfacible

El problema de satisfacción y la existencia de cliques

Otro problema sobre grafos: existencia de cliques

- Este es un problema muy útil cuando analizamos redes sociales

El problema de satisfacción y la existencia de cliques

Otro problema sobre grafos: existencia de cliques

- Este es un problema muy útil cuando analizamos redes sociales

Dados grafos $G = (N, A)$, $G' = (N', A')$ tales que $N' \subseteq N$ y $A' \subseteq A$, y dado un número k, decimos que G' es un clique de G de tamaño k si:

- N' contiene k elementos
- Para cada $u \in N'$ y $v \in N'$ tales que $u \neq v$, se tiene que $(u, v) \in A'$

El problema de satisfacción y la existencia de cliques

Problema a resolver: Dado G y k, determinar si existe un clique de tamaño k

El problema de satisfacción y la existencia de cliques

Problema a resolver: Dado G y k, determinar si existe un clique de tamaño k

Ejercicio

Muestre como codificar este problema usando el problema de satisfacción.

Tautologías y contradicciones

Tautologías

Definición

Una fórmula φ *es una tautología si para toda valuación* σ *se tiene que* $\sigma(\varphi) = 1$*.*

Tautologías

Definición

Una fórmula φ es una tautología si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

Las siguientes fórmulas son tautologías:

$$p \vee \neg p$$

$$p \leftrightarrow p$$

Contradicciones

Definición

Una fórmula φ *es una contradicción si para toda valuación* σ *se tiene que* $\sigma(\varphi) = 0$.

Contradicciones

Definición

Una fórmula φ es una contradicción si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 0$.

Ejemplo

Las siguientes fórmulas son contradicciones:

$$p \wedge \neg p$$

$$p \leftrightarrow \neg p$$

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad

Tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad

Tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una fórmula φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad

Tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una fórmula φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.
- Una fórmula φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ no es satisfacible.

Tautologías, contradicciones y satisfacibilidad

Tenemos las siguientes relaciones entre los conceptos de tautología, contradicción y satisfacibilidad:

- Una fórmula φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ es una contradicción.
- Una fórmula φ es una tautología si y sólo si $\neg\varphi$ no es satisfacible.
- Una fórmula φ es una contradicción si y sólo si φ no es satisfacible.

Ejercicios

1. ¿Cómo se ve la tabla de verdad de una tautología?
2. ¿Cómo se ve la tabla de verdad de una contradicción?
3. ¿Cómo se ve la tabla de verdad de una fórmula satisfacible?

Tautologías y la noción de equivalencia

Habíamos dicho que dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

Tautologías y la noción de equivalencia

Habíamos dicho que dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

- Esto es lo mismo que decir que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ para cada valuación σ.

Tautologías y la noción de equivalencia

Habíamos dicho que dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

- Esto es lo mismo que decir que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ para cada valuación σ.

¿Es posible tener dos fórmulas equivalentes sin las mismas variables proposicionales?

Tautologías y la noción de equivalencia

Habíamos dicho que dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

- Esto es lo mismo que decir que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ para cada valuación σ.

¿Es posible tener dos fórmulas equivalentes sin las mismas variables proposicionales?

- Sí, las fórmulas $p \vee \neg p$ y $q \vee \neg q$ son equivalentes.

Tautologías y la noción de equivalencia

Habíamos dicho que dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales.

- Esto es lo mismo que decir que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ para cada valuación σ.

¿Es posible tener dos fórmulas equivalentes sin las mismas variables proposicionales?

- Sí, las fórmulas $p \vee \neg p$ y $q \vee \neg q$ son equivalentes.
- Lo anterior se puede verificar considerando todas la valuaciones sobre las variables p y q.

Tautologías y la noción de equivalencia

Podemos dar una definición alternativa de la noción de equivalencia usando la noción de tautología:

Tautologías y la noción de equivalencia

Podemos dar una definición alternativa de la noción de equivalencia usando la noción de tautología:

α y β son equivalentes si y sólo si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.

Tautologías y la noción de equivalencia

Podemos dar una definición alternativa de la noción de equivalencia usando la noción de tautología:

α y β son equivalentes si y sólo si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.

Ejercicio

Demuestre que las definiciones anteriores coinciden.