IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

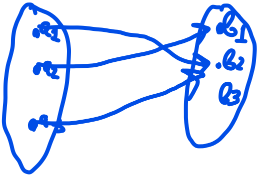
DCC UC

20.10.2025

Hoy...

Funciones: imagen y preimagen, inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, composición, función inversa.

Definición



$(a, b) \in$ $f \subseteq A \times B$

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Definición

Definición

Una relación f de A en B us una función si para todo $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Terminología:

- $f : A \to B \iff$ "f una función de A en B"
- $(a, b) \in f \iff afb \iff b = f(a)$
- b es el valor o el imágen de a en f.
- $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} : A \to A$ la función identidad.

Ejemplos

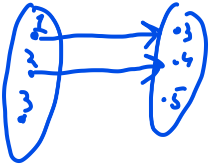
Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\}\colon A \to B$?

$(3, \cdot)$? — no.



Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \to B$?

- $\{(1, 3), (2, \underline{4}), (3, 3), (2, \underline{5})\}: A \to B$?

  no.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

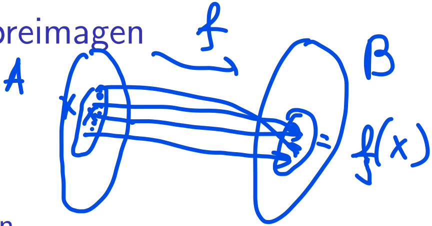
- $\{(1, 3), (2, 4)\} : A \to B$?
- $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\} : A \to B$?
- $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} : A \to B$? – Sí

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\} \colon A \to B$?
- $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\} \colon A \to B$?
- $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \colon A \to B$?
- $\{(1, 4), (2, 3), (3, \underset{\notin B}{\underline{2}})\} \colon A \to B$? ind.

Imagen y preimagen



Definición

Sean A y B dos conjuntos y $f : A \to B$. Entonces,

- *si $X \subseteq A$, él imagen de X es el conjunto $f(X) = \{b \in \cancel{A}\, B \mid \exists x \in X \;\; b = f(x)\}$*
- *si $Y \subseteq B$, él preimagen de Y es el conjunto $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.*
- *si $b \in B$, denotamos $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$.*

Ejercicios con imagen y preimagen

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ *para todo* $x \in \mathbb{Z}$. *Definir* $f(\{1,2,3,4\})$ *y* $f^{-1}(\{1,2,3,4\})$.

$f(\{1,2,3,4\}) = \{1,4,9,16\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$

$f^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{1,-1,2,-2\} = f^{-1}(\{1,4\})$

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $f(x)$ *es el mínimo número primo mayor que* x^2, *para todo* $x \in \mathbb{N}$.

¿$19 \in f(\mathbb{N})$*?*

$f(3) = 11$

$f(4) = 17$ $\quad f(5) = 29$

Imagen y $\cap, \cup$

Ejercicio

Sea $f: A \to B$ *y* $X_1, X_2 \subseteq A$*. ¿Verdadero o falso?*

a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

b) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

Preimagen y $\cap, \cup$

Ejercicio

Sea $f : A \to B$ *y* $Y_1, Y_2 \subseteq B$. *¿Verdadero o falso?*

a) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

b) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

Funciones inyectivas y sobreyectivas

Definición

Una función $f : A \to B$ se llama

- **inyectiva** *si no existen $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ tal que $f(a_1) = f(a_2)$*
- **sobreyectiva** *si $f(A) = B$.*
- **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

	¿inyectiva?	¿sobreyectiva?
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$		
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f((x, y)) = xy$		

Composición

Definición

Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Entonces, la composición de f y g es la función

$$g \circ f\colon A \to C, \qquad g \circ f(a) = g(f(a)) \ \forall a \in A.$$

Composición

Definición

Sean $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Entonces, la composición de f y g es la función

$$g \circ f\colon A \to C, \qquad g \circ f(a) = g(f(a)) \ \forall a \in A.$$

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8\}$

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 4)\}, \qquad g = \{(4, 8), (5, 7), (6, 7)\}$$

$$g \circ f =$$

Composición de funciones inyectivas

Proposición

Sean $f: A \to B, g: B \to C$ *dos funciones inyectivas. Entonces,* $g \circ f$ *es inyectiva.*

Composición de funciones sobreyectivas

Proposición

Sean $f : A \to B, g : B \to C$ *dos funciones sobreyectivas. Entonces,* $g \circ f$ *es sobreyectiva.*

Función inversa

Definición

Sea $f\colon A \to B$. Entonces, $g\colon B \to A$ es la **función inversa** *de f si $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.*

Teorema

a) *Una función $f\colon A \to B$ es biyectiva si y sólo si tiene una función inversa;*

b) *Si una función $f\colon A \to B$ es biyectiva, entonces su función inversa es única y también es biyectiva.*

Inyectiva vs. sobreyectiva

Proposición

Sean A, B dos conjuntos no vacios. Entonces, existe una función $f: A \rightarrow B$ inyectiva si y sólo si existe una función $g: B \rightarrow A$ sobreyectiva.

Principio de palomar

Informalmente: si $n+1$ palomas se distribuyen en n palomares, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Teorema (Principio de palomar)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, no existe una $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ inyectiva

Ejemplo principio palomar

Ejercicio

Demuestra que en cualquier grupo de personas siempre habrá dos personas que hayan dado el mismo número de apretones de mano dentro del grupo.

¡Gracias!