Unidad III: Teoría de conjuntos

Teoría de conjuntos: Russell, separación y más.

Clase 09 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Si tenemos una "propiedad" P, entonces

$$\{a \mid a \text{ satisface la propiedad } P\}$$

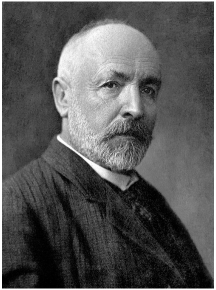
debería ser un conjunto.

Ejemplos:

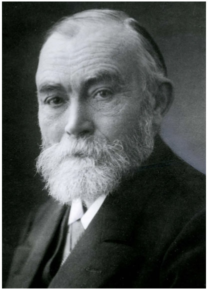
- $\{n \mid n \text{ es un número natural par}\}$.
- $\{a \mid a \text{ es un conjunto con exactamente dos elementos}\}$.

¿Qué axiomas agregamos para capturar esto?

Un poco de historia...



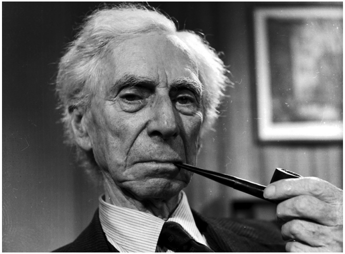
Georg Cantor (1845 - 1918)



Gottlob Frege (1848 - 1925)

Cantor (1874):
Da inicio a la teoría (informal) de conjuntos moderna.

Frege (1893-1903):
Sistema formal para la aritmética, basado en lógica y teoría de conjuntos.



Bertrand Russell (1872 - 1970)

Paradoja de Russell (1901):

El sistema de Frege es inconsistente.

El sistema de Frege permitía definiciones por comprensión,
sin **ninguna** restricción.

Para cada fórmula $\varphi(x)$, el siguiente conjunto estaba bien definido:

$$A = \{c \mid \varphi(c)\}.$$

Ejemplos:

- La fórmula $\varphi(x) = \forall y \neg(y \in x)$ define el conjunto:
$$A = \{c \mid \forall y \neg(y \in c)\} = \{c \mid c \text{ no tiene elementos}\} = \{\varnothing\}.$$
- La fórmula $\varphi_1(x) = \exists y \left(y \in x\right) \wedge \forall y_1 \forall y_2 \big((y_1 \in x \wedge y_2 \in x) \rightarrow y_1 = y_2\big)$ define el conjunto:
$$A_1 = \{c \mid \varphi_1(c)\} = \{c \mid c \text{ tiene un solo elemento}\}.$$
- La fórmula $\varphi_2(x) = \exists y_1 \exists y_2 \left(y_1 \in x \wedge y_2 \in x \wedge \neg(y_1 = y_2)\right)$ define el conjunto:
$$A_2 = \{c \mid \varphi_2(c)\} = \{c \mid c \text{ tiene al menos dos elementos}\}.$$

Considere el conjunto A_1 anterior:

$$A_1 = \{c \mid c \text{ tiene un solo elemento}\} = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots\}.$$

¿Se tiene que $A_1 \in A_1$? **NO!**

Considere el conjunto A_2 anterior:

$$A_2 = \{c \mid c \text{ tiene al menos dos elementos}\} = \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}.$$

¿Se tiene que $A_2 \in A_2$? **SI!**

Definamos el siguiente conjunto, usando $\psi(x) = \neg(x \in x)$:

$$R = \{c \mid \neg(c \in c)\} = \{c \mid c \notin c\}.$$

Tenemos que $A_1 \in R$ y $A_2 \notin R$.

¿Cuál es la contradicción?

Se debe cumplir uno de los dos casos: $R \in R$ o $R \notin R$.

¿Cuál de los dos casos se cumple?

Si $R \in R$, entonces R cumple la propiedad ψ que define a R.
Esto implica que $R \notin R$. **Contradicción.**

Si $R \notin R$, entonces R no cumple la propiedad ψ que define a R.
Esto implica que $R \in R$. **Contradicción.**

Debemos restringir las definiciones por comprensión.

Idea: En vez de permitir definiciones de la forma $\{c \mid \varphi(c)\}$,
sólo permitiremos definiciones de la forma:

$$S = \{c \mid c \in A \wedge \varphi(c)\}$$

donde A es un conjunto (bien definido).

Además, la propiedad $\varphi(x)$ podrá depender de más variables, no solo x.

Las definiciones **deben** estar "protegidas" por un conjunto A.

Axioma de separación (o especificación):

Sea $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ una fórmula. Si $A, B_1, \ldots, B_k$ son conjuntos, entonces existe un conjunto S tal que:

$$S = \{c \mid c \in A \land \varphi(c, B_1, \ldots, B_k)\}.$$

Ejemplos:

- Para $\varphi_2(x) = \exists y_1 \exists y_2 \big(y_1 \in x \ \land\ y_2 \in x \ \land \neg(y_1 = y_2)\big)$ y un conjunto A, el siguiente conjunto S existe:

  $$S = \{c \mid c \in A \land \varphi_2(c)\} = \{c \mid c \in A \land c \text{ tiene al menos dos elementos}\}.$$

- Para $\varphi(x, y_1) = x \in y_1$ y conjuntos A, B, el siguiente conjunto S existe:

  $$S = \{c \mid c \in A \land \varphi(c, B)\} = \{c \mid c \in A \land c \in B\}.$$

  ¿A qué corresponde S?

- Para $\psi(x, y_1) = x \notin y_1$ y conjuntos A, B, el siguiente conjunto S existe:

  $$S = \{c \mid c \in A \land \psi(c, B)\} = \{c \mid c \in A \land c \notin B\}.$$

  ¿A qué corresponde S?

Definición:

Sean A y B conjuntos. Definimos los siguientes conjuntos:

- **Unión:** $A \cup B$ contiene los elementos que están en A o en B.

$$A \cup B = \{c \mid c \in A \vee c \in B\}.$$

- **Intersección:** $A \cap B$ contiene los elementos que están en A y en B.

$$A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\}.$$

- **Diferencia:** $A \setminus B$ contiene los elementos que están en A y no en B.

$$A \setminus B = \{c \mid c \in A \wedge c \notin B\}.$$

Todos estos conjuntos están bien definidos en nuestra teoría. (¿por qué?)

Ejemplos:

Considere $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, \{a\}\}$.

- $A \cup B = \{a, b, \{a\}\}$.
- $A \cap B = \{b\}$.
- $A \setminus B = \{a\}$.
- $B \setminus A = \{\{a\}\}$.

Sean A, B y C conjuntos. Se cumple lo siguiente:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad \text{(asociatividad)}$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{(conmutatividad)}$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A \qquad \text{(idempotencia)}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \text{(distributividad)}$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \qquad \text{(De Morgan)}$$

Ejercicio: demuestre las propiedades.

Sean A y B conjuntos. Se cumple lo siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
A \subseteq A \cup B & B \subseteq A \cup B \\
A \cap B \subseteq A & A \cap B \subseteq B \\
A \cup \varnothing = A & \\
A \cap \varnothing = \varnothing &
\end{array}
$$

Ejercicio: demuestre las propiedades.

También permitiremos uniones e intersecciones generalizadas.

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos.

$$a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \text{ si y sólo si } \textbf{existe } i \text{ tal que } a \in A_i.$$

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, donde $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos.

$$a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ \text{ si y sólo si } \textbf{para todo } i \text{ se tiene } a \in A_i.$$

También permitiremos uniones e intersecciones generalizadas.

Ejemplo:

Sean $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{e, d, b\}$ y $A_4 = \{b, e\}$.

- $\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \{a, b, c, d, e\}$.
- $\bigcap_{i=1}^{4} A_i = \{b\}$.

Conjunto potencia

Axioma del conjunto potencia:

Si A es un conjunto, entonces existe un conjunto $\mathcal{P}(A)$ cuyos elementos son todos los subconjuntos de A.

Notación: A $\mathcal{P}(A)$ le llamamos el **conjunto potencia** de A.

Ejemplos:

- Si $A = \{a, b, c\}$, entonces:
$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$
- Si $A = \{\varnothing\}$, entonces:
$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$
- Si $A = \varnothing$, entonces:
$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}.$$