PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 5 - Lógica de Predicados

5 de septiembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach Caetano Borges

Resumen

¿Qué es la lógica de predicados?

La lógica proposicional se basa en proposiciones. Una proposición es una afirmación que puede ser verdadera (1) o falsa (0).

Por el otro lado, la lógica de predicados se basa en predicados. Un predicado $P(x)$ es una afirmación abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado. En otras palabras un predicado sobre un conjunto D es una proposición parametrizada por elementos del conjunto D.

La lógica de predicados tiene varios componentes clave:

- Dominio: todos los predicados están restringidos a un dominio de evaluación (enteros, reales, símbolos).
- Valuación: la valuación $P(a)$ es el valor de verdad del predicado P(x) en a.
- Predicado n-ario $P(x_1, ..., x_n)$: es una afirmación con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Usaremos operadores lógicos para construir nuestros predicados $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Paréntesis: ( )
- Predicado binario $=$
- Predicados n-arios sobre un dominio
- Variables $x, y, z, \cdot$

- Cuantificadores $\forall$ y $\exists$
- **Fórmulas:** Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

  Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.

  Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.

  Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.

  Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\, \varphi)$ y $(\forall x\, \varphi)$ son fórmulas.

- **Oración** es una fórmula donde todas las variables están cuantificadas
- **Interpretadores:** Dado que cada sección tiene su propia sintaxis para este apartado mostraremos las tres notaciones usadas en el curso:

  Sección 1:

  Definición

  Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ un vocabulario, donde la aridad de R_i es n_i; para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

  Una interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ es una tupla $\langle A, R_1^{\mathcal{I}}, \ldots, R_k^{\mathcal{I}} \rangle$ tal que:
  - A es el dominio $\mathcal{I}$, el cual es no vacío.
  - $R_i^{\mathcal{I}} \subseteq A^{n_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

  Sección 2:

  Definición

  Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** $\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Se explicita

  Sección 3:

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ un vocabulario.
Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para $\mathcal{L}$ se compone de:

- un dominio $\mathcal{I}(dom)$,
- para cada nombre P_i, un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$. (de la misma aridad.)

- Finalmente, definimos una nocion de evaluacion

Definición

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula sobre $\mathcal{L}$ con n variables libres y sea $\mathcal{I}$ una interpretación para $\mathcal{L}$.
La **evaluación** de φ sobre $\mathcal{I}$ es el **predicado n-ario** que se obtiene de la siguiente manera:

- Reemplazar cada nombre de predicado $P \in \mathcal{L}$, por el predicado $\mathcal{I}(P)$ sobre el dominio $\mathcal{I}(dom)$.
- Evaluar φ como si fuera un **predicado compuesto**.

Notación

- La evaluación de φ sobre $\mathcal{I}$ se denota por $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}$.
- Dado valores $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{I}(dom)$, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}}(a_1, \ldots, a_n)$ toma valor 0 o 1.

- Equivalencia lógica: Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que φ y ψ son lógicamente equivalentes:

$$\varphi \equiv \psi$$

si para toda interpretación I y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple:

$$I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y solo si } I \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$$

- Consecuencia lógica: Una fórmula φ es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \models \varphi$$

si para toda interpretación I y $a_1, \ldots, a_n$ en $I(\text{dom})$ se cumple que: si $I \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$ entonces $I \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

1. Consecuencia lógica

Dado un conjunto Σ de oraciones (fórmulas sin variables libres) en lógica de predicados, diremos que Σ es *satisfacible* si existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Sigma$. En caso contrario, decimos que Σ es *inconsistente*.

Dados un conjunto de oraciones Σ y una oración φ, demuestre que

$$\Sigma \models \varphi \text{ si y solo si } \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

2. Cuantificadores

Definimos el cuantificador de existencia y unicidad ($\exists!$) de la siguiente manera:

$\exists! x P(x)$ es verdadero si existe solamente un elemento x del dominio tal que se cumple $P(x)$.

Defina formalmente $\exists! x P(x)$ usando los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ y determine si las siguientes fórmulas bajo los dominios dados son verdaderas, bajo las definiciones intuitivas de los predicados presentes:

1. Dominio = $\mathbb{N}$. $\exists! x(x + 3 = 5)$
2. Dominio = $\mathbb{N}$. $\exists! x(x \cdot x = 4)$
3. Dominio = $\mathbb{Z}$. $\exists! x \forall y(x + y = 0 \to y = -x)$
4. Dominio = $\mathbb{N}$. $\exists! x \forall y(x \cdot y = x \to y = 1)$
5. Dominio = $\mathbb{N}$. $\exists! x \neg\forall y(x \cdot y = x \to y = 1)$

3. Construcción de fórmulas

En esta pregunta tratamos con la lógica de primer orden. Asuma que nuestro vocabulario μ contiene un solo predicado, la relación R de aridad tres (relación ternaria).

1. Sea A un dominio. Decimos que una relación ternaria $R \subseteq A \times A \times A$ sobre A codifica una función binaria, si para todo par $(a, b) \in A \times A$ existe un, y solo un, $c \in A$ tal que $(a, b, c) \in R$. Escriba una fórmula φ sobre el vocabulario μ, tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ sobre μ se cumple lo siguiente:

   $$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = 1 \iff \mathcal{I}(R) \text{ codifica una función binaria}$$

   Recuerde que $\mathcal{I}(R)$ es la interpretación de R en $\mathcal{I}$.

2. Construya una fórmula ψ sobre el vocabulario μ, tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ sobre μ, donde $\mathcal{I}(R)$ codifica una función binaria $f : A \times A \to A$, se cumple lo siguiente:

   $$[\![\psi]\!]_{\mathcal{I}} = 1 \iff f \text{ es asociativa}$$