Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Tarea 6

03 de Noviembre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Pregunta 1

Sea A un conjunto y $f : A \to A$ una función. Demuestre lo siguiente:

(a) (1.0 pts) Si $f \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

(b) (1.0 pts) Si $f \circ f$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva.

Sean A y B conjuntos y sea $f : A \to B$ una función. Para cada $X \subseteq A$ definimos su *imagen* $f(X)$ como:

$$f(X) = \{f(a) \in B \mid a \in X\}.$$

Similarmente, para cada $Y \subseteq B$ definimos su *preimagen* $f^{-1}(Y)$ como:

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Demuestre lo siguiente:

(c) (2.0 pts) f es inyectiva si y sólo si para cada $X_1, X_2 \subseteq A$ se tiene que $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

(d) (2.0 pts) f es sobreyectiva si y sólo si para cada $Y \subseteq B$ se tiene que $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Solución

(a) Basta demostrar que $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in A$. Efectivamente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $f \circ f(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = f \circ f(x_2)$. Ya que $f \circ f$ es inyectiva, eso nos da $x_1 = x_2$.

(b) Basta demostrar que para cada $y \in A$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Ya que $f \circ f$ es sobreyectiva, para todo $y \in A$ existe $x_1 \in A$ tal que $y = f \circ f(x_1) = f(f(x_1))$. Para $x = f(x_1)$, obtenemos $y = f(x)$.

(c) Primero demostramos que si f es inyectiva, entonces $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ para cada $X_1, X_2 \subseteq A$. En efecto, sea $y \in f(X_1 \cap X_2)$. Entonces, $y = f(x)$ para algún $x \in X_1 \cap X_2$. Tenemos $x \in X_1, x \in X_2$, así que $y \in f(X_1)$ y $y \in f(X_2)$, es decir, $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Por el otro lado, sea $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$. Entonces, $y = f(x_1)$ para algún $x_1 \in X_1$ y $y = f(x_2)$ para algún $x_2 \in X_2$. Ya que f es inyectiva, $y = f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2 = x \in X_1 \cap X_2$. Entonces, $y = f(x)$ para algún $x \in X_1 \cap X_2$, es decir $y \in f(X_1 \cap X_2)$.

Ahora demostramos que si $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ para cada $X_1, X_2 \subseteq A$, entonces f es inyectiva. Hay que mostrar que $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in A$ tal que $x_1 \neq x_2$. Efectivamente, definimos $X_1 = \{x_1\}, X_2 = \{x_2\}$. Ya que $x_1 \neq x_2$, tenemos $X_1 \cap X_2 = \{x_1\} \cap \{x_2\} = \varnothing$, así que $f(X_1 \cap X_2) = \varnothing = f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\}$. Luego, de $\{f(x_1)\} \cap \{f(x_2)\} = \varnothing$ obtenemos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(d) Primero demostramos que si f es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(Y)) = Y$ para todo $Y \subseteq B$. Efectivamente, sea $y \in f(f^{-1}(Y))$. Entonces, $y = f(x)$ para algún $x \in f^{-1}(Y)$. Como $x \in f^{-1}(Y)$, tenemos que $f(x) \in Y$. Por lo tanto, $f(x) = y \in Y$. Por el otro lado, sea $y \in Y$. Ya que f es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Dado que $y \in Y$, tenemos que $x \in f^{-1}(Y)$, así que $y = f(x) \in f(f^{-1}(Y))$.

Ahora, demostramos que si $f(f^{-1}(Y)) = Y$ para todo $Y \subseteq B$, entonces f es sobreyectiva. Para todo $y \in B$ hay que mostrar que existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. En otras palabras, tenemos que mostrar que $f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$. Efectivamente, tenemos que $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$ no es vacío, así que $f^{-1}(\{y\})$ tampoco es vacío.

Pregunta 2

Sea $\preceq$ un orden total sobre un conjunto infinito A tal que para todo $a \in A$, el conjunto $\{x \in A \mid x \preceq a\}$ es finito. Demuestre que A es enumerable.

Solución

Ya que A es infinito, A posee un subconjunto enumerable, es decir, $\mathbb{N} \preceq A$. Por el teorema de Schröder–Bernstein, basta ver que $A \preceq \mathbb{N}$. Es decir, basta establecer que existe una función $f\colon A \to \mathbb{N}$ inyectiva.

Efectivamente, para $a \in A$, sea S_a el conjunto $\{x \in A \mid x \preceq a\}$ de todos los elementos de A que son menor o igual a a con respeto de $\preceq$. Nos dan que S_a es finito para todo $a \in A$. Definimos $f(a)$ como la cardinalidad de S_a (ya que ese conjunto es finito, su cardinalidad es un número natural).

Ahora hay que mostrar que $f(a_1) \neq f(a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$. Ya que $\preceq$ es un orden total sobre A, tenemos que $a_1 \preceq a_2$ o $a_2 \preceq a_1$. Sin perdida de la generalidad, asumimos que $a_1 \preceq a_2$. Se puede ver que $S_{a_1} \subseteq S_{a_2}$. Efectivamente, si $x \in S_{a_1}$, entonces $x \preceq a_1 \preceq a_2$, así que $x \in S_{a_2}$. Por el otro lado, ya que $a_1 \neq a_2$ y $\preceq$ es una relación antisimetrica, tenemos $a_2 \not\preceq a_1$, es decir $a_2 \notin S_{a_1}$ (pero $a_2 \in S_{a_2}$ ya que $a_2 \preceq a_2$). Al final, obtenemos que S_{a_1} es un subconjunto estricto del conjunto finito S_{a_2}, así que la cardinalidad de S_{a_2} es estrictamente mayor que la cardinalidad de S_{a_1}, es decir $f(a_2) > f(a_1)$.