



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 14 - Repaso I2

14 de noviembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

1 Relaciones vol 1000

Para un conjunto A no vacío, sea $R \subseteq A \times A$ y $T \subseteq A \times A$ dos relaciones de equivalencia.
Se define:

$$(R \cup T)^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup T)^i.$$

1. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es una relación de equivalencia, donde $(\cdot)^t$ es la clausura transitiva de $R \cup T$.
2. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R y T , esto es, para toda relación de equivalencia S tal que $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$ se tiene que $(R \cup T)^t \subseteq S$.

2 Inducción

(2) Si $T_1 = (N_1, A_1)$ y $T_2 = (N_2, A_2)$ son árboles binarios completos disjuntos (es decir, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$), cada uno con raíz u_1 y u_2 , respectivamente, entonces

$$T = (N_1 \cup N_2 \cup \{u\}, A_1 \cup A_2 \cup \{(u, u_1), (u, u_2)\})$$

es un árbol binario completo con raíz u , donde u es un nodo que no está en $N_1 \cup N_2$. En este caso, llamamos a T_1 y T_2 el subárbol izquierdo y derecho, respectivamente, de u .

Solución:

Si $T = (N, A)$ es un árbol binario completo y $u \in N$, decimos que u es una *hoja* si no tiene árbol izquierdo ni derecho. Demuestre que en todo árbol binario completo con $n \geq 1$ nodos,

la cantidad de hojas es exactamente

$$\frac{n+1}{2}.$$

(Hint: aplique inducción fuerte sobre la cantidad de nodos.)

3 Cardinalidad

Considere los conjuntos \mathbb{N} y \mathbb{Z} con sus órdenes totales usuales \leq . Una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ es monótona decreciente si para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$, se tiene que $f(n) \geq f(m)$.

Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ es una función monótona decreciente}\}$$

no es enumerable.