Unidad V: Relaciones

Relaciones: ordenes.

Clase 14 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Definición:

Sea R una relación sobre A.

- R es un **orden parcial** sobre A si R es refleja, antisimétrica y transitiva.
- R es un **orden total (o lineal)** sobre A si R es un orden parcial y además es conexa.

Recordatorio:

- **Refleja:** Para cada $a \in A$, se cumple $R(a, a)$.
- **Antisimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$ entonces $a = b$.
- **Transitiva:** Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa:** Para cada $a, b \in A$, si tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Ordenes parciales y totales: ejemplos

Las siguiente relaciones son ordenes parciales:

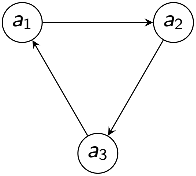
- La relación $\leq$ sobre $\mathbb{N}$.
- Sea A un conjunto. La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$.
- La relación $a \mid b$ sobre $\mathbb{Z}$, donde

$$a \mid b \iff a \text{ divide a } b \iff b \text{ es divisible por } a.$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son ordenes totales?

Sea R un orden parcial sobre A.

Ciclo de largo 3 en R:
elementos distintos $a_1, a_2, a_3 \in A$ tal que $R(a_1, a_2)$, $R(a_2, a_3)$ y $R(a_3, a_1)$.



¿Puede existir un ciclo de largo 3 en R?
¿un ciclo de largo k, para $k \geq 2$?

Sabemos que $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{N}$.

¿Es posible definir un **orden total** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en base a $\leq$?

Un primer intento:

$$(a_1, a_2) \leq_{\text{coord}} (b_1, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \ \wedge \ b_1 \leq b_2$$

¿Es $\leq_{\text{coord}}$ un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Notación:

Si $\leq$ es un orden parcial o total sobre A, la relación $<$ sobre A se define:

$$a < b \iff a \leq b \ \wedge \ a \neq b$$

El **orden lexicográfico** $\leq_{\text{lex}}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como:

$$(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2) \iff a_1 < b_1 \ \vee \ (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \leq b_2)$$

Ejemplos:

- $(10, 11) \leq_{\text{lex}} (10, 11) \qquad (3, 6) \leq_{\text{lex}} (5, 1) \qquad (4, 6) \leq_{\text{lex}} (4, 7)$
- $(10, 11) \nleq_{\text{lex}} (10, 10) \qquad (4, 1) \nleq_{\text{lex}} (3, 100)$

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Refleja:

Por definición, para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se cumple $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Antisimétrica:

Supongamos que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Como $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$, tenemos que $a_1 \leq b_1$.

Similarmente, como $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$, tenemos que $b_1 \leq a_1$.

Obtenemos que $a_1 = b_1$.

Como $a_1 = b_1$ y $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$, tenemos que $a_2 \leq b_2$.

Similarmente, como $a_1 = b_1$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$, tenemos que $b_2 \leq a_2$.

Obtenemos que $a_2 = b_2$.

Concluimos que $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Transitiva:

Supongamos que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Tenemos que $a_1 \leq b_1$ y $b_1 \leq c_1$, y entonces $a_1 \leq c_1$.

Caso 1: $a_1 < c_1$.

Obtenemos directamente que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Caso 2: $a_1 = c_1$.

Sabemos que $a_1 \leq b_1 \leq c_1$, luego se cumple que $b_1 = a_1 = c_1$.

Como $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$,
obtenemos que $a_2 \leq b_2$ y $b_2 \leq c_2$.

Concluimos que $a_2 \leq c_2$ y entonces $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Conexa:

Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Caso 1: $a_1 < b_1$.
Obtenemos $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$.

Caso 2: $b_1 < a_1$.
Obtenemos $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Caso 3: $a_1 = b_1$.

- **Caso 3.1**: $a_2 \leq b_2$.
  Obtenemos $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$.
- **Caso 3.2**: $b_2 < a_2$.
  Obtenemos $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

- Dado un orden total $\leq$ sobre A, podemos definir de igual manera el orden lexicográfico $\leq_{\text{lex}}$ sobre $A \times A$.
    - $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $A \times A$. (verifíquelo!)
- Es posible extender $\leq_{\text{lex}}$ a $\mathbb{N}^k$ para todo $k \geq 2$. (¿cómo lo haría?)

- **Alfabeto:** Conjunto finito Σ de símbolos. Por ejemplo:
  - $\Sigma = \{0, 1\}$.
  - $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$.
- **Palabra sobre un alfabeto Σ:**

  Secuencia finita $u = u_1 \ldots u_k$ de símbolos de Σ.
  - k es el largo de la palabra u.
  - Posibles palabras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$:

    $$0010 \qquad 1 \qquad 1010111$$
  - Posibles palabras sobre $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$:

    $$hola \qquad navidad \qquad asdf$$
- **Σ^+:** conjunto de todas las palabras sobre Σ de largo mayor o igual a 1.

Nos gustaría capturar el orden típico entre palabras.

- El orden según el cual aparecen en el diccionario.

¿Cuál es el orden entre las siguientes palabras?

hola	zapata
bot	aba
zapato	perro
terremoto	botar

¿Cómo capturamos este orden formalmente?

Sea Σ un alfabeto. Asumimos que tenemos un orden total $\leq$ sobre Σ.

- Por ejemplo, para $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$, tomamos el orden:

$$a \leq b \leq c \leq c \leq \cdots \leq w \leq x \leq y \leq z$$

Definimos el **orden lexicográfico** $\leq_{\text{lex}}$ sobre Σ^+ como sigue:

Sean $u = u_1 \ldots u_k$ y $v = v_1 \cdots v_\ell$ palabras en Σ^+ de largo k y ℓ, resp.

- Sea $m = \max\{k, \ell\}$.

Entonces, $u \leq_{\text{lex}} v$ si y sólo si $u = v$ o existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que:

- para cada $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, se tiene que $u_j = v_j$, y
- $u_i \leq v_i$ o $(i = k+1$ y $v_i \in \Sigma)$

Ejemplos:

$$\textit{density} \leq_{\text{lex}} \textit{destiny} \qquad \textit{bot} \leq_{\text{lex}} \textit{botar} \qquad \textit{botilleria} \leq_{\text{lex}} \textit{boton}$$

Ejercicio: Demuestre que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre Σ^+.

Definición:

Sea $\leq$ un orden parcial sobre A y sea $a \in A$ un elemento.

- Decimos que a es **mínimo** si para todo $b \in A$, se tiene $a \leq b$.
- Decimos que a es **minimal** si **no** existe $b \in A$ tal que $b < a$.
  (es decir, tal que $b \leq a$ y $b \neq a$.)

Definimos **máximo** y **maximal** de manera análoga.

Comentarios:

- **OJO:** mínimo y minimal **no** son lo mismo.
- Todo elemento mínimo es minimal. (¿por qué?)
- Pueden haber elementos minimales que **no** son mínimos.
- Similarmente para máximo y maximal.

En cada caso diga cuáles son los elementos mínimos/máximos y minimales/maximales. (si es que existen)

- El orden lexicográfico $\leq_{\text{lex}}$ sobre $\{0, 1\}^+$.
- La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- La relación divide sobre $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.
- La relación divide sobre $A = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$.

Sea $\leq$ un orden parcial sobre A. Demuestre las siguientes propiedades:

- Si hay un mínimo, entonces es **único**.
- Si existen dos elementos minimales distintos, entonces son **incomparables** según $\leq$.
- Lo mismo se cumple para máximo y maximal.

Para ordenes totales, mínimos y minimales son lo mismo.

Proposición:

Sea $\leq$ un orden total sobre A. Entonces todo elemento minimal es mínimo.

Demostración:

Sea $a \in A$ elemento minimal. Sea $b \in A$ arbitrario.

Por demostrar: $a \leq b$

Como $\leq$ es conexa, se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$.

Si $a \leq b$ estamos listos, luego supongamos que $b \leq a$.

Como a es minimal, no puede pasar que $b \neq a$.

Concluimos que $a = b$, y en particular, $a \leq b$.