Unidad I: Lógica proposicional

Lógica proposicional: Sintaxis, semántica y equivalencia

Clase 01 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

¿Qué se estudia en Lógica?

"La ***Lógica*** *es la disciplina que estudia las reglas del razonamiento válido."*

(ChatGPT)

Todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Es este razonamiento válido?

La lógica nos debería decir que **sí**.

Existen personas que son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Es este razonamiento válido?

La lógica nos debería decir que **no**.

Creo que todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Es este razonamiento válido?

¿Qué significa "**Creo que**"?

- Podemos definir un número natural usando oraciones en castellano:
  - "Ciento veinticuatro", "el sucesor de tres", ...
- El número de palabras en el Diccionario de la Real Academia es finito.
- El número de oraciones con a los más 50 palabras también es finito.

Defina el siguiente número:

"El **primer número natural** que **NO** puede ser definido por una oración con a lo más cincuenta palabras."

¿Algún problema con esta definición?

Para entender el razonamiento válido:

Necesitamos **lenguajes** con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Veremos dos tipos de **lenguajes** o "lógicas":

- Lógica proposicional.
- Lógica de predicados.

Ambos son lenguajes formales para entender cierto tipo de "**razonamiento**".

¿Por qué necesitamos estas lógicas?

Queremos usar este lenguaje en nuestro razonamiento matemático :

- Definición de **objetos** matemáticos:
  - *conjunto, números naturales, números reales, ...*
- Definición de **teorías** matemáticas:
  - *teoría de conjuntos, teoría de los número naturales, ...*
- Formalizar el concepto de **demostración**.

¿Por qué necesitamos estas lógicas en computación?

Lógica es el **cálculo** de la computación!

1. Bases de datos.
2. Inteligencia artificial.
3. Ingeniería de software.
4. Teoría de la computación.
5. Criptografía.
6. Procesamiento de lenguaje natural.
7. ...

Queremos entender el siguiente tipo de razonamiento:

Si hay luna llena, entonces Joaquín es feliz.
Hay luna llena y está lloviendo.

Por lo tanto, Joaquín es feliz.

¿Por qué este razonamiento es válido? ¿Cuál es su **estructura**?

Tenemos las siguientes componentes:

- Un conjunto de variables proposicionales P.
- Conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Paréntesis: (,)

Cada variable proposicional representa una proposición que puede ser:

verdadera (1) o **falsa (0)**

Variables proposicionales: ejemplo

Queremos entender el siguiente tipo de razonamiento:

Si hay luna llena, entonces Joaquín es feliz.
Hay luna llena y está lloviendo.

Por lo tanto, Joaquín es feliz.

Conjunto de variables proposicionales:

$$P = \{\text{“Hay luna llena”},\ \text{“Está lloviendo'},\ \text{“Joaquín es feliz”}\}$$

Los conectivos lógicos se usan para construir expresiones que también pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplos:

- $\neg$"Está lloviendo"
- "Hay luna llena" $\wedge$ ($\neg$"Está lloviendo")
- "Joaquín es feliz" $\rightarrow$ ("Hay luna llena" $\vee$ "Está lloviendo")

Los paréntesis se usan para evitar ambigüedades.

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P.

Definición:

Una **fórmula proposicional** sobre P es una expresión que se puede construir aplicando las siguientes reglas:

- Cada variable proposicional p en P es una fórmula proposicional.
- Si φ es una fórmula proposicional, entonces $(\neg\varphi)$ es una fórmula proposicional.
- Si φ y ψ son fórmula proposicionales, entonces $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmula proposicionales.

Denotamos por $L(P)$ al conjunto de fórmulas proposicionales sobre P.

Asumamos $P = \{p, q, r\}$.

Algunas fórmulas proposicionales en $L(P)$:

- $(q \wedge (\neg r))$
- $((q \wedge (\neg r)) \vee p)$
- $((q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q))$

¿Cuántas fórmulas hay en $L(P)$?

- Los paréntesis son claves para evitar ambigüedades:
  - Nos dicen cómo se construyó la fórmula.
  - ¿Qué pasa si no los usamos?

$$q \wedge \neg r \rightarrow p \wedge q$$

- Podemos omitir los paréntesis externos sin caer en ambigüedades:
  - $q \wedge (\neg r)$ en vez de $(q \wedge (\neg r))$.
  - $(q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q)$ en vez de $((q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q))$.

¿Es la siguiente fórmula verdadera o falsa?

$$(q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q)$$

¿De qué depende el **valor de verdad** de una fórmula?

- Del valor de verdad asignados a las variables proposicionales.
- De los conectivos utilizados.

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P.

Definición:

Una **valuación** es una función $\sigma : P \to \{0, 1\}$.

En otras palabras:

Una valuación σ le asigna a cada variable p en P un valor de verdad $\sigma(p)$.

Ejemplos:

Sea $P = \{p, q, r\}$. Algunas valuaciones:

- $\sigma(p) = 0 \qquad \sigma(q) = 1 \qquad \sigma(r) = 0$
- $\sigma(p) = 1 \qquad \sigma(q) = 0 \qquad \sigma(r) = 0$

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P y valuación σ.

Queremos extender σ al conjunto de fórmulas proposicionales en $L(P)$.

Definición:

$$\sigma(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ o } \sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P y valuación σ.

Queremos extender σ al conjunto de fórmulas proposicionales en $L(P)$.

Definición:

$$\sigma(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma(\psi) = 0 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = \sigma(\psi) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Sea $P = \{p, q, r\}$ y valuación σ tal que $\sigma(p) = 0$, $\sigma(q) = 1$, $\sigma(r) = 0$.

Entonces:

- $\sigma((q \wedge (\neg r)) \vee p) = 1$
- $\sigma((q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q)) = 0$

Podemos representar y analizar fórmulas usando **tablas de verdad**:

p	q	r	$(q \wedge (\neg r)) \to (p \wedge q)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Cada **fila** corresponde a una **valuación**.
- En cada fila indicamos el valor de verdad de la fórmula para esa valuación.

Tablas de verdad para los conectivos lógicos:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ejercicio:

Considere un conjunto de variables proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

- ¿Cuántas filas tiene una tabla de verdad de una fórmula sobre P?
- ¿Cuántas posibles tablas de verdad hay para P?

Equivalencia lógica

Tablas de verdad para los conectivos lógicos:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Escribamos la tabla de verdad de la fórmula $(\neg p) \vee q$:

p	q	$(\neg p) \vee q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

¿Se parece a alguna tabla?

Definición:

Dos fórmulas φ y ψ en $L(P)$ son **equivalentes** si para **cada** valuación σ, se cumple $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$.

En otras palabras: φ y ψ tienen la **misma** tabla de verdad.

Notación: $\varphi \equiv \psi$.

Ejemplo:

Acabamos de demostrar que $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$.

Equivalencia lógica: ejemplos

Demostremos que $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

Para esto, basta demostrar que las tablas de verdad son las mismas.

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Esto nos dice que el conectivo $\wedge$ es **asociativo**.

Equivalencia lógica: ejemplos

Demostremos que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Para esto, basta demostrar que las tablas de verdad son las mismas.

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Esto nos dice que el conectivo $\wedge$ **distribuye** sobre el conectivo $\vee$.

Equivalencia lógica: comentarios

- Dos fórmulas equivalentes tienen la misma semántica pero distinta sintaxis.
    - Son dos formas distintas de escribir la misma cosa.
- Si dos fórmulas son equivalentes podemos reemplazar una por la otra.

Algunas equivalencias útiles

Ley de doble negación:

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

Leyes de De Morgan:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

Leyes de conmutatividad:

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

Algunas equivalencias útiles

Leyes de asociatividad:

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

Leyes de distributividad:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Ley de implicancia:

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

Ley de doble implicancia:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Ejercicios

1. Demuestre las equivalencias anteriores.
2. ¿Es $\rightarrow$ asociativo? Es decir, ¿se cumple $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \theta \equiv \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$?
3. ¿Cuántas fórmulas **no** equivalentes puede construir con n variables proposicionales?