Unidad VI: Funciones y Cardinalidad

Funciones: definiciones básicas.

Clase 15 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Sean A y B conjuntos no vacíos.

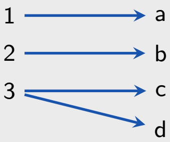
Definición:

Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ **existe un único** elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{ (3, c), (1, a), (2, b), (3, d) \}$$ ✗



Sean A y B conjuntos no vacíos.

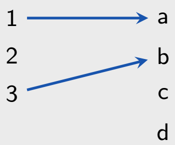
Definición:

Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ **existe un único** elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{ \ (1, a), \ (3, b) \ \}$$



Sean A y B conjuntos no vacíos.

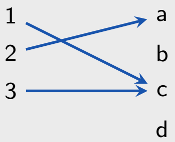
Definición:

Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ **existe un único** elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{ \ (1, c), \ (3, c), \ (2, a) \ \}$$ ✓



Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición:

Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ **existe un único** elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una **función**, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A en B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - b es **la imagen** de a en f
  - a es **una preimagen** de b en f

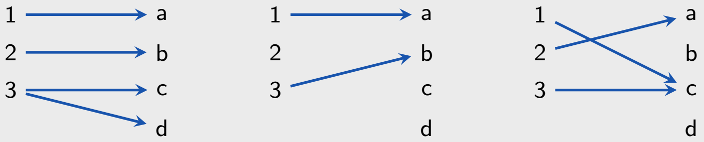
Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición:

Una relación f de A en B es una **función parcial** si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones parciales?



Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición:

Una relación f de A en B es una **función parcial** si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Si $f \subseteq A \times B$ es una **función parcial**, entonces escribiremos:

- $f : A \rightharpoonup B$ para decir que f es una función parcial de A en B.

  (notar la diferencia en la flecha)

- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - Igual que antes, usamos los términos **imagen** y **preimagen**.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

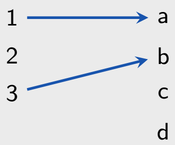
Definición:

Se define el **dominio** e **imagen** de f como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \{\ a \in A \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}.\\
\mathrm{img}(f) &= \{\ b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

Sea $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$.



$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \{1,3\}\\
\mathrm{img}(f) &= \{a,b\}
\end{aligned}
$$

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

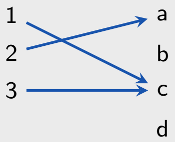
Definición:

Se define el **dominio** e **imagen** de f como:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \{\ a \in A \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}. \\
\mathrm{img}(f) &= \{\ b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}.
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.



$$
\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f) &= \{1, 2, 3\} \\
\mathrm{img}(f) &= \{a, c\}
\end{aligned}
$$

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición:

Se define el **dominio** e **imagen** de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{\ a \in A \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}. \\ \mathrm{img}(f) &= \{\ b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a,b) \in f\ \}. \end{aligned}$$

Proposición:

Sea $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial. Entonces:

$$f \text{ es una función} \iff \mathrm{dom}(f) = A$$

Ejemplos:

Sea $A = B = \mathbb{R}$.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \lfloor\ x + \sqrt{x}\ \rfloor$$

$$f_3(x) = 0$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

- ¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?
    - Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿qué es $\mathrm{dom}(f)$?

Tanto el **dominio** como la **imagen** de una función
pueden ser números, tuplas, conjuntos, relaciones, grafos, ...

Más ejemplos de funciones

Ejemplos:

Las siguientes son funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$
\begin{aligned}
g_1 : A \to \mathcal{P}(A) \qquad g_1(a) &= \{a\} \\
g_2 : A \to \mathcal{P}(A) \qquad g_2(a) &= A \setminus \{a\} \\
g_3 : A \to \mathcal{P}(A) \qquad g_3(a) &= \varnothing
\end{aligned}
$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición:

Una **secuencia** S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplos:

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \ldots$$

- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

- $S_3 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$

$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ 8, \ldots$$

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición:

Una función $f : A \to B$ se dice:

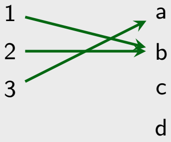
1. **Inyectiva:**

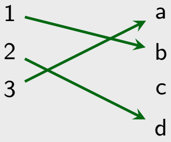
   No existen dos elementos **distintos** en A con la misma imagen.

   - No existen $a, b \in A$ tal que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$.
   - Otra forma: Para todo $a, b \in A$, si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

Ejemplos:

¿Cuáles de las siguientes funciones son inyectivas?





Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición:

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. **Inyectiva:**

   No existen dos elementos **distintos** en A con la misma imagen.

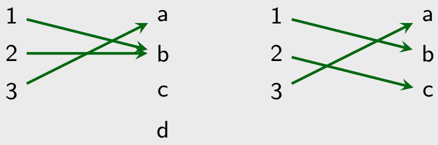
2. **Sobreyectiva:**

   Todo elemento en B tiene una preimagen.

   - Para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Ejemplos:

¿Cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas?



Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

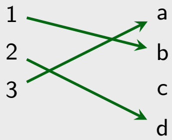
Definición:

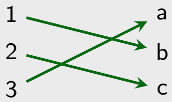
Una función $f : A \to B$ se dice:

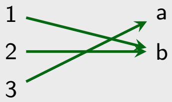
1. **Inyectiva:**
   No existen dos elementos **distintos** en A con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva:**
   Todo elemento en B tiene una preimagen.
3. **Biyectiva:**
   f es inyectiva **y** sobreyectiva.

Ejemplos:

¿Cuáles de las siguientes funciones son biyectivas?







Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición:

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. **Inyectiva:**
   No existen dos elementos **distintos** en A con la misma imagen.
2. **Sobreyectiva:**
   Todo elemento en B tiene una preimagen.
3. **Biyectiva:**
   f es inyectiva **y** sobreyectiva.

Notación común:

- Una función inyectiva es llamada 1-a-1.
- Una función sobreyectiva es llamada sobre.

¿Son las siguientes funciones inyectivas, sobreyectivas o biyectivas?

- $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_2(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

- $f_3 : \{0,1\}^+ \to \{0,1\}^+$ tal que para todo $u = u_1 \cdots u_k \in \{0,1\}^+$:

$$f_3(u) = u_k \cdots u_1$$