



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía 9 - Relaciones

10 de octubre de 2025

Elías Ayaach, Manuel Villablanca, Caetano Borges

Resumen

Relación Binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados que establece una conexión o asociación entre elementos de dos conjuntos distintos.

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Propiedades de una Relación Binaria

Refleja

Una relación R es refleja si para todo elemento x en el conjunto, el par (x, x) está en R .

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irrefleja

Una relación R es irrefleja si ningún par (x, x) está en R para cualquier x en el conjunto.

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Simétrica

Una relación R es simétrica si para cada par (x, y) en R , también está presente el par (y, x) .

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

Antisimétrica

Una relación R es antisimétrica si para cualquier par (x, y) en R , si $x \neq y$, entonces el par (y, x) no está en R .

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge x \neq y \rightarrow (y, x) \notin R$$

Transitiva

Una relación R es transitiva si para cada par (x, y) y (y, z) en R , el par (x, z) también está en R .

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$$

Conexidad

Una relación R es conexa si para cada par de elementos x, y podemos encontrar a (x, y) en R , o a (y, x) en R .

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$$

Relación de Equivalencia

Una relación de equivalencia es una relación binaria que cumple **reflexividad**, **simetría** y **transitividad**.

A la relación se le denota como $x \sim y$.

Clase de equivalencia

Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x bajo \sim es el conjunto

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Conjunto cociente

Sea \sim una relación de equivalencia sobre un conjunto A . El conjunto cociente de A con respecto a \sim es el conjunto de todas las clases de equivalencia de \sim :

$$A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$$

1. Meme del día



2. Relaciones

Decimos que un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ es **bueno para la suma** si satisface las siguientes condiciones:

1. $0 \in X$
2. $\forall x, y \in X, x + y \in X$.

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, se define en \mathbb{R} la relación \mathcal{R}_X como:

$$x\mathcal{R}_X y \leftrightarrow (x - y) \in X$$

Demuestre que si X es bueno para la suma, entonces \mathcal{R}_X es una relación refleja y transitiva.

Solución

1. Refleja:

Para que la relación sea refleja, se debe cumplir que para todo $x \in X, x\mathcal{R}_X x$. Se tiene que X es bueno para la suma, por lo que $0 \in X$. Luego, $0 = x - x \in X$, por lo que $x\mathcal{R}_X x$, y concluimos que la relación es refleja.

2. Transitiva:

Para que la relación sea transitiva, se debe cumplir que $(x\mathcal{R}_X y \wedge y\mathcal{R}_X z) \rightarrow x\mathcal{R}_X z$. Supongamos que $x\mathcal{R}_X y \wedge y\mathcal{R}_X z$. Luego, por definición de \mathcal{R}_X , se tiene que $x - y \in X, y - z \in X$. Por la segunda propiedad de un conjunto bueno para la suma, se tiene que para cualquier par de elementos $a, b \in X, a + b \in X$. Como $x - y \in X \wedge y - z \in X$, se tiene que $(x - y) + (y - z) = x - z \in X$, con lo que $x\mathcal{R}_X z$, y concluimos que la relación es transitiva.

3. Inducción + Relación de equivalencia

Sea Σ un alfabeto de símbolos y $\mathcal{S} = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m \subseteq \Sigma \times \Sigma$ un conjunto finito de pares ordenados (a_i, b_i) para $1 \leq i \leq m$. Definimos la relación $\rightarrow \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ como

$x \rightarrow y \iff y$ se puede obtener de x reemplazando una ocurrencia de algún a_i por b_i (o vice versa, de algún b_i por a_i)

Ahora, sea $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ una relación tal que $x \sim y$ si y solo si y se puede obtener mediante una cantidad finita de pasos \rightarrow desde x .

Demuestre que \sim es una relación de equivalencia.

Solución

Para demostrar que \sim es de equivalencia debemos demostrar que es refleja, simétrica y transitiva.

1. Refleja: tenemos que $x \sim x$ ya que podemos obtener x a partir de x con 0 pasos \rightarrow .
2. Simétrica: supongamos que $x \sim y$. PD: $y \sim x$.

Como $x \sim y$, existen x_1, \dots, x_n tal que $x \rightarrow x_1 \cdots \rightarrow x_n \rightarrow y$. Demostraremos por inducción que toda cadena de esta forma se puede revertir, i.e. que $y \rightarrow x_n \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \rightarrow x$.

BI: cuando la cadena tiene 0 elementos intermedios, es decir, tenemos $x \sim y$. Por definición de \rightarrow , esto significa que existe $(a_i, b_i) \in \mathcal{S}$ tal que a_i aparece en x y b_i en y . Además, la relación \rightarrow permite cambiar una instancia de a_i por una de b_i , o vice versa, por lo que podemos cambiar el b_i de y por a_i para obtener x , con lo que $y \sim x$.

HI: supongamos que las cadenas con n elementos intermedios son reversibles.

TI: PD: las cadenas con $n + 1$ elementos intermedios son reversibles. Consideremos la cadena $x \rightarrow x_1 \cdots \rightarrow x_n \rightarrow x_{n+1} \rightarrow y$. Por HI, la cadena $x \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow x_{n+1}$ es reversible, con lo que tenemos que $x_{n+1} \rightarrow x_n \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \rightarrow x$. Además, $x_{n+1} \rightarrow y$, por lo que existe $(a_i, b_i) \in \mathcal{S}$ tal que a_i aparece en x_{n+1} y b_i aparece en y . Podemos intercambiar en el otro sentido para obtener que $y \rightarrow x_{n+1}$. Finalmente, obtenemos que $y \rightarrow x_{n+1} \rightarrow x_n \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \rightarrow x$, con lo que concluimos que las cadenas con $n+1$ elementos intermedios son reversibles. Por inducción, esto nos permite decir que todas las cadenas con una cantidad finita de pasos \rightarrow son reversibles, por lo que volviendo a la cadena inicial $x \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \rightarrow y$, tenemos también que $y \rightarrow x_n \rightarrow \cdots \rightarrow x_1 \rightarrow x$, y concluimos que $y \sim x$, con lo que \sim es simétrica.

3. Transitiva: supongamos que $x \sim y \wedge y \sim z$. Esto significa que existen $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ tal que $x \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \rightarrow y \wedge y \rightarrow y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y_n \rightarrow z$. Con ello podemos formar la cadena $x \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \rightarrow y \rightarrow y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y_n \rightarrow z$, que es una cadena de finitos pasos \rightarrow entre x y z , de lo que concluimos

que $x \sim z$, con lo que \sim es transitiva.

4. Relaciones de equivalencia

Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A . Demuestre que

$$S \circ T = T \circ S \iff S \circ T \text{ es una relación de equivalencia}$$

Nota: la composición de dos relaciones definidas sobre un conjunto A , denotada por $R_1 \circ R_2$, es una relación definida como

$$R_1 \circ R_2 = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid \exists a' \in A \text{ tal que } a_1 R_2 a' \wedge a' R_1 a_2\}$$

Solución:

(\Rightarrow) Suponiendo $S \circ T = T \circ S$, debemos demostrar que $S \circ T$ sea una relación de equivalencia:

■ Refleja:

Dado que S y T son reflejas, $\forall a \in A, (a, a) \in S \wedge (a, a) \in T$.

Luego, por la definición de $S \circ T$, $\forall a \in A, (a, a) \in S \circ T$, por lo que es refleja.

■ Simétrica:

Sea $(a, b) \in S \circ T$, como $S \circ T = T \circ S$, $(a, b) \in T \circ S$. Por lo tanto:

$$\exists z \in A (a, z) \in S \wedge (z, b) \in T$$

que puede ser reescrito como:

$$\exists z \in A (z, b) \in T \wedge (a, z) \in S$$

y luego, dado que las relaciones S y T son simétricas, tenemos que $(b, z) \in T \wedge (z, a) \in S$, y así $(b, a) \in S \circ T$.

■ Transitiva:

Sea $(a, b), (b, c) \in S \circ T$ entonces:

$$\exists z_1 \in A (a, z_1) \in T \wedge (z_1, b) \in S$$

$$\exists z_2 \in A (b, z_2) \in T \wedge (z_2, c) \in S$$

Y dado que $(z_1, z_2) \in T \circ S$ ya que $(z_1, b) \in S \wedge (b, z_2) \in T$, por lo tanto, como $T \circ S = S \circ T$ ocurre que:

$$(z_1, z_2) \in S \circ T$$

$$\exists z_3 \in A (z_1, z_3) \in T \wedge (z_3, z_2) \in S$$

Como S y T son transitivas:

$$(a, z_3) \in S \wedge (z_3, c) \in T$$

y entonces $(a, c) \in S \circ T$.

$\therefore S \circ T$ es una relación de equivalencia.

(\Leftarrow) Suponiendo que $S \circ T$ es una relación de equivalencia, para demostrar que $S \circ T = T \circ S$, se busca probar que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $T \circ S \subseteq S \circ T$.

1. En primer lugar, sea $(a, b) \in S \circ T$. Por la simetría de $S \circ T$ se tiene que también $(b, a) \in S \circ T$. Luego, por la definición de composición se cumple que:

$$\exists z \in A. (b, z) \in S \wedge (z, a) \in T$$

Ahora, dada la simetría de S y T , se tiene que:

$$\exists z \in A. (z, b) \in S \wedge (a, z) \in T$$

Además, por definición de composición, dado que $\exists z \in A. (a, z) \in T \wedge (z, b) \in S$, entonces $(a, b) \in T \circ S$.

Así queda demostrado que $S \subseteq T$.

2. De manera análoga, sea $(a, b) \in T \circ S$, por definición de composición se tiene que:

$$\exists z \in A. (a, z) \in T \wedge (z, b) \in S$$

Luego, por simetría de S y T , también se cumple que:

$$\exists z \in A. (z, a) \in T \wedge (b, z) \in S$$

Finalmente, dado que $\exists z \in A. (b, z) \in S \wedge (z, a) \in T$, se tiene que $(b, a) \in S \circ T$, y por simetría de $S \circ T$, también $(a, b) \in S \circ T$.

Así queda demostrado que $T \circ S \subseteq S \circ T$.

Quedando demostrado que $S \circ T \subseteq T \circ S$ y $T \circ S \subseteq S \circ T$, se ha probado que $S \circ T = T \circ S$

dado que $S \circ T$ es una relación de equivalencia.