Unidad II: Lógica de predicados

Lógica de predicados: La noción de predicado

Clase 05 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Cómo podríamos modelar este razonamiento en **lógica proposicional**?

$$\begin{array}{l} \textbf{Todo} \text{ número natural es par o impar} \\ \text{2 no es impar} \\ \hline \text{Por lo tanto, 2 es par} \end{array}$$

¿Cómo podríamos modelar este razonamiento en **lógica proposicional**?

¿Qué le falta a la lógica proposicional?

- objetos (no solo proposiciones).
- predicados.
- cuantificadores: **para todo** ($\forall$) y **existe** ($\exists$).

Lógica de predicados $\subseteq$ Lógica de primer orden

Lógica de predicados permite expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales, enteros, racionales, reales, ...
- Conjuntos, relaciones, ...

Podremos definir propiedades como:

- Para toda persona x, si x es artista, entonces x no es deportista.
- Para todo número n, existe un número m tal que $n < m$.

Ejemplos:

1. x es par
2. $x \leq y$
3. $x + y = z$

¿Cuál es el **valor de verdad** de estas proposiciones? **Depende!**

Hay que reemplazar las **variables** por objetos para tener un **valor de verdad**:

1. 2 es par, 3 es par, ...
2. $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...
3. $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Predicados

Definición:

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos:

- $P(x)$ = x es par
- $R(x)$ = x es primo
- $A(x)$ = x es artista

Definición:

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **evaluación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $P(x) = x$ es par

$$P(1) = 0$$
$$P(4) = 1$$

x	$P(x)$
0	1 (True)
1	0 (False)
2	1 (True)
3	0 (False)
$\vdots$	$\vdots$

Definición:

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **evaluación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $P(x) = x$ es par
- $R(y) = y$ es primo

$$R(31) = 1$$
$$R(21) = 0$$

y	$R(y)$
0	0
1	0
2	1
3	1
4	0
$\vdots$	$\vdots$

Definición:

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **evaluación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $P(x) = x$ es par
- $R(y) = y$ es primo
- $A(z) = z$ es artista

$$
\begin{aligned}
A(\text{Javiera Mena}) &= 1 \\
A(\text{Cristian Castro}) &= 1
\end{aligned}
$$

z	$A(z)$
Javiera Mena	1
Cristian Castro	1
Alexis Sanchez	0
$\vdots$	$\vdots$

Definición:

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **evaluación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $O(x, y) = x \leq y$

$$O(2,3) = 1$$
$$O(7,2) = 0$$

x	y	$O(x,y)$
0	0	1
0	1	1
0	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	0	0
1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Definición:

- Un **predicado *n*-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **evaluación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $O(x, y) \; = \; x \leq y$
- $S(x, y, z) \; = \; x + y = z$

$$\begin{aligned} S(5, 10, 14) &= 0 \\ S(9, 8, 17) &= 1 \end{aligned}$$

Predicados n-arios

Definición:

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **evaluación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes evaluaciones?

- $O(x, y) \; = \; x \leq y$
- $S(x, y, z) \; = \; x + y = z$
- $Padre(x, y) \; = \; x$ es padre de y

$$Padre(\text{George McFly}, \text{Marty McFly}) \; = \; 1$$

¿Cuál es el valor de verdad de $O(\text{George McFly}, \text{Marty McFly})$?
¿y de $Padre(5, 4)$?

Definición (final):

- Un **predicado** ***n*-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$,
  la **evaluación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.
- Un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ siempre está restringido a cierto **dominio** de evaluación A.

Ejemplos de predicados y sus dominios:

- $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$
- $S(x, y, z) := x + y = z$ sobre $\mathbb{Q}$
- $Padre(x, y) :=$ x es padre de y sobre todas las personas

Definición:

- Un **predicado *n*-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **evaluación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.
- Un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ siempre está restringido a cierto **dominio** de evaluación A.

Notación:

Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$,
diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son las **variables libres** de P.

Definición:

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$),
doble-impliancia ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **evaluación** de un predicado **compuesto** corresponde a la evaluación iterativa de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos:

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) = \neg P(x)$

$$P'(4) = \neg P(4) = 0$$
$$P'(7) = \neg P(7) = 1$$

x	$P(x)$	$P'(x)$
0	1	0
1	0	1
2	1	0
3	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Predicados compuestos

Definición:

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$), doble-impliancia ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **evaluación** de un predicado **compuesto** corresponde a la evaluación iterativa de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos:

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x, y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) \;=\; \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) \;=\; O(x, y) \wedge O(y, z)$

$$\begin{aligned} O'(4, 9, 7) &= O(4, 9) \wedge O(9, 7) &= 0 \\ O'(7, 12, 18) &= O(7, 12) \wedge O(12, 18) &= 1 \end{aligned}$$

Predicados compuestos

Definición:

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$),
doble-impliancia ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **evaluación** de un predicado **compuesto** corresponde a la evaluación iterativa de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos:

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) \;=\; \neg P(x)$
- $O'(x,y,z) \;=\; O(x,y) \wedge O(y,z)$
- $P''(x,y) = (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x,y)$

$$
\begin{aligned}
P''(4,7) &= (P(4) \wedge P(7)) \rightarrow O(4,7) = 1 \\
P''(8,6) &= (P(8) \wedge P(6)) \rightarrow O(8,6) = 0 \\
P''(10,24) &= (P(10) \wedge P(24)) \rightarrow O(10,24) = 1
\end{aligned}
$$

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado compuesto con dominio A.

Definición:

- Definimos el cuantificador **universal**:

$$P'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;=\; \forall x_i \; P(x_1, \ldots, x_n)$$

  donde x_i es la variable cuantificada y el resto de las variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ son las variables libres.

- Para $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ en A, definimos su evaluación como:

$$P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

  si **para todo** a en A se tiene que $P(b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en caso contrario.

Definición:

Para $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ en A y
$P'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \forall x_i \; P(x_1, \ldots, x_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

si **para todo** a en A se tiene que $P(b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_n) = 1$,
y 0 en otro caso.

x_1	$\cdots$	x_{i-1}	x_{i+1}	$\cdots$	x_n	P'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_1	$\cdots$	b_{i-1}	b_{i+1}	$\cdots$	b_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ssi

x_1	$\cdots$	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$\cdots$	x_n	P
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_1	$\cdots$	b_{i-1}	a_1	b_{i+1}	$\cdots$	b_n	1
b_1	$\cdots$	b_{i-1}	a_2	b_{i+1}	$\cdots$	b_n	1
b_1	$\cdots$	b_{i-1}	a_3	b_{i+1}	$\cdots$	b_n	1
b_1	$\cdots$	b_{i-1}	a_4	b_{i+1}	$\cdots$	b_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿Cuándo ocurre que $P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 0$?

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x, y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) = \forall y \; O(x, y)$

  $O'(0) = \forall y \; O(0, y) \;\; = \;\; 1$

x	y	$O(x, y)$
0	0	1
0	1	1
0	2	1
0	3	1
0	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) = \forall y\ O(x,y)$

  $O'(2) = \forall y\ O(2,y) = 0$

x	y	$O(x,y)$
2	0	0
2	1	0
2	2	1
2	3	1
2	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuantificador universal: ejemplos

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) = \forall y \; O(x,y)$
- $O''(y) = \forall x \; O(x,y)$

$$O''(3) = \forall x \; O(x,3) \; = \; 0$$

x	y	$O(x,y)$
0	3	1
1	3	1
2	3	1
3	3	1
4	3	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) = \forall y\ O(x,y)$
- $O''(y) = \forall x\ O(x,y)$
- $R = \forall x\ P(x)$

  $R = 0$

x	$P(x)$
0	1
1	0
2	1
3	0
4	1
$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x, y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(x) = \forall y \; O(x, y)$
- $O''(y) = \forall x \; O(x, y)$
- $R = \forall x \; P(x)$
- $Q = \forall x \; \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$

  $Q = 1$

x	$P(x)$	$\neg P(x)$	$P(x) \vee \neg P(x)$
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	0	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado compuesto con dominio A.

Definición:

- Definimos el cuantificador **existencial**:

$$P'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \;=\; \exists x_i \; P(x_1, \ldots, x_n)$$

  donde x_i es la variable cuantificada y el resto de las variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ son las variables libres.

- Para $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ en A, definimos su evaluación como:

$$P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

  si **existe** a en A tal que $P(b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en caso contrario.

Definición:

Para $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n$ en A y $P'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \exists x_i\ P(x_1, \ldots, x_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

si **existe** a en A tal que $P(b_1, \ldots, b_{i-1}, a, b_{i+1}, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

$$\begin{array}{cccccc|c} x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_{i+1} & \cdots & x_n & P' \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_{i-1} & b_{i+1} & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & x_n & P \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_{i-1} & a & b_{i+1} & \cdots & b_n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

¿Cuándo ocurre que $P'(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \;=\; 0$?

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x, y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) = \exists x \; O(x, y)$

  $O'(2) = \exists x \; O(x, 2) \;=\; 1$

x	y	$O(x,y)$
0	2	1
1	2	1
2	2	1
3	2	0
4	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) = \exists x \; O(x,y)$
- $O''(x) = \exists y \; O(x,y)$

$$O''(2) = \exists y \; O(2,y) \; = \; 1$$

x	y	$O(x,y)$
2	0	0
2	1	0
2	2	1
2	3	1
2	4	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) = \exists x\ O(x,y)$
- $O''(x) = \exists y\ O(x,y)$
- $N(y) = \exists x\ \big(\neg P(x) \wedge O(x,y)\big)$

$N(2) = 1$

x	y	$\neg P(x)$	$O(x,y)$	$\neg P(x) \wedge O(x,y)$
0	2	0	1	0
1	2	1	1	1
2	2	0	1	0
3	2	1	0	0
4	2	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) = \exists x\ O(x,y)$
- $O''(x) = \exists y\ O(x,y)$
- $N(y) = \exists x\ \big(\neg P(x) \wedge O(x,y)\big)$

$$N(0) = 0$$

x	y	$\neg P(x)$	$O(x,y)$	$\neg P(x) \wedge O(x,y)$
0	0	0	1	0
1	0	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

¿Cuál es el valor de verdad de los siguientes predicados compuestos?

Para los predicados $P(x) = x$ es par y $O(x,y) = x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $\forall x \, \forall y \; O(x,y)$
- $\exists x \, \exists y \; O(x,y)$
- $\forall x \, \exists y \; O(x,y)$
- $\exists x \, \forall y \; O(x,y)$
- $\forall x \; \big(P(x) \rightarrow \exists y \; O(x,y)\big)$
- $\forall x \forall y \; \big(O(x,y) \rightarrow O(y,x)\big)$

Definición (final):

Decimos que un predicado es **compuesto** si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicancia ($\rightarrow$), doble-implicancia ($\leftrightarrow$), cuantificación universal ($\forall$) o cuantificación existencial ($\exists$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **evaluación** de un predicado compuesto corresponde a la evaluación iterativa de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Observación: Si el predicado compuesto es 0-**ario** (no tiene variables libres), entonces tiene un valor de verdad 0 o 1.

Considere los siguientes predicados básicos:

$$Bot(x) = x \text{ es un bot} \qquad Persona(x) = x \text{ es una persona}$$
$$Sigue(x, y) = x \text{ sigue a } y$$

sobre el conjunto de todos los usuarios de la red social X.

Escriba predicados compuestos que definan lo siguiente:

1. $C(x, y) = x$ e y tienen un seguidor en común.

$$C(x, y) = \exists z \left(Sigue(z, x) \wedge Sigue(z, y) \right)$$

2. $E(x) = x$ es una persona que se sigue a si misma.

$$E(x) = Persona(x) \wedge Sigue(x, x)$$

3. Todo bot sigue al menos a una persona.

$$\forall x \Big(Bot(x) \rightarrow \exists y \left(Persona(y) \wedge Sigue(x, y) \right) \Big)$$

4. La relación Sigue es *simétrica*: si x sigue a y, entonces y sigue a x.

$$\forall x\, \forall y \left(Sigue(x, y) \rightarrow Sigue(y, x) \right)$$

Considere los siguientes predicados básicos:

$$Suma(x, y, z) = (x + y = z) \qquad Mult(x, y, z) = (x \cdot y = z) \qquad x = y$$

sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Escriba predicados compuestos que definan lo siguiente:

1. $x \leq y$.

$$x \leq y = \exists z\,(Suma(x, z, y))$$

2. $x < y$.

$$x < y = x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

3. $Suc(x, y) = y$ es el sucesor de x.

$$Suc(x, y) = x < y \wedge \neg\exists z\left(x < z \wedge z < y\right)$$

Considere los siguientes predicados básicos:

$$Suma(x,y,z) = (x+y=z) \qquad Mult(x,y,z) = (x \cdot y = z) \qquad x = y$$

sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Escriba predicados compuestos que definan lo siguiente:

4. $Cero(x)$ = x es el numero 0.

$$Cero(x) = Suma(x,x,x)$$

$$Cero(x) = \forall y\,(x \leq y)$$

5. $Uno(x)$ = x es el numero 1.

$$Uno(x) = Mult(x,x,x)$$

$$Uno(x) = \exists y \left(Cero(y) \wedge Suc(y,x) \right)$$

6. $Primo(x)$ = x es un número primo.

$$Primo(x) = \neg Cero(x) \wedge \neg Uno(x) \wedge$$
$$\forall y \forall z \Big(Mult(y,z,x) \rightarrow \big((y=x) \vee (z=x) \big) \Big)$$

Considere los siguientes predicados básicos:

$$Suma(x, y, z) = (x + y = z) \qquad Mult(x, y, z) = (x \cdot y = z)$$
$$Igual(x, y) = (x = y)$$

sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

¿Qué están expresando los siguientes predicados compuestos?

1. $\exists x\, \forall y\, (x \leq y)$
2. $\forall x\, \exists y\, (Suma(y, y, x))$.
3. $\exists x\, \forall y\, (Mult(x, y, y))$
4. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(Suma(x, y, z) \to Suma(y, x, z)\big)$.
5. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big((Suc(x, y) \wedge Suc(y, z)) \to Suc(x, z)\big)$
6. $\forall x\, \big(Primo(x) \to \exists y\, (Primo(y) \wedge x < y)\big)$