



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN  
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

# Ayudantía 14 - Repaso I2

14 de noviembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

---

## 1 Relaciones vol 1000

Para un conjunto  $A$  no vacío, sea  $R \subseteq A \times A$  y  $T \subseteq A \times A$  dos relaciones de equivalencia. Se define:

$$(R \cup T)^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup T)^i.$$

1. Demuestre que  $(R \cup T)^t$  es una relación de equivalencia, donde  $(\cdot)^t$  es la clausura transitiva de  $R \cup T$ .
2. Demuestre que  $(R \cup T)^t$  es la menor relación de equivalencia que contiene a  $R$  y  $T$ , esto es, para toda relación de equivalencia  $S$  tal que  $R \subseteq S$  y  $T \subseteq S$  se tiene que  $(R \cup T)^t \subseteq S$ .

## 2 Inducción

(2) Si  $T_1 = (N_1, A_1)$  y  $T_2 = (N_2, A_2)$  son árboles binarios completos disjuntos (es decir,  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ), cada uno con raíz  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente, entonces

$$T = (N_1 \cup N_2 \cup \{u\}, A_1 \cup A_2 \cup \{(u, u_1), (u, u_2)\})$$

es un árbol binario completo con raíz  $u$ , donde  $u$  es un nodo que no está en  $N_1 \cup N_2$ . En este caso, llamamos a  $T_1$  y  $T_2$  el subárbol izquierdo y derecho, respectivamente, de  $u$ .

**Solución:**

Si  $T = (N, A)$  es un árbol binario completo y  $u \in N$ , decimos que  $u$  es una *hoja* si no tiene árbol izquierdo ni derecho. Demuestre que en todo árbol binario completo con  $n \geq 1$  nodos,

la cantidad de hojas es exactamente

$$\frac{n+1}{2}.$$

(Hint: aplique inducción fuerte sobre la cantidad de nodos.)

### 3 Cardinalidad

Considere los conjuntos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  con sus órdenes totales usuales  $\leq$ . Una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  es monótona decreciente si para cada  $n, m \in \mathbb{N}$  tal que  $n \leq m$ , se tiene que  $f(n) \geq f(m)$ .

Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ es una función monótona decreciente}\}$$

no es enumerable.