El axioma de la unión

El axioma de la unión se define para una versión generalizada de esta operación.

El axioma de la unión

El axioma de la unión se define para una versión generalizada de esta operación.

- Esta versión generalizada incluye uniones infinitas.

El axioma de la unión

El axioma de la unión se define para una versión generalizada de esta operación.

- Esta versión generalizada incluye uniones infinitas.

Ejemplo

Suponga que $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4, 5\}\}$. Entonces tenemos que:

$$\bigcup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

El axioma de la unión

$\bigcup A$ se define como:

$$\bigcup A = \{a \mid \text{existe } B \in A \text{ tal que } a \in B\}$$

El axioma de la unión

$\bigcup A$ se define como:

$$\bigcup A \quad = \quad \{a \mid \text{existe } B \in A \text{ tal que } a \in B\}$$

El axioma de la unión φ_{U} se define como:

$$\forall A \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow \exists B \, (x \in B \land B \in A))$$

El axioma de la unión

El siguiente teorema muestra que φ_{U} efectivamente generaliza a φ_{US}.

El axioma de la unión

El siguiente teorema muestra que φ_{U} efectivamente generaliza a φ_{US}.

Teorema

$\{\varphi_P, \varphi_U\} \models \varphi_{US}$

El axioma de la unión

El siguiente teorema muestra que φ_{U} efectivamente generaliza a φ_{US}.

Teorema

$\{\varphi_P, \varphi_U\} \models \varphi_{US}$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Axioma de separación

Definición de conjuntos por comprensión

Una segunda forma en la que podemos construir un conjunto es por comprensión.

Definición de conjuntos por comprensión

Una segunda forma en la que podemos construir un conjunto es por comprensión.

- Indicamos la propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto.

Definición de conjuntos por comprensión

Una segunda forma en la que podemos construir un conjunto es por comprensión.

- Indicamos la propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto.

Dada una propiedad $\alpha(x)$, definimos un conjunto A de la siguiente forma:

$$A = \{a \mid \alpha(a) \text{ es cierto}\}$$

Definición de conjuntos por comprensión

Una segunda forma en la que podemos construir un conjunto es por comprensión.

- Indicamos la propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto.

Dada una propiedad $\alpha(x)$, definimos un conjunto A de la siguiente forma:

$$A \quad = \quad \{a \mid \alpha(a) \text{ es cierto}\}$$

Ejemplo

Si definimos la propiedad $\alpha(x)$ como x está en $\mathbb{N}$ y el resto de la división entre x y 2 es 0, entonces

$$\text{Pares} \quad = \quad \{n \mid \alpha(n) \text{ es cierto}\}.$$

Definición de conjuntos por comprensión

¿En que lenguaje definimos la propiedad $\alpha(x)$?

Definición de conjuntos por comprensión

¿En que lenguaje definimos la propiedad $\alpha(x)$?

- ¡Utilizamos lógica de predicados!

Definición de conjuntos por comprensión

¿En que lenguaje definimos la propiedad $\alpha(x)$?

- ¡Utilizamos lógica de predicados!

Primer intento

Para cada fórmula $\alpha(x)$, el axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ se define como:

$$\exists A \forall x\, (x \in A \leftrightarrow \alpha(x))$$

Definición de conjuntos por comprensión

¿En que lenguaje definimos la propiedad $\alpha(x)$?

- ¡Utilizamos lógica de predicados!

Primer intento

Para cada fórmula $\alpha(x)$, el axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ se define como:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow \alpha(x))$$

Tenemos un número infinito de axiomas: cada fórmula $\alpha(x)$ genera un axioma de separación.

Pero tenemos un problema ...

Gottlob Frege

BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dr. GOTTLOB FREGE,

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

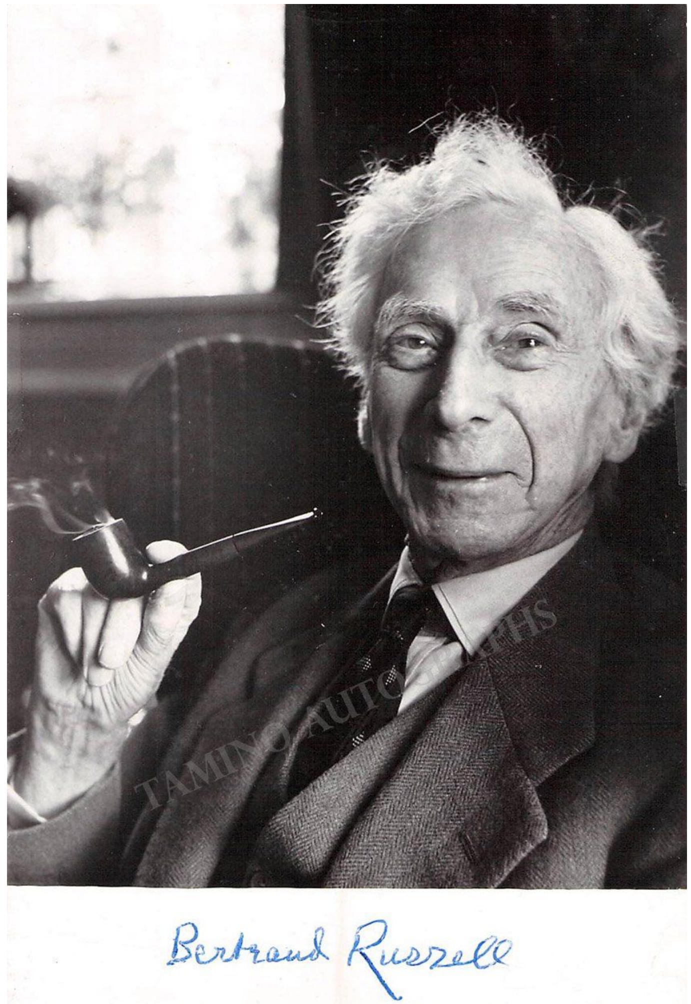
HALLE a/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

Begriffsschrift (1879)

Pero tenemos un problema ...



La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$.

La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$. Tenemos que $C \notin C$.

La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$. Tenemos que $C \notin C$.

Sea D el conjunto de todos los conjuntos que tienen al menos un elemento.

La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$. Tenemos que $C \notin C$.

Sea D el conjunto de todos los conjuntos que tienen al menos un elemento.

- $D = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$

La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$. Tenemos que $C \notin C$.

Sea D el conjunto de todos los conjuntos que tienen al menos un elemento.

- $D = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$

Tenemos que $D \in D$.

La paradoja de Russell (1902)

Sea $C = \{\emptyset\}$. Tenemos que $C \notin C$.

Sea D el conjunto de todos los conjuntos que tienen al menos un elemento.

- $D = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$

Tenemos que $D \in D$.

D está bien definido si permitimos definir conjuntos por compresión a partir de cualquier propiedad.

La paradoja de Russell (1902)

Si consideramos la propiedad $\alpha(x)$ definida como $x \notin x$, obtenemos el siguiente axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

La paradoja de Russell (1902)

Si consideramos la propiedad $\alpha(x)$ definida como $x \notin x$, obtenemos el siguiente axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es el conjunto de todos los conjuntos B tales que $B \notin B$.

La paradoja de Russell (1902)

Si consideramos la propiedad $\alpha(x)$ definida como $x \notin x$, obtenemos el siguiente axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es el conjunto de todos los conjuntos B tales que $B \notin B$.

- $C \in A$ y $D \notin A$ para los conjuntos C y D definimos en la lámina anterior.

La paradoja de Russell (1902)

Si consideramos la propiedad $\alpha(x)$ definida como $x \notin x$, obtenemos el siguiente axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es el conjunto de todos los conjuntos B tales que $B \notin B$.

- $C \in A$ y $D \notin A$ para los conjuntos C y D definimos en la lámina anterior.

¿Ve algún problema en la definición de A?

La paradoja de Russell (1902)

La definición de A:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

La paradoja de Russell (1902)

La definición de A:

$$\exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es un conjunto, por lo que nos podemos preguntar si $A \in A$.

La paradoja de Russell (1902)

La definición de A:

$$\exists A \forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es un conjunto, por lo que nos podemos preguntar si $A \in A$.

- Tenemos que $A \in A \leftrightarrow A \notin A$.

La paradoja de Russell (1902)

La definición de A:

$$\exists A \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \notin x)$$

A es un conjunto, por lo que nos podemos preguntar si $A \in A$.

- Tenemos que $A \in A \leftrightarrow A \notin A$.

Por lo tanto:

$$\{\varphi_{\mathsf{S},\alpha}\} \quad \models \quad \exists A\,(A \in A \leftrightarrow A \notin A)$$

La paradoja de Russell (1902)

Recuerde que la fórmula $x \notin y$ denota a $\neg\, x \in y$, por lo que tenemos:

$$\{\varphi_{\mathsf{S},\alpha}\} \quad \models \quad \exists A\,(A \in A \leftrightarrow \neg\, A \in A)$$

La paradoja de Russell (1902)

Recuerde que la fórmula $x \notin y$ denota a $\neg\, x \in y$, por lo que tenemos:

$$\{\varphi_{\mathsf{S},\alpha}\} \quad \models \quad \exists A\,(A \in A \leftrightarrow \neg\, A \in A)$$

La fórmula $\exists A\,(A \in A \leftrightarrow \neg\, A \in A)$ es una contradicción.

- **Concluimos que $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ es una contradicción.**

La paradoja de Russell (1902)

Recuerde que la fórmula $x \notin y$ denota a $\neg\, x \in y$, por lo que tenemos:

$$\{\varphi_{\mathsf{S},\alpha}\} \quad \models \quad \exists A\, (A \in A \leftrightarrow \neg\, A \in A)$$

La fórmula $\exists A\, (A \in A \leftrightarrow \neg\, A \in A)$ es una contradicción.

- **Concluimos que $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ es una contradicción.**

Hay que imponer restricciones sobre la forma en que se define un conjunto.

La axiomatización que utilizamos: ZFC

Ernst Zermelo

Abraham Fraenkel

La definición del axioma de separación

La idea central es que al definir un conjunto A por compresión, se *separan* los elementos de otro conjunto B que cumplen con una propiedad.

La definición del axioma de separación

La idea central es que al definir un conjunto A por compresión, se *separan* los elementos de otro conjunto B que cumplen con una propiedad.

- Tenemos una definición de la forma $A = \{a \in B \mid \alpha(a) \text{ es cierto}\}$.

La definición del axioma de separación

La idea central es que al definir un conjunto A por compresión, se *separan* los elementos de otro conjunto B que cumplen con una propiedad.

- Tenemos una definición de la forma $A = \{a \in B \mid \alpha(a) \text{ es cierto}\}$.
- Si el conjunto B está bien definido, entonces A también está bien definido.

La definición del axioma de separación

Para cada fórmula $\alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k)$, el axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ se define como:

$$\forall B \forall C_1 \ldots \forall C_k \exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow (x \in B \wedge \alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k)))$$

La definición del axioma de separación

Para cada fórmula $\alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k)$, el axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$ se define como:

$$\forall B \forall C_1 \ldots \forall C_k \exists A \forall x \, (x \in A \leftrightarrow (x \in B \wedge \alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k)))$$

Tenemos un número infinito de axiomas de separación.

- Cada fórmula $\alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k)$ define el axioma de separación $\varphi_{\mathsf{S},\alpha}$.

Los axiomas de la teoría ZFC

Llamamos Σ_{ZFC} al conjunto de oraciones que forman los axiomas de la teoría de conjuntos.

Los axiomas de la teoría ZFC

Llamamos Σ_{ZFC} al conjunto de oraciones que forman los axiomas de la teoría de conjuntos.

Suponemos por el momento que:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{ZFC}} = \{&\varphi_{\text{V}}, \varphi_{\text{E}}, \varphi_{\text{P}}, \varphi_{\text{U}}\} \cup \\ &\{\varphi_{\text{S},\alpha} \mid \alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k) \text{ es una fórmula sobre el vocabulario } \{\in\}\}\end{aligned}$$

Los axiomas de la teoría ZFC

Llamamos Σ_{ZFC} al conjunto de oraciones que forman los axiomas de la teoría de conjuntos.

Suponemos por el momento que:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathsf{ZFC}} = \{&\varphi_{\mathsf{V}}, \varphi_{\mathsf{E}}, \varphi_{\mathsf{P}}, \varphi_{\mathsf{U}}\} \cup \\ &\{\varphi_{\mathsf{S},\alpha} \mid \alpha(x, B, C_1, \ldots, C_k) \text{ es una fórmula sobre el vocabulario } \{\in\}\}\end{aligned}$$

Más adelante vamos a agregar más axiomas al conjunto Σ_{ZFC}.

Algunas operaciones sobre conjuntos

La definición de la intersección

Podemos usar los axiomas de la teoría de conjuntos para definir algunas operaciones usuales entre conjuntos.

La definición de la intersección

Podemos usar los axiomas de la teoría de conjuntos para definir algunas operaciones usuales entre conjuntos.

- Recuerde que ya definimos la unión, la cual necesita de un axioma especial.

La definición de la intersección

Podemos usar los axiomas de la teoría de conjuntos para definir algunas operaciones usuales entre conjuntos.

- Recuerde que ya definimos la unión, la cual necesita de un axioma especial.

$A \cap B$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A y B.

La definición de la intersección

Podemos usar los axiomas de la teoría de conjuntos para definir algunas operaciones usuales entre conjuntos.

- Recuerde que ya definimos la unión, la cual necesita de un axioma especial.

$A \cap B$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A y B.

- Por ejemplo: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 8\} = \{1, 3\}$

La definición de la intersección

La intersección entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$$

La definición de la intersección

La intersección entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \land x \in B))$$

No es necesario agregar esta oración a los axiomas de la teoría de conjuntos, puesto que:

La definición de la intersección

La intersección entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$$

No es necesario agregar esta oración a los axiomas de la teoría de conjuntos, puesto que:

Teorema

$\Sigma_{ZFC} \models \forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B))$

La definición de la diferencia

$A \setminus B$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

La definición de la diferencia

$A \smallsetminus B$ se define como el conjunto de elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

- Por ejemplo: $\{1, 2, 3\} \smallsetminus \{1, 3, 5, 8\} = \{2\}$

La definición de la diferencia

La diferencia entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

La definición de la diferencia

La diferencia entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

No es necesario agregar esta oración a los axiomas de la teoría de conjuntos, puesto que:

La definición de la diferencia

La diferencia entre A y B está definida por la siguiente oración:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$$

No es necesario agregar esta oración a los axiomas de la teoría de conjuntos, puesto que:

Teorema

$\Sigma_{ZFC} \models \forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B))$

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$$
$$\forall A \exists B \forall x\,(x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$$
$$\forall A\,(\neg \mathrm{Vac}(A) \to \exists x\,(x \in A \land \neg \exists y\,(y \in x \land y \in A)))$$
$$\forall x\,(x \notin x)$$
$$\forall x \forall y\,(x \notin y \lor y \notin x)$$

$\mathrm{Suc}(x, y) = \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x)$
$\forall A \exists B\, \mathrm{Suc}(A, B)$

$$\exists A(\forall x\, (\mathrm{Vac}(x) \rightarrow x \in A) \wedge \\ \forall x \forall y((x \in A \wedge \mathrm{Suc}(x, y)) \rightarrow y \in A))$$

$\mathrm{Ind}(A)$ se define como:

$$\forall x\, (\mathrm{Vac}(x) \rightarrow x \in A) \wedge \\ \forall x \forall y((x \in A \wedge \mathrm{Suc}(x, y)) \rightarrow y \in A))$$

Axioma de infinito: $\exists A\, \mathrm{Ind}(A)$
$\forall A \exists B \forall x\, (x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \forall C\, (\mathrm{Ind}(C) \rightarrow x \in C)))$
$\mathrm{Nat}(A)$ se define como $\forall x\, (x \in A \leftrightarrow \forall B\, (\mathrm{Ind}(B) \rightarrow x \in B))$
Se puede deducir
$\exists A\, \mathrm{Nat}(A)$
$\forall A \forall B\, ((\mathrm{Nat}(A) \wedge \mathrm{Nat}(B)) \rightarrow A = B)$