IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

01.09.2025

Hoy...

Teoría de conjuntos: construcciones básicas: separación, unión, conjunto potencia.

Separación

Axioma (de separación)

Sea $\phi(y, z_1, \ldots, z_k)$ *una fórmula de la lógica de predicados sobre* $\in, =$. *Entonces, para todos los conjuntos* $a, c_1, \ldots, c_k$ *existe un conjunto* $a' = \{b \in a \mid \phi(b, c_1, \ldots, c_k)\}$ *de todos los* $b \in a$ *tal que* $\phi(b, c_1, \ldots, c_k)$ *es cierto.*

Separación

Axioma (de separación)

Sea $\phi(y, z_1, \ldots, z_k)$ *una fórmula de la lógica de predicados sobre* $\in, =$. *Entonces, para todos los conjuntos* $a, c_1, \ldots, c_k$ *existe un conjunto* $a' = \{b \in a \mid \phi(b, c_1, \ldots, c_k)\}$ *de todos los* $b \in a$ *tal que* $\phi(b, c_1, \ldots, c_k)$ *es cierto.*

- Se puede juntar conjuntos según cualquier propiedad *dentro de un conjunto existente*.

Separación

Axioma (de separación)

Sea $\phi(y, z_1, \ldots, z_k)$ *una fórmula de la lógica de predicados sobre* $\in, =$*. Entonces, para todos los conjuntos* $a, c_1, \ldots, c_k$ *existe un conjunto* $a' = \{b \in a \mid \phi(b, c_1, \ldots, c_k)\}$ *de todos los* $b \in a$ *tal que* $\phi(b, c_1, \ldots, c_k)$ *es cierto.*

- Se puede juntar conjuntos según cualquier propiedad *dentro de un conjunto existente*.
- evita paradojas de la teoría de conjuntos informal.

Intersección y diferencia

Intersección y diferencia

Corolario

Sean a, b dos conjuntos. Entonces,

- *existe el conjunto $a \cap b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ y $x \in b$.*
- *existe el conjunto $a \setminus b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ y $x \notin b$.*

Unión generalizada

Axioma (de unión)

Para cada conjunto a *existe un conjunto* $Union(a)$ *tal que para todos los conjuntos* x*, tenemos* $x \in Union(a)$ *si sólo si existe* $b \in a$ *tal que* $x \in b$*.*

Preguntas unión

$$Union(\Big\{\{x,y,z\},\{z,a,b\}\Big\}) =$$

Preguntas unión

$$Union(\Big\{\{x, y, z\}, \{z, a, b\}\Big\}) =$$

$$Union(\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}) =$$

Preguntas unión

$$Union(\Big\{\{x, y, z\}, \{z, a, b\}\Big\}) =$$

$$Union(\Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}) =$$

$$¿Union(a) = Union(b) \implies a = b?$$

Corolarios de unión generalizada

Corolario

Sean a, b *dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto* $a \cup b$ *qué consiste exactamente de todos los conjuntos* x *tal que* $x \in a$ *o* $x \in b$*.*

Corolarios de unión generalizada

Corolario

Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto $a \cup b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ o $x \in b$.

Corolario

Para cualquier k conjuntos $a_1, \ldots, a_k$ existe un conjunto b cuyos elementos son exactamente $a_1, \ldots, a_k$.

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$?

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$?

$\mathcal{P}(a) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$. $\qquad a =$

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$?

$\mathcal{P}(a) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$. $\qquad a =$

¿$\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b) \implies a = b$?

¡Gracias!

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Teorema

Sean x, y, a, b cuatro conjuntos. Entonces, $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

Demostración.

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

$$\vdots$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

$$\vdots$$

Teorema

Para todos los conjuntos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, tenemos $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

Ejercicios pares ordenadas

$$(\varnothing, \varnothing) =$$

Ejercicios pares ordenadas

$$(\varnothing, \varnothing) =$$

$$(\{\varnothing\}, \varnothing) =$$

Ejercicios pares ordenadas

$$(\varnothing, \varnothing) =$$

$$(\{\varnothing\}, \varnothing) =$$

$$(x, y) = \{\{\{\varnothing\}\}\}, \qquad x = \qquad , \qquad\qquad y =$$

producto Cartesiano

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Teorema

Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto $a \times b$ tal que para todos los conjuntos p, tenemos $p \in a \times b$ si y sólo si existe $x \in a, y \in b$ tal que $p = (x, y)$.

Notación producto cartesiano

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c$$

$$a \times a = a^2$$

$$a \times a \times a = a^3$$