Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4 - Lógica de Predicados

29 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach Caetano Borges

---

1. Lógica de Predicados

1. Considere el símbolo de predicado binario = que en toda interpretación se interpreta como igualdad de elementos. Explique por qué la siguiente fórmula no es verdadera sin importar la interpretación:

$$\varphi = \forall x \forall y \neg(x = y)$$

Solución
Para demostrar esto, basta encontrar que para toda interpretacion $\exists x \exists y (x = y)$. Dado que toda interpretacion debe tener un dominio no vacío, siempre podremos tomar $x = x$ e $y = x$ donde se cumple que $x = y$, por ende la formula es siempre falsa.

2. Además, considere el símbolo de predicado ternario S. Determine el valor de verdad de las siguientes oraciones bajo las interpretaciones dadas, eligiendo libremente los valores de las variables libres. ¿Puede entregar alguna interpretación con la que cambie el valor de verdad?

- $\mathcal{I}(dom) = \{0\}, \mathcal{I}(\varphi) = \forall x \exists y \exists z[\neg(x = y) \wedge (x = z \vee y = z)]$
- $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}, \mathcal{I}(S(x, y, z)) = x < y < z, \mathcal{I}(\varphi(x)) = \forall y(S(x, y, y) \wedge S(x, x, y))$

Solución
1. Dado que el dominio es 0, solo podemos evaluar con $x = 0, y = 0, z = 0$ Donde claramente $\neg(0 = 0) \wedge (0 = 0 \vee 0 = 0)$ es falso.
   En cambio si tomamos $\mathcal{I}(\text{dom}) = \{0, 1\}$, la formula se hará verdadera para cualquier x si tomamos $y = (1 - x)$ y $(z = x)$.
2. Dado que el dominio son los naturales y la relacio significa $x < y < z$, la formula nunca se hara verdadera debido a que $\nexists x, x < x$.
   En cambio, si tomamos $\mathcal{I}(S(x, y, z)) = x \leq y \leq z$, la formula si sera verdadera.

2. Lógica de Predicados

Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar una arista en un grafo. Escriba una oración en logica de predicados que represente cada una de las siguientes propiedades.

1. El grafo es un clique[1]
2. El grafo contiene un clique con 4 nodos
3. El grafo tiene un ciclo con 4 nodos
4. Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4
5. La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3
6. El grafo contiene exactamente 3 nodos

Solución

1. $\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \implies E(x, y))$

2. $Distintos(a, b, c, d) := \neg(a = b) \wedge \neg(a = c) \wedge \neg(a = d) \wedge \neg(b = c) \wedge \neg(b = d) \wedge \neg(c = d)$
   $Cliqueados(a, b, c, d) := E(a, b) \wedge E(a, c) \wedge E(a, d) \wedge E(b, c) \wedge E(b, d) \wedge E(c, d)$
   $\varphi = \exists x \exists y \exists z \exists w Distintos(x, y, z, w) \wedge Cliqueados(x, y, z, w)$

3. $Ciclo(a, b, c, d) := E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d) \wedge E(d, a)$
   $\varphi = \exists x \exists y \exists z \exists w Distintos(x, y, z, w) \wedge Ciclo(x, y, z, w)$

4. Para esta parte usaremos los predicados $Distintos(a, b, c, d, e)$ y $Distintos(a, b, c)$ que se definen de la misma manera que $Distintos(a, b, c, d)$ pero con 5 y 3 variables en vez que 4.
   $Camino_4(a, b) := \exists c \exists d \exists e \ Distintos(a, b, c, d, e) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d) \wedge E(d, e)$
   $Camino_3(a, b) := \exists c \exists d \ Distintos(a, b, c, d) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(c, d)$
   $Camino_2(a, b) := \exists c \ Distintos(a, b, c) \wedge E(a, b) \wedge E(b, c)$
   $\varphi = \exists a \exists b \ Camino_4(a, b) \wedge \neg Camino_3(a, b) \wedge \neg Camino_2(a, b)$

5. $\varphi = \forall x \forall y (\neg(x = y) \implies (E(x, y) \vee Camino_2(x, y) \vee Camino_3(x, y)))$

6. $\varphi = \exists x \exists y \exists z \ Distintos(x, y, z) \wedge \neg \exists w \ Distintos(x, y, z, w)$

[1]Un clique es un subgrafo, donde cada nodo del subgrafo está conectado a todo el resto de nodos del subgrafo.

3. Modelamiento

Considere el contexto de personas y un cahuin que se cuenta de persona en persona. Para modelar este problema, considere los símbolos de predicados $R(x), C(x, y), x = y$.

Además considere la siguiente interpretación[2]:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(dom) &\coloneqq \text{Personas}\\ \mathcal{I}(R(x)) &\coloneqq x \text{ conoce el cahuin}\\ \mathcal{I}(C(x,y)) &\coloneqq x \text{ le contó el cahuin a } y\\ \mathcal{I}(x = y) &\coloneqq x \text{ es igual a } y\end{aligned}$$

Usando lógica de predicados uno puede definir afirmaciones sobre las personas y el conocimiento del cahuin. Por ejemplo, la afirmación "existe una persona que conoce el cahuin y otra que no" se puede definir con la fórmula $\varphi = \exists x \exists y (R(x) \land \neg R(y))$.

Para esta pregunta defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando prevemente su correctitud.

1. Si una persona conoce el cahuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.

Solución

1. Si una persona conoce el cahuin y se lo contó a otra persona, entonces esa otra persona conoce el cahuin.
$$\forall x \forall y (R(x) \land C(x, y) \to R(y))$$
2. Nadie puede conocer el cahuin y habérselo contado a sí mismo.
$$\neg \exists x (R(x) \land C(x, x))$$
3. Existe un "cahuinero original", o sea, alguien que conoce el cahuin pero que nadie se lo contó.
$$\exists x (R(x) \land \forall y \neg C(y, x))$$
4. No existen "triángulos de cahuineros", o sea, tres personas distintas que se contaron el cahuin circularmente.
$$\neg \exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \land \neg(y = z) \land \neg(z = x) \land C(x, y) \land C(y, z) \land C(z, x))$$

[2]Esto también se puede denotar $R^{\mathcal{I}} = \ldots$, o simplemente $R(x) = \ldots$. Significa exactamente lo mismo.