Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Tarea 4

1 de Octubre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Pregunta 1

Sea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Demuestre que todo número entero m tal que $1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$ se puede expresar como suma de los elementos de un subconjunto de A.

Solución

Usaremos inducción (simple) para demostrar que para todo $n \geq 1$ se cumple lo siguiente:

Si $A = \{1, \ldots, n\}$, entonces todo entero m tal que $1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$ se puede expresar como suma de los elementos de un subconjunto de A.

Caso base: Veamos el caso $n = 1$. En este caso $A = \{1\}$ y $\frac{n(n+1)}{2} = 1$. Luego, el único m que hay que considerar es $m = 1$, el cual se puede expresar como la suma de los elementos del subconjunto $\{1\} \subseteq A$.

Paso inductivo: Asumamos que la propiedad se cumple para $n \geq 1$. Demostremos que la propiedad se cumple para $n + 1$. Sea $A = \{1, \ldots, n + 1\}$ y sea un m arbitrario tal que $1 \leq m \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Separaremos el análisis en dos casos.

Si $1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$, por la hipótesis inductiva, tenemos que hay un subconjunto $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que m es la suma de los elementos de S. En particular, $S \subseteq A = \{1, \ldots, n+1\}$, así que estamos listos.

Supongamos ahora que $\frac{n(n+1)}{2}+1 \leq m \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En este caso, podemos definir directamente (sin usar la hipótesis inductiva) el subconjunto $S \subseteq A = \{1, \ldots, n+1\}$ que buscamos. Notar que en este caso, m se puede escribir como $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k$, donde k es un natural tal que

$0 \leq k \leq n$. En efecto, si $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, basta escoger $k = 0$. Si $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$, basta escoger $k = 1$, y asi sucesivamente. En el caso extremo, si $m = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, basta escoger $k = n$ ya que:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 - n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Notar también que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Luego, si $m = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - k$, con $k = 0$, basta escoger el subconjunto $S = \{1, \ldots, n+1\}$. Si $1 \leq k \leq n$, basta escoger el subconjunto $S = \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$.

Distribución de puntaje:
1.0 pts por el caso base. 5.0 pts por hacer correctamente el paso inductivo. Descuentos y puntajes parciales a criterio del corrector.

Pregunta 2

(a) (3.0 pts) Demuestre que todo producto que vale $n \geq 30$ pesos se puede pagar sin vuelto con monedas de 5 y 8 pesos.

(b) (3.0 pts) ¿Cuál es el mínimo número natural n_0 tal que el problema anterior es cierto para todo $n \geq n_0$?

Solución

(a) Demostraremos el enunciado por inducción fuerte sobre $n \geq 30$.

Caso base: Necesitamos verificar los casos bases $n = 30, 31, 32, 33, 34$.

$$\begin{aligned}
30 &= 5 \cdot 6, \\
31 &= 5 \cdot 3 + 8 \cdot 2, \\
32 &= 8 \cdot 4, \\
33 &= 5 \cdot 5 + 8, \\
34 &= 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Paso inductivo: Sea $n \geq 35$ y supongamos que todo producto que vale k pesos, donde $30 \leq k < n$, se puede pagar con monedas de 5 y 8 pesos. Debemos demostrar la misma propiedad para n. Podemos aplicar la hipótesis inductiva para un producto de $m = n - 5$

pesos, ya que $30 \leq m < n$. Agregando una moneda de 5 pesos al pago, obtenemos la propiedad para n.

(b) Se puede ver que la afirmación también es cierta para $n = 29, 28$:

$$29 = 5 + 8 \cdot 3,$$
$$28 = 5 \cdot 4 + 8.$$

Ya que en el punto anterior demostramos la afirmación para todo $n \geq 30$, la propiedad es cierta para todo $n \geq 28$. Por el otro lado, se puede ver que la afirmación no es cierta para $n = 27$, ya que ninguno de los siguientes números es múltiplo de 5:

$$27 \qquad 27 - 8 = 19 \qquad 27 - 2 \cdot 8 = 11 \qquad 27 - 3 \cdot 8 = 3$$

Por lo tanto, la respuesta es $n_0 = 28$.

Distribución de puntaje:

- (a) 1.0 pts por el caso base, 2.0 pts por hacer correctamente el paso inductivo.
- (b) 2.0 pts por demostrar que la propiedad se cumple para $n \geq 28$. 1.0 pts por demostrar que la propiedad no se cumple para 27.

Descuentos y puntajes parciales a criterio del corrector.