



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Ayudantía Repaso I1

26 de septiembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

1. Lógica proposicional

Recuerde que una cláusula es una disyunción de literales, y un literal es una variable o su negación. Demuestre que para todo par de cláusulas C_1 y C_2 , y todo literal ℓ se cumple:

$$\{C_1 \vee \ell, C_2 \vee \neg \ell\} \models C_1 \vee C_2.$$

2. Modelamiento

Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de 3×3 , construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completible si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C .

3. Lógica de Predicados

Para esta pregunta considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{F, P, A, N, E, H\}$, donde F, P, A, N son símbolos unarios, E es binario, y H es ternario. Además, considere la siguiente interpretación \mathcal{I} :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\text{dom}) &= \text{Los Pokemon.} \\ \mathcal{I}(F(x)) &= x \text{ es de naturaleza fuego.} \\ \mathcal{I}(A(x)) &= x \text{ es de naturaleza agua.} \\ \mathcal{I}(P(x)) &= x \text{ es de naturaleza planta.} \\ \mathcal{I}(N(x)) &= x \text{ es de naturaleza normal.} \\ \mathcal{I}(E(x, y)) &= \text{los ataques de } x \text{ son efectivos contra } y. \\ \mathcal{I}(H(x, y, z)) &= z \text{ fue procreado entre } x \text{ e } y. \end{aligned}$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados:

1. Todos los Pokemon son de alguna naturaleza.
2. Algunos Pokemon poseen 2 naturalezas.
3. Los ataques de naturaleza agua son efectivos contra pokemon de naturaleza fuego, los de naturaleza fuego son efectivos contra pokemon de naturaleza planta y los ataques de naturaleza planta son efectivos contra pokemon de naturaleza agua.
4. Si dos Pokemon son de la misma naturaleza, entonces sus hijos son de aquella naturaleza.
5. Los Pokemon que son hermanos comparten las mismas naturalezas.

4. Conjuntos

1. Sean A y B conjuntos. Demuestre las siguientes afirmaciones:
 - (a) $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
 - (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

2. Una *tupla* con dos elementos a y b se define como $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. El *producto cartesiano* entre dos conjuntos A y B se denota $A \times B$ y es el conjunto de todas las tuplas (a, b) que cumplen $a \in A$ y $b \in B$. Demuestre que $A \times B$ está bien definido usando los axiomas de la teoría de conjuntos.