Inducción a partir de un cierto número

Sea $k \in \mathbb{N}$.

Inducción a partir de un cierto número

Sea $k \in \mathbb{N}$.

Si P es una propiedad tal que:

$$\begin{array}{lll} \text{Caso base} & : & P \text{ se cumple para k,} \\ \text{Caso inductivo} & : & \text{si } P \text{ se cumple para } n \geq k, \\ & & \text{entonces } P \text{ se cumple para } n+1, \end{array}$$

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales mayores o iguales a k.

Inducción a partir de un cierto número

Sea $k \in \mathbb{N}$.

Si P es una propiedad tal que:

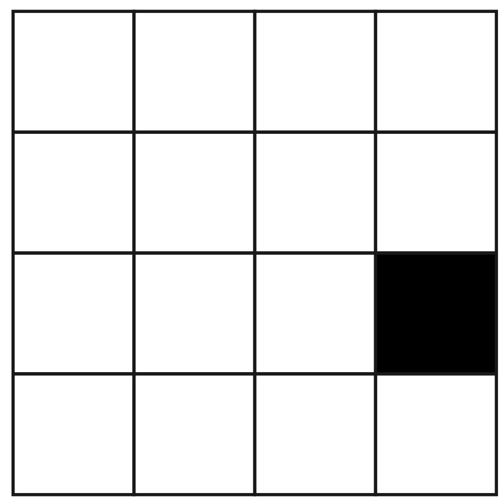
Caso base	:	P se cumple para k,
Caso inductivo	:	si P se cumple para $n \geq k$,
		entonces P se cumple para $n + 1$,

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales mayores o iguales a k.

¿Por qué es válido este principio de inducción?

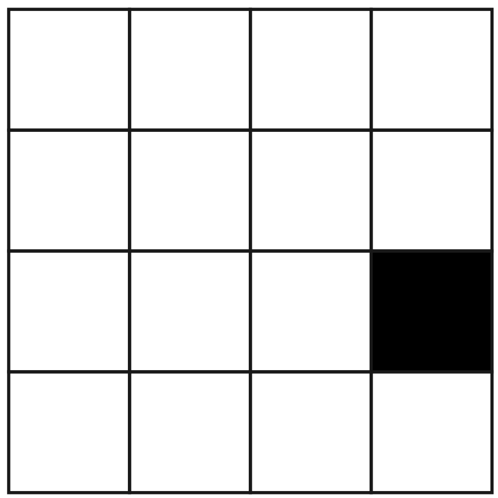
Cubriendo un tablero

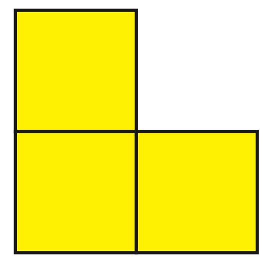
Considere el siguiente tablero de 4×4 con una celda de color negro:



Cubriendo un tablero

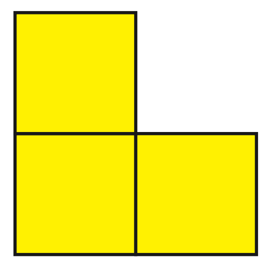
Es posible cubrir las celdas blancas utilizando la siguiente pieza:





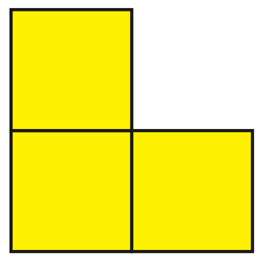
Cubriendo un tablero

Demuestre que para cualquier tablero de $2^n \times 2^n$ con una celda negra, es posible cubrir las celdas blancas con la siguiente pieza:



Cubriendo un tablero

Demuestre que para cualquier tablero de $2^n \times 2^n$ con una celda negra, es posible cubrir las celdas blancas con la siguiente pieza:



Haga la demostración por inducción a partir del número 1.

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

Recuerde que un número p es primo si es mayor o igual a 2 y sus únicos divisores son 1 y p.

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

Recuerde que un número p es primo si es mayor o igual a 2 y sus únicos divisores son 1 y p.

Cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

Recuerde que un número p es primo si es mayor o igual a 2 y sus únicos divisores son 1 y p.

Cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

- $2 = 2$

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

Recuerde que un número p es primo si es mayor o igual a 2 y sus únicos divisores son 1 y p.

Cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

- $2 = 2$
- $6 = 2 \cdot 3$

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

Recuerde que un número p es primo si es mayor o igual a 2 y sus únicos divisores son 1 y p.

Cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

- $2 = 2$
- $6 = 2 \cdot 3$
- $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

¿Es posible demostrar la propiedad anterior usando inducción?

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

¿Es posible demostrar la propiedad anterior usando inducción?

- La inducción debe hacerse a partir de $n \geq 2$.

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

¿Es posible demostrar la propiedad anterior usando inducción?

- La inducción debe hacerse a partir de $n \geq 2$.

¿Cuál es el problema con el paso inductivo?

La necesidad de un principio de inducción más fuerte

¿Es posible demostrar la propiedad anterior usando inducción?

- La inducción debe hacerse a partir de $n \geq 2$.

¿Cuál es el problema con el paso inductivo?

- Suponer que la propiedad se cumple para n no nos sirve para demostrar que la propiedad se cumple para $n + 1$

Inducción fuerte

Si P es una propiedad tal que:

Caso base	:	P se cumple para 0,
Caso inductivo	:	si P se cumple para todo k tal que $k < n$, entonces P se cumple para n,

entonces se tiene que P se satisface para todos los números naturales.

¿Pero es realmente más fuerte el nuevo principio?

Considere una propiedad P para los números naturales.

¿Pero es realmente más fuerte el nuevo principio?

Considere una propiedad P para los números naturales.

Defina P' a partir de P de la siguiente forma:

$$P' \;=\; \{n \in \mathbb{N} \;\mid\; P \text{ se cumple para todo } k \leq n\}$$

¿Pero es realmente más fuerte el nuevo principio?

Considere una propiedad P para los números naturales.

Defina P' a partir de P de la siguiente forma:

$$P' \; = \; \{n \in \mathbb{N} \mid P \text{ se cumple para todo } k \leq n\}$$

Demostrar P usando inducción fuerte es equivalente a demostrar P' usando inducción (usual).

¿Pero es realmente más fuerte el nuevo principio?

Considere una propiedad P para los números naturales.

Defina P' a partir de P de la siguiente forma:

$$P' \;=\; \{n \in \mathbb{N} \mid P \text{ se cumple para todo } k \leq n\}$$

Demostrar P usando inducción fuerte es equivalente a demostrar P' usando inducción (usual).

- Inducción fuerte no es entonces una nueva forma de inducción.

¿Pero es realmente más fuerte el nuevo principio?

Considere una propiedad P para los números naturales.

Defina P' a partir de P de la siguiente forma:

$$P' \;=\; \{n \in \mathbb{N} \mid P \text{ se cumple para todo } k \leq n\}$$

Demostrar P usando inducción fuerte es equivalente a demostrar P' usando inducción (usual).

- Inducción fuerte no es entonces una nueva forma de inducción.
- Pero si es útil en muchos casos formular la inducción con la hipótesis más fuerte.

El teorema fundamental de la aritmética

Demuestre usando inducción fuerte que cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

El teorema fundamental de la aritmética

Demuestre usando inducción fuerte que cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

Además, se puede demostrar que esta representación es única para cada número n.

El teorema fundamental de la aritmética

Demuestre usando inducción fuerte que cada número natural $n \geq 2$ puede escribirse como una multiplicación de potencias de números primos.

Además, se puede demostrar que esta representación es única para cada número n.

- Este es el teorema fundamental de la aritmética.

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Para hacer esta demostración por inducción:

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Para hacer esta demostración por inducción:

- El punto de partida debe ser $n = 8$.

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Para hacer esta demostración por inducción:

- El punto de partida debe ser $n = 8$.
- Debemos usar inducción fuerte.

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Para hacer esta demostración por inducción:

- El punto de partida debe ser $n = 8$.
- Debemos usar inducción fuerte.

¿Ve algún problema en la inducción?

Un último ingrediente

Demuestre que cada número natural $n \geq 8$ se puede escribir como una suma de los números 3 y 5.

Para hacer esta demostración por inducción:

- El punto de partida debe ser $n = 8$.
- Debemos usar inducción fuerte.

¿Ve algún problema en la inducción?

- Para esta demostración tenemos que considerar varios casos base.

Una demostración con varios casos base

Casos base:

Una demostración con varios casos base

Casos base:

Para $n = 8$ tenemos que $8 = 3 + 5$

Una demostración con varios casos base

Casos base:

Para $n = 8$ tenemos que $8 = 3 + 5$

Para $n = 9$ tenemos que $9 = 3 + 3 + 3$

Una demostración con varios casos base

Casos base:

Para $n = 8$ tenemos que $8 = 3 + 5$

Para $n = 9$ tenemos que $9 = 3 + 3 + 3$

Para $n = 10$ tenemos que $10 = 5 + 5$

Una demostración con varios casos base

Caso inductivo:

Una demostración con varios casos base

Caso inductivo:

Sea $n \geq 11$, y suponga que para todo k tal que $8 \leq k < n$ se tiene que k puede escribirse como una suma de números 3 y 5.

Una demostración con varios casos base

Caso inductivo:

Sea $n \geq 11$, y suponga que para todo k tal que $8 \leq k < n$ se tiene que k puede escribirse como una suma de números 3 y 5.

Considere $k = n - 3$. Como $n \geq 11$, tenemos que $8 \leq k < n$.

Una demostración con varios casos base

Caso inductivo:

Sea $n \geq 11$, y suponga que para todo k tal que $8 \leq k < n$ se tiene que k puede escribirse como una suma de números 3 y 5.

Considere $k = n - 3$. Como $n \geq 11$, tenemos que $8 \leq k < n$.

- Note que los casos $n = 8$, $n = 9$ y $n = 10$ quedan fuera del caso inductivo, y por lo tanto tiene que se demostrados como casos base.

Una demostración con varios casos base

Por hipótesis de inducción sabemos que $k = s_1 + \ldots + s_\ell$, donde $s_i \in \{3, 5\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Una demostración con varios casos base

Por hipótesis de inducción sabemos que $k = s_1 + \ldots + s_\ell$, donde $s_i \in \{3, 5\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Como $n = k + 3$, concluimos que $n = 3 + s_1 + \ldots + s_\ell$.

Una demostración con varios casos base

Por hipótesis de inducción sabemos que $k = s_1 + \ldots + s_\ell$, donde $s_i \in \{3, 5\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Como $n = k + 3$, concluimos que $n = 3 + s_1 + \ldots + s_\ell$.

Deducimos que n se puede escribir como una suma de números 3 y 5.

- Esto concluye nuestra demostración por inducción.

El principio del mínimo

Considere el orden usual sobre $\mathbb{N}$.

El principio del mínimo

Considere el orden usual sobre $\mathbb{N}$.

Principio del mínimo: Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

El principio del mínimo

Considere el orden usual sobre $\mathbb{N}$.

Principio del mínimo: Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

- Existe $a \in A$ tal que para todo $b \in A$ se tiene que $a \leq b$.

El principio del mínimo

Considere el orden usual sobre $\mathbb{N}$.

Principio del mínimo: Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

- Existe $a \in A$ tal que para todo $b \in A$ se tiene que $a \leq b$.

Vamos a demostrar el principio del mínimo usando inducción.

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

Existe entonces un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo.

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

Existe entonces un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo.

- Para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $b < a$.

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

Existe entonces un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo.

- Para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $b < a$.

Defina la siguiente propiedad P sobre $\mathbb{N}$:

$$P \;=\; \{n \in \mathbb{N} \;\mid\; n \not\in A\}$$

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

Existe entonces un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo.

- Para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $b < a$.

Defina la siguiente propiedad P sobre $\mathbb{N}$:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

Vamos a demostrar por inducción fuerte que P es cierto para todos los números naturales.

El principio del mínimo: demostración

Suponga que el principio del mínimo es falso.

Existe entonces un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que no tiene un elemento mínimo.

- Para todo $a \in A$, existe $b \in A$ tal que $b < a$.

Defina la siguiente propiedad P sobre $\mathbb{N}$:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

Vamos a demostrar por inducción fuerte que P es cierto para todos los números naturales.

- Obtenemos entonces una contradicción ya que $A = \emptyset$. Esto nos dice que el principio del mínimo es cierto.

El principio del mínimo: demostración

Caso base:

El principio del mínimo: demostración

Caso base:

Si $0 \in A$, entonces A tiene un mínimo.

El principio del mínimo: demostración

Caso base:

Si $0 \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- 0 es el mínimo de A.

El principio del mínimo: demostración

Caso base:

Si $0 \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- 0 es el mínimo de A.

Como tenemos que A no tiene mínimo, entonces $0 \notin A$.

El principio del mínimo: demostración

Caso base:

Si $0 \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- 0 es el mínimo de A.

Como tenemos que A no tiene mínimo, entonces $0 \notin A$.

- Concluimos que $0 \in P$.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

- Vale decir, $k \notin A$ para todo $k < n$.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

- Vale decir, $k \notin A$ para todo $k < n$.

Si $n \in A$, entonces A tiene un mínimo.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

- Vale decir, $k \notin A$ para todo $k < n$.

Si $n \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- n es el elemento mínimo de A puesto que $k \notin A$ para todo $k < n$.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

- Vale decir, $k \notin A$ para todo $k < n$.

Si $n \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- n es el elemento mínimo de A puesto que $k \notin A$ para todo $k < n$.

Como tenemos que A no tiene mínimo, entonces $n \notin A$.

El principio del mínimo: demostración

Caso inductivo:

Suponga que $k \in P$ para todo $k < n$.

- Vale decir, $k \notin A$ para todo $k < n$.

Si $n \in A$, entonces A tiene un mínimo.

- n es el elemento mínimo de A puesto que $k \notin A$ para todo $k < n$.

Como tenemos que A no tiene mínimo, entonces $n \notin A$.

- Concluimos que $n \in P$.

El principio del mínimo: demostración

Por el principio de inducción fuerte tenemos que $P = \mathbb{N}$.

El principio del mínimo: demostración

Por el principio de inducción fuerte tenemos que $P = \mathbb{N}$.

- Por lo tanto $A = \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción.

El principio del mínimo: demostración

Por el principio de inducción fuerte tenemos que $P = \mathbb{N}$.

- Por lo tanto $A = \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Concluimos que cada subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

El principio del mínimo: demostración

Por el principio de inducción fuerte tenemos que $P = \mathbb{N}$.

- Por lo tanto $A = \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Concluimos que cada subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

El principio del mínimo es cierto sobre $\mathbb{N}$.

Inducción fuerte y el principio del mínimo

Vamos a demostrar que el principio del mínimo implica al principio de inducción fuerte.

Inducción fuerte y el principio del mínimo

Vamos a demostrar que el principio del mínimo implica al principio de inducción fuerte.

El principio del mínimo es equivalente entonces al principio de inducción fuerte.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Suponga que para una propiedad $P \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que:

- $0 \in P$
- Si para cada $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Suponga que para una propiedad $P \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que:

- $0 \in P$
- Si para cada $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$

Suponga que $P \neq \mathbb{N}$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Suponga que para una propiedad $P \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que:

- $0 \in P$
- Si para cada $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$

Suponga que $P \neq \mathbb{N}$.

Usando el principio del mínimo vamos a llegar a una contradicción con el supuesto de que $P \neq \mathbb{N}$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Suponga que para una propiedad $P \subseteq \mathbb{N}$ tenemos que:

- $0 \in P$
- Si para cada $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$

Suponga que $P \neq \mathbb{N}$.

Usando el principio del mínimo vamos a llegar a una contradicción con el supuesto de que $P \neq \mathbb{N}$.

- Esto nos dice que $P = \mathbb{N}$, y llegamos a la conclusión de que el principio de inducción fuerte es cierto.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Sea A el siguiente conjunto de números naturales:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin P\}$$

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Sea A el siguiente conjunto de números naturales:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin P\}$$

Como $P \neq \mathbb{N}$, sabemos que A es un conjunto no vacío.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

Sea A el siguiente conjunto de números naturales:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin P\}$$

Como $P \neq \mathbb{N}$, sabemos que A es un conjunto no vacío.

Por el principio del mínimo, A tiene un menor elemento a.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

Como a es el menor elemento de A, concluimos que $b \notin A$ para $b < a$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

Como a es el menor elemento de A, concluimos que $b \notin A$ para $b < a$.

- Por lo tanto $b \in P$ para cada $b < a$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

Como a es el menor elemento de A, concluimos que $b \notin A$ para $b < a$.

- Por lo tanto $b \in P$ para cada $b < a$.

Pero entonces tenemos que $a \in P$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

Como a es el menor elemento de A, concluimos que $b \notin A$ para $b < a$.

- Por lo tanto $b \in P$ para cada $b < a$.

Pero entonces tenemos que $a \in P$.

- Puesto que si para todo $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$.

El principio del mínimo implica el principio de inducción fuerte

$a \neq 0$ puesto que $0 \in P$.

- Por lo tanto $a \geq 1$.

Como a es el menor elemento de A, concluimos que $b \notin A$ para $b < a$.

- Por lo tanto $b \in P$ para cada $b < a$.

Pero entonces tenemos que $a \in P$.

- Puesto que si para todo $k < n$ se tiene que $k \in P$, entonces $n \in P$.

Esto concluye la demostración ya que obtuvimos una contradicción.

Un ejercicio final

Ejercicio

Considere la sucesión de Fibonacci dada por: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.

Un ejercicio final

Ejercicio

Considere la sucesión de Fibonacci dada por: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para cada $n \geq 2$.

1. Demuestre usando inducción fuerte que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2. Demuestre la propiedad anterior usando el principio del mínimo.