# IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

27.08.2025

# Hoy...

Lógica de predicados: equivalencias, teorías y modelos (satisfacibilidad), tautologías y consecuencias.

# Equivalencias

### Definición

*Dos fórmulas* $\phi$ *y* $\psi$ *de la lógica de predicados son equivalentes si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

# Equivalencias

### Definición

*Dos fórmulas $\phi$ y $\psi$ de la lógica de predicados son equivalentes si $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$ para cualquier interpretación $\mathcal{I}$.*

Nota: equivalencias de la lógica proposicional son caso particular de las equivalencias de la lógica de predicados.

$\underline{A \to B}$ es equivalente $\underline{\neg A \vee B}$

# Ejemplo de equivalencia

$y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$

## Proposición

*Fórmulas*

$$\phi = \exists x\Big(A(x,\bar{y}) \vee B(x,\bar{y})\Big), \qquad \psi = (\exists x A(x,\bar{y})) \vee (\exists x B(x,\bar{y}))$$

*son equivalentes.*

$\exists x\,(A(x) \vee B(x))$, $(\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x))$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | | |
| B | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Ambas fórmulas dicen que en la tabla hay por lo menos un $\underline{1}$.

# Ejemplo de equivalencia

## Proposición

*Fórmulas*

$$\phi = \exists x \Big( A(x, \bar{y}) \vee B(x, \bar{y}) \Big), \qquad \psi = (\exists x A(x, \bar{y})) \vee (\exists x B(x, \bar{y}))$$

*son equivalentes.*

¿Son equivalentes?

$$\phi = \forall x \Big( A(x) \vee B(x) \Big), \qquad \psi = (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))$$

# Ejemplo de equivalencia

## Proposición

*Fórmulas*

$$\phi = \forall x A(x, \bar{y}), \qquad \psi = \neg \exists x \Big( \neg A(x, \bar{y}) \Big)$$

*son equivalentes.*

¿Cual fórmula con $\forall$ es equivalente a $\exists x A(x, \bar{y})$?

# Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

# Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

### Definición

*Un conjunto de oraciones de la lógica proposicional se llama una* **teoría**.

# Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

### Definición

*Un conjunto de oraciones de la lógica proposicional se llama una* **teoría**.

### Definición

*Sea $T$ una teoría. Su* **modelo** *es una interpretación $\mathcal{M}$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todas $\phi \in T$.*

# Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

### Definición

*Un conjunto de oraciones de la lógica proposicional se llama una* **teoría**.

### Definición

*Sea* $T$ *una teoría. Su* **modelo** *es una interpretación* $\mathcal{M}$ *tal que* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ *para todas* $\phi \in T$.

Si $T$ solo posee fórmulas proposicionales, su modelo es una asignaciones de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en $T$ toman valor 1 (recuerden z3-solver).

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \wedge A(y,x)) \to x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \wedge A(y,z)) \to A(x,z) \Big) \tag{3}$$

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

| A | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \land A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \land A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

| A | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \land A(y,x)) \to x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \land A(y,z)) \to A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

| A | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

| A | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 1 |

## Satisfacibilidad y consecuencias

### Definición

*Sea $T$ una teoría.*

# Satisfacibilidad y consecuencias

## Definición

*Sea $T$ una teoría.*

- *$T$ se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*

# Satisfacibilidad y consecuencias

## Definición

*Sea $T$ una teoría.*

- *$T$ se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*
- *Sea $\psi$ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todos los modelos $\mathcal{M}$ de $T$.*

# Satisfacibilidad y consecuencias

## Definición

*Sea $T$ una teoría.*

- *$T$ se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*
- *Sea $\psi$ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todos los modelos $\mathcal{M}$ de $T$.*

## Proposición

*Sea $T$ una teoría y $\psi$ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si y sólo si $T \cup \{\neg\psi\}$ no es satisfacible.*

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$T_{op} = \{(1\text{–}3)\}$

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

¿ $T_{op} \models \forall x \forall y \Big( A(x, y) \vee A(y, x) \Big)$?

# Ejemplo: teoría de orden parcial

$T_{op} = \{(1\text{–}3)\}$

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

¿$T_{op} \models \forall x \forall y \Big( A(x,y) \vee A(y,x) \Big)$?

¿$T_{op} \models \forall x \forall y \forall z \Big( (C(x,y) \wedge C(y,z)) \rightarrow C(x,z) \Big)$? donde $C(x,y) = A(x,y) \vee A(y,x)$.

# Espacio

# Ejemplo más dificil

$T_{op} = \{(1–3)\}$

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

## Teorema (Dilworth)

*Para cada orden parcial, lo siguiente es cierto. No existen 3 elementos distintos incomparables si y sólo si existen 2 elementos tal que cada elemento es comparable con uno de ellos.*

# Ejemplo más dificil

$T_{op} = \{(1–3)\}$

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big( (A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big( (A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

## Teorema (Dilworth)

*Para cada orden parcial, lo siguiente es cierto. No existen 3 elementos distintos incomparables si y sólo si existen 2 elementos tal que cada elemento es comparable con uno de ellos.*

Formular el teorema de Dilworth cómo una consecuencia de $T_{op}$.

# Espacio

# Tautologías

### Definición

*Una oración* $\phi$ *de la lógica de predicados se llama una* **tautología** *si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$*.*

# Tautologías

## Definición

*Una oración* $\phi$ *de la lógica de predicados se llama una* **tautología** *si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

Ejemplos:

- $\Big((\forall x(A(x) \to B(x))) \wedge (\forall x(B(x) \to C(x)))\Big) \to (\forall x(A(x) \to C(x)))$

# Tautologías

### Definición

*Una oración* $\phi$ *de la lógica de predicados se llama una* **tautología** *si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

Ejemplos:

- $\Big((\forall x(A(x) \to B(x))) \wedge (\forall x(B(x) \to C(x)))\Big) \to (\forall x(A(x) \to C(x)))$
- $\neg\exists x\forall y\big(B(x,y) \leftrightarrow \neg B(y,y)\big)$. paradoja del barbero

# Tautologías y consecuencias

## Proposición

*Sea* $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *una teoría finita y* $\psi$ *una oración. Entonces,* $T \models \psi$ *si y sólo si* $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$ *es una tautología.*

# Tautologías y consecuencias

## Proposición

*Sea* $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *una teoría finita y* $\psi$ *una oración. Entonces,* $T \models \psi$ *si y sólo si* $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ *es una tautología.*

## Teorema (Compacidad)

*Sea* $T$ *una teoría y* $\psi$ *una oración tal que* $T \models \psi$*. Entonces, existe un subteoría finita* $T' \subseteq T$ *tal que* $T' \models \psi$*.*

# Teorema de completitud de Gödel

### Definición

*Sistema de demostraciones es un algoritmo $S$ que toma una oración $\phi$ de la lógica de predicados y una palabra binaria $p$, y devuelve 0 o 1.*

# Teorema de completitud de Gödel

### Definición

*Sistema de demostraciones es un algoritmo $S$ que toma una oración $\phi$ de la lógica de predicados y una palabra binaria $p$, y devuelve 0 o 1.*

- *El sistema de demostraciones $S$ es correcto si $S(\phi, p) = 0$ para cada palabra binaria $p$ y cada oración $\phi$ que no es una tautología.*
- *El sistema de demostraciones $S$ es completo si para cada tautología $\phi$ existe una palabra binaria $p$ tal que $S(\phi, p) = 1$.*

# Teorema de completitud de Gödel

### Definición

*Sistema de demostraciones es un algoritmo $S$ que toma una oración $\phi$ de la lógica de predicados y una palabra binaria $p$, y devuelve 0 o 1.*

- *El sistema de demostraciones $S$ es correcto si $S(\phi, p) = 0$ para cada palabra binaria $p$ y cada oración $\phi$ que no es una tautología.*
- *El sistema de demostraciones $S$ es completo si para cada tautología $\phi$ existe una palabra binaria $p$ tal que $S(\phi, p) = 1$.*

### Teorema (Gödel, 1929)

*Existe un sistema de demostraciones correcto y completo.*

# Conclusion

# Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...

# Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)

# Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)
- La próxima vez, empezamos a ver una teoría que expresa todas las matemáticas (teoría de conjuntos Zermelo-Frenkel).

# Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)
- La próxima vez, empezamos a ver una teoría que expresa todas las matemáticas (teoría de conjuntos Zermelo-Frenkel).

¡Gracias!