IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

08.10.2025

Hoy...

Relaciones: órdenes parciales y totales.

Órdenes

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces, R es un **órden** *si R es refleja, antisimétrica y transitiva, es decir:*

a) aRa *para todo* $a \in A$;

b) $(aRb \wedge bRa) \to a = b$ *para todos* $a, b \in A$;

c) $(aRB \wedge bRc) \to aRc$ *para todos* $a, b, c \in A$.

Órdenes

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces, R es un **órden** *si R es refleja, antisimétrica y transitiva, es decir:*

a) aRa *para todo* $a \in A$;
b) $(aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b$ *para todos* $a, b \in A$;
c) $(aRB \wedge bRc) \rightarrow aRc$ *para todos* $a, b, c \in A$.

Definición

Sea R un orden sobre un conjunto A. Entonces, R es un orden total (o lineal) si $aRb \vee bRa$ para todos $a, b \in A$.

Ejemplos

Ejercicio

Verifique que las siguientes relaciones son órdenes

a) $\subseteq$ *sobre* $\mathcal{P}(A)$ *para un conjunto* A *(***orden de inclusión***)*

b) $|$ *sobre* $\mathbb{N}$

c) *la relación* $\preceq$ *sobre* $\mathbb{R}[x]$ *(conjunto de polinomios reales de una variable* x*), donde*

$$p \preceq q \iff \exists c \in \mathbb{R}\ p(x) \leq q(x) \text{ para todo } x \geq c.$$

¿Cuáles son lineales?

Órdenes y DAGs

Proposición

Sea G un grafo dirigido acíclico con el conjunto de los vértices V. Entonces, la relación

$$uRv \iff \text{existe un camino dirigido de } v \text{ a } u, \qquad u, v \in V$$

es un orden sobre V

Ejercicios DAG

Ejercicio

Retratar el orden de inclusión sobre $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ *como un DAG.*

Ejercicios DAG

Ejercicio

Retratar el orden de inclusión sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ *como un DAG.*

Ejercicio

Dar un ejemplo de un orden en cual la relación "ser comparable" no es transitiva.

Universalidad del orden de inclusión

Proposición

Sea A *un conjunto y* $\preceq$ *un orden sobre* A*. Define* $S_a = \{b \in A \mid b \preceq a\}$*. Entonces,*

$$x \preceq y \iff S_x \subseteq S_y$$

para todos $x, y \in A$*.*

¿El orden de las palabras en un diccionario?

Agua Barra

Barrio Barra

Barraca Barra

Orden lexicográfico

Notation:

Orden lexicográfico

Notation:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;

Orden lexicográfico

Notation:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;

Orden lexicográfico

Notation:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

Orden lexicográfico

Notation:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

Definición (el orden lexicográfico)

Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ un alfabeto y u, v dos palabras sobre Σ. Entonces, $u \leq_{lex} v$ si $u = v$ o si existe $k \geq 1$ entero y $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}, i < j$ tal que

$$u_1 = v_1, \dots, u_{k-1} = v_{k-1}, \qquad u_k = \sigma_i, v_k = \sigma_j.$$

Orden lexicográfico

Notation:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

Definición (el orden lexicográfico)

Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un alfabeto y u, v dos palabras sobre Σ. Entonces, $u \leq_{lex} v$ si $u = v$ o si existe $k \geq 1$ entero y $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}, i < j$ tal que

$$u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}, \qquad u_k = \sigma_i, v_k = \sigma_j.$$

Proposición

$\leq_{lex}$ es un orden lineal sobre Σ^*.

Proposición

$\leq_{lex}$ *es un orden lineal sobre* Σ^*.

Elemento mínimo y elemento minimal

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Elemento mínimo y elemento minimal

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Así mismo se definen el elemento máximo y un elemento maximal.

Elemento mínimo y elemento minimal

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Así mismo se definen el elemento máximo y un elemento maximal.

Proposición

Si un orden $\preceq$ tiene el elemento mínimo, entonces ese elemento es un elemento minimal, y no hay otros elementos minimales.

Elemento mínimo y elemento minimal

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Así mismo se definen el elemento máximo y un elemento maximal.

Proposición

Si un orden $\preceq$ tiene el elemento mínimo, entonces ese elemento es un elemento minimal, y no hay otros elementos minimales.

Proposición

Los elementos minimales de un orden son incomparables entre sí.

Ejercicio mínimo/minimal

Ejercicio

a) *¿Todos los órdenes totales poseen el elemento mínimo o el elemento máximo?*

b) *¿Cuales son elementos mínimos/minimales y máximos/maximales de* $\mid$ *sobre* $\mathbb{N}$*?*

c) *¿Y sobre* $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$*?*

¡Gracias!