Unidad IV: Inducción

Inducción fuerte.

Clase 12 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Inducción fuerte: motivación

Demostremos que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$P(n):$ n se puede escribir como el producto de números primos.

Recordatorio: Un número p es primo si $p \geq 2$ y sus únicos divisores son 1 y p.

Caso base: $P(2)$ es verdadero.

Paso inductivo: $\forall n \geq 2 \big(P(n) \to P(n+1)\big)$.

Sea $n \geq 2$. Suponga que $P(n)$ es verdadero:

n se puede escribir como un producto de primos $p_1 \cdots p_m$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero.

Hay dos posibles casos:

- $n+1$ es primo:

  En este caso estamos listos. (¿por qué?)
- $n+1$ no es primo:

  Podemos escribir $n+1$ como $n+1 = c \cdot d$, donde $1 < c, d < n+1$.

¿Cómo aplicamos la hipótesis inductiva en el segundo caso?

Principio de inducción fuerte:

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(0)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > 0$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Inducción fuerte: variante caso base mayor a 0

Principio de inducción fuerte (variante):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y $b \geq 0$ un natural.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > b$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $b \leq k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Demostremos usando inducción fuerte que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$P(n)$: n se puede escribir como el producto de números primos.

También se puede probar que esta descomposición es única para todo $n \geq 2$.

- Esto se conoce como el **teorema fundamental de la aritmética**.

Demostremos usando inducción fuerte que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$$P(n): \; n \text{ se puede escribir como el producto de números primos.}$$

Caso base: $P(2)$ es verdadero.

Paso inductivo:

Sea $n > 2$. Suponga que $P(k)$ es verdadero, para todo $2 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero.

Hay dos posibles casos:

- n es primo: En este caso estamos listos. (¿por qué?)
- n no es primo: Podemos escribir n como $n = c \cdot d$, donde $2 \leq c, d < n$.

  Podemos aplicar la **HI** a c y d, luego ambos se pueden escribir como producto de primos:

  $$c = p_1 \cdots p_m \qquad d = q_1 \cdots q_\ell.$$

  Luego n se puede escribir como producto de primos $n = p_1 \cdots p_m \cdot q_1 \cdots q_\ell$.

Inducción simple implica inducción fuerte

El principio de inducción fuerte es consecuencia de inducción simple.

Suponga que $P(n)$ es una propiedad de los naturales y se cumple que:

- $P(0)$ es verdadero.
- Para todo $n > 0$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Inducción fuerte nos dice que para todo n se cumple $P(n)$.

¿Cómo podemos derivamos esto usando inducción simple?

Podemos tomar la siguiente propiedad $P'(n)$ sobre los naturales:

$$P'(n): \quad P(k) \text{ es verdadero para todo } k \leq n.$$

Basta aplicar inducción simple a la propiedad P'. (¿por qué?)

Inducción fuerte: variante general

Principio de inducción fuerte (variante general):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y $b \leq \ell$ naturales.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b), \ldots, P(\ell)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n > \ell$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $b \leq k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

La sucesión de Fibonacci se define como:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0 \\
F(1) &= 1 \\
F(n) &= F(n-1) + F(n-2) \quad \text{para todo } n \geq 2
\end{aligned}
$$

Demuestre que para todo $n \geq 2$ se cumple $F(n) \leq 2^n$.

Caso base: $P(0)$ y $P(1)$ son verdaderos.

$$F(0) = 0 \leq 1 = 2^0 \qquad\qquad F(1) = 1 \leq 2 = 2^1$$

Paso inductivo:
Sea $n \geq 2$ y supongamos que $F(k) \leq 2^k$, para todo $0 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $F(n) \leq 2^n$

Como $n \geq 2$, tenemos que:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \overset{\textbf{HI}}{\leq} 2^{n-1} + 2^{n-2} \leq 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$$

Demuestre que todo natural $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de los números 3 y 5.

Caso base: $P(8)$ es verdadero:

$$8 = 3 + 5$$

Paso inductivo:
Sea $n \geq 9$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $8 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero.

Como $n - 3 < n$, podemos aplicar la **HI** a $n - 3$ y
obtenemos que $n - 3$ se puede escribir como la suma de números 3 y 5.

Como $n = (n - 3) + 3$ concluimos que n cumple la propiedad.

¿Algún problema con este argumento?

Demuestre que todo natural $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de los números 3 y 5.

Caso base: $P(8)$, $P(9)$ y $P(10)$ son verdaderos:

$$8 = 3 + 5 \qquad 9 = 3 + 3 + 3 \qquad 10 = 5 + 5$$

Paso inductivo:
Sea $n \geq 11$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $8 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero.

Como $8 \leq n - 3 < n$, podemos aplicar la **HI** a $n - 3$ y
obtenemos que $n - 3$ se puede escribir como la suma de números 3 y 5.
Como $n = (n - 3) + 3$ concluimos que n cumple la propiedad.

El paso inductivo asume que $n \geq 11$,
luego hay que probar los casos base 8, 9 y 10.

Demuestre que $\sqrt{2}$ no es racional.

Es decir, no existen dos naturales $a, b \geq 1$ tal que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$.

¿Cómo formulamos esto en términos de una propiedad $P(n)$?

Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\sqrt{2} \neq \frac{n}{b} \qquad \text{para todo } b \geq 1$$

Necesitaremos las siguientes proposiciones:

Proposición: Si a es impar, entonces a^2 es impar.

Corolario: Si a^2 es par, entonces a es par.

Ejercicio: demuestre las proposiciones y que $\sqrt{2}$ no es racional.

Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\sqrt{2} \neq \frac{n}{b} \qquad \text{para todo } b \geq 1$$

Caso base: $P(1)$ es verdadero.

Por contradicción, supongamos que existe un $b \geq 1$ tal que

$$\sqrt{2} = \frac{1}{b}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados, y multiplicando por b^2 a ambos lados, obtenemos:

$$2b^2 = 1$$

Esto es una contradicción, ya que $b \geq 1$ y entonces $2b^2 \geq 2$.

Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\sqrt{2} \neq \frac{n}{b} \qquad \text{para todo } b \geq 1$$

Paso inductivo:
Sea $n > 1$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $1 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero.

Por contradicción, supongamos que existe un $b \geq 1$ tal que

$$\sqrt{2} = \frac{n}{b}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados, y multiplicando por b^2 a ambos lados, obtenemos:

$$2b^2 = n^2$$

Concluimos que n^2 es par, y por la proposición anterior, n es par también.

Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

$$\sqrt{2} \neq \frac{n}{b} \qquad \text{para todo } b \geq 1$$

Paso inductivo:

Sea $n > 1$ y supongamos que $P(k)$ se cumple, para todo $1 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero.

Como n es par, existe un natural $1 \leq \ell < n$, tal que $n = 2\ell$.

Reemplazando en la igualdad anterior $2b^2 = n^2$ y desarrollando, obtenemos:

$$b^2 = 2\ell^2$$

Concluimos que b^2 es par, y por la proposición anterior, b es par también.

Luego, existe un natural $c \geq 1$ tal que $b = 2c$. Juntando todo lo anterior, obtenemos:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{b} = \frac{2\ell}{2c} = \frac{\ell}{c}$$

Podemos aplicar la **HI** a $1 \leq \ell < n$, y obtener que $\sqrt{2} \neq \dfrac{\ell}{c}$.
Esto es una contradicción.

Principio del mínimo:

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

En otras palabras:

Para todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$,
existe un $a \in A$ tal que $a \leq b$, para todo $b \in A$.

Este principio es muy útil para hacer demostraciones.

El principio de inducción fuerte y el principio del mínimo son **equivalentes**.
(inducción simple, inducción fuerte y principio del mínimo son equivalentes)

Antes de ver esta equivalencia, veamos cómo aplicar este principio.

El principio del mínimo: ejemplos

Demuestre que para todo $n \geq 2$ se cumple la siguiente propiedad:

$P(n)$: n se puede escribir como el producto de números primos.

Por contradicción, suponga que existen naturales $n \geq 2$ tal que $P(n)$ es falso.

Obtenemos que el siguiente subconjunto A de $\mathbb{N}$ es no vacío:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es falso}\}.$$

Por el principio del mínimo, A tiene un elemento mínimo $m \geq 2$.

m no puede ser primo:
si m fuera primo, $P(m)$ sería verdadero y obtendríamos $m \notin A$.

Tenemos que m se puede escribir como $m = c \cdot d$, para $2 \leq c, d < m$.

Como m es el mínimo de A, deducimos que $c, d \notin A$,
es decir, c y d se pueden escribir como producto de números primos.

Esto implica que m también se puede escribir como producto de números primos.

Concluimos que $P(m)$ es verdadero, es decir, $m \notin A$.
Esto es una contradicción.

Utilizando el principio del mínimo demuestre lo siguiente:

- $\sqrt{2}$ no es racional.
- Todo natural $n \geq 8$ se puede escribir como la suma de números 3 y 5.

Por contradicción, asumamos que el principio del mínimo es falso.

- Existe un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que **no** tiene mínimo.

Demostraremos por inducción fuerte que para todo $n \geq 0$, se cumple $n \notin A$.

- Esto es una contradicción, ya que implica que $A = \varnothing$.

Caso base: $0 \notin A$.

Por contradicción, supongamos que $0 \in A$.

Obtenemos que 0 es el mínimo de A.

Concluimos que $0 \notin A$.

Por contradicción, asumamos que el principio del mínimo es falso.

- Existe un subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ que **no** tiene mínimo.

Demostraremos por inducción fuerte que para todo $n \geq 0$, se cumple $n \notin A$.

- Esto es una contradicción, ya que implica que $A = \varnothing$.

Paso inductivo: $k \notin A$, para todo $0 \leq k < n$. **(HI)**

Por demostrar: $n \notin A$.

Por contradicción, supongamos que $n \in A$.

Por **HI**, obtenemos que n es el mínimo de A.

Concluimos que $n \notin A$.

Principio del mínimo implica inducción fuerte (propuesto)

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales tal que

- **CB:** $P(0)$ es verdadero.
- **PI:** Para todo $n > 0$,
  si $P(k)$ es verdadero para todo $0 \leq k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero.

Por demostrar: $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq 0$.

Por contradicción, suponga que existen naturales $n \geq 0$ tal que $P(n)$ es falso.

Esto implica que el siguiente subconjunto A de $\mathbb{N}$ es no vacío:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es falso}\}.$$

Por el principio del mínimo, A tiene un elemento mínimo $m \geq 0$.

Por la hipótesis **CB**, $P(0)$ es verdadero y luego $0 \notin A$. Esto implica que $m > 0$.

Como m es el mínimo de A, tenemos que $k \notin A$ para todo $0 \leq k < m$.

Esto implica que $P(k)$ es verdadero para todo $0 \leq k < m$.

Por la hipótesis **PI**, concluimos que $P(m)$ es verdadero, es decir, $m \notin A$.
Esto es una contradicción.