IIC1253 - Lógica de Predicados

Marcelo Arenas

Motivación

Lógica de predicados

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- Poder modelar el proceso de razonamiento.
- Poder formalizar la noción de demostración.

Lógica de predicados

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- Poder modelar el proceso de razonamiento.
- Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Lógica de predicados

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- Poder modelar el proceso de razonamiento.
- Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos demostrar que para el conjunto de los números naturales es cierto que todo número es par o impar?

Lógica de predicados

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ¿Por qué usamos esta lógica?

Lógica de predicados

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero no todas.

Lógica de predicados

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero no todas.

Para expresar el argumento mostrado al principio necesitamos cuantificadores: para todo y existe.

La noción de vocabulario

Lógica de predicados: vocabulario

Una fórmula en lógica de predicados está definida sobre un conjunto de predicados.

Notación

Lógica de predicados: vocabulario

Una fórmula en lógica de predicados está definida sobre un conjunto de predicados.

Notación

Un vocabulario $\mathcal{L}$ *es un conjunto* $\{R_1, \ldots, R_k\}$ *de nombres para predicados.*

Lógica de predicados: vocabulario

Una fórmula en lógica de predicados está definida sobre un conjunto de predicados.

Notación

Un vocabulario $\mathcal{L}$ *es un conjunto* $\{R_1, \ldots, R_k\}$ *de nombres para predicados.*

- *Cada nombre de relación* R_i *tiene asociada una aridad mayor o igual a 1, que indica el número de argumentos de la relación.*

Ejemplos de vocabularios

Considere el siguiente vocabulario para el ejemplo de Socrates:
$\{Hombre, Mortal\}$

Ejemplos de vocabularios

Considere el siguiente vocabulario para el ejemplo de Socrates:
$\{Hombre, Mortal\}$

- ¿Cuáles son las aridades de *Hombre* y *Mortal*?

Ejemplos de vocabularios

Considere el siguiente vocabulario para el ejemplo de Socrates: $\{Hombre, Mortal\}$

- ¿Cuáles son las aridades de *Hombre* y *Mortal*?

Considere el siguiente vocabulario para almacenar información sobre relaciones familiares: $\{Madre, Padre\}$

Ejemplos de vocabularios

Considere el siguiente vocabulario para el ejemplo de Socrates: $\{Hombre, Mortal\}$

- ¿Cuáles son las aridades de *Hombre* y *Mortal*?

Considere el siguiente vocabulario para almacenar información sobre relaciones familiares: $\{Madre, Padre\}$

- ¿Cuáles son las aridades de *Madre* y *Padre*?

Sintaxis de la lógica de predicados

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Predicado binario $=$

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Predicado binario $=$
- Predicados de un vocabulario

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Predicado binario $=$
- Predicados de un vocabulario
- Variables

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Predicado binario $=$
- Predicados de un vocabulario
- Variables
- Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Lógica de predicados: sintaxis

Las fórmulas de la lógica de predicados se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Predicado binario $=$
- Predicados de un vocabulario
- Variables
- Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Veamos algunos ejemplos, antes de introducir formalmente la sintaxis de la lógica de predicados.

Lógica de predicado: el ejemplo de Sócrates

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es un hombre:
- x es mortal:
- Todo hombre es mortal:

Lógica de predicado: el ejemplo de Sócrates

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es un hombre:

$$Hombre(x)$$

- x es mortal:

- Todo hombre es mortal:

Lógica de predicado: el ejemplo de Sócrates

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es un hombre:

$$\mathit{Hombre}(x)$$

- x es mortal:

$$\mathit{Mortal}(x)$$

- Todo hombre es mortal:

Lógica de predicado: el ejemplo de Sócrates

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es un hombre:

$$\mathit{Hombre}(x)$$

- x es mortal:

$$\mathit{Mortal}(x)$$

- Todo hombre es mortal:

$$\forall x\,(\mathit{Hombre}(x) \rightarrow \mathit{Mortal}(x))$$

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la madre de y:
- x es el padre de y:
- Toda persona tiene una madre:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la madre de y:

$$Madre(x, y)$$

- x es el padre de y:

- Toda persona tiene una madre:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la madre de y:

$$Madre(x, y)$$

- x es el padre de y:

$$Padre(x, y)$$

- Toda persona tiene una madre:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la madre de y:

$$Madre(x, y)$$

- x es el padre de y:

$$Padre(x, y)$$

- Toda persona tiene una madre:

$$\forall x \exists y \; Madre(y, x)$$

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la abuela de y:

- x e y son hermanas o hermanos:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la abuela de y:

  $$\exists z \, ((Madre(x, z) \wedge Madre(z, y))$$

- x e y son hermanas o hermanos:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la abuela de y:

  $$\exists z \left((Madre(x,z) \wedge Madre(z,y)) \vee (Madre(x,z) \wedge Padre(z,y))\right)$$

- x e y son hermanas o hermanos:

Lógica de predicado: el ejemplo de las relaciones familiares

Escriba las siguientes fórmulas.

- x es la abuela de y:

$$\exists z \left((Madre(x, z) \wedge Madre(z, y)) \vee (Madre(x, z) \wedge Padre(z, y)) \right)$$

- x e y son hermanas o hermanos:

$$\exists u \exists v \, (Padre(u, x) \wedge Padre(u, y) \wedge \\ Madre(v, x) \wedge Madre(v, y) \wedge \neg(x = y))$$

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición (intuitiva)

Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición (intuitiva)

Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

- *Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.*

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición (intuitiva)

Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

- *Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.*
- *Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.*

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición (intuitiva)

Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

- *Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.*
- *Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.*
- *Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.*

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición (intuitiva)

Una fórmula de la lógica de predicados (o fórmula de predicados) sobre $\mathcal{L}$ se construye utilizando las siguientes reglas:

- *Si x e y son variables, entonces $x = y$ es una fórmula.*
- *Si $x_1, \ldots, x_k$ son variables y $R \in \mathcal{L}$ es un símbolo de predicado de aridad k, entonces $R(x_1, \ldots, x_k)$ es una fórmula.*
- *Si φ y ψ son fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.*
- *Si φ es una fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\ \varphi)$ y $(\forall x\ \varphi)$ son fórmulas.*

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Las fórmulas $x = y$ y $R(x_1, \ldots, x_k)$ son llamadas fórmulas atómicas.

- Las variables en estas fórmulas no son necesariamente distintas.
- Por ejemplo, $x = x$, $R(y, x, y)$ y $R(x, x, x)$ son fórmulas válidas.

Sintaxis de la lógica de predicados: fórmulas

Las fórmulas $x = y$ y $R(x_1, \ldots, x_k)$ son llamadas fórmulas atómicas.

- Las variables en estas fórmulas no son necesariamente distintas.
- Por ejemplo, $x = x$, $R(y, x, y)$ y $R(x, x, x)$ son fórmulas válidas.

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

- *Por ejemplo, escribimos* $\exists x\, R(x)$ *en lugar de* $(\exists x\, R(x))$.

Interpretaciones

Lógica de predicados: interpretaciones

¿Es la fórmula $\forall x \exists y \, R(x, y)$ cierta?

Lógica de predicados: interpretaciones

¿Es la fórmula $\forall x \exists y\, R(x, y)$ cierta?

- Esto depende de la interpretación que damos de predicado R.

Lógica de predicados: interpretaciones

¿Es la fórmula $\forall x \exists y\, R(x, y)$ cierta?

- Esto depende de la interpretación que damos de predicado R.

El valor de verdad de una fórmula depende de la interpretación que se da a cada relación del vocabulario.

Un paréntesis

Otro paréntesis de teoría de conjuntos

Para un conjunto A y un número natural $n \geq 2$:

$$A^n \quad = \quad \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$$

Además, tenemos que $A^1 = A$

Un paréntesis

Otro paréntesis de teoría de conjuntos

Para un conjunto A y un número natural $n \geq 2$:

$$A^n \quad = \quad \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$$

Además, tenemos que $A^1 = A$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \\ A^3 &= \end{aligned}$$

Un paréntesis

Otro paréntesis de teoría de conjuntos

Para un conjunto A y un número natural $n \geq 2$:

$$A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$$

Además, tenemos que $A^1 = A$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\} \\ A^3 &= \end{aligned}$$

Un paréntesis

Otro paréntesis de teoría de conjuntos

Para un conjunto A y un número natural $n \geq 2$:

$$A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$$

Además, tenemos que $A^1 = A$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \\ A^3 &= \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2), \\ &\quad (2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\} \end{aligned}$$

La definición de interpretación

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ *un vocabulario, donde la aridad de* R_i *es* n_i *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$*.*

La definición de interpretación

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ *un vocabulario, donde la aridad de* R_i *es* n_i *para cada* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Una interpretación $\mathcal{I}$ *de* $\mathcal{L}$ *es una tupla* $\langle A,\ R_1^{\mathcal{I}},\ \ldots,\ R_k^{\mathcal{I}} \rangle$ *tal que:*

La definición de interpretación

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ un vocabulario, donde la aridad de R_i es n_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Una interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ es una tupla $\langle A, R_1^{\mathcal{I}}, \ldots, R_k^{\mathcal{I}} \rangle$ tal que:

- *A es el dominio $\mathcal{I}$, el cual es no vacío.*

La definición de interpretación

Definición

Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ un vocabulario, donde la aridad de R_i es n_i para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Una interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$ es una tupla $\langle A, R_1^{\mathcal{I}}, \ldots, R_k^{\mathcal{I}} \rangle$ tal que:

- *A es el dominio $\mathcal{I}$, el cual es no vacío.*
- *$R_i^{\mathcal{I}} \subseteq A^{n_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

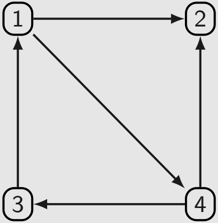
Los grafos en lógica de predicados

Para representar un grafo usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E es un predicado binario.

Los grafos en lógica de predicados

Para representar un grafo usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E es un predicado binario.

Ejemplo



El grafo es representado por $\mathcal{I} = \langle A, E^{\mathcal{I}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$E^{\mathcal{I}} \quad = \quad \{(1,2),(1,4),(3,1),(4,2),(4,3)\}$$

Los grafos en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Existe un nodo que tiene un arco a sí mismo:

- No existe un nodo con un arco a sí mismo:

- Cada nodo está conectado con al menos dos nodos:

- Existe un ciclo de largo 2:

Los grafos en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Existe un nodo que tiene un arco a sí mismo:

$$\exists x\, E(x, x)$$

- No existe un nodo con un arco a sí mismo:

- Cada nodo está conectado con al menos dos nodos:

- Existe un ciclo de largo 2:

Los grafos en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Existe un nodo que tiene un arco a sí mismo:

$$\exists x\, E(x, x)$$

- No existe un nodo con un arco a sí mismo:

$$\neg \exists x\, E(x, x)$$

- Cada nodo está conectado con al menos dos nodos:

- Existe un ciclo de largo 2:

Los grafos en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Existe un nodo que tiene un arco a sí mismo:

$$\exists x\, E(x, x)$$

- No existe un nodo con un arco a sí mismo:

$$\neg \exists x\, E(x, x)$$

- Cada nodo está conectado con al menos dos nodos:

$$\forall x \exists y \exists z\, (E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge \neg(y = z))$$

- Existe un ciclo de largo 2:

Los grafos en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Existe un nodo que tiene un arco a sí mismo:

$$\exists x\, E(x, x)$$

- No existe un nodo con un arco a sí mismo:

$$\neg \exists x\, E(x, x)$$

- Cada nodo está conectado con al menos dos nodos:

$$\forall x \exists y \exists z\, (E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge \neg(y = z))$$

- Existe un ciclo de largo 2:

$$\exists x \exists y\, (E(x, y) \wedge E(y, x) \wedge \neg(x = y)).$$

Los grafos coloreados en lógica de predicados

Para representar un grafo coloreado usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E, R, G, B\}$, donde R, G y B representan a los colores rojo, verde y azul.

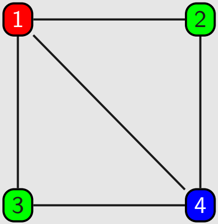
Los grafos coloreados en lógica de predicados

Para representar un grafo coloreado usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E, R, G, B\}$, donde R, G y B representan a los colores rojo, verde y azul.

- Las aridades de R, G y B son 1, vale decir, son predicados unarios.

Los grafos coloreados en lógica de predicados

Ejemplo

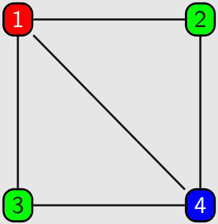


El grafo coloreado es representado por $\mathcal{I} = \langle A, E^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}, G^{\mathcal{I}}, B^{\mathcal{I}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\begin{aligned} E^{\mathcal{I}} &= \{(1,2),(1,4),(3,1),(4,2),(4,3),(2,1),(4,1),(1,3),(2,4),(3,4)\} \\ R^{\mathcal{I}} &= \\ G^{\mathcal{I}} &= \\ B^{\mathcal{I}} &= \end{aligned}$$

Los grafos coloreados en lógica de predicados

Ejemplo



El grafo coloreado es representado por $\mathcal{I} = \langle A, E^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}, G^{\mathcal{I}}, B^{\mathcal{I}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$
\begin{array}{rcl}
E^{\mathcal{I}} & = & \{(1,2),(1,4),(3,1),(4,2),(4,3),(2,1),(4,1),(1,3),(2,4),(3,4)\} \\
R^{\mathcal{I}} & = & \{1\} \\
G^{\mathcal{I}} & = & \{2,3\} \\
B^{\mathcal{I}} & = & \{4\}
\end{array}
$$

Los grafos coloreados en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Cada nodo tiene al menos un color:

- Cada nodo tiene a lo más un color:

- Dos nodos adyacentes no pueden tener el mismo color:

Los grafos coloreados en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Cada nodo tiene al menos un color:

$$\forall x \, (R(x) \vee G(x) \vee B(x))$$

- Cada nodo tiene a lo más un color:

- Dos nodos adyacentes no pueden tener el mismo color:

Los grafos coloreados en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Cada nodo tiene al menos un color:

$$\forall x\,(R(x) \vee G(x) \vee B(x))$$

- Cada nodo tiene a lo más un color:

$$\begin{aligned}&\forall x\,(R(x) \rightarrow (\neg G(x) \wedge \neg B(x))) \wedge \\ &\qquad \forall x\,(G(x) \rightarrow (\neg R(x) \wedge \neg B(x))) \wedge \\ &\qquad\qquad \forall x\,(B(x) \rightarrow (\neg G(x) \wedge \neg R(x)))\end{aligned}$$

- Dos nodos adyacentes no pueden tener el mismo color:

Los grafos coloreados en lógica de predicados: algunas fórmulas

- Cada nodo tiene al menos un color:

$$\forall x\,(R(x) \vee G(x) \vee B(x))$$

- Cada nodo tiene a lo más un color:

$$\begin{aligned}\forall x\,(R(x) \rightarrow (\neg G(x) \wedge \neg B(x))) \wedge \\ \forall x\,(G(x) \rightarrow (\neg R(x) \wedge \neg B(x))) \wedge \\ \forall x\,(B(x) \rightarrow (\neg G(x) \wedge \neg R(x)))\end{aligned}$$

- Dos nodos adyacentes no pueden tener el mismo color:

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \big(E(x, y) \;\rightarrow \\ \neg(R(x) \wedge R(y)) \wedge \neg(G(x) \wedge G(y)) \wedge \neg(B(x) \wedge B(y))\big)\end{aligned}$$

Semántica de la lógica de predicados

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Una variable está libre en una fórmula si no aparece cuantificada.

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Una variable está libre en una fórmula si no aparece cuantificada.

- Usamos la notación $VL(\varphi)$ para el conjunto de variables libre de la fórmula φ.

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Una variable está libre en una fórmula si no aparece cuantificada.

- Usamos la notación $VL(\varphi)$ para el conjunto de variables libre de la fórmula φ.

Ejemplo

$$\begin{aligned} VL\big(\exists z\,(Madre(x,z) \wedge Madre(z,y))\big) &= \\ VL\big(\forall x \exists y\, E(x,y)\big) &= \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Una variable está libre en una fórmula si no aparece cuantificada.

- Usamos la notación $VL(\varphi)$ para el conjunto de variables libre de la fórmula φ.

Ejemplo

$$\begin{aligned} VL\big(\exists z\,(Madre(x,z) \wedge Madre(z,y))\big) &= \{x,y\} \\ VL\big(\forall x \exists y\, E(x,y)\big) &= \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Una variable está libre en una fórmula si no aparece cuantificada.

- Usamos la notación $VL(\varphi)$ para el conjunto de variables libre de la fórmula φ.

Ejemplo

$$\begin{aligned} VL\big(\exists z\,(Madre(x,z) \wedge Madre(z,y))\big) &= \{x,y\} \\ VL\big(\forall x \exists y\, E(x,y)\big) &= \emptyset \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de predicados: variables libres

Notación

- *Si* φ *es una fórmula, entonces usamos* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *para indicar que* $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$
- *Decimos que* φ *es una oración si* $VL(\varphi) = \emptyset$

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

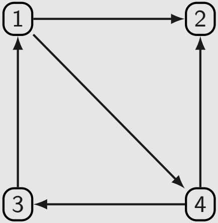
Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una interpretación.

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una interpretación.

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:

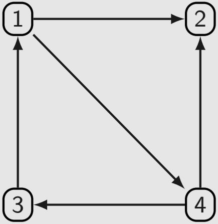


Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una interpretación.

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



¿Es la fórmula $\exists y\, E(x, y)$ cierta en $\mathcal{I}$?

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

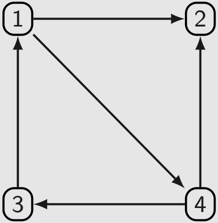
El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



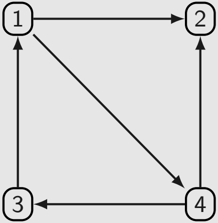
¿Es la fórmula $\exists y\, E(x, y)$ cierta en $\mathcal{I}$?

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



¿Es la fórmula $\exists y\, E(x, y)$ cierta en $\mathcal{I}$? La respuesta es sí si el valor asignado a x es 1, y la respuesta es no si el valor asignado a x es 2.

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

Notación

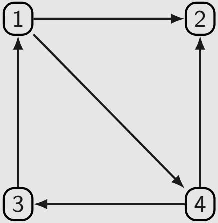
Dada una interpretación $\mathcal{I}$ *con dominio* A *y una fórmula* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$*, una asignación para* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *en* $\mathcal{I}$ *es una función*

$$\mu : \{x_1, \ldots, x_k\} \to A$$

Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

Ejemplo

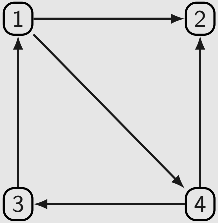
Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$, y cuyo dominio es A:



Semántica de la lógica de predicados: asignaciones

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$, y cuyo dominio es A:



La función $\mu : \{x\} \to A$ definida por $\mu(x) = 1$ es una asignación para la fórmula $\varphi(x) = \exists y\, E(x, y)$.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Definimos la semántica de la lógica de predicados usando la función **Evaluación**.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Definimos la semántica de la lógica de predicados usando la función **Evaluación**.

Sea φ una fórmula, $\mathcal{I}$ una interpretación y μ una asignación para φ.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Definimos la semántica de la lógica de predicados usando la función **Evaluación**.

Sea φ una fórmula, $\mathcal{I}$ una interpretación y μ una asignación para φ.

La función **Evaluación**(φ, $\mathcal{I}$, μ) retorna **true** si la fórmula φ es cierta en $\mathcal{I}$.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Definimos la semántica de la lógica de predicados usando la función **Evaluación**.

Sea φ una fórmula, $\mathcal{I}$ una interpretación y μ una asignación para φ.

La función **Evaluación**(φ, $\mathcal{I}$, μ) retorna **true** si la fórmula φ es cierta en $\mathcal{I}$.

- **Evaluación** retorna **false** si la fórmula no es cierta en la interpretación.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Definimos la semántica de la lógica de predicados usando la función **Evaluación**.

Sea φ una fórmula, $\mathcal{I}$ una interpretación y μ una asignación para φ.

La función **Evaluación**(φ, $\mathcal{I}$, μ) retorna **true** si la fórmula φ es cierta en $\mathcal{I}$.

- **Evaluación** retorna **false** si la fórmula no es cierta en la interpretación.
- **Evaluación** considera los valores para las variables libres dados por μ.

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**
  if $\mu(x)$ es igual a $\mu(y)$ **then return true**
  else return false

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**
    if $\mu(x)$ es igual a $\mu(y)$ **then return true**
    else return false

if φ es la fórmula $R(x_1, \ldots, x_k)$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**
  if $\mu(x)$ es igual a $\mu(y)$ **then return true**
  else return false

if φ es la fórmula $R(x_1, \ldots, x_k)$ **then**
  if $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_k)) \in R^{\mathcal{I}}$ **then return true**
  else return false

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**
  if $\mu(x)$ es igual a $\mu(y)$ **then return true**
  else return false

if φ es la fórmula $R(x_1, \ldots, x_k)$ **then**
  if $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_k)) \in R^{\mathcal{I}}$ **then return true**
  else return false

if φ es la fórmula $\neg\alpha$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

Evaluación(φ, $\mathcal{I}$, μ):

if φ es la fórmula $x = y$ **then**
  if $\mu(x)$ es igual a $\mu(y)$ **then return true**
  else return false

if φ es la fórmula $R(x_1, \ldots, x_k)$ **then**
  if $(\mu(x_1), \ldots, \mu(x_k)) \in R^{\mathcal{I}}$ **then return true**
  else return false

if φ es la fórmula $\neg\alpha$ **then**
  then return not Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ)

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \land \beta$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
  return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
    return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**
return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
    return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**
    return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
  return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**
  return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ **then**
  return not Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
  return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**
  return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ **then**
  return not Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\alpha \wedge \beta$ **then**
    return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \vee \beta$ **then**
    return Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \rightarrow \beta$ **then**
    return not Evaluación(α, $\mathcal{I}$, μ) **or Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)

if φ es la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ **then**
    return
        (**Evaluación**(α, $\mathcal{I}$, μ) **and Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ)) **or**
        (**not Evaluación**(α, $\mathcal{I}$, μ) **and not Evaluación**(β, $\mathcal{I}$, μ))

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**

  for each $a \in A$ **do**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**

  for each $a \in A$ **do**

    Sea ν una asignación para α tal que

      $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$

    if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true
    return false

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true
    return false

if φ es la fórmula $\forall x\, \alpha$ **then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true
    return false

if φ es la fórmula $\forall x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x \, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true
    return false

if φ es la fórmula $\forall x \, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
            return true
    return false

if φ es la fórmula $\forall x\, \alpha$ **then**
    for each $a \in A$ **do**
        Sea ν una asignación para α tal que
            $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
        if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **false then**

Semántica de la lógica de predicados: definición

if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
  for each $a \in A$ **do**
    Sea ν una asignación para α tal que
      $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
    if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
      return true
  return false

if φ es la fórmula $\forall x\, \alpha$ **then**
  for each $a \in A$ **do**
    Sea ν una asignación para α tal que
      $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
    if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **false then**
      return false

Semántica de la lógica de predicados: definición

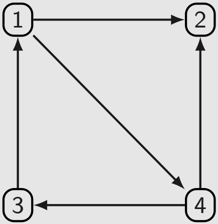
if φ es la fórmula $\exists x\, \alpha$ **then**
  for each $a \in A$ **do**
    Sea ν una asignación para α tal que
      $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
    if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **true then**
      return true
  return false

if φ es la fórmula $\forall x\, \alpha$ **then**
  for each $a \in A$ **do**
    Sea ν una asignación para α tal que
      $\nu(x) = a$ y $\nu(y) = \mu(y)$ para cada $y \in VL(\varphi)$
    if Evaluación(α, $\mathcal{I}$, ν) es igual a **false then**
      return false
  return true

Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

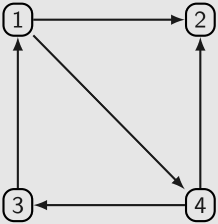
Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



¿Cuál es el resultado de llamar a **Evaluación** para las siguientes fórmulas?

$\exists x \forall y\, E(x, y)$

$\exists x \forall y\, \neg E(x, y)$

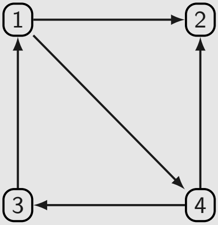
$\forall x \exists y\, E(x, y)$

$\forall x \exists y\, \neg E(x, y)$

Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



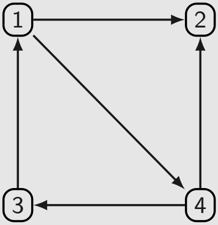
¿Cuál es el resultado de llamar a **Evaluación** para las siguientes fórmulas?

$\exists x \forall y\, E(x,y)$	**false**	$\forall x \exists y\, E(x,y)$
$\exists x \forall y\, \neg E(x,y)$		$\forall x \exists y\, \neg E(x,y)$

Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



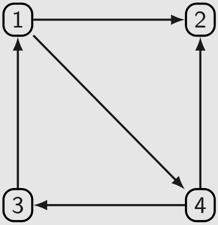
¿Cuál es el resultado de llamar a **Evaluación** para las siguientes fórmulas?

$\exists x \forall y\, E(x,y)$	**false**	$\forall x \exists y\, E(x,y)$	**false**
$\exists x \forall y\, \neg E(x,y)$		$\forall x \exists y\, \neg E(x,y)$	

Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



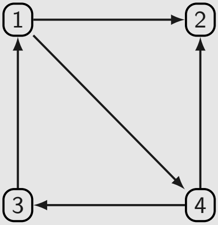
¿Cuál es el resultado de llamar a **Evaluación** para las siguientes fórmulas?

$\exists x \forall y\, E(x, y)$	**false**	$\forall x \exists y\, E(x, y)$	**false**
$\exists x \forall y\, \neg E(x, y)$	**true**	$\forall x \exists y\, \neg E(x, y)$	

Semántica de la lógica de predicados: ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathcal{I}$ la interpretación que representa al siguiente grafo sobre el vocabulario $\{E\}$:



¿Cuál es el resultado de llamar a **Evaluación** para las siguientes fórmulas?

$\exists x \forall y\, E(x,y)$	**false**	$\forall x \exists y\, E(x,y)$	**false**
$\exists x \forall y\, \neg E(x,y)$	**true**	$\forall x \exists y\, \neg E(x,y)$	**true**

La evaluación de una fórmula

Definición

Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ y una interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A:

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} \; = \; \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \; & \textbf{Evaluación}(\varphi, \mathcal{I}, \mu) \textit{ es igual a } \textbf{true}, \\
& \textit{donde } \mu \textit{ es una asignación para } \varphi \textit{ tal que} \\
& \mu(x_i) = a_i \textit{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\}
\end{aligned}$$

La evaluación de una fórmula

Definición

Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *y una interpretación* $\mathcal{I}$ *con dominio* A*:*

$$\begin{aligned} [\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} \;=\; \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \; & \textbf{Evaluación}(\varphi, \mathcal{I}, \mu) \textit{ es igual a } \textbf{true}, \\ & \textit{donde } \mu \textit{ es una asignación para } \varphi \textit{ tal que} \\ & \mu(x_i) = a_i \textit{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\} \end{aligned}$$

Note que si φ es una oración, entonces $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{()\}$ o $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{\}$.

La evaluación de una fórmula

Definición

Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ y una interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A:

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} \;=\; \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \; & \textbf{Evaluación}(\varphi, \mathcal{I}, \mu) \textit{ es igual a } \textbf{true}, \\
& \textit{donde } \mu \textit{ es una asignación para } \varphi \textit{ tal que} \\
& \mu(x_i) = a_i \textit{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\}
\end{aligned}
$$

Note que si φ es una oración, entonces $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{()\}$ o $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{\}$.

- La oración es cierta en $\mathcal{I}$ si y sólo si $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{I}} = \{()\}$.

La evaluación de una fórmula

Definición

Dada una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ y una interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A:

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}} \;=\; \{(a_1, \ldots, a_k) \mid \textbf{Evaluación}(\varphi, \mathcal{I}, \mu) \textit{ es igual a } \textbf{true}, \\ \textit{donde } \mu \textit{ es una asignación para } \varphi \textit{ tal que} \\ \mu(x_i) = a_i \textit{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Note que si φ es una oración, entonces $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}} = \{()\}$ o $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}} = \{\}$.

- La oración es cierta en $\mathcal{I}$ si y sólo si $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{I}} = \{()\}$.
- No necesitamos dar valores a variables libres para evaluar si φ es cierta en $\mathcal{I}$.