Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 13 - Cardinalidad

7 de noviembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

Resumen

Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Cardinalmente menor o igual Un conjunto A tiene **menor o igual cardinalidad** que un conjunto B, si **existe** una función inyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como:

$$A \preceq B$$

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

O equivalentemente tenemos la definición del teorema de Schroder-Bernstein:

$$A \approx B \text{ si y sólo si } A \preceq B \text{ y } B \preceq A.$$

Enumeración
Una **enumeración** de un conjunto A es una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n \neq a_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
3. Para cada $a \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a$.

Conjunto enumerable

Existen dos formas equivalentes de definir que un conjunto A es enumerable:

1. A es **enumerable** si $A \approx \mathbb{N}$.
2. A es enumerable si y sólo si existe una enumeración de A.

1. Calentamiento

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f : \mathbb{N} \to X \qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

Demuestre el siguiente Lema

$$\text{Si } A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2, \text{entonces } B_1^{A_1} \approx B_2^{A_2}.$$

2. Funciones y Relaciones

(a) Sea $f : A \to B$ una función. Para un subconjunto $X \subseteq A$, definimos su *imagen* como

$$f(X) = \{f(x) \in B \mid x \in X\} \subseteq B.$$

Por otra parte, para un subconjunto $Y \subseteq B$, definimos su *preimagen* como

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A.$$

Decimos que un subconjunto $X \subseteq A$ es *estable* si

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

Demuestre que

$$f \text{ es inyectiva } \iff \text{ para todo subconjunto } X \subseteq A, \text{ se tiene que } X \text{ es estable.}$$

(b) Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Sea R una relación de equivalencia en A. Definimos sobre B la relación *imagen de* R, denotada por $f(R)$, como:

$$(b, b') \in f(R) \iff \text{ existen } a, a' \in A \text{ tales que } f(a) = b,\ f(a') = b' \text{ y } (a, a') \in R.$$

Demuestre que si f es inyectiva, entonces $f(R)$ es de equivalencia.

(c) Siguiendo con la pregunta anterior, muestre un ejemplo en donde f no es inyectiva, y $f(R)$ no es de equivalencia.

3. Cardinalidad

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un *polinomio con coeficientes enteros en dos variables* si es de la forma

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq n}} a_{ij} x^i y^j, \quad \text{donde } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Sea

$$\mathcal{P} = \{f \mid f \text{ es un polinomio con coeficientes enteros en dos variables}\}.$$

Demuestre que $\mathcal{P}$ es enumerable.