Unidad I: Lógica proposicional

Lógica proposicional: Tautologías, contradicciones y consecuencia lógica

Clase 04 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Definición:

Una fórmula φ es una **tautología** si **para cada** valuación σ se cumple $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejercicio:

¿Cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías?

- $p \vee \neg p$ ✓
- $p \wedge (p \rightarrow q)$ ✗
- $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ ✓

¿Cómo se ve la tabla de verdad de una tautología?

Contradicciones

Definición:

Una fórmula φ es una **contradicción** si **para cada** valuación σ se cumple $\sigma(\varphi) = 0$.

Ejercicio:

¿Cuáles de las siguientes fórmulas son contradicciones?

- $p \wedge \neg p$ ✓
- $p \wedge (p \rightarrow q)$ ✗

¿Cómo se ve la tabla de verdad de una contradicción?

Demuestre las siguientes propiedades:

1. Una fórmula φ es contradicción si y sólo si φ **no** es satisfacible.
2. Una fórmula φ es tautología si y sólo si $\neg\varphi$ **no** es satisfacible.

Recordemos la definición de equivalencia entre fórmulas:

Definición:

Dos fórmulas φ y ψ son **equivalentes** si para **cada** valuación σ, se cumple $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$.

Podemos definir la noción de equivalencia en términos de tautologías:

Proposición:

Dos fórmulas φ y ψ son equivalentes si y sólo si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es tautología.

Ejercicio: demuestre la proposición.

Sea Σ un **conjunto** de fórmulas en $L(P)$.

Decimos que una valuación σ **satisface** a Σ si:

para **cada** fórmula $\varphi \in \Sigma$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Notación: $\sigma(\Sigma) = 1$

Comentarios:

- Sea $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto **finito** y σ una valuación.

$$\sigma(\Sigma) = 1 \text{ si y sólo si } \sigma\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\Big) = 1.$$

- ¿Qué pasa cuando Σ es **infinito**?

Definición:

Una fórmula φ es **consecuencia lógica** de un conjunto de fórmulas Σ, si para **cada** valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Notación:

- Si φ es consecuencia lógica de Σ, escribimos $\Sigma \models \varphi$.
- Σ es el conjunto de **premisas** y φ es la **conclusión**.

Consecuencia lógica: ejemplos

¿Es este razonamiento válido?

Si hay luna llena, entonces Joaquín es feliz.
Hay luna llena y está lloviendo.

Por lo tanto, Joaquín es feliz.

Variables proposicionales:

p = "Hay luna llena"
q = "Joaquín es feliz"
r = "Está lloviendo"

Consecuencia lógica: ejemplos

¿Es este razonamiento válido?

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \wedge r \\ \hline q \end{array}$$

¿Se cumple la siguiente consecuencia lógica?

$$\{\, p \to q,\, p \wedge r \,\} \models q$$

p	q	r	$p \to q$	$p \wedge r$	q
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Consecuencia lógica: ejemplos

¿Es este razonamiento válido?

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \vee r \\ \hline q \end{array}$$

¿Se cumple la siguiente consecuencia lógica?

$$\{\, p \to q,\ p \vee r \,\} \ \vDash \ q$$

p	q	r	$p \to q$	$p \vee r$	q
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

¿Cuáles de las siguientes consecuencias lógicas son ciertas?

- $\{p\} \ \vDash \ p \vee q$
- $\{p,\ q\} \ \vDash \ p \wedge q$
- $\{p\} \ \vDash \ p \wedge q$
- $\{p \wedge q\} \ \vDash \ p \vee q$
- $\{p \vee q\} \ \vDash \ p \wedge q$
- $\{\, p,\ p \rightarrow q \,\} \ \vDash \ q$ (modus ponens)
- $\{\, \neg q,\ p \rightarrow q \,\} \ \vDash \ \neg p$ (modus tollens)
- $\{p \vee q \vee r,\ p \rightarrow s,\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow s\} \vDash s$ (demostración por casos)

Un conjunto de fórmulas Σ es **satisfacible** si **existe** una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, decimos que Σ es inconsistente.

Ejemplos:

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son satisfacibles?

- $\{\neg p \vee q,\ p \vee r,\ \neg q \vee \neg r\}$ ✓
- $\{p \vee q \vee r,\ \neg p \vee s,\ \neg q \vee s,\ \neg r \vee s,\ \neg s\}$ ✗

Pregunta:

Si Σ es inconsistente y φ es una fórmula arbitraria:

¿Es cierto que $\Sigma \models \varphi$?

SI!

Teorema:

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración ($\Rightarrow$):

Supongamos que $\Sigma \models \varphi$.

Por demostrar que (PDQ): $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Sea σ una valuación arbitraria. Debemos probar que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 0$.

Hay dos posibles casos:

1. $\sigma(\Sigma) = 0$:
   Tenemos que existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\sigma(\alpha) = 0$.
   Como $\alpha \in \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$, concluimos que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 0$.
2. $\sigma(\Sigma) = 1$:
   Por hipótesis, tenemos que $\Sigma \models \varphi$.
   Como $\sigma(\Sigma) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(\varphi) = 1$.
   Esto implica que $\sigma(\neg\varphi) = 0$, y concluimos que $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 0$.

Teorema:

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Demostración ($\Leftarrow$):

Supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Por demostrar que (PDQ): $\Sigma \models \varphi$

Sea σ una valuación arbitraria tal que $\sigma(\Sigma) = 1$.
Debemos probar que $\sigma(\varphi) = 1$.

Como $\sigma(\Sigma) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(\neg\varphi) = 0$.
(De lo contrario $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$, y entonces $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ sería satisfacible.
Esto contradice nuestra hipótesis.)

Concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejercicios propuestos

1. Sea α una contradicción y Σ un conjunto de fórmulas. Demuestre que:

   Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vDash \alpha$.

2. Demuestre que si $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ y φ es una fórmula:

   $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ es tautología.