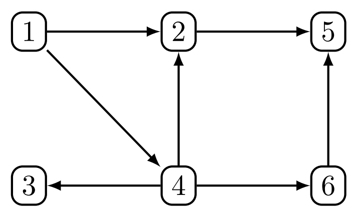
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía de relaciones

1. Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que un orden total $\leq$ sobre N es un orden topológico para G si para cada $u, v \in N$, si $(u, v) \in A$, entonces $u \leq v$.

   Determine todos los ordenes topológicos para el siguiente grafo:



2. Un ciclo simple en un grafo $G = (N, A)$ es una secuencia $(a_1, \ldots, a_n)$ de nodos en N tal que:

   - $(a_i, a_{i+1}) \in A$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,
   - $(a_n, a_1) \in A$, y
   - $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $i \neq j$.

   El largo de un ciclo simple $(a_1, \ldots, a_n)$ es n, vale decir, es el número de arcos en el ciclo. Demuestre que si un grafo G tiene un ciclo simple de largo $n \geq 2$, entonces no existe un orden topológico para G.

3. Defina una relación $\leq_{\text{lex}}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d)$ si y sólo si $(a < c)$ o $(a = c$ y $b \leq d)$, donde $\leq$ es el orden usual de los números naturales. Demuestre que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

4. Generalice la definición de la relación $\leq_{\text{lex}}$ en el ejercicio 3 para el caso de $\mathbb{N}^k$, donde $k \geq 3$. Demuestre que la relación resultante es un orden total sobre $\mathbb{N}^k$.

5. Considere las siguientes interpretaciones sobre el predicado binario $\leq$:

   - $\mathcal{I}_1$ tiene como dominio a $\mathbb{N}$ e interpreta a $\leq$ como el orden usual en $\mathbb{N}$.
   - $\mathcal{I}_2$ tiene como dominio a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e interpreta a $\leq$ como el orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definido en la pregunta 3.

Construya una oración φ en lógica de predicados sobre el vocabulario $\leq$ tal que φ es cierta en $\mathcal{I}_2$ y falsa en $\mathcal{I}_1$.

6. Dado un orden parcial R sobre un conjunto A:

   - $a \in A$ es un elemento máximo de R si bRa para todo $b \in A$, y
   - $a \in A$ es un elemento maximal de R si no existe un elemento $b \in B$ tal que aRb y $a \neq b$.

   De ejemplo de órdenes parciales que satisfagan las siguientes propiedades:

   a) El orden parcial tiene exactamente un elemento máximo.
   b) El orden parcial tiene exactamente un elemento maximal, y no tiene elementos máximos.
   c) El orden parcial tiene una cantidad infinita de elementos maximales.
   d) El orden parcial no tiene elementos maximales.

7. Sea $\leq$ el orden usual sobre $\mathbb{N}$, y sea F el conjunto de las funciones $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$. Además, defina una relación R sobre F como:

   $$(f, g) \in R \quad \text{si y sólo si} \quad f(i) \leq g(i) \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3\}.$$

   Responda las siguientes preguntas sobre la relación R.

   a) Demuestre que R es un orden parcial.
   b) Demuestre que R no es conexa.
   c) Encuentre los elementos mínimos y minimales de R.
   d) Encuentre los elementos máximos y maximales de R.

8. Sea $\leq$ el orden usual sobre $\mathbb{Z}$. A partir de este orden, defina la siguiente relación R sobre $\mathbb{Z}$. Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que aRb si y sólo si alguna de las siguientes tres condiciones se cumple:

   - a es par y b es impar;
   - a y b son pares, y $a \leq b$;
   - a y b son impares, y $a \leq b$;

   Demuestre que R es un orden total sobre $\mathbb{Z}$.

9. Sea A un conjunto. Una *partición* $\mathcal{P}$ de A es una conjunto de subconjuntos de A tal que: (i) para todo $X \in \mathcal{P}$, se tiene $X \neq \emptyset$; (ii) $\bigcup_{X \in \mathcal{P}} X = A$; (iii) para todo $X, Y \in \mathcal{P}$, si $X \neq Y$, entonces $X \cap Y = \emptyset$.

   Sea $\mathbb{P}(A)$ el conjunto de todas las particiones de A. Definimos la relación *refinamiento* $\preceq$ sobre $\mathbb{P}(A)$ como sigue:

   $$\mathcal{P} \preceq \mathcal{P}' \iff \text{para todo } X \in \mathcal{P}, \text{ existe } Y \in \mathcal{P}' \text{ tal que } X \subseteq Y.$$

   a) Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathbb{P}(A)$.
   b) ¿Es $\preceq$ un orden total? Justifique con una demostración.

c) ¿Existe un mínimo de $\mathbb{P}(A)$ con respecto a $\preceq$? ¿Qué sucede con el máximo?

10. Decimos que una relación R sobre un conjunto A es un *preorden* si es refleja y transitiva. Sea R un preorden sobre A:

    a) Demuestre que $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.

    b) Definimos una relación S sobre el conjunto cociente de A con respecto a $R \cap R^{-1}$ como sigue:
    $$(C, D) \in S \iff \text{existe } c \in C \text{ y existe } d \in D \text{ tal que } (c, d) \in R.$$
    Demuestre que S es un orden parcial.

11. Considere el conjunto potencia de los naturales $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. Se define la relación $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $(A, B) \in R$ si, y solo si, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ es un conjunto finito. Demuestre que R es una relación de equivalencia.

12. Sea n un número natural mayor o igual a 2, y sea $A = \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que el número de relaciones de equivalencia sobre A es estrictamente menor que el número de órdenes parciales sobre A.

13. Sea A un conjunto, y $S, T \subseteq A \times A$ ambas relaciones de equivalencia sobre A. Demuestre que:
    $$S \circ T = T \circ S \qquad \iff \qquad S \circ T \text{ es una relación de equivalencia.}$$
    Recuerde que si R_1 y R_2 son relaciones sobre A, entonces $R_1 \circ R_2$ es la siguiente relación sobre A:
    $$R_1 \circ R_2 = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{existe } c \in A \text{ tal que } (a, c) \in R_1 \text{ y } (c, b) \in R_2\}.$$

14. Sea A un conjunto no vacío. Considere el conjunto:
    $$\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq A \times A\}$$
    En otras palabras, $\mathcal{R}$ es el conjunto de todas las relaciones binarias sobre A.

    a) Sea $\preceq_1 \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ tal que, para todo $R, S \in \mathcal{R}$, $R \preceq_1 S$ si, y solo si, $R \circ S = S$. ¿Es $\preceq_1$ transitiva? Demuestre su afirmación.

    b) Sea $\preceq_2 \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ tal que, para todo $R, S \in \mathcal{R}$, $R \preceq_2 S$ si, y solo si, $R \circ S \subseteq S$. ¿Es $\preceq_2$ transitiva? Demuestre su afirmación.

15. ¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$?

16. Demuestre que para cada conjunto A, existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre A tal que $A/{\sim}$ es un conjunto finito.

17. Sea A un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre A tales que para toda relación de equivalencia $\sim$ sobre A, se tiene que $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$ (vale decir, para todo $(a, b) \in A \times A$, si $a \sim_1 b$, entonces $a \sim b$, y si $a \sim b$, entonces $a \sim_2 b$).

18. Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Una sucesión infinita $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de elementos de A se dice *estrictamente decreciente* si se cumple que $x_n \neq x_{n+1}$ y que $x_{n+1} \preceq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

   todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento minimal
   si y sólo si
   no existen sucesiones infinitas estrictamente decrecientes en A.

19. Define la relación $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ como:

   $$r \sim s \quad \text{si y sólo si} \quad \lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor$$

   Responda las siguientes preguntas sobre esta relación.

   a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

   b) Describa de manera detallada el conjunto cociente $\mathbb{R}/\!\sim$.

20. Defina la relación $\sim$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como:

   $$(x, y) \sim (w, z) \quad \text{si y sólo si} \quad x^2 + y^2 = w^2 + z^2.$$

   a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   b) Describa de manera detallada el conjunto cociente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\!\sim$. En particular, de una interpretación geométrica a los elementos de este conjunto cociente.

21. Defina la relación $\sim$ sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ como:

   $$(x, y) \sim (w, z) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } k \in \mathbb{R} \text{ tal que } k > 0 \text{ y } (x, y) = (k \cdot w, k \cdot z).$$

   a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

   b) Describa de manera detallada el conjunto cociente $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\})/\!\sim$. En particular, de una interpretación geométrica a los elementos de este conjunto cociente.