Unidad VI: Funciones y Cardinalidad

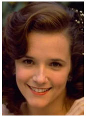
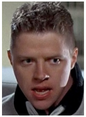
Cardinalidad y enumerabilidad

Clase 17 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Cardinalidad

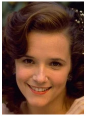
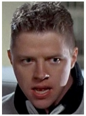
$$\left\{ \quad a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad , \quad d \quad \right\}$$

{  ,  ,  ,  }

¿Por qué estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad?
¿Cómo explicaría esto en términos de **funciones**?

Cardinalidad

$\{ \quad a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad , \quad d \quad \}$

{  ,  ,  ,  }

Existe una **biyección** entre los conjuntos.

Notación común: biyección = función biyectiva.

Definición:

Dos conjuntos A y B son **equinumerosos**, denotado como $A \approx B$, si **existe** una biyección $f : A \to B$.

Notación:

- También diremos que A tiene la **misma cardinalidad** que B.

OJO: la definición aplica para conjuntos finitos e infinitos.

Ejercicio: Demuestre que la relación $\approx$ es de equivalencia.

Ejemplos:

Sea $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$.

¿Es cierto que $\mathbb{N} \approx \mathbb{P}$? **SI!**

Podemos tomar la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ tal que $f(n) = 2 \cdot n$.

$$\mathbb{N} = \{\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \ldots\ \}$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{P} = \{\ 0 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8 \qquad 10 \qquad \ldots\ \}$$

Ejercicio: verifique que f es biyección.

Ejemplos:

¿Es cierto que $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$?

¿Qué biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ podríamos tomar?

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & 2k & 2k+1 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots & -k & k+1 & \cdots
\end{array}
$$

Esto corresponde a la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$
f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
$$

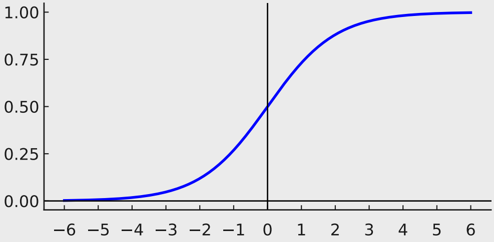
Ejercicio: verifique que f es biyección.

Ejemplos:

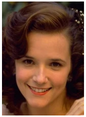
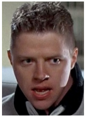
¿Es cierto que $\mathbb{R} \approx (0,1)$?

Podemos tomar la biyección $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ definida como:

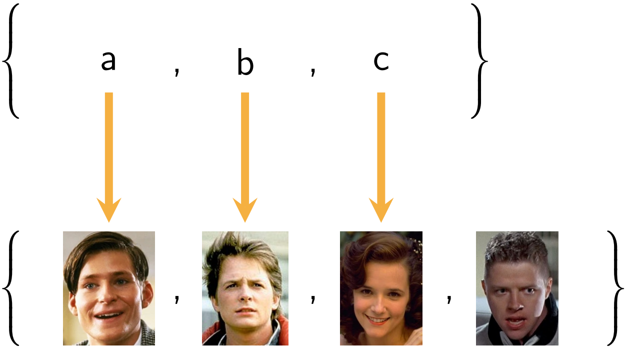
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$



$$\left\{ \quad a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad \right\}$$

{  ,  ,  ,  }

¿Por qué el primer conjunto tiene menor cardinalidad que el segundo?
¿Cómo explicaría esto en términos de **funciones**?



Existe una función **inyectiva** del primer conjunto al segundo.

Definición:

Un conjunto A tiene **menor o igual cardinalidad** que un conjunto B, si **existe** una función inyectiva $f : A \to B$.

- Escribimos $A \leq B$.

Ejemplos:

- $\{a, b, c, d\} \leq \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \leq \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$.

Definición:

Un conjunto A tiene **menor cardinalidad** que un conjunto B, si $A \leq B$ y **no** se cumple que $B \leq A$.

- Escribimos $A < B$.

1. Demuestre que la relación $\preceq$ es refleja y transitiva.
2. ¿Es $\preceq$ un orden parcial?
3. Demuestre que $A \prec \mathbb{N}$ para todo conjunto finito A.

Si $A \approx B$, entonces $A \preceq B$ y $B \preceq A$.

- Como $A \approx B$, existen biyecciones $f : A \to B$ y $f^{-1} : B \to A$.
- f y f^{-1} en particular son funciones inyectivas.

¿Es la implicancia contraria cierta?

Teorema (Schröder-Bernstein):

$A \approx B$ si y sólo si $A \preceq B$ y $B \preceq A$.

- Muy útil para demostrar que $A \approx B$.
- Muchas veces no es fácil definir una biyección $f : A \to B$.

Ejemplos:

Sea $\mathbb{X} = \{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Demuestre que $\mathbb{N} \approx \mathbb{X}$.

Podemos usar el Teorema de Schröder-Bernstein:

- Como $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$ tal que $f(k) = k$ es inyectiva.
- La función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{X}$ tal que $f(n) = 2^n \cdot 3^0$ es inyectiva.

Concluimos que $\mathbb{X} \preceq \mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \preceq \mathbb{X}$, y luego $\mathbb{N} \approx \mathbb{X}$.

Definición:

Un conjunto A es **enumerable** si $A \approx \mathbb{N}$.

Comentarios:

- A es enumerable si tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.
- En particular, todo conjunto enumerable es **infinito**.

Ejemplos:

$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$, $\{2^n \cdot 3^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbb{Z}$ son enumerables.

Definición:

Una **enumeración** de un conjunto A es una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de elementos de A.)
2. $a_n \neq a_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
   (todos los elementos de la secuencia son distintos.)
3. Para cada $a \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a$.
   (cada elemento de A aparece en la secuencia.)

Ejemplo:

De una enumeración de $\mathbb{Z}$.

¿Por qué se llaman conjuntos enumerables?

Definición:

Una **enumeración** de un conjunto A es una secuencia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   ($(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de elementos de A.)
2. $a_n \neq a_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
   (todos los elementos de la secuencia son distintos.)
3. Para cada $a \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a$.
   (cada elemento de A aparece en la secuencia.)

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una enumeración de A,
entonces la función $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $f(n) = a_n$ es una biyección.

Si $f : \mathbb{N} \to A$ es una biyección,
entonces $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una enumeración de A.

¿Por qué se llaman conjuntos enumerables?

Definición:

Una **enumeración** de un conjunto A es una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   ($(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de elementos de A.)
2. $a_n \neq a_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
   (todos los elementos de la secuencia son distintos.)
3. Para cada $a \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a$.
   (cada elemento de A aparece en la secuencia.)

Proposición:

A es enumerable si y sólo si existe una enumeración de A.

Podemos dar una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

- Ordenamos los pares según la suma de sus valores de menor a mayor.
- Ordenamos los pares con la misma suma según la primera coordenada, de menor a mayor.
- Finalmente, asignamos un natural a cada par según el orden obtenido.

Podemos dar una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc}
(0,0) & \to & 0 \\
(0,1) & \to & 1 \\
(1,0) & \to & 2 \\
(0,2) & \to & 3 \\
(1,1) & \to & 4 \\
(2,0) & \to & 5 \\
(0,3) & \to & 6 \\
(1,2) & \to & 7 \\
(2,1) & \to & 8 \\
(3,0) & \to & 9 \\
 & \ldots &
\end{array}$$

Función biyectiva explícita:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} k+1 \right) + i & i+j>0 \end{cases}$$

Es decir:

$$f(i,j) = \begin{cases} 0 & i+j=0 \\ \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i & i+j>0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $f(1,1) = 4$ y $f(3,0) = 9$.

$\mathbb{N}^k$ es enumerable

La idea de la enumeración anterior se puede extender a $\mathbb{N}^k$.

Proposición:

Para cada $k \geq 2$ se tiene que $\mathbb{N}^k$ es enumerable.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Basta demostrar que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- Sabemos que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}$.
- Si $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$, obtenemos que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$.
- Por teorema de Schröder-Bernstein, concluimos que $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$.

¿Cómo probamos que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Cada número racional en $\mathbb{Q}$ se puede representar como una fracción irreducible $\frac{a}{b}$, donde $b \in \mathbb{N}$.

- El 0 es representado por la fracción $\frac{0}{1}$.

Podemos definir la siguiente función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} (a, 0, b) & a \geq 0 \\ (0, |a|, b) & a < 0 \end{cases}$$

La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es inyectiva (verifíquelo).

1. Si A y B son conjuntos enumerables, entonces $A \cup B$ es enumerable.

2. La unión enumerable de **conjuntos finitos** es enumerable:

   Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos finitos, entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es enumerable.

3. La unión enumerable de **conjuntos enumerables** es enumerable:

   Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de conjuntos enumerables, entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es enumerable.

Propuesto: Demuestre las propiedades.

Teorema:

Si A es un conjunto infinito, entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

$\mathbb{N}$ es el infinito más pequeño

Corolario:

1. Si A es un conjunto infinito, entonces $\mathbb{N} \preceq A$.

2. Si $A \prec \mathbb{N}$, entonces A es finito.

Demostración:

1. Si A es infinito, por el teorema anterior, existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que B es enumerable.

   Tenemos que $\mathbb{N} \preceq B$ y $B \preceq A$. Concluimos que $\mathbb{N} \preceq A$.

2. Por contradicción, supongamos que $A \prec \mathbb{N}$ y A es infinito.

   Por la parte anterior, tenemos que $\mathbb{N} \preceq A$. Esto contradice la hipótesis $A \prec \mathbb{N}$.

1. Sea Σ un alfabeto finito. Demuestre que Σ^+ es enumerable.
   - Σ^+ : conjunto de todas las palabras sobre alfabeto Σ de largo ≥ 1.

2. Demuestre que el conjunto de todos los programas en Python es enumerable.