Unidad III: Teoría de conjuntos

Teoría de conjuntos: La construcción de los naturales.

Clase 10 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Hasta el momento...

- Tenemos el conjunto vacío $\varnothing$.
- Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los **mismos** elementos.
- Si $a_1, \ldots, a_k$ son conjuntos, entonces $\{a_1, \ldots, a_k\}$ también lo es.
- Si A es un conjunto, podemos definir conjuntos de la forma:

$$S = \{c \in A \mid c \text{ cumple cierta propiedad}\}.$$

- Si A y B son conjuntos, la unión $A \cup B$, intersección $A \cap B$ y diferencia $A \setminus B$ están bien definidas.
- Si A es un conjunto, existe el conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ cuyos elementos son **todos los subconjuntos** de A.

Hasta el momento, ¿Podemos construir algún conjunto **infinito**?

El conjunto sucesor

Definición:

Si A es un conjunto, definimos su **conjunto sucesor** $S(A)$ como:

$$S(A) = A \cup \{A\}$$

Ejemplos:

- $S(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$
- $S(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $S(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Definición:

Un conjunto A es **inductivo** si cumple lo siguiente:

- $\varnothing \in A$.
- Si $c \in A$, entonces $S(c) \in A$.

Axioma del infinito:

Existe un conjunto inductivo.

- Si A es inductivo, entonces contiene **al menos** los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} &\varnothing \\ S(\varnothing) &= \{\varnothing\} \\ S(\{\varnothing\}) &= \{\,\varnothing, \{\varnothing\}\,\} \\ S(\{\,\varnothing, \{\varnothing\}\,\}) &= \{\,\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\,\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

- En particular, A tiene una cantidad **infinita** de elementos.

Los números naturales se definen de la siguiente forma:

- $0 = \varnothing$
- $1 = S(0) = S(\varnothing) = \{\varnothing\} = \{0\}$
- $2 = S(1) = S(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$
- $3 = S(2) = S(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$

$$\vdots$$

- Si A es inductivo, entonces contiene **al menos** a los números naturales:

$$\begin{aligned} &0 \\ S(0) &= 1 \\ S(1) &= 2 \\ S(2) &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

- A podría contener **otros** elementos adicionales.

¿Cómo definimos el conjunto de los números naturales?

Queremos un conjunto $\mathbb{N}$ que contenga exactamente los elementos:

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

(sin **ningún** elemento adicional.)

- El axioma del infinito nos dice que existe un conjunto inductivo A_0.
- Pueden existir muchos otros conjuntos inductivos.
- Los números naturales aparecen en **todos** los conjuntos inductivos.

Podemos definir el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales como:

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ pertenece a todos los conjuntos inductivos}\}.$$

Esto es equivalente a:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ es inductivo}} A$$

($\mathbb{N}$ es la **intersección** de todos los conjuntos inductivos.)

Propuesto:
Verifique que $\mathbb{N}$ está bien definido (usando A_0 y el axioma de separación).

Por construcción, $\mathbb{N}$ cumple lo siguiente:

$\mathbb{N}$ es inductivo:

- $0 \in \mathbb{N}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $S(n) \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ es el **menor** conjunto inductivo (c/r a subconjuntos):

- La intersección siempre es subconjunto de sus términos. En general:

$$\bigcap_{C \text{ en } \mathcal{I}} C \subseteq C \qquad \text{para todo } C \text{ en } \mathcal{I}$$

- Por definición, tenemos que:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ es inductivo}} A$$

  Luego, para todo conjunto inductivo A se cumple que:

$$\mathbb{N} \subseteq A$$

Teorema (principio de inducción):

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si A satisface lo siguiente:

- $0 \in A$
- Si $n \in A$, entonces $S(n) \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Demostración:

Si A satisface las dos condiciones, entonces A es inductivo.

Como $\mathbb{N}$ es el menor conjunto inductivo, tenemos que $\mathbb{N} \subseteq A$.

Como $A \subseteq \mathbb{N}$, concluimos que $A = \mathbb{N}$.

Es común enunciar el principio de inducción en términos de “propiedades”:

Principio de inducción:

Sea $P(n)$ una **propiedad** de los números naturales.
(algo que es verdadero o falso para cada $n \in \mathbb{N}$).

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- $P(0)$ es verdadero.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

¿Por qué esto es equivalente al teorema de la slide anterior?

Es posible definir todas las relaciones y operaciones conocidas sobre los números naturales usando teoría de conjuntos.

- Por ejemplo, podemos definir la relación $\leq$ como sigue:

  $$n \leq m \text{ si y sólo si } n \subseteq m.$$

  Con esta definición, la relación $\leq$ cumple todas las propiedades que esperamos.

- Se pueden definir también operaciones como la suma, multiplicación, exponenciación, etc...