Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 12 - Cardinalidad

31 de octubre de 2024

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

Resumen

Principio del palomar Si se tiene una función $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$ con m>n, la función f no puede ser inyectiva. Es decir, necesariamente existirán $x, y \in \mathbb{N}_m$ tales que $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$.

Cardinalmente menor o igual Un conjunto A tiene **menor o igual cardinalidad** que un conjunto B, si **existe** una función inyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como:

$$A \preceq B$$

Equinumeroso Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Diremos que A es equinumeroso con B (o que A tiene el mismo tamaño que B) si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Lo denotamos como

$$A \approx B$$

O equivalentemente tenemos la definición del teorema de Schroder-Bernstein:

$$A \approx B \text{ si y sólo si } A \preceq B \text{ y } B \preceq A.$$

Enumeración
Una **enumeración** de un conjunto A es una secuencia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1. $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n \neq a_m$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m$.
3. Para cada $a \in A$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a$.

Conjunto enumerable

Existen dos formas equivalentes de definir que un conjunto A es enumerable:

1. A es **enumerable** si $A \approx \mathbb{N}$.
2. A es enumerable si y sólo si existe una enumeración de A.

Video: Les dejamos este video que puede servirles para entender numerabilidad AQUI :)

1. Cota de cardinalidad

Sea $A_i \mid i \in \mathbb{N}$ una colección de conjuntos tal que $A_i \preceq \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \preceq \mathbb{N}$$

2. Enumerabilidad

Apóyese de lo demostrado en (1) para demostrar que

1. Si A es enumerable y B es enumerable, entonces $A \cup B$ es enumerable.
2. La unión de una cantidad enumerable de conjuntos enumerables es enumerable.
3. La unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos no vacíos y disjuntos es numerable.

3. Reales

Demuestre que $[0,1] \approx [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

4. Potencia finito y cofinito

Considere el conjunto $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ que contiene todos los subconjuntos finitos de los números naturales.

1. Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ es enumerable.
2. Considere el conjunto $\mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ de todos los $A \subseteq \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. ¿Es $\mathcal{P}_{\text{co-fin}}(\mathbb{N})$ enumerable? Demuestre.