PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía inducción

1. Demuestre que para todo número natural $n \geq 4$, se tiene que $2^n < n!$.

2. Sean a, b números reales tal que $0 < b < a$. Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple:

$$a^n - b^n \leq na^{n-1}(a - b)$$

3. Demuestre por inducción que para todo $n \geq 3$ se cumple que:

$$n^2 - 7n + 12 \geq 0$$

4. Demuestre por inducción que para todo natural $n \geq 1$ y para todo natural $m \geq 1$, se tiene que:

$$(m + 1)^n > mn$$

   (*Hint:* Aplique inducción sobre n, tomando un m arbitrario.)

5. Sea $h > -1$ un número real. Demuestre que para todo $n \geq 0$ se cumple:

$$1 + nh \leq (1 + h)^n$$

6. Sea $n \geq 1$ un natural. El n-ésimo número armónico H_n se define como $H_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

   Demuestre que para todo $n \geq 0$, se tiene que:

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

7. Demuestre que la suma de los n primeros números impares es siempre n^2. Es decir, pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

8. Demuestre la fórmula para la suma de una progresión geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

9. Demuestre que para todo natural n se cumple que $7^n - 2^n$ es un múltiplo de 5.

10. Demuestre que, si se tiene un conjunto de n líneas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes (tres que se intersecten en el mismo punto), entonces ellas dan lugar a $(n^2+n+2)/2$ regiones.

11. Demuestre por inducción simple que todo conjunto con $n \geq 2$ elementos tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ subconjuntos de tamaño 2.

12. Sea $G=(N,A)$ un grafo no dirigido y sin loops (recuerde que un loop es una arista de la forma (u,u)). El *grado* de un nodo $u \in N$ es la cantidad de aristas en A de la forma (u,v). Demuestre que todo grafo G tiene una cantidad par de nodos con grado impar. (*Hint:* aplique inducción sobre la cantidad de aristas de G)

13. Sea $G=(N,A)$ un grafo dirigido y sin loops (recuerde que un loop es un arco de la forma (u,u)). Un *camino simple* π en $G=(N,A)$ es un secuencia de nodos distintos $\pi = u_0,\ldots,u_\ell \in N$, con $\ell \geq 1$, tal que para todo $i \in \{1,\ldots,\ell\}$, se cumple que $(u_{i-1},u_i) \in A$. Notar que todos los arcos en un camino simple "apuntan hacia adelante". El camino simple π es *Hamiltoneano* si pasa por *todos* los nodos de G. Decimos que $G=(N,A)$ es un *torneo* si $|N| \geq 2$ y para todo par de nodos distintos $u,v \in N$ se tiene que $(u,v) \in A$ o $(v,u) \in A$, pero no ambos.

    Demuestre que todo torneo tiene un camino simple Hamiltoneano. (*Hint:* Aplique inducción simple en la cantidad de nodos de G.)

14. Definimos la secuencia a_n, con $n \geq 1$, como sigue

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} - n + 4 \qquad \text{para todo } n \geq 3 \end{aligned}$$

    Demuestre por inducción que para todo $n \geq 3$ se tiene que $a_n \geq n$.

15. La función de Fibonacci se define de la siguiente forma:

$$F(n) \quad = \quad \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

    Así, por ejemplo, se tiene que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Demuestre que para todo número natural n, se tiene que $F(n)$ es par si y sólo si n es divisible por 3.

16. Suponga que $F(n)$ es la función de Fibonacci definida en la pregunta anterior. Demuestre que para todo número natural n, se tiene que $F(n) \leq 2^n - 1$.

17. Definimos la secuencia a_n, con $n \geq 1$, como sigue

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 13 \\ a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \qquad \text{para todo } n \geq 3 \end{aligned}$$

    Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$ se tiene que $a_n = 2^n + 3^n$.

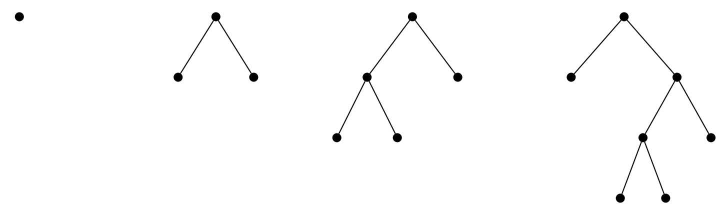
18. Demuestre que para todo número natural $n \geq 14$, existen números naturales k y ℓ tales que $n = k\cdot 3 + \ell \cdot 8$.

19. Un *árbol binario completo* es un grafo no dirigido con un nodo especial llamado *raíz*, que se puede construir a partir de las siguientes reglas:

(1) El grafo $T = (\{u\}, \emptyset)$ (es decir, el grafo que sólo tiene un nodo u y ninguna arista) es un árbol binario completo con raíz u.

(2) Si $T_1 = (N_1, A_1)$ y $T_2 = (N_2, A_2)$ son árboles binarios completos disjuntos (es decir, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$) cada uno con raíz u_1 y u_2, respectivamente, entonces $T = (N_1 \cup N_2 \cup \{u\}, A_1 \cup A_2 \cup \{(u, u_1), (u, u_2)\})$ es un árbol binario completo con raíz u, donde u es un nodo que no está en $N_1 \cup N_2$. En este caso, llamamos a T_1 y T_2 el subárbol izquierdo y derecho, respectivamente, de u.

Ejemplos de árboles binarios completos:



Si $T = (N, A)$ es un árbol binario completo y $u \in N$, decimos que u es una *hoja* si no tiene árbol izquierdo ni derecho. Demuestre que en todo árbol binario completo con $n \geq 1$ nodos, la cantidad de hojas es exactamente $\frac{n+1}{2}$. (*Hint:* aplique inducción fuerte sobre la cantidad de nodos.)