Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Examen

02 de Julio de 2025

Duración: 4:00 hrs.

Pregunta 1

Demuestre que si n es un entero positivo, entonces

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n \;=\; \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}.$$

Pregunta 2

Sea R un predicado de aridad $n+1$ en Lógica de Predicados, utilizaremos el vocabulario μ definido como $\{R, =\}$. Dada un interpretación $\mathcal{I}$, $R^{\mathcal{I}}$ es la interpretación de R bajo $\mathcal{I}$.

1. Decimos que una relación $(n+1)$-aria R sobre A codifica una función n-aria si, para todo $(a_1, ..., a_n) \in A^n$, existe un único $c \in A$ tal que $(a_1, ..., a_n, c) \in R$. Escriba (utilizando sólo cuantificadores $\forall$ y $\exists$) una fórmula φ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ sobre μ se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad R^{\mathcal{I}} \text{ codifica una función } n\text{-aria.}$$

2. Sea $n = 2$. Considere toda $\mathcal{I}$ sobre μ en la que $R^{\mathcal{I}}$ codifica una función binaria (2-aria), denotada por $f_{\mathcal{I}} : A \times A \to A$. Recuerde que una función binaria f sobre A es *asociativa*, si para todo $a, b, c \in A$ se cumple que $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$. Construya una fórmula ψ tal que:

$$\mathcal{I} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad f_{\mathcal{I}} \text{ es asociativa.}$$

Pregunta 3

Sea $G = (V, E)$ un grafo (no dirigido, sin loops, ni aristas múltiples) con $n \geq 3$ vértices. Denotamos por $\delta(G)$ el mínimo grado de un vértice en G. Demuestre que si $\delta(G) \geq 2$, entonces G contiene al menos un ciclo.

Pregunta 4

En esta pregunta ocupamos $\text{mcd}(a, b)$ para denotar el máximo común divisor entre $a, b > 0$.

1. Demuestre que si $a > b$, entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$, donde $r = a \bmod b$.

2. Usando 1., demuestre que existen enteros s, t tal que $\text{mcd}(a, b) = sa + tb$.

3. Demuestre que si $sa + tb = \text{mcd}(a, b) = 1$, entonces $sa \equiv_b 1$ (s es inverso de a en módulo b).

4. Demuestre que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces la ecuación $ax \equiv_b c$ tiene solución x.