Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Interrogación 1

29 de Septiembre de 2025

Pregunta 1

Sean Σ y Σ' dos conjuntos de fórmulas proposicionales. Sea φ una fórmula proposicional. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? Demuestre o de un contraejemplo.

(a) Si $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$, entonces $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$.

(b) Si $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$.

Solución

(a) Esta afirmación es verdadera.

Notación sección 1 y 3:
Supongamos que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$ y demostremos que $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$. Sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \Sigma') = 1$. Debemos demostrar que $\sigma(\varphi) = 1$. Por hipótesis sabemos que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$, supongamos que se cumple el primer caso $\Sigma \models \varphi$ (el segundo caso es análogo). Como $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$, tenemos que $\sigma(\Sigma) = 1$. Como $\Sigma \models \varphi$, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$.

Notación sección 2:
Supongamos que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$ y demostremos que $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$. Fijamos una valuación de las variables tal que todas las fórmulas en $\Sigma \cup \Sigma'$ tomen valor 1. Debemos demostrar que $\varphi = 1$ para esta valuación. Por hipótesis sabemos que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma' \models \varphi$, supongamos que se cumple el primer caso $\Sigma \models \varphi$ (el segundo caso es análogo). Como $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Sigma'$, tenemos que todas las fórmulas en Σ toman valor $1\sigma(\Sigma) = 1$. Como $\Sigma \models \varphi$, concluimos que $\varphi = 1$ para nuestra valuación de las variables.

(b) Esta afirmación es falsa.
Notación sección 1 y 3: Demostremos esto con un contraejemplo. Sea $\Sigma = \{p\}$, $\Sigma' = \{q\}$ y $\varphi = p \wedge q$. Tenemos que se cumple $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$, es decir, $\{p, q\} \models p \wedge q$, ya que cada vez que p y q son verdaderos, entonces $p \wedge q$ debe ser verdadero. Por otra parte, se cumple que $\Sigma \not\models \varphi$, es decir, $\{p\} \not\models p \wedge q$, ya que podemos tomar la valuación $\sigma(p) = 1$ y $\sigma(q) = 0$, obteniendo que $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\varphi) = 0$. De manera analoga, tenemos que $\Sigma' \not\models \varphi$.

Notación seccion 2:
Demostremos esto con un contraejemplo. Sea $\Sigma = \{p\}$, $\Sigma' = \{q\}$ y $\varphi = p \wedge q$. Tenemos que se cumple $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$, es decir, $\{p, q\} \models p \wedge q$, ya que cada vez que p y q son verdaderos, entonces $p \wedge q$

debe ser verdadero. Por otra parte, se cumple que $\Sigma \not\models \varphi$, es decir, $\{p\} \not\models p \wedge q$, ya que podemos tomar la valuación $p = 1$ y $q = 0$ cuando todas las fórmulas en Σ son verdaderas pero $\phi = p \wedge q$ es falsa. De manera analoga, tenemos que $\Sigma' \not\models \varphi$.

Pregunta 2

Considere las siguientes interpretaciones sobre el predicado binario $<$.

- $\mathcal{I}_1$ tiene como dominio a $\mathbb{N}$ e interpreta a $<$ como el orden usual en los números naturales.
- $\mathcal{I}_2$ tiene como dominio a $\mathbb{Z}$ e interpreta a $<$ como el orden usual en los números enteros.
- $\mathcal{I}_3$ tiene como dominio a $\mathbb{Q}$ e interpreta a $<$ como el orden usual en los números racionales.

Responda las siguientes preguntas sobre estas interpretaciones.

(a) Construya una oración φ_1 tal que φ_1 es cierta en $\mathcal{I}_1$ y falsa en $\mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_3$.

(b) Construya una oración φ_2 tal que φ_2 es cierta en $\mathcal{I}_2$ y falsa en $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_3$.

(c) Construya una oración φ_3 tal que φ_3 es cierta en $\mathcal{I}_3$ y falsa en $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$.

En cada caso, comente brevemente qué está expresando su oración.

Solución

Para la parte (a), notemos que en los números naturales $\mathbb{N}$ existe un número mínimo, es decir, un número que es menor o igual que todos los naturales (el número 0). Esto no es cierto en los enteros $\mathbb{Z}$ ni en los racionales $\mathbb{Q}$. Luego en esta parte podemos tomar la oración:

$$\varphi_1 = \exists x \forall y \, (x = y \vee x < y)$$

Vamos directamente a la parte (c). Una propiedad que cumplen los racionales es la siguiente: para todo par de números racionales a y b tal que $a < b$, existe un número racional c entremedio, vale decir, tal que $a < c < b$ (por ejemplo, basta tomar $c = (a + b)/2$). Esto es falso en los números naturales $\mathbb{N}$ y los enteros $\mathbb{Z}$ (basta tomar por ejemplo $a = 0$ y $b = 1$). Luego en esta parte podemos tomar la oración:

$$\varphi_3 = \forall x \forall y \Big((x < y) \to \exists z \left((x < z) \wedge (z < y) \right) \Big)$$

Finalmente, para la parte (b), podemos tomar la oración:

$$\varphi_2 = \neg \varphi_1 \wedge \neg \varphi_3$$

En efecto, φ_1 es verdadera sobre $\mathcal{I}_1$ así que φ_2 es falsa sobre $\mathcal{I}_1$. Por la misma razón, φ_2 es falsa sobre $\mathcal{I}_3$. Por el otro lado, φ_1 y φ_3 son falsas sobre $\mathcal{I}_2$ así que φ_2 es verdadera sobre $\mathcal{I}_2$.

Pregunta 3

(a) Demuestre que $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$, para todos los conjuntos A, B y C.

(b) Demuestre que $\mathcal{P}(A \setminus B) \neq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ para todos los conjuntos A y B.

Solución

(a) Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Sea $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Hay que demostrar que $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Como $x \in (A \setminus B) \setminus C$, por definición de la diferencia de conjuntos, tenemos $x \in A \setminus B$ y $x \notin C$. Entonces, $x \in A, x \notin B, x \notin C$. Como $x \notin B$, tenemos $x \notin B \setminus C$. Como $x \in A$, concluimos que $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

(b) Sean A y B conjuntos arbitrarios. Recordar que $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$ para todo conjunto X. En particular, $\varnothing \in \mathcal{P}(A \setminus B)$, $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ y $\varnothing \in \mathcal{P}(B)$. Entonces, tenemos $\varnothing \in \mathcal{P}(A \setminus B)$ y $\varnothing \notin \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. Es decir, $\varnothing$ es un elemento de $\mathcal{P}(A \setminus B)$ pero no es un elemento de $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$. Concluimos que $\mathcal{P}(A \setminus B) \neq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Pregunta 4

Recuerde que el *sucesor* B de un conjunto A se define como $B = A \cup \{A\}$. Demuestre que no existe un conjunto A tal que el sucesor de A es igual a $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. (*Hint:* Recuerde la siguiente propiedad vista en ayudantía: No existe un conjunto A tal que $A \in A$.)

Solución

Recordar que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, vale decir, cumple lo siguiente: para todo conjunto B, si $B \in \mathbb{N}$, entonces el sucesor de B está en $\mathbb{N}$, es decir, $B \cup \{B\} \in \mathbb{N}$. Demostremos la proposición por contradicción. Supongamos que existe un conjunto A tal que $A \cup \{A\} = \mathbb{N}$. Notar que $A \in A \cup \{A\}$, y luego $A \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es inductivo, obtenemos que $A \cup \{A\} \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad del hint.

Comentarios corrección

- Los items de cada pregunta valen lo mismo.
- Los estudiantes pueden usar cualquier notación, independiente de su sección.
- No bajar puntaje por ”falta de formalidad”. Un argumento puede estar correcto, pero puede estar escrito en palabras.
- Sólo bajar puntaje cuando el argumento es incorrecto o incompleto.
- También bajar puntaje en caso que la solución es tan confusa, que no se entiende. Es responsabilidad del estudiante entregar una solución clara.
- La idea es que la corrección no sea binaria (0 o todo el puntaje). Está ok poner puntajes parciales, en caso que la solución no este completamente buena. Eso queda a criterio de los correctores.
- Como siempre, la pauta es una referencia. Podrían llegar otras soluciones que también sean correctas.