Unidad IV: Inducción

Inducción simple.

Clase 11 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Principio de inducción (simple):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(0)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

En lógica de predicados:

Para todo predicado P sobre $\mathbb{N}$, lo siguiente es verdadero:

$$\Big(P(0) \wedge \forall n \big(P(n) \to P(n+1)\big)\Big) \to \forall n\ P(n)$$

Demuestre que la siguiente propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Caso base: $P(0)$ es verdadero: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$

Paso inductivo: $\forall n \big(P(n) \to P(n+1)\big)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(a esto se le llama **hipótesis inductiva (HI)**)

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{\textbf{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que la siguiente propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \quad n < 2^n$$

Caso base: $P(0)$ es verdadero: $0 < 1 = 2^0$

Paso inductivo: $\forall n \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero: $n < 2^n$ **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $n+1 < 2^{n+1}$

$$\begin{aligned} n+1 &< 2^n + 1 && \textbf{(HI)} \\ &\leq 2^n + 2^n && (1 \leq 2^n, \text{ para todo } n) \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notación:

Para un conjunto finito S, denotamos por $|S|$ la cantidad de elementos de S.

Demuestre la siguiente propiedad $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$:

Si S es un conjunto con $|S| = n$, entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Caso base: $P(0)$ es verdadero.

La única posibilidad es que $S = \varnothing$. En este caso, $|\mathcal{P}(S)| = 1 = 2^0$.

Demuestre la siguiente propiedad $P(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$:

Si S es un conjunto con $|S| = n$, entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Paso inductivo: $\forall n \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero. **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero.
Sea S un conjunto con $|S| = n+1$. Tomemos un elemento $a \in S$ cualquiera.
Sea $T = S \setminus \{a\}$. En particular, $S = T \cup \{a\}$ y $|T| = n$. Tenemos que:

$$\mathcal{P}(S) = \{X \subseteq S \mid a \in X\} \cup \{X \subseteq S \mid a \notin X\}$$
$$\{X \subseteq S \mid a \in X\} \cap \{X \subseteq S \mid a \notin X\} = \varnothing$$

Luego, $|\mathcal{P}(S)| = |\{X \subseteq S \mid a \in X\}| + |\{X \subseteq S \mid a \notin X\}|$.

Por otra parte:

$$\{X \subseteq S \mid a \notin X\} = \mathcal{P}(T) \qquad \{X \subseteq S \mid a \in X\} = \{Y \cup \{a\} \mid Y \in \mathcal{P}(T)\}.$$

Obtenemos que $|\{X \subseteq S \mid a \notin X\}| = |\{X \subseteq S \mid a \in X\}| = |\mathcal{P}(T)|$.

Por **HI**, sabemos que $|\mathcal{P}(T)| = 2^n$. Luego, $|\mathcal{P}(S)| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente variante de inducción simple es muy útil:

Inducción simple (caso base mayor a 0):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y b un natural.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b)$ es verdadero.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n \geq b$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Demuestre que para todo $n \geq 4$ se cumple que:

$$2^n < n!$$

Caso base: $P(4)$ es verdadero: $2^4 = 16 < 24 = 4!$

Paso inductivo: $\forall n \geq 4 \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.
Sea $n \geq 4$. Suponga que $P(n)$ es verdadero: $2^n < n!$ **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $2^{n+1} < (n+1)!$

$$\begin{array}{rcll} (n+1)! & = & n! \cdot (n+1) & \\ & > & 2^n \cdot (n+1) & \textbf{(HI)} \\ & > & 2^n \cdot 2 & (\text{ya que } n \geq 4) \\ & = & 2^{n+1} & \end{array}$$

Concluimos que la propiedad se cumple para todo $n \geq 4$.

La siguiente variante de inducción simple es muy útil:

Inducción simple (múltiples casos bases):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y k un natural.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(0), \ldots, P(k)$ son verdaderos.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n \geq k$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Inducción simple con multiples casos bases: ejemplo

Demuestre que la siguiente propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \quad n < (1.5)^n$$

Caso base: $P(0)$ es verdadero: $0 < 1 = (1.5)^0$

Paso inductivo: $\forall n \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $P(n)$ es verdadero: $n < (1.5)^n$ **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $n+1 < (1.5)^{n+1}$

$$\begin{array}{rcll} n+1 & < & (1.5)^n + 1 & \textbf{(HI)} \\ & \leq & (1.5)^n + 0.5 \cdot (1.5)^n & (1 \leq 0.5 \cdot (1.5)^n, \text{ para todo } n \geq 2) \\ & = & 1.5 \cdot (1.5)^n & \\ & = & (1.5)^{n+1} & \end{array}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

¿Algún problema con este argumento?

Inducción simple con multiples casos bases: ejemplo

Demuestre que la siguiente propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n): \quad n < (1.5)^n$$

Caso base: $P(0), P(1), P(2)$ son verdaderos:

$$0 < 1 = (1.5)^0 \qquad 1 < 1.5 = (1.5)^1 \qquad 2 < 2.25 = (1.5)^2$$

Paso inductivo: $\forall n \geq 2 \big(P(n) \rightarrow P(n+1)\big)$.
Sea $n \geq 2$. Suponga que $P(n)$ es verdadero: $n < (1.5)^n$ **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $n+1 < (1.5)^{n+1}$

$$\begin{array}{rcll} n+1 & < & (1.5)^n + 1 & \textbf{(HI)} \\ & \leq & (1.5)^n + 0.5 \cdot (1.5)^n & (1 \leq 0.5 \cdot (1.5)^n, \text{ para todo } n \geq 2) \\ & = & 1.5 \cdot (1.5)^n & \\ & = & (1.5)^{n+1} & \end{array}$$

Concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

El argumento del paso inductivo **sólo** funciona cuando $n \geq 2$.
Luego, necesitamos probar por separado los casos bases 0, 1 y 2.

Podemos combinar ambas variantes previas:

Inducción simple (variante general):

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales y $b \leq k$ dos naturales.

Si la propiedad P cumple lo siguiente:

- **Caso base:**
  $P(b), \ldots, P(k)$ son verdaderos.
- **Paso inductivo:**
  Para todo $n \geq k$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero.

Entonces, para todo $n \geq b$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Suponga que queremos demostrar la siguiente propiedad para todo $n \geq 1$:

$P(n)$: En cada conjunto de n caballos, todos tienen el mismo color.

Demostración por inducción:

Caso base $P(1)$: En un conjunto de 1 caballo, todos tienen el mismo color.

Paso inductivo: Suponga que $P(n)$ es cierto y demostremos $P(n+1)$.

Sea $\{c_1, \ldots, c_{n+1}\}$ un conjunto de $n+1$ caballos.

- Como $\{c_1, \ldots, c_n\}$ tiene n caballos, entonces
  por **HI** todos los caballos $c_1, \ldots, c_n$ tienen el **mismo color**.
- Como $\{c_2, \ldots, c_{n+1}\}$ también tiene n caballos, entonces
  por **HI** todos los caballos $c_2, \ldots, c_{n+1}$ tienen el **mismo color**.
- Como $\{c_1, \ldots, c_n\}$ y $\{c_2, \ldots, c_{n+1}\}$ tienen caballos en común
  $(\{c_1, \ldots, c_n\} \cap \{c_2, \ldots, c_{n+1}\} = \{c_2, \ldots, c_n\})$, entonces
  todos los caballos $c_1, \ldots, c_{n+1}$ tienen el mismo color.

¿Dónde está el error?

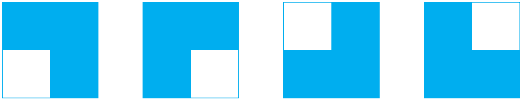
Un **triomino** es una pieza en forma de L como sigue:

Demuestre que para todo $n \geq 1$ lo siguiente se cumple:

Cada tablero de $2^n \times 2^n$ cuadrados que tiene un cuadrado ocupado,
puede ser cubierto completamante usando triominos.
(rotar triominos está permitido.)

Caso base: P(1) es verdadero.

Cada tablero de 2×2 que tiene un cuadrado ocupado, puede ser cubierto con triominos:



Paso inductivo: $\forall n \geq 1\, (P(n) \rightarrow P(n+1))$.

Sea $n \geq 1$. Supongamos que $P(n)$ es verdadero:

Cada tablero de $2^n \times 2^n$ que tiene un cuadrado ocupado,
puede ser cubierto con triominos **(HI)**

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero.
Sea un tablero T de $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ que tiene un cuadrado ocupado.

Podemos dividir el tablero T en 4 tableros $T_1, \ldots, T_4$ de $2^n \times 2^n$.

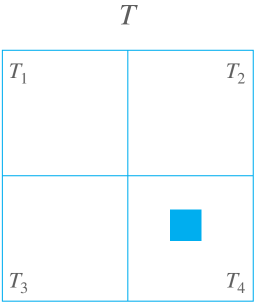
El cuadrado ocupado en T debe estar en alguno de estos 4 tableros,
digamos T_i.

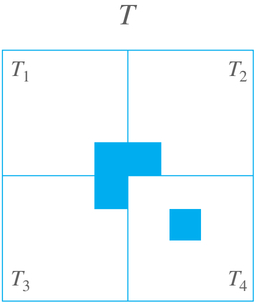
Podemos poner un triomino en el centro del tablero T de manera que toque
a todos los tableros $T_1, \ldots, T_4$ **menos** a T_i.

Como cada uno de los tableros $T_1, \ldots, T_4$ tiene un cuadrado ocupado,
podemos aplicar la **HI** en cada uno de estos tableros,
y así podemos cubrir **todo** el tablero T con triominos.

Un problema de triominos

Ilustración del argumento:





En este ejemplo, $T_i = T_4$.

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \ \leq \ \frac{1}{1-r}$$

Caso base: $P(0)$ es verdadero.

Como $0 < r < 1$, tenemos que $0 < 1 - r < 1$. Esto implica que:

$$1 \ < \ \frac{1}{1-r}$$

Concluimos que:

$$\sum_{i=0}^{0} r^i \ = \ 1 \ \leq \ \frac{1}{1-r}$$

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1}{1-r}$$

Paso inductivo:
Sea $n \in \mathbb{N}$ y suponga que $P(n)$ es verdadero:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1}{1-r} \quad \textbf{(HI)}$$

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero.

$$\sum_{i=0}^{n+1} r^i = \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1} \overset{\textbf{HI}}{\leq} \frac{1}{1-r} + r^{n+1}$$

Necesitamos probar que: $\displaystyle \frac{1}{1-r} + r^{n+1} \leq \frac{1}{1-r}$

¿Podemos terminar el paso inductivo?

A veces, cuando no encontramos una forma de demostrar el paso inductivo, puede ser conveniente **fortalecer la hipótesis inductiva**:

- Tratamos de demostrar por inducción una **propiedad más fuerte**.
- Esto hace que el paso inductivo sea más fácil de demostrar, ya que la hipótesis inductiva es más fuerte.

En el ejemplo anterior, podemos tratar de demostrar lo siguiente.

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Notar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \leq \frac{1}{1 - r}$$

Luego esta propiedad es **más fuerte** (implica a la anterior).

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Caso base: $P(0)$ es verdadero.

$$\sum_{i=0}^{0} r^i = 1 \leq \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r}$$

Fortaleciendo la hipótesis inductiva

Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r < 1$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Paso inductivo:

Sea $n \in \mathbb{N}$ y suponga que $P(n)$ es verdadero:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i \leq \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \textbf{(HI)}$$

Por demostrar: $P(n+1)$ es verdadero: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} r^i \leq \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} r^i = \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1} \overset{\textbf{HI}}{\leq} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}
\end{aligned}$$