Inverso modular

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Ejemplo

3 es el inverso de 2 en módulo 5 puesto que $3 \cdot 2 \equiv_5 1$.

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Ejemplo

3 es el inverso de 2 en módulo 5 puesto que $3 \cdot 2 \equiv_5 1$.

- O, equivalentemente, se tiene que $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$.

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Ejemplo

3 es el inverso de 2 en módulo 5 puesto que $3 \cdot 2 \equiv_5 1$.

- O, equivalentemente, se tiene que $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$.

¿Todo número tiene inverso modular?

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Ejemplo

3 es el inverso de 2 en módulo 5 puesto que $3 \cdot 2 \equiv_5 1$.

- O, equivalentemente, se tiene que $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$.

¿Todo número tiene inverso modular?

- No. Por ejemplo, 2 no tiene inverso en módulo 4.

Inverso modular

Definición

b es inverso de a en módulo n si $(a \cdot b) \equiv_n 1$.

Ejemplo

3 es el inverso de 2 en módulo 5 puesto que $3 \cdot 2 \equiv_5 1$.

- O, equivalentemente, se tiene que $(3 \cdot 2) \bmod 5 = 1$.

¿Todo número tiene inverso modular?

- No. Por ejemplo, 2 no tiene inverso en módulo 4.
- ¿Bajo qué condiciones a tiene inverso en módulo n?

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que b es inverso de a en módulo n.

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que b es inverso de a en módulo n.

- Entonces: $a \cdot b \equiv_n 1$.

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que b es inverso de a en módulo n.

- Entonces: $a \cdot b \equiv_n 1$.

Se deduce que $a \cdot b - 1 = \alpha \cdot n$, por lo que $1 = a \cdot b - \alpha \cdot n$.

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Demostración: $(\Rightarrow)$ Suponga que b es inverso de a en módulo n.

- Entonces: $a \cdot b \equiv_n 1$.

Se deduce que $a \cdot b - 1 = \alpha \cdot n$, por lo que $1 = a \cdot b - \alpha \cdot n$.

Concluimos que si $c|a$ y $c|n$, entonces $c|1$.

Inverso modular: existencia

Teorema

a tiene inverso en módulo n si y sólo si $MCD(a, n) = 1$.

Demostración: ($\Rightarrow$) Suponga que b es inverso de a en módulo n.

- Entonces: $a \cdot b \equiv_n 1$.

Se deduce que $a \cdot b - 1 = \alpha \cdot n$, por lo que $1 = a \cdot b - \alpha \cdot n$.

Concluimos que si $c|a$ y $c|n$, entonces $c|1$.

- Por lo tanto c debe ser igual a 1, de lo que concluimos que $\text{MCD}(a, n) = 1$.

Inverso modular: Existencia

($\Leftarrow$) Suponga que $\mathrm{MCD}(a, n) = 1$.

Inverso modular: Existencia

($\Leftarrow$) Suponga que $\text{MCD}(a, n) = 1$.

Ejecutando el algoritmo extendido de Euclides para el cálculo del máximo común divisor obtenemos s y t tales que:

$$1 = s \cdot n + t \cdot a$$

Inverso modular: Existencia

($\Leftarrow$) Suponga que $\text{MCD}(a, n) = 1$.

Ejecutando el algoritmo extendido de Euclides para el cálculo del máximo común divisor obtenemos s y t tales que:

$$1 = s \cdot n + t \cdot a$$

Por lo tanto: $a \cdot t \equiv_n 1$.

Inverso modular: Existencia

($\Leftarrow$) Suponga que $\text{MCD}(a, n) = 1$.

Ejecutando el algoritmo extendido de Euclides para el cálculo del máximo común divisor obtenemos s y t tales que:

$$1 \quad = \quad s \cdot n + t \cdot a$$

Por lo tanto: $a \cdot t \equiv_n 1$.

- Concluimos que a tiene inverso en módulo n.

$\square$

El pequeño teorema de Fermat

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \ldots, p-1\}$, entonces $a^p \bmod p = a$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \ldots, p-1\}$, entonces $a^p \bmod p = a$.

Demostración: Por inducción en a.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $a^p \bmod p = a$.

Demostración: Por inducción en a.

Para $a = 0$ y $a = 1$ se cumple trivialmente. Suponga que $a^p \bmod p = a$ y $2 \leq (a + 1) < p$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \ldots, p-1\}$, entonces $a^p \bmod p = a$.

Demostración: Por inducción en a.

Para $a = 0$ y $a = 1$ se cumple trivialmente. Suponga que $a^p \bmod p = a$ y $2 \leq (a+1) < p$.

- O, equivalentemente, tenemos que $a^p \equiv_p a$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Teorema (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \ldots, p-1\}$, entonces $a^p \bmod p = a$.

Demostración: Por inducción en a.

Para $a = 0$ y $a = 1$ se cumple trivialmente. Suponga que $a^p \bmod p = a$ y $2 \leq (a+1) < p$.

- O, equivalentemente, tenemos que $a^p \equiv_p a$.

Sabemos que:

$$(a+1)^p \quad = \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k$$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto:

$$(a+1)^p - (a+1) \quad = \quad (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto:

$$(a+1)^p - (a+1) \quad = \quad (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Lema

Si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$*, entonces* $p | \binom{p}{k}$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto:

$$(a+1)^p - (a+1) \quad = \quad (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Lema

Si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces $p | \binom{p}{k}$

Demostración del lema: Sabemos que:

$$\binom{p}{k} \quad = \quad \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} \quad = \quad \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}$$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto:

$$(a+1)^p - (a+1) \quad = \quad (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Lema

Si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$*, entonces* $p | \binom{p}{k}$

Demostración del lema: Sabemos que:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}$$

Como $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ y p es un número primo:

$\frac{(p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{k!}$ es un número entero

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

- Concluimos que $p \mid \binom{p}{k}$. $\square$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

- Concluimos que $p | \binom{p}{k}$. $\square$

Del lema concluimos que $p \left| \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \right.$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

- Concluimos que $p \big| \binom{p}{k}$. $\square$

Del lema concluimos que $p \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \right.$.

Por lo tanto, dado que $p|(a^p - a)$ por hipótesis de inducción, tenemos que $p|((a+1)^p - (a+1))$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

- Concluimos que $p \big| \binom{p}{k}$. $\square$

Del lema concluimos que $p \,\Bigg|\, \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$.

Por lo tanto, dado que $p|(a^p - a)$ por hipótesis de inducción, tenemos que $p|((a+1)^p - (a+1))$.

- Concluimos que $(a+1)^p \equiv_p (a+1)$,

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Por lo tanto: $\binom{p}{k} = p \cdot \alpha$, donde α es un número entero.

- Concluimos que $p \mid \binom{p}{k}$. $\square$

Del lema concluimos que $p \left| \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \right.$.

Por lo tanto, dado que $p \mid (a^p - a)$ por hipótesis de inducción, tenemos que $p \mid ((a+1)^p - (a+1))$.

- Concluimos que $(a+1)^p \equiv_p (a+1)$, y de esto concluimos que $(a+1)^p \bmod p = (a+1)$. $\square$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Corolario (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces $a^{p-1} \bmod p = 1$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Corolario (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces $a^{p-1} \bmod p = 1$.

Demostración: Por teorema anterior sabemos que

$$a^p \equiv_p a$$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Corolario (Fermat)

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces $a^{p-1} \bmod p = 1$.

Demostración: Por teorema anterior sabemos que

$$a^p \equiv_p a$$

Por lo tanto: existe un número entero α tal que

$$a^p - a \quad = \quad \alpha \cdot p$$

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Dado que $a|(a^p - a)$, se tiene que $a|(\alpha \cdot p)$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Dado que $a|(a^p - a)$, se tiene que $a|(\alpha \cdot p)$.

Por lo tanto, dado que $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ y p es un número primo, se concluye que $a|\alpha$.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Dado que $a | (a^p - a)$, se tiene que $a | (\alpha \cdot p)$.

Por lo tanto, dado que $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ y p es un número primo, se concluye que $a | \alpha$.

Entonces: $(a^{p-1} - 1) = \frac{\alpha}{a} \cdot p$, donde $\frac{\alpha}{a}$ es un número entero.

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Dado que $a|(a^p - a)$, se tiene que $a|(\alpha \cdot p)$.

Por lo tanto, dado que $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ y p es un número primo, se concluye que $a|\alpha$.

Entonces: $(a^{p-1} - 1) = \frac{\alpha}{a} \cdot p$, donde $\frac{\alpha}{a}$ es un número entero.

- Concluimos que $a^{p-1} \equiv_p 1$,

Aritmética modular: Una propiedad fundamental

Dado que $a | (a^p - a)$, se tiene que $a | (\alpha \cdot p)$.

Por lo tanto, dado que $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ y p es un número primo, se concluye que $a | \alpha$.

Entonces: $(a^{p-1} - 1) = \frac{\alpha}{a} \cdot p$, donde $\frac{\alpha}{a}$ es un número entero.

- Concluimos que $a^{p-1} \equiv_p 1$, y de esto concluimos que $a^p \bmod p = 1$. $\square$

La extensión a todos los enteros

Corolario

Sea p un número primo.

La extensión a todos los enteros

Corolario

Sea p un número primo.

1. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a^p \equiv_p a$.

La extensión a todos los enteros

Corolario

Sea p un número primo.

1. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a^p \equiv_p a$.
2. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \not\equiv_p 0$, se tiene que $a^{p-1} \bmod p = 1$.

La extensión a todos los enteros

Corolario

Sea p un número primo.

1. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a^p \equiv_p a$.
2. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \not\equiv_p 0$, se tiene que $a^{p-1} \bmod p = 1$.

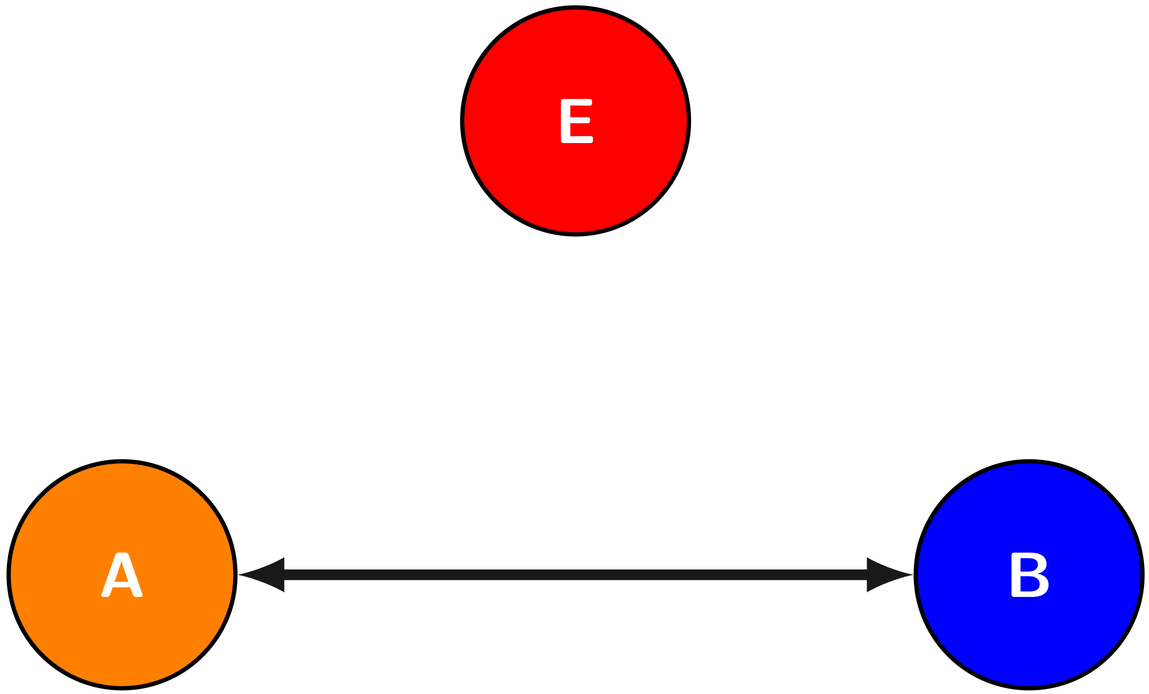
Ejercicio

Demuestre el corolario.

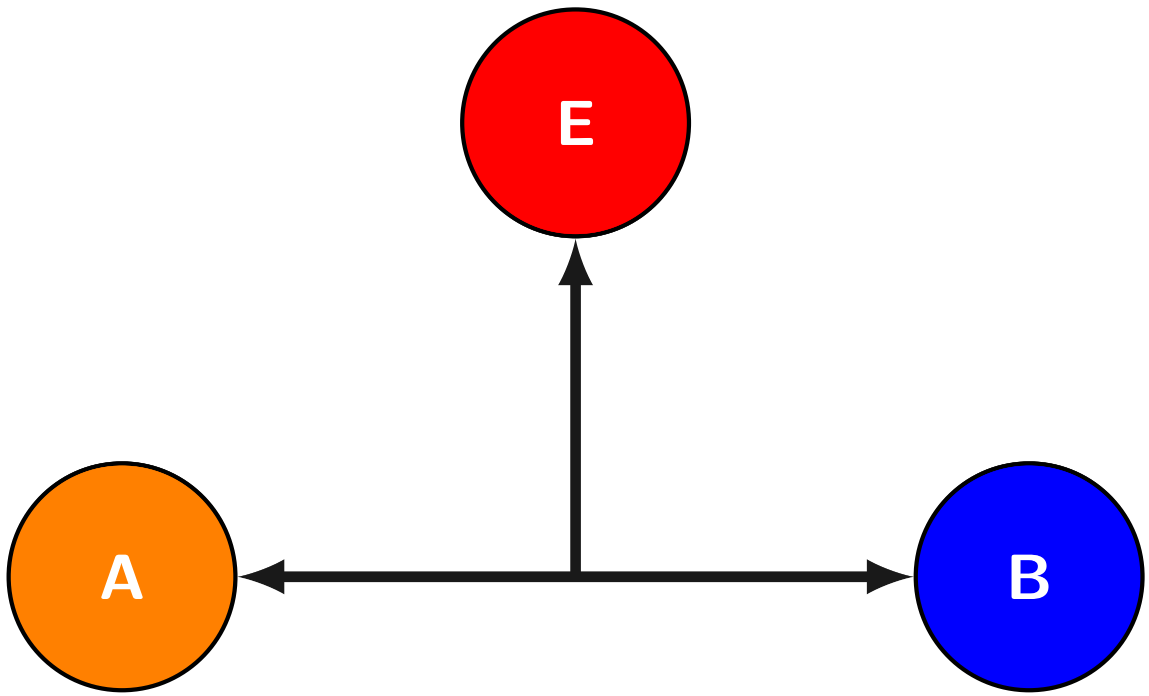
Criptografía de clave pública

El escenario clásico: criptografía de clave secreta

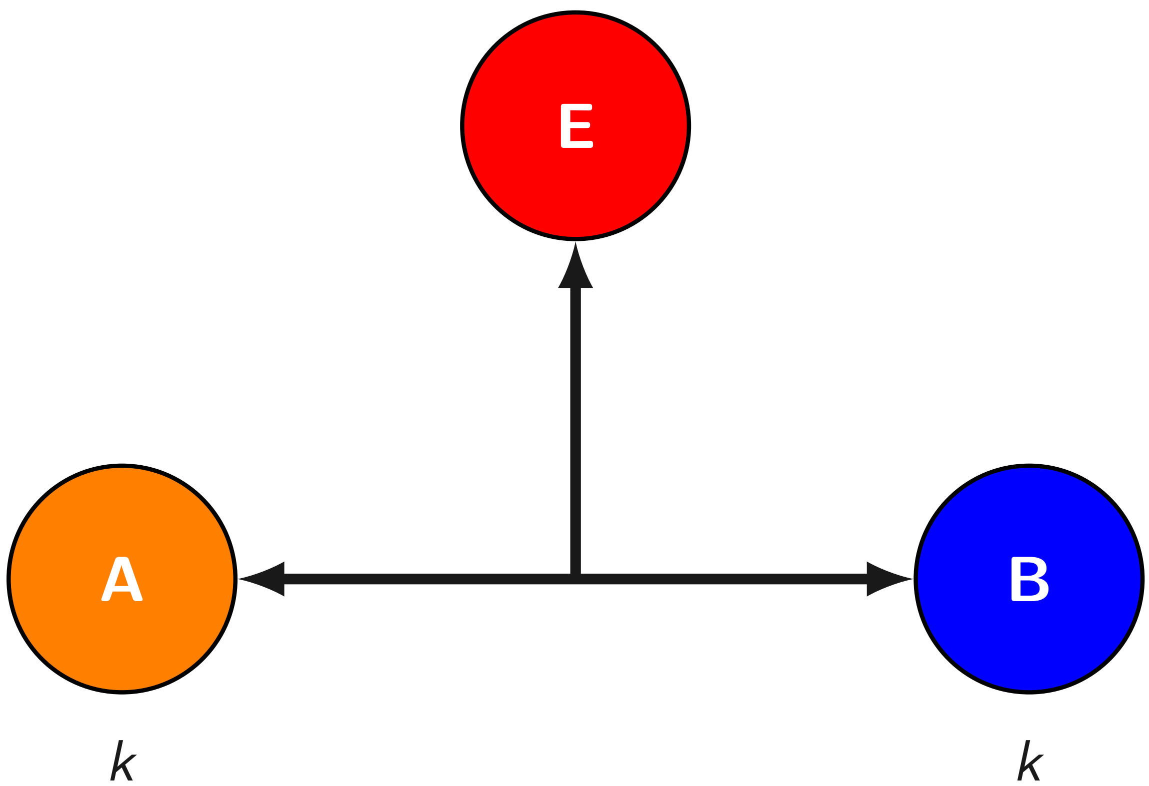
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



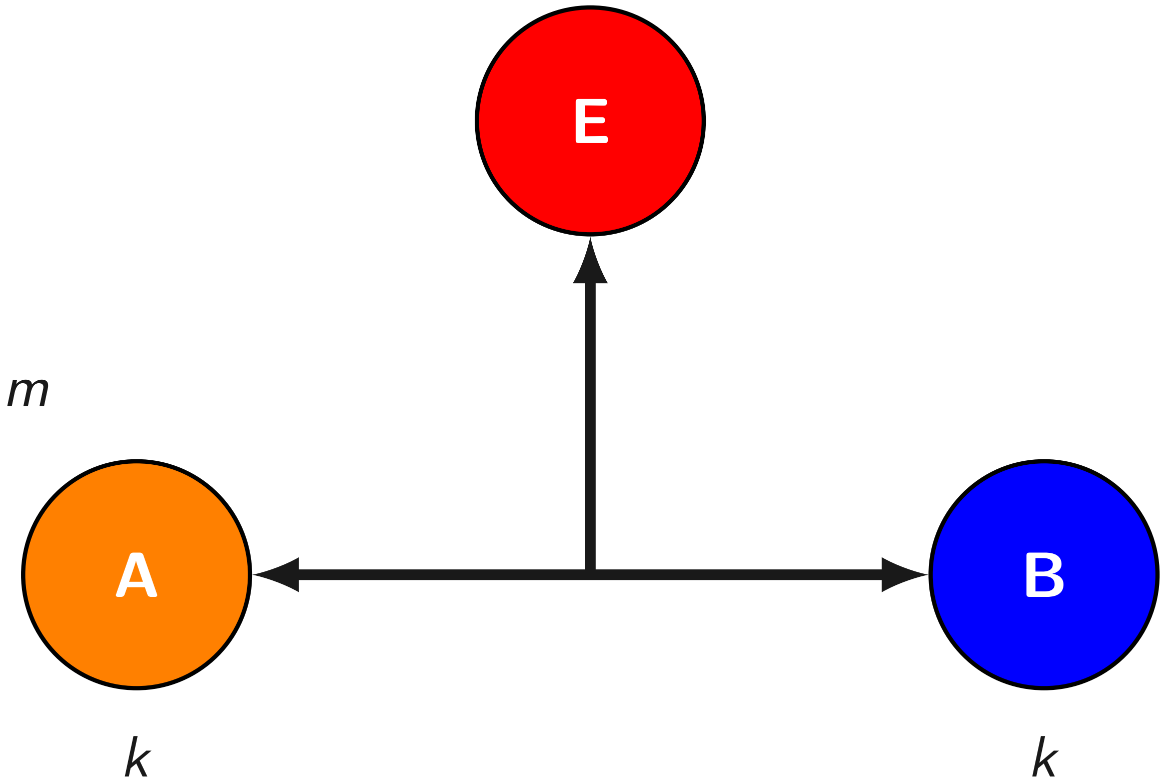
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



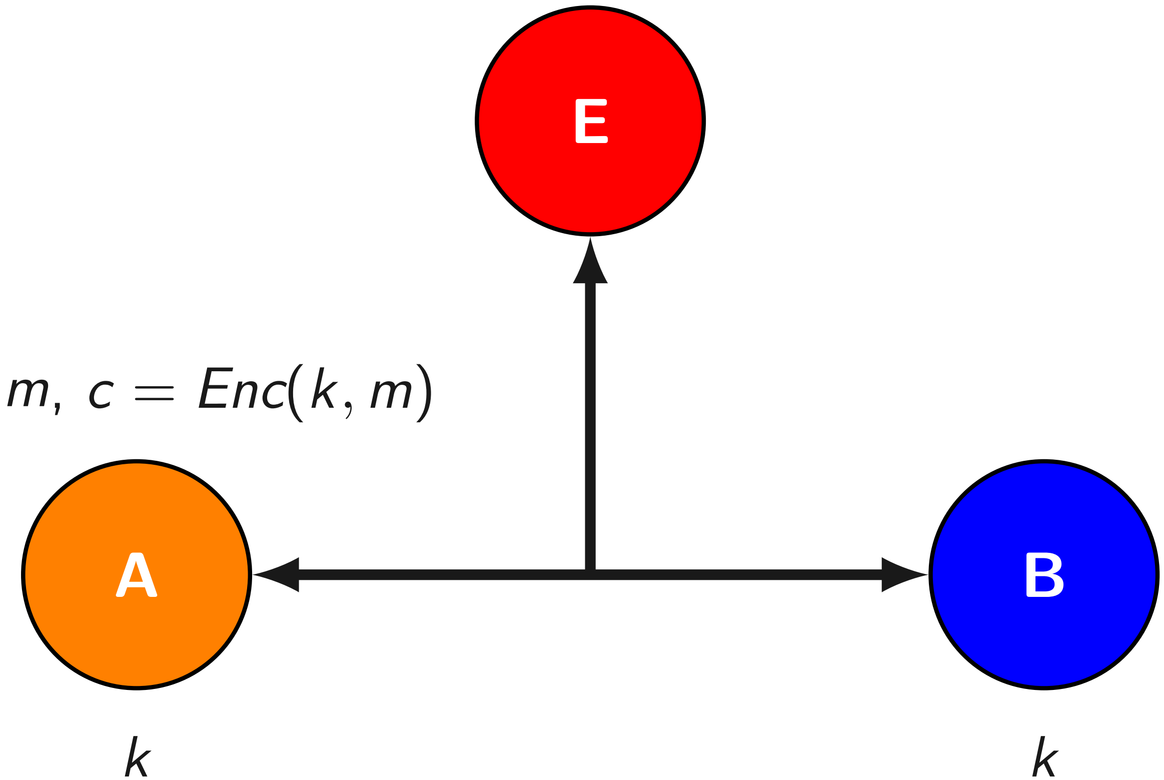
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



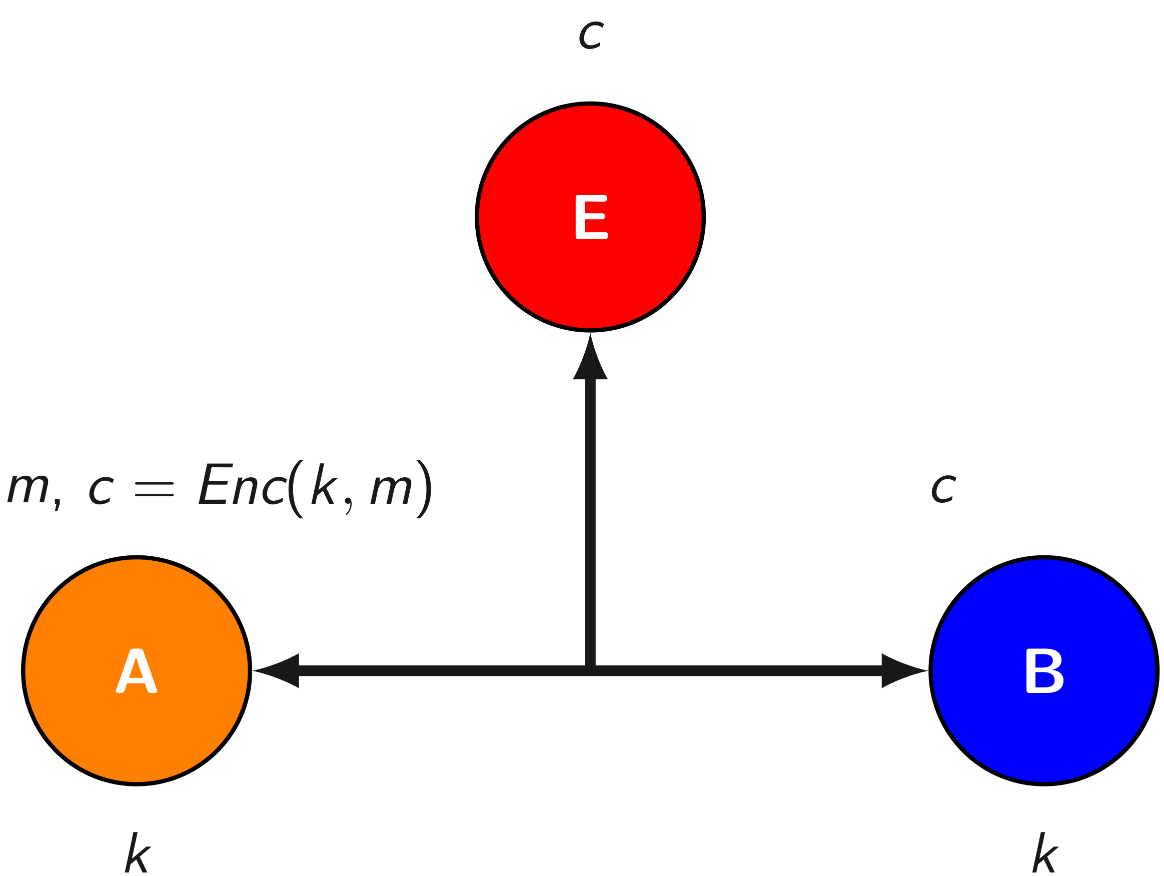
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



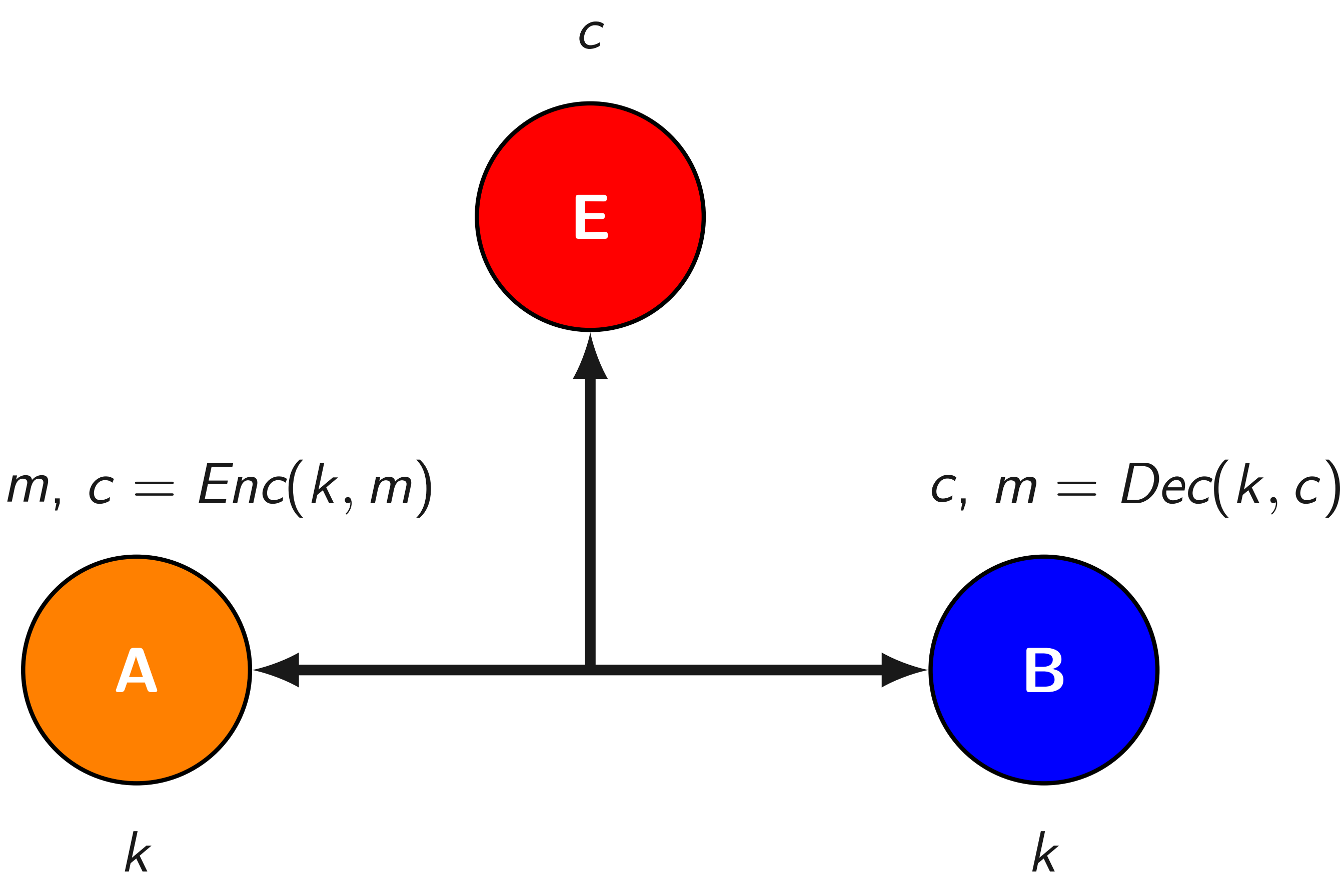
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



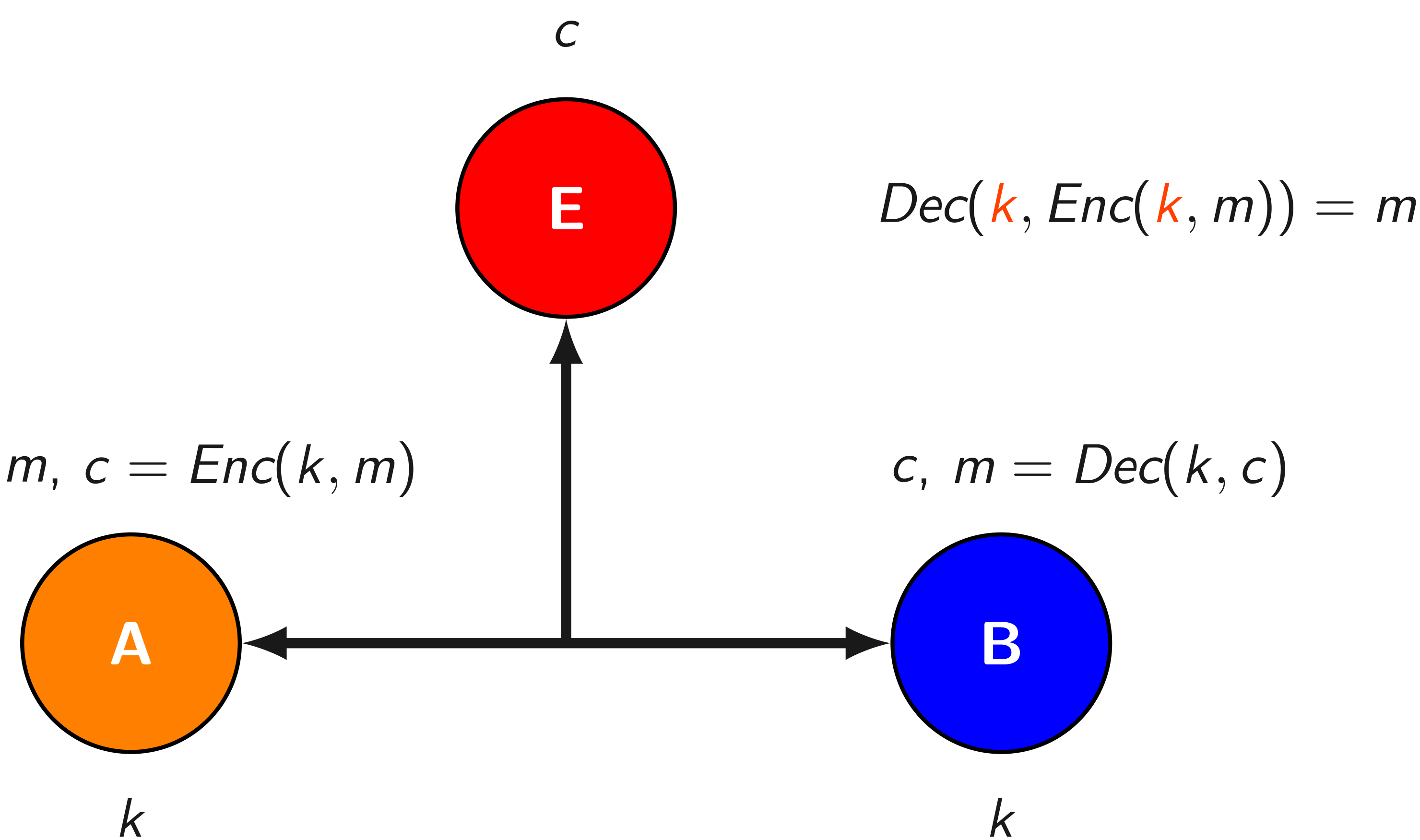
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



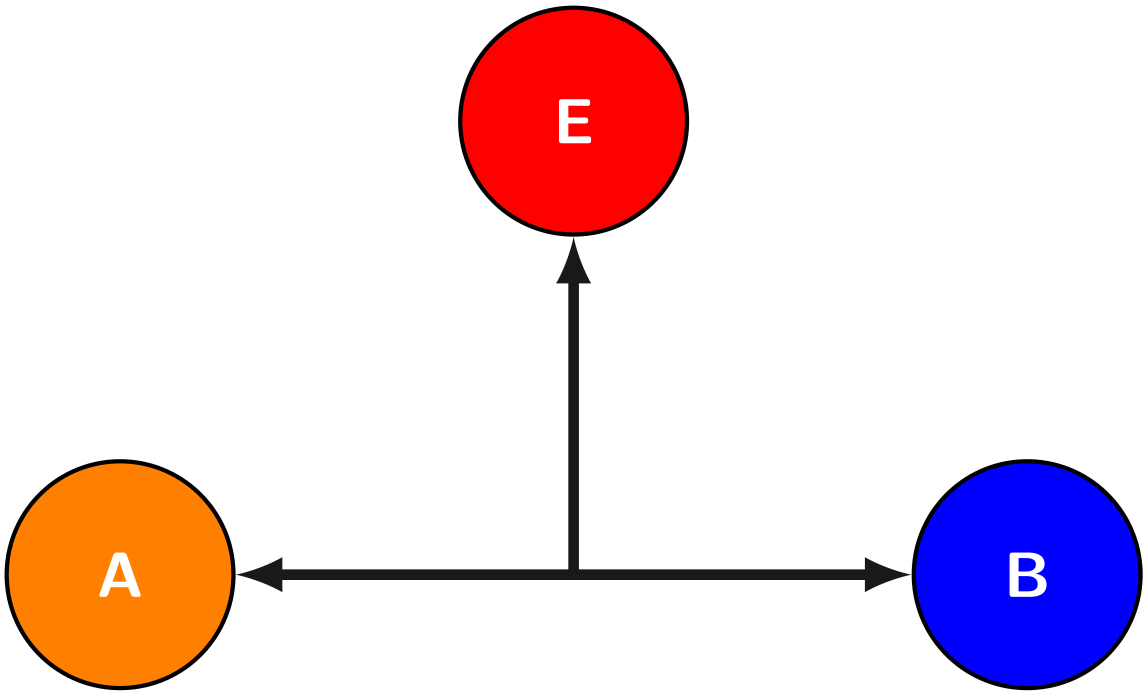
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



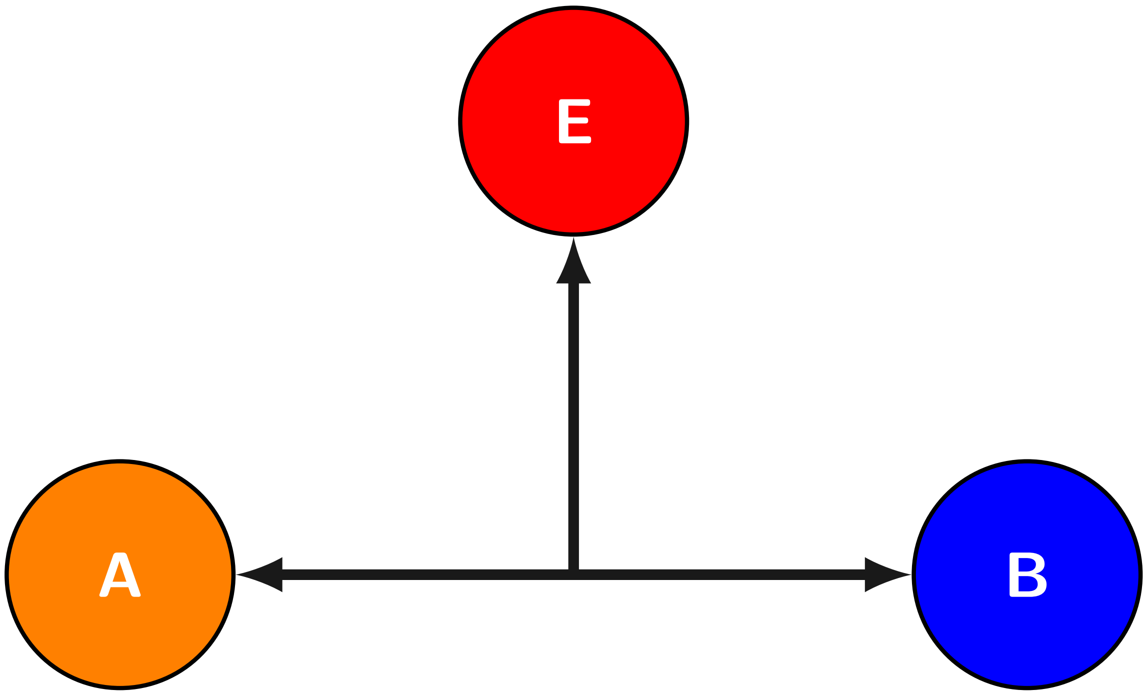
El escenario clásico: criptografía de clave secreta



El escenario moderno: criptografía de clave pública

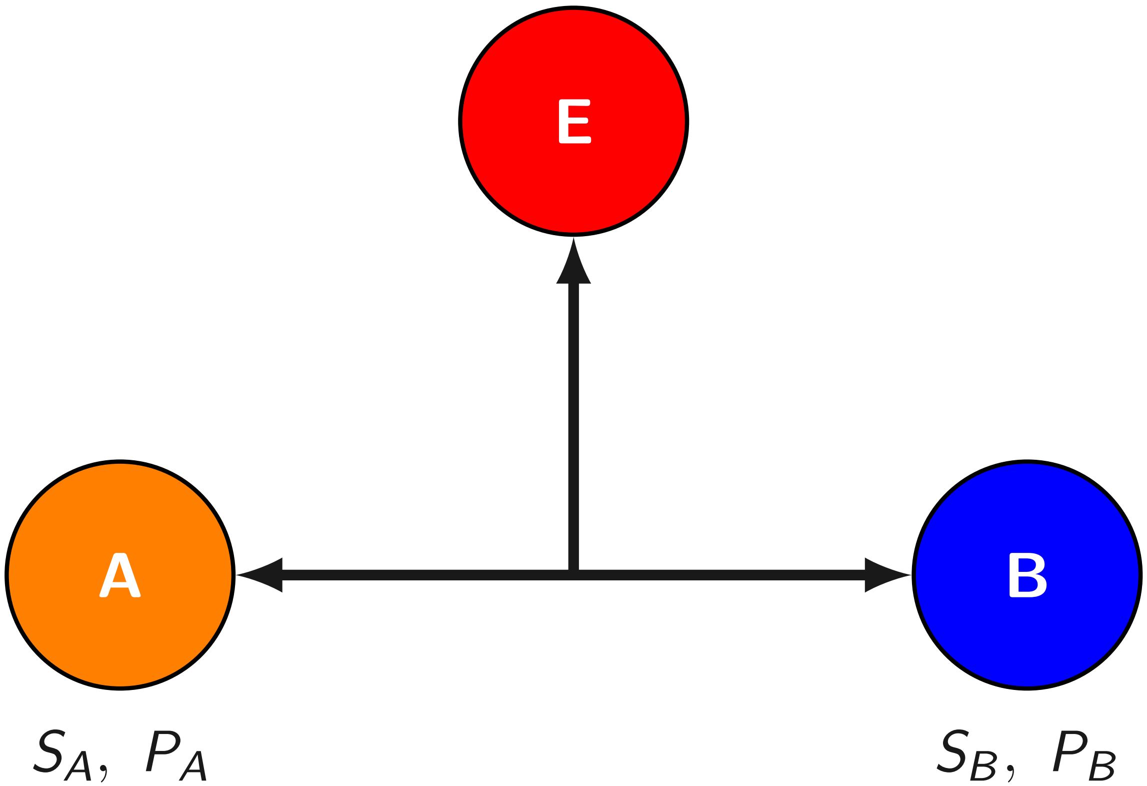


El escenario moderno: criptografía de clave pública

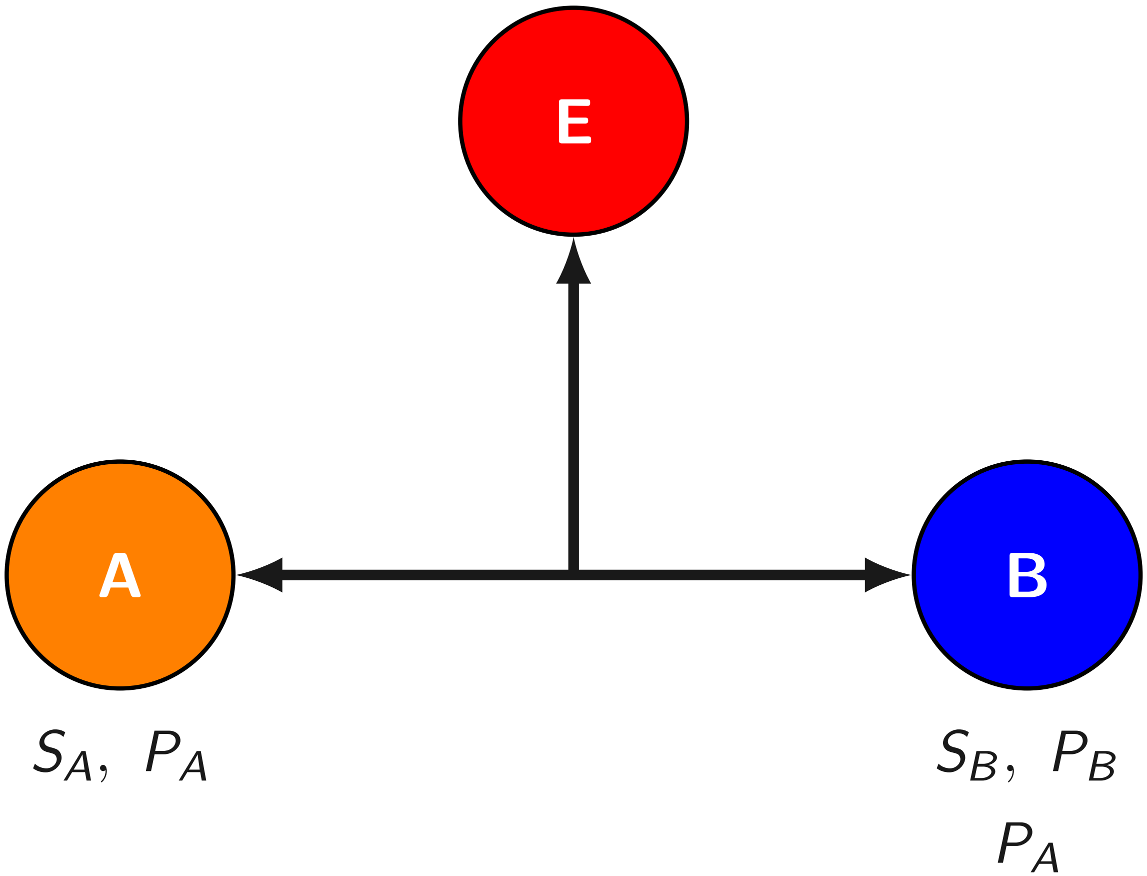


$S_A,\ P_A$

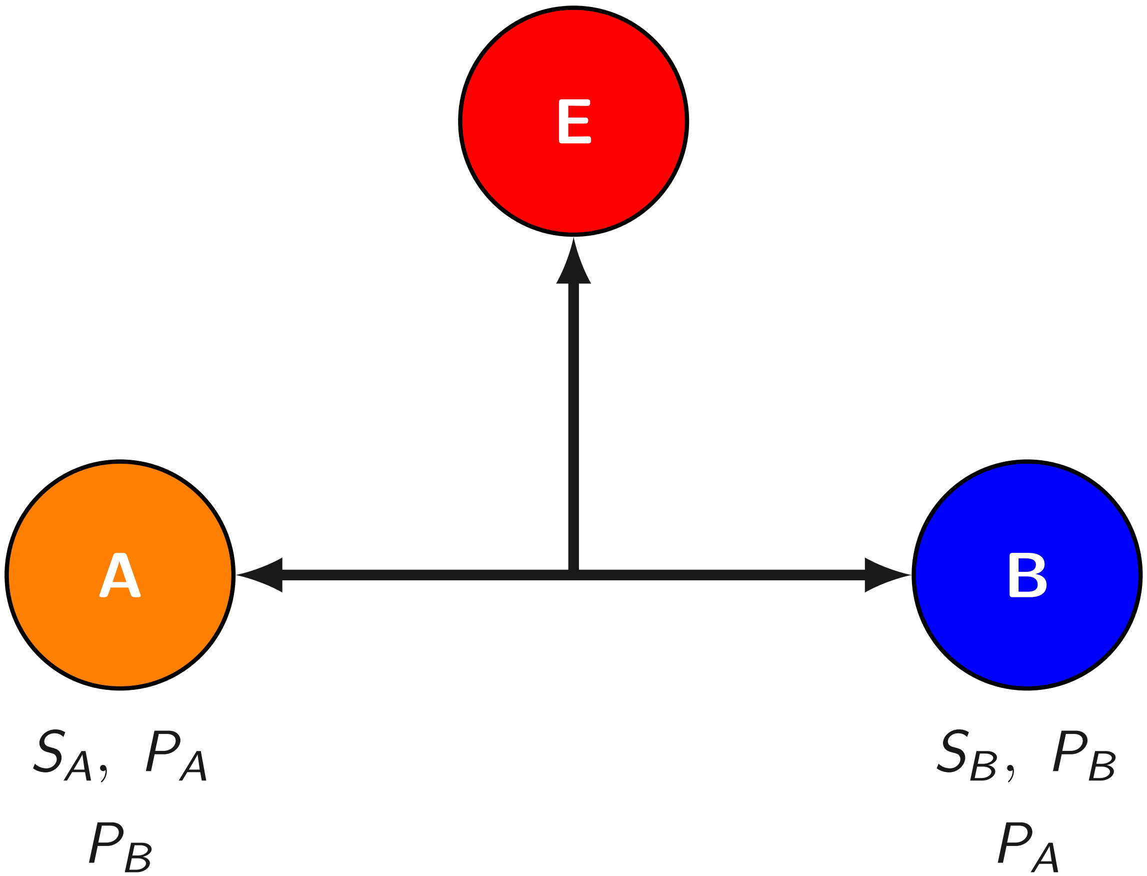
El escenario moderno: criptografía de clave pública



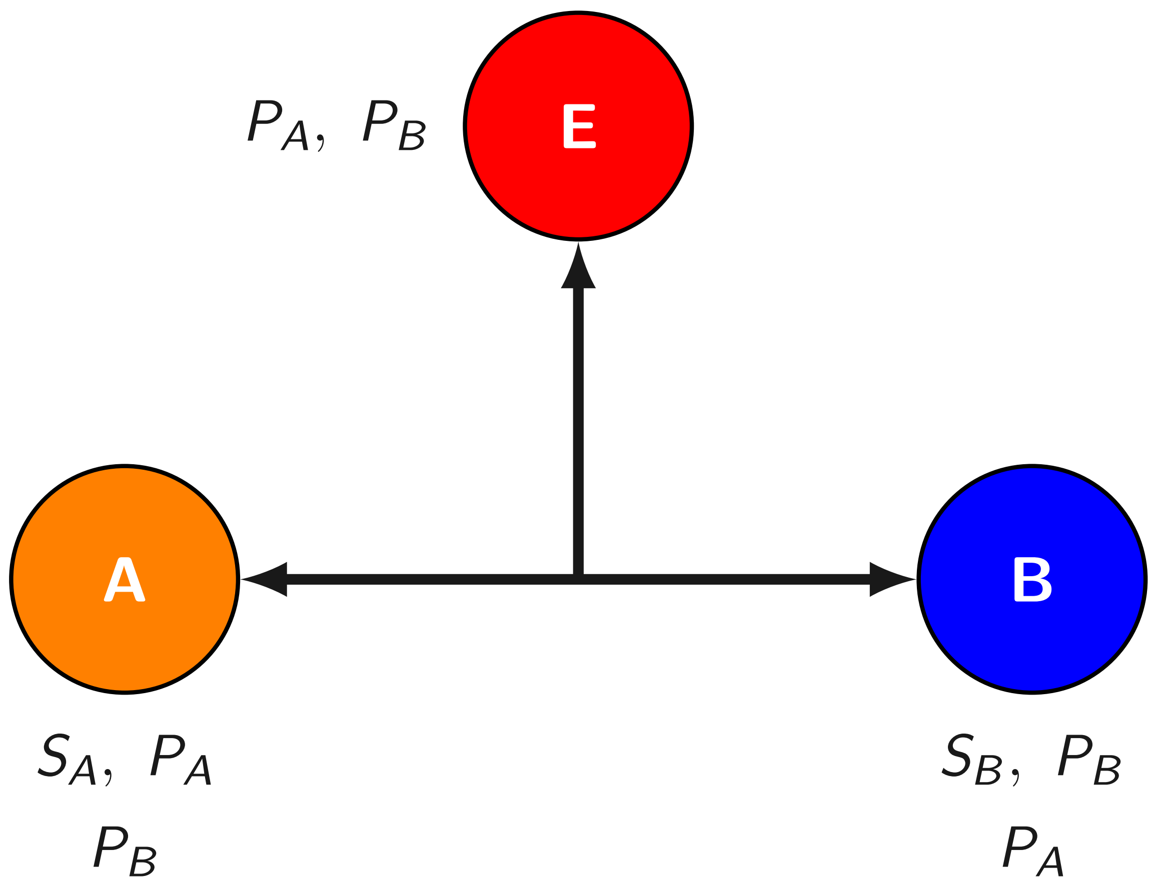
El escenario moderno: criptografía de clave pública



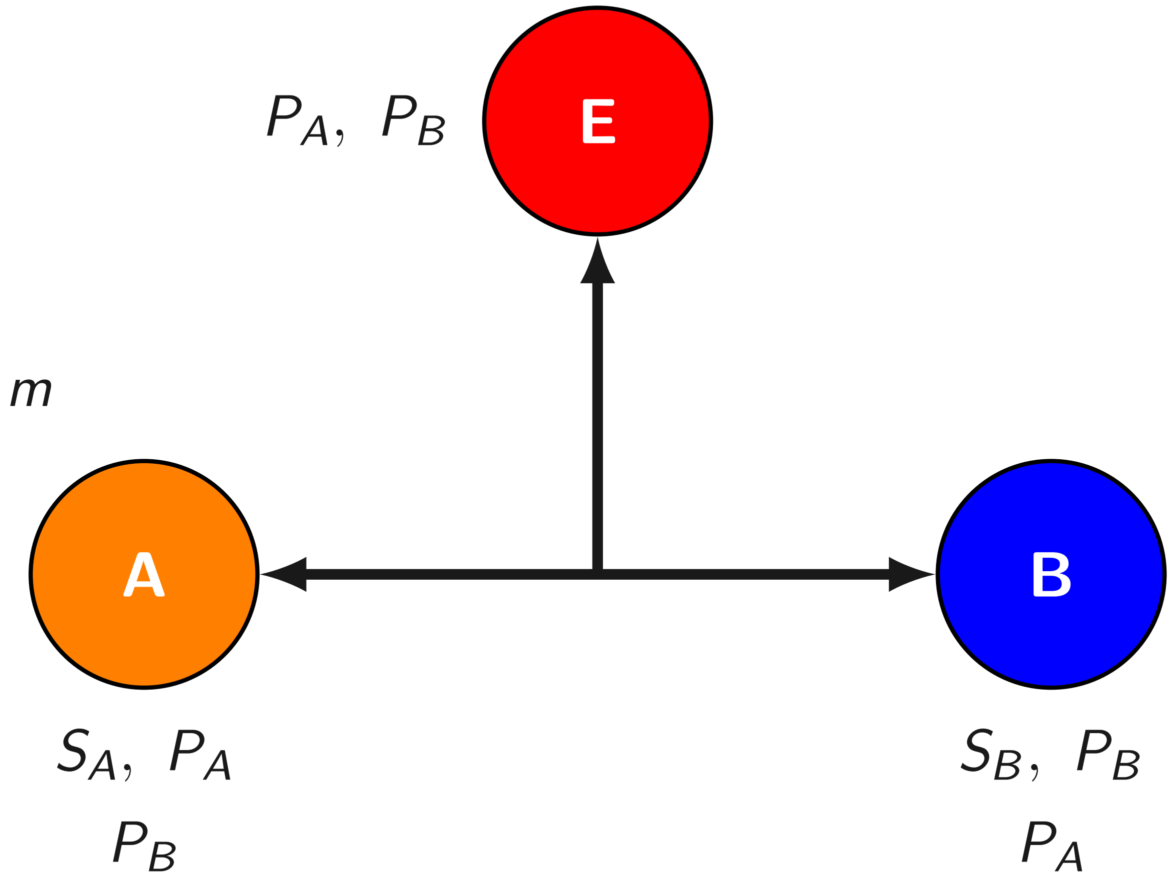
El escenario moderno: criptografía de clave pública



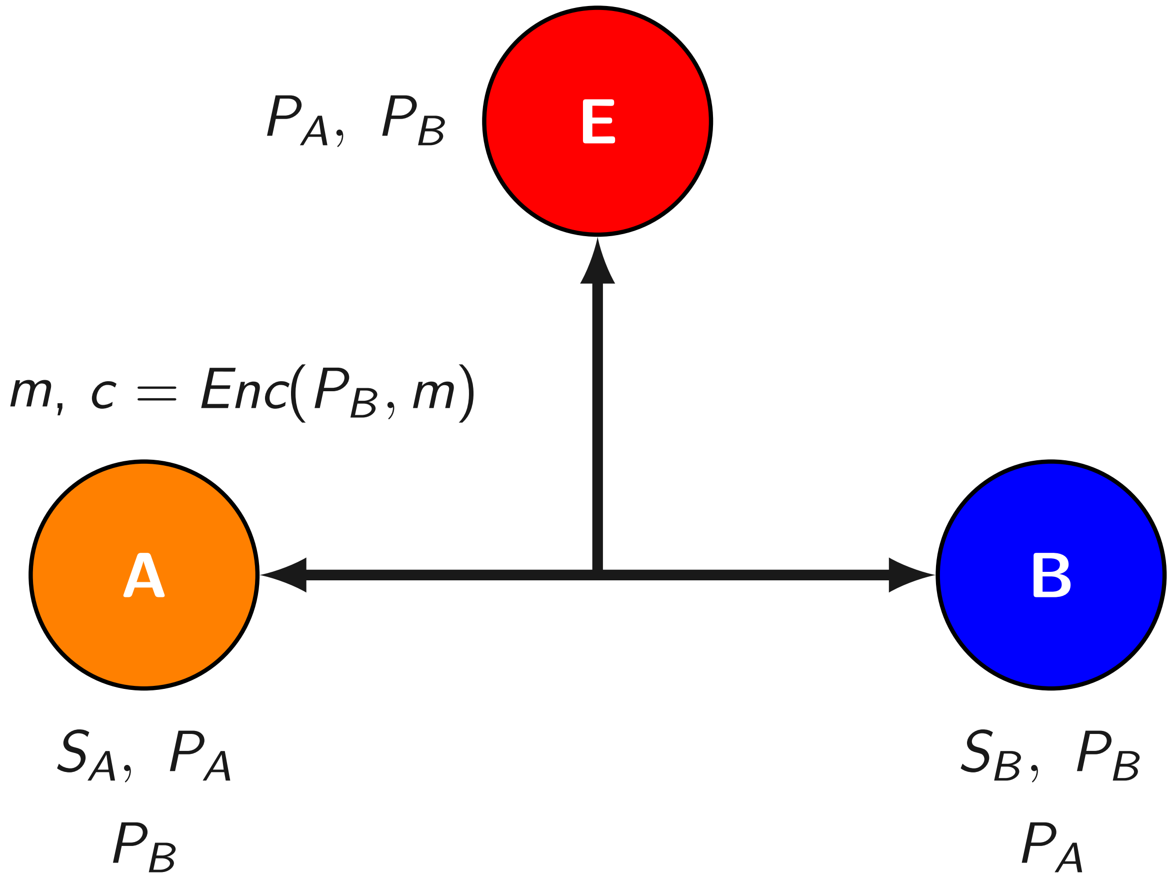
El escenario moderno: criptografía de clave pública



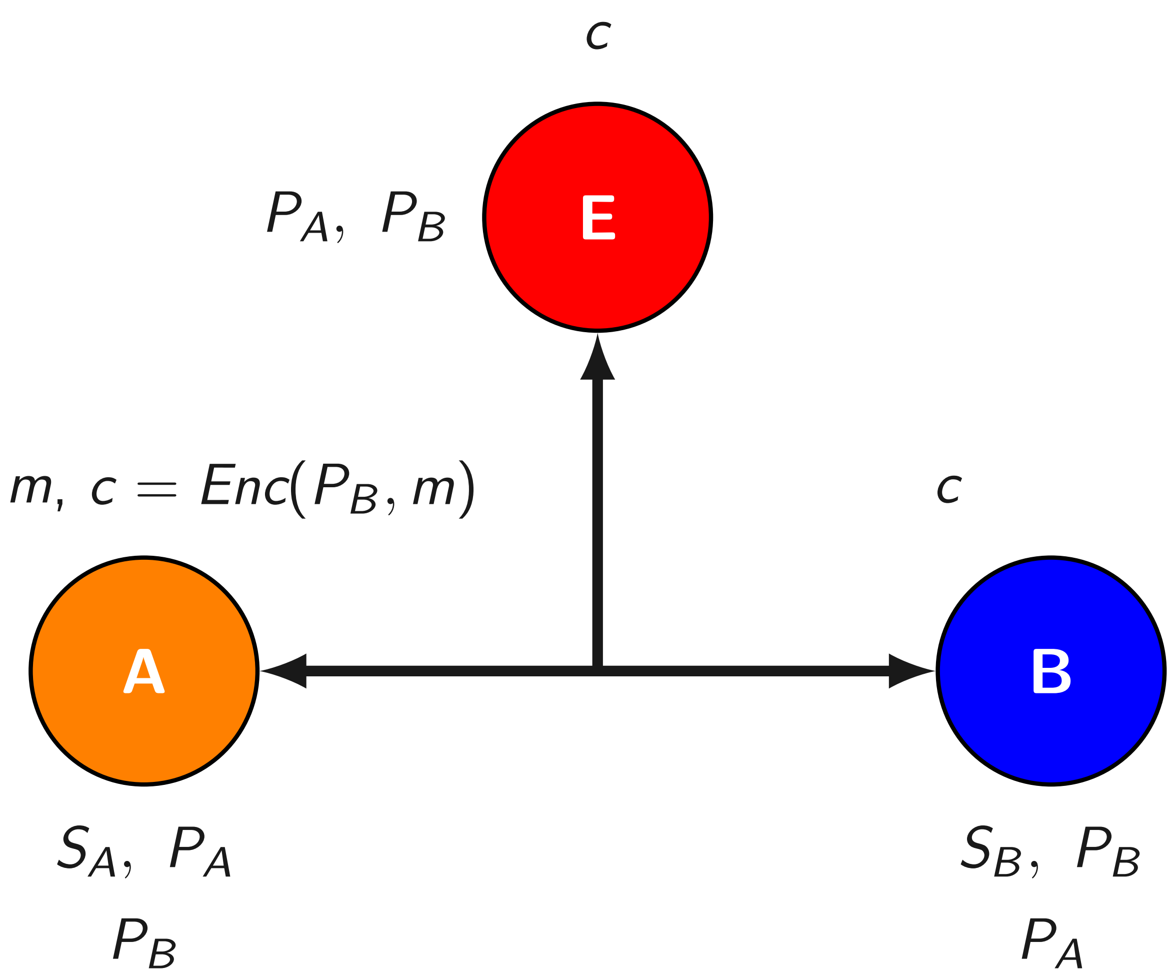
El escenario moderno: criptografía de clave pública



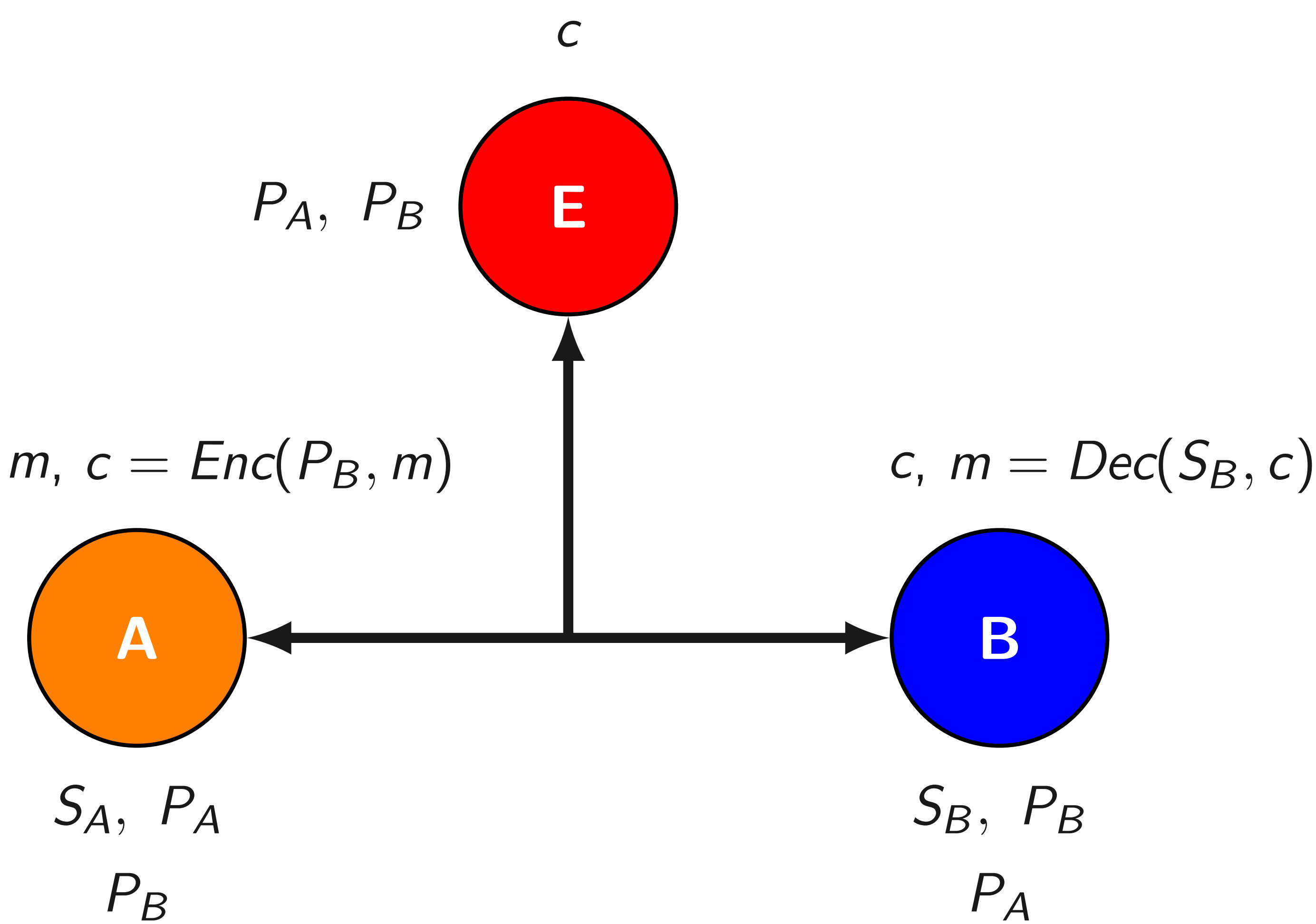
El escenario moderno: criptografía de clave pública



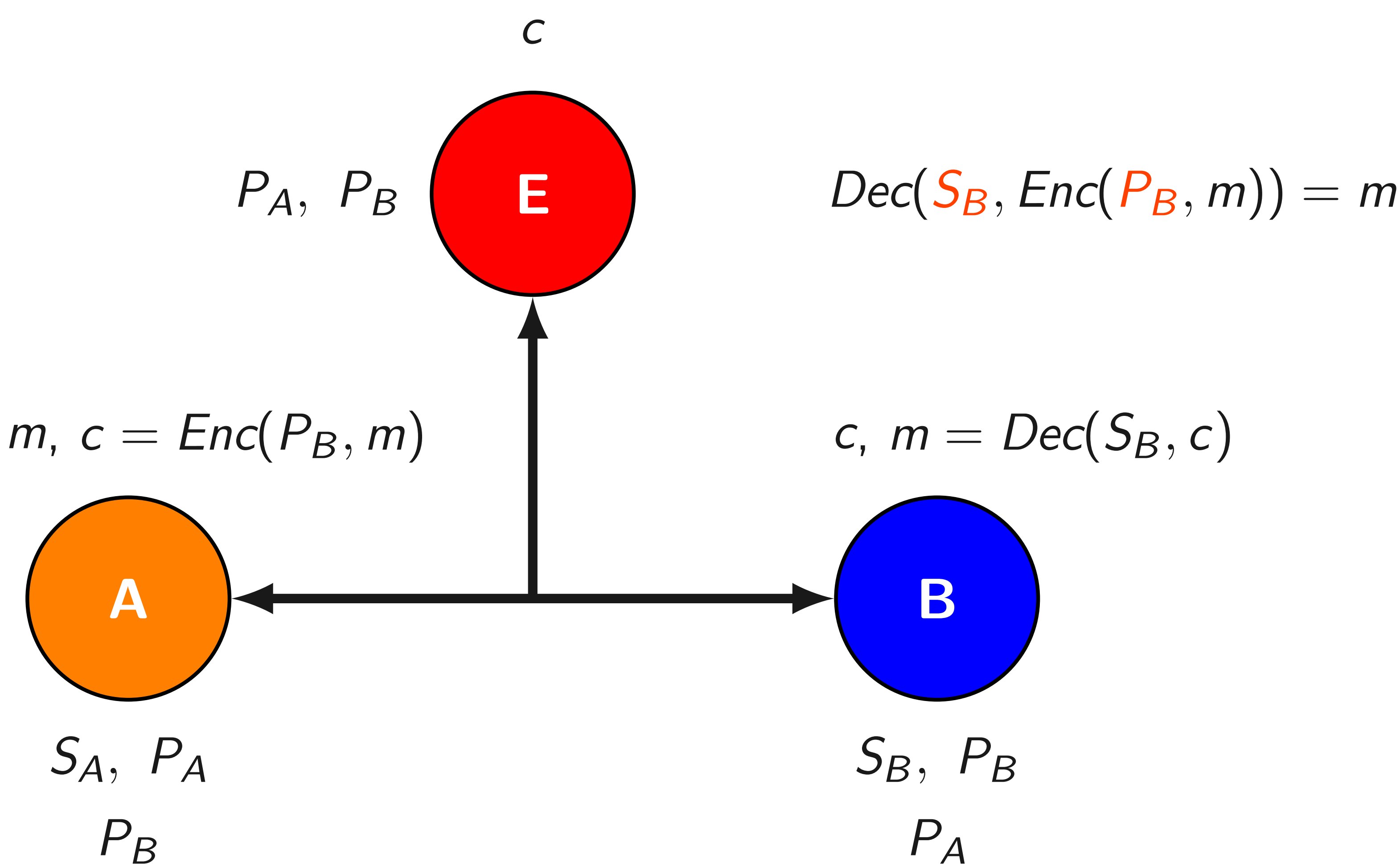
El escenario moderno: criptografía de clave pública



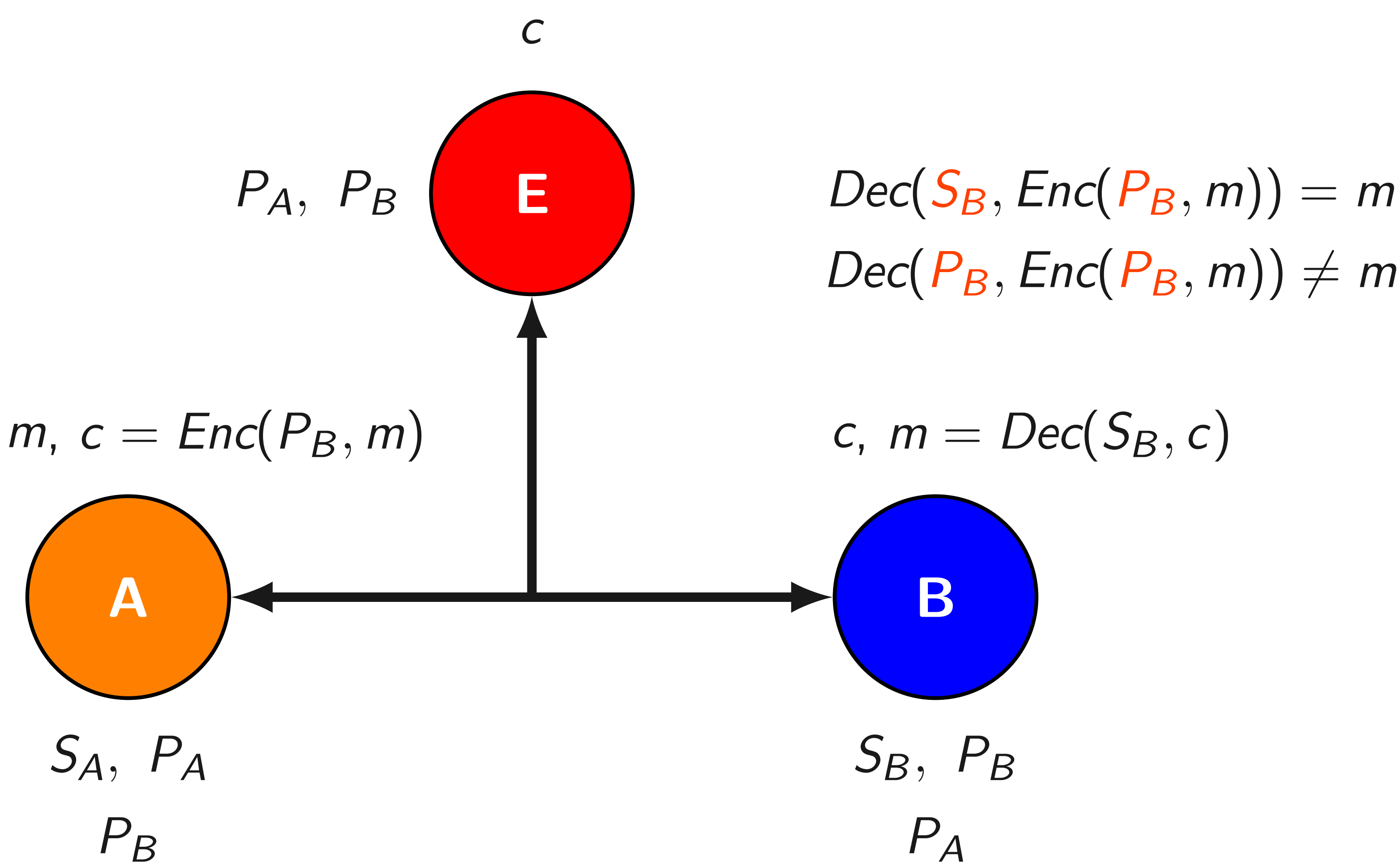
El escenario moderno: criptografía de clave pública



El escenario moderno: criptografía de clave pública



El escenario moderno: criptografía de clave pública



El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

1. Genera al azar dos números primos distintos P y Q

El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

1. Genera al azar dos números primos distintos P y Q
2. Define $N = P \cdot Q$ y $\varphi(N) = (P-1) \cdot (Q-1)$

El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

1. Genera al azar dos números primos distintos P y Q
2. Define $N = P \cdot Q$ y $\varphi(N) = (P-1) \cdot (Q-1)$
3. Genera al azar un número $d \in \{0, \ldots, \varphi(N)\}$ tal que $\mathrm{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$

El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

1. Genera al azar dos números primos distintos P y Q
2. Define $N = P \cdot Q$ y $\varphi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$
3. Genera al azar un número $d \in \{0, \ldots, \varphi(N)\}$ tal que $\mathrm{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$
4. Calcula un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$

El sistema criptográfico RSA

Un usuario A ejecuta los siguientes pasos para construir sus claves pública P_A y secreta S_A.

1. Genera al azar dos números primos distintos P y Q
2. Define $N = P \cdot Q$ y $\varphi(N) = (P - 1) \cdot (Q - 1)$
3. Genera al azar un número $d \in \{0, \ldots, \varphi(N)\}$ tal que $\mathrm{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$
4. Calcula un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$
5. Define $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$

El sistema criptográfico RSA

Sea A un usuario con claves $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$.

El sistema criptográfico RSA

Sea A un usuario con claves $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$.

Para cifrar un mensaje con la clave pública de A se utiliza la siguiente función. Dado $m \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$Enc(P_A, m) \quad = \quad m^e \bmod N$$

El sistema criptográfico RSA

Sea A un usuario con claves $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$.

Para cifrar un mensaje con la clave pública de A se utiliza la siguiente función. Dado $m \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$Enc(P_A, m) \quad = \quad m^e \bmod N$$

Para descifrar un mensaje con la clave privada de A se utiliza la siguiente función. Dado $m \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$Dec(S_A, m) \quad = \quad m^d \bmod N$$

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

Sean $d = 37$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

Sean $d = 37$.

- Se tiene que $\mathrm{MCD}(37, 60) = 1$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

Sean $d = 37$.

- Se tiene que $\mathrm{MCD}(37, 60) = 1$.

Sean $e = 13$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

Sean $d = 37$.

- Se tiene que $\text{MCD}(37, 60) = 1$.

Sean $e = 13$.

- Se tiene que $(13 \cdot 37) \bmod 60 = 1$.

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo

Sean $P = 7$ y $Q = 11$.

- Se tiene que $N = 77$ y $\varphi(N) = 60$.

Sean $d = 37$.

- Se tiene que $\text{MCD}(37, 60) = 1$.

Sean $e = 13$.

- Se tiene que $(13 \cdot 37) \bmod 60 = 1$.

Definimos $P_A = (13, 77)$ y $S_A = (37, 77)$

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

$$Enc(P_A, m) \quad = \quad m^{13} \bmod 77$$

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Enc(P_A, m) &= m^{13} \bmod 77 \\ Dec(S_A, m) &= m^{37} \bmod 77 \end{aligned}$$

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
Enc(P_A, m) &= m^{13} \bmod 77 \\
Dec(S_A, m) &= m^{37} \bmod 77
\end{aligned}
$$

El sistema funciona correctamente:

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Enc(P_A, m) &= m^{13} \bmod 77 \\ Dec(S_A, m) &= m^{37} \bmod 77 \end{aligned}$$

El sistema funciona correctamente:

$$Enc(P_A, 5) \quad = \quad 5^{13} \bmod 77 \quad = \quad 26$$

El sistema criptográfico RSA

Ejemplo (continuación)

Ciframos y desciframos un mensaje $m \in \{0, \ldots, 76\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Enc(P_A, m) &= m^{13} \bmod 77 \\ Dec(S_A, m) &= m^{37} \bmod 77 \end{aligned}$$

El sistema funciona correctamente:

$$\begin{aligned} Enc(P_A, 5) &= 5^{13} \bmod 77 &= 26 \\ Dec(S_A, 26) &= 26^{37} \bmod 77 &= 5 \end{aligned}$$

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

- Generar primos distintos P y Q.

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

- Generar primos distintos P y Q.
- Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

- Generar primos distintos P y Q.
- Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.
- Generar un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

- Generar primos distintos P y Q.
- Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.
- Generar un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.
- Calcular funciones Enc y Dec.

¿Por qué funciona RSA?

¿Qué propiedades debemos demostrar que son ciertas?

- $Dec(S_A, Enc(P_A, m)) = m$ para todo $m \in \{0, \ldots, N-1\}$

¿Qué problemas debemos demostrar que pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema puede ser utilizado?

- Generar primos distintos P y Q.
- Generar un número d tal que $\mathrm{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.
- Generar un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.
- Calcular funciones Enc y Dec.

¿Qué problemas no pueden ser resueltos de manera eficiente para que el sistema sea seguro?

- Dado (e, N) calcular d, lo cual se reduce a encontrar los divisores de N.

RSA funciona correctamente

Sean P_A, S_A, Enc y Dec definidas como en las láminas anteriores.

RSA funciona correctamente

Sean P_A, S_A, *Enc* y *Dec* definidas como en las láminas anteriores.

- En particular $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$, con $N = P \cdot Q$.

RSA funciona correctamente

Sean P_A, S_A, Enc y Dec definidas como en las láminas anteriores.

- En particular $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$, con $N = P \cdot Q$.

Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada $m \in \{0, \ldots, N-1\}$, se tiene que $Dec(S_A, Dec(P_A, m)) = m$.

RSA funciona correctamente

Sean P_A, S_A, *Enc* y *Dec* definidas como en las láminas anteriores.

- En particular $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$, con $N = P \cdot Q$.

Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada $m \in \{0, \ldots, N-1\}$, se tiene que $Dec(S_A, Dec(P_A, m)) = m$.

Demostración: Sabemos que

$$\begin{aligned} Dec(S_A, Enc(P_A, m)) &= (m^e \bmod N)^d \bmod N \\ &= (m^e)^d \bmod N \\ &= m^{e \cdot d} \bmod N \end{aligned}$$

RSA funciona correctamente

Sean P_A, S_A, *Enc* y *Dec* definidas como en las láminas anteriores.

- En particular $P_A = (e, N)$ y $S_A = (d, N)$, con $N = P \cdot Q$.

Teorema (Rivest-Shamir-Adleman)

Para cada $m \in \{0, \ldots, N-1\}$, se tiene que $Dec(S_A, Dec(P_A, m)) = m$.

Demostración: Sabemos que

$$\begin{aligned} Dec(S_A, Enc(P_A, m)) &= (m^e \bmod N)^d \bmod N \\ &= (m^e)^d \bmod N \\ &= m^{e \cdot d} \bmod N \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que demostrar que $m^{e \cdot d} \equiv_N m$

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

- Por lo tanto, $e \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

- Por lo tanto, $e \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$.

Tenemos que demostrar que $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_N m$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

- Por lo tanto, $e \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$.

Tenemos que demostrar que $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_N m$.

- El siguiente lema es fundamental para la demostración.

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

- Por lo tanto, $e \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$.

Tenemos que demostrar que $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_N m$.

- El siguiente lema es fundamental para la demostración.

Lema

$m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_P m$ y $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_Q m$

RSA funciona correctamente: Demostración

Sabemos que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

- Por lo tanto, $e \cdot d = k \cdot \varphi(N) + 1$.

Tenemos que demostrar que $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_N m$.

- El siguiente lema es fundamental para la demostración.

Lema

$m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_P m$ y $m^{k \cdot \varphi(N)+1} \equiv_Q m$

Demostración: Primero suponemos que $P | m$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Entonces:
$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P &= (m \bmod P)^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0 \end{aligned}$$

RSA funciona correctamente: Demostración

$$
\text{Entonces:} \quad \begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P &= (m \bmod P)^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0 \end{aligned}
$$

Por lo tanto: $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_P m$.

RSA funciona correctamente: Demostración

$$\text{Entonces:} \quad \begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P &= (m \bmod P)^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_P m$.

En segundo lugar, suponemos que $P \nmid m$.

RSA funciona correctamente: Demostración

$$\text{Entonces:} \quad \begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P &= (m \bmod P)^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod P \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_P m$.

En segundo lugar, suponemos que $P \not| m$.

Dado que $m \not\equiv_P 0$, por pequeño teorema de Fermat:

$$m^{P-1} \equiv_P 1$$

RSA funciona correctamente: Demostración

De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod N &= ((m^{P-1})^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= ((m^{P-1} \bmod P)^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= (1^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= m \bmod P \end{aligned}$$

RSA funciona correctamente: Demostración

De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod N &= ((m^{P-1})^{k\cdot(Q-1)}\cdot m) \bmod P \\ &= ((m^{P-1} \bmod P)^{k\cdot(Q-1)}\cdot m) \bmod P \\ &= (1^{k\cdot(Q-1)}\cdot m) \bmod P \\ &= m \bmod P \end{aligned}$$

Concluimos que $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_P m$.

RSA funciona correctamente: Demostración

De esto concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} \bmod N &= ((m^{P-1})^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= ((m^{P-1} \bmod P)^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= (1^{k\cdot(Q-1)} \cdot m) \bmod P \\ &= m \bmod P \end{aligned}$$

Concluimos que $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_P m$.

- De la misma forma se demuestra que $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_Q m$. $\square$

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot P = \beta \cdot Q$. Tenemos entonces que $P|(\beta \cdot Q)$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot P = \beta \cdot Q$. Tenemos entonces que $P|(\beta \cdot Q)$.

Entonces, dado que P y Q son primos distintos tenemos que $P|\beta$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k \cdot \varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k \cdot \varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot P = \beta \cdot Q$. Tenemos entonces que $P | (\beta \cdot Q)$.

Entonces, dado que P y Q son primos distintos tenemos que $P | \beta$.

- Por lo tanto, $\beta = \gamma \cdot P$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot P = \beta \cdot Q$. Tenemos entonces que $P|(\beta \cdot Q)$.

Entonces, dado que P y Q son primos distintos tenemos que $P|\beta$.

- Por lo tanto, $\beta = \gamma \cdot P$.

Concluimos que $m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m = \gamma \cdot P \cdot Q$.

RSA funciona correctamente: Demostración

Del lema concluimos que:

$$\begin{aligned} m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \alpha \cdot P \\ m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m &= \beta \cdot Q \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot P = \beta \cdot Q$. Tenemos entonces que $P|(\beta \cdot Q)$.

Entonces, dado que P y Q son primos distintos tenemos que $P|\beta$.

- Por lo tanto, $\beta = \gamma \cdot P$.

Concluimos que $m^{k\cdot\varphi(N)+1} - m = \gamma \cdot P \cdot Q$.

- Vale decir, $m^{k\cdot\varphi(N)+1} \equiv_N m$. $\square$

RSA: comentarios finales

¿Cómo se pueden resolver los siguientes problemas de manera eficiente?

RSA: comentarios finales

¿Cómo se pueden resolver los siguientes problemas de manera eficiente?

1. Generar primos distintos P y Q.

RSA: comentarios finales

¿Cómo se pueden resolver los siguientes problemas de manera eficiente?

1. Generar primos distintos P y Q.
2. Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.

RSA: comentarios finales

¿Cómo se pueden resolver los siguientes problemas de manera eficiente?

1. Generar primos distintos P y Q.
2. Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.
3. Generar un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.

RSA: comentarios finales

¿Cómo se pueden resolver los siguientes problemas de manera eficiente?

1. Generar primos distintos P y Q.
2. Generar un número d tal que $\text{MCD}(d, \varphi(N)) = 1$.
3. Generar un número e tal que $(e \cdot d) \bmod \varphi(N) = 1$.
4. Calcular las funciones *Enc* y *Dec*.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

El problema 3. ya sabemos cómo resolverlo usando el algoritmo extendido de Euclides.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

El problema 3. ya sabemos cómo resolverlo usando el algoritmo extendido de Euclides.

- ¿Cómo se hace esto?

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

El problema 3. ya sabemos cómo resolverlo usando el algoritmo extendido de Euclides.

- ¿Cómo se hace esto?

Ejercicio

De un algoritmo eficiente para resolver el problema 4.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

El problema 3. ya sabemos cómo resolverlo usando el algoritmo extendido de Euclides.

- ¿Cómo se hace esto?

Ejercicio

De un algoritmo eficiente para resolver el problema 4.

- Piense en cómo puede calcular a^{100} con menos de 99 multiplicaciones.

RSA: comentarios finales

Los problemas 1. y 2. están fuera del alcance de este curso.

- Son estudiados en IIC3253 Criptografía y Seguridad Computacional.

El problema 3. ya sabemos cómo resolverlo usando el algoritmo extendido de Euclides.

- ¿Cómo se hace esto?

Ejercicio

De un algoritmo eficiente para resolver el problema 4.

- Piense en cómo puede calcular a^{100} con menos de 99 multiplicaciones. Luego extienda su idea para calcular $a^{100} \bmod b$.