

IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

~~18.08.2025~~
20.

Hoy...

Lógica de predicados: predicados y operaciones sobre ellos.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”
- ▶ Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”
- ▶ Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ▶ ¿Tautología de la lógica proposicional?

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”
- ▶ Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ▶ ¿Tautología de la lógica proposicional?
- ▶ $(A \wedge B) \rightarrow C$ – no!

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”
- ▶ Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ▶ ¿Tautología de la lógica proposicional?
- ▶ $(A \wedge B) \rightarrow C$ – no!
- ▶ intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- ▶ “Cada número racional es algebraico. Cada número algebraico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”
- ▶ Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ▶ ¿Tautología de la lógica proposicional?
- ▶ $(A \wedge B) \rightarrow C$ – no!
- ▶ intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.
- ▶ necesitamos algo con conexiones más intrincadas entre proposiciones atómicas

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- ▶ “ x es impar” (1 parámetro);

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- ▶ “ x es impar” (1 parámetro);
- ▶ $x < y$ (2 parámetros);

$x=1, y=1$ - falsa
 $x=0, y=1$ - verdadera

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- ▶ “ x es impar” (1 parámetro);
- ▶ $x < y$ (2 parámetros);
- ▶ $x|y$ (2 parámetros);

$$\begin{array}{ll} x=3 & y=2 \rightarrow \text{falso} \\ x=2 & y=4 \rightarrow \text{verdadero} \end{array}$$

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- ▶ “ x es impar” (1 parámetro);
- ▶ $x < y$ (2 parámetros);
- ▶ $x|y$ (2 parámetros);
- ▶ $x + y = z$ (3 parámetros);
- ▶ $0, 1$ (0 parámetros). - proposiciones

Los predicados

(*informal*): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D .

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- ▶ “ x es impar” (1 parámetro);
- ▶ $x < y$ (2 parámetros);
- ▶ $x|y$ (2 parámetros);
- ▶ $x + y = z$ (3 parámetros);
- ▶ $0, 1$ (0 parámetros).
- ▶ $x + y -$ no es un predicado.

Predicados – definición

Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minúsculas, posiblemente con índices).

Definición

Un **predicado** P con parámetros x_1, \dots, x_n sobre un conjunto D (llamado el **dominio** de P) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de x_1, \dots, x_n a elementos de D .

Predicados – definición

Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minúsculas, posiblemente con índices).

Definición

Un **predicado** P con parámetros x_1, \dots, x_n sobre un conjunto D (llamado el **dominio** de P) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de x_1, \dots, x_n a elementos de D .

La **aridad** de P es el número de parámetros de P .

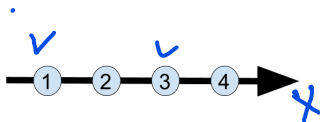
unarios - aridad=1

binarios - aridad=2

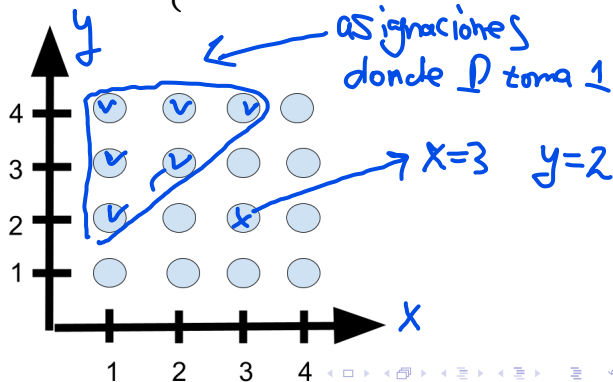
ternarios - aridad=3

Presentación gráfica de los predicados

$$D = \{1, 2, 3, 4\}, \quad P(x) = "x \text{ es impar}".$$



$$D = \{1, 2, 3, 4\}, \quad P(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$



Soporte

Definición

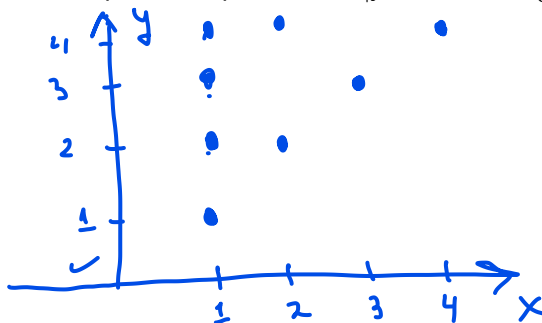
Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un predicado n -ario sobre el conjunto D . **Su soporte** es el conjunto de todas las asignaciones de x_1, \dots, x_n a elementos de D donde P toma valor 1.

Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un predicado n -ario sobre el conjunto D . Su **soporte** es el conjunto de todas las asignaciones de x_1, \dots, x_n a elementos de D donde P toma valor 1.

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.



Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un predicado n -ario sobre el conjunto D . **Su soporte** es el conjunto de todas las asignaciones de x_1, \dots, x_n a elementos de D donde P toma valor 1.

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.



$$\begin{array}{cc} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$/ \quad 3+2+\underline{1}=6$$

¿Cuál es el tamaño del soporte de $x + y = z$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$?

$$\underline{1}6$$

$$\begin{array}{l} x=1 - 3 \\ x=2 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=3 - 1 \\ x=4 - 0 \end{array}$$

Operaciones sobre predicados

- ▶ conectivos lógicos;
- ▶ identificación de los parámetros;
- ▶ cuantificadores.

Operaciones sobre predicados

- ▶ **conectivos lógicos;**
- ▶ identificación de los parámetros;
- ▶ cuantificadores.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Definición

Sean P, Q dos predicados con parametros x_1, \dots, x_n sobre un conjunto D . Entonces, $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$ son los siguientes predicados:

$$(\neg P)(x_1, \dots, x_n) = \neg(P(x_1, \dots, x_n)),$$

$$(P \wedge Q)(x_1, \dots, x_n) = (P(x_1, \dots, x_n)) \wedge (Q(x_1, \dots, x_n)),$$

$$(P \vee Q)(x_1, \dots, x_n) = (P(x_1, \dots, x_n)) \vee (Q(x_1, \dots, x_n)),$$

$$(P \rightarrow Q)(x_1, \dots, x_n) = (P(x_1, \dots, x_n)) \rightarrow (Q(x_1, \dots, x_n)).$$

$$P(x, y) \wedge Q(y, z)$$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \rightarrow (y < x)$ =

Si $x=y$ - es falso. $1 \rightarrow 0 = (x < y) \vee (y < x)$

$$x \neq y \quad x < y - 0 \rightarrow 1 = 1 = \neg(x=y).$$

$$x > y \quad \therefore \rightarrow 1 = 1$$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \rightarrow (y < x)$

¿Como expresar

$$\neg ((x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)) =$$

$$= (\neg(x < y) \wedge \neg(y < z) \wedge \neg(z < x)) = (x \geq y) \wedge$$

$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

$$(y \geq z) \wedge (z \geq x)$$

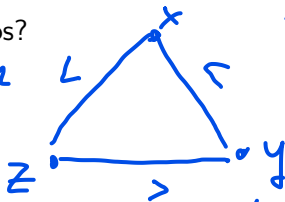
$$= (x = y) \wedge (y = z)$$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

$$x=1, y=2, z=2 \text{ ver}$$

$$x=2, y=2, z=1 \text{ o'}$$

$$x=5, y=5, z=5$$



$$Q(x, y, z) = \neg((x = y) \wedge (y = z))$$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \rightarrow (y < x)$

¿Como expresar

$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

¿Como expresar el predicado $x = y$ a través de $x|y$ y conectivos lógicos?

$$(x|y) \wedge (y|x) = (x=y)$$

Conectores y soportes

Proposición

Sean P, Q dos predicados n -arios sobre el conjunto A . Entonces,

► $sop(P \wedge Q) =$

► $sop(P \vee Q) =$

► $sop(\neg P) =$

Dibujos

Operaciones sobre predicados

- ▶ conectivos lógicos;
- ▶ identificación de los parámetros;
- ▶ cuantificadores.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Dominio \mathbb{R} :

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Dominio \mathbb{R} :

► $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y.$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{otero?io}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{binc?io}}$

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Dominio \mathbb{R} :

► $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y.$

► $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z.$



Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Dominio \mathbb{R} :

- ▶ $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y.$
- ▶ $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z.$
- ▶ ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

Diagram illustrating the mapping of variables from the equation $a + b = c + d$ to $x = y$. Blue arrows point from a to x , from b to x , from c to y , and from d to y .

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Dominio \mathbb{R} :

- ▶ $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- ▶ $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.
- ▶ ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

Definición

Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un predicado n -ario sobre un conjunto D . Sea $\alpha : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ una función. Entonces, el siguiente predicado k -ario sobre D :

$$R(y_1, \dots, y_k) = P(y_{\alpha(1)}, \dots, y_{\alpha(n)}),$$

es el resultado de identificación de los parámetros, dada por α .

Operaciones sobre predicados

- ▶ conectivos lógicos;
- ▶ identificación de los parámetros;
- ▶ **cuantificadores**.

Cuantificador existencial

- ▶ “existe” = \exists .

Cuantificador existencial

- ▶ “existe” = \exists .
- ▶ $x|y$ a través de $\underbrace{x \cdot y = z}$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

$$(\exists k \ x \cdot k = y) = (x|y)$$

Cuantificador existencial

- ▶ “existe” = \exists .
- ▶ $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;
- ▶ “ x es par” a través de $\underbrace{a + b = c}_{\text{par}}$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

$$\exists k \quad k + k = x$$

Cuantificador existencial

- ▶ “existe” = \exists .
- ▶ $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;
- ▶ “ x es par” a través de $a + b = c$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

Definición

Sea P un predicado n -ario sobre un conjunto D con parametros x_1, \dots, x_n . Entonces, $\exists x_i P$ es el siguiente predicado $(n - 1)$ -ario sobre D :

$$(\exists x_i P)(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{a \in A} \underline{P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

Ejemplos cuantificador existencial

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x \, x < y, \quad Q(x) = \exists y \, x < y$$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

Ejemplos cuantificador existencial

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x \ x < y, \quad Q(x) = \exists y \ x < y$$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

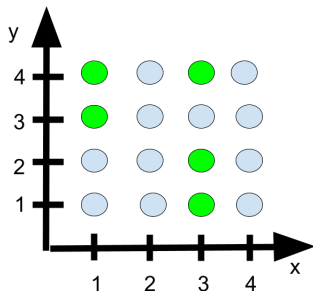
Define el siguiente predicado

$$\exists x \exists y \exists z \ x + y + z = a$$

sobre $D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

Interpretación geométrica de \exists

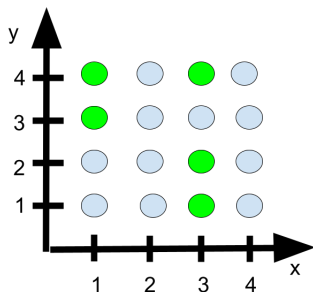
Para el siguiente predicado $A(x, y)$:



dibujar $\exists x A(x, y)$, $\exists y A(x, y)$.

Interpretación geométrica de \exists

Para el siguiente predicado $A(x, y)$:



dibujar $\exists x A(x, y)$, $\exists y A(x, y)$.

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto A . Entonces, $\text{sop}(\exists x_i P)$ es la proyección del $\text{sop}(P)$ paralelo a la dirección del eje x_i .

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador \forall (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n -ario sobre un conjunto D con parametros x_1, \dots, x_n . Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n - 1)$ -ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ \bigwedge_{a \in A} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador \forall (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n -ario sobre un conjunto D con parámetros x_1, \dots, x_n . Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$ -ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \bigwedge_{a \in A} P(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

... aunque se expresa a través de \neg, \exists

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Demostración.



Ejemplos

Sea $D = \mathbb{N}$. Expresar los siguientes predicados a través de predicados $x = y$, $x + y = z$, $x \cdot y = z$, conectivos lógicos, identificación de los parámetros y \exists, \forall :

► $\mathbb{I}\{x = 0\}$

► “ x es par”

► $\mathbb{I}\{x = 1\}$

► “ x es primo”

► $\mathbb{I}\{x = 2\}$

► “ x es una potencia de 2”.

► $x|y$

Espacio

¡Gracias!