IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

03.11.2025

Hoy...

Enumerabilidad: cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Repaso

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Repaso

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$ *para todo conjunto A.*

Repaso

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$ *para todo conjunto A.*

Corolario

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *no es enumerable.*

$\approx \mathbb{R}$

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$. $= \{f : \mathbb{N} \to X\}$

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f : \mathbb{N} \to X \qquad\qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f\colon A \to B$.

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f\colon \mathbb{N} \to X \qquad\qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

Lemma

Si $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$, entonces $B_1^{A_1} \approx B_2^{A_2}$.

Secuencias y subconjuntos

Proposición

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$\cancel{\exists} \; f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$S \subseteq \mathbb{N} \longmapsto f(S)_0\, f(S)_1\, f(S)_2, \ldots$

$\cancel{\{2,4,} \{0,2,4,6,8,\ldots\} \longmapsto 101010\ldots$

$S \mapsto f(S) = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

$100100\ldots \longleftarrow S$

Teorema

$\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Demostración.

Parte 1: $\mathbb{R} \preceq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\square$

Se saben que

~~Voy~~

para cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$

$\exists \{q_i \in \mathbb{Q}\}_{i=0}^{+\infty}$ tal que $\alpha = \lim_{i\to\infty} q_i$.

$$\mathbb{R} \precsim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx (\mathbb{N}\setminus\{0\})^{\mathbb{N}} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Sucesiones infinitas de racionales.

Por el lema anterior.

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, \dots) \mapsto \underbrace{1\dots1}_{n_1}\,0\,\underbrace{1\dots1}_{n_2}\,0\,\underbrace{1\dots1}_{n_3}\,0\dots$$

$\alpha \mapsto q_0 q_1 q_2 \dots$ tal que $\alpha = \lim_{i\to\infty} q_i$.

repr ~~pase~~ en la base

"0,100.... 0 = 1/2

0,011..... 1....

Teorema

$\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Demostración.

Parte 2: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{R}$

$\underline{1}\ 0\ \underline{1}\ 0\ 0\ \underline{1} .. \underline{1} ... \mapsto \mathbb{R}$

$2\ 3\ 5\ 7\ 11\ 13$

$2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot ..$

$\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 .... \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mapsto 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .....$

fraccion infinita en la base 10.

$\alpha = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 ...$

$\beta = \beta_0 \beta_1 \beta_2 ...$

$\alpha = \alpha_0 \alpha_1 ... \alpha_{k-1}\ 1 ...$

$\beta = \alpha_0 \alpha_1 .. \alpha_{k-1}\ 0 ....$

$f(\alpha) = 0, \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_{k-1}\ 1 ...$

$f(\beta) = 0, \alpha_0 \alpha_1 .. \alpha_{k-1}\ 0 ..$

$\square$

$f(\alpha) > f(\beta)$. "En el peor caso"

$$f(\alpha) = 0,\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}\, 1\, 0 \dots 0 \dots$$

$$f(\beta) = 0,\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}\, 0\, 1 \dots 1 \dots$$

$$10^k f(\alpha) = \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}, 1\, 0 \dots 0$$

$$10^k f(\beta) = \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}, 0\, 1 \dots 1$$

$$\underbrace{10^k f(\alpha)} - \underbrace{10^k f(\beta)} = 0,1 - 0,01 \dots 1 \dots = \frac{1}{10} - \frac{1}{90}$$

$\|$ $\qquad\qquad$ $\|$

$\frac{1}{10}$ $\qquad\qquad$ x $\qquad\qquad$ > 0

$\sqcap$

$$10x = 0,111 \dots 1 \dots$$

$$10x = 1/9 \qquad x = \frac{1}{90}$$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \approx \mathbb{R}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}$

Demostración.

Teorema

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}.$

Ya que $\mathbb{R}\approx\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Basta ver $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\approx\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que existe

$f:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ biyectiva.

Si $\alpha=\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots \in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\beta=\beta_0\beta_1\beta_2\ldots\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$f((\alpha,\beta))=\gamma=\gamma_0\gamma_1\gamma_2\ldots=\alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$

$\gamma_{2i}=\alpha_i$ $\qquad$ Dado γ, se puede definir

$\gamma_{2i+1}=\beta_i$, $i\geq 0$ $\qquad$ el único par (α,β) tal que

$f((\alpha,\beta)) = \gamma$, así $\alpha = \gamma_0 \gamma_2 \gamma_4 \dots$

$\beta = \gamma_1 \gamma_3 \gamma_5 \dots$ $\square$

Por lo tanto f es biyectiva.

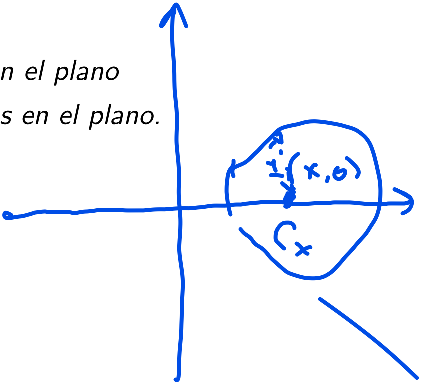
Corolario

Demuestre que $A \approx \mathbb{R}$, donde

a) ▶ *A es el conjunto de los círculos en el plano*

b) ▶ *A es el conjunto de los hexágonos en el plano.*

a) $\mathbb{R} \lesssim A$ $\qquad x \longmapsto C_x$

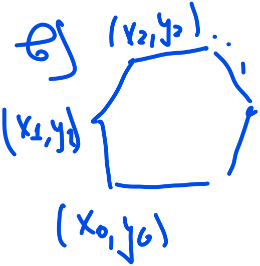


$A \lesssim \mathbb{R}$

$A \lesssim \mathbb{R}^{10} \approx \mathbb{R}$

$A \lesssim \mathbb{R}^{3} \approx \mathbb{R}$

$C \longmapsto$ (coordinada x del centro de C, coordinada y del centro de C, radius C) eg)



$$\longmapsto (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots x_6, y_6) \in \mathbb{R}^{12}$$

¡Gracias!