Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3 - Lógica Proposicional y de Predicados

22 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

---

1. Satisfacibilidad y tautologías

1. Demuestre que para cada conjunto de fórmulas Σ:

$$\Sigma \text{ es satisfacible si y sólo si } \Sigma \not\models (p \wedge \neg p)$$

Solución
Demostraremos ambas direcciones de la doble implicancia.

- $\Rightarrow$: Supongamos que Σ es satisfacible. Esto significa que existe una valuación σ' tal que $\sigma'(\Sigma) = 1$, o en otras palabras, que $\sigma'(\varphi) = 1$ para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$. Por otra parte, la fórmula $\psi = p \wedge \neg p$ es una contradicción, por lo que tenemos que $\sigma(\psi) = 0$ para toda valuación, y en particular, que $\sigma'(\psi) = 0$. Con ello, existe una valuación tal que $\sigma'(\Sigma) = 1$ y $\sigma'(\psi) = 0$, con lo que ψ no es consecuencia lógica de Σ, o escrito formalmente, $\Sigma \not\models \psi$.
- $\Leftarrow$: Por contrapositivo, supongamos que Σ no es satisfacible. Esto quiere decir que toda valuación σ es tal que $\sigma(\Sigma) = 0$. Con ello, no hay valuaciones tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, por lo que la consecuencia lógica $\Sigma \models (p \wedge \neg p)$ se cumple trivialmente (verdad vacuosa) por la definición de consecuencia lógica.

2. Demuestre que φ es una tautología si y sólo si $\varnothing \models \varphi$.

Solución Demostraremos ambas direcciones de la doble implicancia.

- $\Rightarrow$: Supongamos que φ es una tautología. Todas las valuaciones satisfacen a φ, por lo que para cualquier conjunto Σ, todas las valuaciones que lo satisfagan también satisfarán a φ. En particular, con $\Sigma = \varnothing$ tenemos el caso en cuestión, con lo que concluímos que $\varnothing \models \varphi$.

- $\Leftarrow$: Todas las valuaciones satisfacen a $\varnothing$. Esto es un concepto llamado "verdad vacuosa". Una forma de verlo intuitivamente es la siguiente: Consideremos un conjunto $\Sigma_2 = \{\alpha, \beta\}$. Para que una valuación σ satisfaga a Σ_2, esta debe cumplir $\sigma(\alpha) = 1$ y $\sigma(\beta) = 1$. En otras palabras, debe cumplir 2 *requisitos*, dados por las fórmulas α y β. Consideremos ahora un conjunto $\Sigma_1 = \{\alpha\}$, esta vez con una sola fórmula. Ahora, las valuaciones que satisfacen a Σ_1 deben cumplir *un solo requisito*, dado por α. Si pasamos a $\Sigma_0 = \varnothing$, ahora las valuaciones no deben cumplir ningún requisito para satisfacer al conjunto, es decir, todas lo satisfacen. Así que todas las valuaciones satisfacen al conjunto vacío.
  Continuando con la demostración, como $\varnothing \models \varphi$, por definición de consecuencia lógica todas las valuaciones σ tales que $\sigma(\varnothing)$ son tales que $\sigma(\varphi) = 1$. Como, por lo discutido antes, todas las valuaciones cumplen $\sigma(\varnothing) = 1$, tendremos que necesariamente todas las valuaciones cumplen $\sigma(\varphi) = 1$. Esta es la definición de tautología.

3. Demuestre que $\varphi = (p \to ((q \wedge r) \to s)) \to ((p \to (q \wedge r)) \to (p \to s))$ es una tautología.

Solución
Nótese que puede haber muchas formas de hacer esta demostración. A continuación se muestra una de ellas.
Sea
$$\varphi(p, q, r, s) \;:=\; (p \to ((q \wedge r) \to s)) \to ((p \to (q \wedge r)) \to (p \to s)).$$
Hacemos la sustitución $\alpha := q \wedge r$. Entonces, considerando α como una nueva fórmula proposicional (cuyo valor depende de q y de r, pero que en el fondo puede ser 0 o 1), la fórmula se transforma en la fórmula equivalente
$$\varphi(p, \alpha, s) \;:=\; (p \to (\alpha \to s)) \to ((p \to \alpha) \to (p \to s)).$$
Observación: para cualquier valoración de las variables p, q, r, s, la correspondiente valoración de α es $\alpha = q \wedge r$. Por tanto, si mostramos que $\varphi(p, \alpha, s)$ es verdadera para *todas* las valoraciones de p, α, s, entonces $\varphi(p, q, r, s)$ será verdadera para todas las valoraciones de p, q, r, s (porque cada valoración de q, r determina una valoración de α). Así basta demostrar que φ es una tautología en las variables p, α, s.
Construimos la tabla de verdad de φ.

p	α	s	$\alpha \to s$	$p \to (\alpha \to s)$	$p \to \alpha$	$p \to s$	$(p \to \alpha) \to (p \to s)$	φ
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Observamos que la columna de φ solo tiene 1s, con lo que es una tautología.

2. Consecuencia lógica

Calentamiento: Cuales consecuencias logicas son ciertas?

- $\{p,\ p \to q\} \models q$
- $\{\neg q,\ p \to q\} \models \neg p$
- $\{p \lor q \lor r,\ p \to s,\ q \to s,\ r \to s\} \models s$

Ejercicio

Un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, si existe α tal que al extraerla del conjunto Σ, es consecuencia lógica del conjunto resultante.

1. Demuestre que si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$, entonces Σ es redundante.

Solucion
Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera y sean α, β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \equiv \beta$.
Por demostrar: $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.
Sea σ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \setminus \{\alpha\}$.
Como β está en Σ, entonces $\sigma(\beta) = 1$. Como $\alpha \equiv \beta$ (son lógicamente equivalentes), entonces $\sigma(\alpha) = 1$.
Por esto, queda demostrado que para cualquier valuación σ se cumple que $\Sigma \setminus \{\alpha\} \models \alpha$, es decir, Σ es redundante.

Decimos que Σ es *redundante de a pares* si existen $\alpha, \beta \in \Sigma$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $\{\alpha\} \models \beta$. Demuestre o entregue un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

2. Si Σ es redundante de a pares, entonces es redundante.

Solucion
La afirmación es correcta y lo demostraremos de la siguiente forma. Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cualquiera tal que Σ es redundante de a pares.
Por demostrar: Σ es redundante
Suponga que Σ es redundante a pares, entonces sabemos que existen α y β en Σ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha \models \beta$.
Sea $\vec{v}$ una valuación cualquiera tal que haga verdadera cada fórmula en $\Sigma \backslash \{\beta\}$.
Dado que α está en $\Sigma \backslash \{\beta\}$, entonces $\alpha(\vec{v}) = 1$.
Por definición de consecuencia lógica, como $\alpha \models \beta$ y $\alpha(\vec{v}) = 1$, entonces $\beta(\vec{v}) = 1$.
Por lo tanto, queda demostrado que si Σ es redundante a pares, entonces Σ es redundante.

3. Si Σ es redundante, entonces es redundate de a pares.

Solucion
En este caso la afirmación es falsa. Para demostrar que no se cumple lo propuesto se propondrá un posible contraejemplo que deja en evidencia que existe un caso donde no se cumple lo pedido.
Considere el conjunto de fórmulas proposicionales $\Sigma = \{p, q, p \leftrightarrow q\}$. Debemos demostrar que este conjunto es redundante y no es redundante de a pares.
Su tabla de verdad que se utilizará para la demostración es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Para que sea redundante se tiene que cumplir que existe α tal que $\Sigma \backslash \{\alpha\} \models \alpha$.
Si consideramos $\alpha = p \leftrightarrow q$ nos podemos dar cuenta que $\{p, q\} \models p \leftrightarrow q$. Esto es fácilmente visible mediante la fila 4 de la tabla de verdad. Por lo tanto, Σ es redundante.
Ahora, para demostrar que Σ no es redundante de a pares debemos demostrar que para todo par α, β en Σ con $\alpha \neq \beta$ no se cumple que $\alpha \models \beta$. Como Σ tiene 3 fórmulas proposicionales, debemis ver los 6 casos y demostrar para cada uno que no es cierto que $\alpha \models \beta$.

- $p \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 3)
- $p \models q$: no se cumple (fila 3)
- $p \leftrightarrow p \models q$: no se cumple (fila 1)
- $p \leftrightarrow q \models q$: no se cumple (fila 1)
- $q \models p$: no se cumple (fila 2)
- $q \models p \leftrightarrow q$: no se cumple (fila 2)

Ya que para todos los pares no se cumple la consecuencia lógica, entonces Σ no es redundante a pares.

3. Lógica de predicados

a) Sean $\leq$, $=$ símbolos de predicado binarios y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ definida por:

$$\mathcal{I}(\text{dom}) := \mathbb{N}$$

$$\mathcal{I}(=) := n = m \text{ si y sólo si } n \text{ y } m \text{ son iguales}$$

$$\mathcal{I}(\leq) := n \leq m \text{ si y sólo si } n \text{ es menor o igual que } m$$

$$\mathcal{I}(P) := P(n) \text{ si y sólo si } n \text{ es primo}$$

Escriba la siguiente expresión en **lógica de predicados** sobre la interpretación $\mathcal{I}$:

> "Para todo par de números primos distintos de 2 y 3, hay un número natural entre ellos que no es primo".

Solución
Considere los siguientes predicados:

- $Entre(x, y, z) := x \leq y \leq z \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(y = z)$ (y está entre x y z).
- $S(x, y) := x \leq y \wedge \neg(x = y) \wedge (\neg \exists z. Entre(x, z, y))$ (y es sucesor de x).
- $0(x) := \forall y.(x \leq y)$ (x es 0).
- $1(x) := \exists y.(0(y) \wedge S(y, x))$ (x es 1).
- $2(x) := \exists y.(1(y) \wedge S(y, x))$ (x es 2).
- $3(x) := \exists y.(2(y) \wedge S(y, x))$ (x es 3).
- $PrimoNo2No3(x) := P(x) \wedge \neg 2(x) \wedge \neg 3(x)$ (x es un número primo distinto de 2 y 3).

Usando estos predicados, la oración pedida es la siguiente:

$$\forall x \forall y.((PrimoNo2No3(x) \wedge PrimoNo2No3(y)) \rightarrow (\exists z.(Entre(x, z, y) \wedge \neg P(z))))$$