Unidad VI: Funciones y Cardinalidad

Conjuntos no enumerables

Clase 18 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

¿Existen conjuntos no enumerables?

Teorema:

$\mathbb{R}$ **no** es enumerable.

- Como $\mathbb{R} \approx (0,1)$ entonces basta probar que $(0,1)$ no es enumerable.
  - No existe biyección $f : \mathbb{N} \to (0,1)$.

- Cada real $r \in (0,1)$ se puede representar con una **secuencia infinita** de dígitos entre $\{0, \ldots, 9\}$.
  - Esto es la representación decimal de r.

$$r = 0.\; d_0 \;\; d_1 \;\; d_2 \;\; d_3 \;\; \cdots$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0.\; 5\; 0\; 0\; 0\; 0\; \cdots \qquad \frac{1}{3} = 0.\; 3\; 3\; 3\; 3\; 3\; \cdots \qquad \frac{1}{4} = 0.\; 2\; 5\; 0\; 0\; 0\; \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 0.\; 7\; 8\; 5\; 3\; 9\; \cdots \qquad \frac{e}{4} = 0.\; 6\; 7\; 9\; 5\; 7\; \cdots$$

- Algunos reales en $(0,1)$ tienen dos posibles representaciones decimales. Por ejemplo:

$$\frac{1}{4} = 0.\; 2\; 5\; 0\; 0\; 0\; \cdots \;=\; 0.\; 2\; 4\; 9\; 9\; 9\; \cdots$$

  - En este caso escogemos la representación que termina con 0's.

Por contradicción, supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to (0,1)$.

Luego, existe una enumeración $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(0,1)$:

- La secuencia no tiene repeticiones.
- **Todos** los reales en $(0,1)$ aparecen en la secuencia.

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

$\mathbb{R}$ no es enumerable

Reales	Representación decimal							
r_0	0.	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	d_{05}	$\cdots$
r_1	0.	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	$\cdots$
r_2	0.	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	$\cdots$
r_3	0.	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	$\cdots$
r_4	0.	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}	$\cdots$
r_5	0.	d_{50}	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	d_{55}	$\cdots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

Para cada $i \geq 0$, definamos:

$$e_i = \begin{cases} 4 & d_{ii} \neq 4 \\ 5 & d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Defina el número real $s = 0.\ e_0\ e_1\ e_2\ e_3\ \ldots$

¿Puede aparecer s en la lista $r_0, r_1, r_2, \ldots$?

Para cada $i \geq 0$, definamos:

$$e_i = \begin{cases} 4 & d_{ii} \neq 4 \\ 5 & d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Defina el número real $s = 0.\ e_0\ e_1\ e_2\ e_3\ \ldots$

Tenemos que:

- $s \neq r_0$ ya que difieren en el 0-ésimo dígito.
- $s \neq r_1$ ya que difieren en el 1-ésimo dígito.
- $\ldots$

Para cada $i \geq 0$, tenemos $s \neq r_i$ ya que difieren en el i-ésimo dígito.

Encontramos un real $s \in (0,1)$ que **no** aparece en la enumeración $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Esto es una contradicción.