PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC1253 - MATEMÁTICAS DISCRETAS

Pauta Tarea 2

27 de agosto de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Pregunta 1

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{Capital, MismoPais, Vuelo\}$, donde $Capital$ tiene aridad 1, $MismoPais$ tiene aridad 2, y $Vuelo$ tiene aridad 2. Considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(dom) &= \text{conjunto de todas las ciudades del mundo.}\\
\mathcal{I}(Capital(x)) &= x \text{ es capital.}\\
\mathcal{I}(MismoPais(x,y)) &= x \text{ e } y \text{ están en el mismo país.}\\
\mathcal{I}(Vuelo(x,y)) &= \text{hay un vuelo directo desde } x \text{ a } y.
\end{aligned}$$

Escriba fórmulas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ en la lógica de predicados sobre $\mathcal{L}$ tal que:

(a) (3.0 pts) $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} =$ hay un vuelo directo desde x hacia una ciudad fuera del país.

(b) (3.0 pts) $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} =$ se puede llegar desde x a la capital del mismo país en a lo más 2 escalas.

(**Observación:** Si x es la capital de su país, el predicado anterior se considera verdadero.)

Solución

(a) La fórmula $\alpha(x)$ puede ser:

$$\alpha(x) = \exists y \left(Vuelo(x,y) \land \neg MismoPais(x,y)\right).$$

(b) La fórmula $\beta(x)$ puede ser:

$$\beta(x) = \exists y \Big(MismoPais(x,y) \wedge Capital(y) \wedge \\ \big(Capital(x) \vee Vuelo(x,y) \vee \exists z\,(Vuelo(x,z) \wedge Vuelo(z,y)) \vee \\ \exists z_1 \exists z_2\,(Vuelo(x,z_1) \wedge Vuelo(z_1,z_2) \wedge Vuelo(z_2,y)) \big) \Big).$$

Notar que el tercer término en la conjunción, es una disyunción que considera los 4 casos posibles para que una ciudad x esté a lo más a 2 escalas de la capital: o bien x es capital, o hay un vuelo directo de x a la capital, o puedo llegar con una escala de x a la capital, o puedo llegar con 2 escalas.

Distribución de puntajes:

En ambos items, 3.0 pts si la fórmula entregada es correcta. Se descuenta puntaje si hay errores, según la gravedad de estos.

Pregunta 2

Considere las siguientes dos fórmulas de la lógica de predicados, sobre el vocabulario $\mathcal{L} = \{P, A\}$, donde P tiene aridad 1 y A tiene aridad 2.

$$\phi = \forall x \exists y (P(y) \wedge A(x,y)),$$

$$\psi = \exists x \forall y \forall z \Big((P(y) \wedge P(z) \wedge A(x,y) \wedge A(x,z)) \to (A(y,z) \vee A(z,y) \vee y = z) \Big),$$

y la intepretación $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}.$$
$$\mathcal{I}(P(x)) = x \text{ es primo.}$$
$$\mathcal{I}(A(x,y)) = x + 10^9 \leq y.$$

(a) (3.0 pts) Calcule el valor de verdad de $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}}$. Argumente su respuesta.

(b) (3.0 pts) Calcule el valor de verdad de $[\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$. Argumente su respuesta.

(**Hint:** investigue sobre la *twin prime conjecture* `https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime`)

Solución

(a) Se tiene que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$. Esto debido a que hay infinitos números primos. Luego, para todo natural que tomemos, siempre hay un primo mayor o igual que ese natural. En particular, para todo natural n, siempre existe un primo p tal que $n + 10^9 \leq p$.

(b) Sobre $\mathcal{I}$, la fórmula ψ expresa lo siguiente:

Existe un natural n tal que para toda pareja de primos p_1 y p_2 mayores o iguales a $n + 10^9$, se cumple que $p_1 + 10^9 \leq p_2$, o $p_2 + 10^9 \leq p_1$, o $p_1 = p_2$.

Esto es lo mismo que decir lo siguiente:

Existe un natural n tal que para toda pareja de primos p_1 y p_2 mayores o iguales a $n + 10^9$, si p_1 y p_2 son distintos, entonces la distancia entre ellos es mayor o igual a 10^9.

La *twin prime conjecture* es una conjetura que dice que:

Existen infinitas parejas de primos a distancia exactamente 2.

Ejemplos de estas parejas son:

$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43),(59,61),(71,73),(101,103),(107,109),(137,139),\ldots$

Aún no se ha podido encontrar una demostración de esta conjetura (por eso se llama "conjetura" y no "teorema"). Este problema ha estado abierto por casi 180 años, y es considerado uno de los problemas abiertos más importantes en teoría de números.

Si bien no hay una demostración de la twin prime conjecture, sí hay demostraciones de versiones más débiles. En 2013, se demostró que existen infinitas parejas de primos distintos que están a distancia menor que 70 millones[1]. Como $70000000 < 10^9$, la fórmula anterior contradice este resultado, ya que nos dice que a partir de $n + 10^9$, no hay parejas de primos distintos cuya distancia es menor que 10^9 (y luego, menor que 70000000). En particular, esto dice que la cantidad de parejas de primos distintos cuya distancia es menor a 70000000 es finita, lo cual es falso. Concluimos que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 0$.

Distribución de puntajes:

En ambos items, 3.0 pts por dar el valor de verdad correcto y argumentar claramente la respuesta. Sólo dar el valor de verdad, sin justificación, no recibe puntaje. Se aplican descuentos o puntajes parciales a criterio del corrector.

[1] La cota de 70 millones se ha ido mejorando, y la mejor cota que se conoce actualmente es de 246.