Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 17 - Repaso Examen

6 de diciembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

---

1 Teoría de Números

1. Suponga que $a, b, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ son tales que $\gcd(a, m) = \gcd(b, m) = 1$. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ y $a^y \equiv b^y \pmod{m}$. Si $d = \gcd(x, y)$ demuestre que

$$a^d \equiv b^d \pmod{m}$$

2. Sean p, q dos números primos distintos. Demuestre que, si

$$\begin{aligned} a^q &\equiv a \pmod{p} \\ a^p &\equiv a \pmod{q} \end{aligned}$$

entonces $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

2 Lógica proposicional y Predicados

1. El *principio de los cajones* establece que si $n+1$ objetos son distribuidos en n cajones, entonces al menos habrá un cajón con más de un objeto. Demuestre el principio para $n = 3$ usando lógica proposicional.

2. Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{S, M\}$ donde S y M son símbolos ternarios. Considere la interpretación $\mathcal{I}$ tal que el dominio de $\mathcal{I}$ son los números reales $\mathbb{R}$, y

$$S^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}, \qquad M^{\mathcal{I}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = z\}$$

a) Construya fórmulas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ tal que $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{I}} = \{0\}$ y $[\![\beta]\!]_{\mathcal{I}} = \{1\}$.

b) Sea n un número natural arbitrario. Construya una fórmula $\varphi_n(x)$ tal que $[\![\varphi_n]\!]_{\mathcal{I}} = \{n\}$.

3 Relaciones y Conjuntos

Decimos que una relación R sobre un conjunto A es un *preorden* si es refleja y transitiva. Sea R un preorden sobre A:

a) Demuestre que $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.

b) Definimos una relación S sobre el conjunto cociente de A con respecto a $R \cap R^{-1}$ como sigue:

$$(C, D) \in S \iff \text{existe } c \in C \text{ y existe } d \in D \text{ tal que } (c, d) \in R.$$

Demuestre que S es un orden parcial.

4 Cardinalidad

1. Una recta en el plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$, donde a y b son elementos fijos en $\mathbb{R}$. Demuestre que un número enumerable de rectas no puede cubrir el plano real.

2. Demuestre que el conjunto de todas las rectas en el plano es equinumeroso al conjunto de todos los puntos del plano. (*Hint*: tanto los puntos como las rectas se determinan por pares de números).