Los números reales

Vamos a estudiar ahora la cardinalidad del conjunto de los números reales.

- Pero antes de hacer esto necesitamos entender cómo se definen los números reales.

Los números reales

Vamos a estudiar ahora la cardinalidad del conjunto de los números reales.

- Pero antes de hacer esto necesitamos entender cómo se definen los números reales.

Un número real se escribe de la siguiente forma:

$$n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \cdots$$

Donde $n \in \mathbb{Z}$ y $d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Los números reales

Vamos a estudiar ahora la cardinalidad del conjunto de los números reales.

- Pero antes de hacer esto necesitamos entender cómo se definen los números reales.

Un número real se escribe de la siguiente forma:

$$n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \cdots$$

Donde $n \in \mathbb{Z}$ y $d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}00000000000\ldots \\ \pi &= 3{,}14159265359\ldots \end{aligned}$$

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Como un ejemplo vamos a demostrar que $1{,}0000000000\ldots$ y $0{,}9999999999\ldots$ representan el mismo número.

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Como un ejemplo vamos a demostrar que $1{,}0000000000\ldots$ y $0{,}9999999999\ldots$ representan el mismo número.

Sea $x = 0{,}9999999999\ldots$

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Como un ejemplo vamos a demostrar que $1{,}0000000000\ldots$ y $0{,}9999999999\ldots$ representan el mismo número.

Sea $x = 0{,}9999999999\ldots$

Tenemos que $10x = 9{,}9999999999\ldots$, por lo que $10x - 9 = 0{,}9999999999\ldots$

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Como un ejemplo vamos a demostrar que $1{,}0000000000\ldots$ y $0{,}9999999999\ldots$ representan el mismo número.

Sea $x = 0{,}9999999999\ldots$

Tenemos que $10x = 9{,}9999999999\ldots$, por lo que $10x - 9 = 0{,}9999999999\ldots$

Por lo tanto $10x - 9 = x$.

Los números reales

Los números reales se definen utilizando la notación anterior, pero un número puede tener más de una representación.

- Al igual que para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, cada número en $\mathbb{R}$ es una clase de equivalencia.

Como un ejemplo vamos a demostrar que $1{,}0000000000\ldots$ y $0{,}9999999999\ldots$ representan el mismo número.

Sea $x = 0{,}9999999999\ldots$

Tenemos que $10x = 9{,}9999999999\ldots$, por lo que $10x - 9 = 0{,}9999999999\ldots$

Por lo tanto $10x - 9 = x$.

- Resolviendo la ecuación concluimos que $x = 1$.

Los números reales

Dado un número real $r = n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \cdots$, para $k \in \mathbb{N}$ defina:

$$r_k = n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots d_k$$

Los números reales

Dado un número real $r = n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\cdots$, para $k \in \mathbb{N}$ defina:

$$r_k \quad = \quad n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\ldots d_k$$

Vale decir, r_k se construye truncando r en $k+1$ decimales.

Los números reales

Dado un número real $r = n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\cdots$, para $k \in \mathbb{N}$ defina:

$$r_k \quad = \quad n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\ldots d_k$$

Vale decir, r_k se construye truncando r en $k+1$ decimales.

- Cada r_k es un número racional.

Los números reales

Dado un número real $r = n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \cdots$, para $k \in \mathbb{N}$ defina:

$$r_k = n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots d_k$$

Vale decir, r_k se construye truncando r en $k+1$ decimales.

- Cada r_k es un número racional.

Dados dos números reales r y s, decimos que $r \sim s$ si $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

Los números reales

Dado un número real $r = n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\cdots$, para $k \in \mathbb{N}$ defina:

$$r_k = n{,}d_0d_1d_2d_3d_4d_5\ldots d_k$$

Vale decir, r_k se construye truncando r en $k+1$ decimales.

- Cada r_k es un número racional.

Dados dos números reales r y s, decimos que $r \sim s$ si $\lim_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

- Vale decir: $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k \geq k_0\ |r_k - s_k| < \varepsilon$.

Los números reales

Por ejemplo, si $r = 1{,}0000000000\ldots$ y $s = 0{,}9999999999\ldots$, entonces $r \sim s$ puesto que $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

Los números reales

Por ejemplo, si $r = 1{,}0000000000\ldots$ y $s = 0{,}9999999999\ldots$, entonces $r \sim s$ puesto que $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

$\sim$ es la relación de equivalencia que nos dice cuando dos números reales representan lo mismo.

Los números reales

Por ejemplo, si $r = 1{,}0000000000\ldots$ y $s = 0{,}9999999999\ldots$, entonces $r \sim s$ puesto que $\lim_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

$\sim$ es la relación de equivalencia que nos dice cuando dos números reales representan lo mismo.

- Si $r \sim s$, entonces r y s representan al mismo número.

Los números reales

Por ejemplo, si $r = 1{,}0000000000\ldots$ y $s = 0{,}9999999999\ldots$, entonces $r \sim s$ puesto que $\lim_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

$\sim$ es la relación de equivalencia que nos dice cuando dos números reales representan lo mismo.

- Si $r \sim s$, entonces r y s representan al mismo número.

En las siguientes demostraciones tenemos que tener cuidado al usar la representación $n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$ de un número real.

Los números reales

Por ejemplo, si $r = 1{,}0000000000\ldots$ y $s = 0{,}9999999999\ldots$, entonces $r \sim s$ puesto que $\lim\limits_{k\to\infty} |r_k - s_k| = 0$.

$\sim$ es la relación de equivalencia que nos dice cuando dos números reales representan lo mismo.

- Si $r \sim s$, entonces r y s representan al mismo número.

En las siguientes demostraciones tenemos que tener cuidado al usar la representación $n{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$ de un número real.

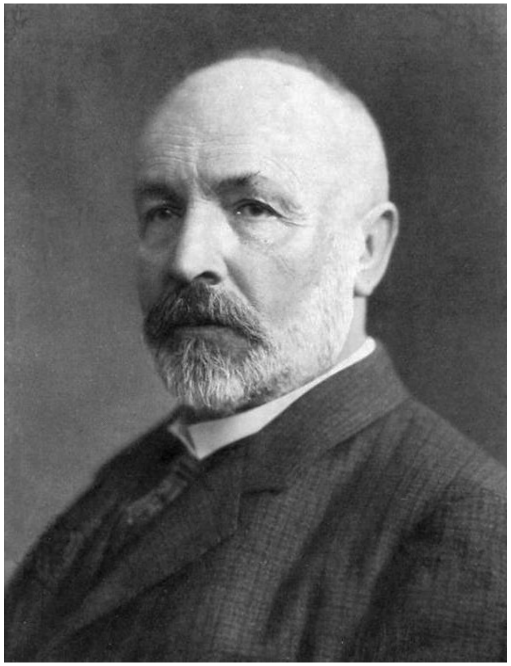
- Por ejemplo, si decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces $f(a)$ debe ser distinto de $f(b)$ para $a \neq b$, vale decir, **no** debe ser cierto que $f(a) \sim f(b)$.

$\mathbb{R}$ no es enumerable

Teorema (Cantor)

$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ no es enumerable



Georg Cantor

Teorema (Cantor)

$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ no es enumerable

El teorema es consecuencia de la siguiente proposición:

Proposición

$\mathbb{N} \prec (0,1)$.

$\mathbb{R}$ no es enumerable

El teorema es consecuencia de la siguiente proposición:

Proposición

$\mathbb{N} \prec (0,1)$.

Ejercicio

Demuestre el teorema a partir de la proposición.

$\mathbb{R}$ no es enumerable

Por contradicción, supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$.

- Vamos a obtener una contradicción usando el método de diagonalización de Cantor

$\mathbb{R}$ no es enumerable

Por contradicción, supongamos que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$.

- Vamos a obtener una contradicción usando el método de diagonalización de Cantor

Para cada $i \in \mathbb{N}$:

$$f(i) \quad = \quad 0{,}d_{i,0}d_{i,1} \ldots d_{i,i} \ldots$$

donde $d_{i,j} \in \{0, \ldots, 9\}$, para cada $j \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$f(0) \quad = \quad 0{,}d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\dots$$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0{,}d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\ldots \\ f(1) & = & 0{,}d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}\ldots \end{array}$$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0{,}d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\ldots \\
f(1) & = & 0{,}d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}\ldots \\
f(2) & = & 0{,}d_{2,0}d_{2,1}d_{2,2}d_{2,3}\ldots
\end{array}
$$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0,d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\ldots \\ f(1) & = & 0,d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}\ldots \\ f(2) & = & 0,d_{2,0}d_{2,1}d_{2,2}d_{2,3}\ldots \\ f(3) & = & 0,d_{3,0}d_{3,1}d_{3,2}d_{3,3}\ldots \end{array}$$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$
\begin{array}{ccl}
f(0) & = & 0,d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\ldots \\
f(1) & = & 0,d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}\ldots \\
f(2) & = & 0,d_{2,0}d_{2,1}d_{2,2}d_{2,3}\ldots \\
f(3) & = & 0,d_{3,0}d_{3,1}d_{3,2}d_{3,3}\ldots \\
\ldots & & \qquad\quad \ldots \\
f(i) & = & 0,d_{i,0}d_{i,1}d_{i,2}d_{i,3}\ldots d_{i,i}\ldots \\
\ldots & & \qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos un número $r \in \mathbb{R}$ usando la siguiente diagonal:

$$
\begin{array}{ccl}
f(0) & = & 0{,}d_{0,0}d_{0,1}d_{0,2}d_{0,3}\ldots \\
f(1) & = & 0{,}d_{1,0}d_{1,1}d_{1,2}d_{1,3}\ldots \\
f(2) & = & 0{,}d_{2,0}d_{2,1}d_{2,2}d_{2,3}\ldots \\
f(3) & = & 0{,}d_{3,0}d_{3,1}d_{3,2}d_{3,3}\ldots \\
\ldots & & \qquad\qquad \ldots \\
f(i) & = & 0{,}d_{i,0}d_{i,1}d_{i,2}d_{i,3}\ldots d_{i,i}\ldots \\
\ldots & & \qquad\qquad \ldots
\end{array}
$$

Propiedad fundamental de r: $f(i) \neq r$ para cada $i \in \mathbb{N}$

- Usando esta propiedad obtenemos una contradicción: f no es sobre

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos r como:

$$r \quad = \quad 0.r_0 r_1 r_2 \ldots$$

donde r_i $(i \in \mathbb{N})$ es definido como:

$$r_i = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{i,i} \neq 5 \\ 4 & \text{si } d_{i,i} = 5 \end{cases}$$

$\square$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: Diagonalización

Definimos r como:

$$r = 0.r_0 r_1 r_2 \ldots$$

donde r_i ($i \in \mathbb{N}$) es definido como:

$$r_i = \begin{cases} 5 & \text{si } d_{i,i} \neq 5 \\ 4 & \text{si } d_{i,i} = 5 \end{cases}$$

$\square$

¿Por qué la demostración anterior no funciona si reemplazamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: algunas consecuencias

Teorema

Para el conjunto $\mathbb{I}$ *de los números irracionales se tiene que* $\mathbb{N} \prec \mathbb{I}$.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: algunas consecuencias

Teorema

Para el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales se tiene que $\mathbb{N} \prec \mathbb{I}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros.
- $p(a) = 0$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros.
- $p(a) = 0$

Ejemplo

Cada número en $\mathbb{Q}$ es algebraico, además $\sqrt{2}$ es algebraico.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros.
- $p(a) = 0$

Ejemplo

Cada número en $\mathbb{Q}$ es algebraico, además $\sqrt{2}$ es algebraico.

Un número $a \in \mathbb{R}$ es trascendente si no es algebraico.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Un número $a \in \mathbb{R}$ es algebraico si existe un polinomio $p(x)$ tal que:

- $p(x)$ no es nulo, y los coeficientes de $p(x)$ son números enteros.
- $p(a) = 0$

Ejemplo

Cada número en $\mathbb{Q}$ es algebraico, además $\sqrt{2}$ es algebraico.

Un número $a \in \mathbb{R}$ es trascendente si no es algebraico.

- ¿Existen números trascendentes?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e
- Lindemann (1882): π

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e
- Lindemann (1882): π

Un argumento más simple:

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e
- Lindemann (1882): π

Un argumento más simple:

- El conjunto de los polinomios $p(x)$ con coeficientes enteros es enumerable.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e
- Lindemann (1882): π

Un argumento más simple:

- El conjunto de los polinomios $p(x)$ con coeficientes enteros es enumerable. ¿Por qué?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: existencia de números trascendentes

Existencia de números trascendentes:

- Liouville (1850): $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$
- Hermite (1873): e
- Lindemann (1882): π

Un argumento más simple:

- El conjunto de los polinomios $p(x)$ con coeficientes enteros es enumerable. ¿Por qué?
- Como $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$, concluimos que existen **infinitos** números trascendentes.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Podemos asociar nombres a los números reales:

1264, mil doscientos sesenta y cuatro, 3.25, tres punto veinte y cinco, $\sqrt{2}$, raíz cuadrada positiva de 2, π, e, menor raíz del polinomio $3x^3 - 17x + 1$, ...

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Podemos asociar nombres a los números reales:

1264, mil doscientos sesenta y cuatro, 3.25, tres punto veinte y cinco, $\sqrt{2}$, raíz cuadrada positiva de 2, π, e, menor raíz del polinomio $3x^3 - 17x + 1$, ...

¿Podemos asociar un nombre a cada número real?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Podemos asociar nombres a los números reales:

1264, mil doscientos sesenta y cuatro, 3.25, tres punto veinte y cinco, $\sqrt{2}$, raíz cuadrada positiva de 2, π, e, menor raíz del polinomio $3x^3 - 17x + 1$, ...

¿Podemos asociar un nombre a cada número real?

- ¿Qué alfabeto usamos?

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Consideramos el alfabeto ASCII que tiene 256 caracteres.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Consideramos el alfabeto ASCII que tiene 256 caracteres.

- Otros alfabetos puedes ser codificados usando este alfabeto: `"3*x^3 - 17*x + 1"`, `"pi"`

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Consideramos el alfabeto ASCII que tiene 256 caracteres.

- Otros alfabetos puedes ser codificados usando este alfabeto: `"3*x^3 - 17*x + 1"`, `"pi"`

El conjunto de los strings que pueden construidos usando el alfabeto ASCII es enumerable.

$\mathbb{R}$ no es enumerable: nombres para los números

Consideramos el alfabeto ASCII que tiene 256 caracteres.

- Otros alfabetos puedes ser codificados usando este alfabeto: `"3*x^3 - 17*x + 1"`, `"pi"`

El conjunto de los strings que pueden construidos usando el alfabeto ASCII es enumerable.

- ¡Tenemos más números en $\mathbb{R}$ que nombres para ellos!

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Para cada conjunto finito A tenemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Para cada conjunto finito A tenemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

- Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Para cada conjunto finito A tenemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

- Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

¿Sigue siendo cierta esta propiedad para los conjuntos infinitos?

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Para cada conjunto finito A tenemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

- Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

¿Sigue siendo cierta esta propiedad para los conjuntos infinitos?

- Vamos a demostrar que es cierta para $\mathbb{N}$, vale decir, $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Un resultado más general

El hecho de que $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ es consecuencia de un teorema más general.

Para cada conjunto finito A tenemos que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

- Si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

¿Sigue siendo cierta esta propiedad para los conjuntos infinitos?

- Vamos a demostrar que es cierta para $\mathbb{N}$, vale decir, $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Y después vamos a demostrar que es cierta para todo conjunto A.

$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Proposición

$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Proposición

$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

La proposición es un corolario del siguiente resultado:

Proposición

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0, 1)$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$(0,1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$: para demostrar esto defina la siguiente función $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$(0,1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$: para demostrar esto defina la siguiente función $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dado $r = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, defina:

$$f(r) \quad = \quad \{d_i \cdot 10^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$(0,1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$: para demostrar esto defina la siguiente función $f : (0,1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dado $r = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, defina:

$$f(r) \quad = \quad \{d_i \cdot 10^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Demuestre que f es una función inyectiva.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$(0,1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$: para demostrar esto defina la siguiente función $f : (0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dado $r = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, defina:

$$f(r) \quad = \quad \{d_i \cdot 10^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Demuestre que f es una función inyectiva.

- De esto se concluye que $(0,1) \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0, 1)$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0, 1)$: para demostrar esto defina la siguiente función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0, 1)$.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0,1)$: para demostrar esto defina la siguiente función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$.

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, defina $g(A) = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$d_k = \begin{cases} 1 & k \in A \\ 0 & k \notin A \end{cases}$$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0,1)$: para demostrar esto defina la siguiente función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$.

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, defina $g(A) = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$d_k = \begin{cases} 1 & k \in A \\ 0 & k \notin A \end{cases}$$

Demuestre que g es una función inyectiva.

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx (0,1)$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0,1)$: para demostrar esto defina la siguiente función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$.

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, defina $g(A) = 0{,}d_0 d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots$, donde para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$d_k = \begin{cases} 1 & k \in A \\ 0 & k \notin A \end{cases}$$

Demuestre que g es una función inyectiva.

- De esto se concluye que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq (0,1)$.

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración: Si $A = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ y el teorema se cumple.

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración: Si $A = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ y el teorema se cumple.

- Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración: Si $A = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ y el teorema se cumple.

- Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Primero debemos mostrar una función inyectiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Un teorema más general

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración: Si $A = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$ y el teorema se cumple.

- Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Primero debemos mostrar una función inyectiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

- Para cada $a \in A$: $f(a) = \{a\}$.

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

- Por contradicción, suponemos que g existe.

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

- Por contradicción, suponemos que g existe.

Defina $B \subseteq A$ como sigue:

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

- Por contradicción, suponemos que g existe.

Defina $B \subseteq A$ como sigue:

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

Como g es sobre, existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$.

Teorema de Cantor: Demostración

Ahora debemos demostrar que no existe una biyección $g : A \to \mathcal{P}(A)$.

- Por contradicción, suponemos que g existe.

Defina $B \subseteq A$ como sigue:

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

Como g es sobre, existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$.

- Se debe tener que $b \in g(b)$ o $b \notin g(b)$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$b \in g(b)$$

$$b \notin g(b)$$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$b \in g(b) \quad \Rightarrow \quad b \in B$$

$$b \notin g(b)$$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$\begin{aligned} b \in g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \in B \\ &\Rightarrow \quad b \notin g(b) \end{aligned}$$

$$b \notin g(b)$$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$\begin{aligned} b \in g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \in B \\ &\Rightarrow \quad b \notin g(b) \end{aligned}$$

$$b \notin g(b) \quad \Rightarrow \quad b \notin B$$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$\begin{aligned} b \in g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \in B \\ &\Rightarrow \quad b \notin g(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \notin g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \notin B \\ &\Rightarrow \quad b \in g(b) \end{aligned}$$

Teorema de Cantor: Demostración

Consideramos los dos casos:

$$
\begin{aligned}
b \in g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \in B \\
&\Rightarrow \quad b \notin g(b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b \notin g(b) \quad &\Rightarrow \quad b \notin B \\
&\Rightarrow \quad b \in g(b)
\end{aligned}
$$

En ambos casos obtenemos una contradicción. $\square$

Existencia de problemas no decidibles

Una propiedad P sobre $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Existencia de problemas no decidibles

Una propiedad P sobre $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

- Por ejemplo, las siguientes son propiedades sobre $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{PAR} &= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número par}\} \\ \text{PRIMO} &= \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número primo}\} \end{aligned}$$

Existencia de problemas no decidibles

Una propiedad P sobre $\mathbb{N}$ es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

- Por ejemplo, las siguientes son propiedades sobre $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \text{PAR} & = & \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número par}\} \\ \text{PRIMO} & = & \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ es un número primo}\} \end{array}$$

Definición (Informal)

Una propiedad sobre $\mathbb{N}$ es decidible si existe un programa en Python tal que:

- recibe como entrada $n \in \mathbb{N}$;
- si $n \in P$ retorna **sí**, en caso contrario retorna **no**

Existencia de problemas no decidibles

Ejemplo

PAR y PRIMO son decidibles.

Existencia de problemas no decidibles

Ejemplo

PAR y PRIMO son decidibles.

¿Existe una propiedad P no decidible?

Existencia de problemas no decidibles

Ejemplo

PAR y PRIMO son decidibles.

¿Existe una propiedad P no decidible?

- No existe un procedimiento mecánico que pueda verificar si un elemento está en P.

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.
- $\{P \mid P \text{ es una propiedad sobre } \mathbb{N}\}$ es igual a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.
- $\{P \mid P$ es una propiedad sobre $\mathbb{N}\}$ es igual a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.
- $\{P \mid P$ es una propiedad sobre $\mathbb{N}\}$ es igual a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- Concluimos que existen propiedades sobre $\mathbb{N}$ que no son decidibles.

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.
- $\{P \mid P \text{ es una propiedad sobre } \mathbb{N}\}$ es igual a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- Concluimos que existen propiedades sobre $\mathbb{N}$ que no son decidibles.

¿Hay más propiedades decidibles o no decidibles?

Existencia de problemas no decidibles

Tenemos que:

- El conjunto de los programas en Python es enumerable.
- $\{P \mid P \text{ es una propiedad sobre } \mathbb{N}\}$ es igual a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sabemos que $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- Concluimos que existen propiedades sobre $\mathbb{N}$ que no son decidibles.

¿Hay más propiedades decidibles o no decidibles?

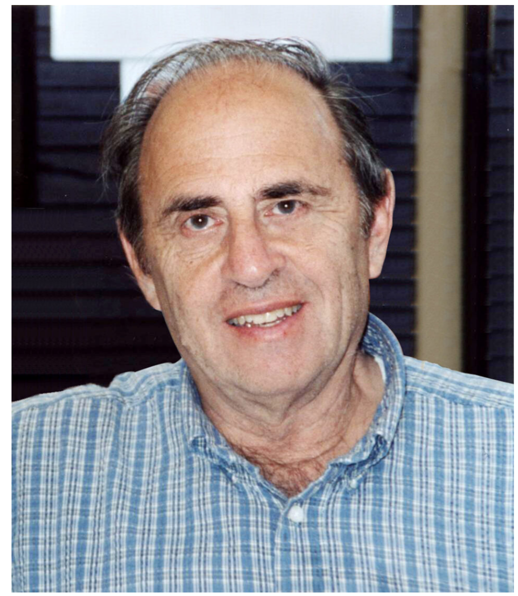
- ¿Aún sigue creyendo que ChatGPT es tan poderoso? 🙂

Una pregunta fundamental

¿Existe un conjunto A tal que $\mathbb{N} \prec A$ y $A \prec \mathbb{R}$?

Una pregunta fundamental

Kurt Gödel



Paul Cohen

La hipótesis del continuo

Hipótesis del continuo

No existe un conjunto A tal que $\mathbb{N} \prec A$ y $A \prec \mathbb{R}$.

La hipótesis del continuo

Hipótesis del continuo

No existe un conjunto A tal que $\mathbb{N} \prec A$ y $A \prec \mathbb{R}$.

Tenemos un gran problema para demostrar esta propiedad.

La hipótesis del continuo

Hipótesis del continuo

No existe un conjunto A tal que $\mathbb{N} \prec A$ y $A \prec \mathbb{R}$.

Tenemos un gran problema para demostrar esta propiedad.

Se puede escribir la hipótesis del continuo como una oración φ_{HC} en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{\in\}$.

La hipótesis del continuo

Hipótesis del continuo

No existe un conjunto A tal que $\mathbb{N} \prec A$ y $A \prec \mathbb{R}$.

Tenemos un gran problema para demostrar esta propiedad.

Se puede escribir la hipótesis del continuo como una oración φ_{HC} en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{\in\}$.

- Nos gustaría saber entonces si $\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \models \varphi_{\mathsf{HC}}$.

La hipótesis del continuo

Pero bajo el supuesto de que Σ_{ZFC} es consistente:

La hipótesis del continuo

Pero bajo el supuesto de que Σ_{ZFC} es consistente:

- Gödel demostró que $\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \cup \{\varphi_{\mathsf{HC}}\}$ es consistente.

La hipótesis del continuo

Pero bajo el supuesto de que Σ_{ZFC} es consistente:

- Gödel demostró que $\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \cup \{\varphi_{\mathsf{HC}}\}$ es consistente.
- Cohen demostró que $\Sigma_{\mathsf{ZFC}} \cup \{\neg\varphi_{\mathsf{HC}}\}$ es consistente.

La hipótesis del continuo

Pero bajo el supuesto de que Σ_{ZFC} es consistente:

- Gödel demostró que $\Sigma_{\text{ZFC}} \cup \{\varphi_{\text{HC}}\}$ es consistente.
- Cohen demostró que $\Sigma_{\text{ZFC}} \cup \{\neg\varphi_{\text{HC}}\}$ es consistente.

La hipótesis del continuo no se puede refutar o demostrar en Σ_{ZFC}.

La hipótesis del continuo

Pero bajo el supuesto de que Σ_{ZFC} es consistente:

- Gödel demostró que $\Sigma_{\text{ZFC}} \cup \{\varphi_{\text{HC}}\}$ es consistente.
- Cohen demostró que $\Sigma_{\text{ZFC}} \cup \{\neg\varphi_{\text{HC}}\}$ es consistente.

La hipótesis del continuo no se puede refutar o demostrar en Σ_{ZFC}.

- ¿Cómo podemos entonces demostrar esta propiedad?