Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6

12 de septiembre de 2025

Caetano Borges, Manuel Villablanca, Elias Ayaach

Resumen

1. Propiedades

1. Sean $A, B \subseteq U$ con U un conjunto arbitrario. Demustre que se cumple o de un contra ejemplo

$$B = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B) \iff A = \varnothing.$$

2. Sean $A, B, C \subseteq U$ con U un conjunto arbitrario. Pruebe que:

   b.1) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

   b.2) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

   b.3) $[(A \cap B) \setminus (A \cap C)] = (A \cap B) \setminus ((U \backslash A) \cup C)$

Solución

1. ($\Leftarrow$) Primero, desarrollaremos este lado de la doble implicancia, por lo que asumimos que $A = \varnothing$

$$\begin{array}{l} (A \cap U \backslash B) \cup (U \backslash A \cap B) \\ (\varnothing \cap U \backslash B) \cup (U \backslash \varnothing \cap B) \\ (\varnothing) \cup (U \cap B) = \varnothing \cup B = B \end{array}$$

($\Rightarrow$) Para esta dirección de la demostracion asumimos como verdadero el lado izquierdo y a partir de esto debemos llegar a que $A = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
& B = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B) \\
& B \cap U \backslash B = [(A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B)] \cap U \backslash B && \text{/Intersectamos con } U \backslash B \\
& \varnothing = (A \cap (U \backslash B) \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B \cap (U \backslash B)) && \text{/aplicamos distributiva} \\
& \varnothing = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B \cap U \backslash B) \\
& \varnothing = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap \varnothing) \\
& \varnothing = (A \cap (U \backslash B)) \cup (\varnothing) \\
& \varnothing = (A \cap (U \backslash B)) \mathbf{(1)}
\end{aligned}
$$

Luego, reemplazamos el resultado anterior en la expresión original:

$$
\begin{aligned}
& B = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B) \\
& B = (\varnothing) \cup ((U \backslash A) \cap B) && \text{/aplicamos reemplazo} \\
& U \backslash B = U \backslash ((U \backslash A) \cap B) && \text{/aplicamos morgan} \\
& U \backslash B = (A \cup (U \backslash B)) \mathbf{(2)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, reemplazamos (2) en (1) y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
& \varnothing = (A \cap (A \cup (U \backslash B))) \\
& \varnothing = (A \cap A) \cup (A \cap (U \backslash B)) && \text{/distributiva} \\
& \varnothing = A \cup \varnothing && \text{/por (1)} \\
& \varnothing = A
\end{aligned}
$$

2. Ahora vamos a presentar un posible desarrollo para los tres ejercicios propuestos

   b.1) Antes de partir para facilitar el desarrollo conviene demostrar que se cumple lo siguiente:

   $$A \backslash B = A \cap (U \backslash B)$$

   (queda propuesta la demostracion pero con diagrama de venn bastaría para demostrarla)

$[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A]$
$[A \cap U \backslash (B \cap U \backslash A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A]$ /propiedad propuesta
$[A \cap U \backslash (B \cap U \backslash A)] \cup [(B \cap (U \backslash A) \cap U \backslash A]$ /propiedad propuesta
$[A \cap U \backslash (B \cap U \backslash A)] \cup [(B \cap (U \backslash A)]$
$[A \cup (B \cap U \backslash A)] \cap [U \backslash (B \cap U \backslash A) \cup (B \cap U \backslash A)]$ /distributiva
$[A \cup (B \cap (U \backslash A))] \cap [U]$
$(A \cup B) \cap (A \cup (U \backslash A))$ /distributiva
$(A \cup B) \cap (U)$
$(A \cup B)$

b.2)

$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$
$(A \cap U \backslash C) \cap (U \backslash (B \cap U \backslash C))$ /propiedad del ejercicio anterior
$(A \cap U \backslash C) \cap (U \backslash B \cup C)$ /Morgan
$A \cap U \backslash C \cap (U \backslash B \cup C)$ /Asociatividad
$A \cap [(U \backslash C \cap U \backslash B) \cup (U \backslash C \cap C)]$ /distrivutiva
$A \cap [(U \backslash C \cap U \backslash B) \cup \varnothing]$
$A \cap U \backslash B \cap U \backslash C$ /Asociatividad
$(A \backslash B) \cap U \backslash C$ /propiedad del ejercicio anterior
$(A \backslash B) \backslash C$ /propiedad del ejercicio anterior

b.3)

$[(A \cap B) \setminus (A \cap C)]$
$(A \cap B) \cap U \backslash (A \cap C)$ /propiedad del ejercicio b.1
$(A \cap B) \cap (U \backslash A \cup U \backslash C)$ /morgan
$B \cap A \cap (U \backslash A \cup U \backslash C)$ /Asociatividad
$B \cap [(A \cap U \backslash A) \cup (A \cap U \backslash C)]$ /Distributiva
$B \cap [\varnothing \cup (A \cap U \backslash C)]$
$B \cap A \cap U \backslash C$

Ahora vamos a desarrollar el lado derecho de la igualdad para notar que llegamos a la misma reducción:

$$\begin{array}{ll} (A \cap B) \setminus ((U \setminus A) \cup C) & \\ (A \cap B) \cap U \setminus (U \setminus A \cup C) & \text{/propiedad del ejercicio b.1} \\ (A \cap B) \cap (A \cap U \setminus C) & \text{/morgan} \\ B \cap A \cap U \setminus C & \text{/Asociatividad} \end{array}$$

Notamos que llegamos a lo mismo por lo que queda demostrada la igualdad

2. Diferencia simétrica

Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.

$$\text{Si } A \Delta C = B \Delta C \text{ entonces } A = B$$

Solución
Dado que $A \Delta C = B \Delta C$, demostraremos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$:
($\subseteq$) Sea $x \in A$. Consideremos dos casos:

- $x \notin C$: tenemos que $x \in A \setminus C$, y entonces $x \in A \setminus C \cup C \setminus A$. Luego, por definición de diferencia simétrica, se cumple que $x \in A \Delta C$, y entonces $x \in B \setminus C$. Esto significa que $x \in B \setminus C \cup C \setminus B$, y como $x \notin C$, necesariamente $x \in B \setminus C$. Concluimos que $x \in B$.
- $x \in C$: tenemos que $x \notin A \setminus C$ y que $x \notin C \setminus A$. Luego, $x \notin A \Delta C$, y entonces $x \notin B \Delta C$. Por definición de diferencia simétrica, esto último implica que $x \notin C \setminus B$ y como $x \in C$, necesariamente $x \in B$.

($\supseteq$) Análoga a la anterior.

3. Axioma de Regularidad

1. Un conjunto y se llama un *elemento épsilon-mínimo* de un conjunto x si $y \in x$, pero no existe $z \in x$ tal que $z \in y$, o equivalentemente $x \cap y = \varnothing$. El *Axioma de Fundación* (también llamado *Axioma de Regularidad*) afirma que todo conjunto no vacío tiene un elemento épsilon-mínimo.

   Muestra que este axioma implica lo siguiente:

   a) No existe un conjunto x tal que $x \in x$.

b) No existen conjuntos x e y tales que $x \in y$ y $y \in x$.

c) No existen conjuntos x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$.

2. Para cualquier conjunto x, el *sucesor* de x se define como

$$x' = x \cup \{x\}.$$

Muestra cómo usar el Axioma de Fundación para dar una prueba sencilla de que si $x' = y'$, entonces $x = y$.

Solución

1. Para las demostraciones de este ítem buscaremos llegar a contradicciones con el axioma de regularidad.

   a) Supongamos que existe un conjunto x tal que $x \in x$. Definimos $a = \{x\}$. Si intentamos tomar x como elemento épsilon-mínimo en a, tenemos que $x \cap a = x$, ya que $x \in x$ y además $x \in a$. Esto contradice el axioma de regularidad, pues ningún elemento es disjunto de a. Por lo tanto, no puede existir tal x.

   b) Supongamos que existen x, y tales que $x \in y$ y $y \in x$. Consideremos el conjunto $a = \{x, y\}$. Si tomamos un candidato a épsilon-mínimo, por ejemplo x, vemos que $x \cap a \neq \varnothing$ ya que $y \in x \cap a$. Análogamente, si tomamos y, entonces $x \in y \cap a$. En consecuencia, ningún elemento de a es épsilon-mínimo, contradiciendo el axioma de regularidad. Por lo tanto, no pueden existir x, y con $x \in y$ y $y \in x$.

   c) Supongamos que existen x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$. Consideremos el conjunto $a = \{x, y, z\}$. Si tomamos x, notamos que $z \in x \cap a$; si tomamos y, entonces $x \in y \cap a$; y si tomamos z, se cumple que $y \in z \cap a$. Por tanto, ninguno de los elementos de a es épsilon-mínimo, contradiciendo el axioma de regularidad.

2. **Solución:** Supongamos que $x' = y'$. Entonces

$$x \cup \{x\} = y \cup \{y\}.$$

Por igualdad de conjuntos, si $x \in x'$ necesariamente debe cumplirse que $x \in y'$. En otras palabras,

$$x \in y \quad \vee \quad x = y.$$

De manera análoga, concluimos que

$$y \in x \quad \vee \quad y = x.$$

Por lo tanto, para que la igualdad $x' = y'$ se mantenga, necesariamente se cumple la proposición:

$$(x \in y \quad \vee \quad x = y) \;\wedge\; (y \in x \quad \vee \quad y = x).$$

De lo anterior surgen los siguientes cuatro casos:

- Si $x = y$ y además $y \in x$, se concluye que $x \in x$, lo cual contradice el Axioma de Fundación.
- Si $x \in y$ y $y = x$, resulta nuevamente que $x \in x$, lo cual contradice el Axioma de Fundación.
- Si $x \in y$ y $y \in x$, estamos en el caso prohibido del problema anterior, ya que dos conjuntos no pueden contenerse mutuamente.
- Si $x = y$ y $y = x$, este es el único caso que no contradice el Axioma de Fundación y satisface la proposición formulada.

Conclusión: El único escenario posible sin entrar en contradicción con el Axioma de Fundación es que $x = y$.