Unidad V: Relaciones

Relaciones: ordenes.

Clase 14 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Definición:

Sea R una relación sobre A.

- R es un **orden parcial** sobre A si R es refleja, antisimétrica y transitiva.
- R es un **orden total (o lineal)** sobre A si R es un orden parcial y además es conexa.

Recordatorio:

- **Refleja:** Para cada $a \in A$, se cumple $R(a, a)$.
- **Antisimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$ entonces $a = b$.
- **Transitiva:** Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$.
- **Conexa:** Para cada $a, b \in A$, si tiene que $R(a, b)$ o $R(b, a)$.

Las siguiente relaciones son ordenes parciales:

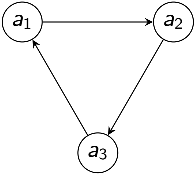
- La relación $\leq$ sobre $\mathbb{N}$.
- Sea A un conjunto. La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$.
- La relación $a \mid b$ sobre $\mathbb{N}$, donde

$$a \mid b \iff a \text{ divide a } b \iff b \text{ es divisible por } a.$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son ordenes totales?

Sea R un orden parcial sobre A.

Ciclo de largo 3 en R:
elementos distintos $a_1, a_2, a_3 \in A$ tal que $R(a_1, a_2)$, $R(a_2, a_3)$ y $R(a_3, a_1)$.



¿Puede existir un ciclo de largo 3 en R?
¿un ciclo de largo k, para $k \geq 2$?

Sabemos que $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{N}$.

¿Es posible definir un **orden total** sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en base a $\leq$?

Un primer intento:

$$(a_1, a_2) \leq_{\text{coord}} (b_1, b_2) \iff a_1 \leq b_1 \;\wedge\; a_2 \leq b_2$$

¿Es $\leq_{\text{coord}}$ un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Orden lexicográfico sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Notación:

Si $\leq$ es un orden parcial o total sobre A, la relación $<$ sobre A se define:

$$a < b \iff a \leq b \ \wedge \ a \neq b$$

El **orden lexicográfico** $\leq_{\text{lex}}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define como:

$$(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2) \iff a_1 < b_1 \ \vee \ (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \leq b_2)$$

Ejemplos:

- $(10, 11) \leq_{\text{lex}} (10, 11)$ $\quad$ $(3, 6) \leq_{\text{lex}} (5, 1)$ $\quad$ $(4, 6) \leq_{\text{lex}} (4, 7)$
- $(10, 11) \not\leq_{\text{lex}} (10, 10)$ $\quad$ $(4, 1) \not\leq_{\text{lex}} (3, 100)$

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Refleja:

Por definición, para todo $(a_1, a_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se cumple $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Antisimétrica:

Supongamos que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Como $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$, tenemos que $a_1 \leq b_1$.

Similarmente, como $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$, tenemos que $b_1 \leq a_1$.

Obtenemos que $a_1 = b_1$.

Como $a_1 = b_1$ y $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$, tenemos que $a_2 \leq b_2$.

Similarmente, como $a_1 = b_1$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$, tenemos que $b_2 \leq a_2$.

Obtenemos que $a_2 = b_2$.

Concluimos que $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Transitiva:

Supongamos que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Tenemos que $a_1 \leq b_1$ y $b_1 \leq c_1$, y entonces $a_1 \leq c_1$.

Caso 1: $a_1 < c_1$.

Obtenemos directamente que $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Caso 2: $a_1 = c_1$.

Sabemos que $a_1 \leq b_1 \leq c_1$, luego se cumple que $b_1 = a_1 = c_1$.

Como $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$ y $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$,
obtenemos que $a_2 \leq b_2$ y $b_2 \leq c_2$.

Concluimos que $a_2 \leq c_2$ y entonces $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (c_1, c_2)$.

Proposición:

$\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demostración:

Conexa:

Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Caso 1: $a_1 < b_1$.
Obtenemos $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$.

Caso 2: $b_1 < a_1$.
Obtenemos $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Caso 3: $a_1 = b_1$.

- **Caso 3.1**: $a_2 \leq b_2$.
  Obtenemos $(a_1, a_2) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2)$.
- **Caso 3.2**: $b_2 < a_2$.
  Obtenemos $(b_1, b_2) \leq_{\text{lex}} (a_1, a_2)$.

Algunos comentarios

- Dado un orden total $\leq$ sobre A, podemos definir de igual manera el orden lexicográfico $\leq_{\text{lex}}$ sobre $A \times A$.
  - $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre $A \times A$. (verifíquelo!)
- Es posible extender $\leq_{\text{lex}}$ a $\mathbb{N}^k$ para todo $k \geq 2$. (¿cómo lo haría?)

- **Alfabeto:** Conjunto finito Σ de símbolos. Por ejemplo:
  - $\Sigma = \{0, 1\}$.
  - $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$.
- **Palabra sobre un alfabeto Σ:**
  Secuencia finita $u = u_1 \ldots u_k$ de símbolos de Σ.
  - k es el largo de la palabra u.
  - Posibles palabras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$:

    $$0010 \qquad 1 \qquad 1010111$$

  - Posibles palabras sobre $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$:

    $$hola \qquad navidad \qquad asdf$$

- **Σ^+:** conjunto de todas las palabras sobre Σ de largo mayor o igual a 1.

Nos gustaría capturar el orden típico entre palabras.

- El orden según el cual aparecen en el diccionario.

¿Cuál es el orden entre las siguientes palabras?

hola	zapata
bot	aba
zapato	perro
terremoto	botar

¿Cómo capturamos este orden formalmente?

Orden lexicográfico sobre palabras

Sea Σ un alfabeto. Asumimos que tenemos un orden total $\leq$ sobre Σ.

- Por ejemplo, para $\Sigma = \{a, b, c, d, \ldots, w, x, y, z\}$, tomamos el orden:

$$a \leq b \leq c \leq d \leq \cdots \leq w \leq x \leq y \leq z$$

Definimos el **orden lexicográfico** $\leq_{\text{lex}}$ sobre Σ^+ como sigue:

Sean $u = u_1 \ldots u_k$ y $v = v_1 \cdots v_\ell$ palabras en Σ^+ de largo k y ℓ, resp.

- Sea $m = \max\{k, \ell\}$.

Entonces, $u \leq_{\text{lex}} v$ si y sólo si $u = v$ o existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que:

- para cada $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, se tiene que $u_j = v_j$, y
- $u_i \leq v_i$ o $(i = k + 1$ y $v_i \in \Sigma)$

Ejemplos:

$$\textit{density} \leq_{\text{lex}} \textit{destiny} \qquad \textit{bot} \leq_{\text{lex}} \textit{botar} \qquad \textit{botilleria} \leq_{\text{lex}} \textit{boton}$$

Ejercicio: Demuestre que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total sobre Σ^+.

Definición:

Sea $\leq$ un orden parcial sobre A y sea $a \in A$ un elemento.

- Decimos que a es **mínimo** si para todo $b \in A$, se tiene $a \leq b$.
- Decimos que a es **minimal** si **no** existe $b \in A$ tal que $b < a$.
  (es decir, tal que $b \leq a$ y $b \neq a$.)

Definimos **máximo** y **maximal** de manera análoga.

Comentarios:

- **OJO:** mínimo y minimal **no** son lo mismo.
- Todo elemento mínimo es minimal. (¿por qué?)
- Pueden haber elementos minimales que **no** son mínimos.
- Similarmente para máximo y maximal.

En cada caso diga cuáles son los elementos mínimos/máximos y minimales/maximales. (si es que existen)

- El orden lexicográfico $\leq_{\text{lex}}$ sobre $\{0, 1\}^+$.
- La relación $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$.
- La relación divide sobre $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$.
- La relación divide sobre $A = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$.

Sea $\leq$ un orden parcial sobre A. Demuestre las siguientes propiedades:

- Si hay un mínimo, entonces es **único**.
- Si existen dos elementos minimales distintos, entonces son **incomparables** según $\leq$.
- Lo mismo se cumple para máximo y maximal.

Para ordenes totales, mínimos y minimales son lo mismo.

Proposición:

Sea $\leq$ un orden total sobre A. Entonces todo elemento minimal es mínimo.

Demostración:

Sea $a \in A$ elemento minimal. Sea $b \in A$ arbitrario.

Por demostrar: $a \leq b$

Como $\leq$ es conexa, se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$.

Si $a \leq b$ estamos listos, luego supongamos que $b \leq a$.

Como a es minimal, no puede pasar que $b \neq a$.

Concluimos que $a = b$, y en particular, $a \leq b$.