IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

01.09.2025

Hoy...

Teoría de conjuntos: principio de axiomática, notación $\{\}$, paradoja de Russell, fundación.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

Nociones indefinibles:

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

Nociones indefinibles:

Conjunto

Predicado $\in$ (ser elemento)

Conjunto vacío

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*

Conjunto vacío

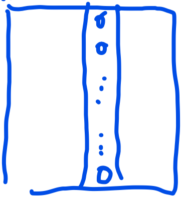
$\neg(x \in y) \wedge \ldots$

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*
- $\exists a \, \forall b \, \neg(b \in a)$

$\emptyset$

$x \in y$ $\in$ $N \cap Q = \emptyset$



$\underline{1}$

Conjunto vacío

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*
-

Axioma (de extensionalidad)

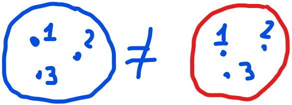
- *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.*

Conjunto vacío

Axioma (de conjunto vació)

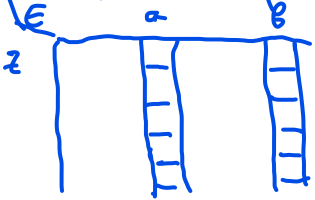
- *Existe un conjunto sin elementos.*
-

$\{1, 2, 3\}$



Axioma (de extensionalidad)

- *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.*
- $\neg \exists a \, \exists b \, \neg (a = b) \wedge \left(\forall z \, (z \in a) \rightarrow (z \in b) \right)$



Corolario

El conjunto vacío es único.

Nuevos conjuntos

Axioma (de emparejamiento) (no necesi distintos)

- *Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto c cuyos elementos son exactamente a, b.*

$a, b \to \{a, b\}$

$\forall a \, \forall b \, \exists c \quad (a \in c) \wedge (b \in c) \wedge (\forall z \, (\neg(z=a) \wedge \neg(z=b) \to \neg(z \in c)))$

$a, \quad \{a\}$ (singleton)

Nuevos conjuntos

Axioma (de emparejamiento)

- *Sean* a, b *dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto* c *cuyos elementos son exactamente* a, b*.*
-

Nuevos conjuntos

Axioma (de emparejamiento)

- *Sean* a, b *dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto* c *cuyos elementos son exactamente* a, b.
-

Teorema

Para cualquier k *conjuntos* $a_1, \ldots, a_k$ *existe un conjunto* b *cuyos elementos son exactamente* $a_1, \ldots, a_k$.

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto a es un subconjunto de un conjunto b si todos los elementos de a son elementos de b;*

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto* a *es un subconjunto de un conjunto* b *si todos los elementos de* a *son elementos de* b*;*
- $a \subseteq b =$

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto* a *es un subconjunto de un conjunto* b *si todos los elementos de* a *son elementos de* b*;*
- $a \subseteq b =$

Proposición

$\varnothing \subseteq a$ *para cualquier conjunto* a*.*

Ejemplos

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

Ejemplos

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

Ejemplos

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \notin b, \qquad a \subseteq b$

Ejemplos

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \notin b, \qquad a \subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \subseteq b$

Subconjuntos e igualdad

Ejemplo $\{x, x\} = \{x\}$.

Proposición

Sean a, b dos conjuntos. Entonces $a = b$ si y sólo si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$.

Paradoja de Russel

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

Paradoja de Russel

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

- En teoría de conjuntos *informal* (1870-1900, Cantor) eso había considerado como una paradoja.

Paradoja de Russel

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

- En teoría de conjuntos *informal* (1870-1900, Cantor) eso había considerado como una paradoja.
- En teoría formal: no se puede juntar conjuntos según cualquier propiedad.

Fundación

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);

Fundación

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.

Fundación

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.
- Mas encima, tomar un elemento de un conjunto se puede hacer solo finito número de veces, a partir de cualquier conjunto.

Fundación

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.
- Mas encima, tomar un elemento de un conjunto se puede hacer solo finito número de veces, a partir de cualquier conjunto.

Axioma (de fundación)

Cada conjunto $x \neq \varnothing$ tiene un elemento que no tiene elementos en común con x.

Corolario

No existe k conjuntos $x_1, \ldots, x_k$ tal que $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.

Corolarios de fundación

Corolario

No existe un conjunto universo u tal que todos los conjuntos son sus elementos.

Corolarios de fundación

Corolario

No existe un conjunto universo u tal que todos los conjuntos son sus elementos.

Un conjunto b se llama *singleton* si $b = \{a\}$ para algún conjunto a.

Corolario

No existe un conjunto de todos los singletones.

¡Gracias!