Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Guía 3 – teoría de conjuntos

Problema 1 Dar ejemplos de conjuntos a, b tal que
a) $a \notin b, a \not\subseteq b$
b) $a \notin b, a \subseteq b$
c) $a \in b, a \not\subseteq b$
d) $a \in b, a \subseteq b$

Problema 2 Mostrar que $a \subseteq b, b \subseteq c \implies a \subseteq c$ para todos los conjuntos a, b, c, pero $a \in b, b \in c \implies a \in c$ no es cierto siempre.

Problema 3 ¿Es cierto que para todos los conjuntos a, b, c, tenemos
a) $a \in b, b \subseteq c \implies a \in c$?
b) $a \subseteq b, b \in c \implies a \in c$

Problema 4 Muestre que no existe un conjunto x tal que

$$\forall y \ (y \in x) \leftrightarrow \neg(x \in y).$$

Problema 5 Usando la axioma de regularidad:

$$AR = \forall x \ \Big((\exists y \ y \in x) \to (\exists z \, (z \in x) \land \neg(\exists w \, w \in x \land w \in z)) \Big).$$

demuestre que no existe un conjunto x de todos los conjuntos de la forma $\{y\}$.

Problema 6 Sean a_1, a_2, a_3 3 conjuntos, y b el conjunto de todos los x's que pertenecen por lo menos a dos conjuntos entre a_1, a_2, a_3. Expressar b a través de a_1, a_2, a_3 y $\cap, \cup$.

Problema 7 Mostrar la igualdad

$$(a \setminus b) \setminus c = (a \setminus c) \setminus b.$$

Problema 8 Muestre que para cada conjunto x existe un conjunto y tal que $x = Union(y)$.

Problema 9 A través del axioma de separación, demuestre que para cada conjunto A existe su subconjunto B que consiste en todos los elementos de A con no más de un elemento.

Problema 10 Sean a, b, c 3 conjuntos tal que $a \in \mathcal{P}(b), b \in \mathcal{P}(c), c \in \mathcal{P}(a)$. Mostrar que $a = b = c$.

Problema 11 Mostrar que $\{a\} \notin \mathcal{P}(a)$ para todos los conjuntos a.

Problema 12 Hemos mostrado que el conjunto de los números naturales satisface el principio de inducción: para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) si $n \in A$, entonces $S(n) \in A$ para todos los números naturales n;

tenemos $A = \mathbb{N}$.

Ahora, definimos el orden en los números naturales: $n < m$ para dos números naturales n, m si y sólo si $n \in m$. Mostrar las siguientes propiedades de orden, usando (si necesario), el principio de inducción:

a) $\neg(n < n)$ para todos los números naturales n;

b) $n < S(n)$ para todos los números naturales n;

c) $0 < n$ o $0 = n$ para todos los números naturales n;

d) $((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ para todos los números naturales n, m, k;

e) $(n < m) \vee (m < n) \vee (n = m)$ para todos los números naturales n, m;

f) no existen dos números naturales n, m tales $n < m < S(n)$.