IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

04.08.2025

Hoy...

Hoy...

- introdución

Hoy...

- introdución
- Lógica proposicional: motivación, sintaxis y semántica, equivalencia de fórmulas.

Organización

Organización

- anuncios, entrega de las tareas – canvas.

Organización

- anuncios, entrega de las tareas – canvas.
- materiales (programa, clases, etc.):

  `https://github.com/IIC1253/IIC1253-2025-2`

Contenido

- Lógica proposicional
- Lógica de predicados
- Teoría de conjuntos
- Inducción
- Relaciones y funciones
- Conteo y cardinalidad
- Teoría de números.

Contenido

- Lógica proposicional
- Lógica de predicados
- Teoría de conjuntos
- Inducción
- Relaciones y funciones
- Conteo y cardinalidad
- Teoría de números.

¿Qué son las proposiciones?

¿Qué son las proposiciones?

- afirmaciones, oraciones...

¿Qué son las proposiciones?

- afirmaciones, oraciones...
- tiene que ser verdadera o falsa

¿Qué son las proposiciones?

- afirmaciones, oraciones...
- tiene que ser verdadera o falsa
- "Santiago es la capital de Chile"

¿Qué son las proposiciones?

- afirmaciones, oraciones...
- tiene que ser verdadera o falsa
- “Santiago es la capital de Chile”
- “Londres es la capital de Francia”

¿Qué son las proposiciones?

- afirmaciones, oraciones...
- tiene que ser verdadera o falsa
- "Santiago es la capital de Chile"
- "Londres es la capital de Francia"
- "¿Como estás?" – no

Proposiciones en las matemáticas

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$
- teoremas, lemas en artículos y libros matematicos

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$
- teoremas, lemas en artículos y libros matematicos
- ...y conjeturas.

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$
- teoremas, lemas en artículos y libros matematicos
- ...y conjeturas.
- P=NP

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$
- teoremas, lemas en artículos y libros matematicos
- ...y conjeturas.
- P=NP
- "π es un número normal"

Proposiciones en las matemáticas

- $\pi \in \mathbb{Q}$
- $\pi > 0$
- teoremas, lemas en artículos y libros matematicos
- ...y conjeturas.
- P=NP
- "π es un número normal"
- "n es un número entero impar" – no es una proposición (¿cual es la *cuantificación* de n?)

Conectivos

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- "(π es un número positivo) y (π es un número racional)" –

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- "(π es un número positivo) y (π es un número racional)" – falsa.

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- “(π es un número positivo) y (π es un número racional)” – falsa.
- “(π es un número positivo) o (π es un número racional)” –

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- "(π es un número positivo) y (π es un número racional)" – falsa.
- "(π es un número positivo) o (π es un número racional)" – verdadera.

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- "(π es un número positivo) y (π es un número racional)" – falsa.
- "(π es un número positivo) o (π es un número racional)" – verdadera.
- 'Si π es un número racional, entonces π no es un número positivo" –

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- “(π es un número positivo) y (π es un número racional)” – falsa.
- “(π es un número positivo) o (π es un número racional)” – verdadera.
- ‘Si π es un número racional, entonces π no es un número positivo” – verdadera!

Conectivos

- Se puede componer proposiciones a través de *conectivos* lógicos.
- "(π es un número positivo) y (π es un número racional)" – falsa.
- "(π es un número positivo) o (π es un número racional)" – verdadera.
- 'Si π es un número racional, entonces π no es un número positivo" – verdadera!
- " Si P=NP implica que $\pi \in \mathbb{Q}$ o $\pi < 0$, entonces P$\neq$NP" – ?

Notación matemática para conectivos

Notación matemática para conectivos

- $\wedge$ (y, conjunción)

Notación matemática para conectivos

- $\wedge$ (y, conjunción)
- $\vee$ (o, disyunción)

Notación matemática para conectivos

- $\wedge$ (y, conjunción)
- $\vee$ (o, disyunción)
- $\rightarrow$ (si... entonces, implicación)

Notación matemática para conectivos

- $\wedge$ (y, conjunción) &
- $\vee$ (o, disyunción)
- $\rightarrow$ (si... entonces, implicación)
- $\neg$ (no, negación)

Notación matemática para conectivos

- $\wedge$ (y, conjunción)
- $\vee$ (o, disyunción)
- $\rightarrow$ (si... entonces, implicación)
- $\neg$ (no, negación)

$$\underbrace{A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad A \rightarrow B,}_{\text{binarios}} \qquad \underbrace{\neg B}_{\text{unario}}$$

¿Como se usa esa notación?

¿Como se usa esa notación?

- " Si P=NP implica que $\pi \in \mathbb{Q}$ o $\pi < 0$, entonces P$\neq$NP"

¿Como se usa esa notación?

- " Si P=NP implica que $\pi \in \mathbb{Q}$ o $\pi < 0$, entonces P$\neq$NP"
- $((P{=}NP) \rightarrow (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \rightarrow (\neg\ (P{=}NP))$

¿Como se usa esa notación?

- " Si P=NP implica que $\pi \in \mathbb{Q}$ o $\pi < 0$, entonces P$\neq$NP"
- $((\mathrm{P}{=}\mathrm{NP}) \to (\pi \in \mathbb{Q} \lor \pi < 0)) \to (\neg\, (\mathrm{P}{=}\mathrm{NP}))$
- Paréntesis son importantes.

¿Como se usa esa notación?

- " Si P=NP implica que $\pi \in \mathbb{Q}$ o $\pi < 0$, entonces P$\neq$NP"
- $((P{=}NP) \rightarrow (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \rightarrow (\neg\, (P{=}NP))$
- Paréntesis son importantes.
- $(P{=}NP \rightarrow \pi \in \mathbb{Q}) \vee (\pi < 0 \rightarrow (\neg\, P{=}NP))$

¿Cuando un conectivo es verdadero y cuando es falso?

¿Cuando un conectivo es verdadero y cuando es falso?

- Negación

A	$\neg A$
V	F
F	V

¿Cuando un conectivo es verdadero y cuando es falso?

- Negación

A	$\neg A$
V	F
F	V

- Conjunción (y)

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

¿Cuando un conectivo es verdadero y cuando es falso?

- Negación

A	$\neg A$
V	F
F	V

- Conjunción (y)

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Disjunción (o)

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

¿Cuando un conectivo es verdadero y cuando es falso?

- Negación

A	$\neg A$
V	F
F	V

- Conjunción (y)

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Disjunción (o)

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Implicación

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¿Porque la implicación se define así?

- Implicación

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¿Porque la implicación se define así?

- Implicación

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- "Para cada número entero n, si n es divisible por 4, entonces n es divisible por 2".

$$\underbrace{(4 \mid n)} \longrightarrow \underbrace{(2 \mid n)}$$

$n = 1$ $\quad (4 \mid 1) = F \quad (2 \mid 1) = F$

$n = 2$ $\quad (4 \mid 2) = F \quad (2 \mid 2) = V$

$n = 4$ $\quad (4 \mid 4) = V, \quad (2 \mid 4) = V$

Todos juntos

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Notación 0,1

Notación 0,1

- $F = 0$, $V = 1$.

Notación 0,1

- F = 0, V = 1.
-

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- $((\pi > 0) \vee (\pi \in \mathbb{Q})) \to (2 \cdot 2 = 5)$.

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- $(\underbrace{(\pi > 0)}_{1} \vee \underbrace{(\pi \in \mathbb{Q})}_{0}) \to \underbrace{(2 \cdot 2 = 5)}_{0}.$

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- $\big(\underbrace{(\pi > 0)}_{1} \overbrace{\vee}^{1} \underbrace{(\pi \in \mathbb{Q})}_{0}\big) \to \underbrace{(2 \cdot 2 = 5)}_{0}$.

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- $\Big(\underbrace{(\pi > 0)}_{1} \overbrace{\vee}^{1} \underbrace{(\pi \in \mathbb{Q})}_{0}\Big) \overbrace{\rightarrow}^{0} \underbrace{(2 \cdot 2 = 5)}_{0}.$

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- A veces se puede definir el valor sin saber la verdad de todas las proposiciones atómicas.

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

- A veces se puede definir el valor sin saber la verdad de todas las proposiciones atómicas.
- $(\mathsf{P}{=}\mathsf{NP} \to (\pi \in \mathbb{Q} \lor \pi < 0)) \to (\neg(\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}))$

¿Cómo se calcula el valor de una proposición compuesta?

$$A \wedge B = \underline{1} \Rightarrow A = B = \underline{1}$$

$$\underbrace{P = NP}_{} \vee \pi > 0 = \underline{1}$$

- A veces se puede definir el valor sin saber la verdad de todas las proposiciones atómicas.
- $(\underbrace{P{=}NP}_{x} \to (\underbrace{\pi \in \mathbb{Q}}_{0} \vee \underbrace{\pi < 0}_{0})) \to (\neg\,\underbrace{(P{=}NP)}_{x})$ — A

— verdadera

$$x = \underline{1}, \quad A = (\underbrace{\underline{1} \to 0}_{0}) \to (\neg \underline{1}) = \underline{1}$$

$$x = 0 \quad A = (\underbrace{0 \to 0}_{\underline{1}}) \to (\underbrace{\neg 0}_{\underline{1}}) = \underline{1}$$

Formulas proposicionales

Formulas proposicionales

- Formulas algebraicas: $(x+y)(x-y), xy+x$.

Formulas proposicionales

- Formulas algebraicas: $(x+y)(x-y), xy+x$.
- Podemos sustituir variables por números y obtener el valor numérico:

$$x \leftarrow 1, y \leftarrow 2, \qquad (x+y)(x-y) \leftarrow (1+2)(1-2) = -3.$$

Formulas proposicionales

- Formulas algebraicas: $(x+y)(x-y), xy+x$.
- Podemos sustituir variables por números y obtener el valor numérico:

$$x \leftarrow 1, y \leftarrow 2, \qquad (x+y)(x-y) \leftarrow (1+2)(1-2) = -3.$$

- Así mismo existen *fórmulas proposicionales*.

Formulas proposicionales

- Formulas algebraicas: $(x+y)(x-y), xy+x$.
- Podemos sustituir variables por números y obtener el valor numérico:

$$x \leftarrow 1, y \leftarrow 2, \qquad (x+y)(x-y) \leftarrow (1+2)(1-2) = -3.$$

- Así mismo existen *fórmulas proposicionales*.
- Se construyen a través de conectivos y *variables proposicionales*.

Formulas proposicionales

- Formulas algebraicas: $(x+y)(x-y), xy+x$.
- Podemos sustituir variables por números y obtener el valor numérico:

$$x \leftarrow 1, y \leftarrow 2, \qquad (x+y)(x-y) \leftarrow (1+2)(1-2) = -3.$$

- Así mismo existen *fórmulas proposicionales*.
- Se construyen a través de conectivos y *variables proposicionales*.
- Por ejemplo $(A \vee B) \rightarrow C$

$$A \leftarrow (\pi > 0), \qquad B \leftarrow (\pi \in \mathbb{Q}), \qquad C \leftarrow (2 \cdot 2 = 5)$$
$$(A \vee B) \rightarrow C \leftarrow \Big[((\pi > 0) \vee (\pi \in \mathbb{Q})) \rightarrow (2 \cdot 2 = 5)\Big]$$

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...
- $Prop = \Big[(\mathrm{P}{=}\mathrm{NP} \to (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \to (\neg(\mathrm{P}{=}\mathrm{NP}))\Big].$

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...
- $Prop = \Big[(\text{P=NP} \to (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \to (\neg(\text{P=NP}))\Big].$
- $(A \to (B \vee C)) \to (\neg A)$ recibe el valor *Prop* cuando

$$A \leftarrow [P = NP], \qquad B \leftarrow [\pi \in \mathbb{Q}], \qquad C \leftarrow [\pi < 0].$$

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...
- $Prop = \Big[(\mathsf{P}{=}\mathsf{NP} \to (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \to (\neg(\mathsf{P}{=}\mathsf{NP}))\Big].$

Repetición de las variables

- Variables pueden repetirse...
- $Prop = \Big[(\mathrm{P{=}NP} \to (\pi \in \mathbb{Q} \vee \pi < 0)) \to (\neg(\mathrm{P{=}NP}))\Big]$.
- La formula $(A \to (B \vee C)) \to (\neg A)$ recibe el valor *Prop* cuando

$$A \leftarrow [P = NP], \qquad B \leftarrow [\pi \in \mathbb{Q}], \qquad C \leftarrow [\pi < 0].$$

Equivalencias lógicas

- existen leyes (igualdades, equivalencias) para fórmulas algebraicas, tal cómo $x + y = y + x$, $(x + y)z = xz + yz$.

Equivalencias lógicas

- existen leyes (igualdades, equivalencias) para fórmulas algebraicas, tal cómo $x + y = y + x$, $(x + y)z = xz + yz$.
- Así mismo existen *equivalencias lógicas* para fórmulas proposicionales.

Equivalencias lógicas

- existen leyes (igualdades, equivalencias) para fórmulas algebraicas, tal cómo $x + y = y + x$, $(x + y)z = xz + yz$.
- Así mismo existen *equivalencias lógicas* para fórmulas proposicionales.

Definición

Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si para cada posible valor de verdad de sus variables, ϕ es verdadera si y solo si ψ es verdadera.

Equivalencias lógicas

- existen leyes (igualdades, equivalencias) para fórmulas algebraicas, tal cómo $x + y = y + x$, $(x + y)z = xz + yz$.
- Así mismo existen *equivalencias lógicas* para fórmulas proposicionales.

Definición

Dos fórmulas proposicionales ϕ *y* ψ *son equivalentes si para cada posible valor de verdad de sus variables,* ϕ *es verdadera si y solo si* ψ *es verdadera.*

Notamos $\phi = \psi$

Conmutatividad y asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$A \vee B = B \vee A, \qquad A \wedge B = B \wedge A,$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), \qquad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

Conmutatividad y asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$A \vee B = B \vee A, \qquad A \wedge B = B \wedge A,$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), \qquad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

Eso nos permite escribir sin paréntesis:
$A \vee B \vee C, \qquad X \wedge Y \wedge Z \wedge T.$

Conmutatividad y asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$A \vee B = B \vee A, \qquad A \wedge B = B \wedge A,$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), \qquad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

Eso nos permite escribir sin paréntesis:
$A \vee B \vee C, \qquad X \wedge Y \wedge Z \wedge T.$

Demostración.

$\wedge$ y $\vee$ no acotados

- Así mismo cómo con $+$ y $\cdot$ de números:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

$\wedge$ y $\vee$ no acotados

- Así mismo cómo con $+$ y $\cdot$ de números:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

- ...se puede escribir $\vee$ y $\wedge$ de n proposiciones así:

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n = \bigvee_{i=1}^{n} P_i, \qquad Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n = \bigwedge_{i=1}^{n} Q_i$$

$\wedge$ y $\vee$ no acotados

- Así mismo cómo con $+$ y $\cdot$ de números:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

- ...se puede escribir $\vee$ y $\wedge$ de n proposiciones así:

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n = \bigvee_{i=1}^{n} P_i, \qquad Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n = \bigwedge_{i=1}^{n} Q_i$$

- ¿Es verdad $\bigwedge_{i=1}^{90} \bigvee_{j=i}^{i+9} (j \text{ es primo})$?

$\wedge, \vee$ y $0, 1$

- $A \wedge 1 =$

$\wedge, \vee$ y $0, 1$

- $A \wedge 1 = A$.
- $A \wedge 0 =$

$\wedge, \vee$ y $0, 1$

- $A \wedge 1 =$ A.
- $A \wedge 0 =$ 0.
- $A \vee 1 =$

$\wedge, \vee$ y $0, 1$

- $A \wedge 1 =A$.
- $A \wedge 0 =0$.
- $A \vee 1 =1$.
- $A \vee 0 =$

$\wedge, \vee$ y $0, 1$

- $A \wedge 1 = A$.
- $A \wedge 0 = 0$.
- $A \vee 1 = 1$.
- $A \vee 0 = A$

Distributividad

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \qquad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (A \vee C)$$

Distributividad

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$(A\vee B)\wedge C = (A\wedge C)\vee(B\wedge C) \qquad (A\wedge B)\vee C = (A\vee C)\wedge(A\vee C)$$

Demostración 1.

A	B	C	$A\vee B$	$(A\vee B)\wedge C$	$A\wedge C$	$B\wedge C$	$(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Distributividad

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \qquad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (A \vee C)$$

Demostración 2.

$\square$

Distributividad

Teorema

Tenemos las siguientes equivalencias lógicas:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \qquad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (A \vee C)$$

Demostración 2.

$\square$

Simplificacion de formulas

¿tiene la formula:

$$(X \wedge A) \vee (X \wedge B) \vee (Y \wedge B) \vee (Y \wedge A)$$

una fórmula equivalente donde todas las variables aparecen una vez?

Otras equivalencias

Teorema (Doble negación)

$\neg\neg A = A.$

Teorema (Ley de Morgan)

$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B).$

Teorema (Ley de absorción)

$A \vee (A \wedge B) = A, \qquad A \wedge (A \vee B) = A.$

Teorema (Ley de dedución)

$A \to (B \to C) = (A \wedge B) \to C$

Necesidad de los paréntesis

- ¿Porque no son equivalentes $(A \wedge B) \vee C$ y $A \wedge (B \vee C)$?

Necesidad de los paréntesis

- ¿Porque no son equivalentes $(A \wedge B) \vee C$ y $A \wedge (B \vee C)$?

- ¿Porque no son equivalentes $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ y $A \rightarrow (B \rightarrow C)$?

Necesidad de los paréntesis

- ¿Porque no son equivalentes $(A \wedge B) \vee C$ y $A \wedge (B \vee C)$?

- ¿Porque no son equivalentes $(A \to B) \to C$ y $A \to (B \to C)$?

Teorema (lectura única, informal)

Si cada uso de un conectivo está rodeado con paréntesis:

$$(\neg \phi), \qquad (\phi \wedge \psi), \qquad (\phi \vee \psi), \qquad (\phi \to \psi),$$

entonces cada formula proposicional admite el único orden de lectura.

Necesidad de los paréntesis

- ¿Porque no son equivalentes $(A \wedge B) \vee C$ y $A \wedge (B \vee C)$?

- ¿Porque no son equivalentes $(A \to B) \to C$ y $A \to (B \to C)$?

Teorema (lectura única, informal)

Si cada uso de un conectivo está rodeado con paréntesis:

$$(\neg\phi), \qquad (\phi \wedge \psi), \qquad (\phi \vee \psi), \qquad (\phi \to \psi),$$

entonces cada formula proposicional admite el único orden de lectura.

Formalezaremos y probaremos en el tema "inducción estractural".

¡Gracias!