Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Correctores Interrogación 2

17 de noviembre de 2025

Duración: 2:30 hrs.

Pregunta 1

Use inducción para demostrar que para todo $n \geq 1$, se cumple que $n^3 - n$ es divisible por 3.

Nota: Recuerde que a es divisible por b si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot k$.

Solución

Caso Base: Para $n = 1$, tenemos que $n^3 - n = 0$, lo cual es divisible por 3 (ya que $0 = 3 \cdot 0$).

Paso inductivo: Sea $n \geq 1$, y supongamos que $n^3 - n$ es divisible por 3. Demostraremos que la propiedad se cumple para $n + 1$, vale decir, que $(n + 1)^3 - (n + 1)$ es divisible por 3. Por hipótesis inductiva, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n^3 - n = 3 \cdot k$. Desarrollando la expresión $(n + 1)^3 - (n + 1)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - (n+1) &= (n^2 + 2n + 1)(n + 1) - n - 1 \\
&= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 - n - 1 \\
&= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n \\
&= 3 \cdot k + 3n^2 + 3n \qquad \text{(HI)} \\
&= 3 \cdot (k + n^2 + n)
\end{aligned}$$

Concluimos que $(n + 1)^3 - (n + 1)$ es divisible por 3.

Puntaje:
1.0 pts por el caso base. 5.0 pts por el paso inductivo.

Pregunta 2

Sea $\leq$ un orden parcial sobre un conjunto A. Defina la relación $\sim$ sobre $\mathcal{P}(A)$ de la siguiente forma. Para cada $B, C \in \mathcal{P}(A)$:

$$\begin{aligned}
&B \sim C \quad \text{si y sólo si,} \\
&\qquad\qquad \text{para cada } b \in B, \text{existe } c \in C \text{ tal que } b \leq c \quad \text{y} \quad \text{para cada } c \in C, \text{ existe } b \in B \text{ tal que } c \leq b.
\end{aligned}$$

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(A)$.

Nota: Recuerde que un orden parcial es una relación refleja, antisimétrica y transitiva.

Solución

Debemos verificar que $\sim$ es refleja, simétrica y transitiva.

Refleja: Sea $B \in \mathcal{P}(A)$. Tenemos que para cada $b \in B$, se cumple que $b \leq b$, ya que $\leq$ es refleja. Luego, para cada $b \in B$, existe $c \in B$ tal que $b \neq c$. (basta tomar $c = b$.). Concluimos que $B \sim B$.

Simétrica: Notar que $B \sim C$ implica $C \sim B$ ya que la conjunción es conmutativa. Formalmente:

$$\begin{aligned} B \sim C &\implies \text{para cada } b \in B, \text{ existe } c \in C \text{ tal que } b \leq c \quad \text{y} \quad \text{para cada } c \in C, \text{ existe } b \in B \text{ tal que } c \leq b \\ &\implies \text{para cada } c \in C, \text{ existe } b \in B \text{ tal que } c \leq b \quad \text{y} \quad \text{para cada } b \in B, \text{ existe } c \in C \text{ tal que } b \leq c \\ &\implies C \sim B \end{aligned}$$

Transitiva: Supongamos que $B \sim C$ y $C \sim D$. Hay que demostrar que $B \sim D$. Sea $b \in B$ arbitrario. Como $B \sim C$, existe $c \in C$ tal que $b \leq c$. Como $C \sim D$, existe $d \in D$ tal que $c \leq d$. Como $\leq$ es transitiva, obtenemos que $b \leq d$. Obtenemos que para cada $b \in B$, existe $d \in D$ tal que $b \leq d$. Por otra parte, sea $d \in D$ arbitrario. Como $C \sim D$, existe $c \in C$ tal que $d \leq c$. Como $B \sim C$, existe $b \in B$ tal que $c \leq b$. Como $\leq$ es transitiva, obtenemos que $d \leq b$. Obtenemos que para cada $d \in D$, existe $b \in B$ tal que $d \leq b$. Concluimos que $B \sim D$.

Puntaje:
2.0 pts por reflexividad, 2.0 pts por simetria, 2.0 pts por transitividad.

Pregunta 3

Sea $f : A \to A$ una función de un conjunto A en A. Para cada $n \geq 1$, definimos la función $f^n : A \to A$ como:

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}$$

En otras palabras, f^n es la composición de f consigo misma, n veces.

(a) Demuestre que si para todo $a \in A$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(a) = a$, entonces f es inyectiva.

(b) Demuestre que la implicancia contraria no se cumple.

Solución

(a) Primero notemos que si $f^n(a) = a$ para $a \in A$ y $n \geq 1$, entonces $f^{nm}(a) = a$ para todo $m \geq 1$.

$$\begin{aligned} f^{nm}(a) &= \underbrace{f^n(f^n(\cdots f^n(a)))}_{m \text{ veces}} \\ &= \underbrace{f^n(f^n(\cdots f^n(a)))}_{m-1 \text{ veces}} \\ &\vdots \\ &= f^n(a) \\ &= a \end{aligned}$$

Supongamos que para todo $a \in A$, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(a) = a$. Debemos demostrar que f es inyectiva. Sean $a, b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$. Por hipótesis, existe $n, m \geq 1$ tal que $f^n(a) = a$ y $f^m(b) = b$. Como

$f(a) = f(b)$, podemos aplicar f^{nm-1} a ambos lados, y obtenemos que $f^{nm}(a) = f^{nm}(b)$. Por la observación anterior, obtenemos que $a = f^{nm}(a) = f^{nm}(b) = b$.

(b) Podemos tomar la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n + 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La función es claramente inyectiva, y no cumple la condición, ya que si tomamos $a = 0$, tenemos que $f^n(0) = n > 0$, para cada $n \geq 1$.

Puntaje:
3.0 pts por parte (a), 3.0 pts por parte (b). En parte (b), si la función que dan es una función conocida, no es necesario mostrar que es inyectiva (está bien si sólo dicen que es inyectiva).

Pregunta 4

Demuestre que no existe un conjunto infinito A tal que $\mathcal{P}(A)$ es enumerable.

Solución

Por contradicción, supongamos que existe un conjunto infinito A tal que $\mathcal{P}(A)$ es enumerable. Como $\mathcal{P}(A)$ es enumerable, tenemos que $\mathcal{P}(A) \approx \mathbb{N}$, y luego $\mathcal{P}(A) \preceq \mathbb{N}$. Como A es infinito, tenemos que $\mathbb{N} \preceq A$. Como $\preceq$ es transitiva, concluimos que $\mathcal{P}(A) \preceq A$. Esto contradice el teorema de Cantor (para todo A, $A \prec \mathcal{P}(A)$).

Observaciones generales:

- Aplicar criterio. Si la solución tiene las ideas principales y va en la dirección correcta, pero hay algunos errores, no bajar tanto puntaje.
- Siempre llegan soluciones, que pueden estar correctas, y son distintas a la pauta. Ojo con eso. No bajar puntaje sólo porque la solución no es igual a la de la pauta.