Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 1 - Lógica Proposicional

8 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

Resumen

- **¿Qué es la lógica proposicional?:**

  Es un sistema que busca obtener conclusiones a partir de premisas. Los elementos más simples (letras 'p', 'q' u otras) representan proposiciones o enunciados. Los conectivas lógicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$), representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

- **Semántica:**

  Una valuación o asignación de verdad para las variables proposicionales en un conjunto P es una función $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, donde '0' equivale a 'falso' y '1' a verdadero.

- **Tablas de verdad:**

  Las fórmulas se pueden representar y analizar en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- **Equivalencia lógica** $\equiv$

  Dos fórmulas son lógicamente equivalentes (denotado como $\alpha \equiv \beta$) si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$

- **Leyes de equivalencia**

  1. Doble negación:
     $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$
  2. De Morgan:
     $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$
     $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$
  3. Conmutatividad:
     $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
     $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  4. Asociatividad:
     $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
     $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$
  5. Distributividad:
     $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
     $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
  6. Idempotencia:
     $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
     $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$
  7. Absorción:
     $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
     $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
  8. Implicancia:
     $\alpha \rightarrow \beta \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$
  9. Doble implicancia:
     $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

- **Formas Normales DNF y CNF**

  DNF:

  Una fórmula proposicional φ está en form normal disyuntiva (DNF) si es de la forma:

  $$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

  Donde cada l_{ij} es un literal, es decir una variable proposicional o su negación.

  Por ejemplo:

  $$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$$

  CNF

  Una fórmula proposicional φ está en forma normal conjuntiva (CNF) si es de la forma:

  $$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

Por ejemplo:

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg s)$$

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en DNF y otra en CNF.

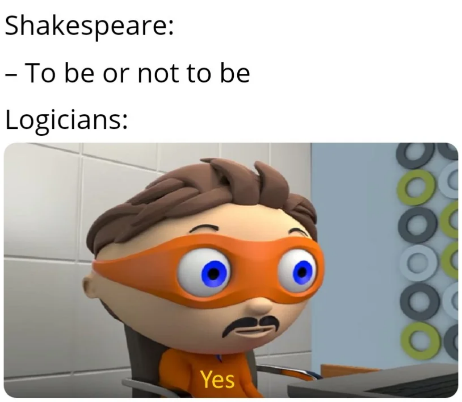
- **Conectivos funcionalmente completos**

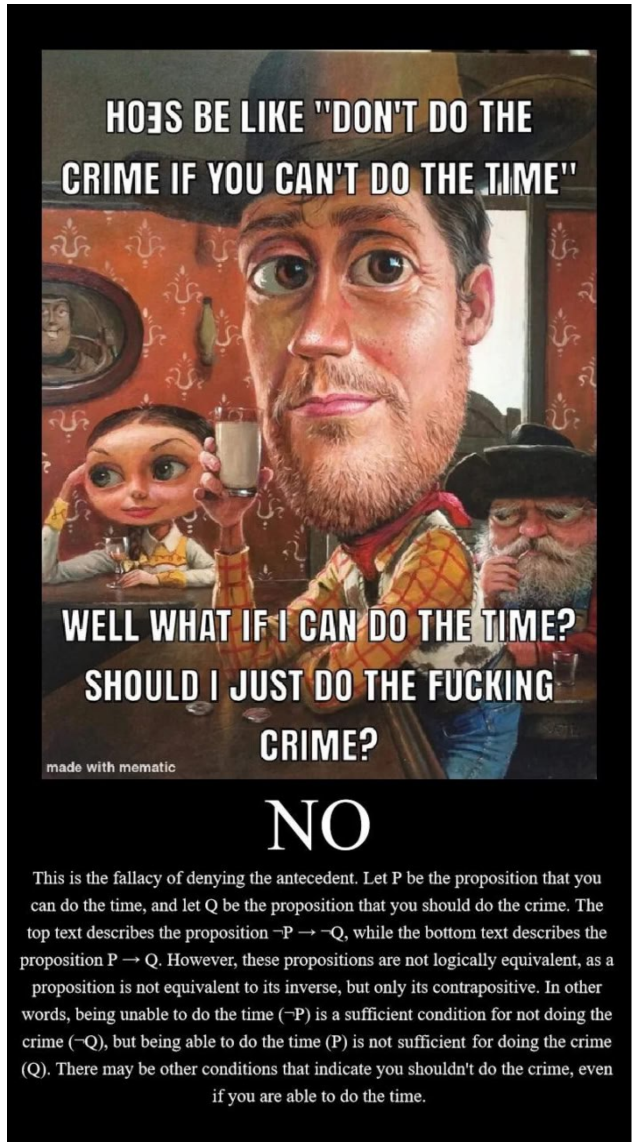
  Un conjunto de conectivos lógicos se dice funcionalmente completo si toda fórmula en L(P) es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo usa esos conectivos.

  Ejemplos:

  - $\{\neg, \wedge, \vee\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \rightarrow\}$

1. Memes del día





2. Tabla de verdad

El conectivo ternario EQ se define como:

$$\sigma(EQ(\varphi,\psi,\theta)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3\cdot(\sigma(\psi)+\sigma(\theta)) - 5\cdot\sigma(\varphi) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la tabla de verdad de EQ.

3. Equivalencia Lógica

Demuestre usando leyes de equivalencia lógica que

$$(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$$

4. CNF, DNF y Tabla de verdad

(a) Encuentre fórmulas en CNF y DNF que sean equivalentes a $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s)$.

(b) Definimos el conectivo ternario $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$ de manera que $\texttt{Mayoria}(p, q, r) = 1$ si y sólo si el valor que más aparece entre p, q y r es 1. Escriba la tabla de verdad para $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$.

(c) Escriba una fórmula que use sólo los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y que sea equivalente a $\texttt{Mayoria}(p, q, r)$.