IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

03.11.2025

Hoy...

Enumerabilidad: cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Repaso

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Repaso

Definición

Un conjunto A *es* **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$ *para todo conjunto* A.

Repaso

Definición

Un conjunto A es **enumerable** *si* $\mathbb{N} \approx A$

Teorema (Cantor)

$A \prec \mathcal{P}(A)$ *para todo conjunto A.*

Corolario

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *no es enumerable.*

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f: A \to B$. $= \{f: \mathbb{N} \to X\}$

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f: \mathbb{N} \to X \qquad\qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

El conjunto de funciones

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f : \mathbb{N} \to X \qquad\qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

Lemma

Si $A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2$, entonces $B_1^{A_1} \approx B_2^{A_2}$.

Secuencias y subconjuntos

Proposición

$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$S \subseteq \mathbb{N} \longmapsto f(S)_0\, f(S)_1\, f(S)_2, \ldots$

$\{0,2,4,6,8,\ldots\} \longmapsto 101010\ldots$

$S \mapsto f(S) = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

$100100\ldots \longleftarrow S$

Teorema

$\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Demostración.

Parte 1: $\mathbb{R} \preceq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Se saben que

para cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$

$\exists \{q_i \in \mathbb{Q}\}_{i=0}^{+\infty}$ tal que $\alpha = \lim_{i \to \infty} q_i$.

$\mathbb{R} \precsim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \precsim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Secuencias infinitas de racionales.

$\square$

Teorema
$\mathbb{R} \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Demostración.
Parte 2: $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \preceq \mathbb{R}$ $\square$

Teorema

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}.$

Corolario

Demuestre que $A \approx \mathbb{R}$, donde

- *A es el conjunto de los círculos en el plano*
- *A es el conjunto de los hexágonos en el plano.*

¡Gracias!