Problema 1 Demuestre que $2^n \geq n^2$ para todos los números naturales $n \geq 4$.

Base de inducción $n=4$ $\quad 2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$

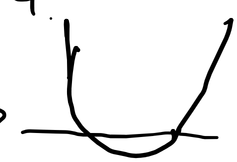
- afirmación es cierta para $n=4$.

Paso inductivo. Hay que mostrar, para todo $n \geq 4$ natural

$2^n \geq n^2 \to 2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Si ya tenemos $2^n \geq n^2$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \underset{\text{por hipótesis inductiva}}{\geq} 2 \cdot n^2$ nos falta mostrar $2n^2 \geq (n+1)^2$ para $n \geq 4$.



$\cancel{2n^2 \geq n^2+}$ $\quad 2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2+2n+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-2n-1 \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)^2-2 \geq 0$

lo último es cierto para $n \geq 4$ $\quad (n-1)^2 \geq 9$

Problema 3 Definimos:

$$x_n = \underbrace{\log_2(5 + \log_2(5 + \log_2(\ldots + \log_2(5))))}_{n}$$

(hay n símbolos $\log_2$ en la expresión).

a) Demuestre que $x_n < 3$ para todo $n \geq 1$.

b) Demuestre que la secuencia $x_1, x_2, x_3, \ldots$ crece.

$X_1 = \log_2(5)$

$X_2 = \log_2(5 + \log_2 5)$

$X_3 = \log_2(5 + \log_2(5 + \log_2 5)))$

$X_n < 3$ para todo $n \geq 1$

Parte a) base $X_1 = \log_2(5) < \log_2(8) = 3$

paso inductivo $X_n < 3 \rightarrow X_{n+1} < 3$ para todo $n \geq 1$.

$X_{n+1} = \log_2(5 + \underbrace{\log_2(5 + \log_2(\ldots \log_2(5))))}_{n}) =$

$= \log_2(5 + X_n) < \log_2(5+3) = 3$

por hipótesis

b) $X_n < X_{n+1}$ para todo $n \geq 1$

base $x_1 = \log_2(5)$ $x_2 = \log_2(5 + \log_2(5)) > \log_2(5) = x_1$

paso inductivo $X_n < X_{n+1} \rightarrow X_{n+1} < X_{n+2}$

$X_{n+2} = \log_2(5 + X_{n+1})$

$\vee$ — por hipótesis inductiva.

$X_{n+1} = \log_2(5 + X_n)$

Problema 6 Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A tal que la relación $\not\sim$ es transitiva. Demuestre que $x \sim y$ para todos $x, y \in A$.

$\sim$ es una relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

a) refleja $\iff$ $a \sim a$ $\forall a \in A$

b) simetrica $\iff$ $a \sim b \leftrightarrow b \sim a$ $\forall a, b \in A$

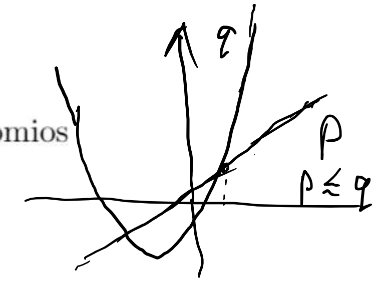
c) transitiva $\iff$ $a \sim b, b \sim c \to a \sim c$ $\forall a, b, c \in A$.

$a \not\sim b \iff \neg(a \sim b)$

transitiva

Asumimos $\exists a, b \in A$ tal que $\underline{a \not\sim b}$. Por simetría de $\sim$, tenemos $\underline{b \not\sim a}$.

$\Rightarrow$ por transitividad de $\not\sim$, $a \not\sim a$. Eso ~~con~~ es una contradicción porque $\sim$ es refleja.



Problema 8 Sea $\preceq$ la siguiente relación sobre $\mathbb{R}[x]$ (conjunto de polinomios reales de una variable x):

$$p \preceq q \iff \exists c \in \mathbb{R}\ p(x) \le q(x) \text{ para todo } x \ge c.$$

Demuestre que $\preceq$ es un orden lineal (*hint: use el hecho de que todo polinomio no cero tiene un número finito de raíces*).

a) $\preceq$ es refleja porque $p(x) = p(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

b). $p \preceq q,\ q \preceq p \Rightarrow p = q$.

$\Downarrow$ $\Rightarrow \exists c_2\ \forall x \ge c_2\ q(x) \le p(x)$.

$\exists c_1\ \forall x \ge c_1\ p(x) \le q(x)$

$c_3 = \max\{c_1, c_2\}$. $\forall x \ge c_3\ p(x) = q(x)$

~~$p(x) \le q(x)$~~, $q(x)$

$\Rightarrow p(x) - q(x)$ tiene infinito número de raíces $\Rightarrow p(x) - q(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\exists c_1\ \forall x \ge c_1\ p(x) \le q(x)$. $\exists c_2\ \forall x \ge c_2\ q(x) \le z(x)$

$\Rightarrow c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ $\forall x \ge c_3$ $p(x) \le q(x)$, $q(x) \le z(x)$ $\Rightarrow p \preceq z$.

~~a) ref~~

a) refleja $p \preceq p$

b) antisimetrica

$p \preceq q,\ q \preceq p \Rightarrow p = q$.

c) transitiva

$p \preceq q,\ q \preceq z \Rightarrow p \preceq z$

} ordenes parciales

} orden total (a.k.a lineal)

d) conexa $\forall\ p, q$

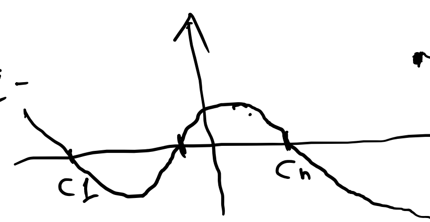
$p \preceq q \lor q \preceq p$

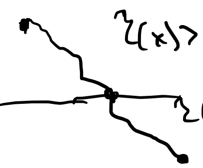
$z(x) = p(x) - q(x)$

Caso $z(x)$ es un polinomio 0 $\Rightarrow p = q$.

Caso2 $z(x)$ no es un polinomio 0 $\Rightarrow$

$c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ su raices





$z(x) > 0$ $\forall x > c_n \Rightarrow q \preceq p$

$z(x) < 0$ $\forall x > c_n$ $\Rightarrow p \preceq q$.

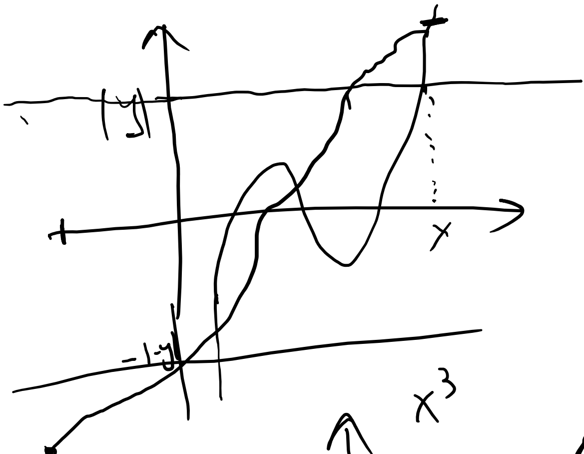
Problema 18 ¿Bajo qué condiciones sobre los números $a, b, c \in \mathbb{R}$ la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es inyectiva, bajo cuáles es sobreyectiva y bajo cuáles es biyectiva?

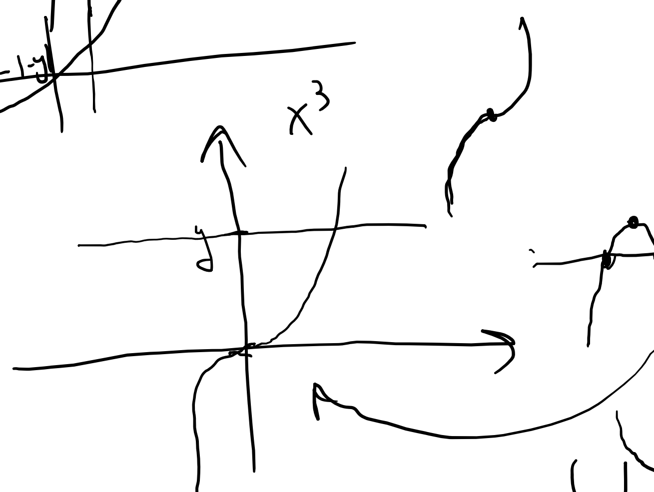
a) Es sobreyectiva para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

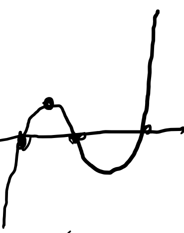
Tomamos $y \in \mathbb{R}$ arbitrario $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow \exists x_1$ $f(x) \geq |y|$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \exists x_2$ $f(x) \leq -|y|$ $\Rightarrow$ Por el teorema de valor intermedio, la función toma también ~~todos~~ los valores entre $[-|y|, |y|]$.



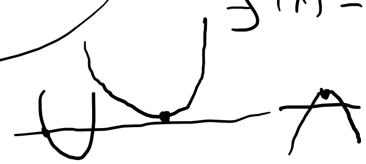




$x^3 + ax^2 + bx + c$

a, b, c

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \geq 0$



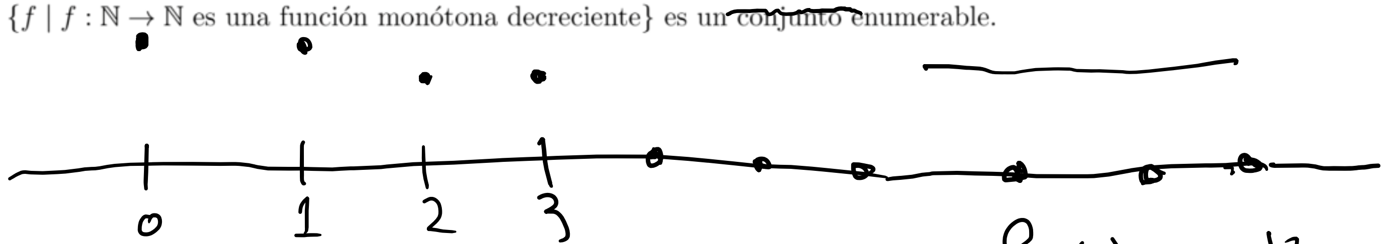
$D = 4a^2 - 4\cdot 3\cdot b \leq 0$

$a^2 \leq 3b$

$x^2 + \frac{2a}{3}\cdot x + \frac{b}{3} \geq 0$

$\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9} \geq 0$ $\quad \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9} \geq 0$ — Respuesta. Inyectiva $\Leftrightarrow$ biyectiva $\Leftrightarrow$ $a^2 \leq 3b$.

18. Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con el orden total usual $\leq$. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es monótona decreciente si para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$, se tiene que $f(n) \geq f(m)$. Demuestre que $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función monótona decreciente$\}$ es un conjunto enumerable.



$\mathcal{F} \precsim \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \precsim \mathcal{F}$.

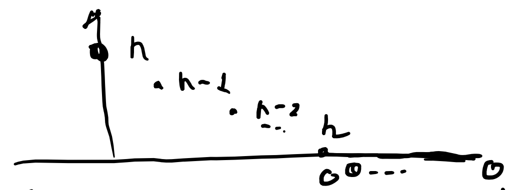
$\Uparrow$

$\mathcal{F}$ es infinito.

$f_n(x) = n \quad \forall x$

$f_n(0) = n$

$f_n(x) = \max\{0, n-x\}$



$\mathcal{F} \precsim \mathbb{N}^*$ $(3,2,1,1,1,\dots)$

$\mapsto (3,2,1)$

$(3,3,3,2,2,0,0,\dots)$

$\mapsto (3,3,3,2,2,0)$

23. Sea $\mathcal{T} = \{R \mid R \text{ es un orden total sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.