IIC1253 - Teoría de Conjuntos

Marcelo Arenas

Teorías en lógica de predicados

Las teorías matemáticas

La lógica de predicados nos permite definir una teoría.

Las teorías matemáticas

La lógica de predicados nos permite definir una teoría.

- Los axiomas que definen la teoría son expresados como un conjunto Σ de oraciones.

Las teorías matemáticas

La lógica de predicados nos permite definir una teoría.

- Los axiomas que definen la teoría son expresados como un conjunto Σ de oraciones.

La noción de consecuencia lógica nos permite formalizar la noción de teorema.

Las teorías matemáticas

La lógica de predicados nos permite definir una teoría.

- Los axiomas que definen la teoría son expresados como un conjunto Σ de oraciones.

La noción de consecuencia lógica nos permite formalizar la noción de teorema.

- Un teorema es expresado como una oración φ.

Las teorías matemáticas

La lógica de predicados nos permite definir una teoría.

- Los axiomas que definen la teoría son expresados como un conjunto Σ de oraciones.

La noción de consecuencia lógica nos permite formalizar la noción de teorema.

- Un teorema es expresado como una oración φ.
- El teorema φ es cierto en la teoría si $\Sigma \models \varphi$.

La teoría de conjuntos

La lógica de primer orden permite formalizar teorías de manera natural.

La teoría de conjuntos

La lógica de primer orden permite formalizar teorías de manera natural.

- Teorías sobre objetos con distintas propiedades: grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, ...

La teoría de conjuntos

La lógica de primer orden permite formalizar teorías de manera natural.

- Teorías sobre objetos con distintas propiedades: grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, ...

En este capítulo queremos formalizar un objeto fundamental en matemáticas: la noción de conjunto.

La teoría de conjuntos

La lógica de primer orden permite formalizar teorías de manera natural.

- Teorías sobre objetos con distintas propiedades: grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, ...

En este capítulo queremos formalizar un objeto fundamental en matemáticas: la noción de conjunto.

- La teoría de conjuntos se considera la base de las matemáticas.

La noción de conjunto

La noción intuitiva de conjunto

Un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos se llaman elementos del conjunto, y diremos que pertenecen a él.

La noción intuitiva de conjunto

Un conjunto es una colección de objetos. Estos objetos se llaman elementos del conjunto, y diremos que pertenecen a él.

¿Pero cómo se define colección, elemento y pertenencia?

La noción intuitiva de conjunto

- Colección:
- Elemento:
- Pertenencia:

La noción intuitiva de conjunto

- Colección: $\{a, b, c, d\}$
- Elemento:
- Pertenencia:

La noción intuitiva de conjunto

- Colección: $\{a, b, c, d\}$
- Elemento: a
- Pertenencia:

La noción intuitiva de conjunto

- Colección: $\{a, b, c, d\}$
- Elemento: a
- Pertenencia: $a \in \{a, b, c, d\}$

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$$\begin{aligned}
a &\in \{a, b\} \\
\{a\} &\in \{a, b\} \\
\{a\} &\in \{\{a\}, b\} \\
b &\in \{\{a\}, b\} \\
\{b\} &\in \{\{a\}, b\} \\
a &\in \{\{a\}\}
\end{aligned}$$

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	
$b \in \{\{a\}, b\}$	
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	
$a \in \{\{a\}\}$	

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	falso
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	
$b \in \{\{a\}, b\}$	
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	
$a \in \{\{a\}\}$	

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	falso
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$b \in \{\{a\}, b\}$	
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	
$a \in \{\{a\}\}$	

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	falso
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$b \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	
$a \in \{\{a\}\}$	

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	falso
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$b \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	falso
$a \in \{\{a\}\}$	

Conjuntos y elementos

Un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

- No vamos a distinguir entre estas nociones en la formalización de la teoría de conjuntos.

Ejemplos

¿Son las siguiente afirmaciones verdaderas o falsas?

$a \in \{a, b\}$	verdadero
$\{a\} \in \{a, b\}$	falso
$\{a\} \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$b \in \{\{a\}, b\}$	verdadero
$\{b\} \in \{\{a\}, b\}$	falso
$a \in \{\{a\}\}$	falso

Pertenencia

El concepto fundamental a definir en la teoría de conjuntos es la pertenencia.

Pertenencia

El concepto fundamental a definir en la teoría de conjuntos es la pertenencia.

- Tenemos que definir $\in$ con los axiomas de esta teoría.

El vocabulario de la teoría de conjuntos

El vocabulario de la teoría de conjuntos

El vocabulario de la teoría de conjuntos tiene un único predicado binario $\in$.

El vocabulario de la teoría de conjuntos

El vocabulario de la teoría de conjuntos tiene un único predicado binario $\in$.

- Utilizamos notación infija $a \in b$ para este predicado, en lugar de la notación $\in (a, b)$.

El vocabulario de la teoría de conjuntos

El vocabulario de la teoría de conjuntos tiene un único predicado binario $\in$.

- Utilizamos notación infija $a \in b$ para este predicado, en lugar de la notación $\in (a, b)$.
- Utilizamos la notación $a \notin b$ en lugar de $\neg\, a \in b$.

El vocabulario de la teoría de conjuntos

El vocabulario de la teoría de conjuntos tiene un único predicado binario $\in$.

- Utilizamos notación infija $a \in b$ para este predicado, en lugar de la notación $\in(a, b)$.
- Utilizamos la notación $a \notin b$ en lugar de $\neg\, a \in b$.

Las fórmulas además pueden utilizar el símbolo de igualdad $=$.

Axioma del vacío

La existencia del conjunto vacío

Queremos definir un axioma que indique que existe el conjunto vacío.

La existencia del conjunto vacío

Queremos definir un axioma que indique que existe el conjunto vacío.

- Este es el primer conjunto de nuestra teoría.

La existencia del conjunto vacío

Queremos definir un axioma que indique que existe el conjunto vacío.

- Este es el primer conjunto de nuestra teoría.

El axioma del vacío φ_{V} se define como:

$$\exists x \forall y \, (y \notin x)$$

La existencia del conjunto vacío

Cada variable en una fórmula representa a un conjunto.

La existencia del conjunto vacío

Cada variable en una fórmula representa a un conjunto.

- En la fórmula $\exists x \forall y \, (y \notin x)$ tanto x como y son conjuntos.

La existencia del conjunto vacío

Cada variable en una fórmula representa a un conjunto.

- En la fórmula $\exists x \forall y \, (y \notin x)$ tanto x como y son conjuntos.
- Recuerde que un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

La existencia del conjunto vacío

Para hacer más simple la notación, vamos a usar letras mayúsculas para conjuntos y letras minúsculas para elementos.

La existencia del conjunto vacío

Para hacer más simple la notación, vamos a usar letras mayúsculas para conjuntos y letras minúsculas para elementos.

- Recuerde que no distinguimos formalmente entre estas nociones.

La existencia del conjunto vacío

Para hacer más simple la notación, vamos a usar letras mayúsculas para conjuntos y letras minúsculas para elementos.

- Recuerde que no distinguimos formalmente entre estas nociones.
- La notación con mayúsculas y minúsculas es sólo para mejorar la legibilidad de las fórmulas.

La existencia del conjunto vacío

Para hacer más simple la notación, vamos a usar letras mayúsculas para conjuntos y letras minúsculas para elementos.

- Recuerde que no distinguimos formalmente entre estas nociones.
- La notación con mayúsculas y minúsculas es sólo para mejorar la legibilidad de las fórmulas.

Escribimos el axioma del vacío de la siguiente forma:

$$\varphi_{\mathsf{V}} \quad = \quad \exists A \forall x \, (x \notin A)$$

Axioma de extensionalidad

La igualdad entre conjuntos

Queremos definir un axioma que indique cuándo dos conjuntos son iguales.

La igualdad entre conjuntos

Queremos definir un axioma que indique cuándo dos conjuntos son iguales.

El axioma de extensionalidad φ_{E} se define como:

$$\forall A \forall B\, (\forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

Un primer teorema

Teorema

El conjunto vacío es único.

Un primer teorema

Teorema

El conjunto vacío es único. O equivalentemente,

$$\{\varphi_E\} \quad \models \quad \forall A \forall B\, ((\forall x\, (x \notin A) \wedge \forall y\, (y \notin B)) \rightarrow A = B)$$

Un primer teorema

Teorema

El conjunto vacío es único. O equivalentemente,

$$\{\varphi_E\} \quad \models \quad \forall A \forall B \, ((\forall x \, (x \notin A) \land \forall y \, (y \notin B)) \rightarrow A = B)$$

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Axioma de emparejamiento

Definición de conjuntos por extensión

Podemos definir los elementos de un conjunto por extensión, indicando uno a uno cuáles son sus elementos.

Definición de conjuntos por extensión

Podemos definir los elementos de un conjunto por extensión, indicando uno a uno cuáles son sus elementos.

- Queremos definir axiomas que nos permitan construir conjuntos de esta forma.

Definición de conjuntos por extensión

Podemos definir los elementos de un conjunto por extensión, indicando uno a uno cuáles son sus elementos.

- Queremos definir axiomas que nos permitan construir conjuntos de esta forma.

El axioma de emparejamiento φ_{P} se define como:

$$\forall x \forall y \exists A \forall z \,(z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\emptyset\}\}$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Algunos ejemplos de conjuntos

¿Qué conjuntos podemos construir con los axiomas anteriores?

- $\emptyset$
- $\{\emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{\{\emptyset\}\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

¿Podemos construir una cantidad infinita de conjuntos distintos?

Axioma de la unión

Definición de conjuntos por extensión

El axioma de emparejamiento nos permitía construir conjuntos con dos elementos.

Definición de conjuntos por extensión

El axioma de emparejamiento nos permitía construir conjuntos con dos elementos.

- Para construir conjuntos con más elementos vamos a utilizar la unión de conjuntos.

Definición de conjuntos por extensión

El axioma de emparejamiento nos permitía construir conjuntos con dos elementos.

- Para construir conjuntos con más elementos vamos a utilizar la unión de conjuntos.

Versión simple

El axioma simplificado de la unión φ_{US} se define como:

$$\forall A \forall B \exists C \forall x \, (x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$$

Algunos ejemplos de conjuntos (continuación)

Ejercicio

Explique cómo se puede construir el siguiente conjunto con los axiomas anteriores:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$$

Construcción de conjuntos finitos por extensión

El siguiente teorema nos dice que podemos extender el axioma de emparejamiento para construir por extensión un conjunto finito.

Construcción de conjuntos finitos por extensión

El siguiente teorema nos dice que podemos extender el axioma de emparejamiento para construir por extensión un conjunto finito.

Teorema

Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 1$, defina φ_P^k como:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_k \exists A \forall y \, (y \in A \leftrightarrow (y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_k)).$$

Entonces se tiene que:

$$\{\varphi_P, \varphi_{US}\} \quad \models \quad \varphi_P^k$$

Construcción de conjuntos finitos por extensión

Ejercicio

Para $k = 5$ tenemos que φ_{P}^{5} es la fórmula:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \exists A \forall y \, (y \in A \ \leftrightarrow \\ (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3 \vee y = x_4 \vee y = x_5)).$$

Demuestre que $\{\varphi_{\mathsf{P}}, \varphi_{\mathsf{US}}\} \models \varphi_{\mathsf{P}}^{5}$.