Unidad I: Lógica proposicional

Lógica proposicional: Formas normales, completitud funcional

Clase 02 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P.

Definición:

Una **fórmula proposicional** sobre P es una expresión que se puede construir aplicando las siguientes reglas:

- Cada variable proposicional p en P es una fórmula proposicional.
- Si φ es una fórmula proposicional, entonces $(\neg\varphi)$ es una fórmula proposicional.
- Si φ y ψ son fórmula proposicionales, entonces $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmula proposicionales.

Denotamos por $L(P)$ al conjunto de fórmulas proposicionales sobre P.

Ejemplo:

Sea $P = \{p, q, r\}$. Una posible fórmula proposicional en $L(P)$:

$$(q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q)$$

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P.

Definición:

Una **valuación** es una función $\sigma : P \to \{0, 1\}$.

En otras palabras:

Una valuación σ le asigna a cada variable p en P un valor de verdad $\sigma(p)$.

Ejemplos:

Sea $P = \{p, q, r\}$. Algunas valuaciones:

- $\sigma(p) = 0 \qquad \sigma(q) = 1 \qquad \sigma(r) = 0$
- $\sigma(p) = 1 \qquad \sigma(q) = 0 \qquad \sigma(r) = 0$

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P y valuación σ.

Queremos extender σ al conjunto de fórmulas proposicionales en $L(P)$.

Definición:

$$\sigma(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ o } \sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Asumimos dado un conjunto de variables proposicionales P y valuación σ.

Queremos extender σ al conjunto de fórmulas proposicionales en $L(P)$.

Definición:

$$\sigma(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma(\psi) = 0 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\varphi) = \sigma(\psi) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo:

Sea $P = \{p, q, r\}$ y valuación σ tal que $\sigma(p) = 0$, $\sigma(q) = 1$, $\sigma(r) = 0$.

$$\sigma((q \wedge (\neg r)) \to (p \wedge q)) = 0$$

Podemos representar y analizar fórmulas usando **tablas de verdad**:

p	q	r	$(q \wedge (\neg r)) \rightarrow (p \wedge q)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Cada **fila** corresponde a una **valuación**.
- En cada fila indicamos el valor de verdad de la fórmula para esa valuación.

Definición:

Dos fórmulas φ y ψ en $L(P)$ son **equivalentes** si para **cada** valuación σ, se cumple $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$.

En otras palabras: φ y ψ tienen la **misma** tabla de verdad.

Notación: $\varphi \equiv \psi$.

Para demostrar que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
basta demostrar que las tablas de verdad son las mismas.

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Repaso: Equivalencias útiles

Ley de doble negación:

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

Leyes de De Morgan:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

Leyes de conmutatividad:

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

Repaso: Equivalencias útiles

Leyes de asociatividad:

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

Leyes de distributividad:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

Ley de implicancia:

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

Ley de doble implicancia:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Considere la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	$T(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

¿Hay alguna fórmula proposicional que tenga esta tabla de verdad?

Observación: A $T(p,q,r)$ también se le llama conectivo ternario.

- Como $\wedge$ es asociativo, omitiremos paréntesis en caso de conjunciones:
  - Escribimos $p \wedge q \wedge r$, en vez de $(p \wedge q) \wedge r$.
- Como $\vee$ es asociativo, omitiremos paréntesis en caso de disyuciones:
  - Escribimos $p \vee q \vee r$, en vez de $(p \vee q) \vee r$.
- La negación tiene **mayor precedencia** que los otros conectivos:
  - Escribimos $\neg p \wedge q$, en vez de $(\neg p) \wedge q$.
  - Escribimos $\neg p \vee q$, en vez de $(\neg p) \vee q$.
- Utilizaremos operadores generalizados $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ y $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$:
  - $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ es una abreviación de $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$.
  - $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ es una abreviación de $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

p	q	r	$T(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Estrategia:

Para cada valuación donde la tabla es verdadera,
escribimos una fórmula que se hace verdadera **solamente** en esa valuación.

Tomamos la disyunción de **todas** estas fórmulas.

	p	q	r	$T(p,q,r)$
	0	0	0	0
	0	0	1	0
	0	1	0	0
σ_1	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	1	1
	1	1	0	1
	1	1	1	1

¿Cuál sería la fórmula para la valuación σ_1 en amarillo?

$$\neg p \wedge q \wedge r$$

	p	q	r	$T(p,q,r)$	$\neg p \wedge q \wedge r$
	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	1	0	0	0
σ_1	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0
	1	0	1	1	0
	1	1	0	1	0
	1	1	1	1	0

¿Cuál sería la fórmula para la valuación σ_1 en amarillo?

$$\neg p \wedge q \wedge r$$

	p	q	r	$T(p,q,r)$
	0	0	0	0
	0	0	1	0
	0	1	0	0
	0	1	1	1
	1	0	0	0
σ_2	1	0	1	1
σ_3	1	1	0	1
σ_4	1	1	1	1

¿Cuáles serían las fórmulas para las otras valuaciones $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ en amarillo?

$p \wedge \neg q \wedge r$ $\qquad$ $p \wedge q \wedge \neg r$ $\qquad$ $p \wedge q \wedge r$

p	q	r	$T(p,q,r)$	φ
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

La fórmula final φ es la siguiente:

$$\varphi = (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Podemos generalizar lo idea anterior a **toda** tabla o conectivo *n*-ario $C(p_1, \dots, p_n)$.

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, \dots, p_n)$
σ_1	0	0	$\cdots$	0	0	b_1
σ_2	0	0	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
σ_{2^n}	1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

La siguiente fórmula φ tiene la misma tabla de verdad que $C(p_1, \dots, p_n)$.
(σ_i es la valuación en la fila i)

$$\varphi = \bigvee_{\substack{i=1,\dots,2^n \\ b_i=1}} \left(\bigwedge_{\substack{k=1,\dots,n \\ \sigma_i(p_k)=1}} p_k \wedge \bigwedge_{\substack{k=1,\dots,n \\ \sigma_i(p_k)=0}} \neg p_k \right)$$

Acabamos de probar lo siguiente:

Teorema:

Toda tabla de verdad puede ser representada por una fórmula proposicional.

Una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si φ es de la forma:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$$

donde cada $\ell_{i,j}$ es un **literal**, esto es, una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplos:

- $(p \wedge \neg r) \vee (r \wedge q \wedge \neg s \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge s \wedge r)$ ✓
- $(\neg p \wedge q) \vee r$ ✓
- $(p \vee \neg r) \wedge r$ ✗

Formas normales: DNF

Teorema:

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en DNF.

Esto ya lo demostramos! (¿por qué?)

Una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si φ es de la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$$

donde cada $\ell_{i,j}$ es un **literal**, esto es, una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplos:

- $(\neg r \vee q \vee \neg s \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee s \vee q)$
- $(p \vee \neg r) \wedge r$

Teorema:

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en CNF.

¿Cómo demostramos esto?

- Leyes de De Morgan generalizadas:

$$\neg\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\Big) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i$$

$$\neg\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i\Big) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\varphi_i$$

- También podemos usar leyes de distributividad generalizadas.

  Ejemplo:

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge (\beta_1 \vee \beta_2) \equiv (\alpha_1 \wedge \beta_1) \vee (\alpha_1 \wedge \beta_2) \vee (\alpha_2 \wedge \beta_1) \vee (\alpha_2 \wedge \beta_2)$$

Teorema:

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en CNF.

Demostración:

Sea φ una fórmula arbitraria.

Sabemos que $\neg\varphi$ es equivalente a una fórmula $\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}$ en DNF.

(por teorema anterior.)

Entonces, tenemos que:

$$\varphi \equiv \neg(\neg\varphi) \equiv \neg\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}\Big) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\Big(\bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{i,j}\Big) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \neg\ell_{i,j} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} \ell'_{i,j}$$

donde $\ell'_{i,j}$ es un literal.
(si $\ell_{i,j} = p$, entonces $\ell'_{i,j} = \neg p$; si $\ell_{i,j} = \neg p$, entonces $\ell'_{i,j} = p$.)

Concluimos que φ es equivalente a una fórmula en CNF.

Teorema:

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en CNF.

Comentarios:

- Otra posible demostración es utilizando distributividad generalizada. (¿cómo sería?)
- ¿Cómo demostraría el teorema, **sin** usar el resultado para DNF?

¿Son necesarios todos los conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$?

Definición:

Un conjunto C de conectivos es **funcionalmente completo** si para **cada** conjunto P de variables proposicionales y **cada** fórmula proposicional φ en $L(P)$, **existe** una fórmula α tal que $\alpha \equiv \varphi$ y α sólo ocupa conectivos en C.

Ya demostramos que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo.

$\{\neg, \wedge\}$ y $\{\neg, \vee\}$ también son funcionalmente completos. (¿por qué?)

$\{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo

Sabemos que $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo.

Basta representar $\alpha \vee \beta$, usando sólo los conectivos en $\{\neg, \to\}$.

Notar que:

$$(\neg\alpha) \to \beta \;\equiv\; \neg(\neg\alpha) \vee \beta \;\equiv\; \alpha \vee \beta$$

Luego, $\alpha \vee \beta \equiv (\neg\alpha) \to \beta$.

Concluimos que $\{\neg, \to\}$ es funcionalmente completo.

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

¿Qué fórmula no podemos escribir con estos conectivos?

Demostremos que la fórmula $\neg p$ no se puede escribir con estos conectivos.
(acá tenemos $P = \{p\}$.)

Por contradicción, supongamos que existe una fórmula φ que sólo usa la variable p y sólo usa los conectivos en $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, tal que $\varphi \equiv \neg p$.
(φ no usa necesariamente todos los conectivos en $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.)

Tomemos la valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$.

Tenemos que:

- $\sigma(\neg p) = 0$.
- $\sigma(\varphi) = 1$, ya que $\sigma(\alpha * \beta) = 1$ si $\sigma(\alpha) = 1$ y $\sigma(\beta) = 1$, y $*$ es uno de los conectivos en $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Concluimos que φ **no** es equivalente a $\neg p$, lo cual es una contradicción.

¿Existe algún conectivo que sea funcionalmente completo por sí solo?

Definimos el conectivo binario NAND como:

p	q	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

¿A qué corresponde este conectivo?

NAND es funcionalmente completo

Teorema:

{NAND} es funcionalmente completo.

Demostración:

Sabemos que $\{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

Representamos $\neg$ y $\wedge$ usando NAND, con las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
\neg\varphi &\equiv \varphi \text{ NAND } \varphi \\
\varphi \wedge \psi &\equiv \neg(\varphi \text{ NAND } \psi) \\
&\equiv (\varphi \text{ NAND } \psi) \text{ NAND } (\varphi \text{ NAND } \psi)
\end{aligned}
$$