Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6

12 de septiembre de 2025

Caetano Borges, Manuel Villablanca, Elías Ayaach

Resumen

Conceptos importantes:

- Conjunto: es una colección bien definida de objetos, estos objetos se llaman elementos del conjunto y diremos que pertenecen a él.
- Subconjunto: Sean A y B conjuntos. Diremos que A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) si

$$\forall x(x \in A \to x \in B) \text{ (esto es si cada elemento de } A \text{ está en } B)$$

- Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Conjunto potencia: Dado un conjunto A, el conjunto de todos los subconjuntos de A corresponde a su conjunto potencia, $\mathcal{P}(A) := \{X | X \subseteq A\}$

Axioma de extensión: $\forall A \forall B$, $A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B)$. Observación: $\{x, x\} = \{x\}$

Axioma del conjunto vacío: $\exists X$ tal que $\forall x$, $x \notin X$. $X = \varnothing$.

Axioma de emparejamiento: sean A, B dos conjuntos entonces existe un conjutno C cuyos elementos son exactamente A y B.

Axioma de regularidad o fundación: cada conjunto $A \neq \varnothing$ tiene un elemento que no tiene elementos en común con A

Teoremas importantes:

- Para todo conjunto A se tiene que $\varnothing \subseteq A$.

- Existe un único conjunto vacío.

Operaciones:

- Unión: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A o en B corresponde a la unión de A y B ($A \cup B$),

  $$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **unión generalizada** como

  $$\bigcup S = \{x | \exists A \in S \text{ tal que } x \in A\}$$

- Intersección: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A y en B corresponde a la intersección de A y B ($A \cap B$),

  $$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

  Dado un conjunto de conjuntos S se define la **intersección generalizada** como

  $$\bigcap S = \{x | \forall A \in S \text{ se cumple que } x \in A\}$$

- Diferencia: dados dos conjuntos A y B, el conjunto de los elementos que están en A pero no en B corresponde a la diferencia de A y B ($A \backslash B$),

  $$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Leyes Si $A, B \subseteq U$ con U un conjunto bien definido

1. Absorción:
   $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$
2. Elemento neutro:
   $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap U = A$
3. Distributividad:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Asociatividad:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. Conmutatividad:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
6. Idempotencia:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
7. Leyes de De Morgan:
   $U \backslash (A \cup B) = (U \backslash A) \cap (U \backslash B)$

   $U \backslash (A \cap B) = (U \backslash A) \cup (U \backslash B)$
8. Elemento inverso:
   $A \cup (U \backslash A) = U$
   $A \cap (U \backslash A) = \varnothing$
9. Dominación:
   $A \cup U = U$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$

1. Propiedades

1. Sean $A, B \subseteq U$ con U un conjunto arbitrario. Demustre que se cumple o de un contra ejemplo

$$B = (A \cap (U \backslash B)) \cup ((U \backslash A) \cap B) \quad \iff \quad A = \varnothing.$$

2. Sean $A, B, C \subseteq U$ con U un conjunto arbitrario. Pruebe que:

   b.1) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

   b.2) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

   b.3) $[(A \cap B) \setminus (A \cap C)] = (A \cap B) \setminus ((U \backslash A) \cup C)$

2. Diferencia simétrica

Definimos la *diferencia simétrica* entre dos conjuntos A y B como:

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

Demuestre que si A, B y C son no vacíos, se cumple que.

$$\text{Si } A\Delta C = B \Delta C \text{ entonces } A = B$$

3. Axioma de Regularidad

1. Un conjunto y se llama un *elemento épsilon-mínimo* de un conjunto x si $y \in x$, pero no existe $z \in x$ tal que $z \in y$, o equivalentemente $x \cap y = \varnothing$. El *Axioma de Fundación* (también llamado *Axioma de Regularidad*) afirma que todo conjunto no vacío tiene un elemento épsilon-mínimo.

   Muestra que este axioma implica lo siguiente:

   a) No existe un conjunto x tal que $x \in x$.

   b) No existen conjuntos x e y tales que $x \in y$ y $y \in x$.

   c) No existen conjuntos x, y, z tales que $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$.

2. Para cualquier conjunto x, el *sucesor* de x se define como

$$x' = x \cup \{x\}.$$

   Muestra cómo usar el Axioma de Fundación para dar una prueba sencilla de que si $x' = y'$, entonces $x = y$.