



Guía 2 – Lógica de predicados

Problema 1 Retratar predicados $x|y$ y $x > y$ sobre el conjunto $D = \{1, 2, 3, 6\}$ (usando coordenadas cartesianas con ejes x y y). ¿Qué se puede notar? ¿Cómo se expresan estos predicados entre sí?

Problema 2 ¿Cuál es el tamaño de soporte del predicado $(x < y) \wedge (y < z)$ sobre el conjunto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (si es necesario, escriba un programa).

Problema 3 ¿Cómo obtener un predicado que siempre toma valor 1 usando conectivos lógicos y identificación y cambio de nombres de los parámetros, a partir del predicado $x < y$ (digamos, sobre $D = \mathbb{R}$)?

Problema 4 ¿Qué predicado $R(x, y)$ sobre $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ calcula el siguiente código en Python?

```
[2] def R(x,y):  
    res = 0  
    for i in range(10):  
        if x == y + i:  
            res = 1  
    return res
```

Problema 5 Considere este predicado sobre \mathbb{Z}

$$Q(x) = \exists a \exists b \exists u \exists v (b \cdot u = x) \wedge (a \cdot v = b) \wedge (\neg(b = x)) \wedge (\neg(a = b)) \wedge (\neg(a = x)).$$

- Definir la valor de verdad de $Q(0), Q(4), Q(-3)$.
- Definit todos los $a \in \mathbb{Z}$ tal que $Q(a) = 0$.

Problema 6 Expresar los siguientes predicados sobre el dominio $D = \mathbb{Z}$ a través de conectivos lógicos y cuantificadores, a partir de predicados $x = y$, $x + y = z$, $x \cdot y = z$ (también, si es necesario, se puede identificar y cambiar nombres de los parámetros):

- $x = 0$;
- $x = 1$;
- $x = 2$;
- x es par;
- $x + y + z = t$;
- x es un cuadrado;
- $x \geq 0$ (pista: use este teorema https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_cuadrados)



- h) $x|y$
- i) x es primo;
- j) x es una potencia de dos;
- k) x es una potencia de 6.

Problema 7 Expresar los siguientes predicados sobre el dominio $D = \mathbb{R}^2$ a través de conectivos lógicos y cuantificadores, a partir de predicados $x = y$ y

$$C(x, y, z) = \begin{cases} 1 & d(x, z) = d(y, z) \\ 0 & d(x, z) \neq d(y, z) \end{cases},$$

donde $d(a, b)$ denota la distancia entre puntos $a, b \in \mathbb{R}^2$. (también, si es necesario, se puede identificar y cambiar nombres de los parámetros):

- a) puntos a, b, c pertenecen a la misma recta;
- b) $a \neq b, c \neq d$ y las rectas que pasan por a, b y por c, d son paralelos;
- c) a, b, c, d forman un paralelogramo;
- d) $d(a, b) = d(c, d)$;
- e) $d(x, a) \leq d(x, b)$
- f) puntos a, b, c pertenecen a la misma recta y b está entre a y c .

Contexto: una de las axiomatizaciones modernas de la geometría euclidiana (desarrollada por Alfred Tarski, https://en.wikipedia.org/wiki/Tarski%27s_axioms) está basada en dos predicados, d) y f). Este problema muestra que los dos pueden ser expresados a partir de $C(x, y, z)$.

Problema 8 Expresar el predicado $x = y + 2^{1000}$ sobre $D = \mathbb{N}$ a través de una fórmula de la lógica de predicados con menor que 1000000 símbolos, a partir del predicado $x = y + 1$.

Problema 9 Considere la siguiente fórmula de la lógica de predicados:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n).$$

¿Qué predicado calcula esa fórmula si el dominio es el conjunto de números enteros positivos, y

$$B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n, \\ 0 & x^n + y^n \neq z^n. \end{cases}$$

Problema 10 Considere la siguiente fórmula de la lógica de predicados:

$$\exists x \exists y (A(x, z) \vee \neg A(y, z)).$$

Mostrar que esa fórmula siempre da un predicado que toma valor 1 para todos los posibles valores de z .

Problema 11 Considere la siguiente oración de la lógica de predicados:

$$\phi = \forall x \forall y \forall z ((A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z)).$$



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE COMPPUTACIÓN
MATEMÁTICAS DISCRETAS- IIC1253

Definir $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{I}}$ para las siguientes interpretaciones:

- a) $\mathcal{I} = (\{1, 2, 3, \dots\}, x|y)$
- b) $\mathcal{I} = (\{1, 2, 3, 4\}, x + 1 = y)$
- c) $\mathcal{I} = (\{1, 2, 5, 7\}, x + 1 = y)$
- d) $\mathcal{I} = (\mathbb{R}^2, x \neq y)$

Problema 12 ¿Son equivalentes las fórmulas

$$\phi = \exists x \forall y A(x, y), \quad \psi = \forall y \exists x A(x, y)?$$