

# IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

20.10.2025

Hoy...

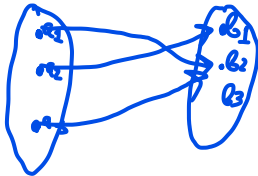
Funciones: imagen y preimagen,  
inyectivas, sobreyectivas, biyectivas,  
composición, función inversa.

# Definición

$$(a, b) \in f \subseteq A \times B$$

Definición

Una relación  $f$  de  $A$  en  $B$  <sup>e</sup> ~~x~~ es una función si para todo  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .



# Definición

## Definición

*Una relación  $f$  de  $A$  en  $B$  es una función si para todo  $a \in A$  existe un único elemento  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in f$ .*

Terminología:

- ▶  $f: A \rightarrow B$   $\iff$  " $f$  una función de  $A$  en  $B$ "
- ▶  $(a, b) \in f \iff afb \iff b = f(a)$
- ▶  $b$  es el valor o el imagen de  $a$  en  $f$ .
- ▶  $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}: A \rightarrow A$  la función identidad.

# Ejemplos

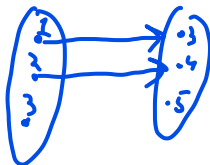
Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

# Ejemplos

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

►  $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \rightarrow B$ ?

$(3, \cdot)?$  — no.



# Ejemplos

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

►  $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \rightarrow B?$

►  $\{(1, 3), (2, \underline{4}), (3, 3), (2, \underline{5})\}: A \rightarrow B?$

~ no.

# Ejemplos

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

►  $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \rightarrow B?$

►  $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\}: A \rightarrow B?$

►  $\{(\underline{1}, 4), (\underline{2}, 4), (\underline{3}, 4)\}: A \rightarrow B?$  — Sí

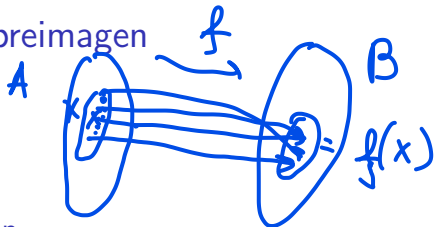


# Ejemplos

Sean  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ .

- ▶  $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \rightarrow B?$
- ▶  $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\}: A \rightarrow B?$
- ▶  $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}: A \rightarrow B?$
- ▶  $\{(1, 4), (2, 3), (3, \underline{2})\}: A \rightarrow B?$  *no!*  
 *$\notin B$*

# Imagen y preimagen



## Definición

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos y  $f: A \rightarrow B$ . Entonces,

- ▶ si  $X \subseteq A$ , él imagen de  $X$  es el conjunto  $f(X) = \{b \in B \mid \exists x \in X \ b = f(x)\}$
- ▶ si  $Y \subseteq B$ , él preimagen de  $Y$  es el conjunto  $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ .
- ▶ si  $b \in B$ , denotamos  $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$ .

# Ejercicios con imagen y preimagen

## Ejercicio

Sea  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{Z}$ . Definir  $f(\{1, 2, 3, 4\})$  y  $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\})$ .

$$f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, 4, 9, 16\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$$
$$f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{1, -1, 2, -2\} = f^{-1}(\{1, 4\})$$

## Ejercicio

Sea  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f(x)$  es el mínimo número primo mayor que  $x^2$ , para todo  $x \in \mathbb{N}$ .

¿ $19 \in f(\mathbb{N})$ ?

$$f(3) = 11$$
$$f(4) = 17 \quad f(5) = 29$$

# Imagen y $\cap, \cup$

## Ejercicio

Sea  $f: A \rightarrow B$  y  $X_1, X_2 \subseteq A$ . ¿Verdadero o falso?

a)  $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

b)  $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

# Preimagen y $\cap, \cup$

## Ejercicio

Sea  $f: A \rightarrow B$  y  $Y_1, Y_2 \subseteq B$ . ¿Verdadero o falso?

a)  $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

b)  $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

# Funciones inyectivas y sobreyectivas

## Definición

Una función  $f: A \rightarrow B$  se llama

- ▶ **inyectiva** si no existen  $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$  tal que  $f(a_1) = f(a_2)$
- ▶ **sobreyectiva** si  $f(A) = B$ .
- ▶ **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

	¿inyectiva?	¿sobreyectiva?
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = x + 1$		
$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f((x, y)) = xy$		

# Composición

## Definición

*Sean  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . Entonces, la composición de  $f$  y  $g$  es la función*

$$f \circ g: A \rightarrow C, \quad (f \circ g)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

# Composición

## Definición

Sean  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . Entonces, la composición de  $f$  y  $g$  es la función

$$f \circ g: A \rightarrow C, \quad (f \circ g)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Ejemplo:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$ ,  $C = \{7, 8\}$

$$f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 4)\}, \quad g = \{(4, 8), (5, 7), (6, 7)\}$$

$$f \circ g =$$



# Composición de funciones inyectivas

## Proposición

*Sean  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  dos funciones inyectivas. Entonces,  $f \circ g$  es inyectiva.*

# Composición de funciones sobreyectivas

## Proposición

*Sean  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  dos funciones sobreyectivas. Entonces,  $f \circ g$  es sobreyectiva.*

# Función inversa

## Definición

Sea  $f: A \rightarrow B$ . Entonces,  $g: B \rightarrow A$  es la **función inversa** de  $f$  si  $f \circ g = id_B$  y  $g \circ f = id_A$ .

## Teorema

- a) Una función  $f: A \rightarrow B$  es biyectiva si y sólo si tiene una función inversa;
- b) Si una función  $f: A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces su función inversa es única y también es biyectiva.





# Inyectiva vs. sobreyectiva

## Proposición

*Sean  $A, B$  dos conjuntos no vacíos. Entonces, existe una función  $f: A \rightarrow B$  inyectiva si y sólo si existe una función  $g: B \rightarrow A$  sobreyectiva.*



# Principio de palomar

Informalmente: si  $n + 1$  palomas se distribuyen en  $n$  palomares, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

## Teorema (Principio de palomar)

*Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , no existe una*

*$f: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\}$  inyectiva*



# Ejemplo principio palomar

## Ejercicio

*Demuestra que en cualquier grupo de personas siempre habrá dos personas que hayan dado el mismo número de apretones de mano dentro del grupo.*



¡Gracias!