Guía 6 – teoría de números

Problema 1 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$, $a|b$. Demuestre que $(b/a) \in \mathbb{Z}$ y $(b/a)|b$.

Problema 2 Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $2|a$ y $4 \not| a$. Demuestre que el número de divisores de a que son pares es igual al número de divisores de a que son impares *(hint: se puede construir una función biyectiva entre dos conjuntos)*

Problema 3 Demuestre que $37|\underbrace{11\ldots1}_{2025}$.

Problema 4 Demuestre la siguiente regla de división sobre 37: el número $\overline{d_{m-1}\ldots d_0}$ es divisible bor 37 si y sólo si $(d_0+10d_1-11d_2+d_3+10d_4-11d_5+\ldots)$ es divisible por 37.

Problema 5 ¿$111111|\underbrace{11\ldots1}_{2025}$?

Problema 6 Encontrar todos los posibles cocientes para el dividendo $a = 57$.

Problema 7 ¿Qué afirmaciones de abajo son verdad para todo $a, b, c, n \in \mathbb{Z}$?
a) $6|n^3 - n$;
b) $3 \not| n^2 + 1$;
c) $c|ab \to (c|a \vee c|b)$;
d) $(a|b \wedge b|a) \to |a| = |b|$.

Problema 8 Demuestre que la relación de congruencia módulo k $\equiv_k$ "no respete" potenciación. Es decir, de un ejemplo de $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 \equiv_{10} a_2, b_1 \equiv_{10} b_2$ pero $a_1^{b_1} \not\equiv_{10} a_2^{b_2}$.

Problema 9 Encontrar el último dígito de $1997^{1997^{1997}}$.

Problema 10 Encuentre todos los posibles valores de
a) $\mathrm{MCD}(2n+3, 7n+6)$
b) $\mathrm{MCD}(n^2, n+1)$
cuando n recorre $\mathbb{Z}$.

Problema 11 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Demuestre que $\mathrm{MCD}(a, b) = |b|$ si y sólo si $b|a$.

Problema 12 Sean $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$. Demuestre que $a/\mathrm{MCD}(a, b), b/\mathrm{MCD}(a, b)$ son coprimos.

Problema 13 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestre que a, b son coprimos si y sólo si $a + b, a - b$ son coprimos.

Problema 14 Encuentre $\mathrm{MCD}(2^{2^m} + 1, 2^{2^k} + 1)$ para $m, k \in \mathbb{N}$.