Unidad III: Teoría de conjuntos

Teoría de conjuntos: Axiomas básicos

Clase 08 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

- La lógica de predicados nos da un lenguaje formal con una sintaxis y semántica clara.
- Una aplicación fundamental: **teorías matemáticas**.

Idea general:

- Escoger un conjunto de oraciones o **axiomas** Σ que capturen las verdades básicas de cierto dominio de interés:
  - números naturales, números reales, teoría de grupos, teoría de espacios vectoriales, ...
- Descubrir nuevos **teoremas**: oraciones φ que se deducen de los axiomas Σ.
  - Formalmente: $\Sigma \models \varphi$.

- Nos gustaría **una sola** teoría, para **toda** la matemática.
- Un conjunto de axiomas del cual se deduzcan todos los teoremas.
- La teoría más aceptada actualmente:
  teoría axiomática de conjuntos (ZFC).
- Desarrollada por Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel.

Veremos los axiomas y construcciones más relevantes de esta teoría.

Teoría de conjuntos: nociones primitivas

- Los objetos básicos de estudio son los conjuntos.
- Tenemos disponible un predicado $\in$ ("pertenece a").

Notación:

- Si $a \in b$ también decimos que a es un elemento de b.
- $\{a_1, \ldots, a_k\}$ denota al conjunto con elementos $a_1, \ldots, a_k$.

Ejemplos:

- $a \in \{a, b\}$.
- $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

Nuestro primer axioma garantiza la existencia de al menos un conjunto.

Axioma del conjunto vacío:

Existe un conjunto sin elementos.

¿Cómo escribiría esto en lógica de predicados?

$$\exists A \, \forall x \, \neg(x \in A)$$

Observación: A y x son variables. Cuando sea posible:

- Si la variable aparece a la derecha de un $\in$, usaremos $A, B, C, \ldots$
- Si aparece a la izquierda de un $\in$, usaremos $x, y, z, \ldots$

Axioma de extensionalidad:

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

¿Cómo escribiría esto en lógica de predicados?

$$\forall A \, \forall B \Big(\big(\forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B) \big) \rightarrow A = B \Big)$$

Ejemplos:

- $\{a\} = \{a, a\}$.
- $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- ¿Es cierto que $\{a, b\} = \{\{a, b\}\}$?

Un primer resultado

Proposición:

Existe un único conjunto sin elementos.

Demostración:

Supongamos que A y B son dos conjuntos sin elementos. Luego, se cumple:

$$\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Por el axioma de extensionalidad, concluimos que $A = B$.

Notación:

A este único conjunto le llamamos **el conjunto vacío**, y lo denotamos por $\varnothing$.

Definición:

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B.

Notación: $A \subseteq B$.

Ejemplos:

- ¿Es cierto que $\{a, b\} \subseteq \{b, c, a\}$?
- ¿Es cierto que $\{a, \{b\}\} \subseteq \{a, b\}$?
- ¿Es cierto que $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$?

La noción de subconjunto

Definición:

Un conjunto A es **subconjunto** de un conjunto B si todos los elementos de A son elementos de B.

¿Cómo escribiría $A \subseteq B$ en lógica de predicados?

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Proposición:

Para todo conjunto A, se cumple que $\varnothing \subseteq A$.

Demostración:

Siempre se cumple que $\forall x\,(x \in \varnothing \to x \in B)$. (¿por qué?)

Proposición:

$A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$: directa de la definición de igualdad.

$(\Leftarrow)$: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces se cumple:

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \;\text{ y }\; \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A).$$

Luego: $\forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Por axioma de extensionalidad, concluimos que $A = B$.

Notación:

- Si A **no** es subconjunto de B, entonces escribimos $A \nsubseteq B$.
- $A \nsubseteq B$ si y sólo si **existe** un elemento en A que no está en B.
- $\neg \forall x\,(x \in A \to x \in B) \equiv \exists x\,(x \in A \land \neg(x \in B))$.

Hasta el momento sólo tenemos garantizada la existencia del conjunto $\varnothing$.

¿Podemos definir otros conjuntos a partir de esto?

Necesitamos agregar axiomas que nos permitan construir nuevos conjuntos.

Intuitivamente, hay dos grandes formas de definir conjuntos:

- Por extensión: Si $a_1, \dots, a_k$ son conjuntos, entonces

  $$\{a_1, \dots, a_k\}$$

  debería ser un conjunto también.

- Por comprensión: Si tenemos una "propiedad" P, entonces

  $$\{a \mid a \text{ satisface la propiedad } P\}$$

  debería ser un conjunto.

  Ejemplos:

  - $\{n \mid n$ es un número natural par$\}$.
  - $\{a \mid a$ es un conjunto con exactamente dos elementos$\}$.

Agregaremos axiomas que nos permitan hacer este tipo de definiciones.

Axioma de emparejamiento:

Si A y B son conjuntos, entonces existe un conjunto C cuyos elementos son exactamente A y B.

Notación: $C = \{A, B\}$.

Propuesto: escriba el axioma en lógica de predicados.

Ejemplos:

Ahora sí sabemos que los siguientes conjuntos existen:

- $\varnothing$.
- $\{\varnothing, \varnothing\} = \{\varnothing\}$.
- $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
- $\ldots$

Axioma de emparejamiento:

Si A y B son conjuntos, entonces existe un conjunto C cuyos elementos son exactamente A y B.

Notación: $C = \{A, B\}$.

Corolario:

Si A es un conjunto, entonces $\{A\}$ también es un conjunto.

Notación:

Un conjunto de la forma $\{A\}$ (es decir, con 1 sólo elemento) se llama **singleton**.

Axioma de unión:

Si A es un conjunto, entonces existe un conjunto U tal que para todo conjunto e se cumple:

$$e \in U \text{ si y sólo si existe un conjunto } B \in A \text{ tal que } e \in B.$$

Notación: $U = Union(A)$.

Propuesto: escriba el axioma en lógica de predicados.

Ejemplos:

- $Union(\{\{a,b\},\{b,c\}\}) = \{a,b,c\}$.
- $Union(\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.
- $Union(\{\varnothing,\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing\}$.

El siguiente teorema nos dice que siempre es posible hacer definiciones por extensión.

Dado: $k \geq 1$.

Teorema:

Si $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son exactamente $A_1, \ldots, A_k$.

Notación: $B = \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Teorema:

Si $A_1, \dots, A_k$ son conjuntos, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son exactamente $A_1, \dots, A_k$.

Notación: $B = \{A_1, \dots, A_k\}$.

Demostración:

Por axioma de emparejamiento, $\{A_1, A_2\}$ es un conjunto.
Por corolario anterior, $\{A_3\}$ es un conjunto.

Nuevamente por emparejamiento, $\{\{A_1, A_2\}, \{A_3\}\}$ es un conjunto.

Por axioma de unión, $\{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto.

Repitiendo este argumento una cantidad finita de veces, obtenemos que $\{A_1, \cdots, A_k\}$ es un conjunto. (verifíquelo.)