IIC1253 - Lógica Proposicional

Marcelo Arenas

La necesidad de la lógica proposicional

Inicio de la lógica

Originalmente, la lógica trataba con argumentos en el lenguaje natural.

Ejemplo

¿Es el siguiente argumento válido?

Todos los hombres son mortales
Sócrates es hombre

Por lo tanto, Sócrates es mortal

La lógica debería poder usarse para demostrar que sí es cierto.

Inicio de la lógica

Ejemplo

¿Qué pasa con el siguiente caso?

Algunas personas son mujeres
Sócrates es una persona

Por lo tanto, Sócrates es mujer

En este caso deberíamos decir que el argumento no es válido.

Inicio de la lógica

Pero los argumentos pueden ser más complejos ...

Creo que todos los hombres son mortales
Creo que Sócrates es hombre

Por lo tanto, creo que Sócrates es mortal

¿Es este argumento válido? ¿Por qué?

Inicio de la lógica

Pero los argumentos pueden ser más complejos ...

Creo que todos los hombres son mortales
Creo que Sócrates es hombre

Por lo tanto, creo que Sócrates es mortal

¿Es este argumento válido? ¿Por qué?

¿Qué significa creo? ¿Qué pasaría si reemplazamos creo que por no sé si?

Paradojas en el lenguaje natural

Un día de la próxima semana les voy a hacer una interrogación,
y les aseguro que el día que se las haga van a estar sorprendidos.

¿Qué día voy a hacer la interrogación?

Matemática en el lenguaje natural: Paradoja de Berry

Podemos representar los números naturales usando oraciones del lenguaje natural: "Mil quinientos veinte", "el primer número", ...

El número de palabras en el Diccionario de la Real Academia es finito.

El número de oraciones con a los más 50 palabras también es finito.

Matemática en el lenguaje natural: Paradoja de Berry

Sea B el siguiente número natural:

> El primer número natural que no puede ser definido por una oración con a lo más cincuenta palabras tomadas del Diccionario de la Real Academia.

Matemática en el lenguaje natural: Paradoja de Berry

Sea B el siguiente número natural:

> El primer número natural que no puede ser definido por una oración con a lo más cincuenta palabras tomadas del Diccionario de la Real Academia.

B está bien definido, pero con sólo 25 palabras. **¡Tenemos una contradicción!**

- ¿Por qué se produjo esta paradoja?

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

- Definición de objetos matemáticos: conjunto, números naturales, números reales.

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

- Definición de objetos matemáticos: conjunto, números naturales, números reales.
- Definición de teorías matemáticas: teoría de conjuntos, teoría de los número naturales.

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

- Definición de objetos matemáticos: conjunto, números naturales, números reales.
- Definición de teorías matemáticas: teoría de conjuntos, teoría de los número naturales.
- Definición del concepto de demostración.

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

- Definición de objetos matemáticos: conjunto, números naturales, números reales.
- Definición de teorías matemáticas: teoría de conjuntos, teoría de los número naturales.
- Definición del concepto de demostración.

También queremos usar este lenguaje en ingeniería. ¿Por qué?

Sintaxis de la lógica proposicional

Lógica proposicional: sintaxis

Tenemos los siguientes elementos:

- Variables proposicionales (P): p, q, r, $\ldots$
- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Símbolos de puntuación: (,)

Cada variable proposicional representa una proposición **completa** e **indivisible**, que puede ser **verdadera** o **falsa**.

Lógica proposicional: sintaxis

Tenemos los siguientes elementos:

- Variables proposicionales (P): p, q, r, $\ldots$
- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Símbolos de puntuación: (,)

Cada variable proposicional representa una proposición **completa** e **indivisible**, que puede ser **verdadera** o **falsa**.

Ejemplo

$$P = \{socrates\_es\_hombre,\ socrates\_es\_mortal\}$$

Lógica proposicional: sintaxis

Conectivos lógicos son usados para construir expresiones que también pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplo

$$\begin{aligned} \mathit{socrates\_es\_hombre} &\rightarrow \mathit{socrates\_es\_mortal} \\ \mathit{socrates\_es\_hombre} &\rightarrow (\neg\, \mathit{socrates\_es\_mortal}) \end{aligned}$$

Símbolos de puntuación son usados para evitar ambigüedades.

Sintaxis de la lógica proposicional: Definición

Dado: Conjunto P de variables proposicionales.

Sintaxis de la lógica proposicional: Definición

Dado: Conjunto P de variables proposicionales.

Definición (intuitiva)

Una fórmula proposicional sobre P se construye utilizando las siguientes reglas:

1. *Cada $p \in P$ es una fórmula proposicional.*
2. *Si φ es una fórmula proposicional, entonces $(\neg\varphi)$ es una fórmula proposicional.*
3. *Si φ y ψ son fórmula proposicionales, entonces $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas proposicionales.*

Sintaxis de la lógica proposicional: Definición

Ejercicio

Verifique que $((\neg p) \to (q \vee r))$ es una fórmula proposicional.

Sintaxis de la lógica proposicional: Definición

Ejercicio

Verifique que $((\neg p) \to (q \vee r))$ es una fórmula proposicional.

Llamamos $L(P)$ al conjunto de las fórmulas proposicionales sobre el conjunto P de variables proposicionales.

Semántica de la lógica proposicional

Semántica de la lógica proposicional

¿Cómo podemos determinar si una fórmula es verdadera o falsa?

Este valor de verdad depende de los valores de verdad asignados a las variables proposicionales y de los conectivos utilizados.

Semántica de la lógica proposicional

¿Cómo podemos determinar si una fórmula es verdadera o falsa?

Este valor de verdad depende de los valores de verdad asignados a las variables proposicionales y de los conectivos utilizados.

Valuación (asignación): $\sigma : P \to \{0, 1\}$

Semántica de la lógica proposicional

¿Cómo podemos determinar si una fórmula es verdadera o falsa?

Este valor de verdad depende de los valores de verdad asignados a las variables proposicionales y de los conectivos utilizados.

Valuación (asignación): $\sigma : P \to \{0, 1\}$

Ejemplo

$\sigma(socrates\_es\_hombre) = 1$ y $\sigma(socrates\_es\_mortal) = 0$

Semántica de la lógica proposicional

Queremos extender σ a todo el conjunto de fórmulas proposicionales $L(P)$.

Definición (intuitiva)

Semántica de la lógica proposicional

Queremos extender σ a todo el conjunto de fórmulas proposicionales $L(P)$.

Definición (intuitiva)

$$\sigma(\neg\alpha) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Queremos extender σ a todo el conjunto de fórmulas proposicionales $L(P)$.

Definición (intuitiva)

$$\sigma(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & si\ \sigma(\alpha) = 0 \\ 0 & si\ \sigma(\alpha) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 & si\ \sigma(\alpha) = 1\ o\ \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & si\ \sigma(\alpha) = 0\ y\ \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (intuitiva)

$$\sigma(\alpha \wedge \beta) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \textit{ y } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \textit{ o } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (intuitiva)

$$\sigma(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \textit{ y } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \textit{ o } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \textit{ o } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \textit{ y } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (intuitiva)

$$\sigma(\alpha \land \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \textit{ y } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \textit{ o } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 0 \textit{ o } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) = 1 \textit{ y } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \sigma(\alpha) = \sigma(\beta) \\ 0 & \textit{si } \sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta) \end{cases}$$

Semántica: Ejemplos

Supongamos que $\sigma(\mathit{socrates\_es\_hombre}) = 1$ y $\sigma(\mathit{socrates\_es\_mortal}) = 0$.

Entonces:

$$\sigma(\mathit{socrates\_es\_hombre} \to \mathit{socrates\_es\_mortal}) =$$

$$\sigma(((\mathit{socrates\_es\_hombre} \to \mathit{socrates\_es\_mortal}) \wedge \mathit{socrates\_es\_hombre}) \to \mathit{socrates\_es\_mortal}) =$$

Semántica: Ejemplos

Supongamos que $\sigma(\mathit{socrates\_es\_hombre}) = 1$ y $\sigma(\mathit{socrates\_es\_mortal}) = 0$.

Entonces:

$$\sigma(\mathit{socrates\_es\_hombre} \rightarrow \mathit{socrates\_es\_mortal}) = 0$$

$$\sigma(((\mathit{socrates\_es\_hombre} \rightarrow \mathit{socrates\_es\_mortal}) \wedge \mathit{socrates\_es\_hombre}) \rightarrow \mathit{socrates\_es\_mortal}) =$$

Semántica: Ejemplos

Supongamos que $\sigma(socrates\_es\_hombre) = 1$ y $\sigma(socrates\_es\_mortal) = 0$.

Entonces:

$$\sigma(socrates\_es\_hombre \to socrates\_es\_mortal) = 0$$

$$\sigma(((socrates\_es\_hombre \to socrates\_es\_mortal) \wedge socrates\_es\_hombre) \to socrates\_es\_mortal) = 1$$

Tablas de verdad

Tablas de verdad

Cada fórmula se puede representar y analizar en una tabla de verdad.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Tablas de verdad

Construimos ahora la tabla de verdad para la fórmula $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Ejercicios

1. Construya las tablas de verdad para las fórmula $p \wedge (q \wedge r)$ y $p \wedge (q \vee r)$
2. ¿Cuántas filas tiene una tabla de verdad para una fórmula con n variables?
3. ¿Cuántas tablas de verdad distintas existen para las variables proposicionales p_1, p_2, ..., p_n?

Equivalencia de fórmulas

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Podemos comparar fórmulas proposicionales usando tablas de verdad:

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Si dos fórmulas α y β tienen la misma tabla de verdad, entonces decimos que son equivalentes, y usamos la notación $\alpha \equiv \beta$

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Si dos fórmulas α y β tienen la misma tabla de verdad, entonces decimos que son equivalentes, y usamos la notación $\alpha \equiv \beta$

- En el ejemplo anterior tenemos que $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Si dos fórmulas α y β tienen la misma tabla de verdad, entonces decimos que son equivalentes, y usamos la notación $\alpha \equiv \beta$

- En el ejemplo anterior tenemos que $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- También habíamos mostrado que $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Si dos fórmulas α y β tienen la misma tabla de verdad, entonces decimos que son equivalentes, y usamos la notación $\alpha \equiv \beta$

- En el ejemplo anterior tenemos que $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- También habíamos mostrado que $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$

Cuando dos fórmulas proposicionales son equivalentes podemos reemplazar una por la otra.

Tablas de verdad y equivalencia de fórmula

Si dos fórmulas α y β tienen la misma tabla de verdad, entonces decimos que son equivalentes, y usamos la notación $\alpha \equiv \beta$

- En el ejemplo anterior tenemos que $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- También habíamos mostrado que $p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

Cuando dos fórmulas proposicionales son equivalentes podemos reemplazar una por la otra.

- Estas dos fórmulas representan formas distintas de escribir lo mismo.

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0				
0	0	1	1				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	1	1				
1	1	0	1				
1	1	1	1				

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0			
0	0	1	1	0			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	0			
1	0	1	1	0			
1	1	0	1	1			
1	1	1	1	1			

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0		
0	0	1	1	0	0		
0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	0	0		
1	0	1	1	0	1		
1	1	0	1	1	0		
1	1	1	1	1	1		

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	0	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	

Otro ejemplo de equivalencia de fórmulas

Queremos mostrar $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Algunas equivalencias útiles

Ley de la doble negación:

$$\neg(\neg\varphi) \quad \equiv \quad \varphi$$

Leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg(\varphi \wedge \psi) \quad &\equiv \quad (\neg\varphi) \vee (\neg\psi) \\ \neg(\varphi \vee \psi) \quad &\equiv \quad (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \end{aligned}$$

Leyes de conmutatividad:

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi \quad &\equiv \quad \psi \wedge \varphi \\ \varphi \vee \psi \quad &\equiv \quad \psi \vee \varphi \end{aligned}$$

Algunas equivalencias útiles

Leyes de asociatividad:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta &\equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \\
(\varphi \vee \psi) \vee \theta &\equiv \varphi \vee (\psi \vee \theta)
\end{aligned}
$$

Leyes de distributividad:

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge (\psi \vee \theta) &\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta) \\
\varphi \vee (\psi \wedge \theta) &\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)
\end{aligned}
$$

Ley de implicancia:

$$
\varphi \to \psi \equiv (\neg \varphi) \vee \psi
$$

Ley de doble implicancia:

$$
\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)
$$

Ejercicios

1. Demuestre las leyes enunciadas en las láminas anteriores.
2. ¿Es $\to$ asociativo? Vale decir, ¿Es cierto que $(\alpha \to \beta) \to \gamma \equiv \alpha \to (\beta \to \gamma)$?
3. ¿Cuántas fórmulas no equivalentes puede construir con n variables proposicionales?

Formas normales

Conectivos ternarios

Queremos definir el conectivo lógico: si p entonces q si no r

p	q	r	si p entonces q si no r
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Conectivos ternarios

Queremos definir el conectivo lógico: si p entonces q si no r

p	q	r	si p entonces q si no r
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

¿Cómo se puede representar este conectivo usando $\neg$, $\wedge$ y $\rightarrow$?

Conectivos ternarios

Solución: $(p \to q) \wedge ((\neg p) \to r)$

p	q	r	si p entonces q si no r	$(p \to q) \wedge ((\neg p) \to r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Conectivos ternarios

Solución: $(p \to q) \wedge ((\neg p) \to r)$

p	q	r	si p entonces q si no r	$(p \to q) \wedge ((\neg p) \to r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

El conectivo es equivalente a la fórmula $(p \to q) \wedge ((\neg p) \to r)$ porque tienen la misma tabla de verdad.

Conectivos n-arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos n-arios:
$C(p_1, \ldots, p_n)$

p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, \ldots, , p_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	b_1
0	0	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

¿Es posible representar $C(p_1, \ldots, p_n)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Representando tablas de verdad

La pregunta anterior se reduce a la siguiente pregunta más general: ¿es posible representar una tabla de verdad usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

- La última columna de esta tabla es un conectivo n-ario $C(p_1, \ldots, p_n)$ o una fórmula proposicional α cuyas variables proposicionales son p_1, ..., p_n.

Representando tablas de verdad

La pregunta anterior se reduce a la siguiente pregunta más general: ¿es posible representar una tabla de verdad usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

- La última columna de esta tabla es un conectivo n-ario $C(p_1, \ldots, p_n)$ o una fórmula proposicional α cuyas variables proposicionales son p_1, ..., p_n.

Utilizamos notación $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ para indicar que las variable proposicionales de la fórmula α son p_1, ..., p_n.

Representando tablas de verdad: notación

Introducimos un poco de notación para simplificar la representación de tablas de verdad:

Representando tablas de verdad: notación

Introducimos un poco de notación para simplificar la representación de tablas de verdad:

- Como $\wedge$ es asociativo, escribimos $p \wedge q \wedge r$ en lugar de $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$.

Representando tablas de verdad: notación

Introducimos un poco de notación para simplificar la representación de tablas de verdad:

- Como $\wedge$ es asociativo, escribimos $p \wedge q \wedge r$ en lugar de $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$.
- De la misma forma, como $\vee$ es asociativo, escribimos $p \vee q \vee r$ en lugar de $(p \vee q) \vee r$ y $p \vee (q \vee r)$.

Representando tablas de verdad: notación

Introducimos un poco de notación para simplificar la representación de tablas de verdad:

- Como $\wedge$ es asociativo, escribimos $p \wedge q \wedge r$ en lugar de $(p \wedge q) \wedge r$ y $p \wedge (q \wedge r)$.
- De la misma forma, como $\vee$ es asociativo, escribimos $p \vee q \vee r$ en lugar de $(p \vee q) \vee r$ y $p \vee (q \vee r)$.
- Damos a la negación mayor precedencia que a los otros conectivos, por lo que escribimos $\neg p \wedge q$ en lugar de $(\neg p) \wedge q$.
    - Y lo mismo para $\neg p \vee q$ y $(\neg p) \vee q$.

Un ejemplo

Consideramos una tabla de verdad donde la última columna es una fórmula proposicional $\alpha(p, q, r, s)$ que depende de las variables proposicionales p, q, r, s

p	q	r	s	$\alpha(p, q, r, s)$	p	q	r	s	$\alpha(p, q, r, s)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

Un ejemplo

Representamos $\alpha(p, q, r, s)$ como la siguiente fórmula:

Un ejemplo

Representamos $\alpha(p, q, r, s)$ como la siguiente fórmula:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee$$
$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

Un ejemplo

Representamos $\alpha(p, q, r, s)$ como la siguiente fórmula:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee \\ (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

Esta fórmula y α son equivalente ya que tienen la misma tabla de verdad.

Un ejemplo

Representamos $\alpha(p, q, r, s)$ como la siguiente fórmula:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee \\ (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

Esta fórmula y α son equivalente ya que tienen la misma tabla de verdad.

- Note que la misma construcción funciona para conectivos *n*-arios.

Solución al problema original

La tabla de verdad

p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, \ldots, p_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	b_1
0	0	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

es representada por la siguiente fórmula, suponiendo que σ_i es la valuación correspondiente a la fila i de la tabla:

$$\bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\bigwedge_{j\,:\,\sigma_i(p_j)=1} p_j \;\wedge \bigwedge_{k\,:\,\sigma_i(p_k)=0} \neg p_k \right)$$

Formas normales: DNF

Decimos que una fórmula φ está en forma normal disyuntiva (DNF) si φ es de la forma:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un literal, es decir, una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Formas normales: DNF

Decimos que una fórmula φ está en forma normal disyuntiva (DNF) si φ es de la forma:

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un literal, es decir, una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.

Ejemplo

$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

Formas normales: DNF

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en DNF.

Formas normales: DNF

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en DNF.

Ya demostramos este teorema, ¿cierto?

Formas normales: CNF

Decimos que una fórmula φ está en forma normal conjuntiva (CNF) si φ es de la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un literal.

Formas normales: CNF

Decimos que una fórmula φ está en forma normal conjuntiva (CNF) si φ es de la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un literal.

Ejemplo

$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$

Formas normales: CNF

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en CNF.

Formas normales: CNF

Teorema

Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en CNF.

Ejercicio

Haga tres demostraciones del teorema.

- En la primera sólo utilice las leyes de equivalencia. ¿Qué leyes necesita utilizar?
- En la segunda utilice el resultado de que toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF. ¿Qué leyes de equivalencia necesita utilizar en este caso?
- En la tercera utilice directamente tablas de verdad, como para el caso de DNF. ¿Necesita utilizar alguna equivalencia en este caso?

Conjuntos de conectivos funcionalmente completos

Conectivos funcionalmente completos

Definición

Un conjunto C de conectivos es funcionalmente completo si para conjunto P de variables proposicionales y para cada $\varphi \in L(P)$, existe una fórmula ψ tal que ψ sólo usa los conectivos en C y $\varphi \equiv \psi$.

Conectivos funcionalmente completos

Definición

Un conjunto C de conectivos es funcionalmente completo si para conjunto P de variables proposicionales y para cada $\varphi \in L(P)$, existe una fórmula ψ tal que ψ sólo usa los conectivos en C y $\varphi \equiv \psi$.

Ya demostramos que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

Conectivos funcionalmente completos

Definición

Un conjunto C de conectivos es funcionalmente completo si para conjunto P de variables proposicionales y para cada $\varphi \in L(P)$, existe una fórmula ψ tal que ψ sólo usa los conectivos en C y $\varphi \equiv \psi$.

Ya demostramos que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

- Demuestre que $\{\neg, \vee\}$ y $\{\neg, \wedge\}$ son ambos funcionalmente completos.

$\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo

Como $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo, sólo necesitamos mostrar como se representa la fórmula $\alpha \vee \beta$ utilizando los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$.

$\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo

Como $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo, sólo necesitamos mostrar como se representa la fórmula $\alpha \vee \beta$ utilizando los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$.

Sabemos que $\alpha \rightarrow \beta$ es equivalente a $(\neg\alpha) \vee \beta$.

$\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo

Como $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo, sólo necesitamos mostrar como se representa la fórmula $\alpha \vee \beta$ utilizando los conectivos $\neg$ y $\rightarrow$.

Sabemos que $\alpha \rightarrow \beta$ es equivalente a $(\neg\alpha) \vee \beta$.

- Por lo tanto, $\alpha \vee \beta \equiv (\neg\alpha) \rightarrow \beta$, y tenemos la demostración de que $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

¿Qué fórmula proposicional no podemos escribir con estos conectivos?

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

¿Qué fórmula proposicional no podemos escribir con estos conectivos?

Vamos a demostrar que con estos conectivos no podemos construir $\neg p$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

¿Qué fórmula proposicional no podemos escribir con estos conectivos?

Vamos a demostrar que con estos conectivos no podemos construir $\neg p$

Sea φ una fórmula proposicional que sólo menciona a la variable proposicional p y que utiliza conectivos en el conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, y suponga que $\varphi \equiv \neg p$.

- φ no necesariamente utiliza todos los conectivos.

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

Considere una valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$.

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

Considere una valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$.

Tenemos que:

- $\sigma(\neg p) = 0$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

Considere una valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$.

Tenemos que:

- $\sigma(\neg p) = 0$
- $\sigma(\varphi) = 1$, puesto que $\sigma(\alpha * \beta) = 1$ si $\sigma(\alpha) = 1$, $\sigma(\beta) = 1$ y $*$ es uno de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$.

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo

Considere una valuación σ tal que $\sigma(p) = 1$.

Tenemos que:

- $\sigma(\neg p) = 0$
- $\sigma(\varphi) = 1$, puesto que $\sigma(\alpha * \beta) = 1$ si $\sigma(\alpha) = 1$, $\sigma(\beta) = 1$ y $*$ es uno de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$.

Por lo tanto $\neg p$ no es equivalente a φ, y obtenemos una contradicción.

¿Es posible construir un conectivo que sea funcionalmente completo por sí solo?

El conectivo NAND se define como:

p	q	p NAND q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

¿Es posible construir un conectivo que sea funcionalmente completo por sí solo?

El conectivo NAND se define como:

p	q	p NAND q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

¿A qué corresponde este conectivo?

NAND es funcionalmente completo

Teorema

{NAND} *es funcionalmente completo.*

NAND es funcionalmente completo

Teorema

$\{\text{NAND}\}$ *es funcionalmente completo.*

Para demostrar el teorema usamos el hecho de que $\{\neg, \wedge\}$ es funcionalmente completo y las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv \varphi \text{ NAND } \varphi \\ \varphi \wedge \psi &\equiv \neg(\varphi \text{ NAND } \psi) \\ &\equiv (\varphi \text{ NAND } \psi) \text{ NAND } (\varphi \text{ NAND } \psi) \end{aligned}$$