Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 10

17 de octubre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

Resumen

Relación Binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados que establece una conexión o asociación entre elementos de dos conjuntos distintos.

R es una relación binaria entre A y B si $R \subseteq A \times B$.

Propiedades de una Relación Binaria

Refleja

Una relación R es refleja si para todo elemento x en el conjunto, el par (x, x) está en R.

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Irrefleja

Una relación R es irrefleja si ningún par (x, x) está en R para cualquier x en el conjunto.

$$\forall x \in A, (x, x) \notin R$$

Simétrica

Una relación R es simétrica si para cada par (x, y) en R, también está presente el par (y, x).

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$$

Antisimétrica

Una relación R es antisimétrica si para cualquier par (x, y) en R, si $x \neq y$, entonces el par (y, x) no está en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land x \neq y \to (y, x) \notin R$$

Transitiva

Una relación R es transitiva si para cada par (x, y) y (y, z) en R, el par (x, z) también está en R.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \to (x, z) \in R$$

Conexidad

Una relación R es conexa si para cada par de elementos x,y podemos encontar a (x, y) en R, o a (y, x) en R.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \lor (y, x) \in R$$

Relación de Equivalencia

Una relación de equivalencia es una relación binaria que cumple **reflexividad**, **simetría** y **transitividad**.

A la relación se le denota como $x \sim y$.

Clase de equivalencia

Dado $x \in A$, la clase de equivalencia de x bajo $\sim$ es el conjunto

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Conjunto cociente

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. El conjunto cociente de A con respecto a $\sim$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$$

Particiones

Decimos que $\mathcal{S}$ es una *partición* de A si:

- Para cada $X \in \mathcal{S}$, se tiene que $X \neq \emptyset$. (Cada X en $\mathcal{S}$ es no vacío.)
- $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = A$. (La unión de todos los X en $\mathcal{S}$ es A.)

- Para cada $X, Y \in \mathcal{S}$, se tiene que $X \cap Y = \emptyset$. (Los conjuntos en $\mathcal{S}$ son disjuntos par a par.)

Orden Parcial

Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.

A la relación se le denota como $x \preceq y$. Y diremos que el par $(A, \preceq)$ es un **orden parcial**.

Orden Total

Una relación $\preceq$ sobre un conjunto A es un orden total si es una relación de orden parcial y además es conexa.

Elemento mínimo y máximo

Sean $(A, \preceq)$ un orden parcial, $S \subseteq A$ y $x \in A$. Diremos que:

1. x es un **elemento minimal** de S si $x \in S$ y para todo $y \in S$ se cumple que $y \preceq x \Rightarrow y = x$.
2. x es un **mínimo** en S si $x \in S$ y es cota inferior de S.

Análogamente, se definen los conceptos elemento maximal y máximo.

1. Calentando Motores

Una relación R se llama **circular** si aRb y bRc implican que cRa. Demuestre que R es reflexiva y circular si, y sólo si, es una relación de equivalencia.

2. Relaciones

Sea A un conjunto. Una relación binaria $\prec$ sobre A se dice *orden estricto* si es asimétrica y transitiva.

(a) Demuestre que si $\prec$ es un orden estricto, entonces $\prec^{-1}$ es un orden estricto. Importante considerar:

$$\prec^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid y \prec x\}$$

(b) Considere $\preceq$ y $\succeq$ definidas según

$$\preceq := \prec \cup I_A \qquad \text{y} \qquad \succeq := \prec^{-1} \cup I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- $\prec^{-1} \subseteq \succeq$
- $\preceq \cap \succeq = I_A$
- $\prec \cup \prec^{-1} = A \setminus I_A$

3. Relaciones, relaciones, relaciones

Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definimos la relación binaria Ω siguiente:

Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in A$, entonces

$$\mathcal{R}_1 \Omega \mathcal{R}_2 \iff (\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}_1 y \implies x\mathcal{R}_2 y)$$

Demuestre que Ω es una relación de orden parcial, y además que no es un orden total en A, es decir que no es conexa.