IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

08.10.2025

Hoy...

Relaciones: pares ordenados, producto Cartesiano, relaciones, relaciones de equivalencia.

Par ordenado

Definición

Sean x, y *dos conjuntos. Entonces,* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Par ordenado

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(1, 2) =$

Par ordenado

Definición

Sean x, y *dos conjuntos. Entonces,* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(1, 2) =$

$(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) =$

Par ordenado

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(1, 2) =$

$(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) =$

$(2, 2) =$

Teorema

Sean x, y, a, b cuatro conjuntos. Entonces, $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

producto Cartesiano

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1, 3), (7, 4), (7, 3), (1, 4)\}$.

  $A =$ $\qquad\qquad$ $B =$

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1, 3), (7, 4), (7, 3), (1, 4)\}$.

  $A =$ $\qquad\qquad\qquad$ $B =$

- $\{(1, 2), (7, 3), (7, 2)\} = A \times B$?

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1,3), (7,4), (7,3), (1,4)\}$.

  $A =$ $\qquad\qquad$ $B =$

- $\{(1,2), (7,3), (7,2)\} = A \times B$?

- ¿es el plano un producto Cartesiano?

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B *dos conjuntos. Una* **relación binaria** *de* A *en* B *es un subconjunto* $R \subseteq A \times B$*.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$;

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$;
- Cuando $A = B$, se dice: *R es una relación binaria sobre A.*

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$;
- Cuando $A = B$, se dice: *R es una relación binaria sobre A.*
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y R una relación sobre A "tener el mismo resto módulo 3". Definir todos los pares ordenados en R:

$$R =$$

Relaciones como grafos dirigidos

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Retratar la relación $|$ ("divide") sobre A como un grafo dirigido:

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*
- **simétrica** *si $aRb \to bRa$ para todos $a, b \in A$;*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*
- **simétrica** *si $aRb \rightarrow bRa$ para todos $a, b \in A$;*
- **transitiva** *si $(aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$ para todos $a, b, c \in A$;*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*
- **simétrica** *si $aRb \to bRa$ para todos $a, b \in A$;*
- **transitiva** *si $(aRb \wedge bRc) \to aRc$ para todos $a, b, c \in A$;*
- **asimétrica** *si $aRb \to \neg bRa$ para todos $a, b \in A$;*
- **antisimétrica** *si $(aRb \wedge bRA) \to a = b$ para todos $a, b \in A$;*

Ejemplos

Sobre $\mathbb{N}$:

	$=$	$<$	$\leq$	$\neq$
refleja?				
antirefleja?				
simétrica?				
transitiva?				
asimétrica?				
antisimétrica				

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

- $=$

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

- $=$
- equivalencias de las fórmulas proposicionales

Ejercicio

Ejercicio

Verificar que las siguentes relaciones son equivalencias:

a) $\equiv_k$ *sobre* $\mathbb{Z}$, *donde* $x \equiv_k y$ *si y sólo si* k *divide* $x - y$.

b) $\sim$ *sobre* $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$, *donde* $(a, b) \sim (c, d)$ *si y sólo si* $ad = bc$.

c) $\sim$ *sobre* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, *donde* $A \sim B$ *si y sólo si* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *es finito.*

Clases de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. La* **clase de equivalencia** *de* $a \in A$ *con respeto de* $\sim$ *es el conjunto*

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Clases de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. La **clase de equivalencia** *de $a \in A$ con respeto de $\sim$ es el conjunto*

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Definir $[13]_{\equiv_3}$ (sobre $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$):

Clases de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. La **clase de equivalencia** *de $a \in A$ con respeto de $\sim$ es el conjunto*

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Definir $[13]_{\equiv_3}$ (sobre $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$):

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Para todos $a, b \in A$, tenemos $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$ o $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \varnothing$.

Clases de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. La **clase de equivalencia** *de $a \in A$ con respeto de $\sim$ es el conjunto*

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Definir $[13]_{\equiv_3}$ (sobre $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$):

Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Para todos $a, b \in A$, tenemos $[a]_\sim = [b]_\sim$ o $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

Corolario: clases de equivalencia definen una partición del conjunto A

Teorema

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A. *Para todos* $a, b \in A$, *tenemos* $[a]_\sim = [b]_\sim$ *o* $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

- Definir $\{1, 2, \ldots, 8\}/\equiv_3$:

Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto A. El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

- Definir $\{1, 2, \dots, 8\}/\equiv_3$:
- Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$, donde $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Definir el conjunto cociente correspondiente.

Operaciones y equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y $*$ una "operación binaria" sobre A (dados $a, b \in A$, la operación devuelve $a * b \in A$). Decimos que $*$ **respete** *una relación de equivalencia $\sim$ sobre A si $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2 \implies a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$ para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$.*

Operaciones y equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y $*$ una "operación binaria" sobre A (dados $a, b \in A$, la operación devuelve $a * b \in A$). Decimos que $*$ **respete** *una relación de equivalencia $\sim$ sobre A si $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2 \implies a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$ para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$.*

Cuando $*$ respete $\sim$, se puede ver $*$ como una operación sobre el conjunto cociente $A/\sim$.

Ejercicios

Ejercicio

Verificar que

a) *la suma y el producto respete* $\equiv_k$ *sobre* $\mathbb{Z}$*;*

b) *la operación* $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ *respete la relación de equivalencia* $\sim$*:*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

sobre $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$*.*

¡Gracias!