

IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

06.08.2025

Hoy...

Hoy...

- ▶ Lógica proposicional: formas normales, conectivos funcionalmente completos.

Repaso: conectivos

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Repaso: conectivos

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

¿Son todos necesarios?

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 1.

$$\neg, \wedge \rightarrow \vee, \rightarrow$$

$$\neg, \vee \rightarrow \wedge, \rightarrow$$

$$\neg, \rightarrow \rightarrow \vee, \wedge$$

$$\cancel{\neg} A \vee B = \neg \neg (A \vee B) = \neg (\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge B = \neg \neg (A \wedge B) = \neg (\neg A \vee \neg B)$$

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$A \vee B = \neg \neg A \vee B = \neg (\neg A) \vee B = \neg A \rightarrow B$$

□

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 2.

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 2.

- Sea ϕ cualquier fórmula proposicional con $\wedge, \vee, \rightarrow$ y con una variable proposicional A

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 2.

- ▶ Sea ϕ cualquier fórmula proposicional con $\wedge, \vee, \rightarrow$ y con una variable proposicional A
- ▶ Por ejemplo, $\phi = ((A \rightarrow A) \wedge (A \vee A)) \rightarrow (A \wedge A)$.

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 2.

- ▶ Sea ϕ cualquier fórmula proposicional con $\wedge, \vee, \rightarrow$ y con una variable proposicional A
- ▶ Por ejemplo, $\phi = ((A \rightarrow A) \wedge (A \vee A)) \rightarrow (A \wedge A)$.
- ▶ Queremos mostrar que $\neg A$ y ϕ no son equivalentes.

como se expresan los conectivos entre sí

Teorema

Entre $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, tenemos que con \neg y cualquier otro conectivo se puede expresar los demas, pero para $\neg A$ no existe una fórmula proposicional equivalente que usa solo $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Demostración parte 2.

- ▶ Sea ϕ cualquier fórmula proposicional con $\wedge, \vee, \rightarrow$ y con una variable proposicional A
- ▶ Por ejemplo, $\phi = ((A \rightarrow A) \wedge (A \vee A)) \rightarrow (A \wedge A)$.
- ▶ Queremos mostrar que $\neg A$ y ϕ no son equivalentes.
- ▶ Si fijamos $A = 1$, el valor de cada conectivo en ϕ será 1.



otros conectivos?

otros conectivos?

- ▶ ¿Existe un conectivo (a.k.a. *función Booleana*) $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que no se expresa a través de $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$?

otros conectivos?

- ¿Existe un conectivo (a.k.a. *función Booleana*) $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que no se expresa a través de $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$?

$$f(x, y) = x + y$$

Definición

Una *función booleana* de n variables es una función que mapea cada tupla de n 0s y 1s a 0 o 1.

otros conectivos?

- ¿Existe un conectivo (a.k.a. *función Booleana*) $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que no se expresa a través de $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$?

Definición

Una función booleana de n variables es una función que mapea cada tupla de n 0s y 1s a 0 o 1.

- ¡No existe!

Teorema

Para cada función booleana existe una fórmula proposicional equivalente con $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

Ejemplos

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$A \oplus B = \underline{((A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B))}$$

Ejemplos

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ejemplos

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

X_1	X_2	X_3	$\text{MAJ}_3(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\begin{aligned} & \text{MAJ}_3(X_1, X_2, X_3) \\ &= (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \\ & \quad \vee (X_2 \wedge X_3) \end{aligned}$$

DNFs

Definición (DNF)

- ▶ Una cláusula conjuntiva es una conjunción de los variables y su negaciones, por ejemplo:

$$X_1 \wedge (\neg X_3), \quad X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge (X_7).$$

- ▶ Una DNF (forma normal disyuntiva) es una disyunción de cláusulas conjuntivas, por ejemplo:

$$(X_1 \wedge (\neg X_3)) \vee (X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge X_7) \vee (X_1 \wedge X_3)$$

DNFs

Definición (DNF)

- ▶ Una cláusula conjuntiva es una conjunción de los variables y su negaciones, por ejemplo:

$$X_1 \wedge (\neg X_3), \quad X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge (X_7).$$

- ▶ Una DNF (forma normal disyuntiva) es una disyunción de cláusulas conjuntivas, por ejemplo:

$$\left(X_1 \wedge (\neg X_3) \right) \vee \left(X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge X_7 \right) \vee \left(X_1 \wedge X_3 \right)$$

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

Pregunta DNF

$$\left(X_1 \wedge (\neg X_3)\right) \vee \left(X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge X_7\right) \vee \left(X_1 \wedge X_3\right) \quad (1)$$

Pregunta DNF

$$\left(X_1 \wedge (\neg X_3)\right) \vee \left(X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge X_7\right) \vee \left(X_1 \wedge X_3\right) \quad (1)$$

- ¿Cuál es el valor de (1) cuando todos los variables son 0?

Pregunta DNF

$$\left(X_1 \wedge (\neg X_3)\right) \vee \left(X_2 \wedge (\neg X_5) \wedge X_7\right) \vee \left(X_1 \wedge X_3\right) \quad (1)$$

- ▶ ¿Cuál es el valor de (1) cuando todos los variables son 0?
- ▶ ¿Y cuando todos son 1?

Construyendo una DNF: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Construyendo una DNF: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

DNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

DNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

Demostración.

- ▶ Sea $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una función Booleana de n variables.

DNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

Demostración.

- ▶ Sea $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una función Booleana de n variables.
- ▶ Para cada tupla $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de 0s y 1s, construimos una cláusula conjuntiva $C_{\bar{\alpha}}$:

$$C_{\bar{\alpha}}(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{I}\{(X_1, \dots, X_n) = \bar{\alpha}\} \\ \left(\begin{cases} X_1 & \alpha_1 = 1 \\ \neg X_1 & \alpha_1 = 0 \end{cases} \right) \wedge \dots \wedge \left(\begin{cases} X_n & \alpha_n = 1 \\ \neg X_n & \alpha_n = 0 \end{cases} \right)$$

DNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

Demostración.

- ▶ Sea $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ una función Booleana de n variables.
- ▶ Para cada tupla $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de 0s y 1s, construimos una cláusula conjuntiva $C_{\bar{\alpha}}$:

$$C_{\bar{\alpha}}(X_1, \dots, X_n) = \mathbb{I}\{(X_1, \dots, X_n) = \bar{\alpha}\} \\ \left(\begin{array}{cc} X_1 & \alpha_1 = 1 \\ \neg X_1 & \alpha_1 = 0 \end{array} \right) \wedge \dots \wedge \left(\begin{array}{cc} X_n & \alpha_n = 1 \\ \neg X_n & \alpha_n = 0 \end{array} \right)$$

- ▶ $f(X_1, \dots, X_N) = \bigvee_{\bar{\alpha}: f(\bar{\alpha})=1} C_{\bar{\alpha}}(X_1, \dots, X_N)$



CNFs

Definición (CNF)

- ▶ *una cláusula disyuntiva es una disyunción de variables y sus negaciones, por ejemplo:*

$$((\neg X_1) \vee X_2 \vee X_7), \quad ((\neg Y) \vee (\neg Z)).$$

- ▶ *una CNF (forma normal conjuntiva) es una conjunción de cláusulas disyuntivas, por ejemplo,*

$$(X \vee Y) \wedge ((\neg X) \vee (\neg Y)). \quad (2)$$

CNFs

Definición (CNF)

- ▶ *una cláusula disyuntiva es una disyunción de variables y sus negaciones, por ejemplo:*

$$((\neg X_1) \vee X_2 \vee X_7), \quad ((\neg Y) \vee (\neg Z)).$$

- ▶ *una CNF (forma normal conjuntiva) es una conjunción de cláusulas disyuntivas, por ejemplo,*

$$(X \vee Y) \wedge ((\neg X) \vee (\neg Y)). \quad (2)$$

Teorema

Para cada función booleana existe una DNF equivalente.

Pregunta CNF

?Existe la asignación de las variables tal que la CNF:

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Z) \wedge (Y \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z)$$

toma valor 1?

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Repaso: la ley de Morgan

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B), \quad \neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Repaso: la ley de Morgan

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B), \quad \neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Lema

$$\neg(A_1 \vee \dots \vee A_n) = (\neg A_1) \wedge \dots \wedge (\neg A_n)$$

$$\neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = (\neg A_1) \vee \dots \vee (\neg A_n)$$

Demostración.

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Demostración.

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Demostración.

- ▶ sea f una función booleana.

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Demostración.

- ▶ sea f una función booleana.
- ▶ $\neg f = D$ para una DNF D :

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Demostración.

- ▶ sea f una función booleana.
- ▶ $\neg f = D$ para una DNF D :
- ▶ Entonces, $f = \neg\neg f = \neg D$.

CNFs expresan todo

Teorema

Para cada función booleana existe una CNF equivalente.

Demostración.

- ▶ sea f una función booleana.
- ▶ $\neg f = D$ para una DNF D :
- ▶ Entonces, $f = \neg\neg f = \neg D$.
- ▶ la negación de una DNF se transforma a una CNF según la ley de Morgan:

$$\begin{aligned}\neg \bigvee \bigwedge (X, \neg X) &= \bigwedge \neg \bigwedge (X, \neg X) = \bigwedge \bigvee \neg (X, \neg X) \\ &= \bigwedge \bigvee (X, \neg X).\end{aligned}$$



Construyendo una CNF: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Construyendo una CNF: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$	$\neg f$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Construyendo una CNF: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$	$\neg f$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Completitud funcional

Definición

Un conjunto $\{f_1, \dots, f_m\}$ de funciones booleanas es **funcionalmente completo** si para cada función booleana existe una fórmula equivalente que usa sólo como conectivos los elementos de $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Completitud funcional

Definición

Un conjunto $\{f_1, \dots, f_m\}$ de funciones booleanas es **funcionalmente completo** si para cada función booleana existe una fórmula equivalente que usa como conectivos solo elementos de $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Proposición

$\{\wedge, \vee, \rightarrow\}, \{\neg\}$ no son funcionalmente completos.

$\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$ sí son funcionalmente completos.

Una función es suficiente

Teorema

Existe una función booleana f de 2 variables tal que $\{f\}$ es funcionalmente completo.

Una función es suficiente

Teorema

Existe una función booleana f de 2 variables tal que $\{f\}$ es funcionalmente completo.

Demostración.

A	B	$f(A, B)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	



Una función es suficiente

Teorema

Existe una función booleana f de 2 variables tal que $\{f\}$ es funcionalmente completo.

Demostración.

A	B	$f(A, B)$
1	1	0
1	0	
0	1	
0	0	1



XOR

Definición

\oplus *denota la siguiente función booleana*

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

XOR

Definición

\oplus denota la siguiente función booleana

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Proposición

$$A \oplus B = B \oplus A, A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

XOR

Definición

\oplus denota la siguiente función booleana

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Proposición

$$A \oplus B = B \oplus A, A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

Proposición

$$A \wedge (B \oplus C) = (A \wedge B) \oplus (A \wedge C).$$

Proposición

$$A \oplus B = B \oplus A, A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

Demostración.



Proposición

$$A \oplus B = B \oplus A, A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C.$$

Demostración.



Proposición

$$A \wedge (B \oplus C) = (A \wedge B) \oplus (A \wedge C).$$

Demostración.

$\oplus, \wedge, 1$

Teorema

$\{\oplus, \wedge, 1\}$ es funcionalmente completo.

$\oplus, \wedge, 1$

Teorema

$\{\oplus, \wedge, 1\}$ es funcionalmente completo.

Demostración.

$\neg X =$



forma normal para $\{\oplus, \wedge, 1\}$ – polinomios de Zhegalkin

forma normal para $\{\oplus, \wedge, 1\}$ – polinomios de Zhegalkin

- ▶ un *monomio de Zhegalkin* es una conjunción de las variables (incluso constante 1), por ejemplo:

$$1, \quad X_1 \wedge X_3, \quad X_2 \wedge X_5 \wedge X_1.$$

forma normal para $\{\oplus, \wedge, 1\}$ – polinomios de Zhegalkin

- ▶ un *monomio de Zhegalkin* es una conjunción de las variables (incluso constante 1), por ejemplo:

$$1, \quad X_1 \wedge X_3, \quad X_2 \wedge X_5 \wedge X_1.$$

- ▶ un *polinomio de Zhegalkin* es un \oplus de monomios de Zhegalkin, por ejemplo

$$(X \wedge Y) \oplus X \oplus Y$$

- ▶ ¿Que función calcula este polinomio?

Teorema

Para cada función booleana existe un polinomio de Zhegalkin equivalente.

Construyendo un polinomio de Zhegalkin: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Construyendo un polinomio de Zhegalkin: ejemplo

X_1	X_2	X_3	$f(X_1, X_2, X_3)$	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	1
1	0	0	1	X_1, X_2, X_3
1	0	1	0	$X_1 \wedge X_2, X_1 \wedge X_3, X_2 \wedge X_3$
1	1	0	0	$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$
1	1	1	0	