Relaciones - IIC1253

Marcelo Arenas

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

- Para indicar que $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados a través de R usamos las notaciones: $R(a, b)$, aRb y $(a, b) \in R$.

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

- Para indicar que $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados a través de R usamos las notaciones: $R(a, b)$, aRb y $(a, b) \in R$.

En este capítulo sólo vamos a considerar relaciones binarias, usamos el termino relación para referirnos a ellas.

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A.

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A.

- Tenemos que $R \subseteq A \times A$.

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A.

- Tenemos que $R \subseteq A \times A$.

Ejemplo

Si $A = \mathbb{N}$, las siguientes son relaciones sobre A:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = j\} \\ R_2 &= \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\} \end{aligned}$$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Refleja: Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Refleja: Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$*
- *Irrefleja: Para cada $a \in A$, no se tiene $R(a, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Refleja: Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$*
- *Irrefleja: Para cada $a \in A$, no se tiene $R(a, a)$*

Ejercicio

De ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Simétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Simétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*
- *Asimétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Simétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*
- *Asimétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$*
- *Antisimétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Simétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*
- *Asimétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$*
- *Antisimétrica:* *Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$*

Ejercicio

De ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre $\mathbb{N}$.

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Transitiva: Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Transitiva: Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*
- *Conexa: Para cada $a, b \in A$, se tiene $R(a, b)$ o $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- *Transitiva: Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*
- *Conexa: Para cada $a, b \in A$, se tiene $R(a, b)$ o $R(b, a)$*

Ejercicio

De ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i,i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.

   Respuesta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

5. De un conjunto A y una relación R sobre A tal que R sea refleja, antisimétrica, transitiva y no conexa.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R sobre A es una relación de equivalencia si R es refleja, simétrica y transitiva.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R sobre A es una relación de equivalencia si R es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo

Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $\sim$ una relación definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = c + b$$

Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Definición

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $b \in A$, la clase de equivalencia de b bajo R se define como:

$$[b]_R \quad = \quad \{c \in A \mid R(b,c)\}$$

Clases de equivalencia

Definición

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $b \in A$, la clase de equivalencia de b bajo R se define como:

$$[b]_R \quad = \quad \{c \in A \mid R(b, c)\}$$

Ejercicio

Suponga que $\sim$ es definida como en la lámina anterior. Para cada $(a, b) \in A$, ¿que representa $[(a, b)]_\sim$?

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
   - Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
   - Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

2. Sea $\sim$ una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A. Demuestre que:

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
   - Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?
2. Sea $\sim$ una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A. Demuestre que:
   - Para cada $a \in A$: $[a]_{\sim} \neq \emptyset$

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
   - Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

2. Sea $\sim$ una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A. Demuestre que:
   - Para cada $a \in A$: $[a]_\sim \neq \emptyset$
   - Para cada $a, b \in A$: si $a \sim b$, entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$

Ejercicios

1. Sea n un número natural y $\sim_n$ una relación sobre $\mathbb{Z}$ definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n.
   - Demuestre que $\sim_n$ es una relación de equivalencia
   - Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?
2. Sea $\sim$ una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A. Demuestre que:
   - Para cada $a \in A$: $[a]_\sim \neq \emptyset$
   - Para cada $a, b \in A$: si $a \sim b$, entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$
   - Para cada $a, b \in A$: si es falso que $a \sim b$, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A.

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A.

Conjunto cociente de A dado $\sim$:

$$A/\!\sim \quad = \quad \{[a]_\sim \mid a \in A\}$$

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A.

Conjunto cociente de A dado $\sim$:

$$A/\!\sim \quad = \quad \{[a]_\sim \mid a \in A\}$$

Un conjunto cociente agrupa los elementos indistinguibles.

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia $\sim$ sobre un conjunto A.

Conjunto cociente de A dado $\sim$:

$$A/\sim \quad = \quad \{[a]_\sim \mid a \in A\}$$

Un conjunto cociente agrupa los elementos indistinguibles.

- Algunos conjuntos fundamentales son definidos usando esta noción: $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Un primer ejemplo: $\mathbb{Z}$

Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = c + b$$

Un primer ejemplo: $\mathbb{Z}$

Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = c + b$$

Definimos $\mathbb{Z} = \{[(a, b)]_\sim \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Un primer ejemplo: $\mathbb{Z}$

Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a + d = c + b$$

Definimos $\mathbb{Z} = \{[(a, b)]_\sim \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- n es representado por $[(n, 0)]_\sim$
- $-n$ es representado por $[(0, n)]_\sim$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Primero vamos a definir la suma sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_\sim + [(c, d)]_\sim \quad = \quad [(a + c, b + d)]_\sim$$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Primero vamos a definir la suma sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_\sim + [(c, d)]_\sim \quad = \quad [(a + c, b + d)]_\sim$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim$ y $[(c_1, d_1)]_\sim = [(c_2, d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1, b_1)]_\sim + [(c_1, d_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim + [(c_2, d_2)]_\sim$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Primero vamos a definir la suma sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim + [(c,d)]_\sim \quad = \quad [(a+c, b+d)]_\sim$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim$ y $[(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1,b_1)]_\sim + [(c_1,d_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim + [(c_2,d_2)]_\sim$

Ejercicio

Demuestre que la suma está bien definida.

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_\sim \cdot [(c, d)]_\sim \quad = \quad [(ac + bd, ad + bc)]_\sim$$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a, b)]_\sim \cdot [(c, d)]_\sim \quad = \quad [(ac + bd, ad + bc)]_\sim$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim$ y $[(c_1, d_1)]_\sim = [(c_2, d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1, b_1)]_\sim \cdot [(c_1, d_1)]_\sim = [(a_2, b_2)]_\sim \cdot [(c_2, d_2)]_\sim$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim \cdot [(c,d)]_\sim \quad = \quad [(ac+bd, ad+bc)]_\sim$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim$ y $[(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1,b_1)]_\sim \cdot [(c_1,d_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim \cdot [(c_2,d_2)]_\sim$

Ejercicio

Demuestre que la multiplicación está bien definida.

Relaciones sobre $\mathbb{Z}$

Concluimos definiendo la relación $<$ para $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim < [(c,d)]_\sim \quad \text{si y sólo si} \quad a+d < c+b$$

Relaciones sobre $\mathbb{Z}$

Concluimos definiendo la relación $<$ para $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim < [(c,d)]_\sim \quad \text{si y sólo si} \quad a + d < c + b$$

Tenemos que demostrar que esta relación está bien definida:

- Si $[(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim$ y $[(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1,b_1)]_\sim < [(c_1,d_1)]_\sim$ si y sólo si $[(a_2,b_2)]_\sim < [(c_2,d_2)]_\sim$

Relaciones sobre $\mathbb{Z}$

Concluimos definiendo la relación $<$ para $\mathbb{Z}$:

$$[(a,b)]_\sim < [(c,d)]_\sim \quad \text{si y sólo si} \quad a+d < c+b$$

Tenemos que demostrar que esta relación está bien definida:

- Si $[(a_1,b_1)]_\sim = [(a_2,b_2)]_\sim$ y $[(c_1,d_1)]_\sim = [(c_2,d_2)]_\sim$, entonces $[(a_1,b_1)]_\sim < [(c_1,d_1)]_\sim$ si y sólo si $[(a_2,b_2)]_\sim < [(c_2,d_2)]_\sim$

Ejercicio

Demuestre que $<$ está bien definida.

Ejercicios

1. Defina $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ utilizando una relación de equivalencia y la noción de espacio cociente.

2. Defina las operaciones de suma y multiplicación para $\mathbb{Q}$, y demuestre que estas operaciones están bien definidas.