Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 14 - Repaso I2

14 de noviembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

1 Relaciones vol 1000

Para un conjunto A no vacío, sea $R \subseteq A \times A$ y $T \subseteq A \times A$ dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es una relación de equivalencia, donde $(\cdot)^t$ es la clausura transitiva de $R \cup T$.
2. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R y T, esto es, para toda relación de equivalencia S tal que $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$ se tiene que $(R \cup T)^t \subseteq S$.

Solución:

Parte 1

Sabemos que, por definición,

$$(R \cup T)^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup T)^i.$$

Por demostrar que es reflexiva, simétrica y transitoria.

Reflexiva. $(a, a) \in (R \cup T)^t$ para todo a. Como R y T son reflexivas, entonces en particular $(a, a) \in R$. Por lo tanto, $(a, a) \in (R \cup T)$ implica

$$(a, a) \in (R \cup T)^1 \Rightarrow (a, a) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (R \cup T)^i = (R \cup T)^t.$$

Con esto tenemos que es reflexiva.

Simétrica. Si $(a, b) \in (R \cup T)^t$, entonces $(b, a) \in (R \cup T)^t$.

Si $(a, b) \in (R \cup T)^t = \bigcup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$, entonces $(a, b) \in (R \cup T)^k$ para algún k. Por definición de $(R \cup T)^k$ (composición), existen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que:

$$(a, a_1) \in (R \cup T), \quad (a_1, a_2) \in (R \cup T), \ \ldots, \ (a_{k-1}, b) \in (R \cup T).$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(a, a_1) \in A_1, \ldots, (a_{k-1}, b) \in A_k$, donde cada A_i es R o T. Como R y T son simétricas, cada A_i es simétrica. Por lo tanto:

$$(a_1, a) \in A_1, \quad (a_2, a_1) \in A_2, \ \ldots, \ (b, a_{k-1}) \in A_k,$$

lo que implica que

$$(b, a) \in (R \cup T)^k.$$

Luego:

$$(b, a) \in \bigcup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i = (R \cup T)^t.$$

Con esto tenemos que es simétrica.

Transitiva. Por la definición de clausura transitiva vista en clases, esta es una relación transitiva. Con esto queda demostrado que la clausura transitiva es una relación de equivalencia.

Parte 2

Demostraremos que si S es una relación de equivalencia con $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$, entonces $(R \cup T)^t \subseteq S$.

Sea $(a, b) \in (R \cup T)^t = \bigcup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$. Por lo tanto, existe algún k tal que $(a, b) \in (R \cup T)^k$.

Por definición de $(R \cup T)^k$, existen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que:

$$(a, a_1) \in (R \cup T), \ (a_1, a_2) \in (R \cup T), \ \ldots, \ (a_{k-1}, b) \in (R \cup T).$$

Como $R, T \subseteq S$, concluimos que:

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{k-1}, b) \in S.$$

Como S es una relación de equivalencia, en particular es transitiva, por lo que obtenemos que $(a, b) \in S$.

Con esto demostramos que $(R \cup T)^t$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R y a T.

2 Inducción

(2) Si $T_1 = (N_1, A_1)$ y $T_2 = (N_2, A_2)$ son árboles binarios completos disjuntos (es decir, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$), cada uno con raíz u_1 y u_2, respectivamente, entonces

$$T = (N_1 \cup N_2 \cup \{u\},\ A_1 \cup A_2 \cup \{(u, u_1), (u, u_2)\})$$

es un árbol binario completo con raíz u, donde u es un nodo que no está en $N_1 \cup N_2$. En este caso, llamamos a T_1 y T_2 el subárbol izquierdo y derecho, respectivamente, de u.

Si $T = (N, A)$ es un árbol binario completo y $u \in N$, decimos que u es una *hoja* si no tiene árbol izquierdo ni derecho. Demuestre que en todo árbol binario completo con $n \geq 1$ nodos, la cantidad de hojas es exactamente

$$\frac{n+1}{2}.$$

Solución: Sea T un árbol binario completo con $n \geq 1$ nodos. Queremos demostrar que la cantidad de hojas de T es exactamente

$$\frac{n+1}{2}.$$

Caso base

Si $n = 1$, el árbol tiene un único nodo, que es a la vez raíz y hoja. Por lo tanto, la cantidad de hojas es

$$1 = \frac{1+1}{2},$$

por lo que el caso base se cumple.

Hipótesis inductiva

Supongamos que para todo árbol binario completo con k nodos, donde $1 \leq k < n$, la cantidad de hojas es

$$\frac{k+1}{2}.$$

Paso inductivo

Sea ahora T un árbol binario completo con n nodos. Sea u la raíz de T, y sean T_1 y T_2 sus subárboles izquierdo y derecho, respectivamente. Como T es completo, ambos subárboles existen, y si sus números de nodos son n_1 y n_2, entonces

$$n_1 + n_2 + 1 = n \quad \Longrightarrow \quad n_1 + n_2 = n.$$

Por hipótesis inductiva, cada uno de ellos tiene

$$\text{hojas}(T_1) = \frac{n_1 + 1}{2}, \qquad \text{hojas}(T_2) = \frac{n_2 + 1}{2}.$$

Como todas las hojas de T provienen de sus subárboles, se tiene:

$$\text{hojas}(T) = \text{hojas}(T_1) + \text{hojas}(T_2) = \frac{n_1 + 1}{2} + \frac{n_2 + 1}{2} = \frac{n_1 + n_2 + 2}{2}.$$

Usando que $n_1 + n_2 + 1 = n$, obtenemos:

$$\text{hojas}(T) = \frac{n_1 + n_2 + 1 + 1}{2} = \frac{(n) + 1}{2}$$

Esto es justamente la fórmula deseada para n nodos:

$$\text{hojas}(T) = \frac{n + 1}{2}.$$

Conclusión

Por inducción fuerte, todo árbol binario completo con $n \geq 1$ nodos tiene exactamente

$$\frac{n + 1}{2}$$

hojas.

3 Cardinalidad

Considere los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ con sus órdenes totales usuales $\leq$. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es monótona decreciente si para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$, se tiene que $f(n) \geq f(m)$.

Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ es una función monótona decreciente}\}$$

no es enumerable.

Solución

Realizaremos la demostración por diagonalización de Cantor.
La idea será asumir que el conjunto $\mathcal{G}$ es enumerable, por lo que debe existir una enumeración del conjunto.
Como sabemos, una función corresponde a un conjunto de tuplas, donde en este caso cada tupla t sera tal que $t \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Veamos graficamente la enumeración en la tabla siguiente:

	1	2	3	4	$\cdots$
f_1	$(1, f_1(1))$	$(2, f_1(2))$	$(3, f_1(3))$	$(4, f_1(4))$	$\cdots$
f_2	$(1, f_2(1))$	$(2, f_2(2))$	$(3, f_2(3))$	$(4, f_2(4))$	$\cdots$
f_3	$(1, f_3(1))$	$(2, f_3(2))$	$(3, f_3(3))$	$(4, f_3(4))$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Ahora construiremos una funcion g tal que no pertenezca a la enumeración.

$$g(x) = \begin{cases} f_1(1) - 1, & x = 1 \\ min(g(x-1), f_x(x)) - 1, & x > 1 \end{cases}$$

Es sencillo ver como $g(x)$ es una funcion monotona decreciente, por lo que deberia pertenecer a la enumeracion. Sin embargo, tambien podemos notar que $\forall x : g(x) \neq f_x(x)$, por lo que $\forall x : g \neq f_x$ y por ende g no pertenece a nuestra enumeracion.
Aqui llegamos a una contradicción, dado que habiamos asumido que nuestra enumeracion contenia a todas las funciones monótonas decrecientes, pudiendo asi concluir que esta enumeración no puede existir.
A partir de esto, concluimos por contradicción que $\mathcal{G}$ no es enumerable.