

Relaciones - IIC1253

Marcelo Arenas

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

- ▶ Para indicar que $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados a través de R usamos las notaciones: $R(a, b)$, aRb y $(a, b) \in R$.

Relaciones binarias

Dado: conjuntos A y B

R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$.

- ▶ Para indicar que $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados a través de R usamos las notaciones: $R(a, b)$, aRb y $(a, b) \in R$.

En este capítulo sólo vamos a considerar relaciones binarias, usamos el termino relación para referirnos a ellas.

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A .

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A .

► Tenemos que $R \subseteq A \times A$.

Relaciones binarias

R es una relación sobre A si R es una relación de A en A .

► Tenemos que $R \subseteq A \times A$.

Ejemplo

Si $A = \mathbb{N}$, las siguientes son relaciones sobre A :

$$R_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = j\}$$

$$R_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Refleja:** *Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ *Refleja:* Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$
- ▶ *Irrefleja:* Para cada $a \in A$, no se tiene $R(a, a)$

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ *Refleja:* Para cada $a \in A$, se tiene $R(a, a)$
- ▶ *Irrefleja:* Para cada $a \in A$, no se tiene $R(a, a)$

Ejercicio

De ejemplos de relaciones reflejas e irreflejas sobre \mathbb{N} .

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ ***Simétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ ***Simétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*
- ▶ ***Asimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ ***Simétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$*
- ▶ ***Asimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$*
- ▶ ***Antisimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Simétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$
- ▶ **Asimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces no es cierto $R(b, a)$
- ▶ **Antisimétrica:** Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$, entonces $a = b$

Ejercicio

De ejemplos de relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas sobre \mathbb{N} .

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Transitiva:** *Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Transitiva:** *Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*
- ▶ **Conexa:** *Para cada $a, b \in A$, se tiene $R(a, b)$ o $R(b, a)$*

Propiedades de las relaciones

Definición

Una relación R sobre A es:

- ▶ **Transitiva:** *Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, c)$, entonces $R(a, c)$*
- ▶ **Conexa:** *Para cada $a, b \in A$, se tiene $R(a, b)$ o $R(b, a)$*

Ejercicio

De ejemplos de relaciones transitivas y conexas sobre \mathbb{N} .

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.
2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.
2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre \mathbb{N} .

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre \mathbb{N} .

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Ejercicios

1. Escriba todas las propiedades anteriores en lógica de predicados sobre el vocabulario $\{R\}$.

2. De una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

3. De una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(a, b) \mid a \text{ divide a } b\}$

4. De una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre \mathbb{N} .

Respuesta: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

5. De un conjunto A y una relación R sobre A tal que R sea refleja, antisimétrica, transitiva y no conexa.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R sobre A es una relación de equivalencia si R es refleja, simétrica y transitiva.

Relaciones de equivalencia

Definición

Una relación R sobre A es una relación de equivalencia si R es refleja, simétrica y transitiva.

Ejemplo

Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y \sim una relación definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Demuestre que \sim es una relación de equivalencia.

Clases de equivalencia

Definición

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $b \in A$, la clase de equivalencia de b bajo R se define como:

$$[b]_R = \{c \in A \mid R(b, c)\}$$

Clases de equivalencia

Definición

Dada una relación de equivalencia R sobre A y un elemento $b \in A$, la clase de equivalencia de b bajo R se define como:

$$[b]_R = \{c \in A \mid R(b, c)\}$$

Ejercicio

Suponga que \sim es definida como en la lámina anterior. Para cada $(a, b) \in A$, ¿que representa $[(a, b)]_\sim$?

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

2. Sea \sim una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A . Demuestre que:

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?
2. Sea \sim una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A . Demuestre que:
 - ▶ Para cada $a \in A$: $[a]_{\sim} \neq \emptyset$

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?

2. Sea \sim una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A . Demuestre que:
 - ▶ Para cada $a \in A$: $[a]_{\sim} \neq \emptyset$
 - ▶ Para cada $a, b \in A$: si $a \sim b$, entonces $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

Ejercicios

1. Sea n un número natural y \sim_n una relación sobre \mathbb{Z} definida como $a \sim_n b$ si y sólo si $(a - b)$ es divisible por n .
 - ▶ Demuestre que \sim_n es una relación de equivalencia
 - ▶ Dado $a \in \mathbb{Z}$, ¿qué representa $[a]_{\sim_n}$?
2. Sea \sim una relación de equivalencia (arbitraria) sobre un conjunto A . Demuestre que:
 - ▶ Para cada $a \in A$: $[a]_{\sim} \neq \emptyset$
 - ▶ Para cada $a, b \in A$: si $a \sim b$, entonces $[a]_{\sim} = [b]_{\sim}$
 - ▶ Para cada $a, b \in A$: si es falso que $a \sim b$, entonces $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia \sim sobre un conjunto A .

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia \sim sobre un conjunto A .

Conjunto cociente de A dado \sim :

$$A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia \sim sobre un conjunto A .

Conjunto cociente de A dado \sim :

$$A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

Un conjunto cociente agrupa los elementos indistinguibles.

Conjunto cociente

Dado: Una relación de equivalencia \sim sobre un conjunto A .

Conjunto cociente de A dado \sim :

$$A/\sim = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

Un conjunto cociente agrupa los elementos indistinguibles.

- ▶ Algunos conjuntos fundamentales son definidos usando esta noción: \mathbb{Z} y \mathbb{Q}

Un primer ejemplo: \mathbb{Z}

Sea \sim una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

Un primer ejemplo: \mathbb{Z}

Sea \sim una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

Definimos $\mathbb{Z} = \{[(a, b)]_{\sim} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Un primer ejemplo: \mathbb{Z}

Sea \sim una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida de la siguiente forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Definimos $\mathbb{Z} = \{[(a, b)]_{\sim} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Para $n \in \mathbb{N}$:

- ▶ n es representado por $[(n, 0)]_{\sim}$
- ▶ $-n$ es representado por $[(0, n)]_{\sim}$

Operaciones en \mathbb{Z}

Primero vamos a definir la suma sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} = [(a + c, b + d)]_{\sim}$$

Operaciones en \mathbb{Z}

Primero vamos a definir la suma sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} = [(a + c, b + d)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} + [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} + [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Operaciones en \mathbb{Z}

Primero vamos a definir la suma sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} = [(a + c, b + d)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} + [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} + [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que la suma está bien definida.

Operaciones en \mathbb{Z}

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{\sim}$$

Operaciones en \mathbb{Z}

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces
 $[(a_1, b_1)]_{\sim} \cdot [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} \cdot [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Operaciones en \mathbb{Z}

Ahora vamos a definir la multiplicación sobre \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} = [(ac + bd, ad + bc)]_{\sim}$$

Tenemos que demostrar que esta operación está bien definida:

- ▶ Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} \cdot [(c_1, d_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim} \cdot [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que la multiplicación está bien definida.

Relaciones sobre \mathbb{Z}

Concluimos definiendo la relación $<$ para \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} < [(c, d)]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad a + d < c + b$$

Relaciones sobre \mathbb{Z}

Concluimos definiendo la relación $<$ para \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} < [(c, d)]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad a + d < c + b$$

Tenemos que demostrar que esta relación está bien definida:

- ▶ Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} < [(c_1, d_1)]_{\sim}$ si y sólo si $[(a_2, b_2)]_{\sim} < [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Relaciones sobre \mathbb{Z}

Concluimos definiendo la relación $<$ para \mathbb{Z} :

$$[(a, b)]_{\sim} < [(c, d)]_{\sim} \quad \text{si y sólo si} \quad a + d < c + b$$

Tenemos que demostrar que esta relación está bien definida:

- ▶ Si $[(a_1, b_1)]_{\sim} = [(a_2, b_2)]_{\sim}$ y $[(c_1, d_1)]_{\sim} = [(c_2, d_2)]_{\sim}$, entonces $[(a_1, b_1)]_{\sim} < [(c_1, d_1)]_{\sim}$ si y sólo si $[(a_2, b_2)]_{\sim} < [(c_2, d_2)]_{\sim}$

Ejercicio

Demuestre que $<$ está bien definida.

Ejercicios

1. Defina \mathbb{Q} a partir de \mathbb{Z} utilizando una relación de equivalencia y la noción de espacio cociente.
2. Defina las operaciones de suma y multiplicación para \mathbb{Q} , y demuestre que estas operaciones están bien definidas.