PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía de lógica proposicional

1. Formalice el siguiente argumento en la lógica proposicional:

   > "Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

   Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

2. ¿Son las fórmulas $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ y $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ equivalentes? Demuestre o de un contraejemplo.

3. ¿Son las fórmulas $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ y $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ equivalentes? Demuestre o de un contraejemplo.

4. Encuentre fórmulas en CNF y DNF que sean equivalentes a $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg r \wedge s)$

5. Sea φ la siguiente fórmula en lógica proposicional:

   $$(p \rightarrow (\neg q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \wedge (\neg r)))$$

   Construya una formula ψ en CNF que sea equivalente a φ.

6. Decimos que una fórmula φ está en 3-CNF si φ está en CNF y cada una de sus cláusulas contiene a lo más tres literales. Recuerde que una *cláusula* es una disyunción de literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s)$ está en 3-CNF mientras que $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee s)$ no está en 3-CNF.

   Demuestre que existen fórmulas que no son equivalentes a ninguna fórmula en 3-CNF.

7. Decimos que una fórmula φ está en k-CNF ($k \geq 2$) si φ está en CNF y cada una de sus cláusulas contiene a lo más k literales. ¿Existe algún valor de k para el cual toda fórmula es equivalente a una fórmula en k-CNF?

8. Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo $\neg p$, $(\neg p \vee \neg q)$ y $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s)$ son todas cláusulas de Horn, mientras que $(p \vee q \vee \neg r)$ no es una cláusula de Horn porque tiene dos literales positivos. Demuestre que existe una fórmula que no es equivalente a ningún conjunto de cláusulas de Horn.

9. Sea EQ un conectivo ternario definido como $\text{EQ}(p, q, r) = 1$ si y sólo si $3 \cdot p - 2 \cdot (q + r) \geq 0$. Defina el conectivo EQ utilizando los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.

10. El conectivo lógico `NOR` es definido de la siguiente forma:

p	q	p NOR q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Demuestre que NOR es funcionalmente completo.

11. El conectivo ternario MAYORIA es definido de la siguiente forma:

p	q	r	MAYORIA(p, q, r)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Demuestre que MAYORIA no es funcionalmente completo.

12. El conectivo unario $\bot$ es definido de la siguiente forma:

p	$\bot p$
0	0
1	0

Este conectivo usualmente se denota sin la letra proposicional porque su valor de verdad es siempre 0 (por ejemplo, denotamos $p \wedge (\bot q)$ como $p \wedge \bot$).

Demuestre que $\{\neg, \texttt{MAYORIA}, \bot\}$ es funcionalmente completo.

13. El conectivo unario $\top$ es definido de la siguiente forma:

p	$\top p$
0	1
1	1

¿Es $\{\wedge, \bot, \top\}$ funcionalmente completo?

14. ¿Es $\{\rightarrow, \bot\}$ funcionalmente completo?

15. Sea PAR un conectivo ternario definido de acuerdo a la siguiente tabla de verdad

p	q	r	PAR(p, q, r)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Es decir, $\texttt{PAR}(p, q, r)$ es verdadero en las valuaciones que hacen verdaderas a un número par de variables.

(a) ¿Es la siguiente fórmula una tautología? Demuestre su afirmación.

$$\texttt{PAR}(p, q, r) \vee \texttt{PAR}(p, \neg q, r) \vee \texttt{PAR}(p, q, \neg r)$$

(b) Encuentre una fórmula equivalente a $\texttt{PAR}(p, q, r)$ que utilice solamente conectivos del conjunto $\{\vee, \wedge, \neg\}$. Demuestre que su fórmula es lógicamente equivalente a $\texttt{PAR}(p, q, r)$.

16. Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C.

17. El *principio de los cajones* establece que si $n+1$ objetos son distribuidos en n cajones, entonces al menos habrá un cajón con más de un objeto. Demuestre el principio para $n = 3$ usando lógica proposicional.

18. Demuestre que las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$
$$(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$$
$$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$$

19. ¿Es cierto que si φ y ψ son tautologías, entonces $\varphi \wedge \psi$ es tautología? Demuestre o de un contraejemplo.

20. ¿Es cierto que si $\varphi \wedge \psi$ es una tautología, entonces φ y ψ son tautologías? Demuestre o de un contraejemplo.

21. ¿Es cierto que si φ o ψ es una tautología, entonces $\varphi \vee \psi$ es tautología? Demuestre o de un contraejemplo.

22. ¿Es cierto que si $\varphi \vee \psi$ es una tautología, entonces φ o ψ es una tautología? Demuestre o de un contraejemplo.

23. Sea Σ un conjunto satisfacible de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional que no es una tautología. Además, suponga que Σ y φ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \not\models \varphi$? Demuestre o de un contraejemplo.

24. Demuestre que $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

25. Demuestre que si α es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models \beta$.

26. Demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.

27. Suponga que $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\}$ es un conjunto de fórmula proposicionales tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$? Demuestre o de un contraejemplo.

28. Sean Σ, Σ' conjuntos de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional. Demuestre que si $\Sigma \models \varphi$ entonces $\Sigma \cup \Sigma' \models \varphi$.

29. Demuestre que si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, entonces $\Sigma \models \psi$.

30. Nos gustaría demostrar en lógica proposicional la siguiente propiedad conocida:

    Suponga que f es una función inyectiva de A a B y que A y B son conjuntos finitos con la misma cantidad de elementos. Entonces f debe ser sobreyectiva.

    Formularemos esto para el caso en que A y B tienen dos elementos, digamos que $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$. Consideremos las siguientes variables proposicionales $P = \{p_{1,a}, p_{1,b}, p_{2,a}, p_{2,b}\}$, y las siguientes fórmulas proposicionales:

    $$\begin{aligned} \varphi_f &= (p_{1,a} \vee p_{1,b}) \wedge (p_{1,a} \rightarrow \neg p_{1,b}) \wedge (p_{1,b} \rightarrow \neg p_{1,a}) \wedge \\ &\qquad (p_{2,a} \vee p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \rightarrow \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,b} \rightarrow \neg p_{2,a}) \\ \varphi_i &= (p_{1,a} \rightarrow \neg p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \rightarrow \neg p_{2,b}) \wedge (p_{2,a} \rightarrow \neg p_{1,a}) \wedge (p_{2,b} \rightarrow \neg p_{1,b}) \\ \varphi_s &= (p_{1,a} \vee p_{2,a}) \wedge (p_{1,b} \vee p_{2,b}) \end{aligned}$$

    Note que las variables en P representan una posible función de A a B: si $p_{x,y}$ es verdadero, entonces x es asignado a y. La fórmula φ_f expresa que las variables realmente representan una función. Las fórmulas φ_i y φ_s expresan que la función es inyectiva y sobreyectiva, respectivamente. Demuestre que $\{\varphi_f, \varphi_i\} \models \varphi_s$.

31. Recuerde que una cláusula es una disyunción de literales, y un literal es una variable o su negación. Demuestre que para todo par de cláusulas C_1 y C_2, y todo literal ℓ se cumple:

    $$\{C_1 \vee \ell,\ C_2 \vee \neg \ell\} \models C_1 \vee C_2.$$

32. Sea P un conjunto finito de variables proposicionales y sea $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$ una valuación. Definimos Δ_σ como el conjunto de todas las fórmulas φ sobre P tal que $\sigma(\varphi) = 1$. Demuestre que para todo conjunto Δ de fórmulas sobre P, se cumple que si Δ es satisfacible y $\Delta_\sigma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta = \Delta_\sigma$.

33. Sea P un conjunto de variables proposicionales. Sean φ y ψ fórmulas sobre P cuyo conjunto de variables en común es X. Demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es tautología, entonces existe una fórmula θ sobre las variables X tal que $\varphi \rightarrow \theta$ y $\theta \rightarrow \psi$ son tautologías.

34. Suponga que tenemos un conjunto $T = \{1, \ldots, n\}$ de n torres eléctricas. Algunas torres están conectadas entre sí, vía un cable, y otras no. Las conexiones entre las torres vienen dadas por una conjunto C de parejas de torres que están conectadas vía un cable. Decimos que un subconjunto X de las torres en T es *crítico*, si las torres de X cubren *todos* los cables especificados en C. Más precisamente, X es crítico si para toda conexión $(i, j) \in C$, tenemos que $i \in X$ o $j \in X$ (podrían pasar ambas cosas).

    Como ejemplo, suponga un conjunto $T = \{1, 2, 3, 4\}$ de 4 torres. Las conexiones vía cable están dadas por las parejas $C = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (2, 4)\}$. Se cumple que $X = \{2, 3\}$ es un subconjunto crítico de 2 torres, ya que para cualquier pareja de torres especificada en C, alguna de las dos torres está en X. Por el contrario, $X = \{1, 3\}$ no es crítico, debido a que la conexión $(2, 4) \in C$ no está siendo cubierta, ya que ni 2 ni 4 estarían en X.

Dado un conjunto T de n torres, las conexiones C, y un parámetro $k \leq n$, queremos escribir una fórmula φ en la lógica proposicional tal que:

Existe un subconjunto crítico de k torres si y solo si φ es satisfacible.

Para esto utilizaremos dos tipos de variables proposicionales:

- Variables $p_{i,j}$, donde $1 \leq i, j \leq n$, que expresan que las torres i y j están conectadas.
- Variables $z_{h,i}$ donde $1 \leq h \leq k$ e $1 \leq i \leq n$, que expresan que la torre i es la h-ésima torre en el subconjunto crítico.

La fórmula φ es la conjunción de 4 fórmulas que modelan distintas restricciones. A continuación se pide modelar en lógica proposicional estas restricciones (debe usar las variables indicadas arriba):

a) Inicialización de las variables $p_{i,j}$.

b) Para toda posición $1 \leq h \leq k$, hay una, y solo una h-ésima torre del subconjunto crítico.

c) Si tomamos dos posiciones distintas $1 \leq h, g \leq k$, entonces la h-ésima y la g-ésima torre del subconjunto crítico son distintas.

d) Si dos torres i y j están conectados, entonces alguna de las dos debe estar en el subconjunto crítico.

Observación: Para cada ítem, puede asumir que las restricciones de los ítems anteriores se cumplen.

35. Suponga que tenemos un conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de n personas. Estas personas están conformadas en m grupos $G_1, \ldots, G_m$. Cada grupo G_i puede tener *cualquier* tamaño. Cada persona pertenece a algún grupo, y podría pertenecer a más de un grupo. Adicionalmente, tenemos un conjunto $T = \{1, \ldots, q\}$ de q temas de discusión ($q \leq n$). Una *planificación válida* es una forma de asignarle a cada persona un tema de discusión de manera que se cumplan las siguiente condiciones:

- Cada tema es asignado al menos a una persona.
- Dentro de cada grupo hay al menos dos temas distintos.
- No puede existir un grupo que tenga asignado todos los temas. En otras palabras, dentro de cada grupo hay un tema que no se discute.

Queremos escribir una fórmula φ en la lógica proposicional tal que:

Existe una planificación válida si y solo si φ es satisfacible.

Para esto, utilizaremos dos tipos de variables proposicionales:

- Variables p_{ik}, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq k \leq m$ que expresan que la persona i pertenece al k-ésimo grupo, es decir, $i \in G_k$.
- Variables x_{it}, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq t \leq q$, que expresan que la persona i tiene asignado el tema t en la planificación válida.

La fórmula φ es la conjunción de 5 fórmulas que modelan distintas restricciones. A continuación se pide modelar en lógica proposicional estas restricciones (debe usar las variables indicadas arriba):

a) Inicialización de las variables p_{ik}.

b) Para cada persona $1 \leq i \leq n$, hay uno, y solo un tema t asignado a la persona i.

c) Para cada tema $1 \leq t \leq q$, hay alguna persona i que tiene asignado ese tema.

d) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay dos personas distintas i y j en el k-ésimo grupo G_k (es decir, $i, j \in G_k$) tal que sus temas asignados son distintos.

e) Para cada $1 \leq k \leq m$, hay algún tema t, tal que no es asignado a ninguna persona dentro del k-ésimo grupo G_k.

Observación: Para cada ítem, puede asumir que las restricciones de los ítems anteriores se cumplen.

36. Suponga que tenemos un conjunto $V = \{1, \ldots, n\}$ de n personas. Algunas parejas de personas son compatibles y otras no. Estas relaciones de compatibilidad están descritas por un conjunto E de parejas de personas compatibles. Es decir, $(i, j) \in E$ si y sólo si las personas i y j son compatibles. Un *núcleo* para V y E es un subconjunto C de personas de V que son compatible entre ellas, es decir, tal que para todo par (i, j) de personas en C se cumple que $(i, j) \in E$.

    A modo de ejemplo, suponga que nuestro conjunto de personas es $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y nuestro conjunto de compatibilidades es $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\}$. Tenemos que $C = \{1, 2, 3\}$ es un núcleo para V y E de 3 personas, ya que tenemos las compatibilidades $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$. Por otra parte, si escogemos $C = \{1, 3, 4\}$, no obtenemos un núcleo ya que 3 y 4 no son compatibles.

    Dado un conjunto V de n personas, un conjunto de compatibilidades E y un parámetro $k \leq n$, nuestra misión es encontrar un núcleo con k personas para V y E. Por supuesto, queremos utilizar la lógica proposicional para resolver este problema. Escriba una fórmula en lógica proposicional φ tal que:

    Existe un núcleo con k personas para V y E si y sólo si φ es satisfacible.

    Debe demostrar que su fórmula φ es correcta, es decir, que cumple la propiedad enunciada arriba.

    Para definir φ, **debe** utilizar las siguientes variables proposicionales:

    - Variables $p_{i,j}$, donde $1 \leq i, j \leq n$, que expresan que i y j son compatibles.
    - Variables $x_{h,i}$ donde $1 \leq h \leq k$ e $1 \leq i \leq n$, que expresan que la persona i es la h-ésima persona del núcleo.

37. Sea $G = (N, A)$ un grafo. Un camino en G es una secuencia $a_1, \ldots, a_k$ de elementos en N tal que $k \geq 2$ y $(a_i, a_{i+1}) \in A$ para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. El largo del camino $a_1, \ldots, a_k$ es $k - 1$, vale decir, es el número de aristas en él. Además, dados elementos $b, c \in N$, un camino $a_1, \ldots, a_k$ en G va desde b a c si $a_1 = b$ y $a_k = c$. Finalmente, un camino $a_1, \ldots, a_k$ en G se dice simple si $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $i \neq j$.

    En las siguiente preguntas, suponga que $G = (N, A)$ es un grafo donde $N = \{1, \ldots, n\}$ y $n \geq 2$.

    (a) Construya una fórmula proposicional φ tal que: φ es satisfacible si y sólo si existe un camino en G desde 1 a n.

    (b) Construya una fórmula proposicional ψ tal que: ψ es satisfacible si y sólo si existe un camino simple en G desde 1 a n.

    (c) Construya una fórmula proposicional θ tal que: θ es satisfacible si y sólo si existe un camino simple en G desde 1 a n de largo par.

    Para resolver las tres preguntas debe utilizar las variables proposicionales $c_{i,j}$ que indican que en la posición i del camino el nodo es j, donde $i \in \{1, \ldots, \ell + 1\}$ si el largo de camino es ℓ y $j \in \{1, \ldots, n\}$.

38. Considere en esta pregunta la definición de camino simple en un grafo dada en la pregunta anterior. Dado un grafo $G = (N, A)$, decimos que G contiene un *circuito Hamiltoniano* si existe un camino simple $a_1, \ldots, a_n$ en G tal que:

- n es el número de nodos de N,
- $(a_n, a_1) \in A$.

Dado un grafo $G = (N, A)$, construya una fórmula φ tal que φ es satisfacible si y sólo si G tiene un circuito Hamiltoniano. En particular, si el grafo G tiene n nodos, entonces la fórmula proposicional φ debe utilizar las variables $p_{i,v}$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $v \in N$, las cuales indican que el nodo v está en la posición i en el circuito Hamiltoniano.

39. Un algoritmo es eficiente si el número de pasos ejecutado por el algoritmo es n^c cuando la entrada tiene largo n, donde c es una constante. Por ejemplo, un algoritmo que funciona en tiempo n^2 es eficiente mientras que un algoritmo que funciona en tiempo 2^n no lo es.

    Encuentre un algoritmo eficiente que verifique si una fórmula en DNF es satisfacible.

40. Considerando la definición de algoritmo eficiente en la pregunta anterior, encuentre un algoritmo eficiente que verifique si una fórmula en CNF es una tautología.