Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7 - Repaso I1

26 de septiembre de 2024

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

---

1. Lógica proposicional

Recuerde que una cláusula es una disyunción de literales, y un literal es una variable o su negación. Demuestre que para todo par de cláusulas C_1 y C_2, y todo literal ℓ se cumple:

$$\{C_1 \vee \ell,\ C_2 \vee \neg \ell\} \ \models\ C_1 \vee C_2.$$

Solución
Sea σ una valuación tal que $\sigma(\{C_1 \vee \ell, C_1 \vee \neg\ell\}) = 1$. Esto significa que $\sigma(C_1 \vee \ell) = 1$ y $\sigma(C_2 \vee \neg\ell) = 1$. Hay cuatro casos:

1. $\sigma(C_1) = 1$ y $\sigma(C_2) = 1$: en este caso $\sigma(C_1 \vee C_2) = 1$.
2. $\sigma(C_1) = 1$ y $\sigma(C_2) = 0$: en este caso $\sigma(C_1 \vee C_2) = 1$.
3. $\sigma(C_1) = 0$ y $\sigma(C_2) = 1$: en este caso $\sigma(C_1 \vee C_2) = 1$.
4. $\sigma(C_1) = 1$ y $\sigma(C_2) = 0$: en este caso $\sigma(C_1 \vee C_2) = 0$. Sin embargo, como $\sigma(C_1 \vee \ell) = 1$ y $\sigma(C_1) = 0$, esto fuerza $\sigma(\ell) = 1$. Similarmente, la segunda fórmula fuerza $\sigma(\neg\ell) = 1$. Esto es una contradicción, por lo que este caso no es posible.

Todos los casos posibles llevan a $\sigma(C_1 \vee C_2) = 1$, concluyendo la demostración.

2. Modelamiento

Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C.

Solución: Para $1 \leq i, j, k \leq 3$, definimos las siguientes variables proposicionales:

$$p_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si en la fila } i, \text{ columna } j, \text{ está el valor } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos además dos conjuntos auxiliares:

$$M = \{(i, j, k) \mid \text{En la matriz } C \text{ aparece el número } k \text{ en la fila } i, \text{ columna } j\}$$

es decir, el conjunto que nos da los tríos de valores predeterminados, y

$$S_l = \{(l_1, l_2, l_3) \in \{1, 2, 3\}^3 \mid l_1 + l_2 + l_3 = l\}$$

es decir, los tríos de números que se pueden utilizar para completar la matriz y suman l.

A partir de ellos podemos definir las siguientes proposiciones:

Los elementos originales de la matriz aparecen en la solución:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{(i,j,k) \in M} p_{ijk}$$

Todos los elementos de la matriz tienen un número asignado:

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} (p_{ij1} \vee p_{ij2} \vee p_{ij3})$$

En cada elemento de la matriz existe un único número asignado:

$$\varphi_3 = \bigwedge_{i=1}^{3} \bigwedge_{j=1}^{3} ((p_{ij1} \to (\neg p_{ij2} \wedge \neg p_{ij3})) \wedge (p_{ij2} \to (\neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij3})) \wedge (p_{ij3} \to (\neg p_{ij1} \wedge \neg p_{ij2})))$$

Las siguientes fórmulas establecen que la matriz es un cuadrado mágico. Para esto, para cada fila y columna que no sea la primera fila, escribiremos una fórmula que diga que suma lo mismo que la primera fila, donde esta suma puede estar entre 3 y 9.

La segunda fila suma lo mismo que la primera:

$$\varphi_4 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3) \in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3) \in S_l} (p_{21m_1} \wedge p_{22m_2} \wedge p_{23m_3}) \right) \right)$$

La tercera fila suma lo mismo que la primera:

$$\varphi_5 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3) \in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3) \in S_l} (p_{31m_1} \wedge p_{32m_2} \wedge p_{33m_3}) \right) \right)$$

La primera columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_6 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3) \in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3) \in S_l} (p_{1m_1 1} \wedge p_{2m_1 2} \wedge p_{3m_1 3}) \right) \right)$$

La segunda columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_7 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3) \in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3) \in S_l} (p_{1m_1 2} \wedge p_{2m_2 2} \wedge p_{3m_3 2}) \right) \right)$$

La tercera columna suma igual que la primera fila:

$$\varphi_8 = \bigwedge_{l=3}^{9} \left(\left(\bigvee_{(l_1,l_2,l_3) \in S_l} (p_{11l_1} \wedge p_{12l_2} \wedge p_{13l_3}) \right) \to \left(\bigvee_{(m_1,m_2,m_3) \in S_l} (p_{1m_1 3} \wedge p_{2m_2 3} \wedge p_{3m_3 3}) \right) \right)$$

Fórmula final:

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{8} \varphi_i$$

la cual será satisfacible si y sólo si la matriz es completable.

3. Lógica de Predicados

Para esta pregunta considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{F, P, A, N, E, H\}$, donde F, P, A, N son símbolos unarios, E es binario, y H es ternario. Además, considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\text{dom}) &= \text{Los Pokemon.}\\
\mathcal{I}(F(x)) &= x \text{ es de naturaleza fuego.}\\
\mathcal{I}(A(x)) &= x \text{ es de naturaleza agua.}\\
\mathcal{I}(P(x)) &= x \text{ es de naturaleza planta.}\\
\mathcal{I}(N(x)) &= x \text{ es de naturaleza normal.}\\
\mathcal{I}(E(x,y)) &= \text{los ataques de } x \text{ son efectivos contra } y.\\
\mathcal{I}(H(x,y,z)) &= z \text{ fue procreado entre } x \text{ e } y.
\end{aligned}$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados:

1. Todos los Pokemon son de alguna naturaleza.

$\varphi_1 = \forall x(F(x) \lor A(x) \lor P(x) \lor N(x))$

2. Algunos Pokemon poseen 2 naturalezas.

La palabra algunos en plural implica la existencia de más de un pokemon con 2 naturalezas. Definimos el predicado auxiliar $2\text{nat}(x)$ que expresa que x tiene dos naturalezas.

$$\begin{aligned}
2\text{nat}(x) =& (F(x) \land A(x)) \lor (F(x) \land P(x)) \lor (F(x) \land N(x)) \lor\\
& (A(x) \land P(x)) \lor (A(x) \land N(x)) \lor (P(x) \land N(x))\\
\varphi_2 =& \exists x_1 \exists x_2 (\neg(x_1 = x_2) \land 2\text{nat}(x_1) \land 2\text{nat}(x_2))
\end{aligned}$$

3. Los ataques de naturaleza agua son efectivos contra pokemon de naturaleza fuego, los de naturaleza fuego son efectivos contra pokemon de naturaleza planta y los ataques de naturaleza planta son efectivos contra pokemon de naturaleza agua.

$\varphi_3 = \forall x \forall y(((A(x) \wedge F(y)) \vee (F(x) \wedge P(y)) \vee (P(x) \wedge A(x))) \rightarrow E(x,y))$

4. Si dos Pokemon son de la misma naturaleza, entonces sus hijos son de aquella naturaleza.

Para evitar ambigüedades en esta pregunta asumimos que un pokemon solo puede tener una naturaleza.

$$\begin{aligned}\varphi_4 =& \forall x \forall y \forall z(H(x,y,z) \rightarrow (((F(x) \wedge F(y)) \rightarrow F(z)) \wedge ((A(x) \wedge A(y)) \rightarrow A(z)) \wedge \\ & ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(z)) \wedge ((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow N(z))))\end{aligned}$$

5. Los Pokemon que son hermanos comparten las mismas naturalezas.

Para evitar ambigüedades en esta pregunta asumimos que un pokemon solo puede tener una naturaleza.

$$\begin{aligned}\varphi_5 =& \forall x \forall y \forall z \forall w((H(x,y,z) \wedge H(x,y,w) \wedge \neg(z = w)) \rightarrow (F(z) \leftrightarrow F(w)) \wedge \\ & (A(z) \leftrightarrow A(w)) \wedge (P(z) \leftrightarrow P(w)) \wedge (N(z) \leftrightarrow N(w)))\end{aligned}$$

4. Conjuntos

1. Sean A y B conjuntos. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   (a) $A \subseteq B$ si y sólo si $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

   Solución
   i) $\rightarrow$: Sea $x \in \mathcal{P}(A)$. Esto quiere decir que $x \subseteq A$. Como $A \subseteq B$, tenemos que $x \subseteq B$. Con ello, $x \in \mathcal{P}(B)$, con lo que concluímos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
   ii) $\leftarrow$: Sea $x \in A$. Tenemos que $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Como $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, se cumple que $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$. Esto quiere decir que $\{x\} \subseteq B$, con lo que $x \in B$ y concluímos que $A \subseteq B$.

   (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

   Solución
   Sea $x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Esto quiere decir que $x \subseteq A$ o $x \subseteq B$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $x \subseteq A$. Luego, $x \subseteq A \cup B$, con lo que $x \in \mathcal{P}(A \cup B)$, lo que permite concluir que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

   (c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Solución
Demostramos ambas contenciones.
i) $\subseteq$: Sea $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Esto quiere decir que $x \subseteq A$ y $x \subseteq B$. Luego, $x \subseteq A \cap B$, con lo que $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$, y concluímos que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.
ii) $\supseteq$: Sea $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Esto quiere decir que $x \subseteq A \cap B$, lo que implica $x \subseteq A$ y $x \subseteq B$, con lo que $x \in \mathcal{P}(A)$ y $x \in \mathcal{P}(B)$, llevando finalmente a $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Como $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ y $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, concluímos que $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

2. Una *tupla* con dos elementos a y b se define como $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. El *producto cartesiano* entre dos conjuntos A y B se denota $A \times B$ y es el conjunto de todas las tuplas (a, b) que cumplen $a \in A$ y $b \in B$. Demuestre usando los axiomas de la teoría de conjuntos que si A y B son conjuntos bien definidos, entonces $A \times B$ existe.

Solución
Primero necesitamos alguna forma de obtener elementos de la forma $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Notemos que el segundo elemento de este conjunto tiene un elemento de A y uno de B, por lo que necesitamos definir la unión $A \cup B$.
Por axioma de emparejamiento, el conjunto $\{A, B\}$ existe. Por axioma de unión, existe un conjunto cuyos elementos son todos los elementos que están en A o en B, que denotaremos $C = A \cup B$.
Ahora necesitamos obtener $\{a\}$ y $\{a, b\}$ como elementos. Para hacer esto podemos utilizar el conjunto potencia. El axioma del conjunto potencia nos dice que existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de otro conjunto. Este conjunto se denota $\mathcal{P}(C)$. Notemos que como $a, b \in C$, $\{a, b\} \in \mathcal{P}(C)$. Lo mismo para $\{a\}$.
Ya tenemos a $\{a\}$ y a $\{a, b\}$ como elementos. Ahora necesitamos juntarlos en un conjunto para obtener el elemento final $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Como ambos están en $\mathcal{P}(C)$, si tomamos nuevamente el conjunto potencia (permitido nuevamente por el axioma del conjunto potencia), obtendremos lo que deseamos: $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$. Con ello, todos los elementos de esta forma están en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$. Pero aún hay muchos otros elementos, lo que es un problema.
Finalmente, debemos restringir $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ para que solo tenga a los elementos de la forma $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Para ello, usaremos el axioma de selección. Definimos la fórmula

$$\varphi(x, Y_1, Y_2) := \exists z_1 \exists z_2 (z_1 \in Y_1 \wedge z_2 \in Y_2 \wedge x = \{\{z_1\}, \{z_1, z_2\}\})$$

y aplicamos el axioma de selección para definir el conjunto final

$$A \times B = \{d \mid d \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(C)) \wedge \varphi(d, A, B)\}$$