Unidad VI: Funciones y Cardinalidad

Funciones: operaciones y palomar

Clase 16 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

Operaciones sobre relaciones

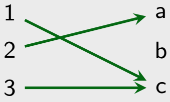
Definición:

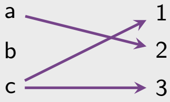
- Sea R una relación de A en B. La relación **inversa** R^{-1} de B en A se define como:

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$.





$R = \{(1, c), (2, a), (3, c)\}$ $\qquad$ $R^{-1} = \{(c, 1), (a, 2), (c, 3)\}$

Operaciones sobre relaciones

Definición:

- Sea R una relación de A en B. La relación **inversa** R^{-1} de B en A se define como:

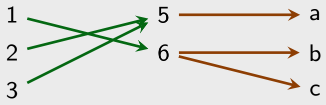
$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$$

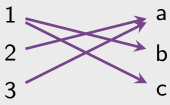
- Sea R una relación de A en B y S una relación de B en C.
  La relación **composición** $R \circ S$ de A en C se define como:

$$R \circ S = \{(a,c) \in A \times C \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R \text{ y } (b,c) \in S\}$$

Ejemplos:

Sea $A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,6\}$, $C = \{a,b,c\}$.





$$R = \{(1,6),(2,5),(3,5)\}$$
$$S = \{(5,a),(6,b),(6,c)\}$$

$$R \circ S = \{(1,b),(1,c),(2,a),(3,a)\}$$

Sea $f : A \to B$ una función.

- f^{-1} es su relación inversa.
- Recordar que toda función f es una relación, luego la relación f^{-1} **siempre** está bien definida.
- f^{-1} podría **no** ser una función.

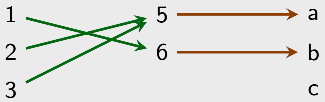
¿Cuándo sucede que f^{-1} es una función?

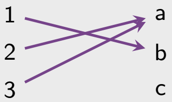
Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

- $f \circ g$ es la composición de f y g.
- $f \circ g$ **siempre** es una función.

Ejemplos:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6\}$, $C = \{a, b, c\}$.





$f = \{(1, 6), (2, 5), (3, 5)\}$

$g = \{(5, a), (6, b)\}$

$f \circ g = \{(1, b), (2, a), (3, a)\}$

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

- $f \circ g$ es la composición de f y g.
- $f \circ g$ **siempre** es una función.

Proposición:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Entonces para todo $a \in A$ y $c \in C$:

$$(a, c) \in f \circ g \iff g(f(a)) = c$$

OJO: escribiremos $f \circ g$ y **no** $g \circ f$ (que es lo usual en cálculo).

Proposición:

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial.
2. f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = B$.

Demostración:

Item (1): $(\Rightarrow)$
Supongamos que $(b, a_1) \in f^{-1}$ y $(b, a_2) \in f^{-1}$.

Por demostrar: $a_1 = a_2$.

Por definición de f^{-1}, tenemos que $(a_1, b) \in f$ y $(a_2, b) \in f$.
Es decir: $f(a_1) = b$ y $f(a_2) = b$.

Como f es inyectiva, concluimos que $a_1 = a_2$.

Proposición:

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial.
2. f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = B$.

Demostración:

Item (1): $(\Leftarrow)$ Ejercicio.

Proposición:

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial.
2. f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = B$.

Corolario:

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

f es biyectiva si y sólo si f^{-1} es una función.

Teorema:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

1. Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

Demostración:

Item (1):

Sean $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$.

Por demostrar: $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

Como f es inyectiva, tenemos que $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Como g es inyectiva, concluimos que $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

Teorema:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

1. Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

Demostración:

Item (2): Ejercicio.

Teorema:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

1. Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $f \circ g$ es sobreyectiva.

Propuesto: demuestre que el reverso de cada implicación es falso.

Corolario:

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

- En esta sala hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
- En Santiago, hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.
- Sea $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$. Siempre hay dos números en S tal que uno divide al otro.

Notación: $|S|$ denota la **cardinalidad** del conjunto S.

Principio del palomar

Principio del palomar:

> *"Si N* **palomas** *se distribuyen en M* **palomares** *y tengo más palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma"*

Principio del palomar

Principio del palomar (en términos de funciones):

Si $f : A \to B$ y $|B| < |A|$, entonces f **no** puede ser inyectiva, es decir:

$$\text{existen } a_1, a_2 \in A \text{ tal que } a_1 \neq a_2 \text{ y } f(a_1) = f(a_2).$$

Principio muy útil y usado en matemáticas y computación!!

Ejemplos:

- En esta sala hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de estudiantes > 40
  posibles edades entre 17 y 50,
  luego, cantidad de años de nacimiento $= 34$.

- En Santiago, hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.500.000$
  cantidad de pelos en un cabeza < 300.000

Ejemplos:

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:
Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$
Función:	$f(a_i)$ = el conjunto que contiene a a_i.

Ejemplos:

- Sea $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$.
  Siempre hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Palomas:	$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$
Palomares:	$1, 3, 5, \ldots, 2n-3, 2n-1$
Función:	$F(a_i) = m$