PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Matemáticas Discretas - IIC1253
Guía de cardinalidad

1. Demuestre que la relación $\approx$ (ser equinumeroso) es una relación de equivalencia.

2. ¿Es $\approx$ una relación antisimétrica? Demuestre o de un contraejemplo.

3. Demuestre que, como subconjuntos de $\mathbb{R}$, se tiene $[0,1] \approx [2,3] \cup [4,5]$.

4. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que $(A \cup B) \approx (C \cup D)$.

5. Sean A, B dos conjuntos tal que A es infinito y B es finito. Demuestre que $A \setminus B \approx A$.

6. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestre que si $A \approx C$, entonces $B \approx C$.

7. Sean A, B conjuntos infinitos. Demuestre que existen conjuntos C, D tales que $A \approx C$, $B \approx D$ y $C \cap D = \emptyset$.

8. Demuestre que el conjunto de todas las rectas en el plano es equinumeroso al conjunto de todos los puntos del plano. (*Hint: tanto los puntos como las rectas se determinan por pares de números*).

9. Un círculo C en el plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un conjunto de puntos $\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ donde a, b, r son números reales fijos y $r > 0$. Dados dos círculos C_1 y C_2, demuestre que C_1 es equinumeroso con C_2.

10. Sea $\preceq$ un orden total sobre un conjunto infinito A tal que para todo $a \in A$, el conjunto $\{x \in A \mid x \preceq a\}$ es finito. Demuestre que $A \approx \mathbb{N}$. (*Hint: demuestre que*

$$f \colon A \to \mathbb{N}, \qquad f(a) = |\{x \in A \mid x \preceq a \text{ y } x \neq a\}|$$

es biyectiva).

11. Sean A, B conjuntos enumerables. Demuestre que $A \cup B$ es enumerable.

12. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que A_i es enumerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \approx \mathbb{N}$$

13. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que $A_i \preceq \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Demuestre que:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \preceq \quad \mathbb{N}$$

14. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que $A_i \prec \mathbb{N}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, y sea B el siguiente conjunto:

$$B \quad = \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

¿Es cierto que $B \prec \mathbb{N}$? Demuestre o de un contraejemplo.

15. Demuestre que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es enumerable, vale decir, construya una biyección $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

16. Demuestre que $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\}$ es un conjunto enumerable.

17. Demuestre que $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito o } (\mathbb{N} \smallsetminus A) \text{ es finito}\}$ es un conjunto enumerable.

18. Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con el orden total usual $\leq$. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es monótona decreciente si para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$, se tiene que $f(n) \geq f(m)$. Demuestre que $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ es una función monótona decreciente}\}$ es un conjunto enumerable.

19. Considere los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ con sus órdenes totales usuales $\leq$. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es monótona decreciente si para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$, se tiene que $f(n) \geq f(m)$. Demuestre que $\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ es una función monótona decreciente}\}$ no es un conjunto enumerable.

20. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que los siguientes conjuntos son equinumerosos:

$$\{f \mid f : A \to B \text{ es una función}\} \ \text{ y } \ \{g \mid g : C \to D \text{ es una función}\}$$

21. Sea $\{0,1\}^\omega$ el conjunto de los strings infinitos de la forma $a_0a_1a_2a_3\cdots$, donde cada a_i $(i \in \mathbb{N})$ es 0 ó 1. Demuestre que $\{0,1\}^\omega$ es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$.

22. Sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito y } (\mathbb{N} \smallsetminus A) \text{ es infinito}\}$. Por ejemplo, el conjunto P de los número pares está en $\mathcal{I}$, ya que P es infinito y su complemento $(\mathbb{N} \smallsetminus P)$, los números impares, también es infinito. Demuestre que $\mathcal{I}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

23. Sea $\mathcal{T} = \{R \mid R \text{ es un orden total sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

24. Sea $\mathcal{E} = \{\sim \mid \sim \text{ es una relación de equivalencia sobre } \mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{E}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

25. Demuestre que los siguientes conjuntos de números reales son equinumerosos: $[0,1]$ y $[0,1] \smallsetminus \{\frac{1}{2}\}$.

26. Demuestre que los siguientes conjuntos de números reales son equinumerosos: $(0,1)$ y $[0,1]$, $(0,1]$ y $[0,1)$.

27. Demuestre que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

28. Demuestre que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

29. Una recta en el plano real $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define como $\{(x, y) \mid y = ax + b\}$, donde a y b son elementos fijos en $\mathbb{R}$. Demuestre que un número enumerable de rectas no puede cubrir el plano real.