Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 1 - Lógica Proposicional

15 de agosto de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

1. Tabla de Verdad

El conectivo ternario EQ se define como:

$$EQ(p,q,r) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } 3(q+r) - 5p \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la tabla de verdad de EQ

Solución

p	q	r	$3(q+r)-5p$	$EQ(p,q,r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	3	1
0	1	0	3	1
0	1	1	6	1
1	0	0	-5	0
1	0	1	-2	0
1	1	0	-2	0
1	1	1	1	1

2. Equivalencia Lógica

Demuestre que

$$(p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \wedge (p \wedge (r \vee q)) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \wedge q$$

Solución

$$
\begin{aligned}
&(p \lor (p \to q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \\
&\equiv (p \lor (\neg p \lor q)) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv ((p \lor \neg p) \lor q) \land \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/Asociatividad de } \lor \\
&\equiv \neg(r \land \neg p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && /((p \lor \neg p) \lor q) \text{ es una tautología} \\
&\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (r \to q) && \text{/De Morgan} \\
&\equiv (\neg r \lor p) \land (p \land (r \lor q)) \land (\neg r \lor q) && \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv p \land (\neg r \lor p) \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{/Asociatividad de} \land \\
&\equiv p \land (r \lor q) \land (\neg r \lor q) && \text{/Absorción} \land \\
&\equiv p \land ((r \land \neg r) \lor q) && \text{/Distributiva} \\
&\equiv p \land q && /r \land \neg r \text{ es una contradicción}
\end{aligned}
$$

3. CNF, DNF y Tabla de Verdad

(a) Encuentre fórmulas en CNF y DNF que sean equivalentes a $(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s)$.

(b) Definimos el conectivo ternario `Mayoria`(p, q, r) de manera que `Mayoria`$(p, q, r) = 1$ si y sólo si el valor que más aparece entre p, q y r es 1. Escriba la tabla de verdad para `Mayoria`(p, q, r).

(c) Escriba una fórmula que use sólo los conectivos $\land$, $\lor$, $\neg$ y que sea equivalente a `Mayoria`(p, q, r).

Solución

(a) Primero, busquemos una fórmula en DNF equivalente:

$$
\begin{aligned}
&(p \lor \neg q) \to (r \lor \neg s) && \\
&\equiv \neg(p \lor \neg q) \lor (r \lor \neg s) && \text{/Ley de implicancia} \\
&\equiv (\neg p \land \neg(\neg q)) \lor (r \lor \neg s) && \text{/Ley de Morgan} \\
&\equiv (\neg p \land q) \lor (r \lor \neg s) && \text{/Doble negación} \\
&\equiv (\neg p \land q) \lor r \lor \neg s && \text{/Asociatividad de } \lor
\end{aligned}
$$

Notar que la última fórmula está en DNF. Ahora, busquemos una fórmula en CNF equivalente:

$$
\begin{aligned}
&(p \vee \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s) \\
&\equiv (\neg p \wedge q) \vee (r \vee \neg s) && \text{/Desarrollo anterior} \\
&\equiv (\neg p \vee (r \vee \neg s)) \wedge (q \vee (r \vee \neg s)) && \text{/Distributividad} \\
&\equiv (\neg p \vee r \vee \neg s) \wedge (q \vee r \vee \neg s) && \text{/Asociatividad}
\end{aligned}
$$

Notar que la última fórmula está en CNF. Otra alternativa es hacer la tabla de verdad de $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s)$, escribir la fórmula en DNF equivalente, según el método visto en clases, y luego utilizar distributividad para obtener una fórmula en CNF equivalente. **Esta solución se deja como propuesta**.

(b) La tabla de verdad de Mayoria(p, q, r):

p	q	r	Mayoria (p, q, r)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(c) Podemos usar el método visto en clases para obtener una fórmula DNF equivalente desde una tabla de verdad:

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$