Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Pauta Tarea 5

15 de Octubre de 2025

2º semestre 2025 - Profesores M. Arenas - A. Kozachinskiy - M. Romero

---

Pregunta 1

Sea A un conjunto y sean R_1, R_2 dos relaciones de equivalencia sobre A. ¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? Demuestre o de un contraejemplo.

a) $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia.

b) $R_1 \cup R_2$ es una relación de equivalencia

c) $xR_1y \to xR_2y$ para todo $x, y \in A$ si y sólo si $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ para todo $x \in A$.

Solución

a) y c) son verdaderas y b) es falsa.

(a) La afirmación es verdadera. Sean R_1, R_2 dos relaciones de equivalencia sobre A. Mostramos que $R_1 \cap R_2$ también es una relación de equivalencia.

Primero, mostramos que $R_1 \cap R_2$ es refleja. Tomamos $x \in A$ arbitrario y demostramos que $(x, x) \in R_1 \cap R_2$. Ya que R_1, R_2 son reflejas, tenemos $(x, x) \in R_1, (x, x) \in R_2$. Por lo tanto, $(x, x) \in R_1 \cap R_2$.

Segundo, mostramos que $R_1 \cap R_2$ es símetrica. Es decir, mostramos que $(x, y) \in R_1 \cap R_2 \to (y, x) \in R_1 \cap R_2$ para todo $x, y \in A$. Effectivamente, si $(x, y) \in R_1 \cap R_2$, entonces $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \in R_2$. Ya que R_1 y R_2 son simétricas, tenemos $(y, x) \in R_1$ y $(y, x) \in R_2$. Por lo tanto, $(y, x) \in R_1 \cap R_2$.

Finalmente, mostramos que $R_1 \cap R_2$ es transitiva. Es decir, mostramos que $((x, y) \in R_1 \cap R_2 \wedge (y, z) \in R_1 \cap R_2)) \to (x, z) \in R_1 \cap R_2$ para todo $x, y, z \in A$. Si $(x, y) \in R_1 \cap R_2 \wedge (y, z) \in$

$R_1 \cap R_2$, entonces $(x, y) \in R_1, (y, z) \in R_1, (x, y) \in R_2, (y, z) \in R_2$. Ya que R_1, R_2 son transitivas, entonces $(x, z) \in R_1, (x, z) \in R_2$. Por lo tanto $(x, z) \in R_2$.

(b) La afirmación es falsa. Como un contraejemplo, vamos a definir $A = \mathbb{N}$, $R_1 =\equiv_2$ (tener el mismo resto módulo 2) y $R_2 =\equiv_3$ (tener el mismo resto módulo 3). La unión $R_1 \cup R_2$ entonces es la relación "tener el mismo resto módulo 2 o el mismo resto módulo 3". Esa relacion no es una relación de equivalencia porque no es transitiva. Por ejemplo, $2(R_1 \cup R_2)4, 4(R_1 \cup R_2)7$, pero $\neg 2(R_1 \cup R_2)7$.

(c) La afirmación es verdadera. Al principio mostramos que si $xR_1y \to xR_2y$ para todo $x, y \in A$, entonces $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ para todo $x \in A$. Hay que mostrar que $y \in [x]_{R_2}$ para todo $y \in [x]_{R_1}$. Ya que $y \in [x]_{R_1}$, tenemos por definición de una clase de equivalencia que xR_1y. Por la hipótesis, eso implica que xR_2y. Por lo tanto, $y \in [x]_{R_2}$.

Ahora mostramos que si $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$ para todo $x \in A$, entonces $xR_1y \to xR_2y$ para todo $x, y \in A$. Tomamos $x, y \in A$ arbitrarios tal que xR_1y. Por definición, $y \in [x]_{R_1}$. Ya que $[x]_{R_1} \subseteq [x]_{R_2}$, también tenemos $y \in [x]_{R_2}$. Por lo tanto, xR_2y.

Pregunta 2

Sean R_1, R_2 dos órdenes totales sobre un conjunto A. Demuestre que si $R_1 \subseteq R_2$, entonces $R_1 = R_2$.

Solución

Ya que ya tenemos $R_1 \subseteq R_2$, basta mostrar $R_2 \subseteq R_1$. Tomamos $(a, b) \in R_2$ arbitrario. Hay que mostrar que $(a, b) \in R_1$. Ya que R_1 es un orden total, tenemos $(a, b) \in R_1$ o $(b, a) \in R_1$. Si $(a, b) \in R_1$, no hay nada más que hacer. Si $(b, a) \in R_1$, notamos que $(b, a) \in R_2$ también porque $R_1 \subseteq R_2$. Entonces, $(a, b) \in R_2, (b, a) \in R_2$. Por lo tanto, $a = b$ ya que R_2 es una relación antisimétrica. En ese caso, tenemos $(a, b) = (b, a) \in R_1$.