Funciones - IIC1253

Marcelo Arenas

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{(3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

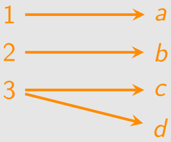
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 \; = \; \{(3, c),\; (1, a),\; (2, b),\; (3, d)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

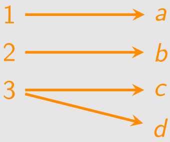
Definición

*Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_1 = \{(3, c),\ (1, a),\ (2, b),\ (3, d)\} \quad \times$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{(1, a), \ (3, b)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

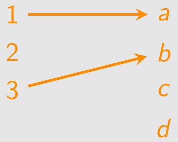
Definición

*Una relación f de A en B es una **función** si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{(1, a),\ (3, b)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_2 = \{(1, a),\ (3, b)\} \quad \times$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr] & & a \\
2 & & b \\
3 \arrow[urr] & & c \\
& & d
\end{tikzcd}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\}$$

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

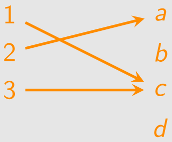
Definición

Una relación f de A en B es una **función** *si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.*

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\}$$



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

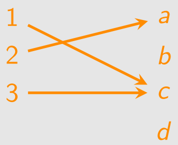
Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones?

$f_3 = \{(1, c),\ (3, c),\ (2, a)\}$ ✓



Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
  - b es **la imagen** de a en f.

Funciones

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo elemento $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función, entonces escribiremos:

- $f : A \to B$ para decir que f es una función de A a B.
- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.
    - b es **la imagen** de a en f.
    - a es **una preimagen** de b en f.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Funciones parciales

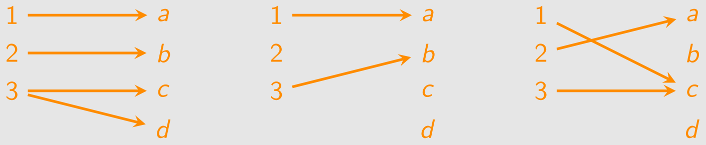
Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$. ¿Cuáles son funciones parciales?



Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos.

Definición

Una relación $f \subseteq A \times B$ es una función parcial si para todo elemento $a \in A$, si existe un elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, entonces b es único.

Si $f \subseteq A \times B$ es una función parcial, entonces escribiremos:

- $f : A \rightharpoonup B$ para decir que f es una función parcial de A a B.

  (notar la diferencia en la flecha)

- $f(a) = b$ para decir que $(a, b) \in f$.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

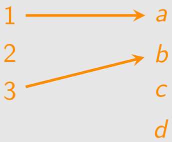
Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a,b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a,b) \in f\} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$.



Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

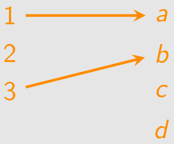
Definición

Se define el dominio e imagen de f como:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.



$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{1, 3\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{a, b\} \end{aligned}$$

Funciones parciales

Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \rightharpoonup B$ una función parcial.

Definición

Se define el *dominio* *e* *imagen* *de* f *como:*

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f) &= \{a \in A \mid \textit{existe } b \in B \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \\ \mathrm{img}(f) &= \{b \in B \mid \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } (a, b) \in f\} \end{aligned}$$

Proposición

Sea $f : A \rightharpoonup B$ *una función parcial. Entonces:*

$$f \textit{ es una función} \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \mathit{dom}(f) = A$$

Ejemplos de funciones

Ejemplos

Sea $A = B = \mathbb{R}$.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \lfloor\, x + \sqrt{x}\, \rfloor$$

$$f_3(x) = 0$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿Qué es $\mathrm{dom}(f)$?

Algunas preguntas

¿Es necesario definir funciones de más "dimensiones"?

- Por ejemplo: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$, ¿Qué es $\mathrm{dom}(f)$?

Tanto el **dominio** como la **imagen** de una función pueden ser números, conjuntos, relaciones, grafos,...

Mas ejemplos de funciones

Ejemplos

Las siguientes son funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

Mas ejemplos de funciones

Ejemplos

Las siguientes son funciones de A en $\mathcal{P}(A)$:

$$
\begin{array}{ll}
g_1 : A \to 2^A & g_1(a) \;=\; \{a\} \\
g_2 : A \to 2^A & g_2(a) \;=\; A \setminus \{a\} \\
g_3 : A \to 2^A & g_3(a) \;=\; \emptyset
\end{array}
$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia *S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.*

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \dots$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$$1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{(-1)^n}{n+1}\ ,\ \ldots$$
- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

Secuencias infinitas (otro ejemplo de funciones)

Sea A un conjunto.

Definición

Una secuencia S sobre A es una función $S : \mathbb{N} \to A$.

Ejemplo

- $S_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$
$$1 \ , \ -\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ -\frac{1}{4} \ , \ \ldots \ , \ \frac{(-1)^n}{n+1} \ , \ \ldots$$
- $S_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$
- $S_3 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2 \ldots, 9\}$
$$3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 5,\ 9,\ 2,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ 9, \ldots$$

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ *se dice:*

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.*

Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.*

Ejercicios

Tipos de funciones

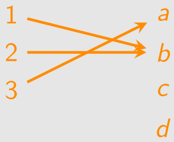
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.*

Ejercicios



Tipos de funciones

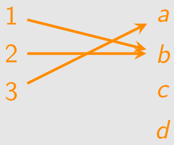
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

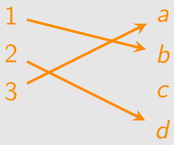
Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos distintos en A con la misma imagen.*

Ejercicios





Tipos de funciones

Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*

Tipos de funciones

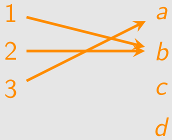
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*

Ejercicios



Tipos de funciones

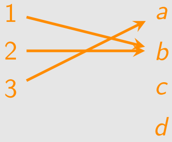
Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

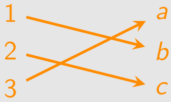
Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*

Ejercicios





Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

- Una función inyectiva es llamada 1-a-1.

Tipos de funciones

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Una función $f : A \to B$ se dice:

1. *inyectiva si no existen dos elementos en A con la misma imagen.*
2. *sobreyectiva si todo elemento en B tienen una preimagen.*
3. *biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

La siguiente notación es muy común:

- Una función inyectiva es llamada 1-a-1.
- Una función sobreyectiva es llamada sobre.

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) \quad = \quad \{a\}$$

  ¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) \quad = \quad A \setminus \{a\}$$

  ¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_3(r) \quad = \quad |\lfloor r \rfloor|$$

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_3(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

¿Es f_3 una función inyectiva?

Ejercicios

- Sea $f_1 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_1(a) = \{a\}$$

  ¿Es f_1 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_2 : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para todo $a \in A$:

$$f_2(a) = A \setminus \{a\}$$

  ¿Es f_2 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

- Sea $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$:

$$f_3(r) = |\lfloor r \rfloor|$$

  ¿Es f_3 una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

Operaciones entre relaciones

Definición

- **Inverso**: *dada una relación R de A en B, la relación R^{-1} de B en A se define como*

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

Operaciones entre relaciones

Definición

- **Inverso**: *dada una relación R de A en B, la relación R^{-1} de B en A se define como*

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: *dada una relación R_1 de A en B y una relación R_2 de B en C, la relación $R_1 \circ R_2$ de A en C se define como*

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \mid \textit{existe } z \in B \textit{ tal que } (x, z) \in R_1 \textit{ y } (z, y) \in R_2\}$$

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

$$\text{¿qué significa } f^{-1}\text{?}$$

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

¿qué significa f^{-1}?

La relación inversa, no necesariamente una función.

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

  La composición de dos funciones.

Inverso y composición de funciones

- Dado que $f : A \to B$ es una relación,

  ¿qué significa f^{-1}?

  La relación inversa, no necesariamente una función.

- Dado que $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$ son relaciones,

  ¿qué significa $f_1 \circ f_2$?

  La composición de dos funciones.

Ejercicio

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$, entonces para todo $a \in A$ y $c \in C$:

$$(a, c) \in f_1 \circ f_2 \quad \text{si y sólo si} \quad f_2(f_1(a)) = c$$

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial de B en A.*

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

1. *f es inyectiva si y sólo si f^{-1} es una función parcial de B en A.*
2. *f es sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{img}(f) = B$.*

Caracterización de funciones

Teorema

Sea $f : A \to B$ *una función. Entonces:*

1. f *es inyectiva si y sólo si* f^{-1} *es una función parcial de* B *en* A.
2. f *es sobreyectiva si y sólo si* $\mathrm{img}(f) = B$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Caracterización de funciones

Corolario

Sea $f : A \to B$ una función. Entonces:

$$f \text{ es biyectiva si y sólo si } f^{-1} \text{ es una función.}$$

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ *y* $f_2 : B \to C$*. Entonces:*

- *Si* f_1 *y* f_2 *son inyectivas, entonces* $f_1 \circ f_2$ *es inyectiva.*

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ *y* $f_2 : B \to C$*. Entonces:*

- *Si* f_1 *y* f_2 *son inyectivas, entonces* $f_1 \circ f_2$ *es inyectiva.*
- *Si* f_1 *y* f_2 *son sobreyectivas, entonces* $f_1 \circ f_2$ *es sobreyectiva.*

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- *Si f_1 y f_2 son inyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es inyectiva.*
- *Si f_1 y f_2 son sobreyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva.*

Ejercicios

1. Demuestre el teorema.

Composición de funciones

Teorema

Sea $f_1 : A \to B$ y $f_2 : B \to C$. Entonces:

- *Si f_1 y f_2 son inyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es inyectiva.*
- *Si f_1 y f_2 son sobreyectivas, entonces $f_1 \circ f_2$ es sobreyectiva.*

Ejercicios

1. Demuestre el teorema.
2. Demuestre que el inverso de cada implicación es falso.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

¿Cómo demostrarían estas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
3. Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

¿Cómo demostraríanestas afirmaciones?

1. En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.
2. En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.
3. Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.
4. Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.
   - Denotamos la cardinalidad del conjunto S como $|S|$

Principio del palomar

Principio del palomar

Si N palomas se distribuyen en M palomares y tengo mas palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar

Principio del palomar

Si N palomas se distribuyen en M palomares y tengo mas palomas que palomares ($N > M$), entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Principio del palomar (en nuestros términos)

Si $f : A \to B$ y $|B| < |A|$, entonces f **no** puede ser inyectiva. Vale decir, existen $a_1, a_2 \in A$ tal que $a_1 \neq a_2$ y $f(a_1) = f(a_2)$.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.500.000$

Principio del palomar

Ejemplos

- En el curso hay dos estudiantes que nacieron en el mismo año.

  Demostración: cantidad de alumnos $= 132$
  cantidad de años ≤ 123

- En Santiago hay dos personas que tienen la misma cantidad de pelos en la cabeza.

  Demostración: cantidad de personas $> 6.500.000$
  cantidad de pelos en un cabeza ≤ 200.000

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

  Demostración:

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

  Demostración:

  Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si 5 elementos son seleccionados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, tiene que haber por lo menos un par que suma 9.

Demostración:

Sea a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 los cinco números distintos seleccionados.

Palomas:	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
Palomares:	$\{1, 8\},\ \{2, 7\},\ \{3, 6\},\ \{4, 5\}$
Función:	$f(a_i) \;=\;$ el conjunto que contiene a a_i.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

  Palomas: $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Palomas:	$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$
Palomares:	$1, 3, 5,$ ... , $2n - 3$, $2n - 1$

Principio del palomar

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ y $S \subseteq A$ tal que $|S| = n + 1$, entonces hay dos números en S tal que uno divide al otro.

  Demostración:

  - Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ los números seleccionados.
  - Para todo $a \in A$, sea $a = 2^k \cdot m$ donde m es un número impar.

Palomas:	$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$
Palomares:	$1, 3, 5, \ldots, 2n-3, 2n-1$
Función:	$F(a_i) = m$