Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 13 - Cardinalidad

7 de noviembre de 2025

Manuel Villablanca, Elías Ayaach, Caetano Borges

1 Calentamiento

Sean A, B dos conjuntos. El conjunto B^A es el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

Elementos de $X^{\mathbb{N}}$ son secuencias infinitas de elementos de X:

$$f : \mathbb{N} \to X \qquad f(0), f(1), f(2), \ldots \in X$$

Demuestre el siguiente Lema

$$\text{Si } A_1 \approx A_2, B_1 \approx B_2, \text{entonces } B_1^{A_1} \approx B_2^{A_2}.$$

Solución

El conjunto $B_1^{A_1}$ tiene todas las funciones de A_1 en B_1. Llamemos a estas funciones "funciones f". El conjunto $B_2^{A_2}$ tiene todas las funciones de A_2 en B_2. Llamemos a estas funciones "funciones g".

Como $A_1 \approx A_2$, existe una biyección φ de A_1 en A_2. Análogamente, existe una biyección σ de B_1 en B_2. Podemos visualizar todas estas funciones en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
B_1 \arrow[r, "\sigma"] & B_2
\end{tikzcd}$$

Nos gustaría encontrar una biyección entre $B_1^{A_1}$ y $B_2^{A_2}$, es decir, entre las funciones f y las funciones g. Esto es, queremos una función que reciba una función f y entregue una función g, o en otras palabras, nos gustaría poder representar una función g a través de una función f de manera única. Podemos hacer uso del diagrama para facilitar esto: en vez de ir de A_2 a B_2 directamente a través de una función g, podemos ir de

A_2 a A_1 a través de φ^{-1} (que está bien definida ya que φ es una biyección), luego de A_1 a B_1 a través de la función f que recibimos como argumento, y finalmente de B_1 a B_2 con la biyección σ.
Formalmente, esto define una función $T\colon B_1^{A_1} \to B_2^{A_2}$ tal que $T(f) = \sigma \circ f \circ \varphi^{-1}$.
Demostraremos que T es una biyección.

- Inyectiva: supongamos que $T(f_1) = T(f_2)$. Esto quiere decir que $\sigma \circ f_1 \circ \varphi^{-1} = \sigma \circ f_2 \circ \varphi^{-1}$. Si componemos con φ por la derecha y con σ^{-1} por la izquierda obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1} \circ \sigma \circ f_1 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi &= \sigma^{-1} \circ \sigma \circ f_2 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \\
(\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ f_1 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) &= (\sigma^{-1} \circ \sigma) \circ f_2 \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \\
f_1 &= f_2
\end{aligned}$$

  con lo que T es inyectiva.
- Sobreyectiva: sea $g \in B_2^{A_2}$. Tenemos que $f = \sigma^{-1} \circ g \circ \varphi$ es tal que $T(f) = g$:

$$\begin{aligned}
T(f) &= \sigma \circ f \circ \varphi^{-1} \\
&= \sigma \circ \sigma^{-1} \circ g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \\
&= (\sigma \circ \sigma^{-1}) \circ g \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \\
&= g
\end{aligned}$$

  con lo que T es sobreyectiva.

Como T es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva, con lo que concluímos que $B_1^{A_1} \approx B_2^{A_2}$.

2 Funciones y Relaciones

(a) Sea $f : A \to B$ una función. Para un subconjunto $X \subseteq A$, definimos su *imagen* como

$$f(X) = \{f(x) \in B \mid x \in X\} \subseteq B.$$

Por otra parte, para un subconjunto $Y \subseteq B$, definimos su *preimagen* como

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \subseteq A.$$

Decimos que un subconjunto $X \subseteq A$ es *estable* si

$$f^{-1}(f(X)) = X.$$

Demuestre que

$$f \text{ es inyectiva } \iff \text{ para todo subconjunto } X \subseteq A, \text{ se tiene que } X \text{ es estable.}$$

(b) Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Sea R una relación de equivalencia en A. Definimos sobre B la relación *imagen de* R, denotada por $f(R)$, como:

$$(b, b') \in f(R) \iff \text{ existen } a, a' \in A \text{ tales que } f(a) = b,\ f(a') = b' \text{ y } (a, a') \in R.$$

Demuestre que si f es inyectiva, entonces $f(R)$ es de equivalencia.

(c) Siguiendo con la pregunta anterior, muestre un ejemplo en donde f no es inyectiva, y $f(R)$ no es de equivalencia.

Solución

a)

$\Longrightarrow$:
Supongamos que f es inyectiva, con lo que demostraremos $\forall X, X = f^{-1}(f(X))$ por doble contencion.
Tomemos $x \in X$, luego por definicion de imagen, $f(x) \in f(X)$ y por definicion de preimagen, $x \in f^{-1}(f(X))$, asi $\forall X, X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
Ahora tomemos $x \in f^{-1}(f(X))$, luego se tiene $f(x) \in f(X)$. Por definicion de imagen, $\exists x' \in X$ tal que $f(x') = f(x)$, por hipotesis f es inyectiva, luego $x' = x$ y por ende $x \in X$.
Asi $\forall X, X = f^{-1}(f(X))$, es decir X es estable.

$\Longleftarrow$:
Supongamos que todo $X \subseteq A$ es estable.
Supongamos $f(x) = f(x')$ $x, x' \in A$. Tomemos $X = \{x\}$. Luego $f(X) = \{f(x)\}$, luego $f(x') \in f(X)$. Luego por definicion de pre imagen, $x' \in f^{-1}(f(X))$, y como X es estable, tenemos que $f^{-1}(f(X)) = X$, es decir $x' \in X$ y como $X = \{x\}$, $x' = x$.

b)

Refleja:
Tomemos b arbitrario y veamos que $(b, b) \in f(R)$.
Como f es sobreyectiva, luego $\exists a \in A : f(a) = b$, como R es refleja, luego $(a, a) \in R$, es decir, $\exists a, a \in A$ tal que $f(a) = b, f(a) = b, (a, a) \in R$, es decir $(b, b) \in f(R)$.

Simetrica:
Tomemos $(b.b') \in f(R)$, por definicion, $\exists a, a' \in A, f(a) = b, f(a') = b', (a, a') \in R$. Como R es refleja, luego $(a', a) \in R$ y asi $\exists a', a \in A, f(a') = b', f(a) = b, (a', a) \in R$, es decir $(b', b) \in f(R)$.

Transitiva:

Tomemos $(b.b') \in f(R)$ y Tomemos $(b'.b'') \in f(R)$, luego por definicion: $\exists a, a' \in A, f(a) = b, f(a') = b', (a, a') \in R$ y $\exists a_2', a'' \in A, f(a_2') = b', f(a'') = b'', (a_2', a'') \in R$. Puesto que f es inyectiva, $a' = a_2'$. Como ademas R es transitiva, luego $a, a'' \in R$ y por ende $\exists a, a'' \in A, f(a) = b, f(a'') = b'', (a, a'') \in R$, es decir $(b, b'') \in f(R)$.
Como demostramos las 3 propiedades de una relacion de equivalencia, $f(R)$ es una relacion de equivalencia.

c)

Definamos

$$B = \{a, b, c\}, \qquad A = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z\},$$

y la función $f : A \to B$ dada por

$$f(x_1) = a, \qquad f(x_2) = a, \qquad f(y_1) = b, \qquad f(y_2) = b, \qquad f(z) = c.$$

Entonces f es sobreyectiva (cada elemento de B tiene preimagen) y no es inyectiva (por ejemplo $x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2) = a$).
Tomemos la relación de equivalencia R en A determinada por las clases de equivalencia

$$C_1 = \{x_1, y_1\}, \qquad C_2 = \{y_2, z\}, \qquad C_3 = \{x_2\}.$$

Es decir, R es la relación que hace cada C_i una clase de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva dentro de cada clase, y que no relaciona elementos de clases distintas).
Calculemos ahora $f(R)$. Por definición:

$$(b_1, b_2) \in f(R) \quad \iff \quad \exists\, u, v \in A \text{ tales que } f(u) = b_1,\ f(v) = b_2,\ (u, v) \in R.$$

Tenemos:

$$(a, b) \in f(R) \quad \text{porque} \quad (x_1, y_1) \in R,\ f(x_1) = a,\ f(y_1) = b.$$

$$(b, c) \in f(R) \quad \text{porque} \quad (y_2, z) \in R,\ f(y_2) = b,\ f(z) = c.$$

Pero

$$(a, c) \notin f(R),$$

Dado que no existe ningun par $(u, v) \in R$ con $f(u) = a$ y $f(v) = c$.
Por tanto, en $f(R)$ aparecen (a, b) y (b, c), pero no (a, c). Esto significa que $f(R)$ no es transitiva, y por lo tanto no es una relación de equivalencia en B.

3 Cardinalidad

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un *polinomio con coeficientes enteros en dos variables* si es de la forma

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j\leq n}} a_{ij}x^iy^j, \quad \text{donde } a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Sea

$$\mathcal{P} = \{f \mid f \text{ es un polinomio con coeficientes enteros en dos variables}\}.$$

Demuestre que $\mathcal{P}$ es enumerable.

Solución

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de **grado total menor o igual a** n con coeficientes enteros, es decir, aquellos polinomios donde $a_{ij} = 0$ si $i + j > n$.

Como todo polinomio en $\mathcal{P}$ tiene algún grado total $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Por lo tanto, basta demostrar que cada P_n es enumerable.

Denotemos por

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$$

el conjunto de pares de índices que aparecen en un polinomio de grado total $\leq n$. Entonces, cada $f \in P_n$ está determinado por sus coeficientes a_{ij} para $(i,j) \in I_n$.

Definimos la aplicación

$$g : P_n \to \mathbb{Z}^{I_n} \quad \text{tal que} \quad g(f) = (a_{ij})_{(i,j)\in I_n}.$$

La función g es inyectiva (dos polinomios con los mismos coeficientes son iguales) y sobreyectiva (cualquier familia de coeficientes enteros define un polinomio). Por tanto, g es una biyección entre P_n y $\mathbb{Z}^{I_n}$.

Notemos que I_n es un conjunto finito, pues contiene exactamente

$$|I_n| = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

pares de índices (i,j). Como $\mathbb{Z}$ es enumerable y el producto cartesiano finito de conjuntos enumerables es enumerable, se sigue que

$$\mathbb{Z}^{I_n} \text{ es enumerable.}$$

Por lo tanto, P_n también es enumerable. Finalmente, $\mathcal{P}$ es una unión enumerable de conjuntos enumerables, por lo que concluimos que

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ es enumerable.}}$$