

# IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

22.10.2025

Hoy...

Enumerabilidad: conjuntos  
equinumerosos, menor o igual  
cardinalidad.

# Equinumerabilidad

## Definición

*Dos conjuntos  $A, B$  son **equinumerosos** (o **tienen la misma cardinalidad**) si existe una función  $f: A \rightarrow B$  biyectiva.*

# Equinumerabilidad

## Definición

*Dos conjuntos  $A, B$  son **equinumerosos** (o **tienen la misma cardinalidad**) si existe una función  $f: A \rightarrow B$  biyectiva.*

Notación:  $A \approx B$

# Equinumerabilidad

## Definición

*Dos conjuntos  $A, B$  son **equinumerosos** (o **tienen la misma cardinalidad**) si existe una función  $f: A \rightarrow B$  biyectiva.*

Notación:  $A \approx B$

## Proposición

*Sean  $A, B, C$  3 conjuntos.*

- a) si  $A \approx B$ , entonces  $B \approx A$ ;*
- b) si  $A \approx B, B \approx C$ , entonces  $A \approx C$*

# Conjuntos finitos

## Definición

*Un conjunto  $A$  es finito si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A \approx \{0, 1, \dots, n - 1\}$ .*

# Conjuntos finitos

## Definición

*Un conjunto  $A$  es finito si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A \approx \{0, 1, \dots, n-1\}$ .*

## Proposición

*Si un conjunto  $A$  es finito y  $a \in A$ , entonces,  $A \setminus \{a\} \not\approx A$ .*

# Conjuntos finitos

## Definición

*Un conjunto  $A$  es finito si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A \approx \{0, 1, \dots, n-1\}$ .*

## Proposición

*Si un conjunto  $A$  es finito y  $a \in A$ , entonces,  $A \setminus \{a\} \not\approx A$ .*

## Demostración.

Por el principio de palomar.





# “Paradoja” de infinitud

Un conjunto infinito puede tener la misma cardinalidad como su propio subconjunto (Galileo).

# “Paradoja” de infinitud

Un conjunto infinito puede tener la misma cardinalidad como su propio subconjunto (Galileo).

## Ejercicio

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

## Ejercicio

$$\mathbb{N} \approx \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ m = n^2\}$$

# Intervalo sin un punto

## Ejercicio

$$[0, 1] \approx (0, 1] \approx (0, 1)$$

# Un lema útil

## Lema

*Supongamos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos dos conjuntos  $A_n, B_n$  tal que:*

1.  $A_n \approx B_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
2.  $A_n \cap A_m = \emptyset, B_n \cap B_m = \emptyset$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ .

*Entonces,*

$$\bigcup_n A_n \approx \bigcup_n B_n.$$



# Naturales y enteros

## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$$

# Naturales y enteros

## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$$

## Demostración.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	...
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	...



# Intervalos y reales

## Ejercicio

- a)  $(0, 1) \approx (1, +\infty)$ ;
- b)  $(1, +\infty) \approx (0, +\infty)$ ;
- c)  $(0, 1) \approx \mathbb{R}$ .



$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

## Theorem

$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$



$$\approx y \times$$

### Lemma

*Sean  $A \approx B, X \approx Y$ . Entonces,  $A \times X \approx B \times Y$ .*

$$\approx y \times$$

### Lemma

Sean  $A \approx B, X \approx Y$ . Entonces,  $A \times X \approx B \times Y$ .

### Demostración.

Si  $f: A \rightarrow B, g: X \rightarrow Y$  son biyectivas, verifique que:

$$(f \times g): A \times X \rightarrow B \times Y, \quad (f \times g)(a, x) = (f(a), g(x)) \quad a \in A, x \in X,$$

es biyectiva...



$$\approx y \times$$

### Lemma

Sean  $A \approx B, X \approx Y$ . Entonces,  $A \times X \approx B \times Y$ .

### Demostración.

Si  $f: A \rightarrow B, g: X \rightarrow Y$  son biyectivas, verifique que:

$$(f \times g): A \times X \rightarrow B \times Y, \quad (f \times g)(a, x) = (f(a), g(x)) \quad a \in A, x \in X,$$

es biyectiva...



### Corolario

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \dots$$

## Definición

Sean  $A, B$  dos conjuntos. Entonces, **la cardinalidad de  $A$  es menor o igual que la cardinalidad de  $B$  si existe  $f: A \rightarrow B$  inyectiva.**

## Definición

Sean  $A, B$  dos conjuntos. Entonces, **la cardinalidad de  $A$  es menor o igual que la cardinalidad de  $B$**  si existe  $f: A \rightarrow B$  inyectiva.

Notación:  $A \preceq B$

## Proposición

Sean  $A, B, C$  3 conjuntos. Si  $A \preceq B, B \preceq C$ , entonces  $A \preceq C$ .

## Definición

Sean  $A, B$  dos conjuntos. Entonces, **la cardinalidad de  $A$  es menor o igual que la cardinalidad de  $B$**  si existe  $f: A \rightarrow B$  inyectiva.

Notación:  $A \preceq B$

## Proposición

Sean  $A, B, C$  3 conjuntos. Si  $A \preceq B, B \preceq C$ , entonces  $A \preceq C$ .

## Ejercicio

$$\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}, \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$



$\preceq$  y  $\approx$

## Teorema (Schröder–Bernstein)

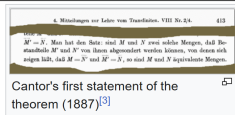
Sean  $A, B$  dos conjuntos. Entonces,  $A \approx B$  si y sólo si  $A \preceq B, B \preceq A$ .

$\preceq$   $y \approx$

## Teorema (Schröder–Bernstein)

Sean  $A, B$  dos conjuntos. Entonces,  $A \approx B$  si y sólo si  $A \preceq B, B \preceq A$ .

- **1887 Cantor** publishes the theorem, however without proof.<sup>[3][2]</sup>
- **1887** On July 11, **Dedekind** proves the theorem (not relying on the [axiom of choice](#))<sup>[4]</sup> but neither publishes his proof nor tells Cantor about it. **Ernst Zermelo** discovered Dedekind's proof and in 1908<sup>[5]</sup> he publishes his own proof based on the *chain theory* from Dedekind's paper *Was sind und was sollen die Zahlen?*<sup>[2][6]</sup>
- **1895 Cantor** states the theorem in his first paper on set theory and transfinite numbers. He obtains it as an easy consequence of the linear order of cardinal numbers.<sup>[7][8][9]</sup> However, he could not prove the latter theorem, which is shown in 1915 to be equivalent to the [axiom of choice](#) by **Friedrich Moritz Hartogs**.<sup>[2][10]</sup>
- **1896 Schröder** announces a proof (as a corollary of a theorem by **Jevons**).<sup>[11]</sup>
- **1897 Bernstein**, a 19-year-old student in Cantor's Seminar, presents his proof.<sup>[12][13]</sup>
- **1897** Almost simultaneously, but independently, **Schröder** finds a proof.<sup>[12][13]</sup>
- **1897** After a visit by Bernstein, **Dedekind** independently proves the theorem a second time.
- **1898 Bernstein's** proof (not relying on the axiom of choice) is published by **Émile Borel** in his book on functions.<sup>[14]</sup> (Communicated by Cantor at the 1897 [International Congress of Mathematicians](#) in Zürich.) In the same year, the proof also appears in **Bernstein's** dissertation.<sup>[15][2]</sup>



A

Tr

C

C

C

V

C

C

C

C

C

C

# Aplicaciones de Schröder–Bernstein

## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}.$$

# Aplicaciones de Schröder–Bernstein

## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}.$$

## Demostración.

$$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}.$$



## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

# Aplicaciones de Schröder–Bernstein

## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}.$$

## Demostración.

$$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}.$$



## Proposición

$$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

## Demostración.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$  ya que la siguiente función:

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f((a, b)) = 2^a \cdot 3^b$$

es inyectiva.



¡Gracias!