Unidad V: Relaciones

# Relaciones: definiciones y relaciones de equivalencia.

Clase 13 - Matemáticas Discretas (IIC1253)

Prof. Miguel Romero

# Recordatorio: producto cartesiano

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.

El producto cartesiano $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

**Ejemplo:**

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, entonces:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4)\}$$

# Recordatorio: producto cartesiano

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.

El producto cartesiano $A \times B$ se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Comentarios:

- $(a, b)$ es un **par ordenado**.
- La igualdad de pares ordenados es coordenada a coordenada:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos.

El producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ se define como:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ \ldots, a_n \in A_n\}.$$

**Ejemplo:**

Si $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$ y $A_3 = \{3, 5\}$ entonces:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 = \{&(1,1,3),(1,1,5),(1,2,3),(1,2,5),(1,4,3),(1,4,5),\\ &(2,1,3),(2,1,5),(2,2,3),(2,2,5),(2,4,3),(2,4,5)\} \end{aligned}$$

Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos.

El producto cartesiano $A_1 \times \cdots \times A_n$ se define como:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Comentarios:

- $(a_1, \ldots, a_n)$ es una **tupla ordenada** (o simplemente **tupla**).
- La igualdad de tuplas ordenadas es coordenada a coordenada:

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$$

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.

### Definición:

$R$ es una relación binaria de $A$ en $B$ si $R \subseteq A \times B$.

### Ejemplo:

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 4\}$, entonces:

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)\}$$

Posibles relaciones binarias de $A$ en $B$:

- $R_1 = \{(1,2),(1,4),(2,2)\}$
- $R_2 = \varnothing$
- $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,4)\}$

Sea $A$ un conjunto.

### Definición:

$R$ es una relación binaria sobre $A$, si $R$ es una relación de $A$ en $A$.
Es decir, si $R \subseteq A \times A$.

### Ejemplo:

Sea $A = \mathbb{N}$ las siguientes son posibles relaciones binarias sobre $A$:

- $R_1 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i = j\}$
- $R_2 = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j\}$

Sea $A$ un conjunto y $n \geq 1$.

Notación:

$A^n$ denota el producto cartesiano $A \times \cdots \times A$, donde $A$ se repite $n$ veces.

**Definición:**

$R$ es una relación $n$-aria sobre $A$, si $R \subseteq A^n$.

**Ejemplo:**

Sea $A = \mathbb{N}$ las siguientes son posibles relaciones 3-aria y 4-aria sobre $A$:

- $R_1 = \{(i, j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid k = i + j\}$
- $R_2 = \{(i, j, k, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j < k + \ell\}$

En lo que viene nos enfocaremos en relaciones binarias sobre un conjunto $A$.
Le llamaremos simplemente **relaciones sobre** $A$.

Sea $R$ una relación sobre $A$ y sean $a, b \in A$.

Para indicar que $(a, b) \in R$ también usaremos la siguiente notación:

- $R(a, b)$
- $a \, R \, b$

### Definición:

Una relación $R$ sobre $A$ es:

- **Refleja:**
  Para cada $a \in A$, se cumple $R(a, a)$.
- **Irrefleja (o antirefleja):**
  Para cada $a \in A$, **no** se cumple $R(a, a)$.

### Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones reflejas e irreflejas sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

## Definición:

Una relación $R$ sobre $A$ es:

- **Simétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces $R(b, a)$.
- **Asimétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ entonces **no** se cumple $R(b, a)$.
- **Antisimétrica:**
  Para cada $a, b \in A$, si $R(a, b)$ y $R(b, a)$ entonces $a = b$.

## Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones simétrica e asimétrica sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

## Definición:

Una relación $R$ sobre $A$ es:

- **Transitiva:**
  Para cada $a, b, c \in A$, si $R(a,b)$ y $R(b,c)$, entonces $R(a,c)$.
- **Conexa:**
  Para cada $a, b \in A$, si tiene que $R(a,b)$ o $R(b,a)$.

## Ejercicio:

- De ejemplo de relaciones transitivas y conexas sobre $\mathbb{N}$.
- ¿Y sobre el conjunto de personas?

- De un ejemplo de una relación refleja, simétrica y no transitiva sobre $\mathbb{N}$.
- De un ejemplo de una relación refleja, transitiva y no simétrica sobre $\mathbb{N}$.
- De un ejemplo de una relación simétrica, transitiva y no refleja sobre $\mathbb{N}$.

## Definición:

Una relación $R$ sobre $A$ es una **relación de equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.

## Ejemplos:

- La relación $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ sobre $\mathbb{N}$.
- La relación equivalencia lógica sobre $L(P)$.
  (recordar que $L(P)$ denota el conjunto de fórmulas proposicionales sobre $P$.)

Sea $n \geq 2$ un natural.

Definimos la relación $\equiv_n$ (equivalencia modulo $n$) sobre $\mathbb{Z}$ como:

$$a \equiv_n b \iff (a - b) \text{ es divisible por } n$$

**Recordatorio:** $m$ es divisible por $n$ si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = k \cdot n$.

**Proposición:**

$\equiv_n$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

Definimos la relación $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = c + b$$

**Observación:** $(a, b) \sim (c, d) \iff a - b = c - d$

**Proposición:**

$\sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.

**Definición:**

Sea $R$ una relación de equivalencia sobre $A$ y $a \in A$ un elemento.

La **clase de equivalencia** de $a$ bajo $R$ se define como:

$$[a]_R \;=\; \{b \in A \mid R(a,b)\}.$$

**Ejemplos:**

- ¿Cómo se van las clases de equivalencia bajo $\equiv_n$ sobre $\mathbb{Z}$?
- ¿Qué pasa para $\sim$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

El siguiente resultado nos dice que las clases de equivalencia **particionan** al conjunto $A$.

**Proposición:**

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre $A$. Se cumple lo siguiente:

- Para cada $a \in A$, se tiene $[a]_\sim \neq \varnothing$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ entonces $[a]_\sim = [b]_\sim$.
- Para cada $a, b \in A$, si $a \sim b$ **no** se cumple, entonces $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

Ejercicio: Demuestre la proposición.