Ayudantía 9: Grafos y DFS

Dafne Arriagada
Victor Hernández Lagos

dafne.arriagada@uc.cl , victorllagos@uc.cl

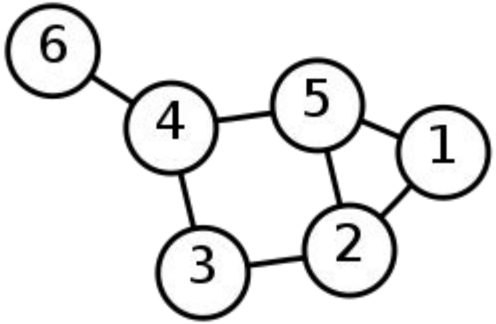
Contenidos

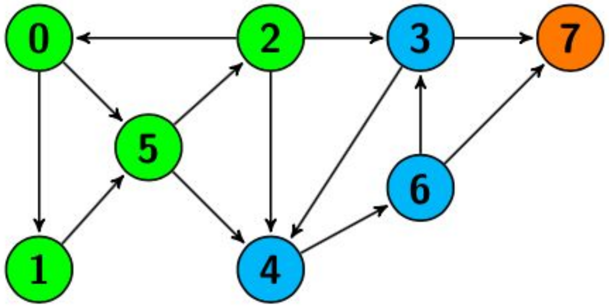
1. Repaso grafos, caminos y ciclos
2. Algoritmo DFS (Deep First Search)
3. Orden Topológico
4. Componentes fuertemente conexas (CFC)
5. Algoritmo de Kosaraju y su relación con TopSort

¿Qué es un Grafo?

Grafo G = (V, E)

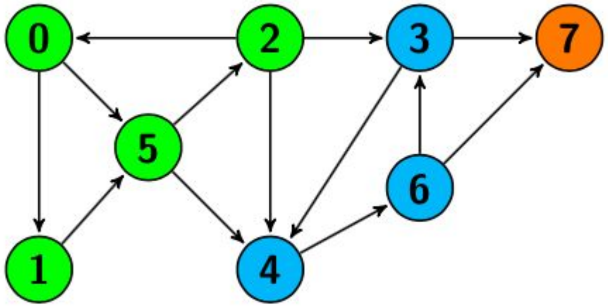
- **Estructura de datos** compuesta por **nodos** los cuales están unidos por **aristas.** Estas aristas pueden estar dirigidas o no. Un grafo puede ser dirigido (pares ordenados) o no dirigido (conjuntos).





Grafo G = (V, E)

- **Estructura de datos** compuesta por **nodos** los cuales están unidos por **aristas.** Estas aristas pueden estar dirigidas o no. Un grafo puede ser dirigido (pares ordenados) o no dirigido (conjuntos).

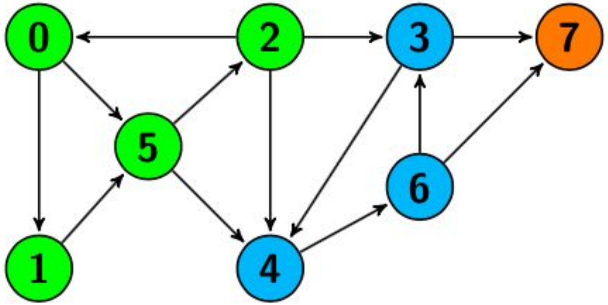


¿Cómo los podemos representar?

Según sea el caso, podemos representarlos a través de **listas de adyacencia** (para grafos poco densos) o como una **matriz de adyacencia** (para grafos muy densos) …. ¿Por qué? ¿Qué queremos decir con “denso”?

Caminos y ciclos:

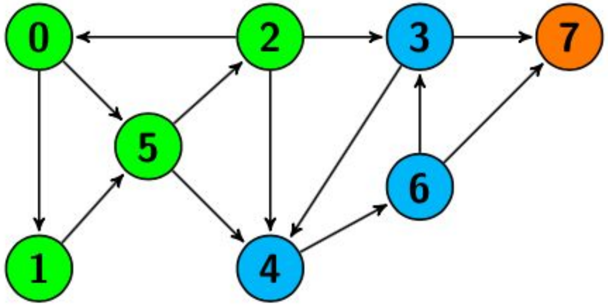
- Un **camino π** de largo n, es una secuencia de nodos $v_0,\ldots,v_n$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\}$ ***(conjunto!)*** pertenece al conjunto de aristas E para todo $i < n$.



¿Cuándo un camino se convierte en un ciclo?

Caminos y ciclos:

- Un **camino π** de largo n, es una secuencia de nodos v0,...,vn tal que {vi, vi+1} ***(conjunto!)*** pertenece al conjunto de aristas E para todo i < n.



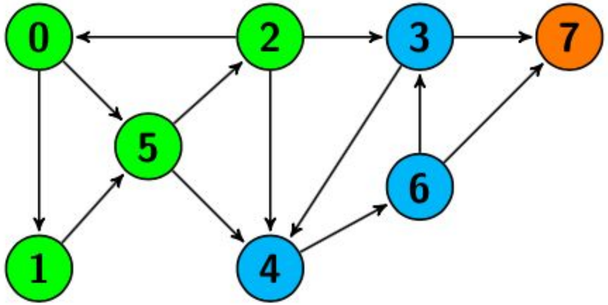
¿Cuándo un camino se convierte en un ciclo?

Si v0 = vn cuando n > 0 (al menos dos vértices)

¿Por qué es importante detectar estos ciclos?

Caminos y ciclos:

- Un **camino π** de largo n, es una secuencia de nodos v0,...,vn tal que {vi, vi+1} ***(conjunto!)*** pertenece al conjunto de aristas E para todo i < n.



¿Cuándo un camino se convierte en un ciclo?

Si v0 = vn cuando n > 0 (al menos dos vértices)

¿Por qué es importante detectar estos ciclos?

De no hacerlo podemos:

1. Quedarnos atrapados en loops infinitos!
2. No ser capaces de ordenar un conjunto de tareas a ejecutar.
3. No detectar proyectos inviables (Referencia circular en proyectos con requisitos)

DFS - Deep First Search

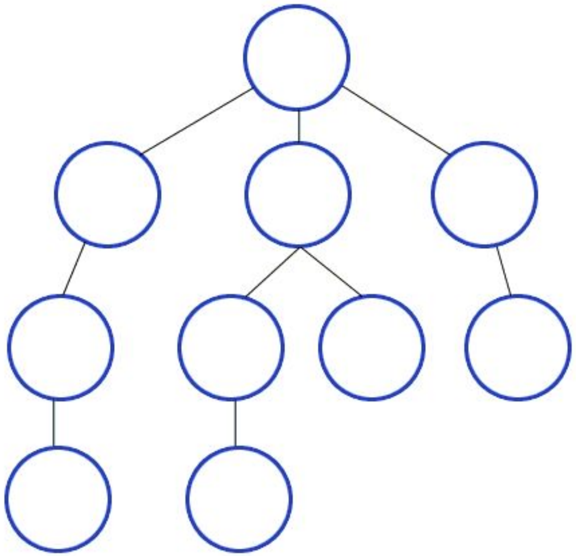
- **Depth First Search o Búsqueda en profundidad.**

- **Grafo no dirigido o no dirigido**

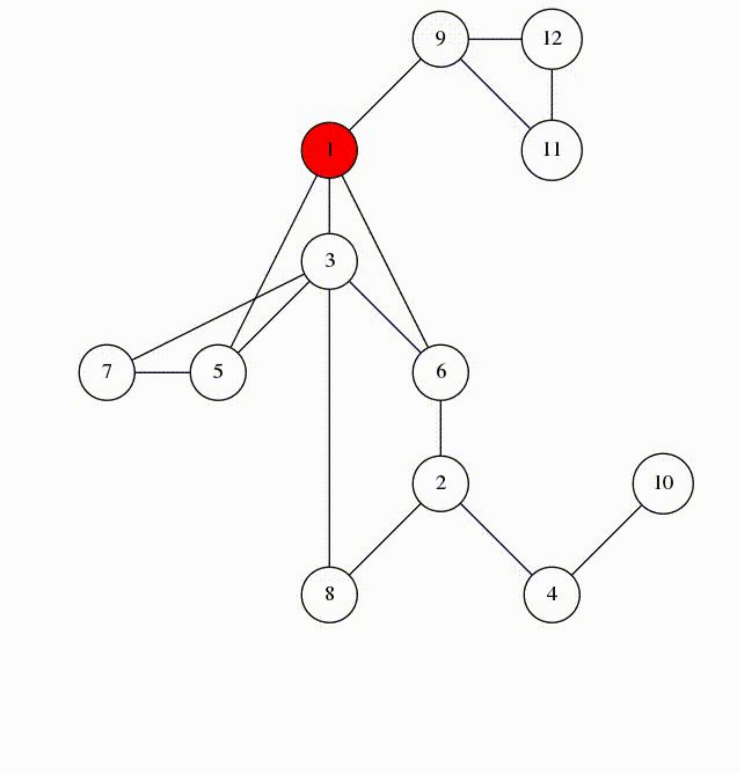
- Este algoritmo nos ayuda a recorrer un grafo de forma ordenada. Su funcionamiento es similar al **backtracking**. Recorre un camino hasta el fondo y luego sigue explorando otros caminos.

> Notar que si bien vamos a presentar un algoritmo DFS, DFS es en sí mismo una **estrategía** (estrategía de búsqueda en profundidad) en la cual se pueden basar los algoritmos.

Ejemplo gráfico



Ejemplo gráfico



DFS, estrategia iterativa

```
dfs(graph G, node start)
    stack s
    s.push(start)
    label start as discovered
    while not s.empty()
        node u = s.pop()
        for v in G.adjacent[u]
            if v is not discovered
                s.push(v)
                label v as discovered
```

DFS, estrategia recursiva

Recordemos el código de colores

- BLANCO: Nodo aún no visitado
- GRIS: Nodo visitado pero con vecinos por descubrir
- NEGRO: Nodo visitado con vecinos visitados

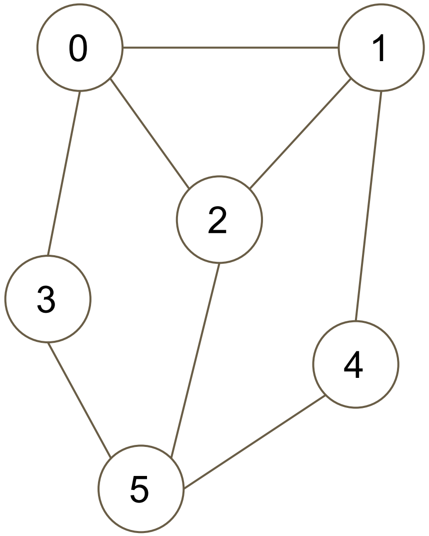
DFS, estrategia recursiva

```
INPUT : Grafo G
Dfs(G):
    for u in V(G):
        u.color ← blanco
    for u in V(G):
        if u.color = blanco:
            DfsVisit(G,u)
```

```
INPUT : Grafo G, nodo u in V(G)
DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

Ng(u): vecinos de u, i.e. nodos apuntados por aristas desde u

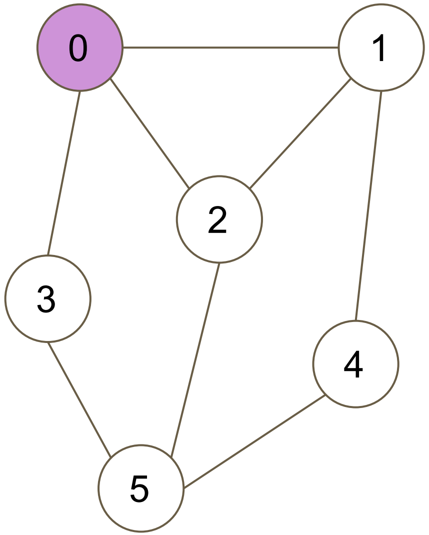
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

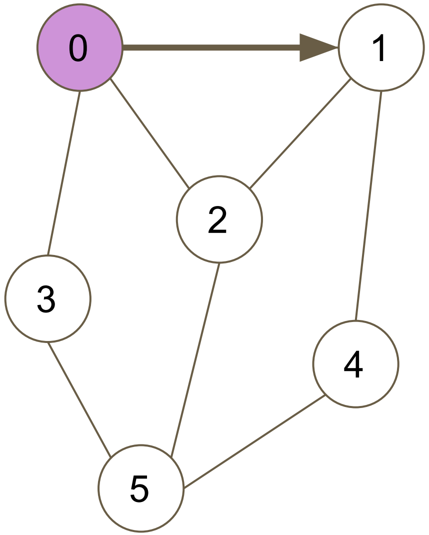
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

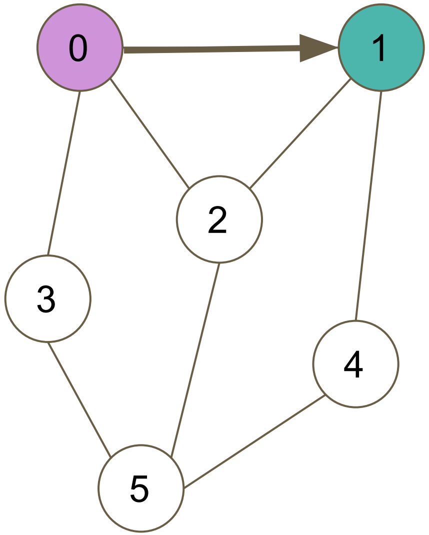
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

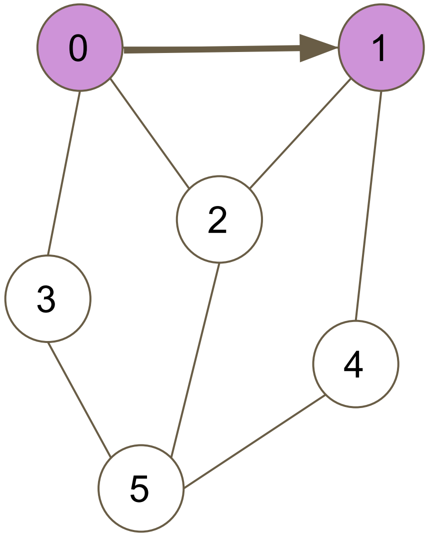
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

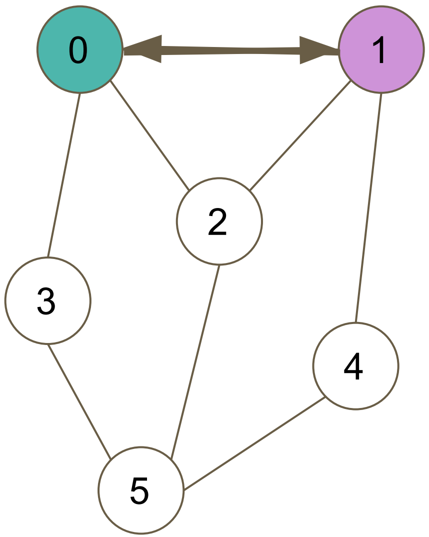
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

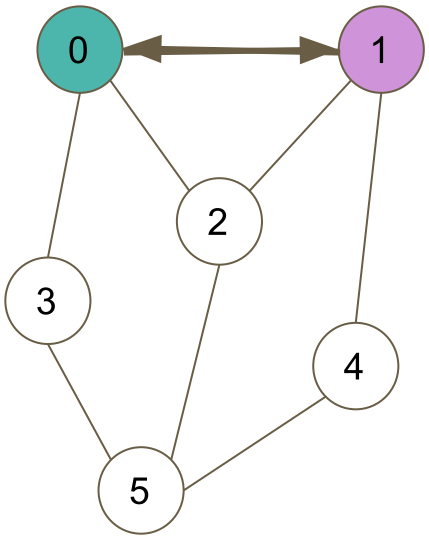
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

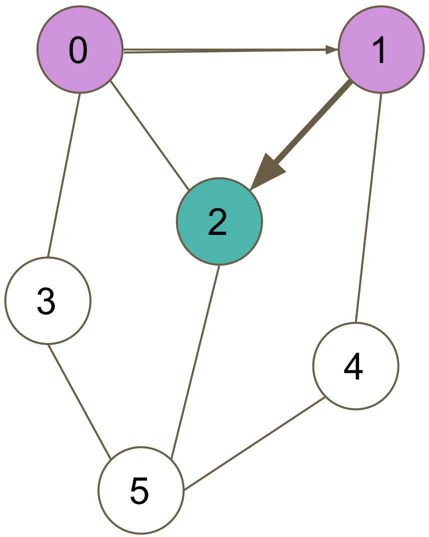
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

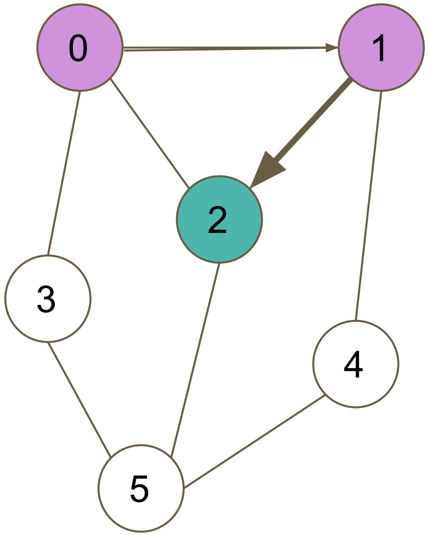
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

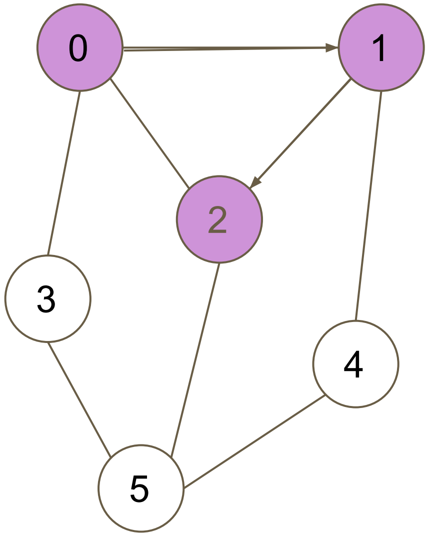
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

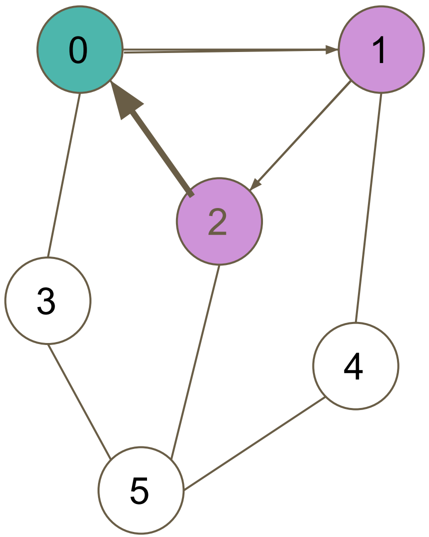
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

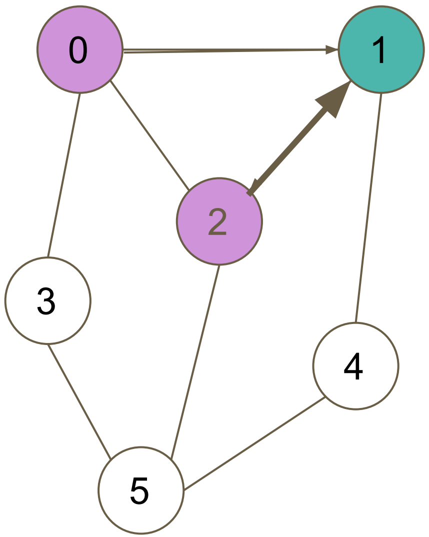
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

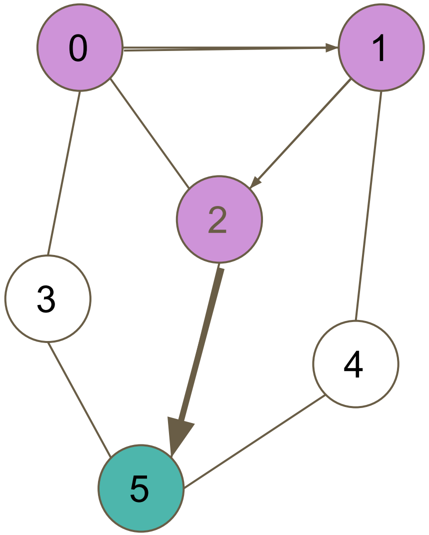
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

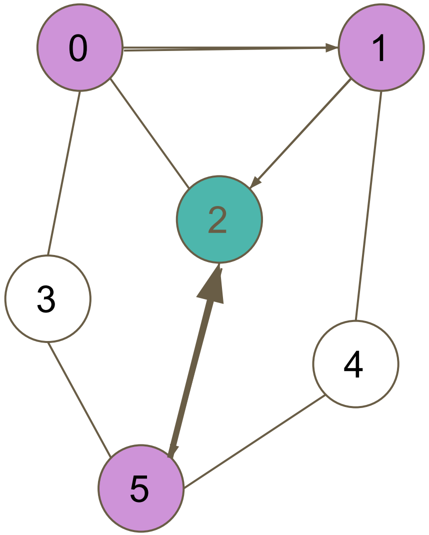
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

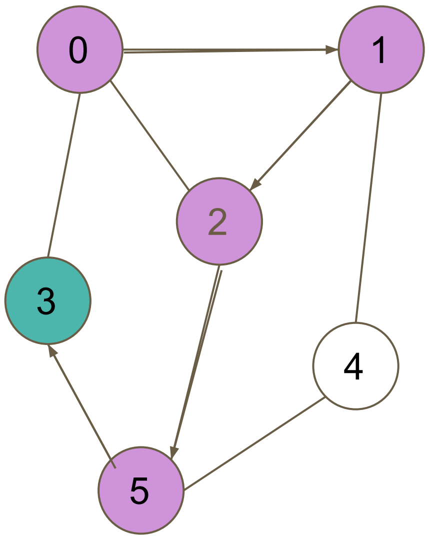
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

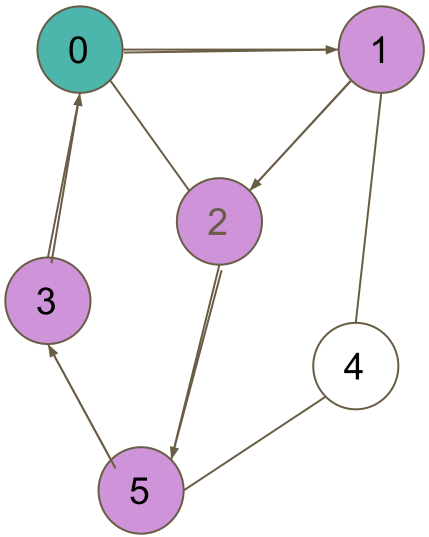
Ejemplo



DfsVisit(G, 0)

```
DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

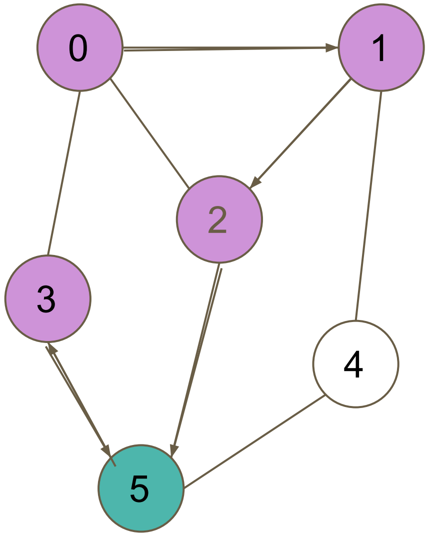
Ejemplo




```
DfsVisit(G, 0)

DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

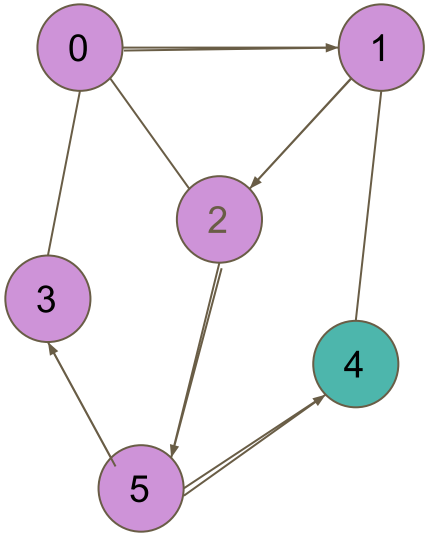
Ejemplo



DfsVisit(G, 0)

```
DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

Ejemplo



DfsVisit(G, 0)

```
DfsVisit(G,u):
    u.color ← gris
    for v in Ng(u):
        if v.color = blanco:
            DfsVisit(G,v)
    u.color ← negro
```

Nota: El algoritmo continúa por un más, pero no se mostrará el resto

Ejercicio

Escriba un algoritmo que determine si es posible llegar del vértice v al u en un grafo dirigido. Indique el camino encontrado.

Ejercicio

Escriba un algoritmo que determine si es posible llegar del vértice v al u en un grafo dirigido. Indique el camino encontrado.

Para esto podemos seguir ocupando la estrategia DFS. Notar que solo tendremos que realizar un llamado a ***DfsVisit(G,v)*** *(asumiendo que es **conexo**)**,** **al cual vamos a tener que modificar,*** terminado el algoritmo prematuramente si es que encontramos a u, retornando TRUE, de lo contrario el algoritmo recorrerá todo el grafo y al terminar retornará FALSE.

friendly reminder:
"grafo conexo" = todos sus vértices están conectados por un camino

Ejercicio

Escriba un algoritmo que determine si es posible llegar del vértice v al u en un grafo dirigido. Indique el camino encontrado.

```
INPUT : Grafo G, nodo v in V(G)
DfsVisit(G,v,u):
    v.color ← gris
    for p in Ng(v):
        if p = u:
            return TRUE
        if p.color = blanco:
            DfsVisit(G,p,u)
    v.color ← negro
    return FALSE
```

Ejercicio

Escriba un algoritmo que determine si es posible llegar del vértice v al u en un grafo dirigido. Indique el camino encontrado.

¿Cómo se puede relacionar con backtracking?

Orden Topológico

Palabras Clave

- G, grafo **dirigido**
- Secuencia de nodos

Orden Topológico

Definición

- Sea **G** un grafo dirigido. Un **orden topológico** de **G** es una **secuencia** de sus nodos

$$v_0, v_1, \ldots, v_n \qquad v_i \in V(G)$$

- Tal que
  1. Todo nodo del grafo **aparece** en la secuencia
  2. En la secuencia **no hay** elementos repetidos
  3. Si $(a,b) \in E(G)$ entonces el nodo **a** aparece antes que el nodo **b** en la secuencia

Proposición:

- Si G es un grafo **cíclico**, entonces no existe un orden topológico.

Orden Topológico: Pseudocódigo

input : grafo G
output: lista de nodos L

```
TopSort(G):
    L ← lista vacía
    t ← 1
    for u ∈ V(G) :
        u.start ← 0
        u.end ← 0
    for u ∈ V(G) :
        if u.start = 0 :
            TopDfsVisit(G, L, u, t)
    return L
```

input : grafo G, lista de nodos L,
nodo $u \in V(G)$, tiempo t
output: tiempo $t \geq 1$

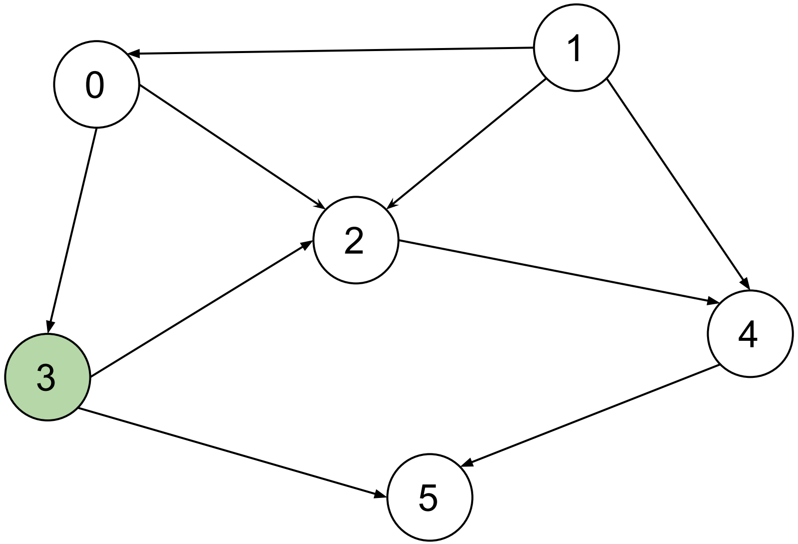
```
TopDfsVisit(G, L, u, t):
    u.start ← t
    t ← t + 1
    for v ∈ N_G(u) :
        if v.start = 0 :
            TopDfsVisit(G, L, v, t)
    u.end ← t
    Insertar u como cabeza de L
    t ← t + 1
    return t
```

Orden topológico

¿Cómo se ve?

1. Elegimos un nodo para comenzar, en este caso usaremos el nodo 3

t=0

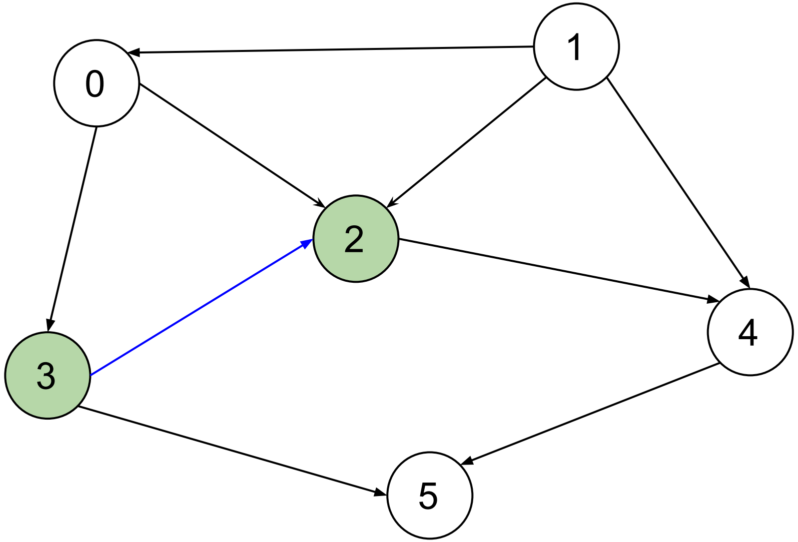


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	
1	0	0	
2	0	0	
3	0	0	
4	0	0	
5	0	0	

Orden topológico

- Elegimos un nodo hijo del nodo actual: 2

t=1

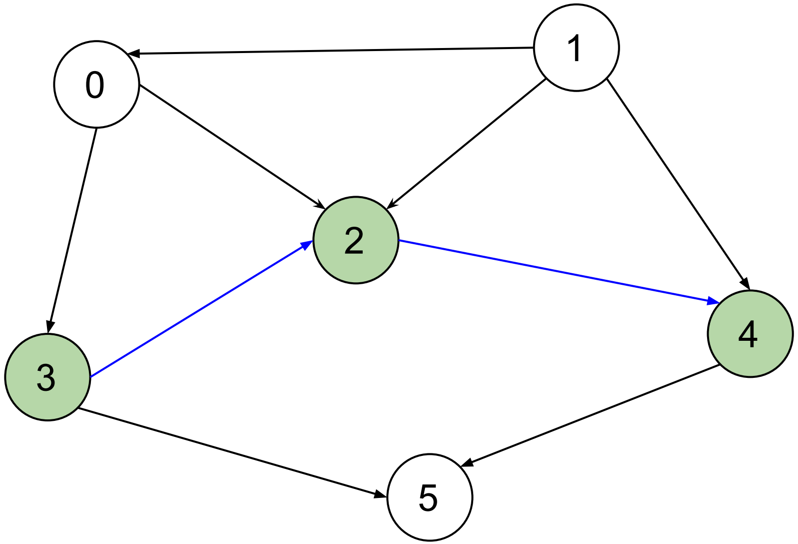


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	
1	0	0	
2	1	0	
3	0	0	
4	0	0	
5	0	0	

Orden topológico

- Elegimos un nodo hijo del nodo actual: 4

t=2

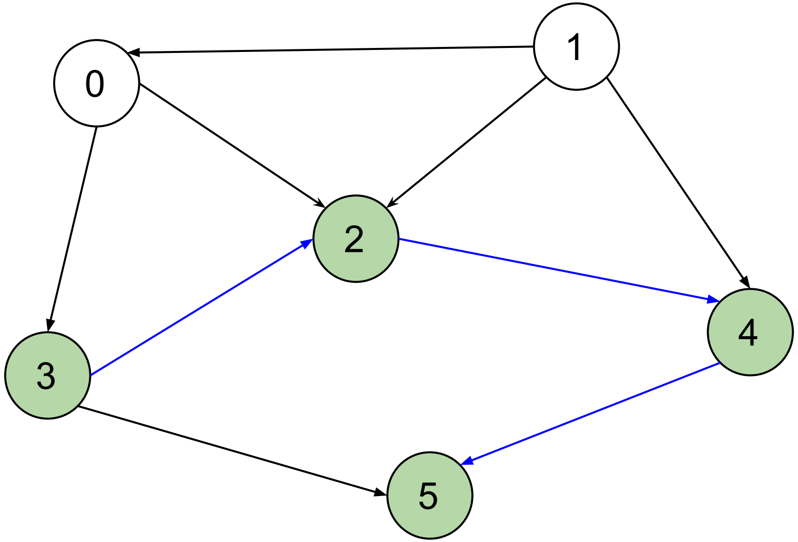


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	
1	0	0	
2	1	0	
3	0	0	
4	2	0	
5	0	0	

Orden topológico

- Elegimos un nodo hijo del nodo actual: 5

t=3

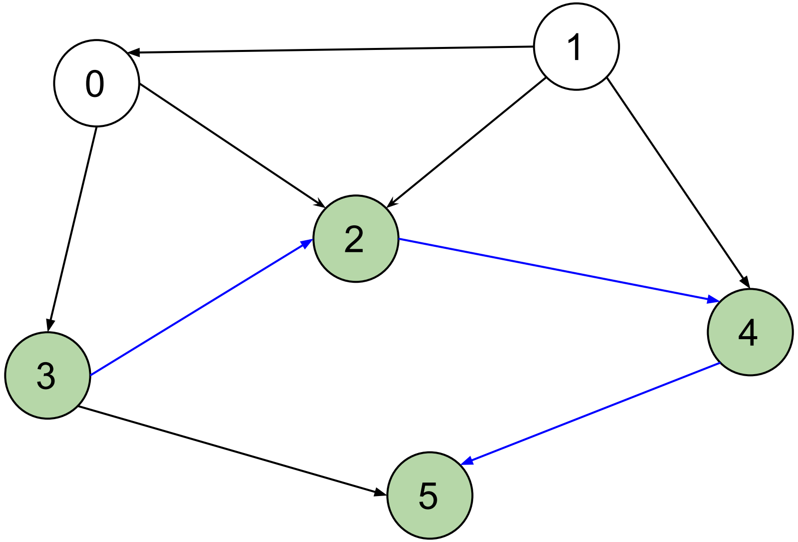


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	
1	0	0	
2	1	0	
3	0	0	
4	2	0	
5	3	0	

Orden topológico

- El nodo actual no tiene nodos hijos, por lo cual lo agregamos al orden topológico

t=4

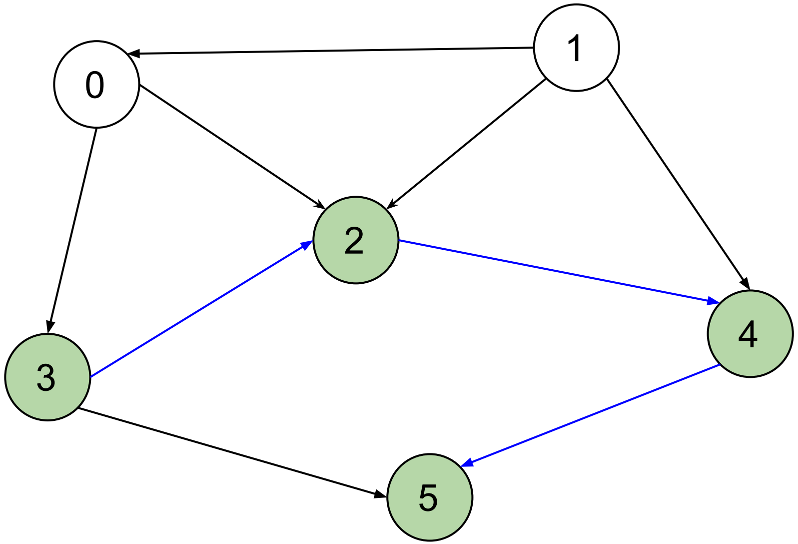


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	5
1	0	0	
2	1	0	
3	0	0	
4	2	0	
5	3	0	

Orden topológico

- Volvemos al nodo (4) y este no tiene más hijos. Lo agregamos al OT

t=5

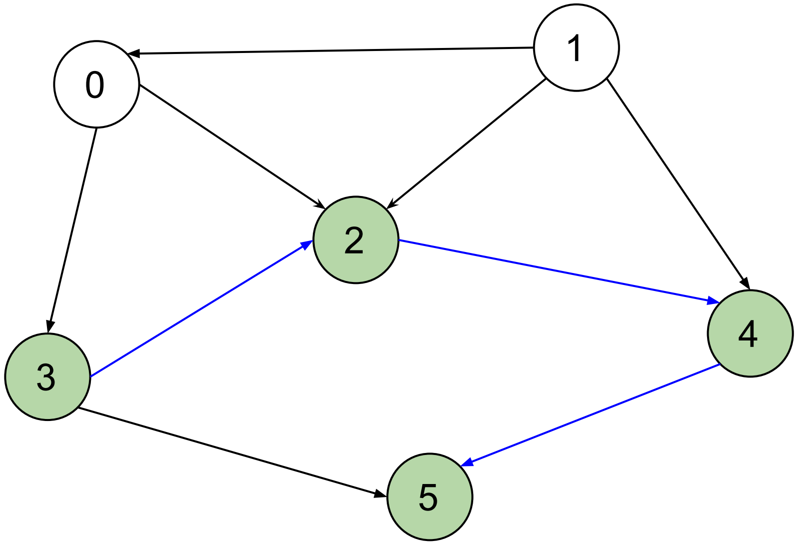


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	4
1	0	0	5
2	1	0	
3	0	0	
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- Volvemos al nodo (2) y este no tiene más hijos. Lo agregamos al OT

t=6

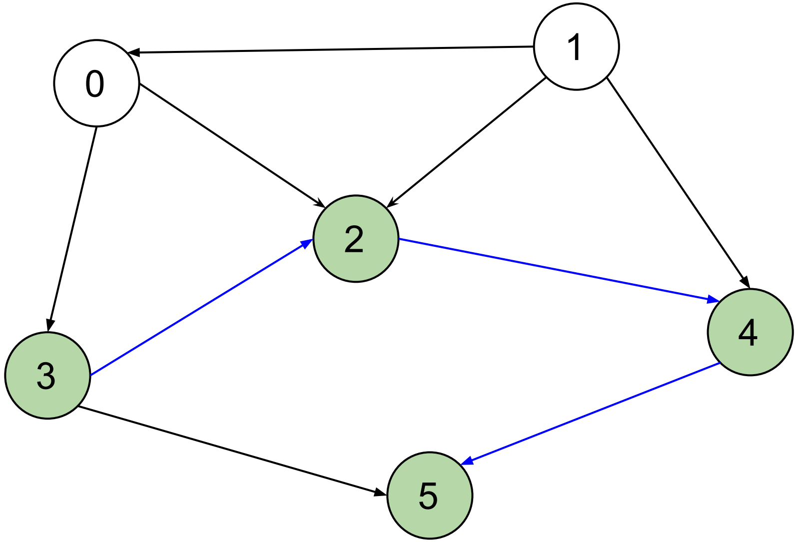


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	2
1	0	0	4
2	1	6	5
3	0	0	
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- Volvemos al nodo (2) y este no tiene más hijos. Lo agregamos al OT

t=6

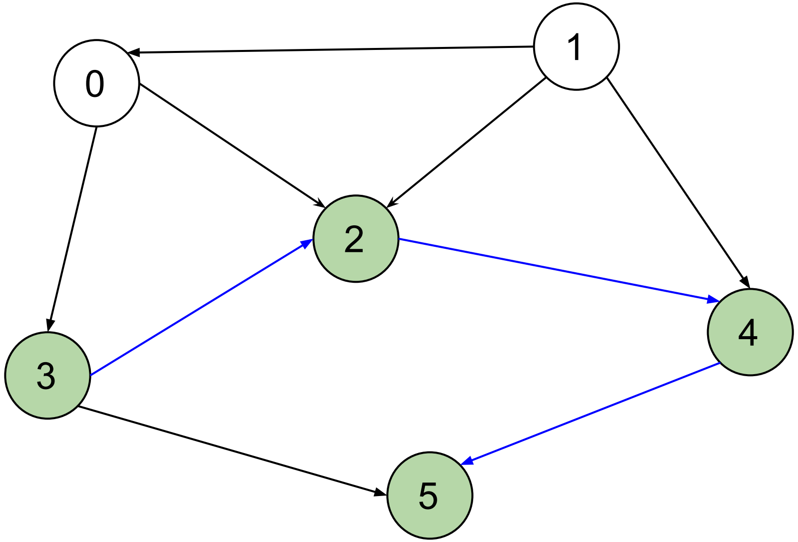


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	2
1	0	0	4
2	1	6	5
3	0	0	
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- Volvemos al nodo (3) y tiene el nodo (5) de hijo. El start del nodo (5) no es 0. Lo agregamos al OT

t=7

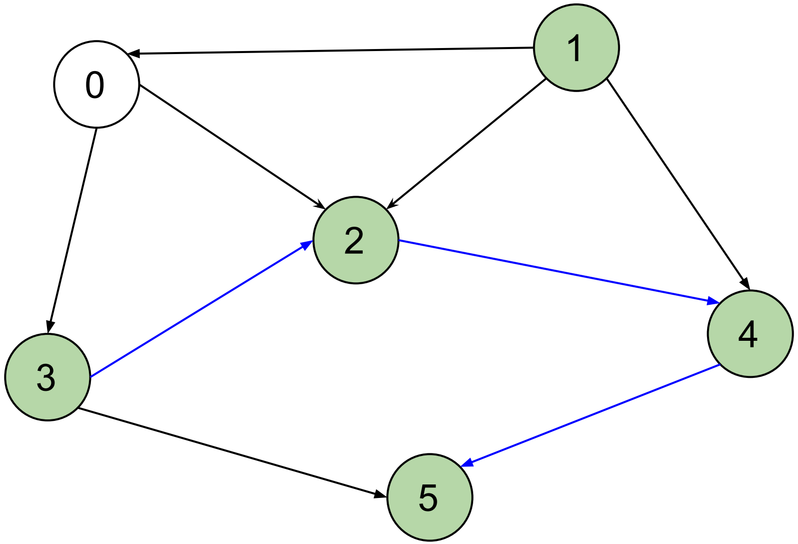


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	3
1	0	0	2
2	1	6	4
3	0	7	5
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- Elegimos un nodo restante, elegimos el (1)

t=8

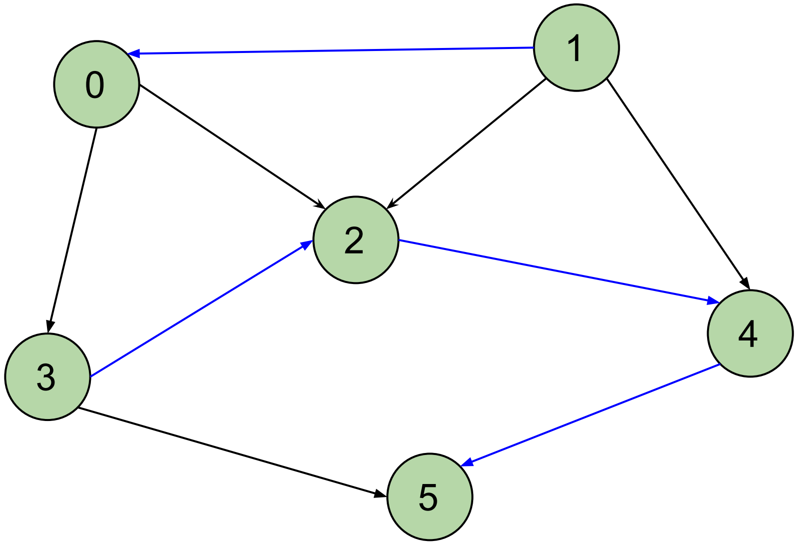


Nodo	Start	End	OT
0	0	0	3
1	8	0	2
2	1	6	4
3	0	7	5
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- Elegimos un nodo hijo: (0)

t=9

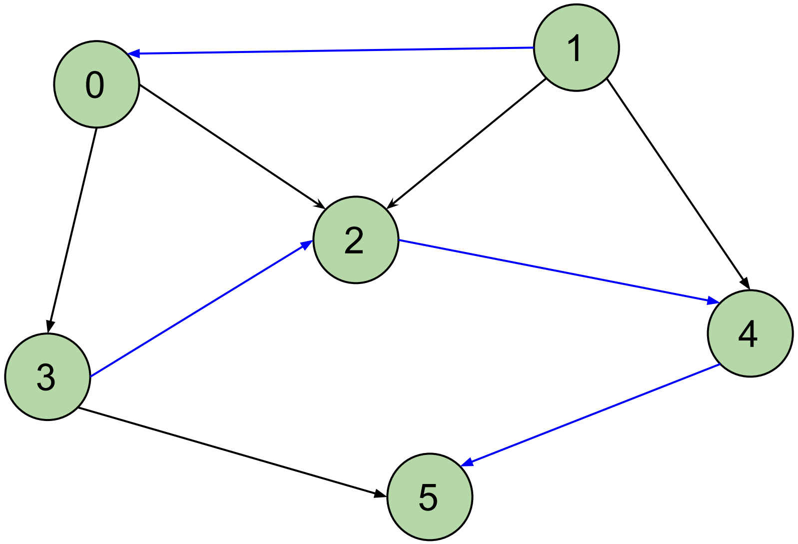


Nodo	Start	End	OT
0	9	0	3
1	8	0	2
2	1	6	4
3	0	7	5
4	2	5	
5	3	4	

Orden topológico

- El nodo 0 no tiene hijos con start=0. Lo agregamos al OT

t=10

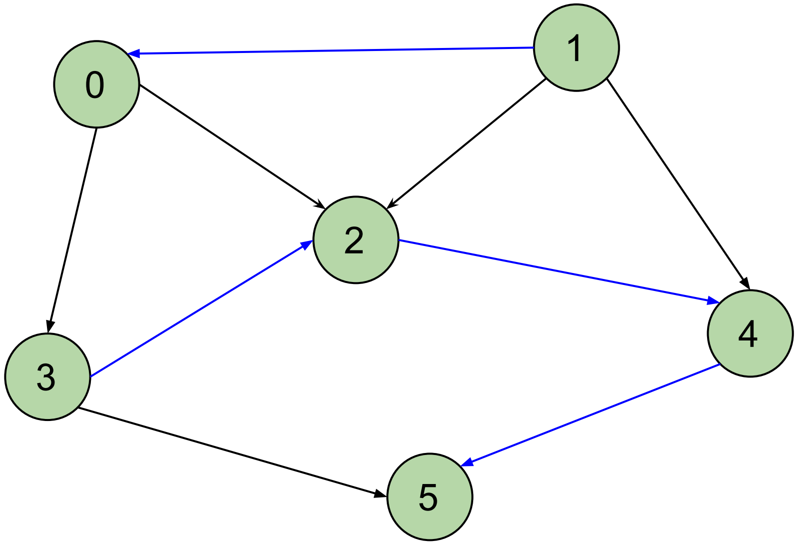


Nodo	Start	End	OT
0	9	10	0
1	8	0	3
2	1	6	2
3	0	7	4
4	2	5	5
5	3	4	

Orden topológico

- Volvemos al nodo 1 y no tiene más hijos con start=0. Lo agregamos al OT

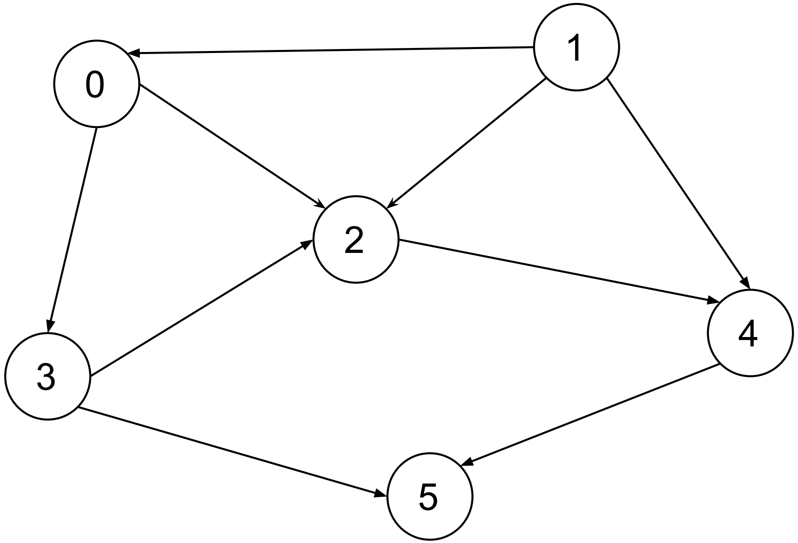
t=11



Nodo	Start	End	OT
0	9	10	1
1	8	11	0
2	1	6	3
3	0	7	2
4	2	5	4
5	3	4	5

Orden topológico

Finalmente el orden topológico del grafo es: (1)(0)(3)(2)(4)(5)



Componentes Fuertemente Conexas

Palabras Clave

- G, grafo **dirigido**
- Conjunto **maximal**

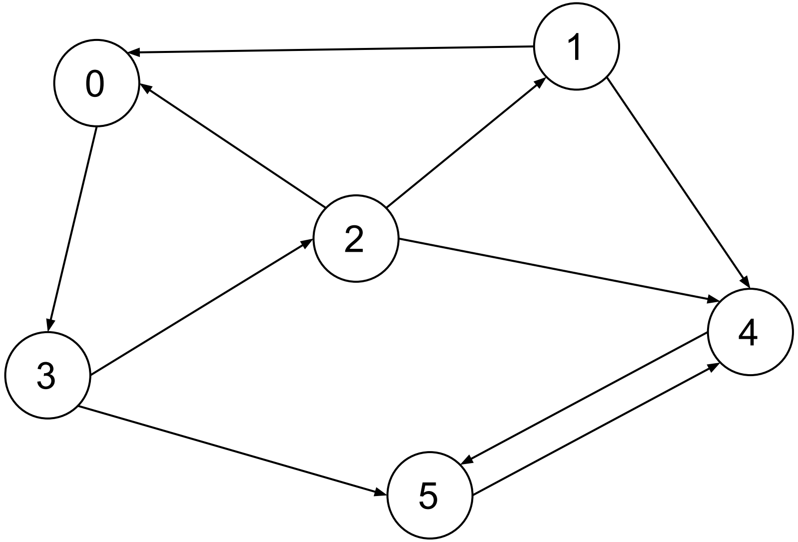
Componentes Fuertemente Conexas (CFC)

Definición

- En un grafo **dirigido** G, una **CFC** es un conjunto **maximal** de nodos $C \subseteq G$ de tal manera que dados $u,v \in C$ existe un camino dirigido desde u hasta v

Componentes Fuertemente Conexas (CFC)

¿Cómo se ve una CFC?

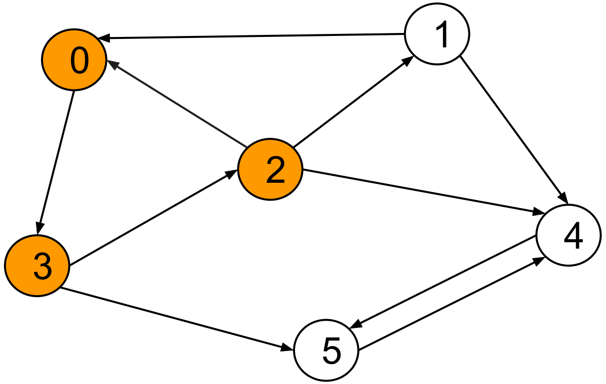


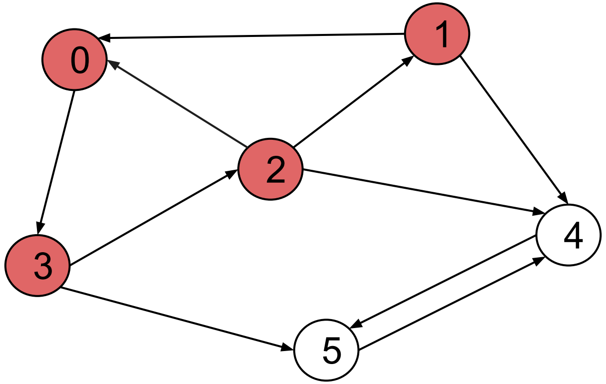
1. Grafo dirigido

Componentes Fuertemente Conexas (CFC)

¿Cómo se ve una CFC?

1. Grafo dirigido
2. Conjunto maximal

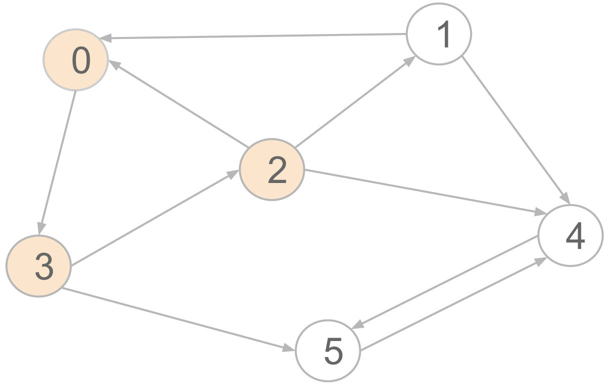


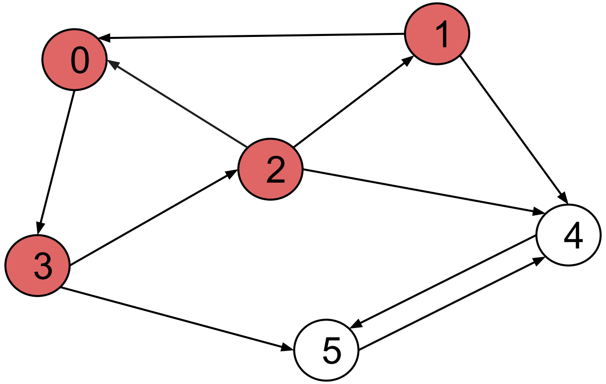


Componentes Fuertemente Conexas (CFC)

¿Cómo se ve una CFC?

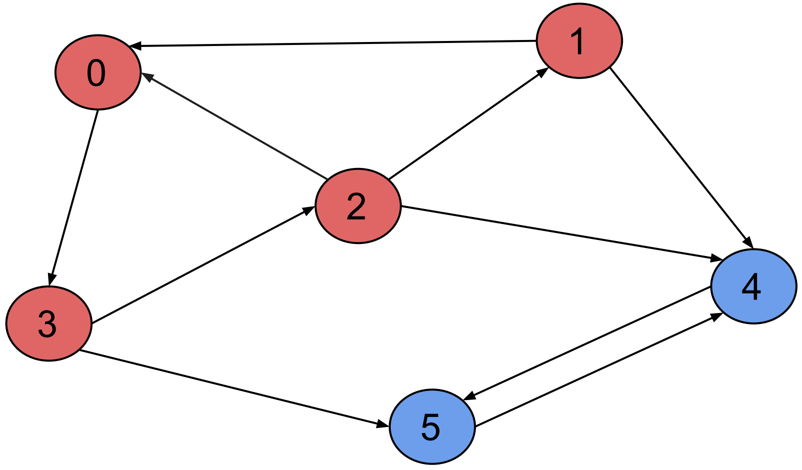
1. Grafo dirigido
2. Conjunto maximal





Componentes Fuertemente Conexas (CFC)

¿Cómo se ve una CFC?



Kosaraju

Palabras Clave

- G, grafo **dirigido**
- Grafo de **componentes**

Kosaraju

Definición

- Dado un grafo **G** dirigido, sean $C_1, \ldots, C_k$ sus **CFC**. Se define el **grafo de componentes** G^{CFC} según:
  - $V(G^{CFC}) = \{C_1, \ldots, C_k\}$
  - Si $(u, v) \in E(G)$ y $u \in C_i, v \in C_j$, entonces $(C_i, C_j) \in E(G^{CFC})$

Kosaraju: Pseudocódigo

input : grafo G

$\texttt{Kosaraju}(G)$:

$\quad L \leftarrow \texttt{TopSort}(G)$

$\quad$ **for** $u \in L$:

$\quad\quad \texttt{Assign}(u, u)$

input : grafo G, nodo $u \in V(G)$, nodo representante r

$\texttt{Assign}(G, u, r)$:

$\quad$ **if** $u.rep = \varnothing$:

$\quad\quad u.rep \leftarrow r$

$\quad\quad$ **for** $v \in N_{G^T}(u)$:

$\quad\quad\quad \texttt{Assign}(G, v, r)$

Ejemplo de Kosaraju

https://www.programiz.com/dsa/strongly-connected-components