Merge Sort

Clase 03

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Sebastián Bugedo

Sumario

Recordatorio: Caso promedio de `InsertionSort`

Como cada inversión aparece en una de las dos permutaciones del par P, P^r,

$$\# \text{ inv en } P \; + \; \# \text{ inv en } P^r \; = \; \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego, tomando los $n!/2$ pares posibles de permutaciones de la forma P_k, P_k^r, el promedio de inversiones es

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_P (\# \text{ inv en } P)}{\# \text{ permutaciones}} &= \frac{\sum_{k=1}^{n!/2} (\# \text{ inv en } P_k \; + \; \# \text{ inv en } P_k^r)}{n!} \\
&= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot n!/2}{n!} \\
&= \frac{n(n-1)}{4}
\end{aligned}$$

Una permutación promedio tiene una cantidad de inversiones $\mathcal{O}(n^2)$

Recordatorio: Caso promedio de `InsertionSort`

Con este resultado podemos concluir la complejidad de `InsertionSort` en el caso promedio

- La complejidad de `InsertionSort` es de la forma $\mathcal{O}(n + k)$
- En el caso promedio $k \in \mathcal{O}(n^2)$
- Luego, en el caso promedio `InsertionSort` toma tiempo $\mathcal{O}(n^2)$

¡Ojo! Esto va más allá de `InsertionSort`

Caso promedio de algoritmos de ordenación

Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un algoritmo de ordenación. Si $\mathcal{A}$ corrige una inversión por intercambio, entonces no puede ordenar más rápido que $\mathcal{O}(n^2)$ en el caso promedio.

Corolario

$\mathcal{A}$ no puede ordenar más rápido que $\mathcal{O}(n^2)$ en el peor caso.

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	?	?	?	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

SelectionSort in place

input : Secuencia $A[0 \ldots n-1]$, largo $n \geq 2$
output: $\varnothing$

`SelectionSort` *(A, n)*:

```
for i = 0 ... n − 2 :
    min ← i
    for j = i + 1 ... n − 1 :
        if A[j] < A[min] :
            min ← j
    A[i] ⇋ A[min]
```

SelectionSort e InsertionSort in place

```
SelectionSort (A, n):
    for i = 0 ... n − 2 :
        min ← i
        for j = i + 1 ... n − 1 :
            if A[j] < A[min] :
                min ← j
        A[i] ⇋ A[min]
```

```
InsertionSort (A, n):
    for i = 1 ... n − 1 :
        j ← i
        while (j > 0) ∧ (A[j] < A[j − 1]) :
            A[j] ⇋ A[j − 1]
            j ← j − 1
```

Ordenación hasta ahora

`SelectionSort`

- No tiene un mejor caso que sea *mejor* que su peor caso: $\mathcal{O}(n^2)$
- Siempre revisa la secuencia completa para determinar el mínimo

`InsertionSort`

- Cuando la secuencia está ordenada toma $\mathcal{O}(n)$
- En el caso promedio es $\mathcal{O}(n^2)$, tomando el promedio sobre todas las permutaciones igualmente probables
- Argumentamos esto mediante conteo de inversiones en cada permutación

¿Podemos tener un algoritmo de ordenación
con mejor complejidad que $\mathcal{O}(n^2)$ en el peor caso?

Hay esperanza: corregir varias inversiones a la vez

Ejemplo

Recordemos que el siguiente arreglo tiene 9 inversiones

0	1	2	3	4	5
34	8	64	51	32	21

Si intercambiamos 34 y 8:

0	1	2	3	4	5
8	34	64	51	32	21

- Corregimos $(0,1)$

Si intercambiamos 34 y 21:

0	1	2	3	4	5
21	8	64	51	32	34

- Corregimos $(0,4)$, $(0,5)$, $(4,5)$

Un escenario relacionado

Consideremos una secuencia parcialmente ordenada

Para ser más precisos, una secuencia que está formada por dos sub-secuencias ordenadas

8	20	29	40	50	60	70	82	15	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Además, sabemos exactamente dónde comienza la segunda sub-secuencia ordenada

¿Cómo aprovechamos este hecho para ordenar la secuencia completa?

Primer intento: `InsertionSort`

Estado inicial

A_1								A_2			
8	20	29	40	50	60	70	82	15	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

`InsertionSort` no intercambia nada del tramo A_1 y los índices i, j llegan al tramo A_2

$j = 9$
↓

8	20	29	40	50	60	70	82	15	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

↑
$i = 9$

Hasta este punto la ejecución es $\mathcal{O}(n)$

Primer intento: `InsertionSort`

El valor 15 se va intercambiando hasta llegar a su posición final $j = 2$

$j = 2$

8	15	20	29	40	50	60	70	82	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$i = 9$

En la siguiente iteración,

$j = 10$

8	15	20	29	40	50	60	70	82	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$i = 10$

Conclusión: en este tramo el algoritmo vuelve a ser $\mathcal{O}(n^2)$

Hoy veremos una mejor estrategia para aprovechar el orden

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el algoritmo `Merge` para combinar secuencias ordenadas
- ☐ Determinar complejidad de `Merge` y el *trade off* de ejecutarlo *in place*
- ☐ Demostrar correctitud de `Merge`
- ☐ Comprender el uso de `Merge` como algoritmo de ordenación general en `MergeSort`
- ☐ Determinar la complejidad de `MergeSort`

Sumario

Mezcla (*merge*) de secuencias ordenadas

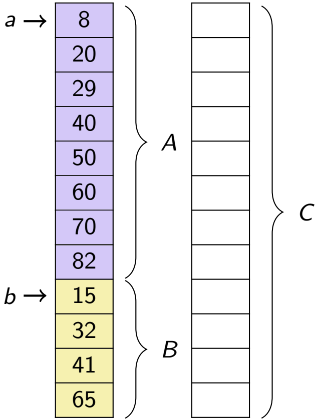
Proponemos el siguiente algoritmo para combinar dos secuencias ordenadas para formar una nueva **ordenada**

input : Secuencias ordenadas A y B
output: Nueva secuencia ordenada C

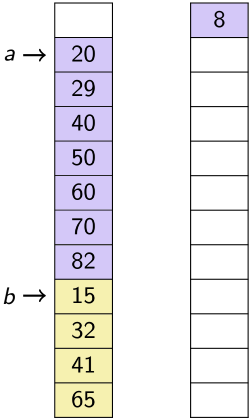
Merge(A, B)**:**

1 Iniciamos C vacía
2 Sean a y b los primeros elementos de A y B
3 Extraer de su secuencia respectiva el menor entre a y b
4 Insertar el elemento extraído al final de C
5 Si quedan elementos en A **y** B, volver a línea 2
6 Concatenar C con la secuencia que aún tenga elementos
7 **return** C

Merge: Ejemplo de ejecución

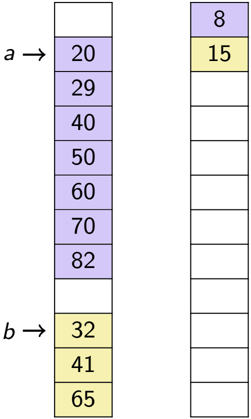


Estado inicial

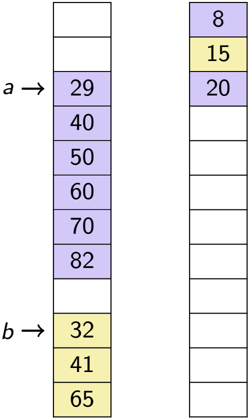


Estado luego de la primera iteración

`Merge`: Ejemplo de ejecución

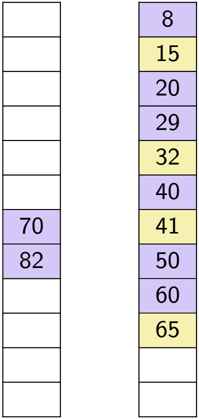


Estado luego de la
segunda iteración

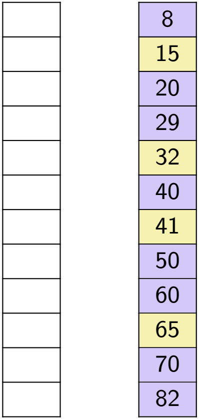


Estado luego de la
tercera iteración

`Merge`: Ejemplo de ejecución



Estado luego de insertar en C
el último elemento de B



Estado luego de
concatenar el resto de A

Correctitud de `Merge`

Demostración (finitud)

En cada iteración del algoritmo antes de ejecutar la línea 6, se extrae siempre un elemento de A o B, y se inserta en C.

Luego, cuando una de las secuencias se vacía, se insertan todos sus elementos en C.

En total se realizan $n = |A| + |B|$ inserciones y un número menor a n de comparaciones entre elementos. Luego, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos. $\square$

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

Para A, B inicialmente ordenadas, consideremos la propiedad

$$\begin{aligned}\mathbf{P(n)} \quad := \quad & \text{Luego de insertar el } n\text{-ésimo elemento en } C, \\ & A, B, C \text{ se encuentran ordenadas}\end{aligned}$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ corresponde al estado de las secuencia luego de insertar el primer elemento en C.
    - Dado que se extrajo el menor elemento de alguna de las otras secuencias, estas se mantienen ordenadas. Esto aplica trivialmente si dicha secuencia queda vacía.
    - Dado que C solo tiene un elemento, está ordenada.

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \begin{array}{l}\text{Luego de insertar el } n\text{-ésimo elemento en } C,\\ A, B, C \text{ se encuentran ordenadas}\end{array}$$

2. **H.I.** Suponemos que luego de agregar el n-ésimo elemento, A, B, C están ordenadas.

   P.D. Luego de agregar el $(n+1)$-ésimo elemento, A, B, C siguen ordenadas.

   Tenemos dos casos

   - Si quedan elementos en A y en B, sea c_{n+1} el menor entre las cabezas de A y B.
   - Sin pérdida de generalidad, si solo quedan elementos en A, sea c_{n+1} la cabeza de A.

   Se elimina c_{n+1} de su secuencia respectiva y se inserta al final de C.

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

Por **H.I.** tenemos que la secuencia de origen de c_{n+1} se encontraba ordenada antes de sacarlo. Como es el mínimo de la secuencia por ser el primer elemento y ser una secuencia ordenada, se preserva el orden. Si la secuencia se vacía, también está ordenada.

Por **H.I.** tenemos que los primeros n elementos de C cumplen

$$c_1 \leq \cdots \leq c_n$$

Si c_{n+1} fuera estrictamente menor a alguno de estos elementos, implicaría una de las siguientes contradicciones

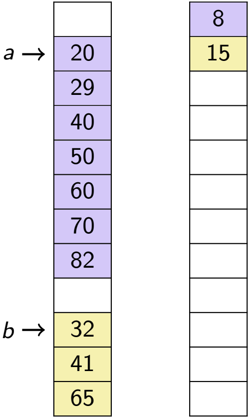
- A o B no están ordenadas (ya probamos que lo están)
- c_{n+1} es extraído en una iteración anterior por el criterio de selección

Luego, concluimos el resultado buscado

$$c_1 \leq \cdots \leq c_n \leq c_{n+1}$$

□

Complejidad de memoria de `Merge`



La ejecución de ejemplo que mostramos considera una nueva secuencia C donde se insertan los valores

- Para $|A| + |B| = n$ necesitamos memoria adicional $\mathcal{O}(n)$
- No necesita mover elementos dentro de ninguna secuencia

También se puede realizar *in place*

- Usar el mismo espacio reservado a A y B: memoria adicional $\mathcal{O}(1)$
- Mover todos los datos mayores al insertado
- Impacta en la complejidad de tiempo...

Complejidad de tiempo de `Merge`

Consideramos la implementación sugerida mediante una secuencia **adicional**

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias A y B
   - Se decide quién extraer comparando los menores $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(1)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n)$
2. Reubicación de la secuencia no vacía restante
   - Se saca un elemento de la restante $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(1)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n)$

Usando $\mathcal{O}(n)$ memoria adicional, `Merge` es $\mathcal{O}(n)$

Complejidad de tiempo de `Merge` (in place)

Si consideramos usar el espacio reservado para A y B

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias A y B
   - Se decide quién extraer comparando los menores $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en al comienzo $\mathcal{O}(n)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n^2)$
2. Reubicación de la secuencia no vacía restante: no necesario
   - El resto de los elementos está en su posición correcta

Usando $\mathcal{O}(1)$ memoria adicional, `Merge` es $\mathcal{O}(n^2)$

Complejidad de tiempo de `Merge`

- Tenemos un algoritmo **lineal** para obtener una secuencia ordenada
- Pero el requisito de las sub-secuencias ordenadas es demasiado exigente

¿Podemos usar `Merge` para ordenar una secuencia arbitraria?

- Dada una secuencia arbitraria
- Estamos listos si logramos crear dos sub-secuencias ordenadas a partir de ella
- Luego las combinamos con `Merge`

Sumario

Dividir para conquistar

El plan para usar `Merge` en un algoritmo de ordenación sigue la estrategia **dividir para conquistar**

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) **sub-problemas** del mismo tipo
2. Resolver **recursivamente** cada sub-problema
3. Encontrar solución al problema original **combinando** las soluciones a los sub-problemas

Los sub-problemas son instancias más pequeñas del problema a resolver

Dividir para conquistar y `Merge`

Podemos usar la estrategia **dividir para conquistar** en el problema de ordenación, usando `Merge`

¿En qué parte del dividir para conquistar usaremos `Merge`?

La idea general para ordenar usando `Merge`define un nuevo algoritmo que llamaremos `MergeSort`

1. Dividir la secuencia original en dos sub-secuencias
2. Llamamos recursivamente a `MergeSort` sobre las dos sub-secuencias
3. Combinamos las secuencias ordenadas resultantes mediante `Merge`

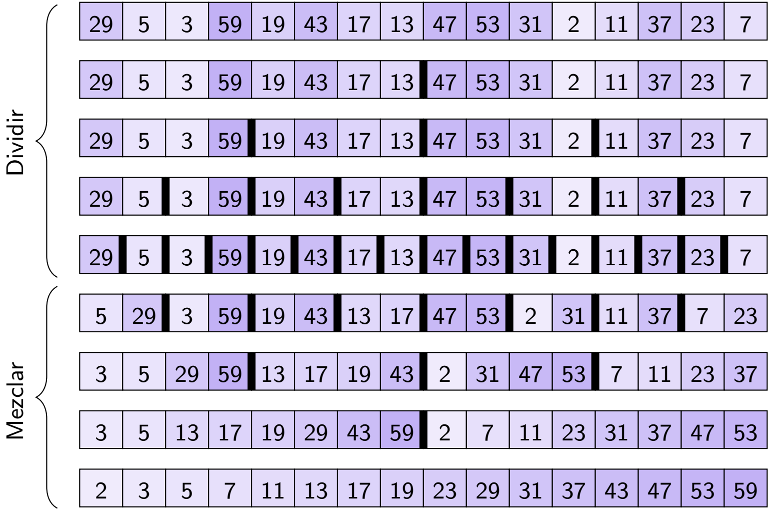
El algoritmo `MergeSort`

A continuación tenemos el pseudocódigo del algoritmo recursivo `MergeSort`

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` (A):
  if $|A| = 1$ **: return** A
  Dividir A en mitades A_1 y A_2
  $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
  $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
  $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
  return B

`MergeSort`: Ejemplo de ejecución



Correctitud de `MergeSort`

Ejercicio (propuesto)

Demuestre que `MergeSort` es correcto

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` *(A)*:
  if $|A| = 1$ **: return** A
  Dividir A en mitades A_1 y A_2
  $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
  $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
  $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
  return B

Carácter recursivo de `MergeSort`

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

```
MergeSort (A):
1   if |A| = 1 : return A
2   Dividir A en A_1 y A_2
3   B_1 ← MergeSort(A_1)
4   B_2 ← MergeSort(A_2)
5   B ← Merge(B_1, B_2)
6   return B
```

Todo algoritmo recursivo debe chequear primero el **caso base**

- Es el caso cuya solución no requiere recursión
- En `MergeSort`: línea 1

Los **llamados recursivos** se hacen sobre casos distintos al original

- Se acercan un poco más al caso base
- En `MergeSort`: líneas 3 y 4

Complejidad de `MergeSort`

Para el análisis de complejidad de tiempo, definimos

$$T(n) := \#\text{ pasos para ordenar } n \text{ elementos}$$

Con esto, consideramos los dos casos posibles al llamar a `MergeSort`

`MergeSort` (A):
- **if** $|A| = 1$ **: return** A
- Dividir A en A_1 y A_2
- $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
- $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
- $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
- **return** B

- Si $n = 1$, aplica el caso base y solo involucra un paso

$$T(1) = 1$$

- Si $n > 1$, aplican los llamados
  - Dos llamados de tamaño $n/2$
  - Llamado a `Merge`

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Este análisis aplica **para toda** secuencia de input:
Nos entregará el resultado de peor, mejor y caso promedio

Complejidad de `MergeSort`

La siguiente relación es una **relación de recurrencia**

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Podemos resolverla notando que la parte recursiva puede ser reescrita como

$$T(n) = 2T(n/2) + n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

La gracia de esta expresión es que numeradores y denominadores incluyen la misma fracción de n

Sin pérdida de generalidad, supondremos que n es potencia de 2

Complejidad de `MergeSort`

Construimos un sistema de ecuaciones reemplazando el argumento del lado izquierdo por $n, n/2, n/4, \ldots, 2$ de forma que el último término contiene $T(1)$ (nuestro caso base)

$$
\begin{array}{lccc}
\text{ecuación } 1 & \dfrac{T(n)}{n} & = & \dfrac{T(n/2)}{n/2} + 1 \\
\text{ecuación } 2 & \dfrac{T(n/2)}{n/2} & = & \dfrac{T(n/4)}{n/4} + 1 \\
 & & \cdots & \\
\text{ecuación } k & \dfrac{T(2)}{2} & = & \dfrac{T(1)}{1} + 1
\end{array}
$$

Como el lado derecho de la i-ésima ecuación considera la potencia 2^i, de la k-ésima ecuación deducimos

$$1 = \frac{n}{2^k} \quad \Rightarrow \quad 2^k = n \quad \Rightarrow \quad k = \log(n)$$

Complejidad de MergeSort

Sumamos las $\log(n)$ ecuaciones y simplificamos los términos que aparecen a ambos lados

$$
\begin{array}{lcccc}
\text{ecuación } 1 & \dfrac{T(n)}{n} & = & \dfrac{T(n/2)}{n/2} & +1 \\
\text{ecuación } 2 & \dfrac{T(n/2)}{n/2} & = & \dfrac{T(n/4)}{n/4} & +1 \\
 & & \dots & & \\
\text{ecuación } k & \dfrac{T(2)}{2} & = & \dfrac{T(1)}{1} & +1 \\
\hline
\text{suma} & \dfrac{T(n)}{n} & = & \dfrac{T(1)}{1} & +\log(n)
\end{array}
$$

Despejando, obtenemos $T(n) = n\log(n) + n$

La complejidad de tiempo de MergeSort es $\mathcal{O}(n\log(n))$

Complejidad de `MergeSort`

En términos de memoria adicional

```
MergeSort (A):
1   if |A| = 1 : return A
2   Dividir A en A1 y A2
3   B1 ← MergeSort(A1)
4   B2 ← MergeSort(A2)
5   B ← Merge(B1, B2)
6   return B
```

- El caso base no ocupa memoria adicional
- Para $|A| = n$, la línea 5 ocupa $\mathcal{O}(n)$
- Ojo! Los llamados recursivos no van acumulando memoria reservada, por lo que **no sumamos** $\mathcal{O}(n)$ por llamado

La memoria adicional **se puede reciclar:**
La complejidad de memoria de `MergeSort` es $\mathcal{O}(n)$

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Notemos la mejora en tiempo con `MergeSort`
a cambio de memoria adicional

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el algoritmo `Merge` para combinar secuencias ordenadas
- ☐ Determinar complejidad de `Merge` y el *trade off* de ejecutarlo *in place*
- ☐ Demostrar correctitud de `Merge`
- ☐ Comprender el uso de `Merge` como algoritmo de ordenación general en `MergeSort`
- ☐ Determinar la complejidad de `MergeSort`

Epílogo

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

4898 3947

O usa el código QR