Algoritmo de Kruskal y conjuntos disjuntos

Clase 23

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Sebastián Bugedo

Sumario

¿Cómo están?

Miau

aus Frankreich

Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

Cuarto Acto: Grafos

Representación, heaps y algoritmos

Playlist 4

Playlist: DatiWawos Cuarto Acto

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Componentes fuertemente conectadas

Definición

Sea G un grafo dirigido. Una **componente fuertemente conectada (CFC)** es un conjunto maximal de nodos $C \subseteq V(G)$ tal que dados $u, v \in C$, existe un camino dirigido desde u hasta v

Proposición

Si G es cíclico y los nodos de $B \subseteq V(G)$ forman un ciclo, entonces existe una componente fuertemente conectada C tal que $B \subseteq C$

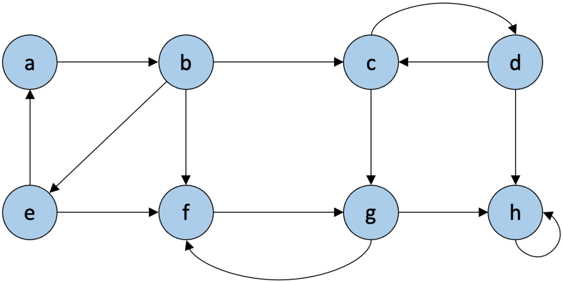
Los nodos de un ciclo pertenecen a la misma CFC

Proposición

Un grafo G acíclico tiene 0 componentes fuertemente conectadas

Componentes fuertemente conectadas

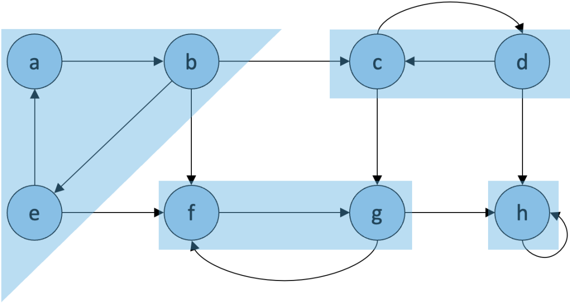
Consideremos el siguiente grafo dirigido cíclico



¿Cuáles son las componentes fuertemente conectadas de G?

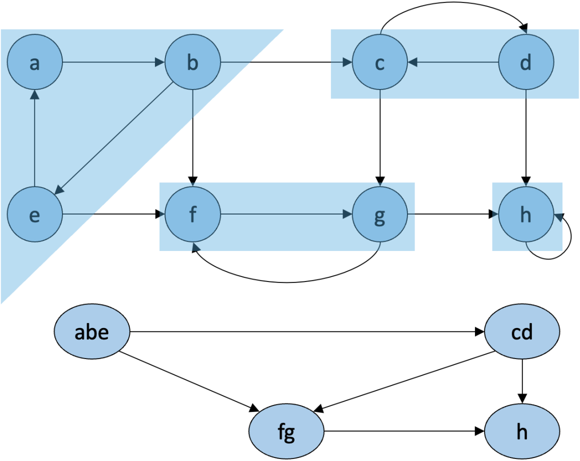
Componentes fuertemente conectadas

Existen 4 CFC's en el grafo anterior



Notemos que es necesario poder *ir y volver* dentro de una CFC

Componentes fuertemente conectadas



Cada componente tiene un **representante** que combina sus nodos

Grafo transpuesto

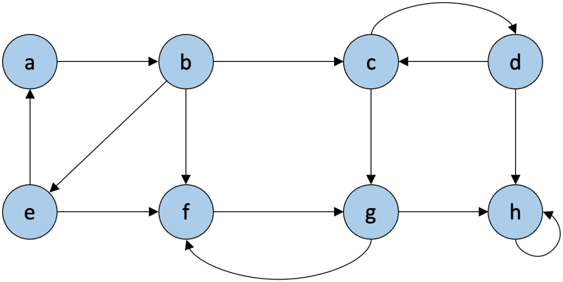
Para proponer un algoritmo, necesitamos un grafo nuevo

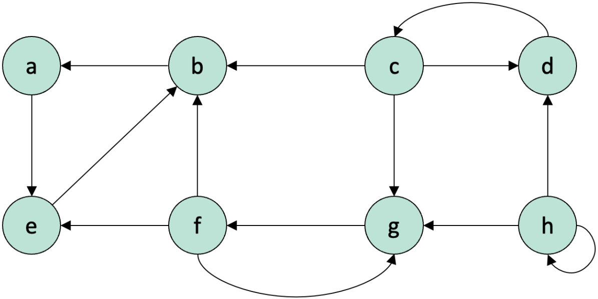
Definición

Sea G un grafo dirigido. Decimos que G^T es el grafo **transpuesto** de G si

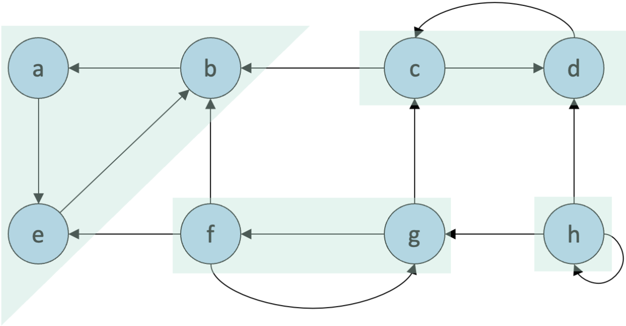
- $V(G) = V(G^T)$
- $\forall u, v \in V(G).\ (u, v) \in E(G) \rightarrow (v, u) \in E(G^T)$

El transpuesto se obtiene invirtiendo todas las aristas de G


a
b
c
d
e
f
g
h


a
b
c
d
e
f
g
h

Grafo transpuesto

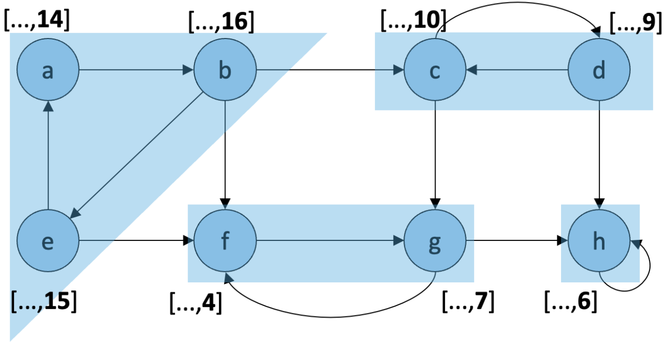


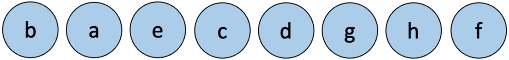
Proposición

Los grafos G y G^T tienen las mismas componentes fuertemente conectadas

Hacia un algoritmo para determinar las CFC

Construimos un orden de los nodos de G según tiempos de término

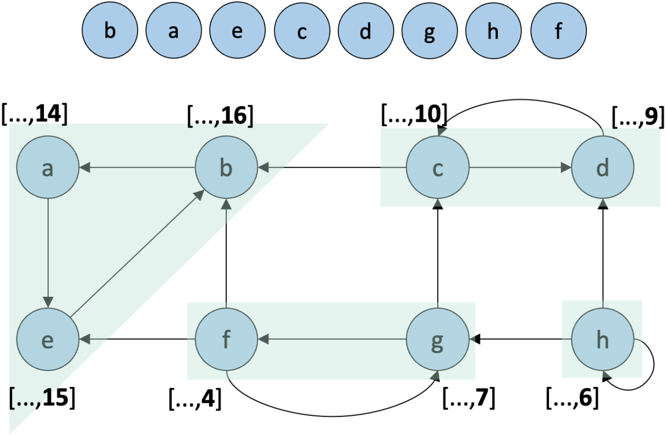




¡Ojo! Esto no es un orden topológico porque G es cíclico

Hacia un algoritmo para determinar las CFC

Recorremos el grafo **transpuesto** partiendo según el orden anterior



Al transponer, no es posible ir de b a c
porque están en componentes diferentes

Algoritmo de Kosaraju

input : grafo G

`Kosaraju`(G):

  $L \leftarrow$ `TopSort`(G)

  for $u \in L$ **:**

    `Assign`(G, u, u)

input : grafo G, nodo $u \in V(G)$, nodo representante r

`Assign`(G, u, r):

  if $u.rep = \varnothing$ **:**

    $u.rep \leftarrow r$

    for $v \in N_{G^T}(u)$ **:**

      `Assign`(G, v, r)

No olvidar: no podemos interpretar L como orden topológico.
Es un orden que se construye de la misma forma

Algoritmo de Kosaraju

El algoritmo de Kosaraju se basa en las propiedades del siguiente grafo

Definición

Dado un grafo G dirigido, sean $C_1, \ldots, C_k$ sus componentes fuertemente conectadas. Se define el **grafo de componentes** G^{CFC} según

- $V(G^{CFC}) = \{C_1, \ldots, C_k\}$
- Si $(u, v) \in E(G)$ y $u \in C_i, v \in C_j$, entonces $(C_i, C_j) \in E(G^{CFC})$

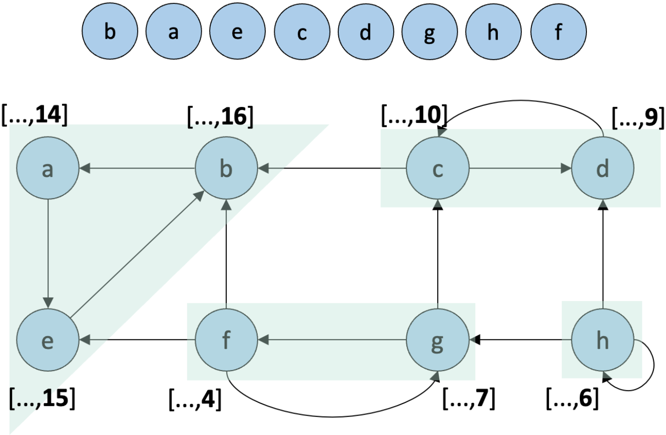
Teorema

El grafo de componentes G^{CFC} es un grafo dirigido acíclico

Corolario

El grafo de componentes G^{CFC} tiene un orden topológico

Hacia un algoritmo para determinar las CFC



La forma en que recorremos las componentes nos da su orden topológico
$(bae)(cd)(gf)(h)$

Árboles de cobertura mínimos

Definición

Dado un grafo no dirigido G, un subgrafo $T \subseteq G$ se dice un **árbol de cobertura mínimo** o **MST** de G si

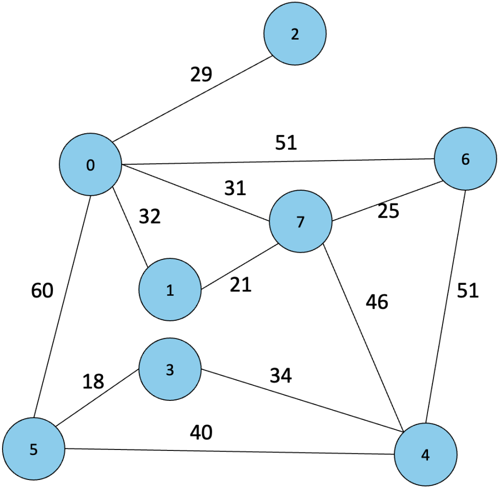
1. T es un árbol
2. $V(T) = V(G)$
3. No existe otro MST T' para G con menor costo total

Es decir, si T es MST de G,

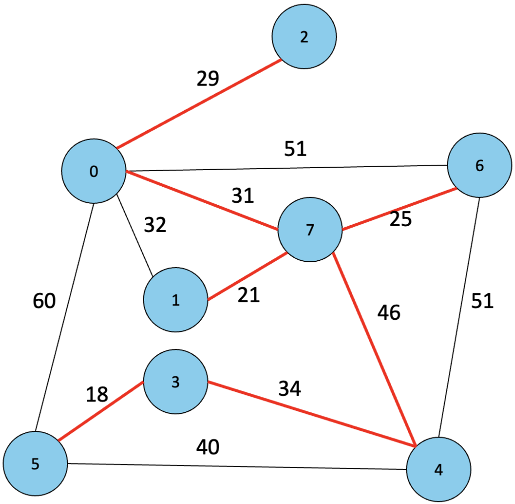
1. no tiene ciclos
2. es una **cobertura** de los nodos de G
3. tiene costo mínimo

¿Puede haber más de un MST diferente para G?

Árboles de cobertura mínimos



Árboles de cobertura mínimos



Árboles de cobertura mínimos

Los MST están presentes en la solución de múltiples problemas de conectividad

- Redes de distribución eléctrica
- Redes telefónicas
- Comunicaciones, computacionales, tráfico aéreo. . .
- Incluso redes biológicas, químicas y físicas

Árboles de cobertura mínimos

Para atacar el problema algorítmicamente, dado G no dirigido

- Llamamos **corte** a una **partición** (V_1, V_2) de $V(G)$

$$V_1, V_2 \neq \varnothing, \qquad V_1 \cup V_2 = V(G), \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

- Diremos que una arista **cruza el corte** si uno de sus extremos está en V_1 y el otro en V_2

¿Qué podemos afirmar respecto a los MST y
las aristas que cruzan un corte dado?

Árboles de cobertura mínimos

Si T es un MST de G, y $P = (V_1, V_2)$ es un corte de G

- Sabemos que al menos una arista que cruza P está incluida en T
- De lo contrario, no habría camino entre nodos de V_1 y V_2
- Por lo tanto: T no sería de cobertura

Si $P = (V_1, V_2)$ es un corte de G

- Sabemos que cada arista de corte tiene un costo asociado
- La arista más barata **siempre** se incluye en **algún** MST

Usaremos estas ideas para constuir un MST desde cero

Sumario

Algoritmo de Kruskal

La idea detrás del **algoritmo de Kruskal** es crear un bosque que va convergiendo en un único árbol

Para un grafo $G = (V, E)$, iteramos sobre las aristas e en orden no decreciente de costo

1. Si e genera un ciclo al agregarla a T, la ignoramos
2. Si no genera ciclo, se agrega

¿Es necesario revisar **todas** las artistas de E?

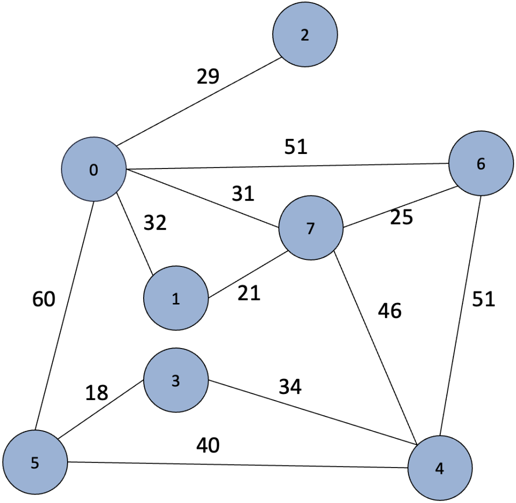
Algoritmo de Kruskal

`Kruskal`(G):

 $E \leftarrow E$ ordenada por costo, de menor a mayor
 $T \leftarrow$ lista vacía
 for $e \in E$ **:**
  if *Agregar e a T no forma ciclo* **:**
   $T \leftarrow T \cup \{e\}$
 return T

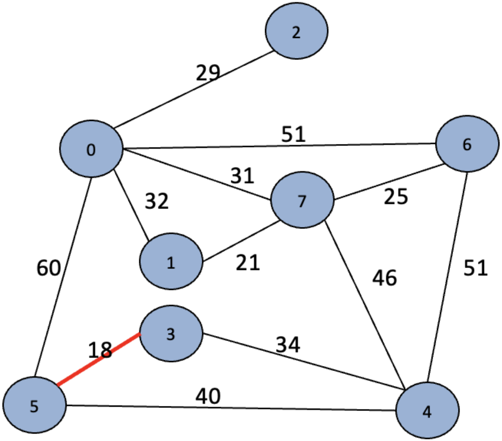
¿Este algoritmo usa cortes de manera implícita?

Algoritmo de Kruskal



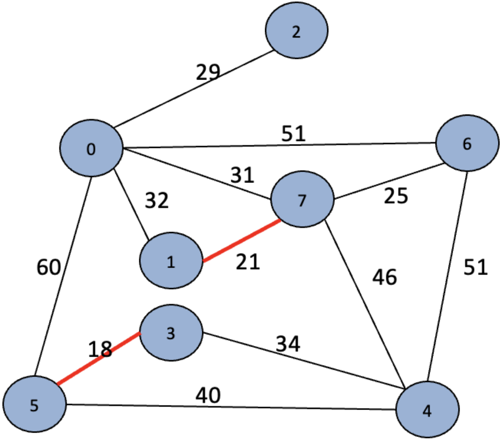
Al inicio, tenemos un bosque de $|V|$ árboles sin aristas

Algoritmo de Kruskal

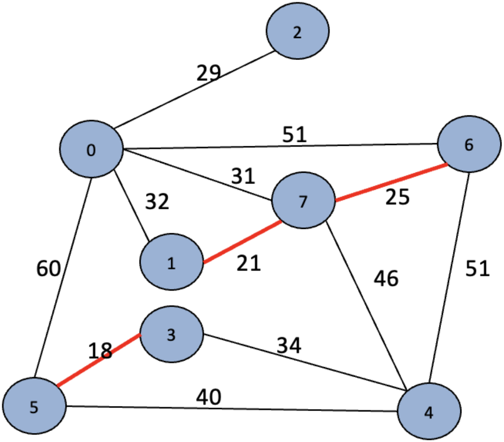


Reducimos la cantidad de árboles en 1 con cada arista añadida

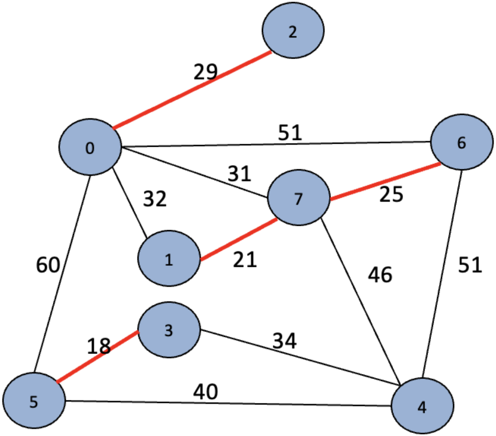
Algoritmo de Kruskal



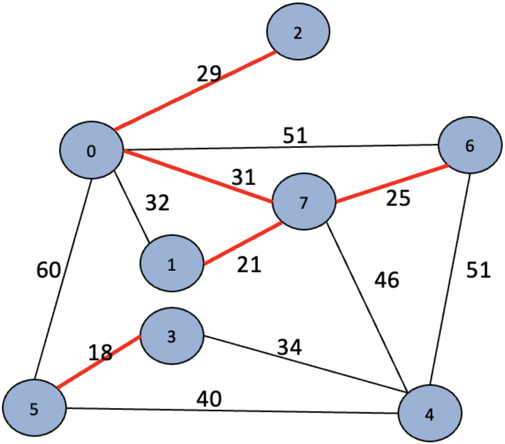
Algoritmo de Kruskal



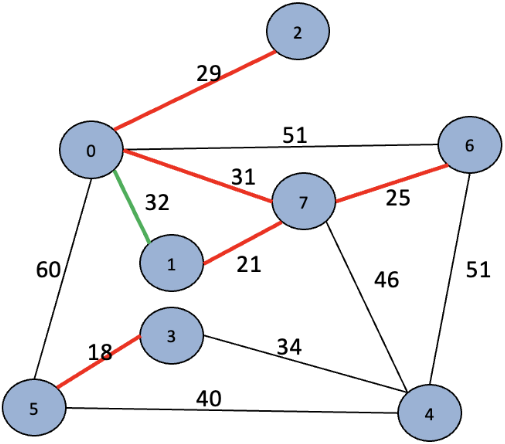
Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal: una conexión con cortes

Dada una arista (u, v) que corresponde chequear

- Podemos considerar un corte dado por

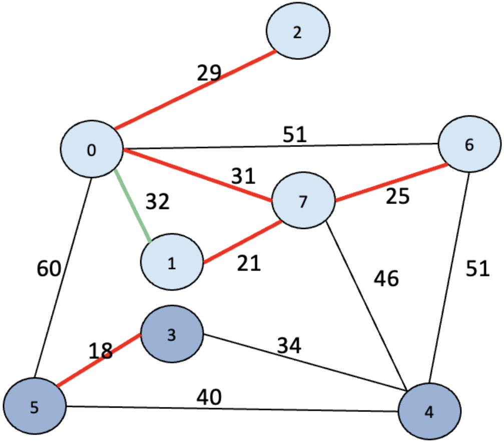
$$V_1 = \{w \mid w \text{ está conectado con u con aristas de } T\}, \quad V_2 = V - V_1$$

- Y otro corte dado por

$$V_1 = \{w \mid w \text{ está conectado con v con aristas de } T\}, \quad V_2 = V - V_1$$

Agregamos la arista si es de corte para estos dos cortes

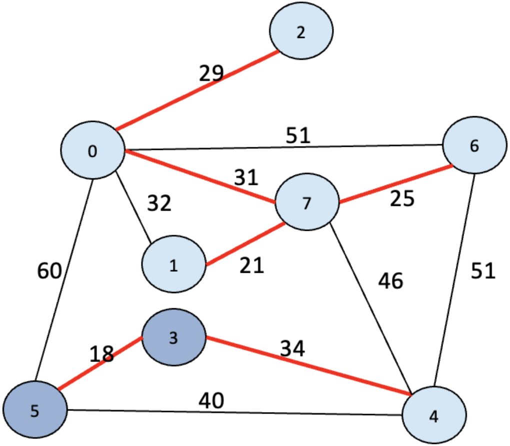
Algoritmo de Kruskal



La arista $(0, 1)$ no es de corte para ninguno de los cortes (ambos cortes son iguales porque 0 y 1 ya están conectados entre sí):

$$(\{0, 1, 2, 6, 7\}, \{3, 4, 5\})$$

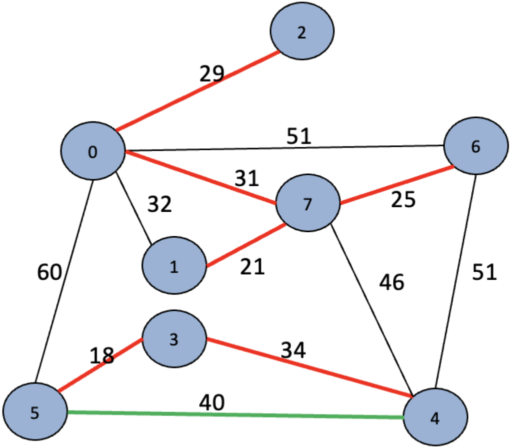
Algoritmo de Kruskal



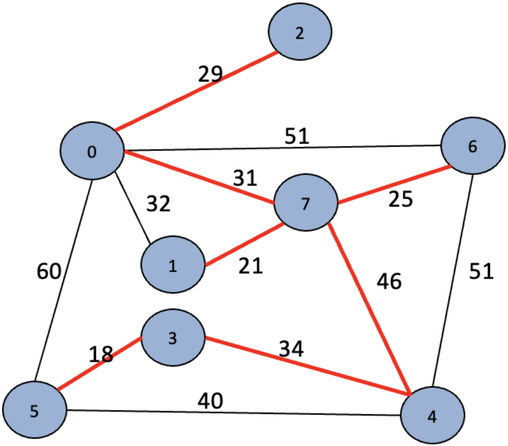
La arista $(3, 4)$ es de corte para los cortes:

$$(\{3, 5\}, \{0, 1, 2, 4, 6, 7\}) \qquad (\{4\}, \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\})$$

Algoritmo de Kruskal

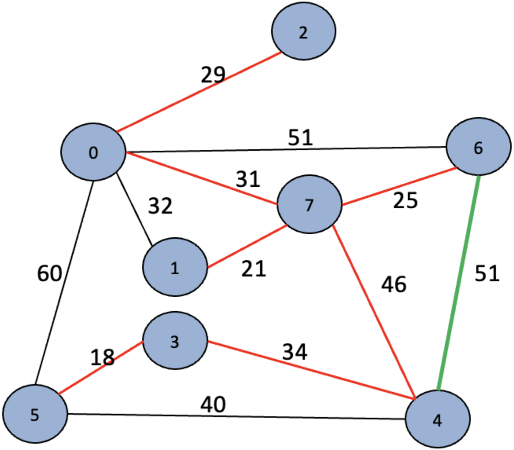


Algoritmo de Kruskal



En este punto, $|E| = |V| - 1$ y T es un árbol

Algoritmo de Kruskal



Cualquier arista adicional formaría un **ciclo**

Algoritmo de Kruskal

```
Kruskal(G):
    E ← E ordenada por costo, de menor a mayor
    T ← lista vacía
    for e ∈ E :
        if Agregar e a T no forma ciclo :
            T ← T ∪ {e}
    return T
```

¿Cómo revisamos eficientemente que e no forma un ciclo en T?

Algoritmo de Kruskal: conjuntos

Dada una arista (u, v) podemos considerar los conjuntos

- Nodos conectados con u en T

$$V_u = \{w \mid w \text{ está conectado con u con aristas de } T\}$$

- Nodos conectados con v en T

$$V_v = \{w \mid w \text{ está conectado con v con aristas de } T\}$$

La arista forma un **ciclo** en T si, y solo si, $V_u = V_v$

Notemos que los árboles del bosque T forman **conjuntos disjuntos**

¿Cómo modelar eficientemente estas estructuras?

Sumario

Conjuntos disjuntos

Definición

Una colección de **conjuntos disjuntos** $\{S_1, \ldots, S_n\}$ es una EDD que permite

- Identificar a qué conjunto **pertenece** un elemento
- **Unir** conjuntos S_i, S_j formando un nuevo conjunto

Para atacar la representación de los conjuntos usaremos un **representante**

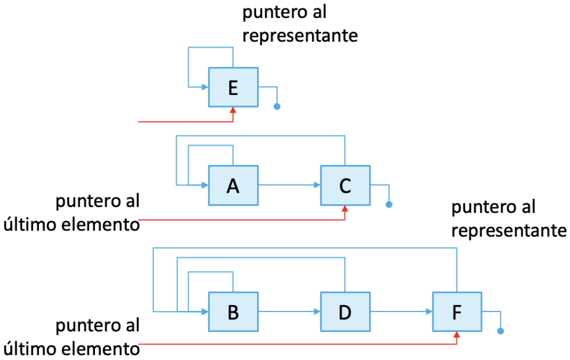
- Un elemento cualquiera de S que denotamos por $rep(S)$
- La consulta de representante debe ser consistente si no hay cambios en S: entrega el mismo elemento
- Cada elemento de S tiene referencia a $rep(S)$

Dos conjuntos S y T son iguales si y solo si $rep(S) = rep(T)$

Conjunto disjuntos: listas ligadas

Una primera representación puede ser con listas ligadas

Para los conjuntos $\{E\}, \{A, C\}, \{B, D, F\}$



¿Cuál es la complejidad de las operaciones de búsqueda y unión?

Setting

Supondremos que las operaciones son de la forma

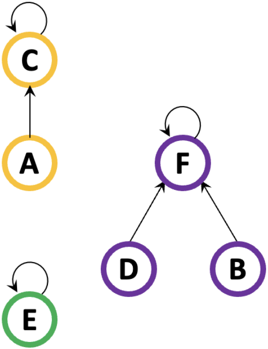
- `Find`(A): entrega el conjunto al que pertenece A
- `Union`(A, B): entrega un conjunto resultante de unir los conjuntos de A y B

Además, supondremos que en un estado inicial, tenemos n conjuntos con **un solo elemento cada uno**. Un conjunto con un elemento se llama **singleton**

Conectando estos conjuntos podremos resolver Kruskal

Conjuntos como árboles

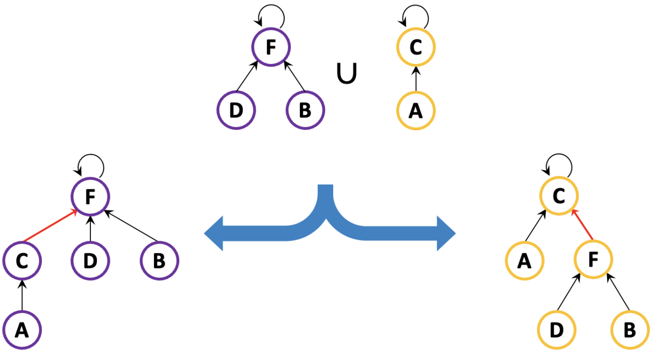
Una primera forma de representar los conjuntos es usar **árboles** donde los caminos llevan al **representante**



¿Cómo se implementan las operaciones `Union` y `Find`?

Conjuntos como árboles

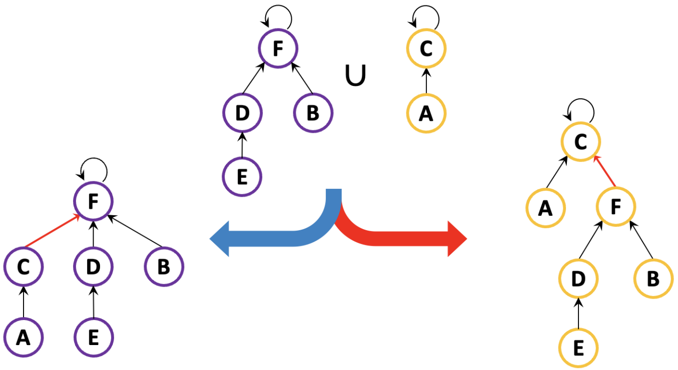
La operación `Union` corresponde a cambiar el autoloop del representante de un conjunto: $\mathcal{O}(1)$



¿Cuál de las dos opciones escogemos como resultado?

Conjuntos como árboles

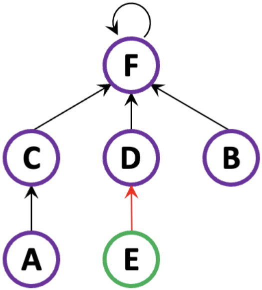
La operación `Find` requiere recorrer punteros, por lo que las dos opciones no son equivalentes



Hay que unir el árbol más corto al más largo

Conjuntos como árboles

La operación `Find` requiere recorrer punteros

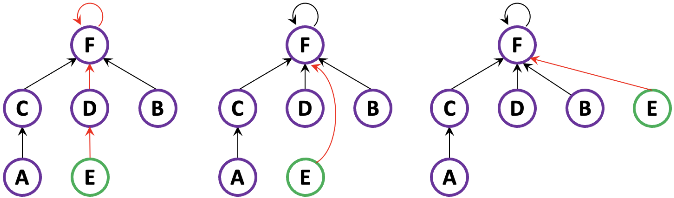


$$\texttt{Find}(E) = \texttt{Find}(D) = \texttt{Find}(F) = F$$

¿Podríamos mejorar estructuralmente?

Conjuntos como árboles

Podemos modificar punteros para simplificar las rutas



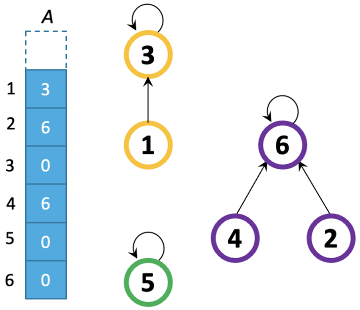
$\texttt{Find}(E) == F$

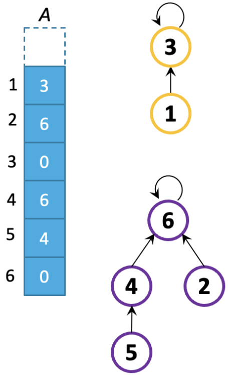
¿Cómo almacenamos los conjuntos?

Conjuntos como árboles

Podemos almacenar los árboles en un único arreglo de referencias:

$$A[k] \text{ es el padre de } k$$





Complejidad de `Find`

El costo de `Find` depende de qué elemento se busca

- Se puede demostrar que para un conjunto de n elementos, con rutas simplificadas, `Find` toma tiempo $\mathcal{O}(\alpha(n))$
- $\alpha(n)$ es una función *interesante* que tiene buenas propiedades
- En particular, crece **extremadamente lento**

$$\alpha(n) = 4, \quad 2048 \leq n \leq 16^{512}$$

En cualquier aplicación práctica, podemos considerar que $\alpha(n) \in \mathcal{O}(1)$

Algoritmo de Kruskal y conjuntos

Ahora que tenemos una implementación de conjuntos

- En Kruskal comenzamos con un conjunto para cada nodo
- Verificamos aristas viendo si sus extremos están **en el mismo conjunto**
- Si no lo están, las agregamos y **unimos** los conjuntos

Algoritmo de Kruskal y conjuntos

```
Kruskal(G):
    E ← E ordenada por costo, de menor a mayor
    for v ∈ V :
        MakeSet(v)
    T ← lista vacía
    for (u, v) ∈ E :
        if Find(u) ≠ Find(v) :
            T ← T ∪ {(u, v)}
            Union(u, v)
    return T
```

¿Qué complejidad tiene este algoritmo?

Complejidad

Usando la implementación de conjuntos disjuntos

- Ordenar las aristas $\mathcal{O}(E\log(E))$
- Construir V conjuntos singleton $\mathcal{O}(V)$
- Unir conjuntos $V-1$ veces $\mathcal{O}(V)$
- Buscar $2E$ veces $\mathcal{O}(E\alpha(V)) = \mathcal{O}(E)$

En total

$$\mathcal{O}(E\log(E) + V + E) = \mathcal{O}(E\log(E))$$

y como $E \leq V^2$, tenemos que $\log(E) \in \mathcal{O}(\log(V))$

Kruskal tiene complejidad $\mathcal{O}(E\log(V))$

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender una estrategia codiciosa para escoger aristas de un MST
- ☐ Comprender el algoritmo de Kruskal
- ☐ Relacionar MST con el problema de conjuntos disjuntos
- ☐ Justificar la complejidad de Kruskal en base a operaciones de conjuntos

Epílogo

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

3760 6466

O usa el código QR