Árboles rojo negro

Clase 10

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Sebastián Bugedo

Sumario

¿Cómo están?

Miau

aus Frankreich

Miau, miau, hörst du mich schreien?
Miau, miau, ich will dich freien.

Folgst du mir aus den Gemächern,
singen wir hoch auf den Dächern.

Miau, komm, geliebte Katze,
miau, reich mir deine Tatze!

Segundo Acto: Diccionarios

Árboles y tablas de hash

Playlist 2

Playlist: DatiWawos Segundo Acto

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Árboles de búsqueda 2-3

Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

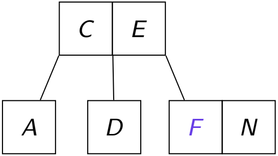
1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave k
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves k'' del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k_1$
  - las llaves k'' del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$
  - las llaves k''' del hijo derecho son $k_2 < k'''$

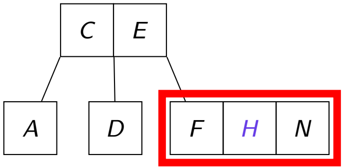
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave F



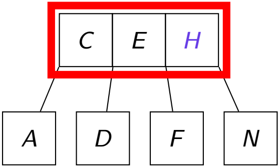
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave H y se produce un nodo no válido



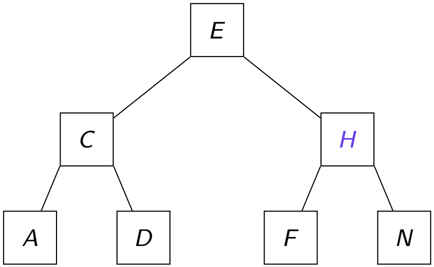
Inserciones en árboles 2-3

Subimos la llave H y se produce un nuevo nodo no válido



Inserciones en árboles 2-3

Hacemos **split** de la raíz actual, subiendo la llave E como nueva raíz



Objetivos de la clase

- ☐ Representar árboles 2-3 como binarios
- ☐ Comprender el modelo de árbol rojo-negro
- ☐ Comprender relación entre rojo-negro y árboles 2-4
- ☐ Comprender inserción en rojo-negro con ayuda de árboles 2-4

Sumario

Convirtiendo un 2-3 en binario

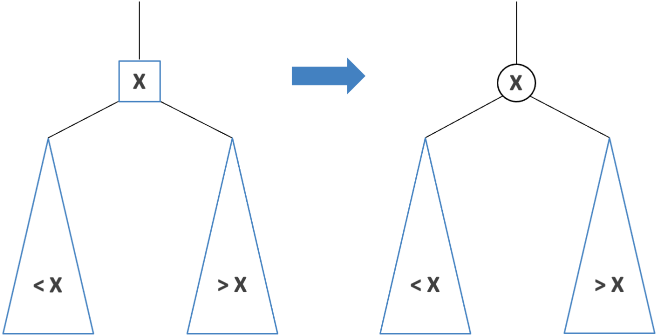
Para transformar un árbol 2-3 en un ABB nos centramos en los dos tipos de nodos

- Un **2-nodo** se puede representar como un nodo de un ABB sin problemas
- Un **3-nodo** no se puede representar de esa forma... necesitamos separar las llaves y los hijos

¿Cómo llevamos estos nodos a representación en ABB?

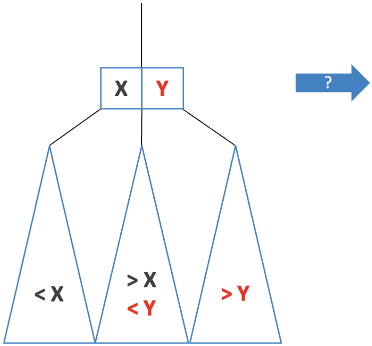
Convirtiendo un 2-3 en binario

Los 2-nodos se representan igual



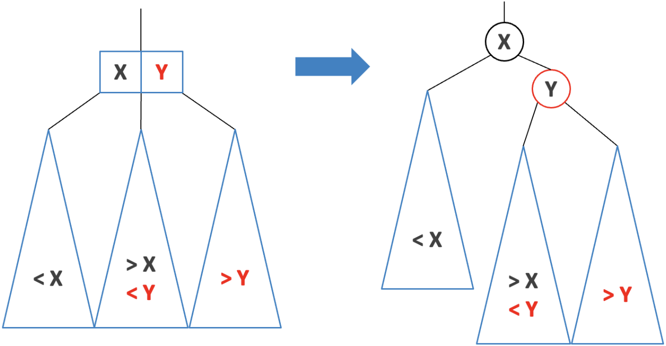
Convirtiendo un 2-3 en binario

¿Cómo separamos las llaves de un 3-nodo?



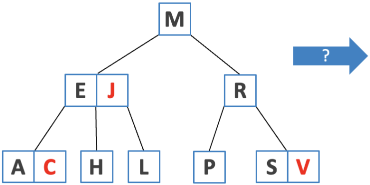
Convirtiendo un 2-3 en binario

Reasignamos dos de los hijos a un nuevo nodo



Notemos que la diferencia de alturas entre los subárboles es 1

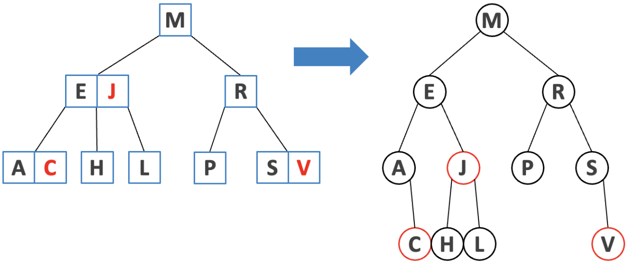
Convirtiendo un 2-3 en binario



Ejercicio

Convierta el árbol 2-3 anterior en un ABB

Convirtiendo un 2-3 en binario



Esta coloración motiva una nueva idea de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros

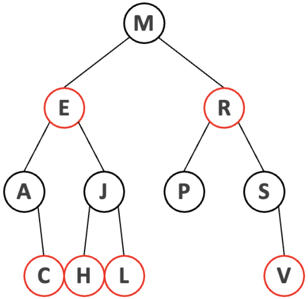
Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros



Esta es una nueva noción de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Al igual que en los árboles AVL, los cambios en el árbol pueden romper la propiedad de balance

- Tendremos una estrategia de restauración (rotaciones)
- En lugar de usar $x.balance$ usaremos $x.color$

Para facilitar la comprensión del rebalanceo, notamos que

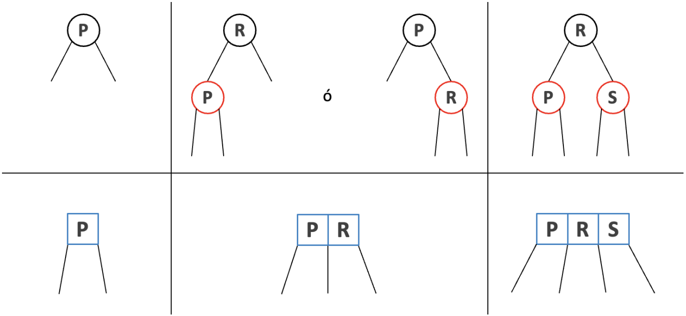
- Los árboles 2-3 son fáciles de visualizar
- No todo árbol rojo-negro tiene un árbol 2-3 equivalente
- Pero sí tiene un **árbol 2-4 equivalente**

Árboles rojo-negro y árboles 2-4

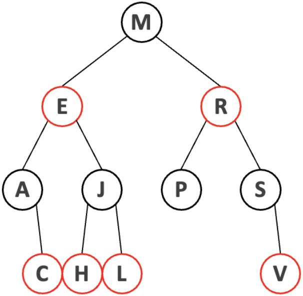
Un **árbol 2-4** es un árbol 2-3 que además puede tener **4-nodos**

- tiene 3 llaves ordenadas distintas
- si no es hoja, tiene 4 hijos

Con este nuevo modelo, podemos tener árboles equivalentes según



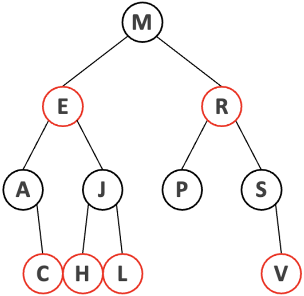
Árboles rojo-negro y árboles 2-4

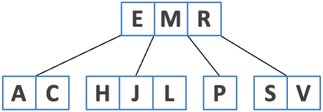


Ejercicio

Obtenga un árbol 2-4 equivalente al árbol rojo-negro anterior

Árboles rojo-negro y árboles 2-4





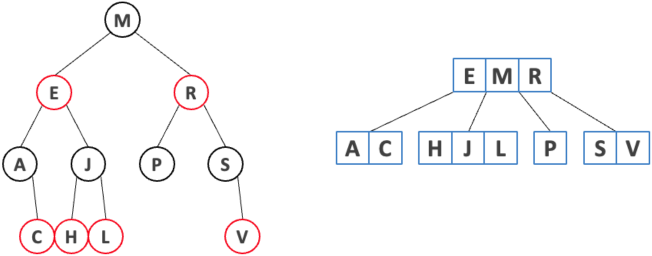
Sumario

Inserción en árboles rojo-negro

Estudiaremos cómo insertar nodos en árboles rojo negro

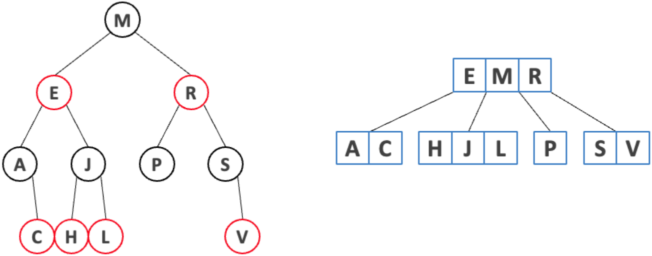
- Usaremos un árbol 2-4 equivalente como ayuda
- Nos permitirá comprender mejor cómo efectuar **rotaciones** y **cambios de color**

Trabajaremos con el siguiente árbol como punto de partida



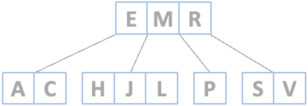
Inserción en árboles rojo-negro

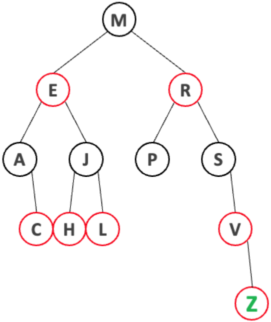
Insertamos la llave Z. ¿Dónde debiera ubicarse?



Inserción en árboles rojo-negro

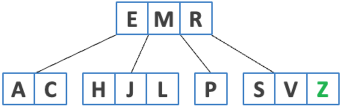
Para no romper la propiedad 4 de los rojo-negro, insertamos siempre como **nodo rojo**

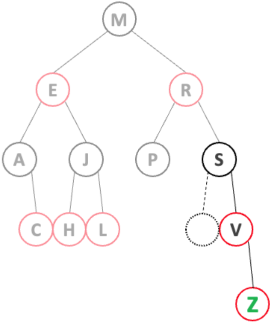




Inserción en árboles rojo-negro

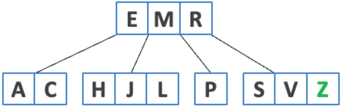
Actualizamos el árbol 2-4 equivalente, el cual nos sugiere una posible rotación de los nodos $S - V$

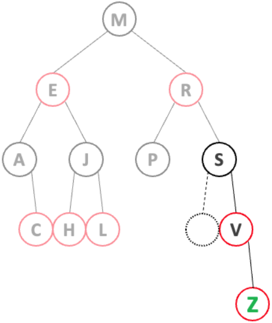




Inserción en árboles rojo-negro

Además, notamos que el tío del nodo nuevo Z es negro (pues es un nodo vacío)

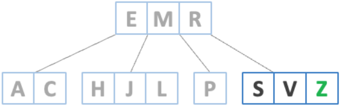


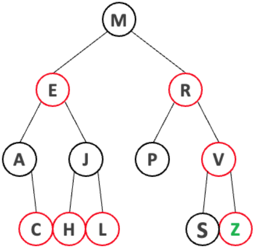


¿Qué pasa si el tío es rojo?
Lo veremos más adelante

Inserción en árboles rojo-negro

Efectuamos la rotación de acuerdo a lo que nos sugiere el nodo *SVZ* del 2-4

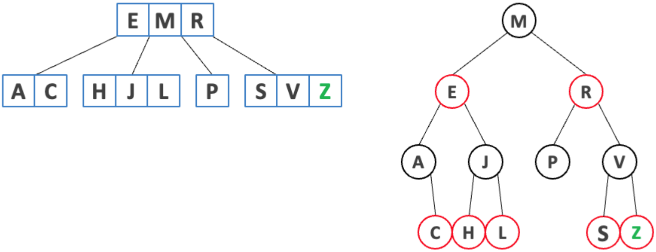




Ojo que ahora se rompe la propiedad 4 (los colores)

Inserción en árboles rojo-negro

Cambiamos color de S y V, los nodos que se rotaron



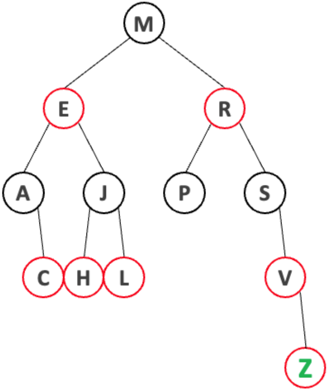
Esta rotación/coloración fue suficiente
para entregar un nuevo árbol rojo-negro

Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**
    if x *fue inserción exterior* **:**

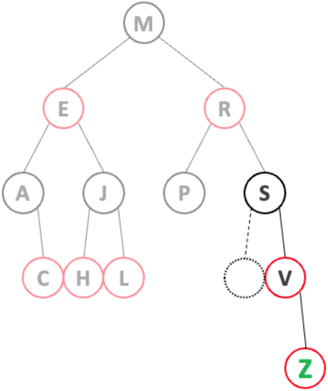


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\emptyset$

`FixBalance` (x)**:**
  if x *fue inserción exterior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**

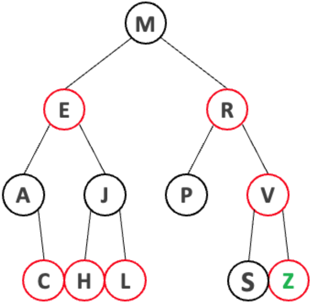


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    if x fue inserción exterior :
        t ← x.uncle        ▷ tío de x
        if t.color = negro :
            g ← x.p.p      ▷ abuelo de x
            Rotation(g, x.p)
```

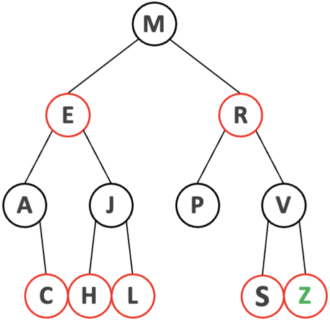


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

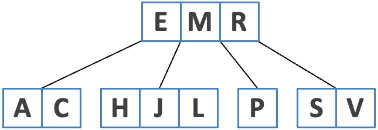
input : Nodo x
output: $\varnothing$

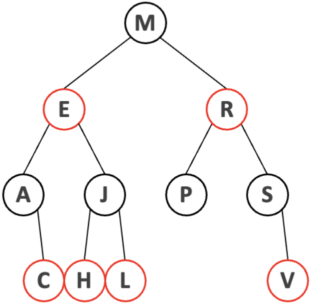
`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción exterior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**
      $g \leftarrow x.p.p$ $\triangleright$ abuelo de x
      `Rotation`$(g, x.p)$
      $x.p.color \leftarrow$ negro
      $g.color \leftarrow$ rojo



Inserción en árboles rojo-negro

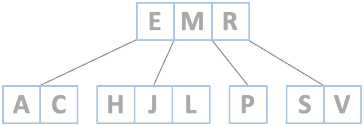
Nueva inserción: insertamos la llave U. ¿Dónde debiera ubicarse?

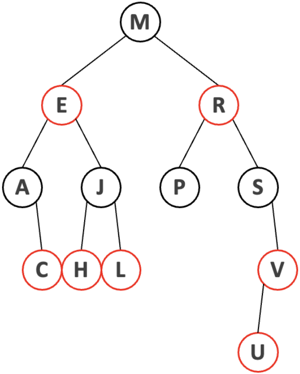




Inserción en árboles rojo-negro

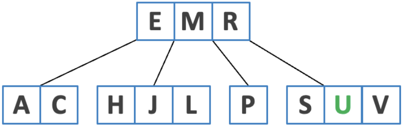
Tal como antes, la insertamos como nodo rojo... a este tipo de inserción le llamamos **interior**

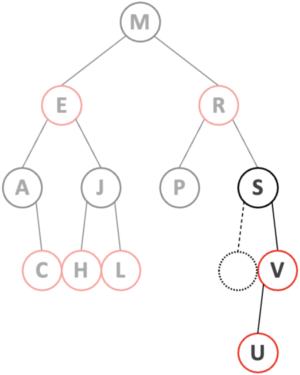




Inserción en árboles rojo-negro

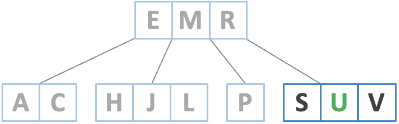
Vemos que tiene tío negro y al actualizar el 2-4 se nos sugiere una rotación

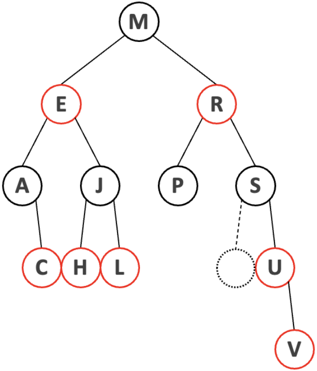




Inserción en árboles rojo-negro

Efectuamos primera rotación $U - V$

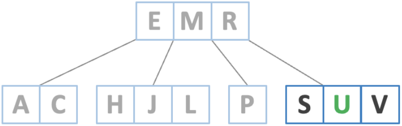


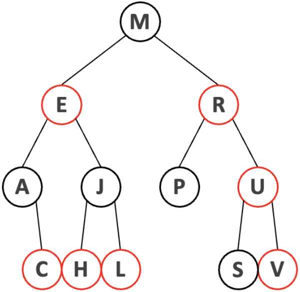


En este punto ya estamos con un escenario
como el caso de inserción exterior

Inserción en árboles rojo-negro

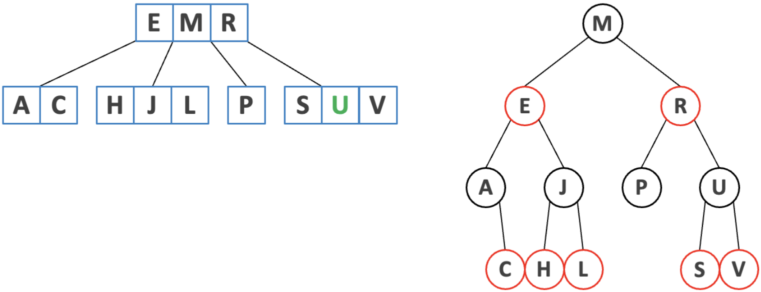
Luego, una segunda rotación $S - U$ que deja a U como padre de S, V





Inserción en árboles rojo-negro

Finalmente, cambiamos el color de los últimos nodos rotados

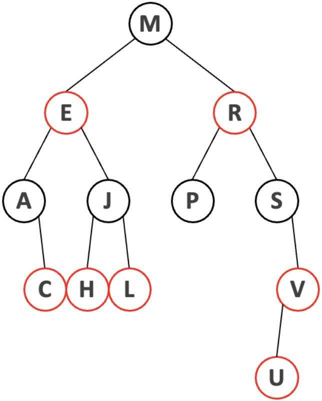


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**

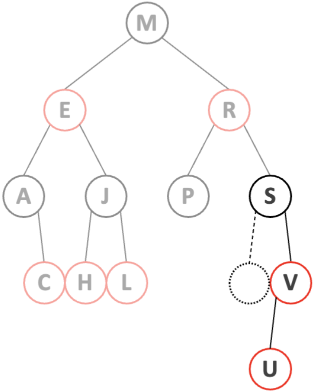


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**

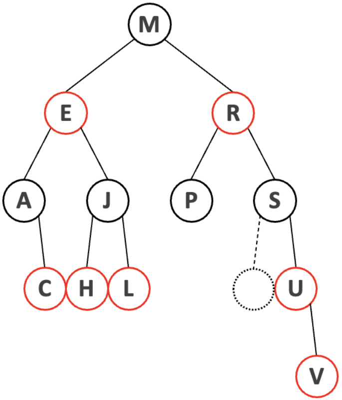


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
    if x *fue inserción interior* **:**
        $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
        if $t.color = negro$ **:**
            $g \leftarrow x.p.p$ ▷ abuelo de x
            `Rotation`$(x.p, x)$

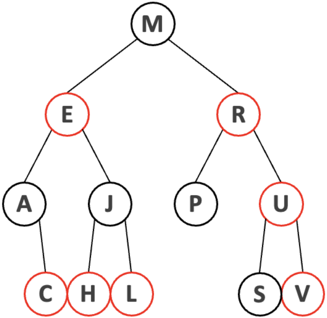


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    if x fue inserción interior :
        t ← x.uncle    ▷ tío de x
        if t.color = negro :
            g ← x.p.p   ▷ abuelo de x
            Rotation(x.p, x)
            Rotation(g, x)
```

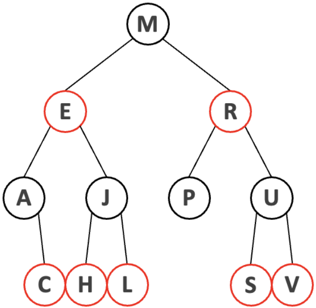


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

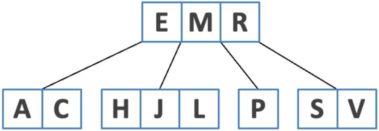
input : Nodo x
output: $\varnothing$

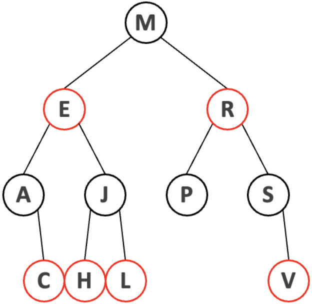
`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**
      $g \leftarrow x.p.p$ ▷ abuelo de x
      `Rotation`$(x.p, x)$
      `Rotation`(g, x)
      $x.color \leftarrow$ negro
      $g.color \leftarrow$ rojo



Inserción en árboles rojo-negro

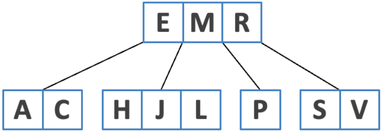
Nueva inserción: insertamos la llave K. ¿Dónde debiera ubicarse?

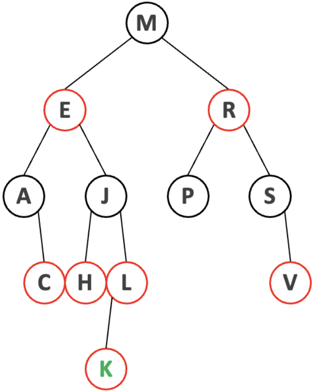




Inserción en árboles rojo-negro

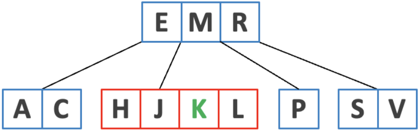
Lo agregamos como hoja roja

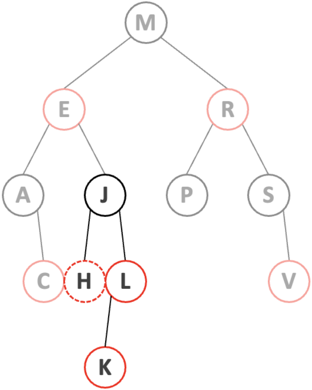




Inserción en árboles rojo-negro

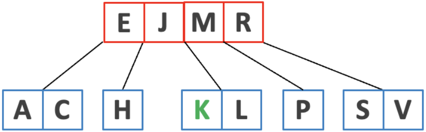
Actualizamos el árbol 2-4 y notamos un conflicto: notemos que el tío de K es rojo

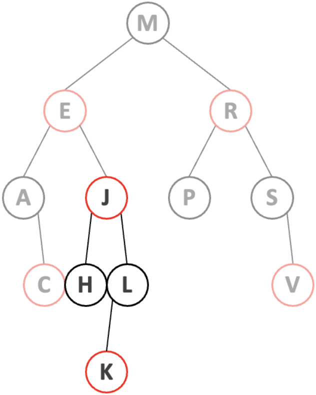




Inserción en árboles rojo-negro

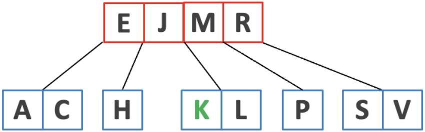
Al modificar el 5-nodo ilegal, se nos sugiere el cambio de colores en el árbol rojo-negro

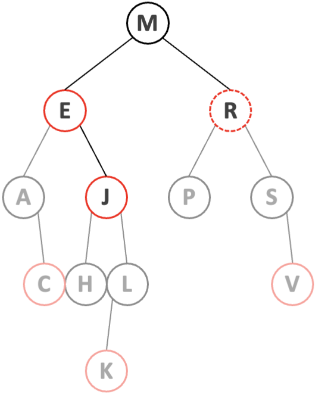




Inserción en árboles rojo-negro

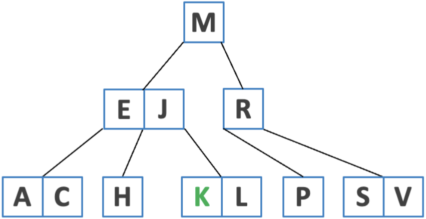
Revisamos recursivamente hacia arriba, revisando el tío de J, que nuevamente es rojo

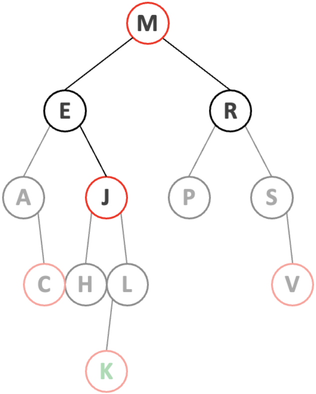




Inserción en árboles rojo-negro

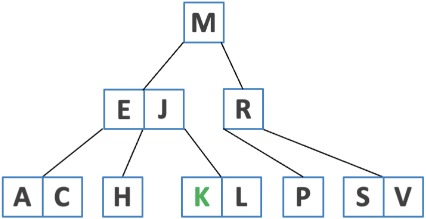
Nuevo cambio de colores que involucra solo a los tres nodos superiores

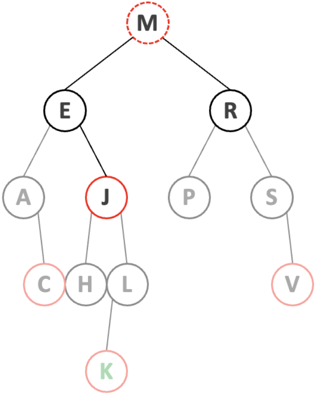




Inserción en árboles rojo-negro

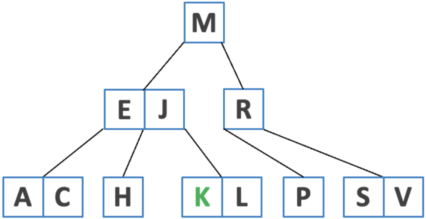
No hay más tíos que revisar, pero ahora falla la condición de que la raíz sea negra

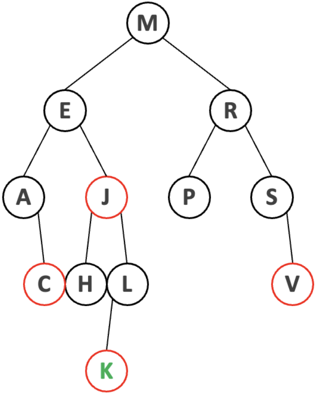




Inserción en árboles rojo-negro

Le cambiamos su color y terminamos



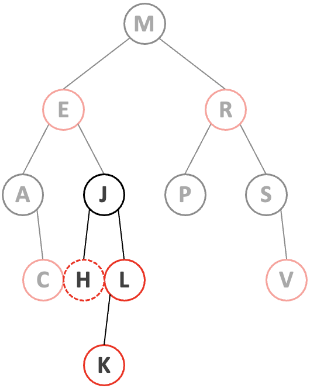


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
 $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
 if $t.color = rojo$ **:**

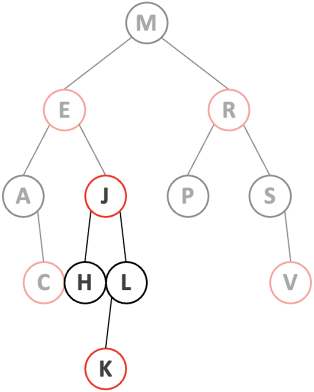


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\emptyset$

`FixBalance` (x)**:**
  $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
  if $t.color = rojo$ **:**
    $x.p.color \leftarrow$ negro
    $t.color \leftarrow$ negro
    $x.p.p.color \leftarrow$ rojo

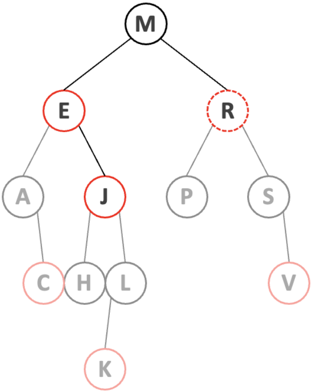


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle    ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
    A.root.color ← negro
```

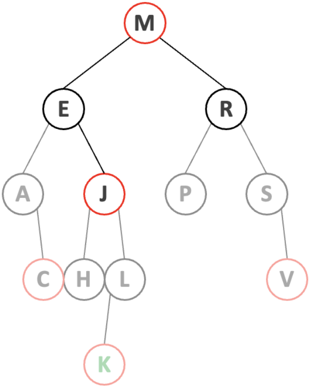


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**
    while $x.p \neq \varnothing \wedge x.p.color = rojo$ **:**
        $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
        if $t.color = rojo$ **:**
            $x.p.color \leftarrow$ negro
            $t.color \leftarrow$ negro
            $x.p.p.color \leftarrow$ rojo
            $x \leftarrow x.p.p$
    $A.root.color \leftarrow$ negro

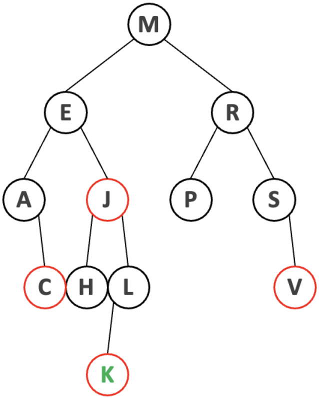


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle    ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
    A.root.color ← negro
```



Inserción en árboles rojo-negro

Al insertar, siempre lo hacemos como nodo rojo

- Si el padre es negro, no hacemos nada
- Si el padre es rojo, hay dos casos según el tío
  - Tío negro: el nodo del árbol 2-4 crece, pero no colapsa

    rotaciones y cambios de color

  - Tío rojo: el nodo del árbol 2-4 colapsa y hay que subir

    cambios de color hacia la raíz

Inserción en árboles rojo-negro

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle   ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
        else:
            if x es hijo interior de x.p :
                Rotation(x.p, x)
                x ← x.p
            x.p.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            Rotation(x.p.p, x)
    A.root.color ← negro
```

Inserción en árboles rojo-negro

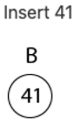
Ejercicio

Inserte en un árbol rojo-negro vacío las siguientes llaves consecutivas

$$41,\ 38,\ 31,\ 12,\ 19,\ 8$$

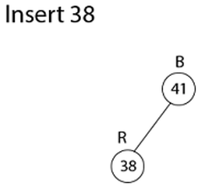
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 41 como raíz



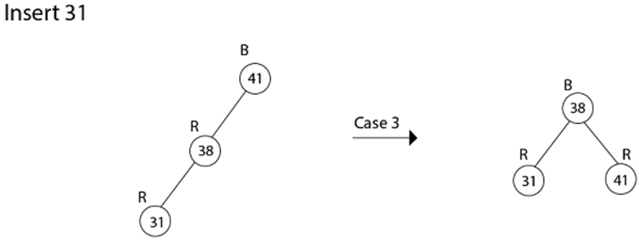
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 38 y terminamos, pues su padre es negro



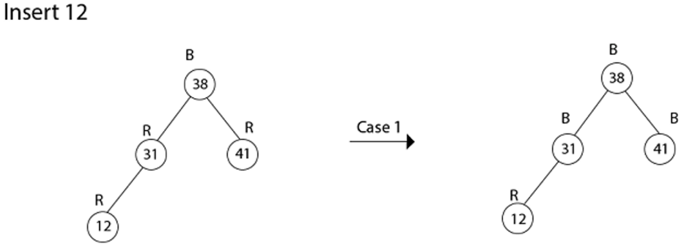
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 31 y es hijo exterior de un nodo rojo: rotación+cambio



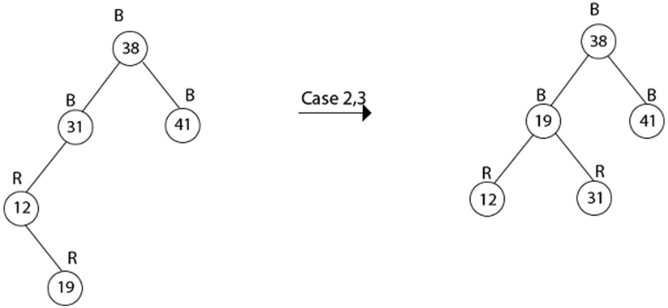
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 12, hijo exterior de nodo rojo con tío rojo: cambios de color



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 19, hijo interior de nodo rojo con tío negro: rotación doble + cambio



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 8, hijo de nodo rojo y tío rojo: cambios de color

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Representar árboles 2-3 como binarios
- ☐ Comprender el modelo de árbol rojo-negro
- ☐ Comprender relación entre rojo-negro y árboles 2-4
- ☐ Comprender inserción en rojo-negro con ayuda de árboles 2-4