

# Ordenación y Selectionsort

Clase 01

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

**Introducción**

Correctitud de algoritmos

Selection Sort

Cierre

# El Misterio de EDD

- Falló Canvas y no tenemos acceso a la lista de estudiantes del sistema
- Sin embargo, hicimos correr unas hojas por la sala para que se anotaran durante la primera clase
- La Universidad pregunta si ese día el estudiante Misterio Zallen estuvo en la sala B12
- ¿Cómo responder lo más rápido posible?

# El Misterio de EDD

¿ Zallen Misterio ∈

Apellido	Nombre
Alen	Misterio
Misterio	Misterio
Zalen	Berenice
Gonzalópez	D
Turing	Alan
Misterio	Yadran
Zeta	Hache
Ararán	Jota
Alenn	Cristina
...	...

pág. 1/376

?

# El Misterio de EDD

¿ Zallen Misterio €

Apellido	Nombre
Abarca	Yadran
Abusleme	Nicole
Arenas	Camila
Arenas	D
Bañados	Richard
Beterraga	Brócoli
Blanco	Ximena
Brahms	Johannes
Castillo	Raquel
...	...

pág. 1/376

?

# El Misterio de EDD

¿ 245.789.546 €

?

Valor
1
2
3
56
57
64
68
99
124
125
...
pág. 1/376

# Secuencias ordenadas

## Definición

Una secuencia de números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se dice **ordenada** (no decrecientemente) si cumple que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

¿Qué es entonces **ordenar** una secuencia de números arbitraria?

# Una propuesta de algoritmo de ordenación

**input** : Lista de nombres  $L$

**output**: Lista ordenada de nombres  $L'$

Misterio ( $L$ ):

- 1    Iniciamos  $L'$  vacía
  - 2    Encontrar el menor valor en  $L$
  - 3    Borrar el valor encontrado
  - 4    Escribirlo al final de  $L'$  (en el primer espacio disponible)
  - 5    Si quedan valores en  $L$ , volver a la línea 2
- return**  $L'$

¿Es **correcto** este algoritmo?



# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de ordenación como operación abstracta
- ☐ Interpretar de forma intuitiva un algoritmo en pseudocódigo
- ☐ Demostrar correctitud de un algoritmo dado
- ☐ Determinar complejidad del algoritmo de ordenación Selection Sort
- ☐ Distinguir ventajas comparativas de EDD's en las operaciones empleadas en Selection Sort

# Sumario

Introducción

**Correctitud de algoritmos**

Selection Sort

Cierre

# Correctitud de algoritmos

En este curso nos centraremos en dos propiedades para decir que un algoritmo es **correcto**:

- Termina en una cantidad finita de pasos
- Cumple su propósito

En un problema de ordenación, un algoritmo será correcto si **ordena** los datos en una cantidad finita de pasos

# Recordatorio: Inducción simple

## Principio de inducción simple

Para una afirmación  $P(x)$  sobre los naturales, si  $P(x)$  cumple que:

1.  $P(0)$  es verdadero,
2. para todo  $n \in \mathbb{N}$ , si  $P(n)$  es verdadero, entonces  $P(n+1)$  es verdadero,

entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que  $P(n)$  es verdadero.

## Notación

- $P(0)$  se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$  se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$  se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

# Recordatorio: Inducción simple

## Inducción simple en la práctica

Para una afirmación  $P(x)$  sobre los naturales

1. Identificamos caso base  $n_0$  y verificamos que cumple  $P$
2. Suponemos que  $P(n)$  es cierta para un  $n$  **cualquiera**
3. Demostramos que  $P(n+1)$  es verdadero usando  $P(n)$

Si logramos completar estos pasos, concluimos que  $P$  es cierta para  $n \geq n_0$

No olvidar

- La propiedad puede ser cierta desde un  $n_0 \neq 0$
- Puede haber varios casos base

# Soltemos la mano...

## Ejemplo

Demuestre que el siguiente algoritmo es correcto.

**input** : Lista de nombres  $L$

**output**: Lista ordenada de nombres  $L'$

Misterio ( $L$ ):

- 1    Iniciamos  $L'$  vacía
  - 2    Encontrar el menor valor en  $L$
  - 3    Borrar el valor encontrado
  - 4    Escribirlo al final de  $L'$  (en el primer espacio disponible)
  - 5    Si quedan valores en  $L$ , volver a la línea 2
- return**  $L'$

# Soltemos la mano...

## Demostración (finitud)

Primero demostraremos que termina en una cantidad finita de pasos.

Sea  $n$  la cantidad (finita) de valores en la lista original  $L$ .

En cada iteración del algoritmo se borra un valor de  $L$  y se escribe en la lista nueva  $L'$ .

Luego de  $n$  iteraciones, todos los valores en  $L$  fueron borrados. Debido a la línea 5, que verifica si existen valores en  $L$ , el algoritmo no sigue iterando.

Por lo tanto, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos.



# Soltemos la mano...

## Demostración (ordenación)

Demostraremos por **inducción** que efectivamente genera una lista ordenada.

1. Probamos el caso base  $P(n_0)$
2. Suponemos verdadera la hipótesis inductiva  $P(n)$ .  
P.D. Tesis inductiva  $P(n + 1)$ ...

¿Qué propiedad probaremos?

¿Cuál es el parámetro  $n$  que haremos avanzar?

¿Cuáles son los casos base?



# Soltemos la mano...

## Demostración (ordenación)

Consideremos la propiedad

$P(n) \quad := \quad$  Los primeros  $n$  valores borrados de  $L$  son los menores de  $L$  y están ordenados en  $L'$

1. **Caso base.**  $P(1)$  corresponde al estado de las listas luego de borrar el menor elemento de  $L$ . Este elemento es el menor de todos debido al criterio de selección de la línea 2 del algoritmo. Dado que  $L'$  solo tiene un elemento, a saber  $a_1$ ,  $L'$  está ordenada.

# Soltemos la mano...

## Demostración (ordenación)

Consideremos la propiedad

**P(n)**  $:=$  Los primeros  $n$  valores borrados de  $L$  son los menores de  $L$  y están ordenados en  $L'$

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos que los primeros  $n$  valores borrados de  $L$  son los menores y se encuentran ordenados en  $L'$ .

**P.D.** Los primeros  $n + 1$  elementos borrados de  $L$  son los menores y se encuentran ordenados en  $L'$ .

Por **H.I.** los primeros  $n$  elementos borrados corresponden a los  $n$  menores de  $L$  y están ordenados en  $L'$ . Asignándoles las etiquetas  $a_i$  a estos elementos, tenemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \text{cualquier elemento restante en } L$$

# Soltemos la mano...

## Demostración (ordenación)

Al borrar el elemento  $n + 1$  de  $L$ , al que llamamos  $a_{n+1}$ , por el criterio de selección de la línea 2 sabemos que este es el menor de los que restan en  $L$  y por la **H.I.** sabemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \text{el resto en } L$$

Al agregar  $a_{n+1}$  al final de  $L'$ , dado que por **H.I.** los primeros  $n$  elementos están ordenados de forma no decreciente,  $L'$  queda ordenada con  $n + 1$  elementos.

Con esto se concluye que el algoritmo ordena.



# Sumario

Introducción

Correctitud de algoritmos

**Selection Sort**

Cierre

# El algoritmo SelectionSort

El algoritmo Misterio se conoce como **selection sort**.

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

SelectionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Buscar el menor dato  $x$  en  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$  e insertarlo al final de  $B$
  - 4 Si quedan valores en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

Paréntesis: un recurso muy útil

visualizador de algoritmos

# ¿Cuál es la complejidad de SelectionSort?

## Ejemplo

Determine la complejidad de SelectionSort

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

SelectionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Buscar el menor dato  $x$  en  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$  e insertarlo al final de  $B$
  - 4 Si quedan valores en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

# ¿Cuál es la complejidad de SelectionSort?

Dada la secuencia de input  $A$ , diremos que  $|A| = n$  es su largo cuando esta posee  $n$  elementos.

Podemos determinar la complejidad de SelectionSort en función de  $n$  a través de dos estrategias.

De forma intuitiva

- Buscar el menor dato en  $A$  significa revisar **todos** los elementos:  $\mathcal{O}(n)$
- La búsqueda del menor elemento se hace una vez por dato, i.e.  $n$  veces
- Combinando los resultados obtenemos  $\mathcal{O}(n^2)$



# ¿Cuál es la complejidad de SelectionSort?

De forma explícita

- Buscar el menor elemento de  $A$  implica revisar  $n$  elementos en la primera iteración
- En la siguiente iteración, como  $A$  tiene un elemento menos implica revisar  $n - 1$  elementos
- Este proceso se repite hasta agotar  $A$  cuando tiene 1 elemento
- El tiempo del algoritmo es la suma de los tiempos de cada iteración

$$T(n) = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n - 1)}{2}$$

- Concluimos que  $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$

¿Qué operación no estamos tomando en cuenta en ambos enfoques?

# Un paréntesis sobre la escritura de datos

No olvidemos el espíritu del curso: **estructuras de datos**

¿Qué tan costosa es la inserción del dato al final de  $B$  en SelectionSort?

Recordemos las dos estructuras básicas que discutimos: **arreglos** y **listas ligadas**

Mencionamos sus diferencias en cuanto al acceso por índice, pero ahora agregamos otra operación: **inserción**, i.e. añadir un dato a la estructura

En el contexto de SelectionSort nos interesa específicamente la **inserción del último elemento**

- En una lista ligada, si se cuenta con un puntero adicional al último elemento, la inserción toma  $\Theta(1)$
- En un arreglo
  - si no se supera el espacio reservado para este, toma  $\Theta(1)$
  - si se agotó el espacio, hay que reubicar todo el arreglo:  $\Theta(n)$

# Un paréntesis sobre la escritura de datos

Con esto, las operaciones que conocemos tienen las siguientes complejidades

Operación	Arreglo	Lista ligada
Acceso por índice	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Inserción (final)	$\Theta(1)$ sin reubicar $\Theta(n)$ reubicando	$\Theta(1)$ con puntero al final

No perdamos de vista la pregunta de  
qué estructura es la **más adecuada** en cada escenario

Cabe notar que para el caso de los arreglos, en `SelectionSort` sabemos exactamente cuánto espacio necesitamos reservar

Más aún, veremos una forma de usar la menor cantidad de memoria posible con arreglos

# Complejidad de memoria en SelectionSort

- Para secuencias de datos muy grandes, puede ser costoso reservar espacio para una copia completa de los datos
- Cabe notar que SelectionSort se puede hacer en **un solo arreglo**, ya que en todo momento

$$|A| + |B| = n$$

- Como *reciclamos* el espacio dentro del mismo arreglo para llevar la nueva secuencia  $B$ , no es necesario reubicar el arreglo y toda inserción al final de  $B$  toma tiempo  $\Theta(1)$
- Esta estrategia no necesita memoria adicional... o más precisamente, necesita  $\mathcal{O}(1)$  de memoria adicional
- Los algoritmos que tienen esta propiedad se conocen como algoritmos **in place**

# Sumario

Introducción

Correctitud de algoritmos

Selection Sort

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de ordenación como operación abstracta
- ☐ Interpretar de forma intuitiva un algoritmo en pseudocódigo
- ☐ Demostrar correctitud de un algoritmo dado
- ☐ Determinar complejidad del algoritmo de ordenación Selection Sort
- ☐ Distinguir ventajas comparativas de EDD's en las operaciones empleadas en Selection Sort