

# Merge Sort

Clase 03

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Sebastián Buggedo

# Sumario

**Obertura**

Merge

Merge Sort

Epílogo

# Recordatorio: Caso promedio de InsertionSort

Como cada inversión aparece en una de las dos permutaciones del par  $P, P^r$ ,

$$\# \text{ inv en } P + \# \text{ inv en } P^r = \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego, tomando los  $n!/2$  pares posibles de permutaciones de la forma  $P_k, P_k^r$ , el promedio de inversiones es

$$\begin{aligned} \frac{\sum_P (\# \text{ inv en } P)}{\# \text{ permutaciones}} &= \frac{\sum_{k=1}^{n!/2} (\# \text{ inv en } P_k + \# \text{ inv en } P_k^r)}{n!} \\ &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot n!/2}{n!} \\ &= \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Una permutación promedio tiene una cantidad de inversiones  $\mathcal{O}(n^2)$

## Recordatorio: Caso promedio de InsertionSort

Con este resultado podemos concluir la complejidad de InsertionSort en el caso promedio

- La complejidad de InsertionSort es de la forma  $\mathcal{O}(n + k)$
- En el caso promedio  $k \in \mathcal{O}(n^2)$
- Luego, en el caso promedio InsertionSort toma tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$

¡Ojo! Esto va más allá de InsertionSort

# Caso promedio de algoritmos de ordenación

## Teorema

Sea  $\mathcal{A}$  un algoritmo de ordenación. Si  $\mathcal{A}$  corrige una inversión por intercambio, entonces no puede ordenar más rápido que  $\mathcal{O}(n^2)$  en el caso promedio.

## Corolario

$\mathcal{A}$  no puede ordenar más rápido que  $\mathcal{O}(n^2)$  en el peor caso.

# Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	?	?	?	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

# Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

## SelectionSort in place

**input** : Secuencia  $A[0 \dots n-1]$ , largo  $n \geq 2$

**output:**  $\emptyset$

SelectionSort ( $A, n$ ):

```
1  for  $i = 0 \dots n-2$  :  
2       $min \leftarrow i$   
3      for  $j = i+1 \dots n-1$  :  
4          if  $A[j] < A[min]$  :  
5               $min \leftarrow j$   
6       $A[i] \rightleftharpoons A[min]$ 
```



## SelectionSort e InsertionSort in place

SelectionSort ( $A, n$ ):

```
1  for  $i = 0 \dots n - 2$  :  
2       $min \leftarrow i$   
3      for  $j = i + 1 \dots n - 1$  :  
4          if  $A[j] < A[min]$  :  
5               $min \leftarrow j$   
6       $A[i] \rightleftharpoons A[min]$ 
```

InsertionSort ( $A, n$ ):

```
1  for  $i = 1 \dots n - 1$  :  
2       $j \leftarrow i$   
3      while  $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j - 1])$  :  
4           $A[j] \rightleftharpoons A[j - 1]$   
5           $j \leftarrow j - 1$ 
```

# Ordenación hasta ahora

## SelectionSort

- No tiene un mejor caso que sea *mejor* que su peor caso:  $\mathcal{O}(n^2)$
- Siempre revisa la secuencia completa para determinar el mínimo

## InsertionSort

- Cuando la secuencia está ordenada toma  $\mathcal{O}(n)$
- En el caso promedio es  $\mathcal{O}(n^2)$ , tomando el promedio sobre todas las permutaciones igualmente probables
- Argumentamos esto mediante conteo de inversiones en cada permutación

¿Podemos tener un algoritmo de ordenación  
con mejor complejidad que  $\mathcal{O}(n^2)$  en el peor caso?

# Hay esperanza: corregir varias inversiones a la vez

## Ejemplo

Recordemos que el siguiente arreglo tiene 9 inversiones

34	8	64	51	32	21
0	1	2	3	4	5

Si intercambiamos 34 y 8:

8	34	64	51	32	21
0	1	2	3	4	5

- Corregimos (0,1)

Si intercambiamos 34 y 21:

21	8	64	51	32	34
0	1	2	3	4	5

- Corregimos (0,4), (0,5), (4,5)

# Un escenario relacionado

Consideremos una secuencia parcialmente ordenada

Para ser más precisos, una secuencia que está formada por dos sub-secuencias ordenadas

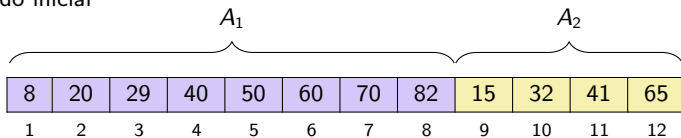
8	20	29	40	50	60	70	82	15	32	41	65
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Además, sabemos exactamente dónde comienza la segunda sub-secuencia ordenada

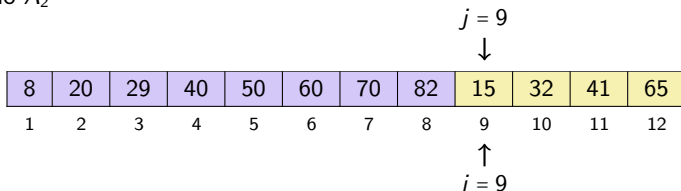
¿Cómo aprovechamos este hecho para ordenar la secuencia completa?

# Primer intento: InsertionSort

Estado inicial



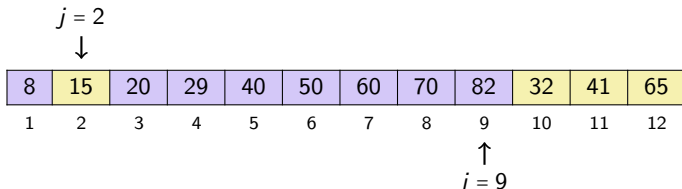
InsertionSort no intercambia nada del tramo  $A_1$  y los índices  $i, j$  llegan al tramo  $A_2$



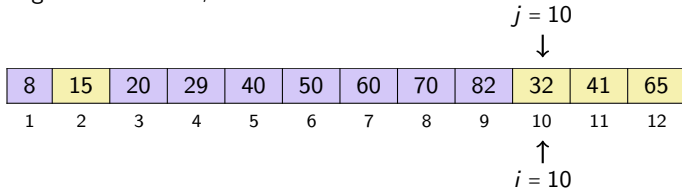
Hasta este punto la ejecución es  $\mathcal{O}(n)$

# Primer intento: InsertionSort

El valor 15 se va intercambiando hasta llegar a su posición final  $j = 2$



En la siguiente iteración,



Conclusión: en este tramo el algoritmo vuelve a ser  $\mathcal{O}(n^2)$

Hoy veremos una mejor estrategia para aprovechar el orden

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el algoritmo Merge para combinar secuencias ordenadas
- ☐ Determinar complejidad de Merge y el *trade off* de ejecutarlo *in place*
- ☐ Demostrar correctitud de Merge
- ☐ Comprender el uso de Merge como algoritmo de ordenación general en MergeSort
- ☐ Determinar la complejidad de MergeSort

# Sumario

Obertura

**Merge**

Merge Sort

Epílogo



# Mezcla (*merge*) de secuencias ordenadas

Proponemos el siguiente algoritmo para combinar dos secuencias ordenadas para formar una nueva **ordenada**

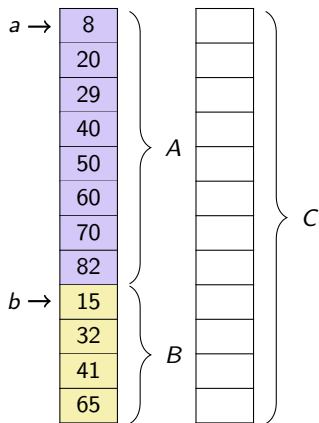
**input** : Secuencias ordenadas  $A$  y  $B$

**output**: Nueva secuencia ordenada  $C$

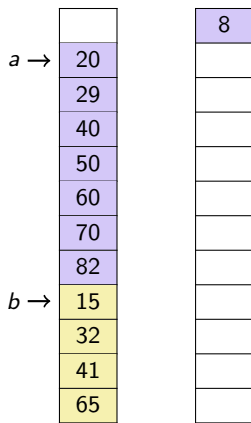
*Merge*( $A, B$ ):

- 1    Iniciamos  $C$  vacía
- 2    Sean  $a$  y  $b$  los primeros elementos de  $A$  y  $B$
- 3    Extraer de su secuencia respectiva el menor entre  $a$  y  $b$
- 4    Insertar el elemento extraído al final de  $C$
- 5    Si quedan elementos en  $A$  y  $B$ , volver a línea 2
- 6    Concatenar  $C$  con la secuencia que aún tenga elementos
- 7    **return**  $C$

## Merge: Ejemplo de ejecución

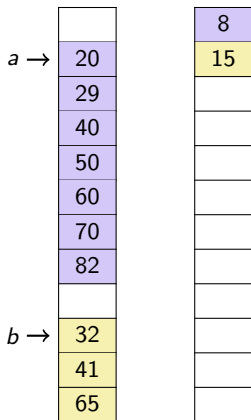


Estado inicial

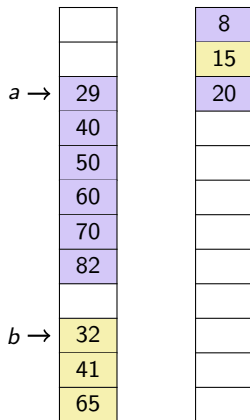


Estado luego de la  
primera iteración

## Merge: Ejemplo de ejecución



Estado luego de la  
segunda iteración



Estado luego de la  
tercera iteración

## Merge: Ejemplo de ejecución

	8
	15
	20
	29
	32
	40
70	41
82	50
	60
	65

Estado luego de insertar en *C*  
el último elemento de *B*

	8
	15
	20
	29
	32
	40
	41
	50
	60
	65
	70
	82

Estado luego de  
concatenar el resto de *A*

# Correctitud de Merge

## Demostración (finitud)

En cada iteración del algoritmo antes de ejecutar la línea 6, se extrae siempre un elemento de  $A$  o  $B$ , y se inserta en  $C$ .

Luego, cuando una de las secuencias se vacía, se insertan todos sus elementos en  $C$ .

En total se realizan  $n = |A| + |B|$  inserciones y un número menor a  $n$  de comparaciones entre elementos. Luego, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos. □

# Correctitud de Merge

## Demostración (propósito)

Para  $A, B$  inicialmente ordenadas, consideremos la propiedad

$P(n) \quad := \quad$  Luego de insertar el  $n$ -ésimo elemento en  $C$ ,  
 $A, B, C$  se encuentran ordenadas

1. **Caso base.**  $P(1)$  corresponde al estado de las secuencia luego de insertar el primer elemento en  $C$ .
  - Dado que se extrajo el menor elemento de alguna de las otras secuencias, estas se mantienen ordenadas. Esto aplica trivialmente si dicha secuencia queda vacía.
  - Dado que  $C$  solo tiene un elemento, está ordenada.

# Correctitud de Merge

## Demostración (propósito)

**P(n)** := Luego de insertar el  $n$ -ésimo elemento en  $C$ ,  
 $A, B, C$  se encuentran ordenadas

2. **H.I.** Suponemos que luego de agregar el  $n$ -ésimo elemento,  $A, B, C$  están ordenadas.

**P.D.** Luego de agregar el  $(n + 1)$ -ésimo elemento,  $A, B, C$  siguen ordenadas.

Tenemos dos casos

- Si quedan elementos en  $A$  y en  $B$ , sea  $c_{n+1}$  el menor entre las cabezas de  $A$  y  $B$ .
- Sin pérdida de generalidad, si solo quedan elementos en  $A$ , sea  $c_{n+1}$  la cabeza de  $A$ .

Se elimina  $c_{n+1}$  de su secuencia respectiva y se inserta al final de  $C$ .

# Correctitud de Merge

## Demostración (propósito)

Por **H.I.** tenemos que la secuencia de origen de  $c_{n+1}$  se encontraba ordenada antes de sacarlo. Como es el mínimo de la secuencia por ser el primer elemento y ser una secuencia ordenada, se preserva el orden. Si la secuencia se vacía, también está ordenada.

Por **H.I.** tenemos que los primeros  $n$  elementos de  $C$  cumplen

$$c_1 \leq \dots \leq c_n$$

Si  $c_{n+1}$  fuera estrictamente menor a alguno de estos elementos, implicaría una de las siguientes contradicciones

- $A$  o  $B$  no están ordenadas (ya probamos que lo están)
- $c_{n+1}$  es extraído en una iteración anterior por el criterio de selección

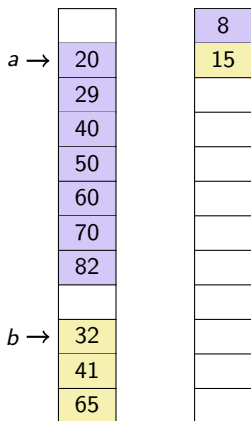
Luego, concluimos el resultado buscado

$$c_1 \leq \dots \leq c_n \leq c_{n+1}$$





# Complejidad de memoria de Merge



La ejecución de ejemplo que mostramos considera una nueva secuencia *C* donde se insertan los valores

- Para  $|A| + |B| = n$  necesitamos memoria adicional  $\mathcal{O}(n)$
- No necesita mover elementos dentro de ninguna secuencia

También se puede realizar *in place*

- Usar el mismo espacio reservado a *A* y *B*: memoria adicional  $\mathcal{O}(1)$
- Mover todos los datos mayores al insertado
- Impacta en la complejidad de tiempo...

# Complejidad de tiempo de Merge

Consideramos la implementación sugerida mediante una secuencia **adicional**

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias  $A$  y  $B$

- Se decide quién extraer comparando los menores  $\mathcal{O}(1)$
- Se inserta el dato en  $C$   $\mathcal{O}(1)$
- Esto se repite  $\mathcal{O}(n)$  veces total  $\mathcal{O}(n)$

2. Reubicación de la secuencia no vacía restante

- Se saca un elemento de la restante  $\mathcal{O}(1)$
- Se inserta el dato en  $C$   $\mathcal{O}(1)$
- Esto se repite  $\mathcal{O}(n)$  veces total  $\mathcal{O}(n)$

Usando  $\mathcal{O}(n)$  memoria adicional, Merge es  $\mathcal{O}(n)$

# Complejidad de tiempo de Merge (in place)

Si consideramos usar el espacio reservado para  $A$  y  $B$

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias  $A$  y  $B$

- Se decide quién extraer comparando los menores  $\mathcal{O}(1)$
- Se inserta el dato en al comienzo  $\mathcal{O}(n)$
- Esto se repite  $\mathcal{O}(n)$  veces total  $\mathcal{O}(n^2)$

2. Reubicación de la secuencia no vacía restante: no necesario

- El resto de los elementos está en su posición correcta

Usando  $\mathcal{O}(1)$  memoria adicional, Merge es  $\mathcal{O}(n^2)$

# Complejidad de tiempo de Merge

- Tenemos un algoritmo **lineal** para obtener una secuencia ordenada
- Pero el requisito de las sub-secuencias ordenadas es demasiado exigente

¿Podemos usar Merge para ordenar una secuencia arbitraria?

- Dada una secuencia arbitraria
- Estamos listos si logramos crear dos sub-secuencias ordenadas a partir de ella
- Luego las combinamos con Merge

# Sumario

Obertura

Merge

**Merge Sort**

Epílogo

# Dividir para conquistar

El plan para usar Merge en un algoritmo de ordenación sigue la estrategia **dividir para conquistar**

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) **sub-problemas** del mismo tipo
2. Resolver **recursivamente** cada sub-problema
3. Encontrar solución al problema original **combinando** las soluciones a los sub-problemas

Los sub-problemas son instancias más pequeñas del problema a resolver

# Dividir para conquistar y Merge

Podemos usar la estrategia **dividir para conquistar** en el problema de ordenación, usando Merge

¿En qué parte del dividir para conquistar usaremos Merge?

La idea general para ordenar usando Merge define un nuevo algoritmo que llamaremos MergeSort

1. Dividir la secuencia original en dos sub-secuencias
2. Llamamos recursivamente a MergeSort sobre las dos sub-secuencias
3. Combinamos las secuencias ordenadas resultantes mediante Merge

# El algoritmo MergeSort

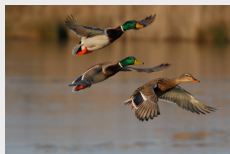
A continuación tenemos el pseudocódigo del algoritmo recursivo MergeSort

**input** : Secuencia  $A$

**output:** Secuencia ordenada  $B$

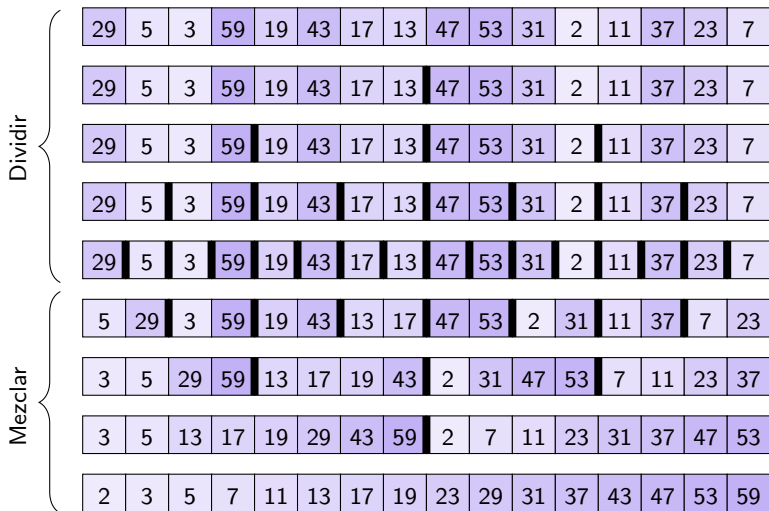
MergeSort ( $A$ ):

- 1    **if**  $|A| = 1$  : **return**  $A$
- 2    Dividir  $A$  en mitades  $A_1$  y  $A_2$
- 3     $B_1 \leftarrow \text{MergeSort}(A_1)$
- 4     $B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)$
- 5     $B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)$
- 6    **return**  $B$





# MergeSort: Ejemplo de ejecución



# Correctitud de MergeSort

## Ejercicio (propuesto)

Demuestre que MergeSort es correcto

**input** : Secuencia  $A$

**output**: Secuencia ordenada  $B$

MergeSort ( $A$ ):

- 1    **if**  $|A| = 1$  : **return**  $A$
- 2    Dividir  $A$  en mitades  $A_1$  y  $A_2$
- 3     $B_1 \leftarrow \text{MergeSort}(A_1)$
- 4     $B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)$
- 5     $B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)$
- 6    **return**  $B$

# Carácter recursivo de MergeSort

**input** : Secuencia  $A$

**output:** Secuencia ordenada  $B$

MergeSort ( $A$ ):

```
1  if  $|A| = 1$  : return  $A$ 
2  Dividir  $A$  en  $A_1$  y  $A_2$ 
3   $B_1 \leftarrow \text{MergeSort}(A_1)$ 
4   $B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)$ 
5   $B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)$ 
6  return  $B$ 
```

Todo algoritmo recursivo debe chequear primero el **caso base**

- Es el caso cuya solución no requiere recursión
- En MergeSort: línea 1

Los **llamados recursivos** se hacen sobre casos distintos al original

- Se acercan un poco más al caso base
- En MergeSort: líneas 3 y 4

# Complejidad de MergeSort

Para el análisis de complejidad de tiempo, definimos

$$T(n) := \# \text{ pasos para ordenar } n \text{ elementos}$$

Con esto, consideramos los dos casos posibles al llamar a MergeSort

MergeSort ( $A$ ):

```
1  if  $|A| = 1$  : return  $A$ 
2  Dividir  $A$  en  $A_1$  y  $A_2$ 
3   $B_1 \leftarrow \text{MergeSort}(A_1)$ 
4   $B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)$ 
5   $B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)$ 
6  return  $B$ 
```

- Si  $n = 1$ , aplica el caso base y solo involucra un paso

$$T(1) = 1$$

- Si  $n > 1$ , aplican los llamados
  - Dos llamados de tamaño  $n/2$
  - Llamado a Merge

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Este análisis aplica **para toda** secuencia de input:  
Nos entregará el resultado de peor, mejor y caso promedio

# Complejidad de MergeSort

La siguiente relación es una **relación de recurrencia**

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Podemos resolverla notando que la parte recursiva puede ser reescrita como

$$T(n) = 2T(n/2) + n \Leftrightarrow \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

La gracia de esta expresión es que numeradores y denominadores incluyen la misma fracción de  $n$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que  $n$  es potencia de 2

# Complejidad de MergeSort

Construimos un sistema de ecuaciones reemplazando el argumento del lado izquierdo por  $n, n/2, n/4, \dots, 2$  de forma que el último término contiene  $T(1)$  (nuestro caso base)

$$\text{ecuación 1} \quad \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

$$\text{ecuación 2} \quad \frac{T(n/2)}{n/2} = \frac{T(n/4)}{n/4} + 1$$

...

$$\text{ecuación } k \quad \frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + 1$$

Como el lado derecho de la  $i$ -ésima ecuación considera la potencia  $2^i$ , de la  $k$ -ésima ecuación deducimos

$$1 = \frac{n}{2^k} \Rightarrow 2^k = n \Rightarrow k = \log(n)$$

# Complejidad de MergeSort

Sumamos las  $\log(n)$  ecuaciones y simplificamos los términos que aparecen a ambos lados

$$\begin{array}{rclcl} \text{ecuación 1} & \frac{T(n)}{n} & = & \frac{T(n/2)}{n/2} & +1 \\ & & & & \\ \text{ecuación 2} & \frac{T(n/2)}{n/2} & = & \frac{T(n/4)}{n/4} & +1 \\ & & & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \\ \text{ecuación } k & \frac{T(2)}{2} & = & \frac{T(1)}{1} & +1 \\ \hline \text{suma} & \frac{T(n)}{n} & = & \frac{T(1)}{1} & +\log(n) \end{array}$$

Despejando, obtenemos  $T(n) = n \log(n) + n$

La complejidad de tiempo de MergeSort es  $\mathcal{O}(n \log(n))$

# Complejidad de MergeSort

En términos de memoria adicional

MergeSort ( $A$ ):

```
1  if  $|A| = 1$  : return  $A$ 
2  Dividir  $A$  en  $A_1$  y  $A_2$ 
3   $B_1 \leftarrow \text{MergeSort}(A_1)$ 
4   $B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)$ 
5   $B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)$ 
6  return  $B$ 
```

- El caso base no ocupa memoria adicional
- Para  $|A| = n$ , la línea 5 ocupa  $\mathcal{O}(n)$
- Ojo! Los llamados recursivos no van acumulando memoria reservada, por lo que **no sumamos**  $\mathcal{O}(n)$  por llamado

La memoria adicional **se puede reciclar**:

La complejidad de memoria de MergeSort es  $\mathcal{O}(n)$



# Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Notemos la mejora en tiempo con MergeSort  
a cambio de memoria adicional

# Sumario

Obertura

Merge

Merge Sort

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el algoritmo Merge para combinar secuencias ordenadas
- ☐ Determinar complejidad de Merge y el *trade off* de ejecutarlo *in place*
- ☐ Demostrar correctitud de Merge
- ☐ Comprender el uso de Merge como algoritmo de ordenación general en MergeSort
- ☐ Determinar la complejidad de MergeSort

# Epílogo

Ve a  
**www.menti.com**

Introduce el código  
**4898 3947**



O usa el código QR