

# Tablas de hash

Clase 13

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Diego Arroyuelo

# Sumario

**Introducción**

Tablas de hash

Colisiones

Cierre

# Recordatorio: Diccionarios

## Definición

Un **diccionario** es una estructura de datos con las siguientes operaciones

- **Asociar** un valor a una llave
- **Actualizar** el valor asociado a una llave
- **Obtener** el valor asociado a una llave
- En ciertos casos, **eliminar** de la estructura una asociación llave-valor

Los ABB fueron nuestra primera EDD para implementar diccionarios

# Diccionarios

Los ABB efectivamente soportan las operaciones de diccionario

- La complejidad de las operaciones es  $\mathcal{O}(h)$
- Cuando están balanceados,  $h \in \mathcal{O}(\log(n))$  para  $n$  llaves almacenadas

## Ejemplo

Podemos mantener pares (llave, valor) de la forma (rut, archivo)

- Podemos saber si un rut está en el dic. haciendo búsqueda por rut
- Inserción usa rut para ubicar el nodo, balanceando si es necesario

Hay algo más que los ABB poseen y no es un requisito de los diccionarios

# Diccionarios

Los ABB no solo soportan las operaciones de diccionario

- La propiedad de **árbol de búsqueda** garantiza que los datos están **ordenados**
- Si el orden es importante, esto es necesario

¿Qué es lo más importante en un diccionario?

# Diccionarios

El principal objetivo de los diccionarios es **búsqueda eficiente** de llaves

- El objetivo secundario es **inserción/modificación eficiente** de pares llave-valor
- Por esto, el orden de las llaves deja de ser relevante

¿Podemos buscar e insertar más rápido  
si nos olvidamos de mantener el orden?

# Diccionarios

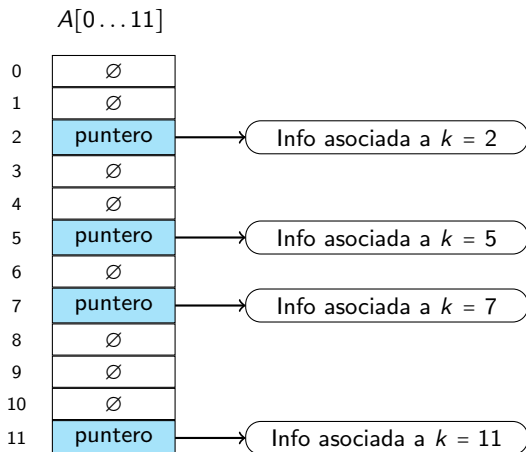
Para motivar nuestra siguiente estructura, consideremos un escenario ideal

- Conjunto de llaves posibles  $K = \{0, \dots, 11\}$  fijo y conocido
- Dada una llave  $k \in K$ , interesa saber si esta se encuentra asociada a un valor en la EDD

Este escenario se puede manejar con la siguiente EDD básica

- Arreglo  $A[0 \dots 11]$  iniciado con  $\emptyset$  en cada celda
- No almacenamos las llaves en las celdas, sino un puntero al valor asociado a la llave  $k$  en  $A[k]$
- Es decir,  $A[k] = \emptyset \Leftrightarrow$  no hay valor asociado a  $k$  en  $A$

# Diccionarios



¿Cuál es la complejidad de la búsqueda y la inserción en  $A$ ?



# Diccionarios

En la estructura  $A$  los accesos a  $A[k]$  son **accesos por índice**

- Verificar si  $A[k] = \emptyset$  es  $\mathcal{O}(1)$
- Insertar/modificar valor en  $A[k]$  es  $\mathcal{O}(1)$

No solo las operaciones deseadas son súper eficientes

- A diferencia de un ABB, se almacena solo un puntero al valor guardado
- No se usan punteros a padres-hijos para mantener la estructura

¿Qué tan ideal es este escenario de llaves naturales  $K$ ?

# Diccionarios

El escenario de llaves  $K$  puede ocurrir en aplicaciones prácticas

- Rango de valores razonable
- Llaves siempre naturales (para ser usadas como índices de arreglos)

## Ejemplo

En la universidad hay aproximadamente 25.000 estudiantes este año.

- Asignamos un  $k \in \{0, \dots, 24.999\}$  a cada estudiante
- Usamos cada natural como índice del arreglo  $A$

# Diccionarios

## Ejemplo

Cada estudiante ya posee un rut único

- Rango de rut's abarca hasta el 25.000.000
- Cantidad de estudiantes mucho menor (25.000)
- **Problema:** solo 1/1000 celdas del arreglo  $A$  indexado por ruts estarán ocupadas

No solo los ruts son llaves posibles

- Números de teléfono
- Patentes de vehículos
- ...

¿Cómo acercarnos a un conjunto de llaves  $K$  razonable?

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de función de hash
- ☐ Identificar limitaciones en el almacenamiento a través de arreglos indexados
- ☐ Comprender concepto de tabla de hash
- ☐ Comprender concepto de colisión y sus posibles manejos
- ☐ Distinguir diferencias entre encadenamiento y direccionamiento abierto

# Sumario

Introducción

**Tablas de hash**

Colisiones

Cierre

# Funciones de hash

## Definición

Dado un espacio de llaves  $K$  y un natural  $m > 0$ , una **función de hash** se define como

$$h : K \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$$

Dado  $k \in K$ , llamaremos **valor de hash de  $k$**  a la evaluación  $h(k)$ .

Notemos que

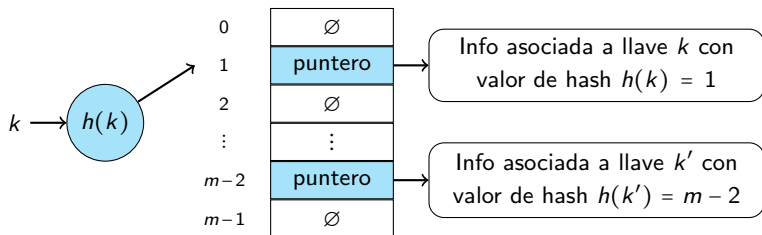
- Una función de hash nos permite mapear un espacio de llaves a otro más pequeño (con  $m$  razonable)
- Una función de hash no necesariamente es **inyectiva**
- Si  $m < |K|$ , no puede ser inyectiva
- En la práctica,  $m \ll |K|$

# Tablas de hash

## Definición

Dado  $m > 0$  y un conjunto de llaves  $K$ , una **tabla de hash**  $A$  es una EDD que asocia valores a llaves indexadas usando una función de hash

$h: K \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$ . Diremos que tal  $A$  es de tamaño  $m$ .



# Tabla de hash

El ejemplo *ideal* que estudiamos es una tabla de hash

- La función de hash es  $h : K \rightarrow K$  dada por

$$h(k) = k$$

- Las operaciones de diccionario son sencillas

IdentityHashSearch ( $A, k$ ):

**return**  $A[k]$

IdentityHashInsert ( $A, k, v$ ):

$A[k] = v$

IdentityHashDelete ( $A, k$ ):

$A[k] = \emptyset$

0	$\emptyset$
1	$\emptyset$
2	puntero
3	$\emptyset$
4	$\emptyset$
5	puntero
6	$\emptyset$
7	puntero
8	$\emptyset$
9	$\emptyset$
10	$\emptyset$
11	puntero



# Tabla de hash

- Usar la misma estrategia para hashing general sería

HashSearch ( $A, k$ ):

**return**  $A[h(k)]$

HashInsert ( $A, k, v$ ):

$A[h(k)] = v$

HashDelete ( $A, k$ ):

$A[h(k)] = \emptyset$

- Pero sabemos que  $h$  no necesariamente es inyectiva
- Es decir, puede ocurrir una **colisión**  $h(k_1) = h(k_2)$  para  $k_1 \neq k_2$

Veremos formas de manejar las colisiones

# Sumario

Introducción

Tablas de hash

**Colisiones**

Cierre

# Una función de hash típica

Para ejemplificar el problema de las colisiones, consideremos la siguiente función de hash

$$h(k) = k \bmod m$$

Se le conoce como **hashing modular** y corresponde al resto al dividir  $k$  entre  $m$

- Notemos que  $h(k) \in \{0, \dots, m-1\}$  para todo  $k$
- Todas las llaves con el mismo resto al dividir entre  $m$  generan una colisión, i.e.

$$h(k_1) = h(k_2) \Leftrightarrow k_1 \equiv_m k_2$$

## Ejemplo

Tomando  $m = 100$  y  $K = \{0, \dots, 999\}$ , el hashing modular cumple

- $h(12) = h(112) = \dots = h(912) = 12$
- $h(18) = \dots = h(918) = 18$

# Inserción

Usaremos la función de hashing modular para experimentar con **inserciones**

Consideremos  $m = 7$ . Insertemos la llave 15 en la siguiente tabla de hash

- Su valor de hash es  $h(15) = 15 \bmod 7 = 1$

0	Ø
1	Ø
2	Ø
3	Ø
4	Ø
5	Ø
6	Ø

# Inserción

La posición  $h(15) = 1$  está libre y guardamos la llave

0	∅
1	∅
2	∅
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	∅
2	∅
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	∅
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

# Inserción

Ahora insertamos la llave 37

- Su valor de hash es  $h(37) = 37 \bmod 7 = 2$

0	∅
1	15
2	∅
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	∅
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

# Inserción

Ahora insertamos la llave 51

- Su valor de hash es  $h(51) = 51 \bmod 7 = 2$

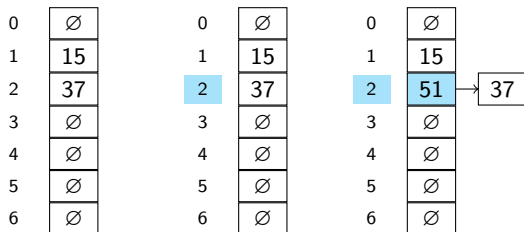
0	∅	0	∅
1	15	1	15
2	37	2	37
3	∅	3	∅
4	∅	4	∅
5	∅	5	∅
6	∅	6	∅

¿Qué hacemos con la colisión?

# Inserción con encadenamiento

Primera propuesta: **encadenamiento**

- Cada valor guardado es un nodo de una lista ligada
- Cada colisión agrega un nodo al principio/final de la lista

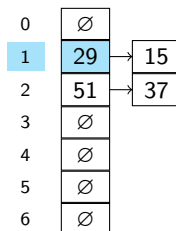
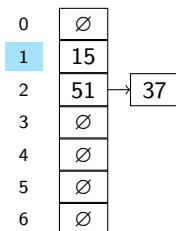
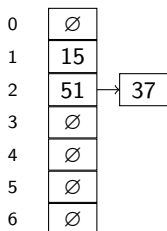




# Insertión con encadenamiento

Al insertar la llave 29 seguimos la misma idea

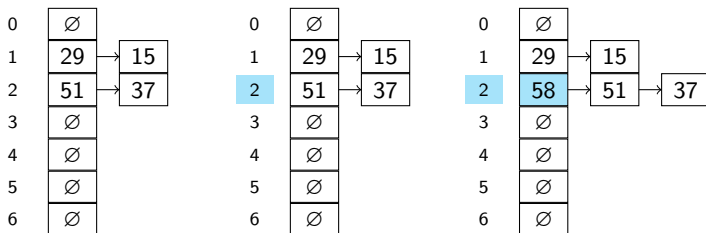
- Su valor de hash es  $h(29) = 29 \bmod 7 = 1$



# Inserción con encadenamiento

Al insertar la llave 58 seguimos la misma idea

- Su valor de hash es  $h(58) = 58 \bmod 7 = 2$



# Encadenamiento

- Las operaciones de diccionario involucran la lista ligada  $A[h(k)]$

**ChainedHashSearch** ( $A, k$ ):

    Buscar llave  $k$  en  $A[h(k)]$

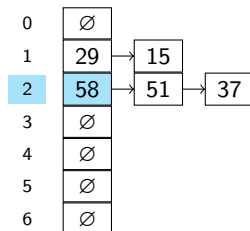
**ChainedHashInsert** ( $A, k, v$ ):

    Insertar  $(k, v)$  como cabeza de  $A[h(k)]$

**ChainedHashDelete** ( $A, k$ ):

    Eliminar llave  $k$  de  $A[h(k)]$

- La complejidad de estas operaciones depende de qué tan largas sean las listas
- Una *buena* función de hash repartiría las llaves de manera más o menos homogénea



## Otra estrategia para colisiones

Volvamos a la inserción con colisión del 51

- Su valor de hash es  $h(51) = 51 \bmod 7 = 2$

0	∅	0	∅
1	15	1	15
2	37	2	37
3	∅	3	∅
4	∅	4	∅
5	∅	5	∅
6	∅	6	∅

¿Alguna alternativa al encadenamiento?

# Inserción con sondeo lineal

Segunda propuesta: **direccionamiento abierto**

- Buscamos sistemáticamente una celda vacía
- Puede producir nuevas colisiones no previstas por  $h$

Una forma de buscar: el **sondeo lineal** inserta en la primera celda vacía a la derecha de la colisión

0	∅
1	15
2	37
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	∅
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	51
4	∅
5	∅
6	∅

# Inserción con sondeo lineal

Al insertar la llave 29 seguimos la misma idea del sondeo lineal

- Su valor de hash es  $h(29) = 29 \bmod 7 = 1$

0	∅
1	15
2	37
3	51
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	51
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	51
4	∅
5	∅
6	∅

0	∅
1	15
2	37
3	51
4	29
5	∅
6	∅

# Búsqueda con sondeo lineal

Si las inserciones son con sondeo lineal, la búsqueda debe tenerlo en cuenta

- No necesariamente  $k$  está guardado en  $A[h(k)]$
- Debemos revisar esa celda, y si no corresponde, buscar **hacia adelante**

Por ejemplo, al buscar la llave 29 comenzamos la búsqueda en la pos. 1

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

La búsqueda sigue la misma secuencia que la inserción

# Búsqueda con sondeo lineal

¿Cómo detectamos si la llave no está?

- Comenzamos la búsqueda en  $A[h(k)]$
- Si al buscar a la derecha llegamos a un  $\emptyset$  significa que no está

Por ejemplo, al buscar la llave 10, tal que  $h(10) = 10 \bmod 7 = 3$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

Concluimos que 10 no está almacenada



# Eliminación con sondeo lineal

Para eliminar llaves guardadas tenemos un problema

- Si borramos una llave, la reemplazamos por  $\emptyset$

Por ejemplo, si borramos el 51 y buscamos el 29 con  $h(29) = 29 \bmod 7 = 1$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	51
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	$\emptyset$
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	$\emptyset$
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

0	$\emptyset$
1	15
2	37
3	$\emptyset$
4	29
5	$\emptyset$
6	$\emptyset$

Concluimos que 29 no está almacenado...

Si necesitamos eliminación, es mejor usar encadenamiento

# Otros sondeos

## Sondeo lineal

- Si  $h(k) = H$ , para alguna constante  $d$  buscamos en

$$H, H + d, H + 2d, \dots$$

- Se debe cumplir  $d = 1$  o que  $d$  y  $m$  son primos relativos

## Sondeo cuadrático

- Si  $h(k) = H$ , buscamos en

$$H, H + 1, H + 4, H + 9, \dots$$

## Doble hashing

- Usamos dos funciones de hash  $h_1$  y  $h_2$  y buscamos en

$$h_1(k), h_1(k) + h_2(k), h_1(k) + 2h_2(k), \dots$$

Todos ellos presentan el problema de la eliminación

# Factor de carga

Dado que las colisiones impactan la tabla, nos interesa medir cuántos datos tenemos almacenados

## Definición

Dada una tabla de hash  $A$  de tamaño  $m$  con  $n$  valores almacenados, se define su **factor de carga** como

$$\lambda = \frac{n}{m}$$

El factor de carga es una medida de *qué tan llena está la tabla*

Según la estrategia de resolución de colisiones

- Encadenamiento: es aceptable  $\lambda \approx 1$
- Direcccionamiento abierto:  $\lambda > 0.5$  resulta en inserciones y búsquedas muy lentas

# Rehashing

Si  $\lambda$  es grande y ya no es aceptable, las operaciones se vuelven costosas

Una solución es hacer **rehashing**

- Se crea una nueva tabla más grande
- Aproximadamente del doble del tamaño original
- Como el espacio de índices ya no es de tamaño  $m$ , se define una nueva función de hash
- Mover los datos a la nueva tabla

Esta es una operación costosa para tablas de hash

- Es  $\mathcal{O}(n)$  para  $n$  datos insertados
- No obstante, es **infrecuente**

# Sumario

Introducción

Tablas de hash

Colisiones

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de función de hash
- ☐ Identificar limitaciones en el almacenamiento a través de arreglos indexados
- ☐ Comprender concepto de tabla de hash
- ☐ Comprender concepto de colisión y sus posibles manejos
- ☐ Distinguir diferencias entre encadenamiento y direccionamiento abierto