

Árboles rojo negro

Clase 11

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

Sumario

Introducción

Árboles rojo-negro

Inserciones

Cierre

Árboles de búsqueda 2-3

Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

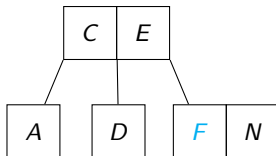
1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
 - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
 - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave k
 - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k$
 - las llaves k'' del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
 - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k_1$
 - las llaves k'' del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$
 - las llaves k''' del hijo derecho son $k_2 < k'''$

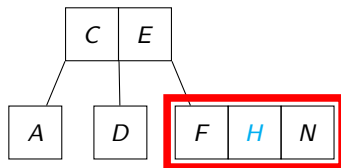
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave F



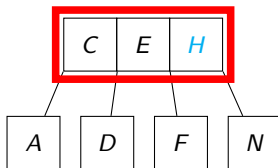
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave *H* y se produce un nodo no válido



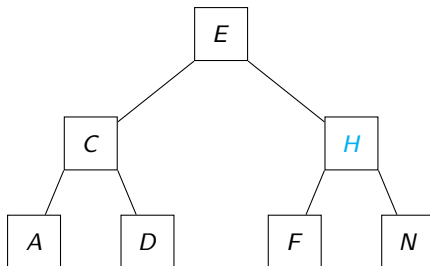
Inserciones en árboles 2-3

Subimos la llave *H* y se produce un nuevo nodo no válido



Inserciones en árboles 2-3

Hacemos **split** de la raíz actual, subiendo la llave *E* como nueva raíz



Objetivos de la clase

- ☐ Representar árboles 2-3 como binarios
- ☐ Comprender el modelo de árbol rojo-negro
- ☐ Comprender relación entre rojo-negro y árboles 2-4
- ☐ Comprender inserción en rojo-negro con ayuda de árboles 2-4

Sumario

Introducción

Árboles rojo-negro

Inserciones

Cierre

Convirtiendo un 2-3 en binario

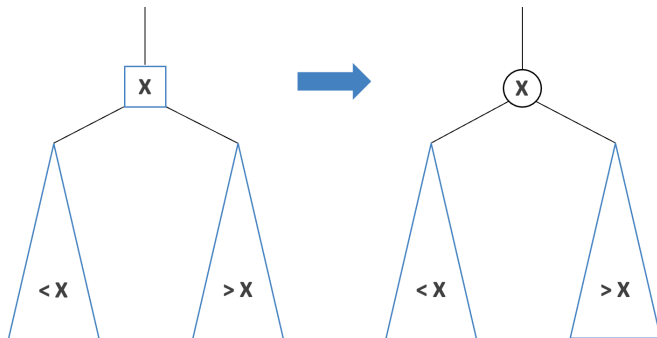
Para transformar un árbol 2-3 en un ABB nos centramos en los dos tipos de nodos

- Un **2-nodo** se puede representar como un nodo de un ABB sin problemas
- Un **3-nodo** no se puede representar de esa forma... necesitamos separar las llaves y los hijos

¿Cómo llevamos estos nodos a representación en ABB?

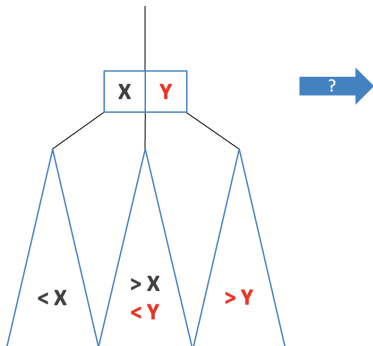
Convirtiendo un 2-3 en binario

Los 2-nodos se representan igual



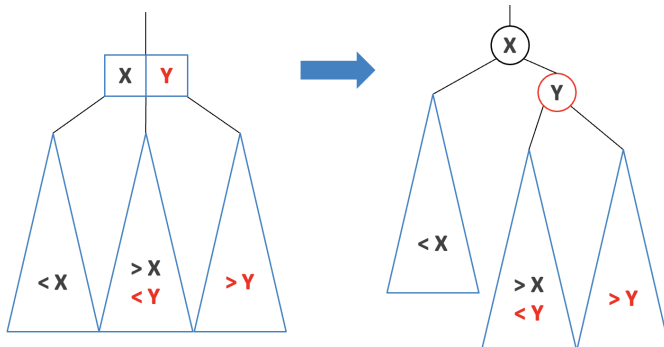
Convirtiendo un 2-3 en binario

¿Cómo separamos las llaves de un 3-nodo?



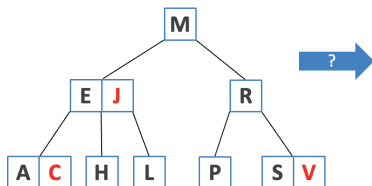
Convirtiendo un 2-3 en binario

Reasignamos dos de los hijos a un nuevo nodo



Notemos que la diferencia de alturas entre los subárboles es 1

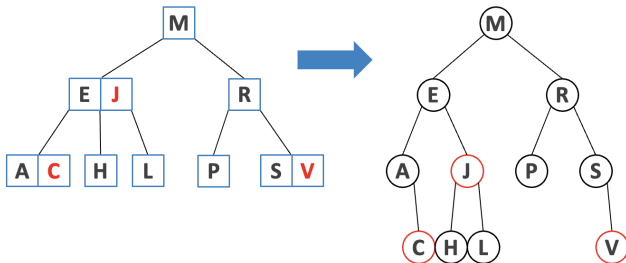
Convirtiendo un 2-3 en binario



Ejercicio

Convierta el árbol 2-3 anterior en un ABB

Convirtiendo un 2-3 en binario



Esta coloración motiva una nueva idea de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros

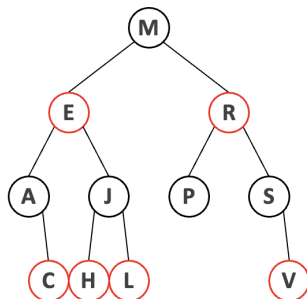
Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros



Esta es una nueva noción de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Al igual que en los árboles AVL, los cambios en el árbol pueden romper la propiedad de balance

- Tendremos una estrategia de restauración (rotaciones)
- En lugar de usar *x.balance* usaremos *x.color*

Para facilitar la comprensión del rebalanceo, notamos que

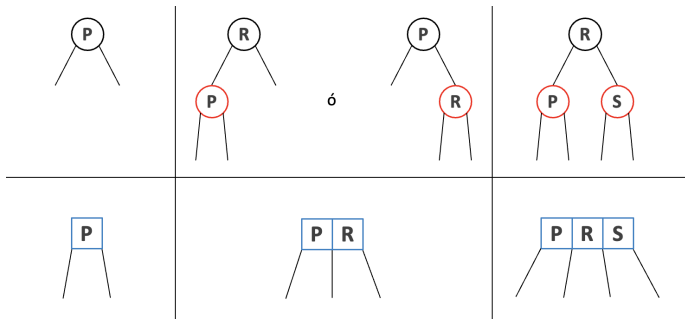
- Los árboles 2-3 son fáciles de visualizar
- No todo árbol rojo-negro tiene un árbol 2-3 equivalente
- Pero sí tiene un **árbol 2-4 equivalente**

Árboles rojo-negro y árboles 2-4

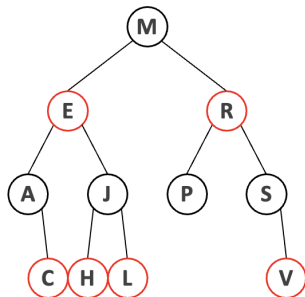
Un **árbol 2-4** es un árbol 2-3 que además puede tener **4-nodos**

- tiene 3 llaves ordenadas distintas
- si no es hoja, tiene 4 hijos

Con este nuevo modelo, podemos tener árboles equivalentes según



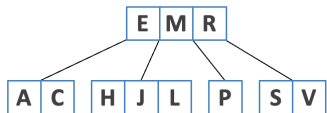
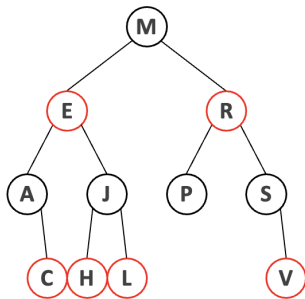
Árboles rojo-negro y árboles 2-4



Ejercicio

Obtenga un árbol 2-4 equivalente al árbol rojo-negro anterior

Árboles rojo-negro y árboles 2-4



Sumario

Introducción

Árboles rojo-negro

Inserciones

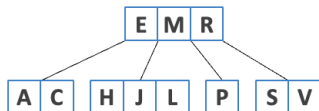
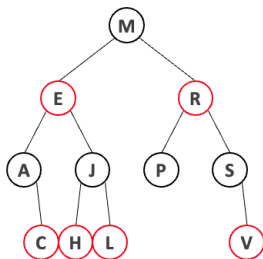
Cierre

Inserción en árboles rojo-negro

Estudiaremos cómo insertar nodos en árboles rojo negro

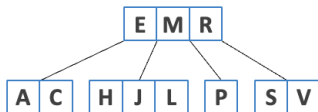
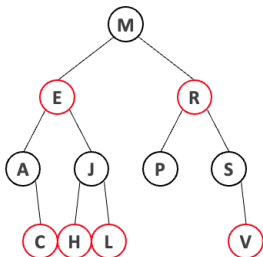
- Usaremos un árbol 2-4 equivalente como ayuda
- Nos permitirá comprender mejor cómo efectuar **rotaciones** y **cambios de color**

Trabajaremos con el siguiente árbol como punto de partida



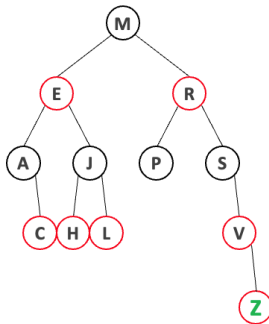
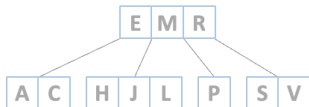
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos la llave Z. ¿Dónde debería ubicarse?



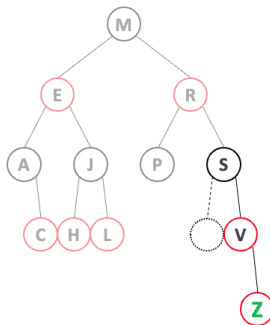
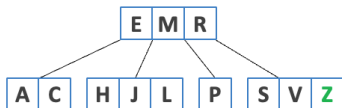
Inserción en árboles rojo-negro

Para no romper la propiedad 4 de los rojo-negro, insertamos siempre como **nodo rojo**



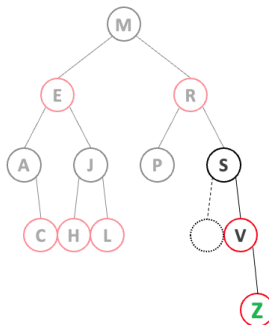
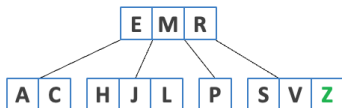
Inserción en árboles rojo-negro

Actualizamos el árbol 2-4 equivalente, el cual nos sugiere una posible rotación de los nodos $S - V$



Inserción en árboles rojo-negro

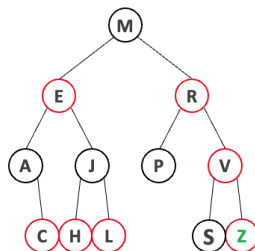
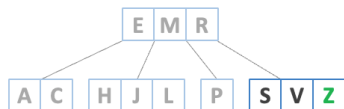
Además, notamos que el tío del nodo nuevo Z es negro (pues es un nodo vacío)



¿Qué pasa si el tío es rojo?
Lo veremos más adelante

Inserción en árboles rojo-negro

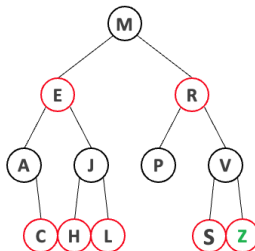
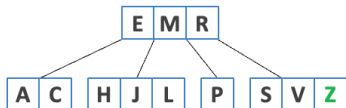
Efectuamos la rotación de acuerdo a lo que nos sugiere el nodo SVZ del 2-4



Ojo que ahora se rompe la propiedad 4 (los colores)

Inserción en árboles rojo-negro

Cambiamos color de *S* y *V*, los nodos que se rotaron



Esta rotación/coloración fue suficiente
para entregar un nuevo árbol rojo-negro

Inserción en árboles rojo-negro

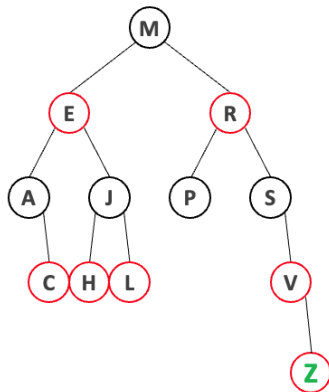
A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción exterior :



Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x

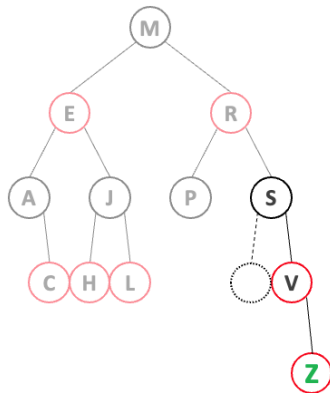
output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción exterior :

$t \leftarrow x.\text{uncle} \triangleright$ tío de x

if $t.\text{color} = \text{negro}$:



Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

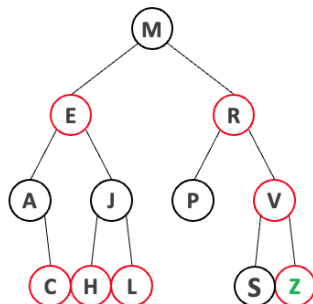
if x fue inserción exterior :

$t \leftarrow x.\text{uncle} \triangleright$ tío de x

if $t.\text{color} = \text{negro}$:

$g \leftarrow x.p.p \triangleright$ abuelo de x

 Rotation($g, x.p$)



Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción exterior :

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

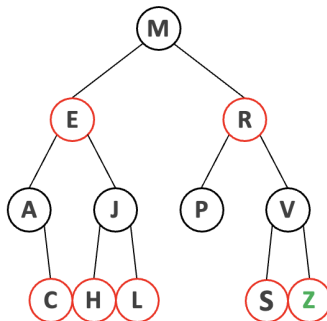
if $t.color = negro$:

$g \leftarrow x.p.p \triangleright$ abuelo de x

Rotation($g, x.p$)

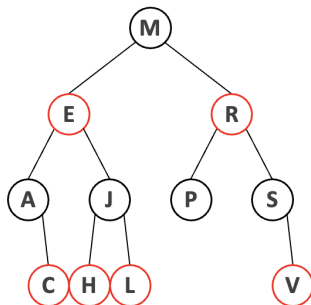
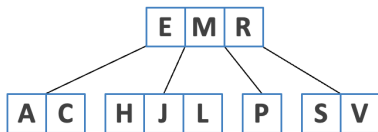
$x.p.color \leftarrow negro$

$g.color \leftarrow rojo$



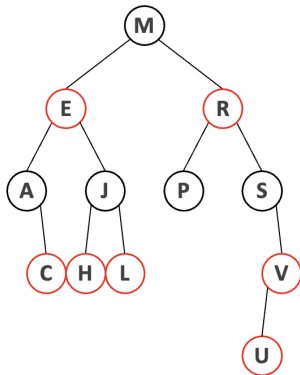
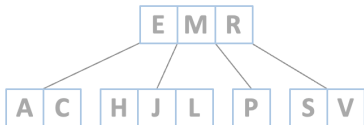
Inserción en árboles rojo-negro

Nueva inserción: insertamos la llave U . ¿Dónde debiera ubicarse?



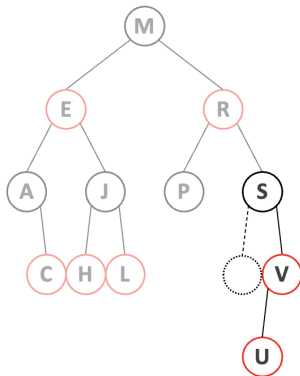
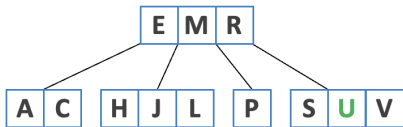
Inserción en árboles rojo-negro

Tal como antes, la insertamos como nodo rojo... a este tipo de inserción le llamamos **interior**



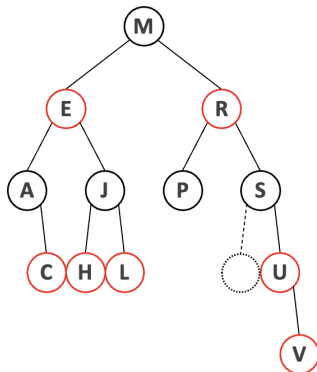
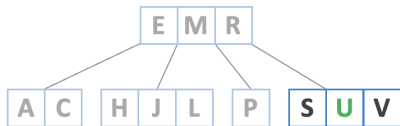
Inserción en árboles rojo-negro

Vemos que tiene tío negro y al actualizar el 2-4 se nos sugiere una rotación



Inserción en árboles rojo-negro

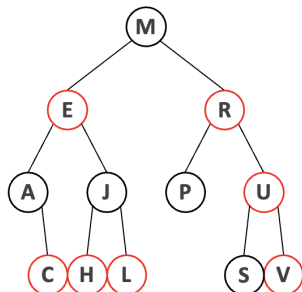
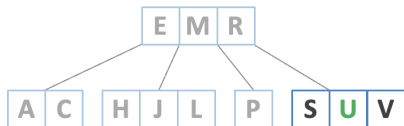
Efectuamos primera rotación $U - V$



En este punto ya estamos con un escenario como el caso de inserción exterior

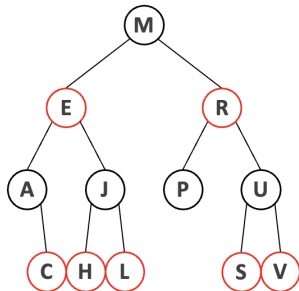
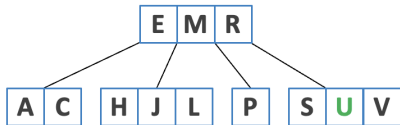
Inserción en árboles rojo-negro

Luego, una segunda rotación $S - U$ que deja a U como padre de S, V



Inserción en árboles rojo-negro

Finalmente, cambiamos el color de los últimos nodos rotados



Inserción en árboles rojo-negro

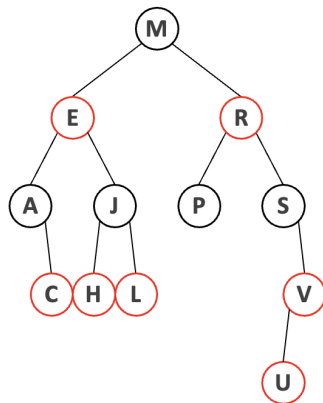
Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción interior :



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x

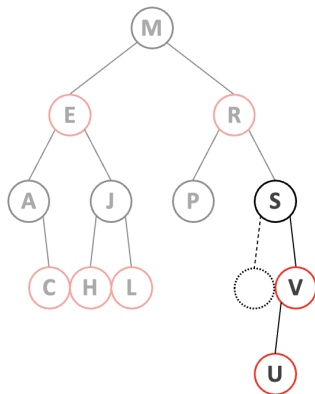
output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción interior :

$t \leftarrow x.\text{uncle} \triangleright$ tío de x

if $t.\text{color} = \text{negro}$:



Insertión en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

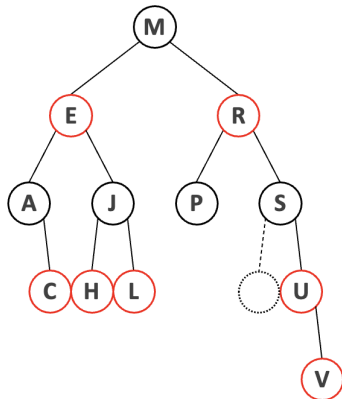
if x fue inserción interior :

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = negro$:

$g \leftarrow x.p.p \triangleright$ abuelo de x

 Rotation($x.p, x$)



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción interior :

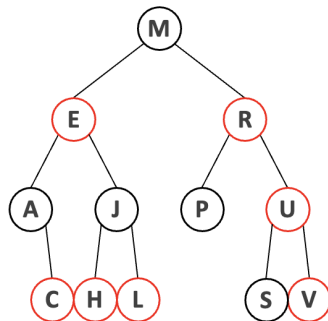
$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = negro$:

$g \leftarrow x.p.p \triangleright$ abuelo de x

 Rotation($x.p, x$)

 Rotation(g, x)



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x

output: \emptyset

FixBalance (x):

if x fue inserción interior :

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = negro$:

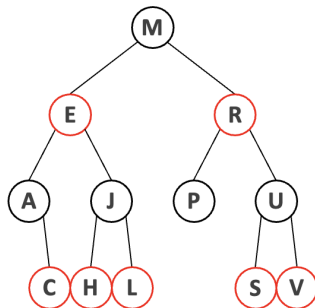
$g \leftarrow x.p.p \triangleright$ abuelo de x

 Rotation($x.p, x$)

 Rotation(g, x)

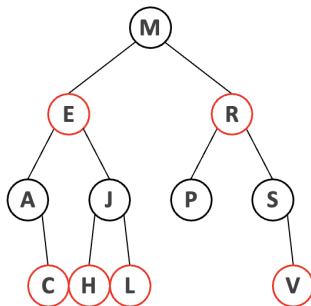
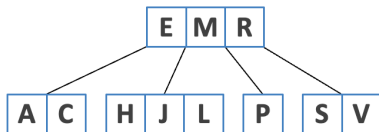
$x.color \leftarrow negro$

$g.color \leftarrow rojo$



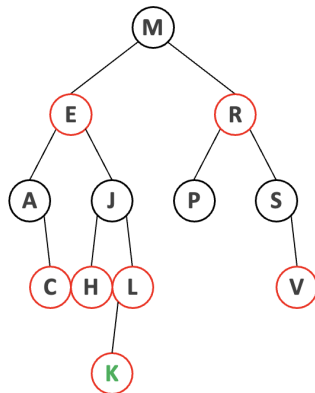
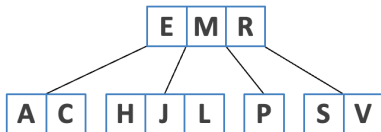
Inserción en árboles rojo-negro

Nueva inserción: insertamos la llave K . ¿Dónde debiera ubicarse?



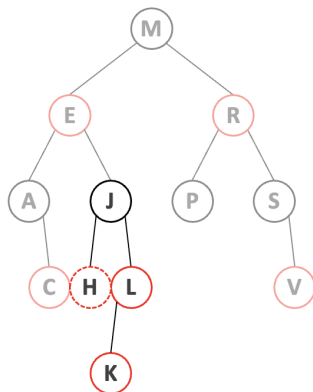
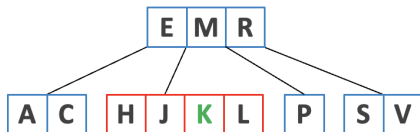
Inserción en árboles rojo-negro

Lo agregamos como hoja roja



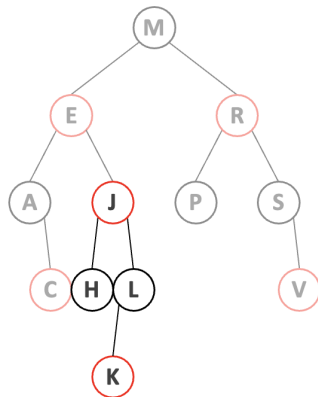
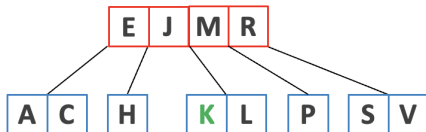
Inserción en árboles rojo-negro

Actualizamos el árbol 2-4 y notamos un conflicto: notemos que el tío de K es rojo



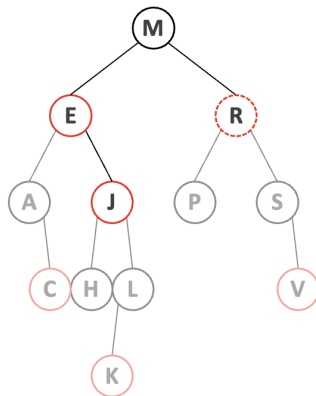
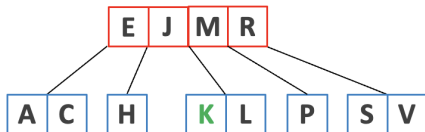
Inserción en árboles rojo-negro

Al modificar el 5-nodo ilegal, se nos sugiere el cambio de colores en el árbol rojo-negro



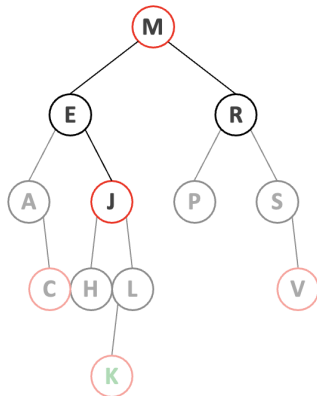
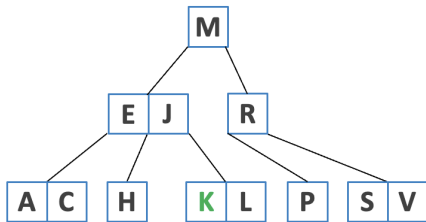
Inserción en árboles rojo-negro

Revisamos recursivamente hacia arriba, revisando el tío de *J*, que nuevamente es rojo



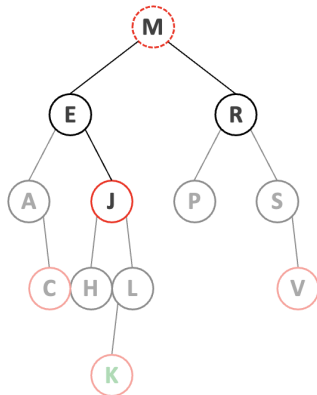
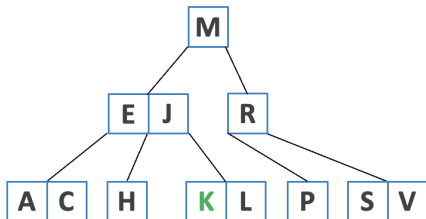
Inserción en árboles rojo-negro

Nuevo cambio de colores que involucra solo a los tres nodos superiores



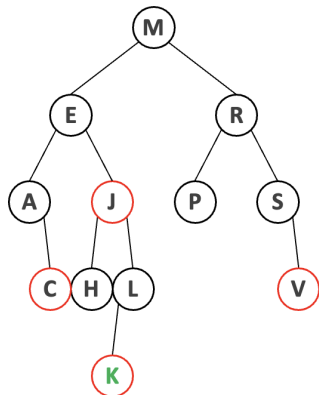
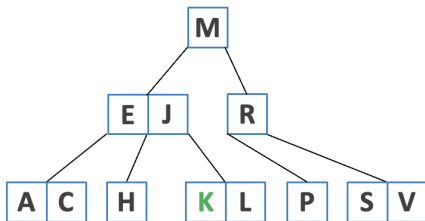
Inserción en árboles rojo-negro

No hay más tíos que revisar, pero ahora falla la condición de que la raíz sea negra



Inserción en árboles rojo-negro

Le cambiamos su color y terminamos



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

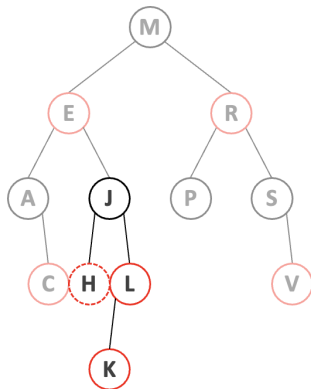
input : Nodo x , árbol rojo-negro A

output: \emptyset

FixBalance (x):

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x , árbol rojo-negro A

output: \emptyset

FixBalance (x):

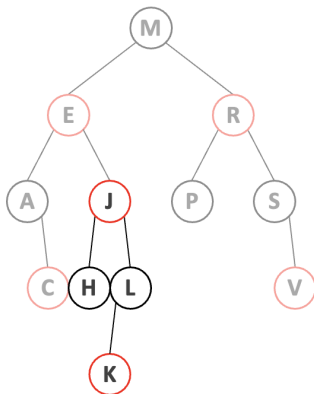
$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:

$x.p.color \leftarrow negro$

$t.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x , árbol rojo-negro A

output: \emptyset

FixBalance (x):

while $x.p \neq \emptyset \wedge x.p.color = rojo$:

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:

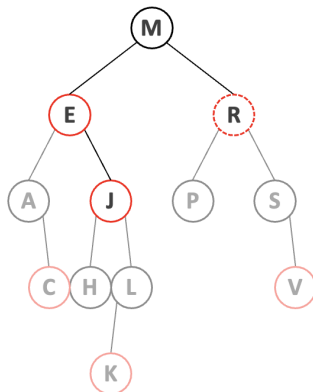
$x.p.color \leftarrow negro$

$t.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$

$x \leftarrow x.p.p$

$A.root.color \leftarrow negro$



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x , árbol rojo-negro A

output: \emptyset

FixBalance (x):

while $x.p \neq \emptyset \wedge x.p.color = rojo$:

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:

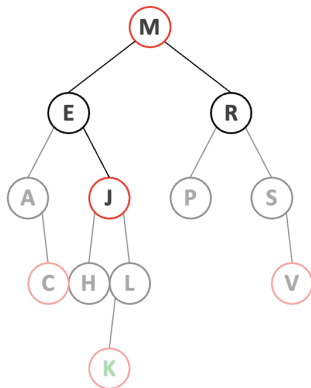
$x.p.color \leftarrow negro$

$t.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$

$x \leftarrow x.p.p$

$A.root.color \leftarrow negro$



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x , árbol rojo-negro A

output: \emptyset

FixBalance (x):

while $x.p \neq \emptyset \wedge x.p.color = rojo$:

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:

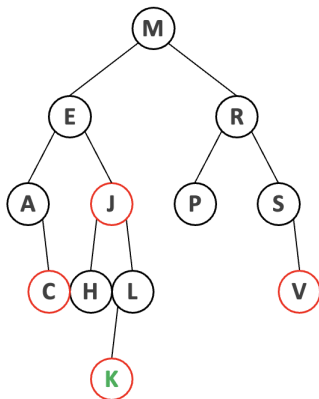
$x.p.color \leftarrow negro$

$t.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$

$x \leftarrow x.p.p$

$A.root.color \leftarrow negro$



Inserción en árboles rojo-negro

Al insertar, siempre lo hacemos como nodo rojo

- Si el padre es negro, no hacemos nada
- Si el padre es rojo, hay dos casos según el tío
 - Tío negro: el nodo del árbol 2-4 crece, pero no colapsa
rotaciones y cambios de color
 - Tío rojo: el nodo del árbol 2-4 colapsa y hay que subir
cambios de color hacia la raíz

Inserción en árboles rojo-negro

FixBalance (x):

while $x.p \neq \emptyset \wedge x.p.color = rojo$:

$t \leftarrow x.uncle \triangleright$ tío de x

if $t.color = rojo$:

$x.p.color \leftarrow negro$

$t.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$

$x \leftarrow x.p.p$

else:

if x es hijo interior de $x.p$:

Rotation($x.p, x$)

$x \leftarrow x.p$

$x.p.color \leftarrow negro$

$x.p.p.color \leftarrow rojo$

Rotation($x.p.p, x$)

$A.root.color \leftarrow negro$

Inserción en árboles rojo-negro

Ejercicio

Inserte en un árbol rojo-negro vacío las siguientes llaves consecutivas

41, 38, 31, 12, 19, 8

Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 41 como raíz

Insert 41

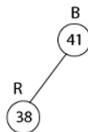
B



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 38 y terminamos, pues su padre es negro

Insert 38



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 31 y es hijo exterior de un nodo rojo: rotación+cambio

Insert 31



Inserción en árboles rojo-negro

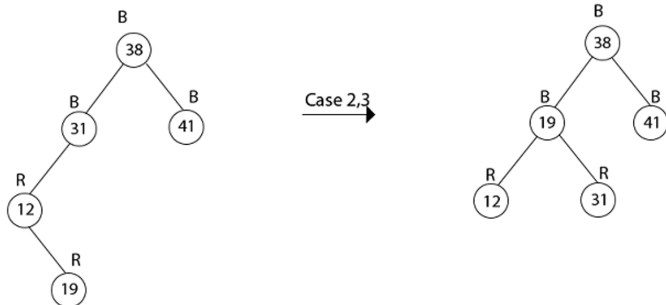
Insertamos el 12, hijo exterior de nodo rojo con tío rojo: cambios de color

Insert 12



Inserción en árboles rojo-negro

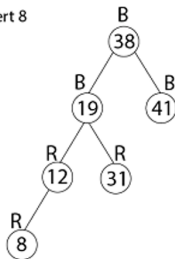
Insertamos el 19, hijo interior de nodo rojo con tío negro: rotación doble + cambio



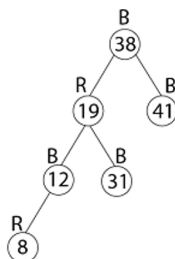
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 8, hijo de nodo rojo y tío rojo: cambios de color

◀ Insert 8



Case-1



Sumario

Introducción

Árboles rojo-negro

Inserciones

Cierre

Objetivos de la clase

- ☐ Representar árboles 2-3 como binarios
- ☐ Comprender el modelo de árbol rojo-negro
- ☐ Comprender relación entre rojo-negro y árboles 2-4
- ☐ Comprender inserción en rojo-negro con ayuda de árboles 2-4