BFS y algoritmo de Dijkstra

Clase 25

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

Sumario

Rutas en viajes

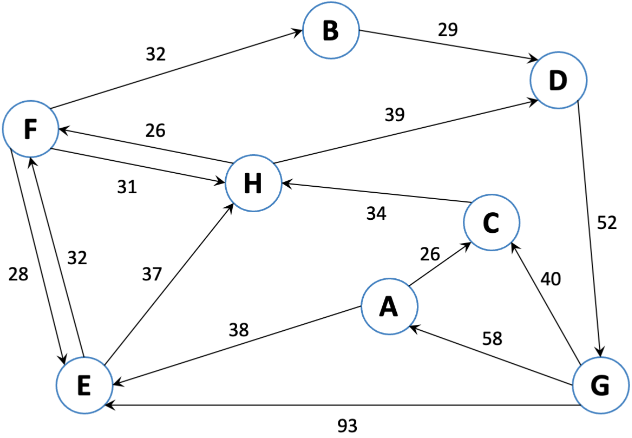
Consideremos el problema de planificar un viaje en auto entre dos ciudades

- Podemos pensar en un grafo **dirigido**: caminos y puntos de intersección
- El auto tiene un consumo
- El combustible tiene un costo
- Cada camino tiene un largo conocido
- Además, cada camino puede tener un peaje

El costo σ_i de usar el camino i engloba los estos diferentes costos

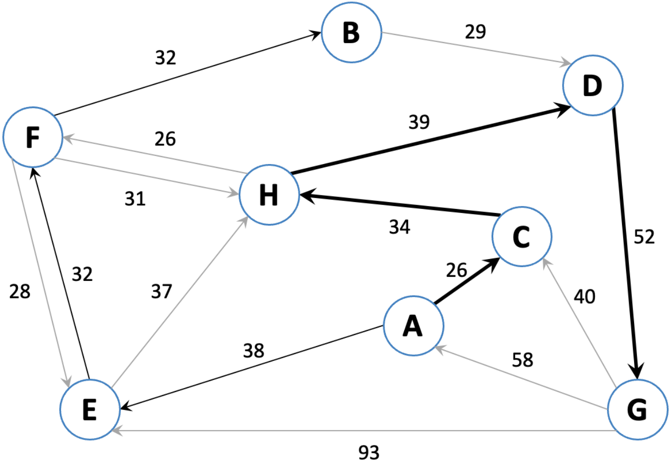
Podemos representar los σ_i en un **grafo dirigido con costos**

Rutas en viajes



Notemos que en este problema, los costos son **no negativos**

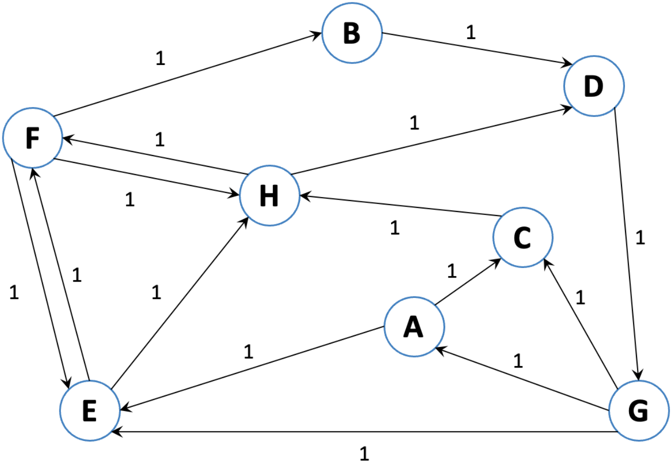
Rutas en viajes



Objetivo: ruta más barata, i.e. suma de los costos debe ser mínima

Rutas en viajes: versión 1.0

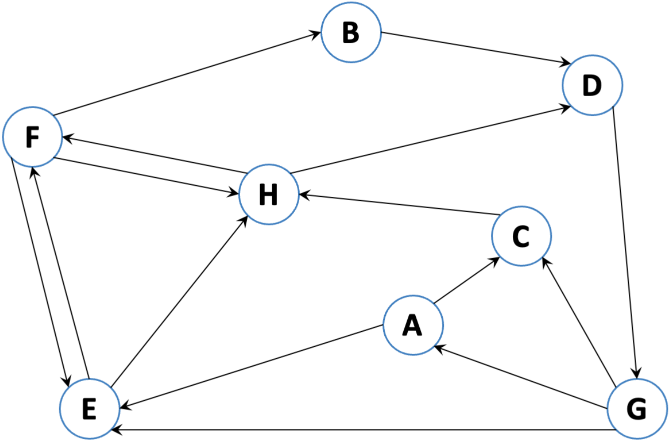
Consideremos el caso en que los costos son iguales: $\sigma_i = K$



¿A qué equivale encontrar la ruta más barata en este caso?

Rutas en viajes: versión 1.0

Consideremos el caso en que los costos son iguales: $\sigma_i = K$



Simplemente buscamos la **ruta más corta** (menos cantidad de aristas)

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido BFS de un grafo
- ☐ Extender BFS para definir el algoritmo de rutas más cortas
- ☐ Demostrar que Dijkstra es un algoritmo correcto
- ☐ Determinar la complejidad de Dijkstra

Sumario

Búsqueda en amplitud

El algoritmo que utilizaremos para resolver este problema simplificado se llama **BFS** o **Búsqueda en amplitud**

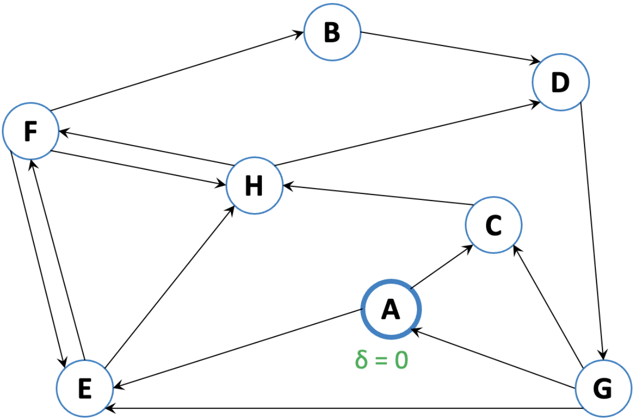
- Tal como DFS es un algoritmo de búsqueda
- BFS revisa los vecinos inmediatos y luego sigue con los vecinos de estos
- Es decir, BFS recorre en base a **distancia desde un nodo inicial**

Para nuestro problema, δ será la distancia desde el punto de inicio hasta cada nodo

Por definición δ es la **menor distancia** de A a cualquier nodo

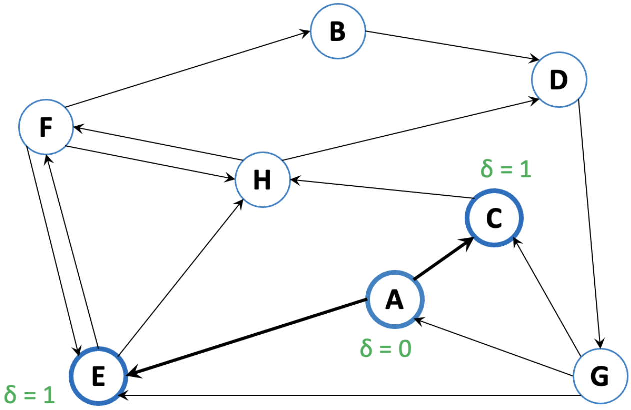
BFS y rutas más cortas

Iniciamos visitando los nodos a distancia $\delta = 0$ desde A



BFS y rutas más cortas

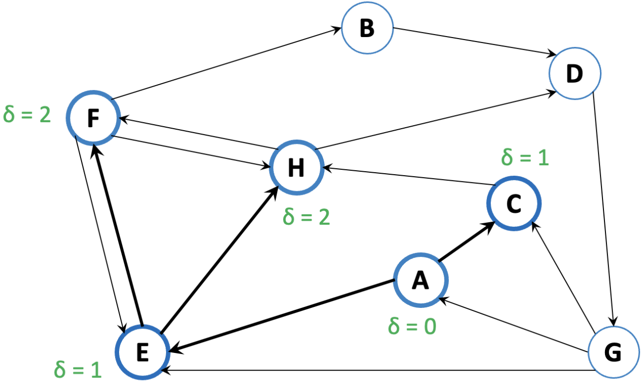
Ahora visitamos los nodos con $\delta = 1$ desde A



Los nodos a distancia $\delta = 1$ son alcanzables por una arista directa desde A

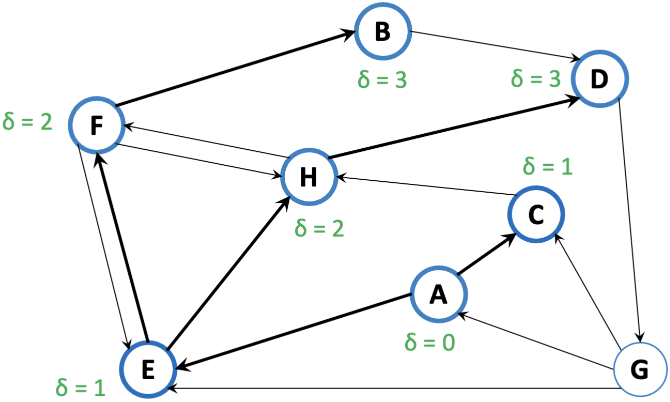
BFS y rutas más cortas

Ahora visitamos los nodos con $\delta = 2$ desde A



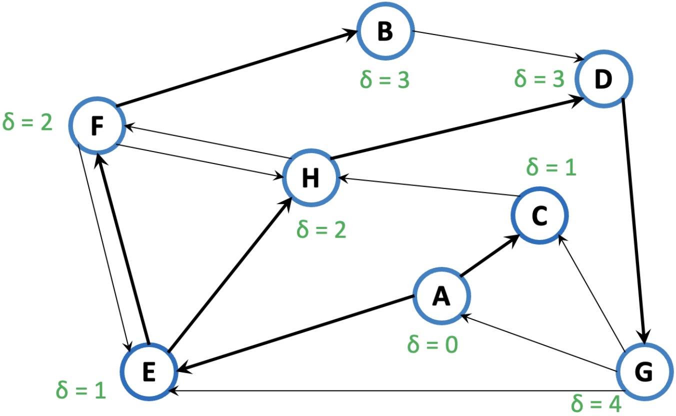
Notemos que hay dos caminos de largo 2 desde A hasta H

Ahora visitamos los nodos con $\delta = 3$ desde A



BFS y rutas más cortas

Ahora visitamos los nodos con $\delta = 4$ desde A



Notemos que D no es descubierto desde B

Búsqueda en amplitud

BFS descubre los nodos a través del menor número de aristas

- Siempre se visitan primero los nodos a distancia $\delta = k$
- Luego se llega a los que están a distancia $\delta = k + 1$

Debemos asegurar que los nodos son descubiertos en el orden adecuado

¿Cómo distinguir entre descubiertos y no descubiertos?

Implementación de BFS

Podemos distinguir los nodos con *colores*

- blanco: no descubierto
- gris: descubierto con vecinos no descubiertos (pendientes)
- negro: descubierto con vecinos descubiertos (terminado)

Como interesa descubrir nodos **en orden**, hay que almacenar los recién descubiertos

- Usaremos una **cola FIFO**
- Cuando descubrimos un nodo, lo agregamos al final de la cola
- Para revisar nuevos vecinos, sacamos el nodo prioritario

¿DFS se puede pensar con una estrategia análoga?

Implementación de BFS

input : vértice de inicio s

```
BFS(s):
    for u ∈ V − {s} :
        u.color ← blanco;  u.δ ← ∞;  π[u] ← ∅
    s.color ← gris;  s.δ ← 0;  π[s] ← ∅
    Q ← cola FIFO vacía
    Insert(Q, s)
    while Q no está vacía :
        u ← Extract(Q)
        for v ∈ α[u] :
            if v.color = blanco :
                v.color ← gris;  v.δ ← u.δ + 1
                π[v] ← u
                Insert(Q, v)
        u.color ← negro
```

Implementación de BFS

$\texttt{BFS}(s)$**:**

  for $u \in V - \{s\}$ **:**

    $u.color \leftarrow$ blanco; $u.\delta \leftarrow \infty$; $\pi[u] \leftarrow \varnothing$

  $s.color \leftarrow$ gris; $s.\delta \leftarrow 0$; $\pi[s] \leftarrow \varnothing$

  $Q \leftarrow$ cola FIFO vacía

  $\texttt{Insert}(Q, s)$

  while Q *no está vacía* **:**

    $u \leftarrow \texttt{Extract}(Q)$

    for $v \in \alpha[u]$ **:**

      if $v.color = blanco$ **:**

        $v.color \leftarrow$ gris; $v.\delta \leftarrow u.\delta + 1$

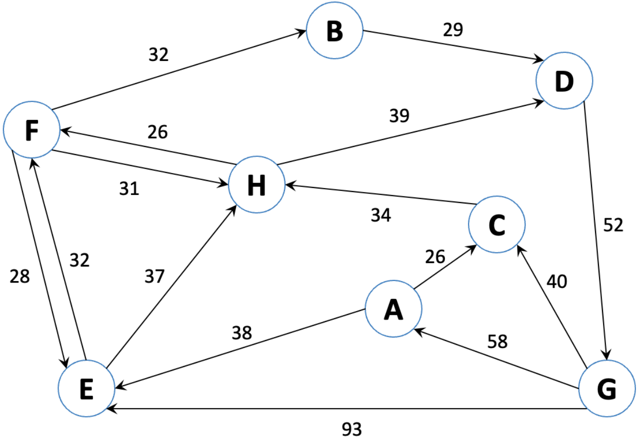
        $\pi[v] \leftarrow u$

        $\texttt{Insert}(Q, v)$

    $u.color \leftarrow$ negro

BFS deja en π la representación de un árbol de **rutas más cortas** desde s

Rutas en viajes: versión 2.0



¿BFS funciona cuando queremos rutas más baratas con costos?

Sumario

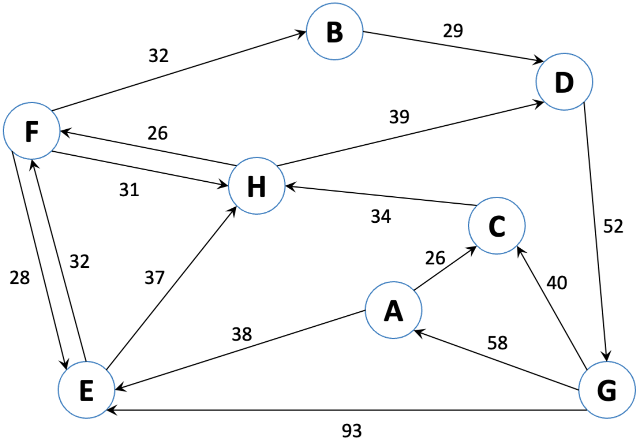
Búsqueda en amplitud *mejorado*

Necesitamos extender BFS para rutas con costos acumulados

- La cola Q debe incorporar los costos
- Al sacar un elemento de Q, lo hemos descubierto por la ruta más barata

¿Qué partes del algoritmo BFS debemos modificar?

Rutas en viajes: versión 2.0

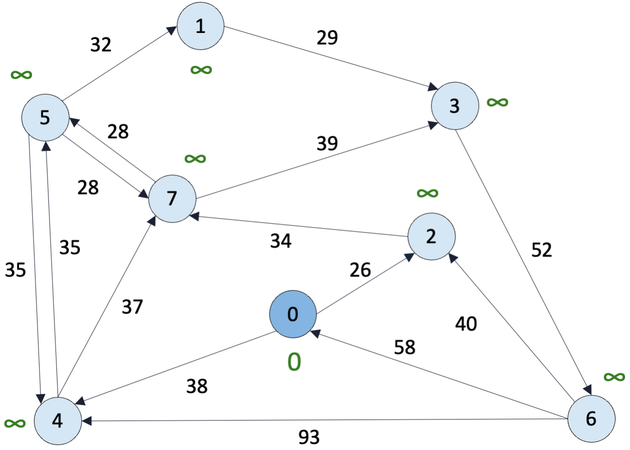


¿BFS funciona cuando queremos rutas más baratas con costos?

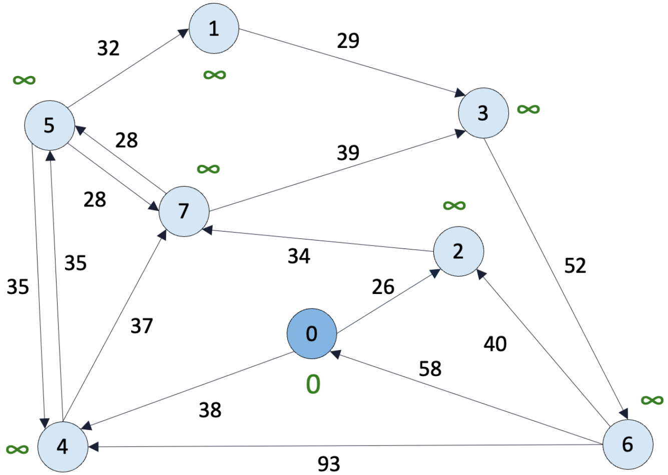
Rutas en viajes: versión 2.0

Ejercicio

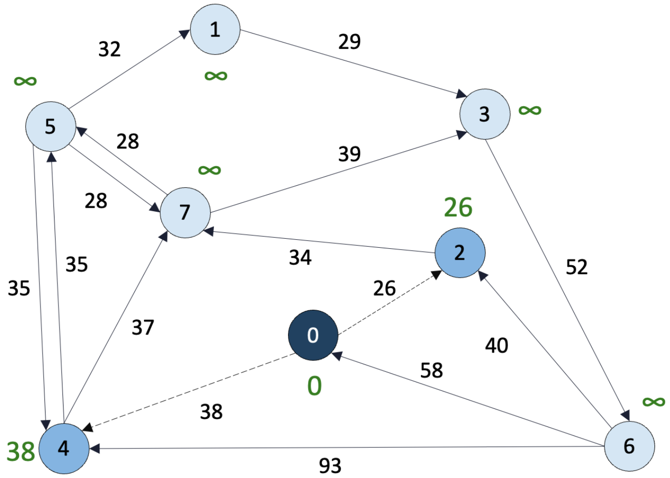
Determine la ruta más barata desde el nodo 0 hasta todos los demás nodos de la siguiente red con costos no negativos



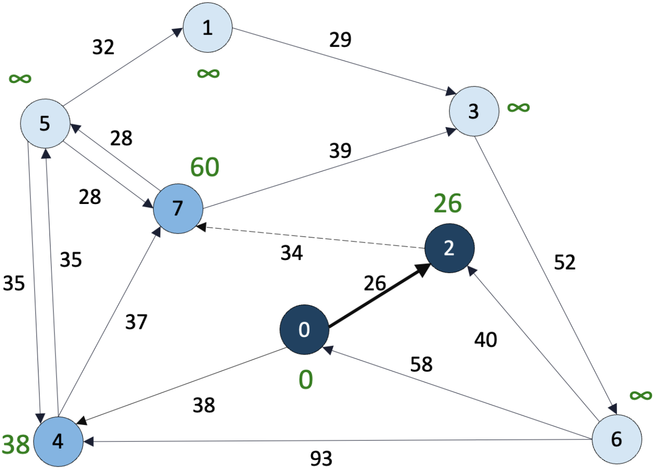
Rutas en viajes: versión 2.0



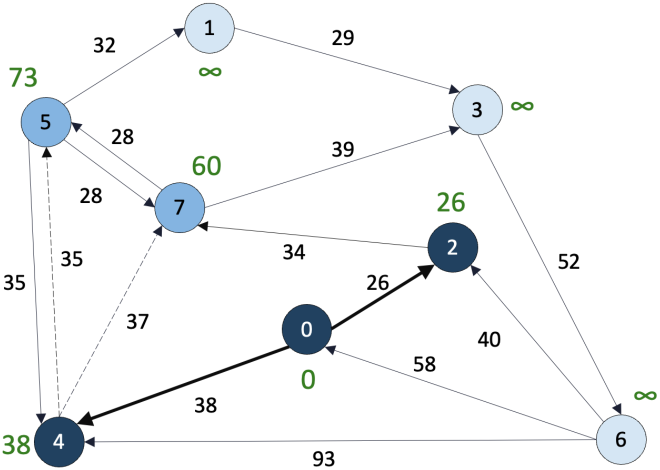
Rutas en viajes: versión 2.0



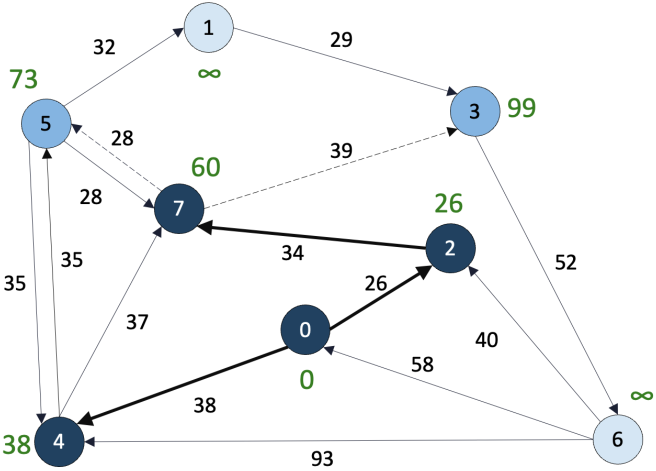
Rutas en viajes: versión 2.0



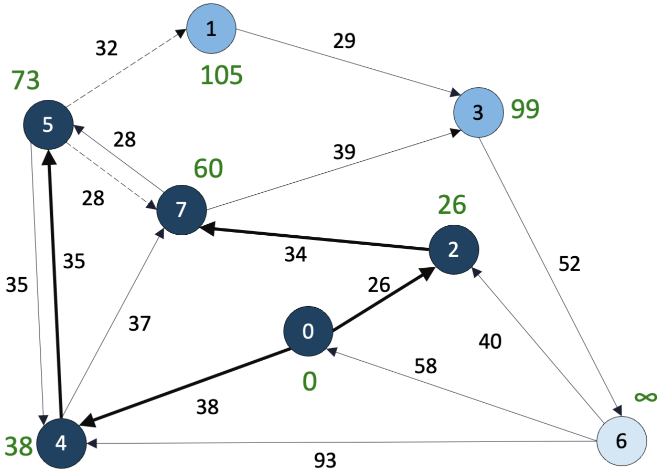
Rutas en viajes: versión 2.0



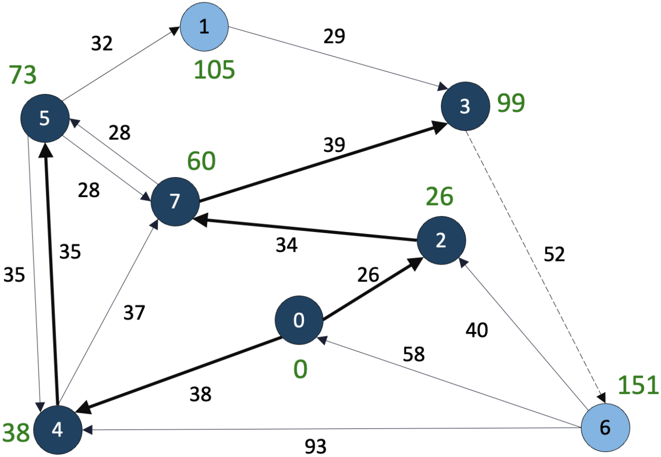
Rutas en viajes: versión 2.0



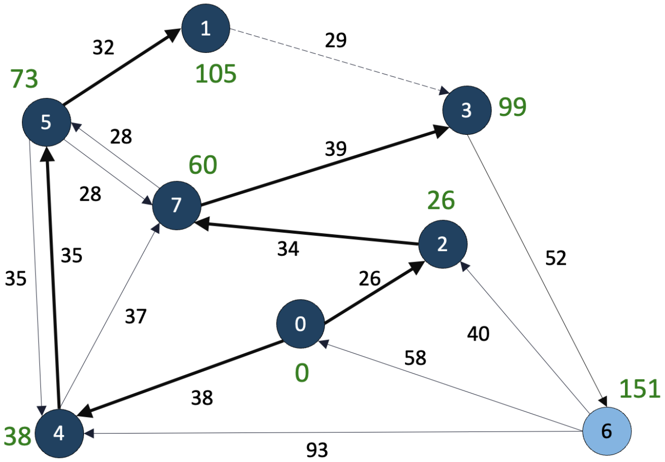
Rutas en viajes: versión 2.0



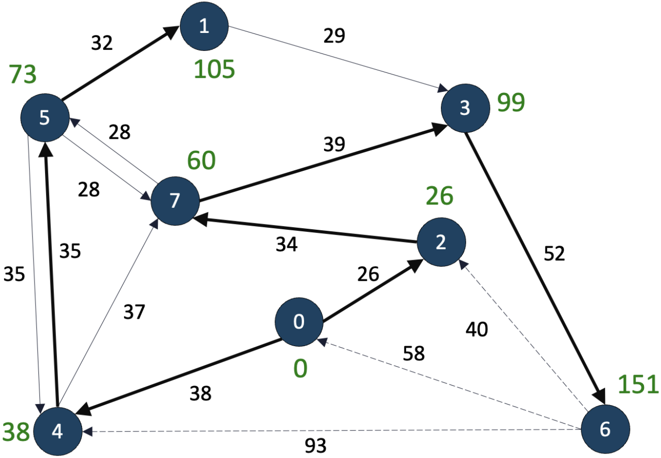
Rutas en viajes: versión 2.0



Rutas en viajes: versión 2.0



Rutas en viajes: versión 2.0



Algoritmo de Dijkstra

```
Dijkstra(s):
    for u ∈ V − {s} :
        u.color ← blanco;  d[u] ← ∞;  π[u] ← ∅
    s.color ← gris;  d[s] ← 0;  π[s] ← ∅
    Q ← cola de prioridades vacía (Min Heap)
    Insert(Q, s)
    while Q no está vacía :
        u ← Extract(Q)
        for v ∈ α[u] :
            if v.color = blanco ∨ v.color = gris :
                if d[v] > d[u] + cost(u, v) :
                    d[v] ← d[u] + cost(u, v);  π[v] ← u
                    DecreaseKey(Q, v, d[v])
                if v.color = blanco :
                    v.color ← gris;  Insert(Q, v)
        u.color ← negro
```

Solo cambia costo+ruta si hay arista que baja el costo

Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra encuentra las rutas más baratas desde s

- Solo a aquellos vértices alcanzables desde s
- Ojo: puede haber más de una ruta con el mismo costo
- Dijkstra encuentra **una**

¿Qué estrategia algorítmica es usada por este algoritmo?

Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra es **codicioso**

Además el problema de rutas más cortas tiene **subestructura óptima**

Dada una ruta entre v_0, v_k

- Si $p = v_0, v_1, \ldots, v_k$ es una ruta de costo mínimo
- Entonces la sub-ruta

$$p_{ij} = v_i, \ldots, v_j, \qquad 0 \leq i \leq j \leq k$$

es una ruta más corta de v_i a v_j

Si es codicioso, ¿cómo sabemos que funciona en todas las instancias?

Correctitud de Dijkstra

Demostración

Finitud

Es claro que el algoritmo termina, pues no visita nodos ya descubiertos y cada arista es revisada a lo más una vez. Como el grafo es finito, el algoritmo es finito.

Correctitud

Denotamos por $\delta(s, v)$ el costo de la ruta más corta de s a v.

Probaremos la correctitud del algoritmo demostrando la siguiente propiedad

$P(n) :=$ al inicio de la n-ésima iteración del **while** el nodo u extraído de Q cumple $d[u] = \delta(s, u)$

Lo haremos por inducción sobre n.

Correctitud de Dijkstra

Demostración

C.B. Para $i = 1$, tenemos que se extrae s. El óptimo es $\delta(s, s) = 0$ y corresponde con el costo almacenado $d[s] = 0$.

H.I. Suponemos que al inicio de la k-ésima iteración, el nodo extraído cumple la propiedad, para $k < n$.
T.I. Probaremos el resultado para la iteración n. Supongamos que esta iteración es tal que u extraído es el primer nodo tal que

$$d[u] \neq \delta(s, u)$$

Llegaremos a una contradicción, que probará que no hay tal u, i.e. todos los elementos cumplen la propiedad pedida.

Correctitud de Dijkstra

Demostración

Para argumentar que existe un camino de s hasta u,

- Si no existe tal camino, el costo ideal es $\delta(s, u) = \infty$
- Pero este es el valor inicial $d[u] = \infty$
- Como solo se puede reducir el costo al encontrar caminos desde s, se contradice el supuesto de que no hay camino

Sea p un camino de s a u de la forma

$$p = s, \ldots, x, y, \ldots, u$$

tal que y es el primer nodo gris desde s en p

- Como y es gris, está en la cola Q y aún no ha sido extraído
- Como x es negro, ya fue extraído de la cola

Correctitud de Dijkstra

Demostración

Por **H.I.** y el hecho de que solo se puede alterar el costo de un nodo gris o blanco, sabemos que

$$d[x] = \delta(s, x)$$

Como la arista (x, y) fue visitada al haber extraído x y visitado sus vecinos,

$$d[y] = \delta(s, y)$$

Esto es cierto, pues de lo contrario, p no sería óptimo. Ahora, como y está antes que u en p, y los costos son no negativos

$$d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$$

Pero u fue extraído antes que y de Q, por lo que su costo cumple

$$d[u] \leq d[y]$$

De estas dos inecuaciones se deduce que $d[u] = \delta(s, u)$ (contradicción). $\square$

Complejidad de Dijkstra

En el peor caso, el algoritmo realiza

- $\mathcal{O}(V)$ operaciones `Extract`
- $\mathcal{O}(|E|)$ operaciones $d[v] \leftarrow d[u] + cost(u, v)$ (que actualizan la cola)

Si la cola se implementa como heap binario,

- La operación `Extract` es $\mathcal{O}(\log(V))$
- La actualización de costos (prioridad) en el heap es $\mathcal{O}(\log(V))$

El algoritmo de Dijkstra toma tiempo $\mathcal{O}((V + E)\log(V))$

Algunas variantes

Podemos adaptar el algoritmo para resolver otros problemas comunes

- Rutas más cortas en grafos acíclicos
- Rutas más cortas de un vértice a otro (específico)
- Rutas más cortas entre **todos** los pares de vértices
- Rutas más cortas en grafos Euclideanos

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido BFS de un grafo
- ☐ Extender BFS para definir el algoritmo de rutas más cortas
- ☐ Demostrar que Dijsktra es un algoritmo correcto
- ☐ Determinar la complejidad de Dijkstra