Backtracking II

Clase 16

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

Sumario

Problema de las 8 reinas

A continuación, un algoritmo para determinar si una asignación parcial de las 8 reinas puede dar lugar a una solución válida

input : Arreglo $T[0 \dots 7]$,
índice $0 \leq i \leq 8$
output: true ssi hay solución

`Queens`(T, i)**:**
    if $i = 8$ **: return true**
    for $v = 0 \dots 7$ **:**
        if `Check`(T, i, v) **:**
            $T[i] \leftarrow v$
            if `Queens`$(T, i+1)$ **:**
                return true
    return false

input : Arreglo $T[0 \dots 7]$,
índices $0 \leq i, j \leq 7$
output: false ssi es ilegal

`Check`(T, i, v)**:**
    for $j = 0 \dots i-1$ **:**
        if $v = T[i]$ **:**
            return false
        if $|(v - T[j])/(i-j)| = 1$ **:**
            return false
    return true

¿Cómo podemos modificar el algoritmo para obtener una solución?

Complejidad

El análisis de complejidad del *backtracking* involucra el conteo de tuplas posibles

- En un conjunto de n variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- con valores posibles en dominios $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
- tenemos $|D_1| \times |D_2| \times \cdots \times |D_n|$ tuplas posibles

Luego, en el caso particular de que $|D_i| = K$ para todo i,

- revisar todas las tuplas es $\mathcal{O}(K^n)$

Complejidad

La complejidad de las posibles soluciones para CSP cumplen,

- la estrategia de fuerza bruta revisa **todas las tuplas** $\mathcal{O}(K^n)$
- el backtracking puede revisar menos tuplas, pero sigue siendo proporcional $\mathcal{O}(K^n)$

Es decir, asintóticamente estas estrategias tienen la misma complejidad

¿Cuál es más rápido en la práctica?

No olvidar: *Backtracking* es igual o más rápido que la fuerza bruta

Otra interpretación del backtracking

Podemos pensar en la estrategia de backtracking como **búsqueda en un grafo implícito**

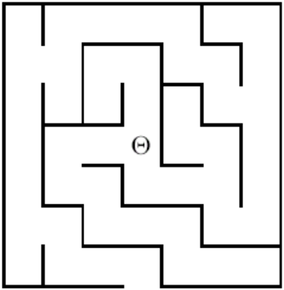
Los CSP generan muchas tuplas posibles como asignaciones para las variables de X

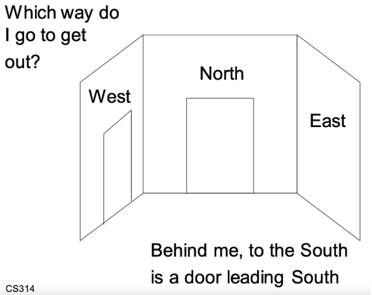
- Cada posible asignación genera un camino
- Las nuevas asignaciones abren nuevos caminos
- A la colección de todas estas alternativas le llamamos **grafo implícito**

El ejemplo por excelencia para visualizar el grafo implícito
es el **problema de recorrer un laberinto**

Recorrido del laberinto

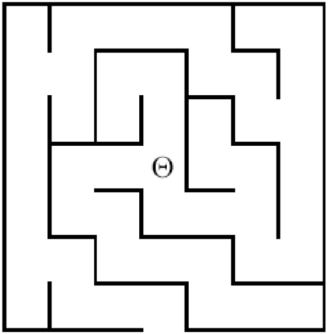
Supongamos que nos interesa salir de un laberinto dado que estamos en Θ





Podemos resolver este problema con *backtracking*

Recorrido del laberinto



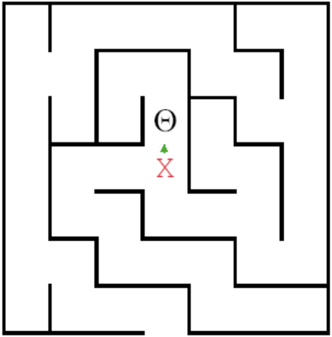
Planteamos el problema como un CSP

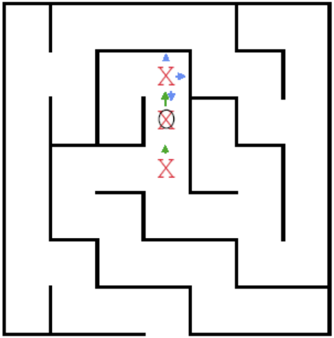
- Variables?
- Dominios?
- Restricciones?
- Qué define el *éxito*?

Caracterizamos por Θ la posición actual

Recorrido del laberinto

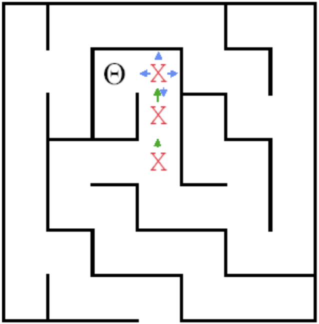
En cada nueva posición Θ solo podemos elegir dar un paso en las direcciones libres y distintas de aquella de la cual venimos

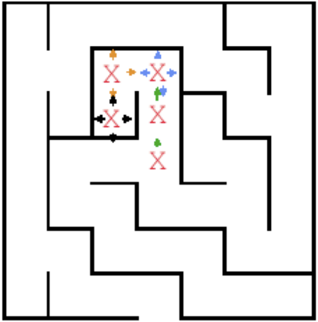




Recorrido del laberinto

Debemos hacer backtrack cuando llegamos a un camino sin salida: solo muros y celdas ya visitadas

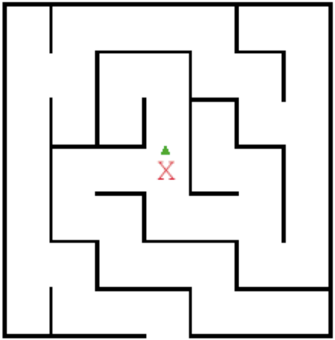


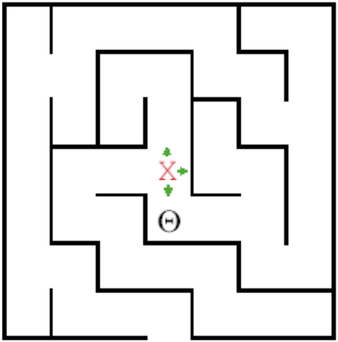


No hay más opciones: ¿hasta dónde nos *arrepentimos* con el backtrack?

Recorrido del laberinto

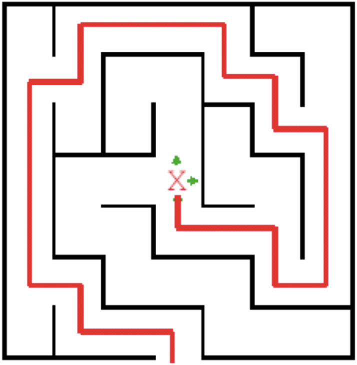
Sabemos que ir al norte no funcionó. Probamos otra opción yendo al sur.





Recorrido del laberinto

En este caso, logramos llegar a una solución que encuentra la salida



Recorrido del laberinto

Le agregamos etiquetas a las posiciones, de modo que sabemos cuáles hemos visitado (visited). Todas comienzan como nonvisited y la salida se marca como exit

input : Conjunto de variables sin asignar X, posición x, dominios D, restricciones R

`isSolvable`(X, x, D, R):

- **if** $x = \textit{exit}$ **: return true**
- **if** $x = \textit{visited}$ **: return false**
- $x \leftarrow \textit{visited}$
- **for** $v \in \{N, E, S, W\}$ **:**
  - **if** $x + v \neq \textit{wall}$ **:**
    - $x \leftarrow x + v$
    - **if** `isSolvable`(X, x, D, R) **:**
      - **return true**
- $x \leftarrow \textit{nonvisited}$
- **return false**

Otros problemas habituales

Hay varios problemas clásicos que se resuelven mediante backtracking

- Recorrido del caballo de ajedrez (*Knight's tour problem*)
- Problema de la mochila (capacidad versus número de items)
- Balance de carga
- Coloreo de mapas (Sudoku es un caso particular)

En general, puzzles NP-completos podemos atacarlos
con alguna idea de backtracking

Objetivos de la clase

- ☐ Identificar pseudocódigo base para backtracking y sus partes
- ☐ Aplicar las ideas de backtracking para resolver algunos problemas
- ☐ Identificar mejoras de desempeño para backtracking

Sumario

Ejemplo: Backtracking

Ejercicio (I2 P4 - 2022-2)

Para asegurar la conectividad del trasporte en el extremo sur del país existen tramos en los cuales se utilizan barcazas para llevar vehículos (autos particulares y camiones) entre dos puntos que no tienen conectividad por tierra. La capacidad de la barcaza se define en función de los metros lineales de vehículos que puede acomodar (4 filas de vehículos de máximo 15 metros cada fila son 60 metros lineales de capacidad máxima) y el peso máximo total que puede transportar (por ejemplo 240.000 kilos de carga). Así una barcaza B se define como

$$(\texttt{B.n\_filas},\ \texttt{B.m\_por\_fila},\ \texttt{B.max\_carga}).$$

Los vehículos V que están a la espera de transporte están en una fila y tienen determinado su largo y peso (`V.largo`, `V.peso`) expresados en metros y kilogramos.

Ejemplo: Backtracking

Ejercicio (I2 P4 - 2022-2)

(a) [1 pto.] Identifique las Variables, Dominios y Restricciones del problema.

Denotaremos por w_i y ℓ_i el peso y largo del auto i-ésimo.

- Variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, una para cada auto indicando si se sube o no a la barcaza
- Dominios idénticos para cada variable: $\{0, 1\}$, donde 1 indica que sí se sube
- Restricciones
  - Peso máximo: $W = \texttt{B.max\_carga}$ tal que
    $$\sum_{i=1}^{n} x_i \, w_i \leq W$$
  - Largo máximo: $L = (\texttt{B.n\_filas}) \cdot (\texttt{B.m\_por\_fila})$ tal que
    $$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \ell_i \leq L$$

Ejemplo: Backtracking

Ejercicio (I2 P4 - 2022-2)

(b) [3 ptos.] Diseñe un algoritmo para definir qué vehículos de la fila transportar de modo de maximizar la cantidad de vehículos sin superar la capacidad de la barcaza (en metros lineales totales y la carga máxima de la misma). **No considere** la capacidad de cada fila de la barcaza, sino la **capacidad total**.

Ejemplo: Backtracking

Ejercicio (I2 P4 - 2022-2)

Supondremos que

- $X[0 \ldots n-1]$ es el arreglo para guardar los valores binarios
- $Y[0 \ldots n-1]$ es el arreglo para guardar la asignación óptimo, inicializado con ceros
- $\#(X)$ entrega el número de autos asignados en X
- $\ell(i)$ entrega el largo del auto i
- $w(i)$ entrega el peso del auto i

Ejemplo: Backtracking

Ejercicio (I2 P4 - 2022-2)

input : $X[0 \ldots n-1]$ arreglo, L largo permitido,
W peso permitido, i índice a asignar en X

```
Backtrack (X, L, W, i):
    if i = n :
        if #(X) > #(Y) :
            Y ← copia de X
    else:
        for j ∈ {0, 1} :
            if asignar X[i] ← j no supera restricciones :
                X[i] ← j
                Backtrack(X, L − j · ℓ(i), W − j · w(i), i + 1)
```

El algoritmo se llama con `Backtrack`$(X, L, W, 0)$ y una vez que termina, Y contiene la asignación óptima.

Sumario

Primera extensión de Backtracking

Consideremos ahora el problema de determinar **todas** las soluciones a un CSP

- Nos interesan las soluciones explícitamente
- O solo queremos contarlas

En ambos casos, necesitamos que el algoritmo **no se detenga** al encontrar la primera solución

Encontrar todas las soluciones

input : Conjunto de variables sin asignar X, dominios D, restricciones R

`isSolvable`(X, D, R):

    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

¿Cómo modificar el algoritmo genérico para encontrar **todas** las soluciones?

Encontrar todas las soluciones

input : Conjunto de variables sin asignar X, dominios D, restricciones R

`isSolvableAll`(X, D, R)**:**

    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvableAll`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                Se marca $x \leftarrow v$ como solución
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

Incluso en este escenario, Backtracking es mejor que fuerza bruta

Mejoras de desempeño de Backtracking

Ahora, nos interesa poder **informar mejor** al Backtracking

- Gracias a las características del problema, sabemos que hay caminos que ya no es necesario revisar
- El dominio para x_i quizás no es D_i completo
- Puede haber *mejores* elementos de D_i para elegir primero

Estos casos nos permiten proponer las siguientes mejoras que detallaremos

- Podas
- Propagación
- Heurísticas

Podas

Backtracking es capaz de determinar si una asignación puede terminar en solución

- Las soluciones inviables se **descartan** según las restricciones R del CSP
- Requiere llamados recursivos
- Posiblemente, **muchos** llamados

¿Podemos hacerlo mejor?

Agregaremos nuevas restricciones que se deducen de las iniciales

Podas

Llamaremos **podas** a estas nuevas restricciones y se revisan junto a las originales

`isSolvable`(X, D, R):

    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

Podas

Llamaremos **podas** a estas nuevas restricciones y se revisan junto a las originales

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅
    return false
```

Pueden ser más costosas de checkear,
pero vale la pena en la práctica

Dominios

Consideremos el siguiente tablero de Sudoku parcialmente completado

								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Dominios

Si asignamos el valor 1 a la posición $(0, 0)$, ¿cambió el dominio válido para alguna variable?

1								
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Propagación

Backtracking chequea todos los valores posibles en el dominio D_i de la variable x_i

- Existen restricciones que invalidan ciertos valores de D_i
- Backtracking clásico los revisa igual
- Esas soluciones parciales nunca serán válidas

¿Podemos hacerlo mejor?

Cambiaremos los dominios de las demás variables luego de una asignación

Propagación

Llamaremos **propagación** a la acción de modificar dominios luego de una asignación

`isSolvable`(X, D, R):

    if $X = \emptyset$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \emptyset$
    return false

Propagación

Llamaremos **propagación** a la acción de modificar dominios luego de una asignación

`isSolvable`(X, D, R)**:**

    if $X = \emptyset$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$, propagar
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \emptyset$, propagar
    return false

Ojo al deshacer asignaciones,
pues hay que reestablecer dominios propagados

Orden

Consideremos el siguiente tablero de Sudoku parcialmente completado: ¿por qué celda partimos llenando?

								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Nos interesa minimizar la posibilidad de fracasar

Orden

¿Será mejor la $(0, 8)$?

1								
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Orden

¿Ahora cuál sería razonable escoger?

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Orden

¿Ahora cuál sería razonable escoger?

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
								6
					9			5

Heurísticas

Backtracking chequea los valores válidos en el dominio D_i de la variable x_i en un orden arbitrario

- No solo puede afectar el orden en que se asignan valores
- También puede afectar el orden en que se itera sobre las variables disponibles

De hecho, si dispusiéramos de un **oráculo** que nos dice el mejor orden de asignación, el problema se vuelve **lineal**!

Guiaremos la búsqueda según algunos criterios (falibles)

Heurísticas

Llamaremos **heurísticas** a las estrategias para catalogar variables y valores según *qué tan buenos son*

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅
    return false
```

Heurísticas

Llamaremos **heurísticas** a las estrategias para catalogar variables y valores según *qué tan buenos son*

`isSolvable`(X, D, R)**:**

    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ la mejor variable de X
    for $v \in D_x$ *de mejor a peor* **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

Las heurísticas tratan de aproximar la realidad, pueden equivocarse

Heurísticas

Posible heurística: partir por la variable con dominio más pequeño

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
								16
					9			5

Heurísticas

Posible heurística: partir por el valor con menos apariciones

4				2				
8							1	
7			4					
3 2 5								
3 2					5			
3 5		8						2
1						3		
9			5					
6								

Backtracking mejorado

Podemos incorporar estas mejoras según convenga en un problema particular

`isSolvable`(X, D, R):

    if $X = \varnothing$ **: return true**

    $x \leftarrow$ la mejor variable de X

    for $v \in D_x$ *de mejor a peor* **:**

        if $x = v$ *no rompe* R **:**

            $x \leftarrow v$, propagar

            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**

                return true

            $x \leftarrow \varnothing$, propagar

    return false

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Identificar pseudocódigo base para backtracking y sus partes
- ☐ Aplicar las ideas de backtracking para resolver algunos problemas
- ☐ Identificar mejoras de desempeño para backtracking