# Árboles B+

Clase 12

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves $k''$ del hijo derecho son $k < k''$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves $k''$ del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
    - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
    - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
    - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$
    - las llaves $k''$ del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
    - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k_1$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves $k''$ del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k_1$
  - las llaves $k''$ del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$

# Árboles de búsqueda 2-3

## Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave $k$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves $k''$ del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
  - las llaves $k'$ del hijo izquierdo son $k' < k_1$
  - las llaves $k''$ del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$
  - las llaves $k'''$ del hijo derecho son $k_2 < k'''$

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

- Cada nodo tiene a lo más $M$ hijos

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

- Cada nodo tiene a lo más $M$ hijos
- Si está lleno con $n$ nodos, balanceado y con altura $h$

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

- Cada nodo tiene a lo más $M$ hijos
- Si está lleno con $n$ nodos, balanceado y con altura $h$

$$h \in \mathcal{O}(\log_M(n))$$

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

- Cada nodo tiene a lo más $M$ hijos
- Si está lleno con $n$ nodos, balanceado y con altura $h$

$$h \in \mathcal{O}(\log_M(n))$$

- Es decir, mientras mayor ramificación, menor altura (para $n$ fijo)

# Árboles $M$-arios

Si consideramos un árbol $M$-ario

- Cada nodo tiene a lo más $M$ hijos
- Si está lleno con $n$ nodos, balanceado y con altura $h$

$$h \in \mathcal{O}(\log_M(n))$$

- Es decir, mientras mayor ramificación, menor altura (para $n$ fijo)

Hoy veremos una versión más general de los árboles 2-3

# Objetivos de la clase

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender la estructura de árbol B+

# Objetivos de la clase

- Comprender la estructura de árbol B+
- Conocer sus operaciones de inserción y eliminación

# Objetivos de la clase

- Comprender la estructura de árbol B+
- Conocer sus operaciones de inserción y eliminación
- Comprender su uso en el contexto de índices

# Sumario

# Árboles B+

Definición

Un **árbol B+ de orden** $d$ es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

# Árboles B+

### Definición

Un **árbol B+ de orden** $d$ es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves

# Árboles B+

## Definición

Un **árbol B+ de orden** $d$ es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos

# Árboles B+

### Definición

Un **árbol B+ de orden $d$** es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos
3. Los nodos internos tienen entre $d$ y $2d$ hijos

# Árboles B+

## Definición

Un **árbol B+ de orden** $d$ es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos
3. Los nodos internos tienen entre $d$ y $2d$ hijos
4. Las hojas están a la misma altura y guardan a lo más $2d$ pares (llave,valor) **ordenados por llave**

# Árboles B+

### Definición

Un **árbol B+ de orden $d$** es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos
3. Los nodos internos tienen entre $d$ y $2d$ hijos
4. Las hojas están a la misma altura y guardan a lo más $2d$ pares (llave,valor) **ordenados por llave**
5. Las hojas están conectadas formando una lista doblemente ligada

# Árboles B+

### Definición

Un **árbol B+ de orden $d$** es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos
3. Los nodos internos tienen entre $d$ y $2d$ hijos
4. Las hojas están a la misma altura y guardan a lo más $2d$ pares (llave,valor) **ordenados por llave**
5. Las hojas están conectadas formando una lista doblemente ligada

¿Qué diferencias tiene este enfoque con los árboles 2-3?

# Árboles B+

Algunas observaciones . . .

# Árboles B+

Algunas observaciones ...

- Siempre esta **balanceado**.

# Árboles B+

Algunas observaciones . . .

- Siempre esta **balanceado**.
- Mantiene la eficiencia de búsqueda: $\mathcal{O}\big(\log_{2d}(\#\mathit{datos})\big)$ .

# Árboles B+

Algunas observaciones ...

- Siempre esta **balanceado**.
- Mantiene la eficiencia de búsqueda: $\mathcal{O}\big(\log_{2d}(\#datos)\big)$ .
- Procedimientos eficientes de insertar/eliminar elementos.

# Árboles B+

Algunas observaciones ...

- Siempre esta **balanceado**.
- Mantiene la eficiencia de búsqueda: $\mathcal{O}\big(\log_{2d}(\#\mathit{datos})\big)$ .
- Procedimientos eficientes de insertar/eliminar elementos.
- Todos los nodos tienen un uso mínimo del 50% (menos el root).

# Árboles B+

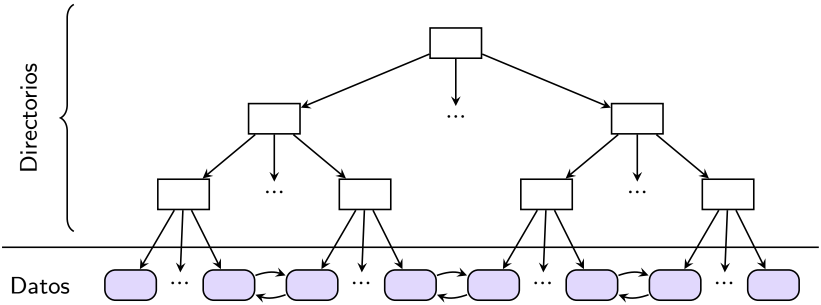
Algunas observaciones ...

- Siempre esta **balanceado**.
- Mantiene la eficiencia de búsqueda: $\mathcal{O}\big(\log_{2d}(\#datos)\big)$.
- Procedimientos eficientes de insertar/eliminar elementos.
- Todos los nodos tienen un uso mínimo del 50% (menos el root).

*"B+-trees are by far the most important access path structure in databases and file systems", Gray y Reuter (1993).*

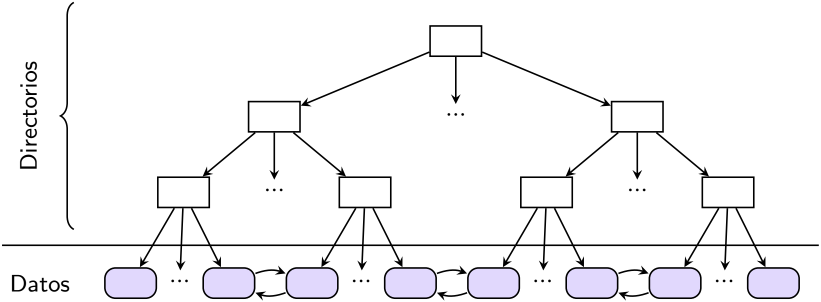
# Estructura de B+-trees

Distinguimos entre nodos que solo permiten navegar (directorios) y aquellos que contienen los pares (datos)



# Estructura de B+-trees

Distinguimos entre nodos que solo permiten navegar (directorios) y aquellos que contienen los pares (datos)




¿Para qué sirve tener una lista doblemente ligada?

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

## Definición

Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

### Definición

Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos
para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

### Ejemplos

- Índice de un libro.

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

### Definición

Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos
para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

### Ejemplos

- Índice de un libro.
- Orden alfabético en un diccionario.

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

### Definición

Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos
para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

### Ejemplos

- Índice de un libro.
- Orden alfabético en un diccionario.
- Número de páginas de un libro.

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

### Definición

Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

### Ejemplos

- Índice de un libro.
- Orden alfabético en un diccionario.
- Número de páginas de un libro.
- Secciones de un diario.

# Paréntesis: ¿qué es un índice?

### Definición

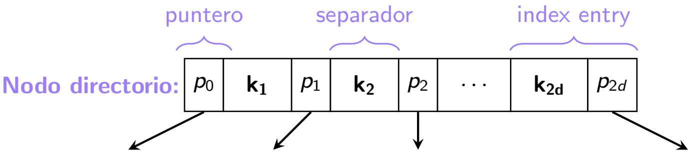
Método de acceso que **optimiza** el acceso a los datos para **una consulta o conjunto de consultas** en particular.

### Ejemplos

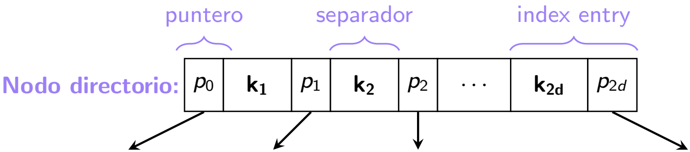
- Índice de un libro.
- Orden alfabético en un diccionario.
- Número de páginas de un libro.
- Secciones de un diario.

¡Los B+ se usan para almacenar índices en Bases de Datos!

# Estructura de B+-trees



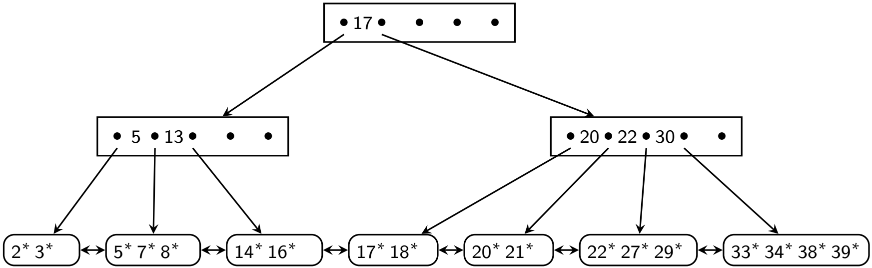
# Estructura de B+-trees



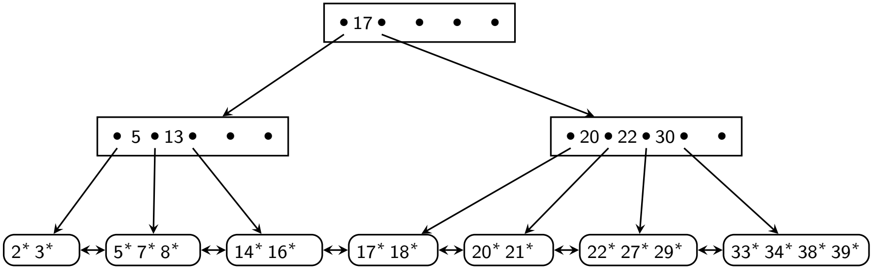

- El mínimo y máximo número de llaves y punteros (n) viene dado por el **orden (d)** del $B$+-tree:

$$d \leq n \leq 2d \quad \text{para los intermedios}$$
$$1 \leq n \leq 2d \quad \text{para la raíz}$$

# Ejemplo de un $B+$-tree de orden 2



# Ejemplo de un $B+$-tree de orden 2




La lista ligada permite moverse **desde** un punto de interés

# Búsqueda y range queries en B+-trees

# Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT   *
FROM     R
WHERE    A BETWEEN x AND y
```

# Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT  *
FROM    R
WHERE   A BETWEEN x AND y
```

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`(x,raíz).

# Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT  *
FROM    R
WHERE   A BETWEEN x AND y
```

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`(x,raíz).
2. Realizar una búsqueda del mayor elemento $k^*$ en $P$ con $k^* \leq x$.

# Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT  *
FROM    R
WHERE   A BETWEEN x AND y
```

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`(x,raíz).
2. Realizar una búsqueda del mayor elemento $k^*$ en $P$ con $k^* \leq x$.
3. Hacer scan desde $k^*$ sobre todos los valores menores o iguales a $y$.

# Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT   *
FROM     R
WHERE    A BETWEEN x AND y
```

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`(x,raíz).
2. Realizar una búsqueda del mayor elemento $k^*$ en $P$ con $k^* \leq x$.
3. Hacer scan desde $k^*$ sobre todos los valores menores o iguales a $y$.

¿Cómo cambia el desempeño de esta operación si $x$ no está almacenado?

# Sumario

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Recordar: un B+-trees siempre debe estar balanceado.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Recordar: un B+-trees siempre debe estar balanceado.

Para **insertar** un valor $k$:

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`($k$, raíz).

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Recordar: un B+-trees siempre debe estar balanceado.

Para **insertar** un valor $k$:

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`($k$, raíz).
2. Si la cantidad de llaves de $P$ es menor a $2d$ , insertar $k$ en $P$.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Recordar: un B+-trees siempre debe estar balanceado.

Para **insertar** un valor $k$:

1. Llamar $P = \texttt{busquedaEnArbol}(k, \text{raíz})$.
2. Si la cantidad de llaves de $P$ es menor a $2d$ , insertar $k$ en $P$.
3. En otro caso: debemos insertar $k$ en $P$ y hacer **split** de $[P + k]$!

   donde $[P + k] = k_1^* \, k_2^* \ldots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para hacer **split** del nodo $[P + k]$ de tamaño $2d + 1$:

1. Asuma: $[P + k] \ = \ k_1^* \, k_2^* \ldots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$ con $k_i < k_{i+1}$.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para hacer **split** del nodo $[P + k]$ de tamaño $2d + 1$:

1. Asuma: $[P + k] \; = \; k_1^* \, k_2^* \ldots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$ con $k_i < k_{i+1}$.

2. **Divida** $[P + k]$ en dos nodos:

$$P_1 \; = \; k_1^* \; \ldots \; k_d^* \qquad \text{y} \qquad P_2 \; = \; k_{d+1}^* \; \ldots \; k_{2d+1}^*$$

   y reemplace $P$ por $P_1, P_2$ en la lista doble-ligada de los datos.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para hacer **split** del nodo $[P + k]$ de tamaño $2d + 1$:

1. Asuma: $[P + k] \ = \ k_1^* \, k_2^* \ldots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$ con $k_i < k_{i+1}$.
2. **Divida** $[P + k]$ en dos nodos:

   $$P_1 \ = \ k_1^* \ \ldots \ k_d^* \qquad \text{y} \qquad P_2 \ = \ k_{d+1}^* \ \ldots \ k_{2d+1}^*$$

   y reemplace $P$ por $P_1, P_2$ en la lista doble-ligada de los datos.
3. Seleccione el valor $k_{d+1}$ como **divisor** de $P_1$ y $P_2$.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para hacer **split** del nodo $[P + k]$ de tamaño $2d + 1$:

1. Asuma: $[P + k] \;=\; k_1^* \, k_2^* \dots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$ con $k_i < k_{i+1}$.

2. **Divida** $[P + k]$ en dos nodos:

$$P_1 \;=\; k_1^* \;\dots\; k_d^* \qquad \text{y} \qquad P_2 \;=\; k_{d+1}^* \;\dots\; k_{2d+1}^*$$

   y reemplace $P$ por $P_1, P_2$ en la lista doble-ligada de los datos.

3. Seleccione el valor $k_{d+1}$ como **divisor** de $P_1$ y $P_2$.

4. Reemplace el puntero $p$ en el nodo $P'$ que apuntaba a el nodo $P$ por $p_1 \, k_{d+1} \, p_2$ donde $p_1$ apunta a $P_1$ y $p_2$ apunta a $P_2$.

# Insertar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para hacer **split** del nodo $[P + k]$ de tamaño $2d + 1$:

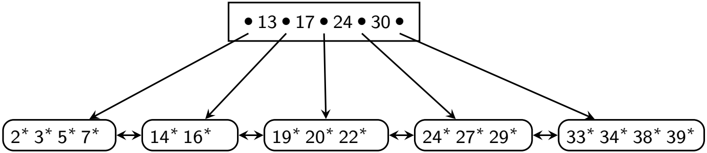
1. Asuma: $[P + k] \; = \; k_1^* \, k_2^* \ldots k_{2d}^* \, k_{2d+1}^*$ con $k_i < k_{i+1}$.
2. **Divida** $[P + k]$ en dos nodos:

   $$P_1 \; = \; k_1^* \; \ldots \; k_d^* \qquad \text{y} \qquad P_2 \; = \; k_{d+1}^* \; \ldots \; k_{2d+1}^*$$

   y reemplace $P$ por $P_1, P_2$ en la lista doble-ligada de los datos.
3. Seleccione el valor $k_{d+1}$ como **divisor** de $P_1$ y $P_2$.
4. Reemplace el puntero $p$ en el nodo $P'$ que apuntaba a el nodo $P$ por $p_1 \, k_{d+1} \, p_2$ donde $p_1$ apunta a $P_1$ y $p_2$ apunta a $P_2$.
5. Itere sobre el nodo de directorio $P'$ que apuntaba a $P$ (**split** de $P'$).

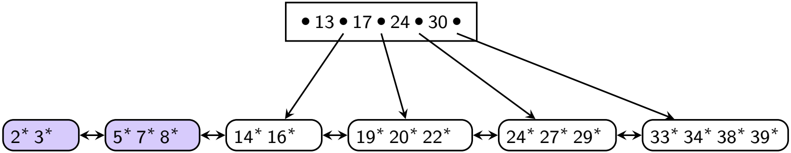
# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):



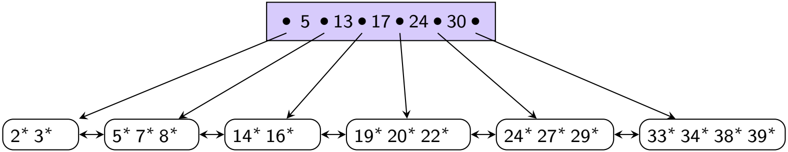
# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):



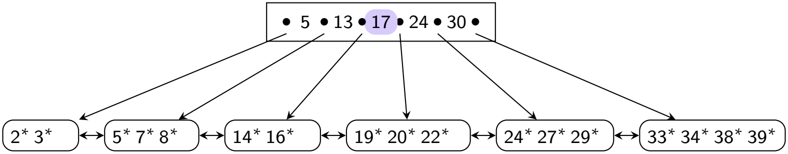
# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):



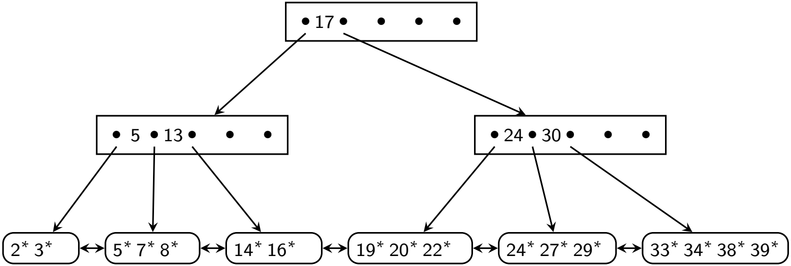
# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):



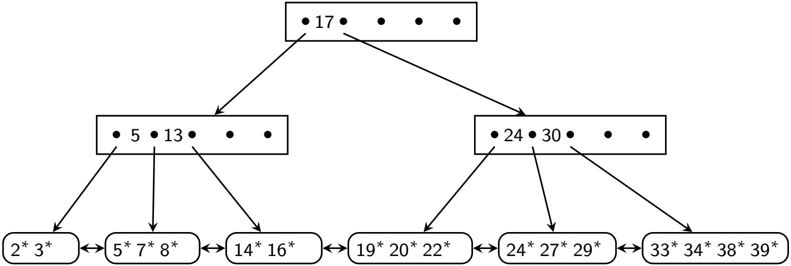
# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):



# Ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserte el elemento $8^*$ en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):




Nuestro B+tree queda "balanceado"

# Split del nodo raíz de un B+-tree

- Split de los nodos parte desde las hojas y continua hasta la raíz.

# Split del nodo raíz de un B+-tree

- Split de los nodos parte desde las hojas y continua hasta la raíz.
- Si:
  - es necesario hacer split de todos los nodos y
  - el nodo raíz esta lleno,

  entonces será necesario crear un nuevo nodo raíz.

# Split del nodo raíz de un B+-tree

- Split de los nodos parte desde las hojas y continua hasta la raíz.
- Si:
  - es necesario hacer split de todos los nodos y
  - el nodo raíz esta lleno,

  entonces será necesario crear un nuevo nodo raíz.
- El nodo raíz es el único que se le permite estar lleno al menos del 50%.

# Split del nodo raíz de un B+-tree

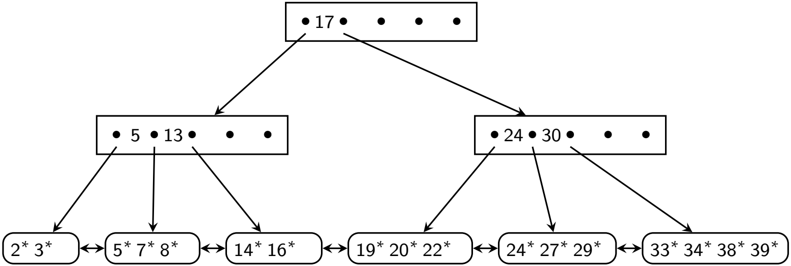
- Split de los nodos parte desde las hojas y continua hasta la raíz.
- Si:
  - es necesario hacer split de todos los nodos y
  - el nodo raíz esta lleno,

  entonces será necesario crear un nuevo nodo raíz.
- El nodo raíz es el único que se le permite estar lleno al menos del 50%.

¿qué ocurre con la altura del árbol al hacer split de la raíz?

# Otro ejemplo de como insertar un elemento en B+-trees

Inserta los elementos 23* y 40* en el siguiente B+-tree (de orden $d = 2$):

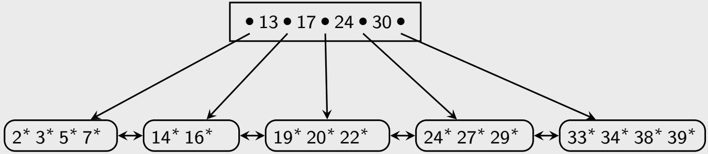


# Alternativa a split: redistribución de elementos

Es posible evitar el crecimiento del árbol
usando redistribución en los nodos vecinos.

## Ejemplo

Insertar el elemento 6* en:

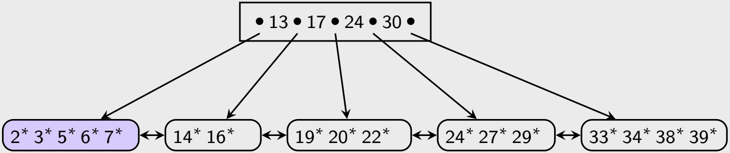


# Alternativa a split: redistribución de elementos

Es posible evitar el crecimiento del árbol
usando redistribución en los nodos vecinos.

## Ejemplo

Insertar el elemento $6^*$ en:

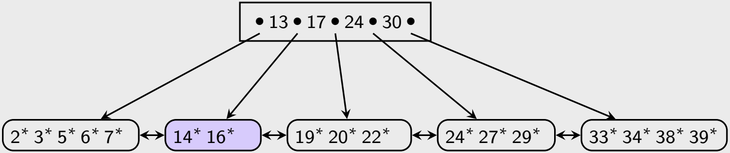


# Alternativa a split: redistribución de elementos

Es posible evitar el crecimiento del árbol
usando redistribución en los nodos vecinos.

## Ejemplo

Insertar el elemento $6^*$ en:

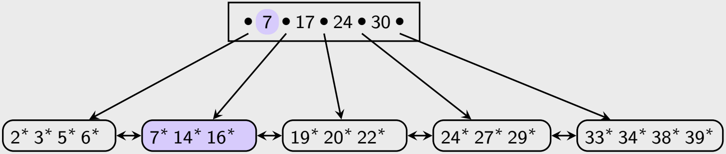


# Alternativa a split: redistribución de elementos

Es posible evitar el crecimiento del árbol
usando redistribución en los nodos vecinos.

## Ejemplo

Insertar el elemento $6^*$ en:

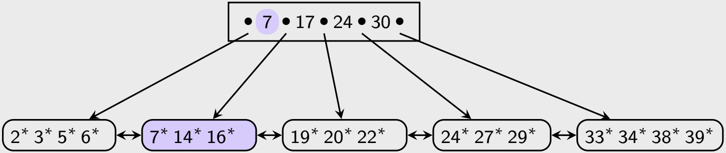


# Alternativa a split: redistribución de elementos

Es posible evitar el crecimiento del árbol
usando redistribución en los nodos vecinos.

## Ejemplo

Insertar el elemento $6^*$ en:




- Redistribución es posible también a nivel de directorio.

# Sumario

# Eliminar un elemento en B+-trees (orden $d$)

# Eliminar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para **eliminar** un valor $k$:

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`($k$, root).

# Eliminar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para **eliminar** un valor $k$:

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`($k$, root).
2. Si el espacio usado en $P$ es mayor o igual a $d + 1$ , eliminar $k$ en $P$.

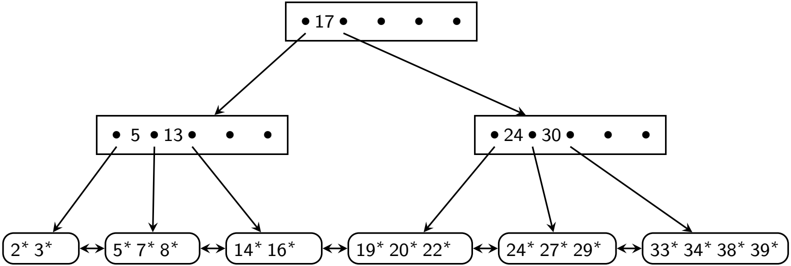
# Eliminar un elemento en B+-trees (orden $d$)

Para **eliminar** un valor $k$:

1. Llamar $P$ = `busquedaEnArbol`($k$, root).
2. Si el espacio usado en $P$ es mayor o igual a $d + 1$ , eliminar $k$ en $P$.
3. En otro caso: debemos eliminar $k$ en $P$ y **rebalancear** $[P - k]$!

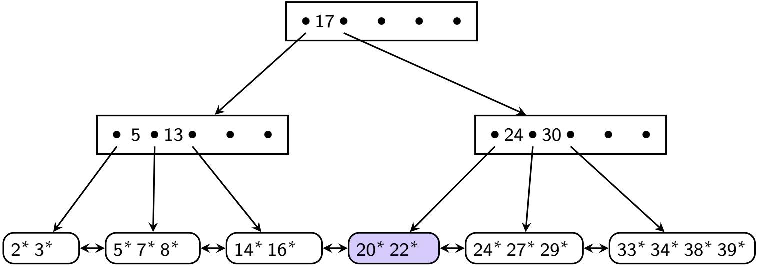
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Para eliminar el elemento $19^*$:



# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

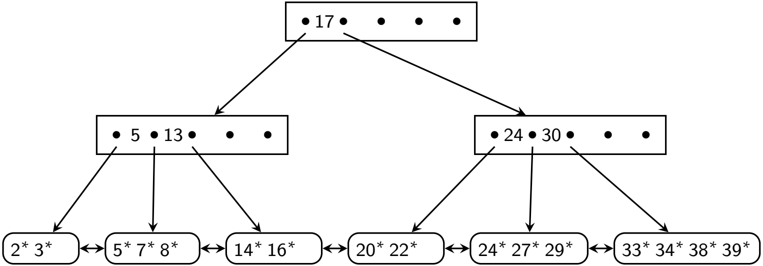
Para eliminar el elemento $19^*$:




Podemos eliminar $19*$ sin problemas (#-data entries $> 2$).

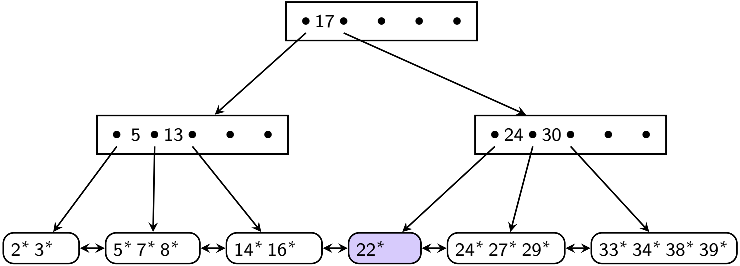
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Para eliminar el elemento 20*:



# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

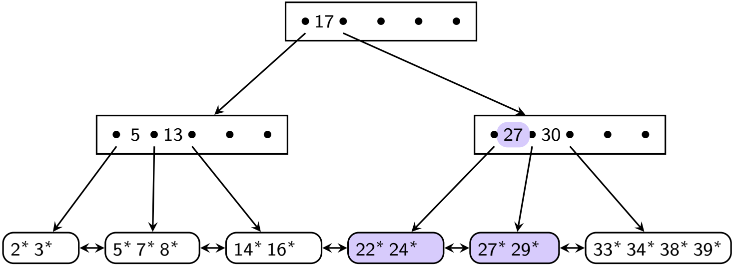
Para eliminar el elemento 20*:




Debemos hacer redistribución o “unsplit” de las nodos.

# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

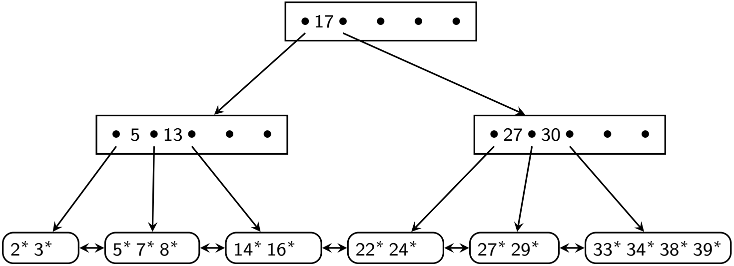
Para eliminar el elemento 20*:




Debemos hacer redistribución o "unsplit" de las nodos.

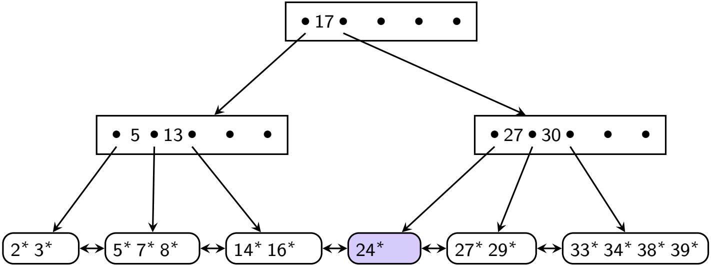
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Ahora, si deseamos eliminar el elemento 22*:



# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

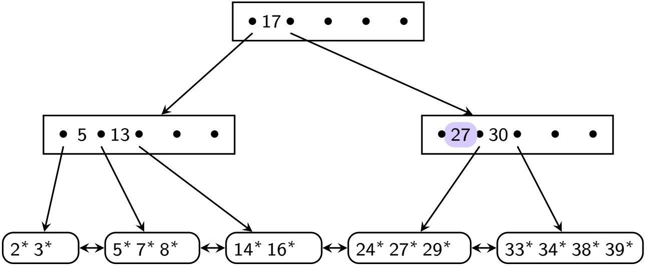
Ahora, si deseamos eliminar el elemento $22^*$:




Necesitamos hacer un "unsplit" de los nodos.

# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

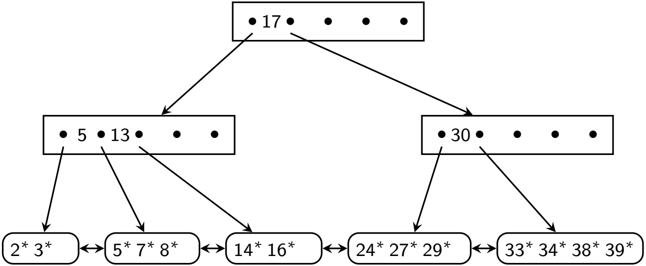
Ahora, si deseamos eliminar el elemento 22*:




Necesitamos hacer un “unsplit” de los nodos.

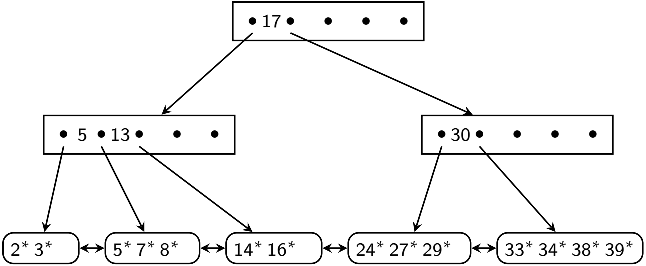
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Ahora, si deseamos eliminar el elemento $22^*$:



# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

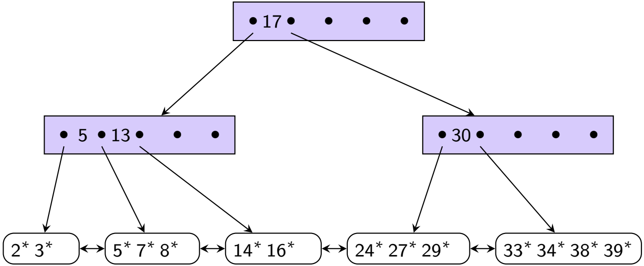
Ahora, si deseamos eliminar el elemento $22^*$:




Otro "unsplit", pero ahora del directorio.

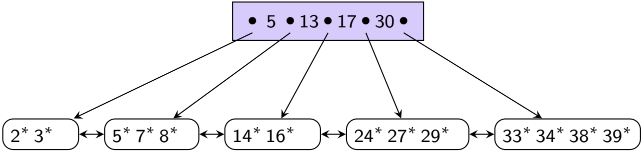
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Ahora, si deseamos eliminar el elemento 22*:



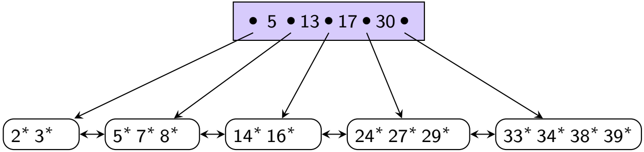
# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Ahora, si deseamos eliminar el elemento $22^*$:



# Ejemplo de como eliminar un elemento en B+-trees

Ahora, si deseamos eliminar el elemento $22^*$:

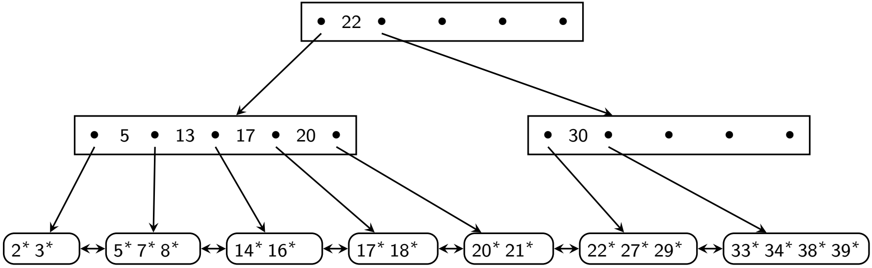



Si el root tiene un solo elemento,
esta es la única manera de decrementar la altura $H$ del árbol.

# Eliminación y redistribución de elementos

En algunos casos es necesario **redistribuir** los elementos de un directorio en una **eliminación**.

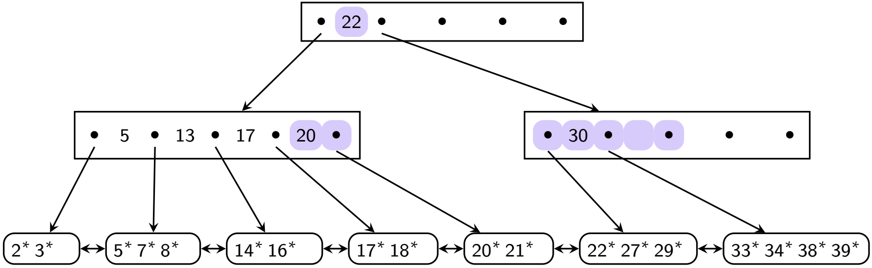
Ejemplo



# Eliminación y redistribución de elementos

En algunos casos es necesario **redistribuir** los elementos de un directorio en una **eliminación**.

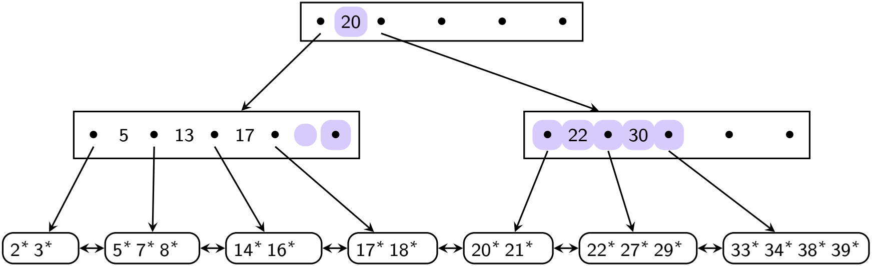
Ejemplo



# Eliminación y redistribución de elementos

En algunos casos es necesario **redistribuir**
los elementos de un directorio en una **eliminación**.

## Ejemplo



# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

Búsqueda:

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

$$\text{Búsqueda:} \quad \mathcal{O}(\log_{2d}(n))$$

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

Búsqueda: $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$

Insertar:

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

$$\text{Búsqueda:} \quad \mathcal{O}(\log_{2d}(n))$$

$$\text{Insertar:} \quad \mathcal{O}(\log_{2d}(n))$$

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

| | |
|---|---|
| Búsqueda: | $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$ |
| Insertar: | $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$ |
| Eliminar: | |

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

$$
\begin{aligned}
&\text{Búsqueda:} && \mathcal{O}(\log_{2d}(n))\\
&\text{Insertar:} && \mathcal{O}(\log_{2d}(n))\\
&\text{Eliminar:} && \mathcal{O}(\log_{2d}(n))
\end{aligned}
$$

# Eficiencia de B+-trees

Considere:

- $n$: el número de nodos.
- $2d$: cantidad (máxima) de datos en una hoja.

El costo de cada operación (en I/O):

| | |
|---|---|
| Búsqueda: | $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$ |
| Insertar: | $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$ |
| Eliminar: | $\mathcal{O}(\log_{2d}(n))$ |

**Costo depende logaritmicamente en base $d$!**

# Duplicados en B+-trees

Suposición: **NO** hay data-entries duplicados.

# Duplicados en B+-trees

Suposición: **NO** hay data-entries duplicados.

Si consideramos **duplicados**, tenemos varias opciones . . .

# Duplicados en B+-trees

Suposición: **NO** hay data-entries duplicados.

Si consideramos **duplicados**, tenemos varias opciones . . .

- usar páginas con **overflow**

# Duplicados en B+-trees

Suposición: **NO** hay data-entries duplicados.

Si consideramos **duplicados**, tenemos varias opciones ...

- usar páginas con **overflow** , o
- data entries extendidos con una llave compuesta $(k, \texttt{id})$

# Duplicados en B+-trees

Suposición: **NO** hay data-entries duplicados.

Si consideramos **duplicados**, tenemos varias opciones ...

- usar páginas con **overflow** , o
- data entries extendidos con una llave compuesta $(k, \texttt{id})$ , o
- permitir duplicados y flexibilizar los intervalos del directorio:

$$k_i \leq k < k_{i+1} \quad \Rightarrow \quad k_i \leq k \leq k_{i+1}$$

# Optimizaciones a B+-trees y otros

# Optimizaciones a B+-trees y otros

Varias posibles optimizaciones para B+-trees:

- **Compresión** de index keys (o directorio).

# Optimizaciones a B+-trees y otros

Varias posibles optimizaciones para B+-trees:

- **Compresión** de index keys (o directorio).
- **Bulk** loading.

# Sumario

# Objetivos de la clase

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender la estructura de árbol B+

# Objetivos de la clase

- Comprender la estructura de árbol B+
- Conocer sus operaciones de inserción y eliminación

# Objetivos de la clase

- Comprender la estructura de árbol B+
- Conocer sus operaciones de inserción y eliminación
- Comprender su uso en el contexto de índices