

QuickSort y sus propiedades

Clase 05

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

Sumario

Introducción

Correctitud

Complejidad

Cierre

Versión *in place* de Partition

input : Arreglo $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f

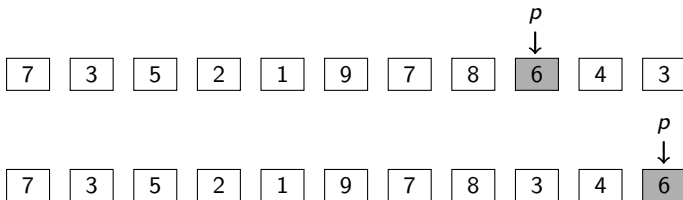
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ 
2   $p \leftarrow A[x]$ 
3   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
4   $j \leftarrow i$ 
5  for  $k = i \dots f - 1$  :
6      if  $A[k] < p$  :
7           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
8           $j \leftarrow j + 1$ 
9   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
10 return  $j$ 
```

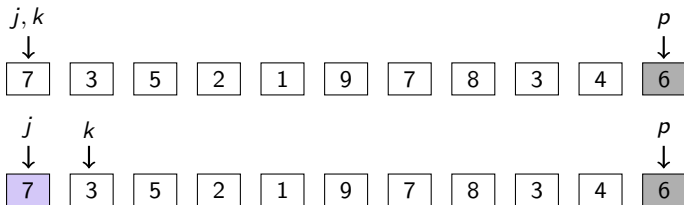
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



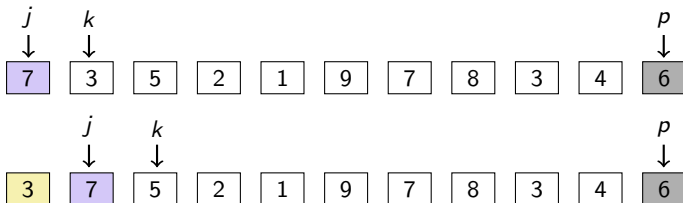
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



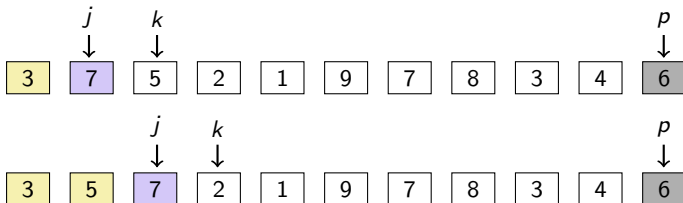
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



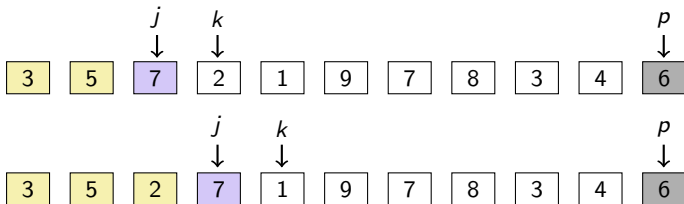
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



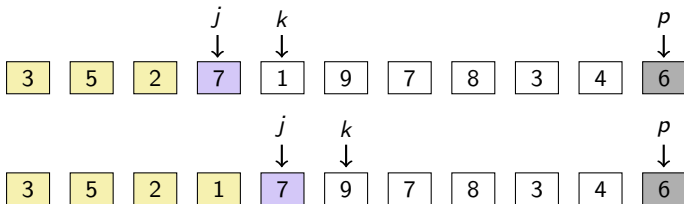
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```



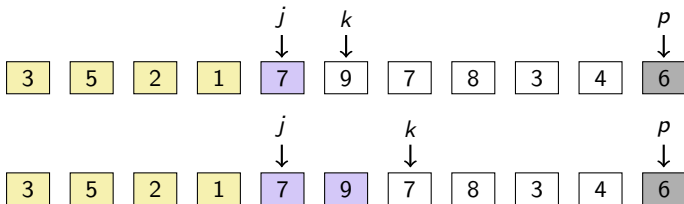
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



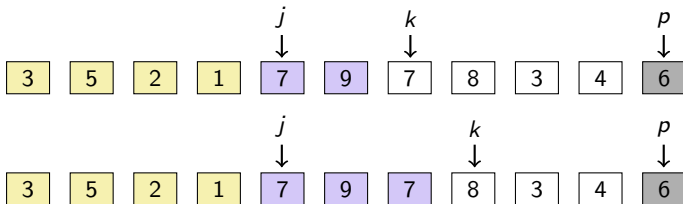
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



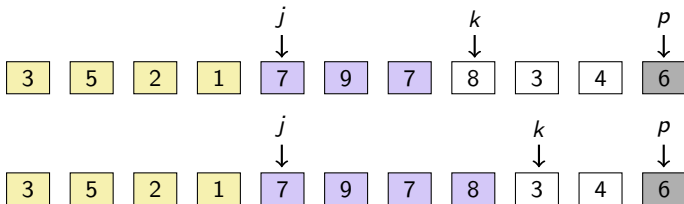
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



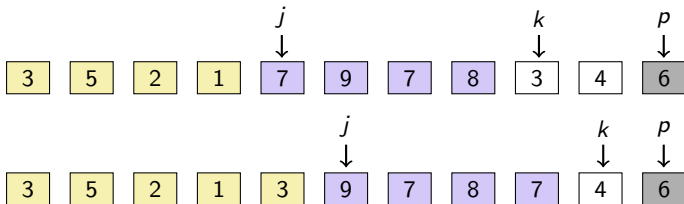
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



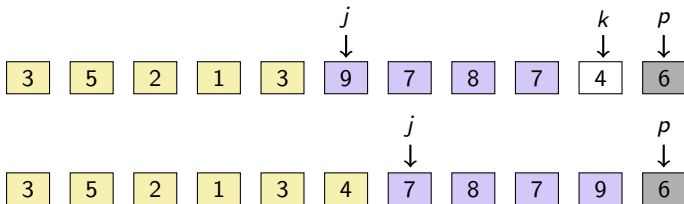
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



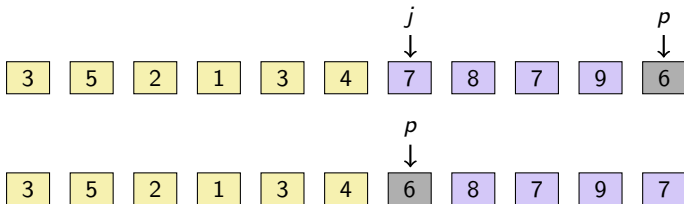
Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ ;   $p \leftarrow A[x]$ 
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
3   $j \leftarrow i$ 
4  for  $k = i \dots f - 1$  :
5      if  $A[k] < p$  :
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
7           $j \leftarrow j + 1$ 
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
9  return  $j$ 
```



Ordenar con Partition

Podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con Partition
2. Aplicar recursivamente Partition para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

Quicksort

input : Secuencia $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f

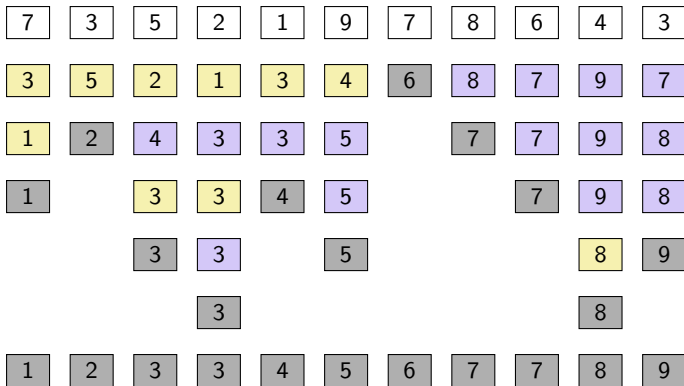
output: \emptyset

QuickSort (A, i, f):

```
1  if  $i \leq f$  :  
2       $p \leftarrow \text{Partition}(A, i, f)$   
3      Quicksort( $A, i, p-1$ )  
4      Quicksort( $A, p+1, f$ )
```

El llamado inicial es Quicksort($A, 0, n-1$)

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Objetivos de la clase

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de Quicksort

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de Quicksort
- ☐ Comprender posibles mejoras para Quicksort

Sumario

Introducción

Correctitud

Complejidad

Cierre

Correctitud de Partition

Ejercicio

Demuestre que Partition es correcto

input : Arreglo $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f

output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  $\{i, \dots, f\}$ 
2   $p \leftarrow A[x]$ 
3   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$ 
4   $j \leftarrow i$ 
5  for  $k = i \dots f - 1$  :
6      if  $A[k] < p$  :
7           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$ 
8           $j \leftarrow j + 1$ 
9   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$ 
10 return  $j$ 
```

Correctitud de Partition

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition(A, i, f)` se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition(A, i, f)` se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition(A, i, f)` se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia.

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition(A, i, f)` se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j , demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

Correctitud de Partition

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada $\text{Partition}(A, i, f)$ se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j , demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

P(n) $:=$ Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
 contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
 solo elementos mayores o iguales a p

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

1. Caso base. **P(1)**

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** **P(1)** es el estado de $A[i \dots k - 1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** **P(1)** es el estado de $A[i \dots k - 1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
 - Si $A[i] < p$,

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** **P(1)** es el estado de $A[i \dots k - 1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
 - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \dots j - 1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \dots k - 1]$ no tiene elementos pues $j = k$.

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** **P(1)** es el estado de $A[i \dots k - 1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
 - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \dots j - 1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \dots k - 1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
 - Si $A[i] \geq p$,

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

P(n) := Luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$
 contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$
 solo elementos mayores o iguales a p

1. **Caso base.** **P(1)** es el estado de $A[i \dots k - 1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
 - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \dots j - 1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \dots k - 1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
 - Si $A[i] \geq p$, no se aumenta j y sí k , por lo tanto $A[i \dots j - 1]$ considera 0 elementos y $A[j \dots k - 1]$ tiene un elemento mayor o igual a p .

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)**

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$,

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p .

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p . Además, como los datos de $A[j \dots k - 1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p . Además, como los datos de $A[j \dots k - 1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
- Si $A[k] \geq p$,

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p . Además, como los datos de $A[j \dots k - 1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
- Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \dots j - 1]$ son menores a p

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n -ésima iteración, $A[i \dots j - 1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k - 1]$ solo mayores o iguales.

Al término de la $(n + 1)$ -ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

- Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p . Además, como los datos de $A[j \dots k - 1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
- Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \dots j - 1]$ son menores a p y como $A[k]$ al igual que los elementos de $A[j \dots k - 1]$ son mayores o iguales, luego de aumentar k el rango $A[j \dots k - 1]$ sigue cumpliendo la propiedad. □

Correctitud de Quicksort

Correctitud de Quicksort

Ejercicio

Demuestre que Quicksort es correcto

input : Secuencia $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f

output: \emptyset

QuickSort (A, i, f):

```
1   if  $i \leq f$  :  
2        $p \leftarrow \text{Partition}(A, i, f)$   
3       QuickSort( $A, i, p-1$ )  
4       QuickSort( $A, p+1, f$ )
```

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de Quicksort se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de Quicksort se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\text{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de Quicksort se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\text{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de Quicksort se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\text{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$,

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que Quicksort termina, primero usamos el hecho de que Partition termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de Quicksort se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\text{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$, Quicksort termina sin hacer más llamados recursivos

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$,

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \quad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

Es decir, con cada llamado recursivo d disminuye al menos en 1.

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \quad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

Es decir, con cada llamado recursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \quad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

Es decir, con cada llamado recursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Como el llamado inicial es $\text{Quicksort}(A, 0, n - 1)$, la profundidad máxima de la recursión es $n - 1$ y por lo tanto, el algoritmo termina. □

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar.

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$,

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i + 1 > 0$ elementos,

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i + 1 > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de Partition y que Quicksort divide en sub-problemas con Partition, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que Partition ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de Quicksort.

El llamado $\text{Quicksort}(A, i, f)$ verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i + 1 > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado.

Correctitud de Quicksort

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \dots, n - 1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort(A, i, f)` verifica si hay elementos en el rango $i \dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i + 1 > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado. Como `Partition` es correcto, todo elemento queda ordenado. □

Sumario

Introducción

Correctitud

Complejidad

Cierre

Quicksort

input : Secuencia $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f

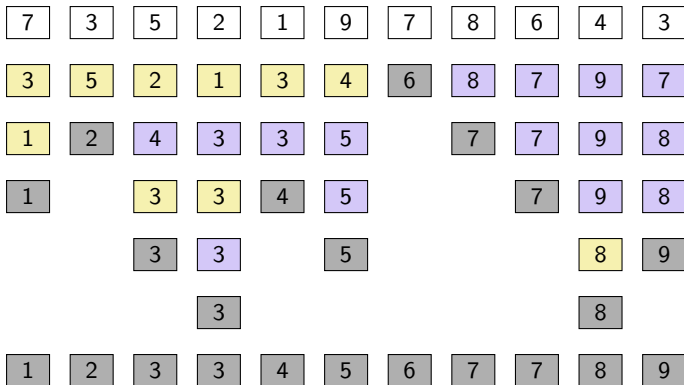
output: \emptyset

QuickSort (A, i, f):

```
1  if  $i \leq f$  :  
2       $p \leftarrow \text{Partition}(A, i, f)$   
3      QuickSort( $A, i, p-1$ )  
4      QuickSort( $A, p+1, f$ )
```

¿Cuál es la complejidad de Quicksort en los distintos casos?

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Complejidad de tiempo de Quicksort

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- Partition genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- Partition genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- Partition genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$
- Complejidad resultante: $\mathcal{O}(n^2)$

Complejidad de tiempo de Quicksort

Tal como con Median, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- Partition genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en MergeSort)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- Partition genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$
- Complejidad resultante: $\mathcal{O}(n^2)$

¿Qué hay del caso promedio?

Caso promedio de Quicksort

Caso promedio de Quicksort

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

Caso promedio de Quicksort

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

Caso promedio de Quicksort

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de Partition, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Caso promedio de Quicksort

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

```
Partition ( $A, i, f$ ):  
1    $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2    $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3    $j \leftarrow i$   
4   for  $k = i \dots f - 1$  :  
5       if  $A[k] < p$  :  
6            $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7            $j \leftarrow j + 1$   
8    $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9   return  $j$ 
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de Partition, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \begin{array}{l} \# \text{ comp. } A[k] < p \\ \text{en Quicksort} \end{array}$$

Caso promedio de Quicksort

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

```
Partition ( $A, i, f$ ):  
1    $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2    $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3    $j \leftarrow i$   
4   for  $k = i \dots f - 1$  :  
5       if  $A[k] < p$  :  
6            $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7            $j \leftarrow j + 1$   
8    $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9   return  $j$ 
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de Partition, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \begin{array}{l} \# \text{ comp. } A[k] < p \\ \text{en Quicksort} \end{array}$$

Encontraremos una ecuación de recurrencia para $C(n)$

Caso promedio de Quicksort

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
    $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$

Caso promedio de Quicksort

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
    $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que Partition termina retornando q , i.e. deja al pivote en $A[q]$

Caso promedio de Quicksort

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que Partition termina retornando q , i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de Quicksort se harán sobre los

Caso promedio de Quicksort

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que Partition termina retornando q , i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de Quicksort se harán sobre los
 - q elementos a la izq

Caso promedio de Quicksort

Partition (A, i, f):

```
1   $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2   $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3   $j \leftarrow i$   
4  for  $k = i \dots f - 1$  :  
5      if  $A[k] < p$  :  
6           $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7           $j \leftarrow j + 1$   
8   $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9  return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que Partition termina retornando q , i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de Quicksort se harán sobre los
 - q elementos a la izq
 - $n - q - 1$ elementos a la der

Caso promedio de Quicksort

```
Partition ( $A, i, f$ ):  
1    $x \leftarrow$  índice aleatorio en  
     $\{i, \dots, f\}; \quad p \leftarrow A[x]$   
2    $A[x] \rightleftharpoons A[f]$   
3    $j \leftarrow i$   
4   for  $k = i \dots f - 1$  :  
5       if  $A[k] < p$  :  
6            $A[j] \rightleftharpoons A[k]$   
7            $j \leftarrow j + 1$   
8    $A[j] \rightleftharpoons A[f]$   
9   return  $j$ 
```

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que Partition termina retornando q , i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de Quicksort se harán sobre los
 - q elementos a la izq
 - $n - q - 1$ elementos a la der
- Los llamados recursivos aportan $C(q) + C(n - q - 1)$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 +$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (C(q) + C(n - q - 1))$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (C(q) + C(n - q - 1))$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) =$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (C(q) + C(n - q - 1))$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) = C(n - 1) + C(n - 2) + \dots + C(0)$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (C(q) + C(n - q - 1))$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) = C(n - 1) + C(n - 2) + \dots + C(0) = \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones cuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} (C(q) + C(n - q - 1))$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) = C(n - 1) + C(n - 2) + \dots + C(0) = \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

obtenemos la regla simplificada

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de Quicksort

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

Caso promedio de Quicksort

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0,$

Caso promedio de Quicksort

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de Quicksort

Caso promedio de Quicksort

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de Quicksort
- $C(1) = 0$,

Caso promedio de Quicksort

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de Quicksort
- $C(1) = 0$, pues Partition no itera si hay un solo elemento

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$nC(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$nC(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)$$

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$nC(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$nC(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$nC(n) = n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$\begin{aligned}nC(n) &= n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$\frac{C(n)}{n+1} = \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}$$

Caso promedio de Quicksort

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n - 1$

$$\begin{aligned}nC(n) &= n(n-1) + 2 \sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\(n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2 \sum_{q=0}^{n-2} C(q)\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &= \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \\&\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\frac{C(n)}{n+1} \leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1}\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x} dx\end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x} dx = 2 \log(n)\end{aligned}$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x} dx = 2 \log(n)\end{aligned}$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1) \log(n)$$

Caso promedio de Quicksort

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\dots \\ &\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k+1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x} dx = 2 \log(n)\end{aligned}$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1) \log(n)$$

Quicksort es $\mathcal{O}(n \log(n))$ en el caso promedio

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote
 - Dado A , escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote
 - Dado A , escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
 - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote
 - Dado A , escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
 - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote
 - Dado A , escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
 - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
 - Mejora para caso con datos repetidos

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar InsertionSort
 - A pesar de no tener una complejidad mejor
 - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
 - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
 - No olvidar que Quicksort es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
 - *Informar* la elección de pivote
 - Dado A , escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
 - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
 - Mejora para caso con datos repetidos
 - Evita que Partition particione innecesariamente sub-secuencias en que todos los valores son iguales

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Heap Sort	?	?	?	?

Sumario

Introducción

Correctitud

Complejidad

Cierre

Objetivos de la clase

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de Quicksort

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de Partition
- ☐ Demostrar correctitud de Quicksort
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de Quicksort
- ☐ Comprender posibles mejoras para Quicksort