# Algoritmos codiciosos

Clase 17

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

# Problemas en computación

Hasta este punto hemos estudiado diversos tipos de problemas

- Ordenar una secuencia
- Buscar en un diccionario
- Determinar si un CSP tiene solución
- Determinar las soluciones de un CSP, en caso que tenga
- Determinar la mejor solución de un CSP, en caso que tenga
- ...

¿Podríamos agrupar estos problemas según rasgos comunes?

# Problemas en computación

Diremos que un **problema computacional** es un problema que puede resolverse con un **algoritmo**

¿Qué tipos de problemas computacionales existen?

Distinguiremos 5 tipos

# Tipos de problemas computacionales

1. Problemas de decisión
   - Pregunta binaria (Sí o No)
   - E.g. "*Determine si el tablero de Sudoku $T$ tiene solución*"
2. Problemas de búsqueda
   - Secuencia de estados hasta alcanzar un estado objetivo
   - E.g. "*Determine un camino para salir del laberinto L desde* $\Theta$"
3. Problemas de conteo
   - Número de soluciones diferentes
   - E.g. "*Determine el número de configuraciones válidas de 8 reinas*"
4. Problemas de optimización
   - Mejor solución de acuerdo a alguna métrica
   - E.g. "*Determine el camino más corto de $A$ a $B$ en el mapa $G$*"
5. Problemas de función
   - Solución explícita
   - E.g. "*Determine una solución del Sudoku $T$*"

# Backtracking y optimización

Backtracking es una técnica de diseño muy flexible

- Podemos atacar muchos tipos de problemas con ella
- PERO, no es la mejor solución para algunos

Especialmente, Backtracking no suele ser la mejor solución a los problemas de **optimización**

¿Tenemos una mejor estrategia para optimización?

# Problema de la mochila

### Ejemplo

Considere el **problema de la mochila con objetos fraccionables**.

Tenemos $n$ objetos y una mochila

- Los objetos tienen pesos $\{w_1, \ldots, w_n\}$
- Los objetos tienen ganancias por unidad de peso $\{p_1, \ldots, p_n\}$
- La mochila tiene una capacidad $m$, en peso
- Incluir una fracción $x_k$ del objeto $k$ proporciona ganancia $p_k x_k$

# Problema de la mochila

## Ejemplo

Interesa llenar la mochila cumpliendo tres condiciones

- Queremos maximizar la ganancia total

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

  Esta es la **función objetivo.**

- No podemos exceder la capacidad de la mochila

$$\sum_{k=1}^{n} w_k x_k \leq m$$

- Las fracciones deben cumplir

$$0 \leq x_k \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n$$

# Problema de la mochila

## Ejemplo

Interesa llenar la mochila cumpliendo tres condiciones

- Maximizar función objetivo $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$
- No podemos exceder la capacidad $\sum_{k=1}^{n} w_k x_k \leq m$
- Las fracciones deben cumplir $0 \leq x_k \leq 1$ para $1 \leq k \leq n$

Una **solución factible** es $\{x_1, \ldots, x_n\}$ que cumple las dos últimas condiciones. Una **solución óptima** es una solución factible que maximiza la función objetivo.

¿Cómo escoger los valores $x_k$ adecuados
para encontrar una solución óptima? ¿Alguna idea?

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el paradigma de algoritmos codiciosos
- ☐ Demostrar que una estrategia no es correcta como estrategia codiciosa
- ☐ Aplicar la estrategia codiciosa para obtener óptimos en problemas particulares

# Sumario

# Algoritmos codiciosos

Los **algoritmos codiciosos** plantean una estrategia algorítmica basada en el paradigma de subconjuntos

1. Tenemos conjunto $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ con $n$ inputs
2. Queremos un subconjunto $S' \subseteq S$ que satisfaga restricciones
3. Queremos solución factible que maximice o minimice una **función objetivo**

Un subconjunto $S'$ que cumple las restricciones se llama **factible**. Una solución que maximiza/minimiza se llama **óptima**

Esta es una concepción teórica
Veremos su aplicación a problemas concretos

# Algoritmos codiciosos

Los **algoritmos codiciosos** trabajan en etapas

- Consideran un input a la vez
- Una vez que se decide sobre un input, la decisión **es final**
- Ninguna decisión posterior cambia la actual

En el caso del problema de la mochila

- Se trata de seleccionar un subconjunto de objetos
- Y determinar la fracción $x_k$

# Algoritmos codiciosos

Para lograr este objetivo, debemos considerar los input en cierto orden

- Se usa un **procedimiento de selección**
- Si la inclusión del próximo input en la solución óptima parcial produce solución infactible, no lo consideramos
- En otro caso, el input se agrega a la solución

¿Qué diferencia hay con backtracking?

# Algoritmos codiciosos

El procedimiento de selección se basa en una **medida de optimización** o **estrategia codiciosa**

- Seleccionamos un input de forma **localmente óptima**
- Esperamos que esa selección nos lleve a una solución globalmente óptima

¿Qué estrategias codiciosas podemos usar?

# Algoritmos codiciosos

## Ejemplo

Para el problema de la mochila, podemos considerar las siguientes estrategias codiciosas *para la etapa actual del algoritmo*

- Incluir el objeto con mayor ganancia
- Incluir el con menor peso
- Incluir el que tenga mayor cuociente ganancia/peso

Normalmente, la mayoría de las estrategias no producen soluciones óptimas

# Algoritmos codiciosos

## Ejemplo

Considere la siguiente instancia del problema de la mochila con $m = 20$ y $n = 3$

- pesos $w_1 = 18, \; w_2 = 15, \; w_3 = 10$
- ganancias $p_1 = 25, \; p_2 = 24, \; p_3 = 15$

Algunas soluciones **factibles**

| estrategia | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\sum_{k=1}^{n} w_k x_k$ | $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| mayor ganancia | 1 | 2/15 | 0 | 20 | 28.2 |
| menor peso | 0 | 2/3 | 1 | 20 | 31 |
| mayor ganancia/peso | 0 | 1 | 1/2 | 20 | 31.5 |

En este problema, el óptimo se encuentra privilegiando ganancia/peso

# Algoritmos codiciosos

Dado un problema

- Varias estrategias codiciosas pueden ser plausibles
- La mayoría produce soluciones **subóptimas**

Para garantizar que una estrategia produce soluciones óptimas es necesario **demostrarlo**

En este curso, no nos preocuparemos de ese último aspecto

# Algoritmos codiciosos

**input** : Arreglo de inputs $A[0 \ldots n-1]$, cantidad de inputs $n$

```
Greedy(A, n):
    S ← ∅
    for i = 1 ... n :
        x ← Select(A)
        if Feasible(S, x) :
            S ← Union(S, x)
    return S
```

Tal como en backtracking, esta es una idea abstracta...
Su implementación dependerá de cada problema

# Sumario

# Selección de tareas

Consideremos el problema de escoger tareas

- La tarea $i$ tiene un plazo $d_i$ (día del mes)
- Además tiene una ganancia $p_i$ que se obtiene si la tarea se hace a tiempo (antes del plazo)

Una tarea toma **un día en completarse** y solo se puede realizar **una tarea al día** y

Objetivo: maximizar la ganancia total

# Selección de tareas

Una solución factible será un subconjunto $T$ se tareas que se pueden realizar en algún orden

- El **valor** de $T$ será

$$p(T) = \sum_{k \in T} p_k$$

Una solución factible $T$ es óptima si su valor $p(T)$ es máximo

# Selección de tareas

### Ejemplo

Suponiendo que hoy es el día 0, sean las tareas $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que

- Sus plazos son $[d_1, d_2, d_3, d_4] = [2, 1, 2, 1]$
- Sus ganancias son $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [100, 10, 15, 27]$

Consideremos la estrategia: escoger la tarea que entrega más ganancia cada día

Es decir, estamos usando la función objetivo como estrategia codiciosa

# Selección de tareas

## Ejemplo

Suponiendo que hoy es el día 0, sean las tareas $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que

- Sus plazos son $[d_1, d_2, d_3, d_4] = [2, 1, 2, 1]$
- Sus ganancias son $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [100, 10, 15, 27]$

Tenemos entonces

| Solución factible $T$ | Orden de procesam. | Valor $p(T)$ |
|---|---|---|
| $\{1, 2\}$ | 2,1 | 110 |
| $\{1, 3\}$ | 1,3 o 3,1 | 115 |
| $\{1, 4\}$ | 4,1 | 127 |
| $\{2, 3\}$ | 2,3 | 25 |
| $\{3, 4\}$ | 4,3 | 42 |
| $\{1\}$ | 1 | 100 |
| $\{2\}$ | 2 | 10 |
| $\{3\}$ | 3 | 15 |
| $\{4\}$ | 4 | 27 |

# Programación de charlas

Consideremos ahora el problema de asignar charlas en una misma sala

- Tenemos $n$ charlas por asignar
- La charla $i$ tiene hora de inicio $s_i$ y de término $f_i$
- Es decir, se define el intervalo de tiempo $[s_i, f_i)$

Solo se puede realizar **una charla a la vez**

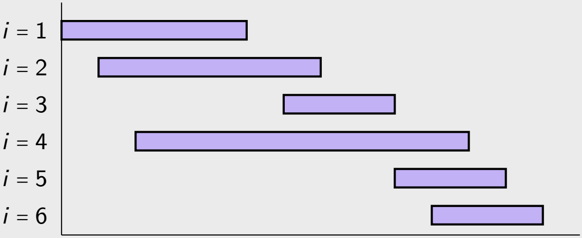
Objetivo: maximizar el número de charlas ofrecidas en la sala

# Programación de charlas

## Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos

- $i = 1,\ [0, 5)$
- $i = 2,\ [1, 7)$
- $i = 3,\ [6, 9)$
- $i = 4,\ [2, 11)$
- $i = 5,\ [9, 12)$
- $i = 6,\ [10, 13)$



# Programación de charlas

## Ejemplo

Posibles estrategias codiciosas: elegir primero la charla...

- que empieza más temprano
- más corta
- tiene menos incompatibilidades con otras charlas

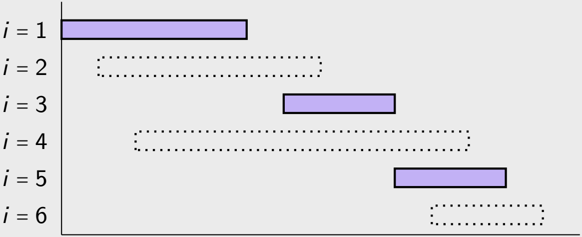
En general, ninguna de estas estrategias produce una solución óptima

# Programación de charlas

## Ejemplo

Escojamos según la charla **que termina más temprano**

- $i = 1$, $[0, 5)$
- $i = 2$, $[1, 7)$
- $i = 3$, $[6, 9)$
- $i = 4$, $[2, 11)$
- $i = 5$, $[9, 12)$
- $i = 6$, $[10, 13)$




Veamos otro ejemplo

## Ejemplo I3 2022-2

Dado un intervalo cerrado $[s, f]$ considere un conjunto de intervalos cerrados no necesariamente disjuntos $S = \{[s_i, f_i] \mid i = 1, \ldots, n\}$ tales que $s \leq s_i < f_i \leq f$ para todo $i$.

El conjunto $\Omega \subseteq S$ es un **cubrimiento** de $[s, f]$ si la unión de sus elementos contiene a $[s, f]$ y diremos que es un cubrimiento óptimo si es el cubrimiento más pequeño (en cantidad de intervalos) para el $S$ dado.

(a) Muestre un intervalo $[s, f]$ y un conjunto $S$ que sirvan como contraejemplo para la siguiente estrategia codiciosa que no es óptima: *el siguiente intervalo de $S$ que se escoge es $[s_i, f_i]$ tal que se solapa con el último intervalo escogido y $s_i$ es el menor posible.*

# Intervalos

## Ejemplo

Sea el intervalo $[s, f] = [0, 3]$ y el conjunto de intervalos

$$S = \{[0, 2], [1, 2], [2, 3]\}$$

- La estrategia propuesta escoge los siguientes intervalos en orden
  - $[0, 2]$, pues tiene el menor $s_i$ posible
  - $[1, 2]$, pues de los dos que se solapan con el escogido antes, es el que empieza primero
  - $[2, 3]$, pues es el que queda y llega al extremo del intervalo

  Es decir, $|\Omega| = 3$ con esta estrategia. Notamos que la unión de estos intervalos cubre $[0, 3]$ por completo, por lo que es un cubrimiento válido.
- Por inspección notamos que un cubrimiento más pequeño es $\Omega^* = \{[0, 2], [2, 3]\}$ que tiene $|\Omega^*| = 2$, por lo que $\Omega$ no es óptimo.

### Ejemplo

(b) Proponga el pseudocódigo de un algoritmo codicioso que efectivamente encuentre un cubrimiento óptimo para $[s, f]$ y $S$ cualesquiera. *Hint:* escoja el intervalo que se solapa con el último escogido y que tiene mayor $f_i$.

## Ejemplo

**input** **:** límite inferior $s$, límite superior $f$, conjunto de intervalos $S$

`Greedy`$(s, f, S)$**:**

$S \leftarrow S$ ordenado por $f_i$
$\Omega \leftarrow \varnothing$
$t \leftarrow s$
**while** $t < f$ **:**
    $f_i \leftarrow \max\{f_j \mid s_j \leq t \leq f_j\}$
    $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{i\}$
    $t \leftarrow f_i$
**return** $S$

# Sumario

# Programación de charlas 2.0

Consideremos el problema de asignar charlas en una misma sala

- Tenemos $n$ charlas por asignar
- La charla $i$ tiene hora de inicio $s_i$ y de término $f_i$
- Es decir, se define el intervalo de tiempo $[s_i, f_i)$

Solo se puede realizar **una charla a la vez**

**ADEMÁS:** si la charla $i$ es realizada, produce una ganancia $v_i$

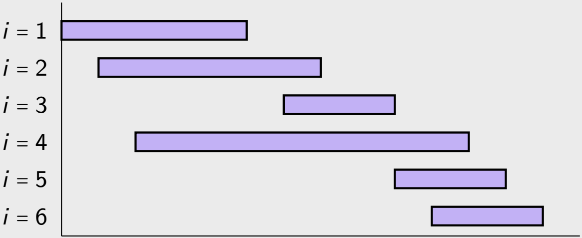
¿La estrategia codiciosa sigue siendo correcta?

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

- $i = 1,\ [0, 5),\ v_1 = 2$
- $i = 2,\ [1, 7),\ v_2 = 4$
- $i = 3,\ [6, 9),\ v_3 = 4$
- $i = 4,\ [2, 11),\ v_4 = 7$
- $i = 5,\ [9, 12),\ v_5 = 2$
- $i = 6,\ [10, 13),\ v_6 = 1$

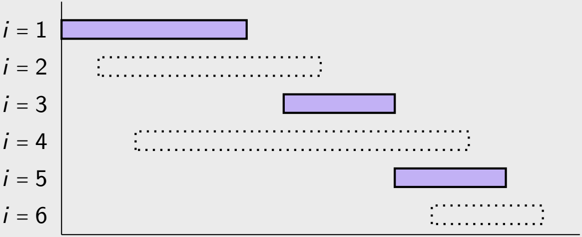


# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

El caso que sabemos resolver consideraba $v_i = c$ para cada charla

- $i = 1$, $[0, 5)$, $v_1 = c$
- $i = 2$, $[1, 7)$, $v_2 = c$
- $i = 3$, $[6, 9)$, $v_3 = c$
- $i = 4$, $[2, 11)$, $v_4 = c$
- $i = 5$, $[9, 12)$, $v_5 = c$
- $i = 6$, $[10, 13)$, $v_6 = c$



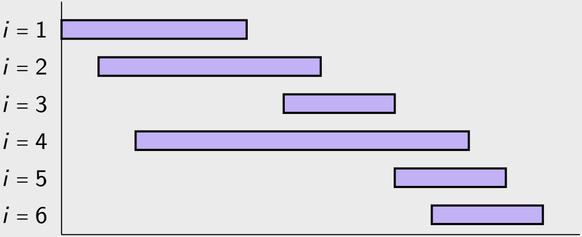

Cuando la ganancia es la misma, la estrategia codiciosa de **elegir la charla que termina antes** es óptima

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

- $i = 1$, $[0, 5)$, $v_1 = 2$
- $i = 2$, $[1, 7)$, $v_2 = 4$
- $i = 3$, $[6, 9)$, $v_3 = 4$
- $i = 4$, $[2, 11)$, $v_4 = 7$
- $i = 5$, $[9, 12)$, $v_5 = 2$
- $i = 6$, $[10, 13)$, $v_6 = 1$

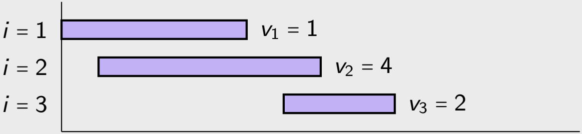



Con ganancias diferentes, el problema
no es equivalente a maximizar el número de charlas

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Podemos pensar en una instancia del problema de forma que la estrategia codiciosa mencionada **no funciona**




En este caso,

| estrategia | charlas | ganancia |
|---|---|---|
| codiciosa | $\{1, 3\}$ | 3 |
| óptima | $\{2\}$ | 4 |

Con ganancias diferentes, la estrategia codiciosa no sirve...
¿Qué hacemos?

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el paradigma de algoritmos codiciosos
- ☐ Demostrar que una estrategia no es correcta como estrategia codiciosa
- ☐ Aplicar la estrategia codiciosa para obtener óptimos en problemas particulares