Ayudantía N° 3

Merge y Partition

Repaso

Pseudocódigo

Insertion Sort

Version Inplace

Input: secuencia A, de largo n >= 2

Output: Nada

InsertionSort (A, n):

for $i = 1 \ldots n-1$:

  $j = i$

  while $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$:

    Intercambiar $A[j]$ con $A[j-1]$

    $j = j - 1$

Pseudocódigo

Merge

Version not Inplace

Input: secuencias A y B ordenadas

Output: secuencia C ordenada

Memoria adicional: O(n)
Complejidad tiempo: O(n)

```
Merge(A,B):
 1. Nueva secuencia vacia C
 2. Sea a y b los primeros elementos de A y
    B respectivamente
 3. Extraemos menor entre a y b de su
    secuencia
 4. Si A y B no vacíos volvemos a 2
 5. Concatenar a C la secuencia no vacía
return C
```

Pseudocódigo
Analogía

Merge

Version Inplace

Notamos que para la versión no in place utilizamos memoria adicional al usar una secuencia nueva para almacenar los elementos de A y B, por ende usamos O(n) en memoria adicional, es decir, $|A|+|B| = n$. Por lo cual para la versión in place lo que se hace es usar el mismo espacio reservado a A y B, osea que la memoria adicional es O(1), y luego se a de mover todos los datos mayores al insertado, lo cual claramente genera un costo en el tiempo al tener complejidad de o(n^2).

Utilicemos Merge

Pseudocódigo

Merge Sort

Version not Inplace

Input: Secuencia A

Output: Secuencia ordenada B

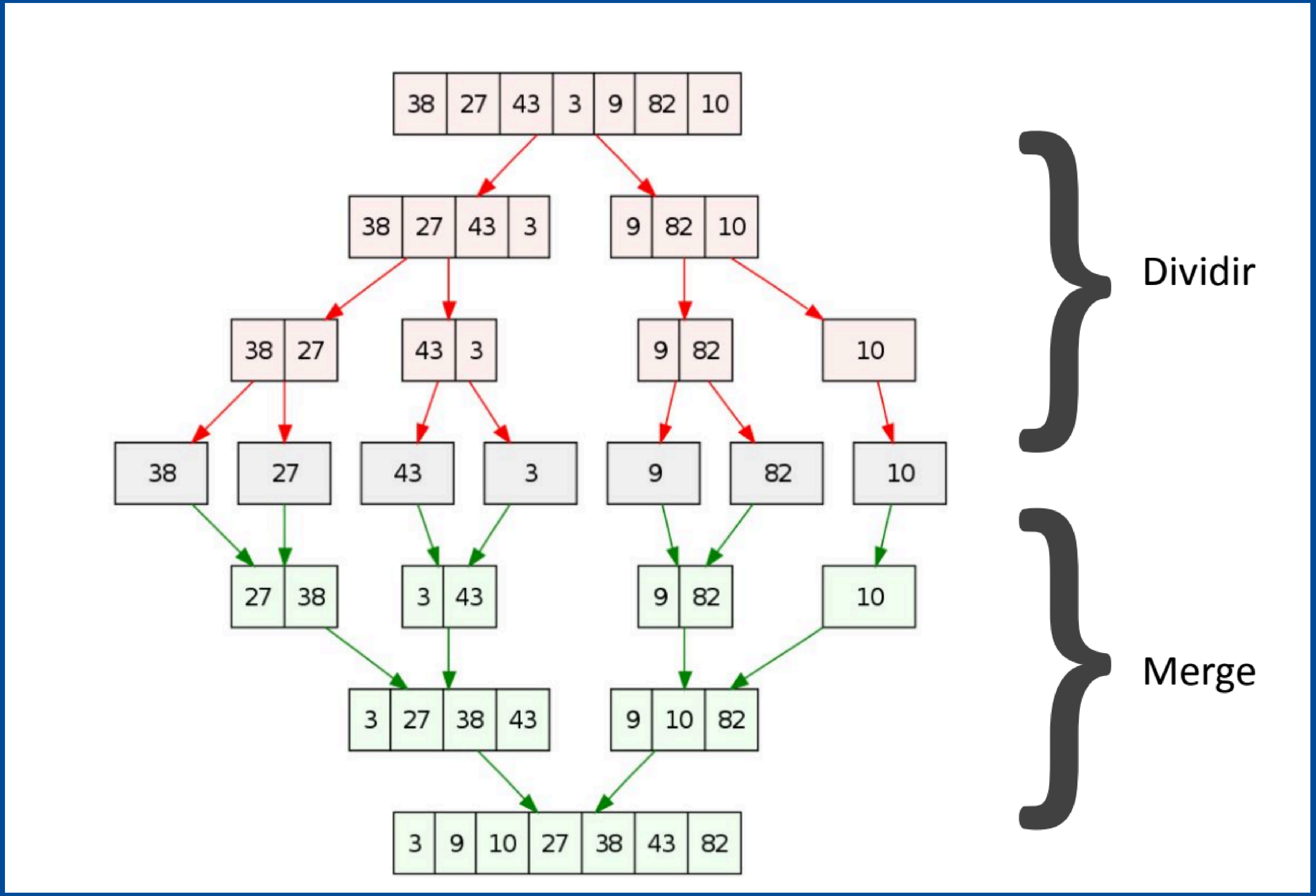
Qué estrategia algorítmica ocupa?

$\texttt{MergeSort}\ (A)$:

- **if** $|A| = 1$ **: return** A
- Dividir A en A_1 y A_2
- $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
- $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
- $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
- **return** B

Merge Sort

Debido a la recursión el orden de los pasos no es el siguiente pero la ilustración no quita precisión sobre la idea principal y resultado del algoritmo



Complejidad

Mejor, promedio, peor caso

$O(n\log(n))$

Memoria adicional

$O(n)$

Veamos la visualización !

https://visualgo.net/en/sorting

Ejercicio 1

A pesar que **MergeSort** es **O(n*log(n))**, e **InsertionSort** es **O(n^2)**, en la práctica **InsertionSort** funciona mejor para problemas pequeños.

Sea **n** la cantidad de elementos en una secuencia por ordenar, y **k** un valor a determinar con **k ≤ n** . Considera una modificación de **MergeSort** llamada **MergeInserSort** en la que **n/k** sublistas de largo **k** son ordenadas con **InsertionSort** y luego unidas usando **Merge**.

Pregunta 1 - I1-2021-1

a) Muestra que con **InsertionSort** se pueden ordenar **n/k** sublistas, cada una de largo **k**, obteniendo **n/k** sublistas ordenadas, en tiempo **O(nk)** en el peor caso.

Pregunta 1 - I1-2021-1

- Sabemos que InsertionSort toma tiempo O(n^2) en arreglos de largo n
- Luego en un arreglo de largo k, toma tiempo O(k^2)
- Como tenemos n/k sub listas, correr todos los InsertionSort nos tomaría tiempo

$$O(k^2 \frac{n}{k}) = O(nk)$$

Pregunta 1 - I1-2021-1

b) Muestra cómo se pueden mezclar las **sublistas ordenadas**, obteniendo finalmente una sola lista ordenada, en tiempo **$O(n \log(n/k))$** en el peor caso

Pregunta 1 - I1-2021-1

- Podemos juntar las sublistas de a pares, y correr el algoritmo **Merge** conocido, que corre en tiempo **O(2k)** con **k** el largo de cada lista
- Si las juntamos de a pares, vamos a tener que correr **Merge** una cantidad **n/2k** de listas, por lo que la complejidad queda en **O(n)**.
- Ahora, repetimos el proceso, que va a tener nuevamente complejidad **O(n)**
- Cuántas veces se repite el proceso? Se repite **log_2 (n/k)** veces

$$O(nlog(\frac{n}{k}))$$

Pregunta 1 - I1-2021-1

c) Dado que MergeInserSort corre en tiempo O(nk + n log(n/k)) en el peor caso, ¿cuál es el valor máximo de k, en función de n (en notación O) para el cual MergeInserSort corre en el mismo tiempo que MergeSort normal?
Hint: log(log(n)) es despreciable, relativo a log(n), para n suficientemente grande

Pregunta 1 - I1-2021-1

Vemos que si tomamos un **k** en **O(1)**, entonces cumplimos con lo pedido:

$$O(nk + nlog(n/k)) = O(nlog(n))$$

Aprovechando el Hint, podemos probar con un k en O(log(n))

$$\begin{aligned} O(nk + nlog(n/k)) &= O(nk + nlog(n) - nlog(k)) \\ &= O(nlog(n) + nlog(n) - nlog(log(n))) \\ &= O(2nlog(n) - nlog(log(n))) \\ &= O(nlog(n)) \end{aligned}$$

Pregunta 1 - I1-2021-1

Ejercicio 2

MergeSort utiliza la estrategia "dividir para conquistar" dividiendo los datos en 2 y luego resolviendo el problema recursivamente. Considera una variante de *MergeSort* que divide los datos en 3 y los ordena recursivamente, para luego combinar todo en un arreglo ordenado usando una variante de *Merge* que recibe 3 listas.

Pregunta 2

a. Escribe la recurrencia $T(n)$ del tiempo que toma este nuevo algoritmo para un arreglo de n datos. ¿Cuál es su complejidad, en notación asintótica?

Pregunta 2

a)

Sabemos que $Merge$ funciona en $O(n)$, y que *MergeSort* funciona en $O(1)$ para un solo elemento, y que para un input n, esta variable llamará recursivamente a *MergeSort* tres veces, con inputs $\lceil \frac{n}{3} \rceil$, $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ y $n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lceil \frac{n}{3} \rceil$para después unir las 3 con *Merge*. Por lo tanto, la ecuación de recurrencia quedaría:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if n} = 1 \\ T\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil\right) + T\left(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor\right) + T\left(n - \lceil \frac{n}{3} \rceil - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor\right) + n & \text{if n} > 1 \end{cases}$$

Alternativamente:

$$T(n) \leq \begin{cases} 1 & \text{if n} = 1 \\ 3 * T\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil\right) + n & \text{if n} > 1 \end{cases}$$

Pregunta 2

Pregunta 2 - a: Resolviendo recurrencia

Para resolver esta recurrencia reemplazando recursivamente buscamos un k tal que $n \leq 3^k < 3n$. Se cumple que $T(n) \leq T(3^k)$. Como $\lceil \frac{3^k}{3} \rceil = \lfloor \frac{3^k}{3} \rfloor = 3^k - \lceil \frac{3^k}{3} \rceil - \lfloor \frac{3^k}{3} \rfloor$, podemos entonces, reescribir la recurrencia de la siguiente forma:

$$T(n) \leq T(3^k) = \begin{cases} 1 & \text{if k} = 0 \\ 3^k + 3 \cdot T(3^{k-1}) & \text{if k} > 0 \end{cases}$$

Expandiendo la recursión:

$$\begin{aligned}
T(n) \leq T(3^k) &= 3^k + 3 \cdot [3^{(k-1)} + 3 \cdot T(3^{k-2})] && (1)\\
&= 3^k + [3^k + 3^2 \cdot T(3^{k-2})] && (2)\\
&= 3^k + 3^k + 3^2 \cdot [3^{k-2} + 3 \cdot T(3^{k-3}) && (3)\\
&= 3^k + 3^k + 3^k + 3^3 \cdot T(3^{k-3}) && (4)\\
&\dots && (5)\\
&= i \cdot 3^k + 3^i \cdot T(3^{k-i}) && (6)
\end{aligned}$$

Pregunta 2 - a: Resolviendo recurrencia

cuando $i = k$, por el caso base tenemos que $T(3^{k-i}) = 1$, con lo que nos queda

$$T(n) \leq k \cdot 3^k + 3^k \cdot 1$$

Ahora, tenemos que volver a nuestra variable inicial n. Por construcción de k:

$$3^k < 3n$$

Tenemos entonces que

$$T(n) \leq k \cdot 3^k + 3^k < \log_3(3n) \cdot 3n + 3n$$

Por lo tanto

$$T(n) \in \mathcal{O}\big(n \cdot \log_3(n)\big) = \mathcal{O}\big(n \cdot \log(n)\big)$$

Búsqueda Binaria

Pseudocodigo

- Elige posicion media m
- Si el elemento en la pos m es igual al buscado retorno m
- Si elemento en la pos m es mayor busco por el lado izquierdo del array. eoc busco por lado derecho.

BSearch (A, x, i, f):

if $f < i$ **: return** -1

$m \leftarrow \left\lfloor \frac{i+f}{2} \right\rfloor$

if $A[m] = x$ **: return** m

if $A[m] > x$ **:**

  return BSearch $(A, x, i, m-1)$

return BSearch $(A, x, m+1, f)$

Ejercicio 3

Tienes dos arrays A y B, de tamaño n y m respectivamente. Para cada elemento del segundo array b_i tienes que encontrar cuantos elementos en A son menores o iguales al valor de b_i.

Source

Pregunta 3

Pregunta 3 - Solucion

Uno de los requisitos para que se pueda realizar efectivamente la busqueda binaria, es que el array A se encuentre ordenado.

Luego, para cada elemento b_i haremos una busqueda binaria sobre A para encontrar la posicion del ultimo elemento menor o igual a b_i. Para esto preguntaremos si:

A[mid] <= B[i]

Pregunta 3 - Solucion

Por ejemplo, sea:

A = [1 2 3 4 5 6 6 7 8 9 10]
b_i = 6

Si preguntamos A[j] <= b_i para todo j tendremos que:

T T T T T T T F F F F

Finalmente, nos interesa la pos del ultimo True para responder cuantos son menores o iguales a b_i.

Pregunta 3 - Solucion

Pseudo codigo, version no recursiva de Binary Search

```
// Para cada b_i
for (int i = 0; i < m; i++){

    // Definimos los limites
    int left = 0, right = n - 1, ans = 0;
    while(left <= right)
    {
        // Pos mediana
        int mid = (left + right) / 2;

        // Revisamos la condicion
        if (a[mid] <= b[i]){
            left = mid + 1;
            ans = left;
            }
        else
            right = mid - 1;
    }
    print(ans);
}
```

Partition

Repaso

Pseudocodigo

- Elige el pivote
- Coloca al pivote en su posición correcta en el arreglo ordenado
- Pone los elementos menores que él a su izquierda y los mayores a su derecha

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f}
    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

Ejercicio 4

1) Escribe el algoritmo partition3, que, en lugar de particionar el arreglo A en dos, lo particiona en tres: datos menores que el pivote, datos iguales al pivote, y datos mayores que el pivote. Puedes suponer que las particiones van a parar a listas diferentes o bien al mismo arreglo —especifica. Usa una notación similar a la usada en las diapositivas.

Pregunta 1 - C1-2019-1

Solución 1 - C1-2019-1 - Partition3

Algorithm 1 Partition3(A, i, f)

$p \leftarrow$ elemento aleatorio en $A[i, f]$
$m, M, P \leftarrow$ secuencias vacías
for x in $A[i, f]$ **do**
    if $x < p$ **then**
        Insertar x en m
    else if $x = p$ **then**
        Insertar x en P
    else if $x > p$ **then**
        Insertar x en M
    end if
end for
$A[i, f] \leftarrow$ Concat(m, p, P, M)
return $i + |m|, i + |m| + |P|$

Solución 1 - C1-2019-1 (versión in-place)

Algorithm 2 Partition3(A, i, f)

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \dots, f\}$
$p \leftarrow A[x]$
swap($A[x]$, $A[f]$)
$j \leftarrow i$
$l \leftarrow i$
for k in $\{i, \dots, f-1\}$ **do**
    if $A[k] < p$ **then**
        swap($A[k]$, $A[j]$)
        swap($A[j]$, $A[l]$)
        $j \leftarrow j + 1$
        $l \leftarrow l + 1$
    end if
    if $A[k] = p$ **then**
        swap($A[k]$, $A[j]$)
        $j \leftarrow j + 1$
    end if
end for
swap($A[j]$, $A[f]$)
return l, j

Feedback