

# DFS y aplicaciones

Clase 21

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

**Introducción**

Algoritmo DFS

Orden topológico

Componentes conectadas

Cierre

# Detección de ciclos

```
isCyclic(G):  
1   for  $X \in V(G)$  :  
2       if  $X.color \neq blanco$  :  
3           continue  
4       if CycleAfter( $G, X$ ) :  
5           return true  
6   return false  
  
cycleAfter( $G, X$ ):  
1   if  $X.color = gris$  : return true  
2   if  $X.color = negro$  : return false  
3    $X.color \leftarrow gris$   
4   for  $Y$  tal que  $X \rightarrow Y$  :  
5       if cycleAfter( $G, Y$ ) : return true  
6    $X.color \leftarrow negro$   
7   return false
```

Los colores representan el estado de los nodos

- blanco: no visitado
- gris: visitado y anterior al nodo actual visitado
- negro: visitado y no anterior al nodo actual visitado

Este algoritmo explora el grafo en profundidad

# Búsqueda en profundidad

El algoritmo `isCyclic` sigue una estrategia de **búsqueda en profundidad**

- también abreviada **DFS** por las siglas de *Depth First Search*
- la estrategia es avanzar por aristas adyacentes hasta más no poder
- luego de agotar esa ruta, se retrocede y se exploran otras
- todas las rutas se exploran **en profundidad**

Podemos definir un algoritmo que recorre el grafo siguiendo esta idea

# Algoritmo DFS básico

Queremos un algoritmo que solo recorre el grafo

- la idea es no visitar nodos ya visitados
- su único efecto en el grafo es cambiar colores
- lo usaremos como base para nuevos algoritmos

Usaremos el código de colores, dándoles una interpretación más general

- blanco: no visitado
- gris: visitado y tiene vecinos no visitados (*está en proceso*)
- negro: visitado y todos sus vecinos fueron visitados (*está terminado*)

# Algoritmo DFS básico

**input** : grafo  $G$

Dfs( $G$ ):

```
1  for  $u \in V(G)$  :  
2       $u.color \leftarrow$  blanco  
3  for  $u \in V(G)$  :  
4      if  $u.color = blanco$  :  
5          DfsVisit( $G, u$ )
```

**input** : grafo  $G$ , nodo  $u \in V(G)$

DfsVisit( $G, u$ ):

```
1   $u.color \leftarrow$  gris  
2  for  $v \in N_G(u)$  :  
3      if  $v.color = blanco$  :  
4          DfsVisit( $G, v$ )  
5   $u.color \leftarrow$  negro
```

donde  $N_G(u)$  son los vecinos de  $u$  (nodos apuntados por aristas desde  $u$ )

Este algoritmo solo hace recursión cuando el  
nodo siguiente no ha sido visitado

# Complejidad de DFS básico

**input** : grafo  $G$

Dfs( $G$ ):

```
1  for  $u \in V(G)$  :  
2       $u.color \leftarrow$  blanco  
3  for  $u \in V(G)$  :  
4      if  $u.color = blanco$  :  
5          DfsVisit( $G, u$ )
```

**input** : grafo  $G$ , nodo  $u \in V(G)$

DfsVisit( $G, u$ ):

```
1   $u.color \leftarrow$  gris  
2  for  $v \in N_G(u)$  :  
3      if  $v.color = blanco$  :  
4          DfsVisit( $G, v$ )  
5   $u.color \leftarrow$  negro
```

Para ambas implementaciones de  $N_G$  (matriz o listas de adyacencias)

- cada nodo solo inicializa blanco  $\mathcal{O}(V)$
- cada nodo solo se visita (colorea gris) una vez  $\mathcal{O}(V)$
- cada arista se *recorre* una vez al chequear el vecino  $\mathcal{O}(E)$

El algoritmo DFS toma tiempo  $\mathcal{O}(V + E)$ , i.e. es lineal en  $|G|$

# Búsqueda en profundidad

Mencionamos que Dfs será la base de otros algoritmos

- ya sabemos recorrer los nodos sin repetir
- además visitando/descubriendo todas las aristas

Agregaremos más información para poder extender el algoritmo base



# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido DFS de grafos dirigidos
- ☐ Comprender el algoritmo de orden topológico en grafos acíclicos
- ☐ Comprender el algoritmo de Kosaraju para componentes conexas

# Sumario

Introducción

**Algoritmo DFS**

Orden topológico

Componentes conectadas

Cierre

# Hacia el orden de los nodos

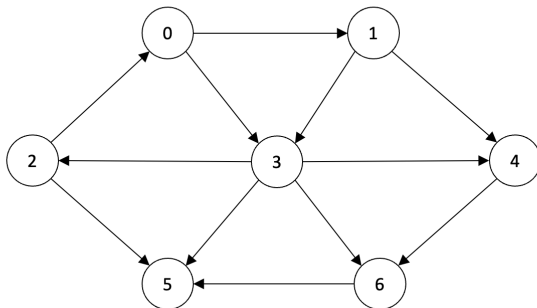
Además de usar colores, *recordaremos* cuándo se hicieron esos cambios

- cuando se visita un nodo, se pinta **gris**
- además definiremos un **tiempo de descubrimiento o inicio**
- cuando se completa un nodo, se pinta **negro**
- además definiremos un **tiempo de término o finalización**

Los tiempos de inicio y término serán números 1, 2, ... correlativos

# DFS con tiempos de inicio y término

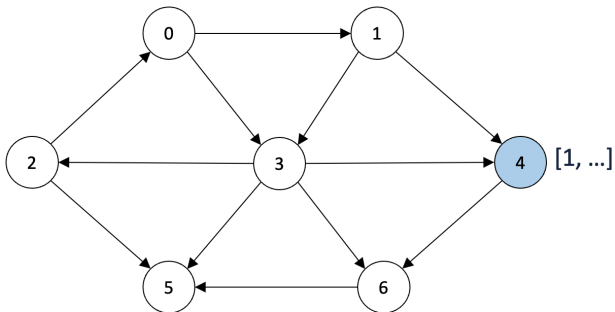
Comenzamos el recorrido usando  $\text{DfsVisit}(G, 4)$



Tengamos presente cómo sacar conclusiones usando los tiempos

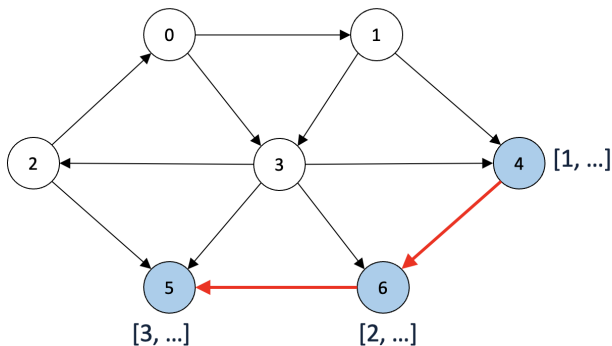
# DFS con tiempos de inicio y término

Seteamos los tiempos para  $u = 4$  al descubrirlo por primera vez



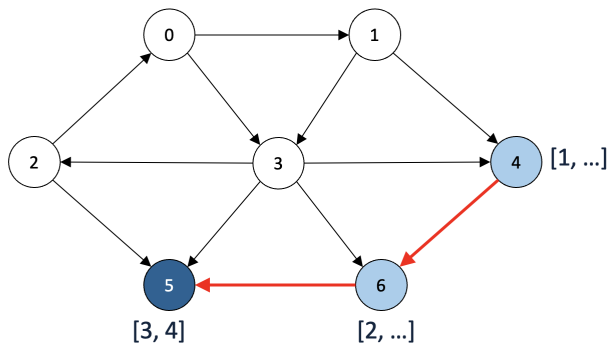
# DFS con tiempos de inicio y término

Avanzamos por las aristas hasta agotarlas, llegando al nodo 5



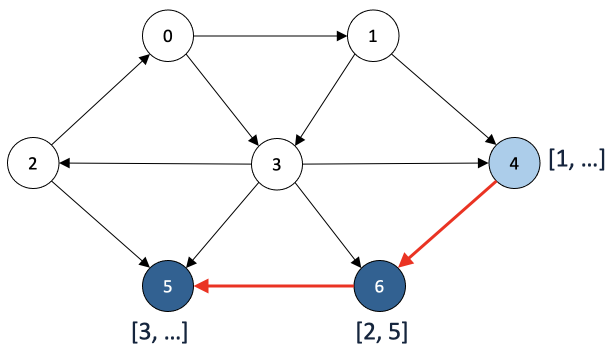
# DFS con tiempos de inicio y término

Como  $u = 5$  no tiene vecinos por visitar, lo terminamos y seteamos su tiempo de término



## DFS con tiempos de inicio y término

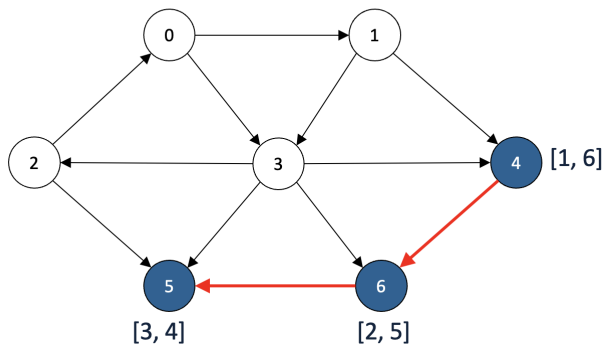
El nodo  $u = 6$  tampoco tiene vecinos por visitar y lo terminamos





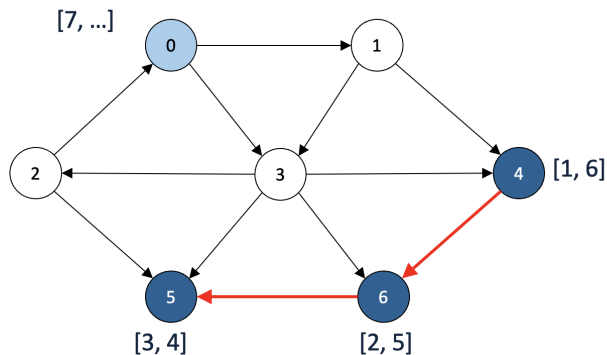
# DFS con tiempos de inicio y término

Concluimos el llamado a  $u = 4$  por no quedar vecinos por visitar



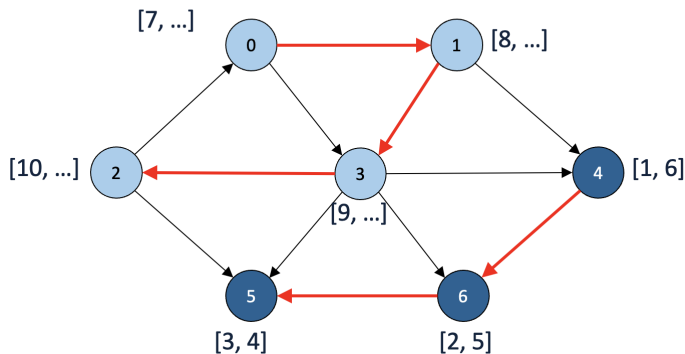
# DFS con tiempos de inicio y término

Ahora hacemos llamado a  $\text{Dfs}(G, 0)$  (los tiempos son correlativos, toca tiempo 7)



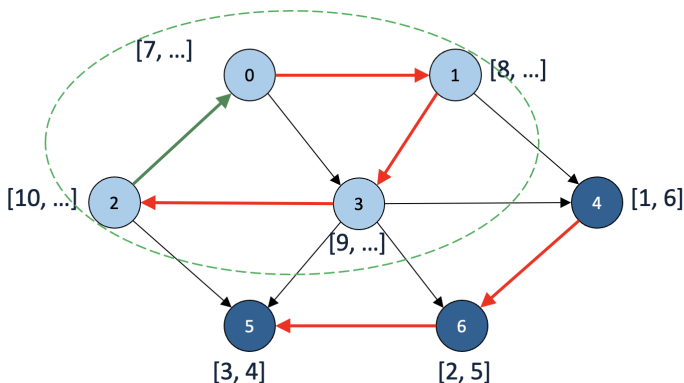
# DFS con tiempos de inicio y término

Avanzamos por las aristas  $(0,1)$ ,  $(1,3)$  y  $(3,2)$



# DFS con tiempos de inicio y término

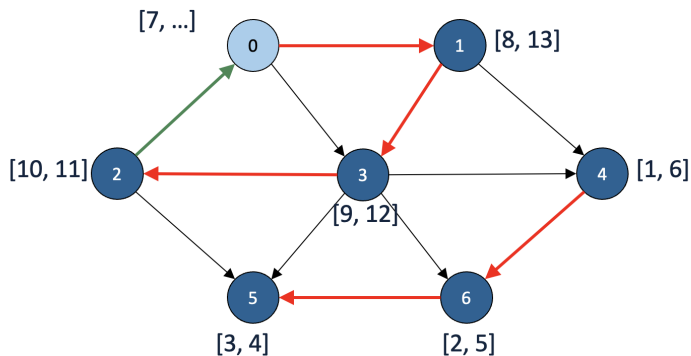
La arista (2,0) apunta a un nodo **gris**: detectamos un ciclo



¿Necesitamos realmente el color?

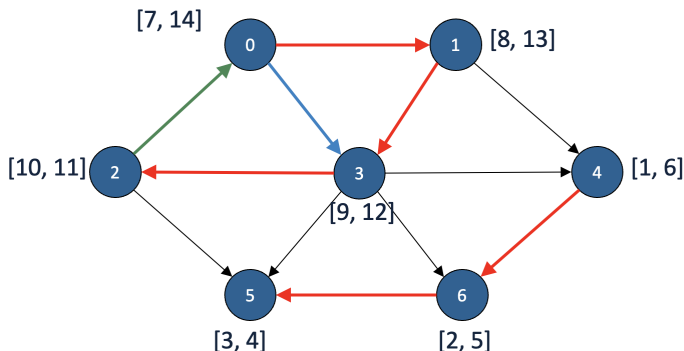
# DFS con tiempos de inicio y término

Las otras aristas apuntan a nodos ya terminados y retrocedemos hasta  $u = 0$



# DFS con tiempos de inicio y término

Desde  $u = 0$  no quedan más nodos por descubrir y terminamos



¿Qué diferencia la arista (0, 3) de la (3, 6)?

# DFS con tiempos de inicio y término

**input** : grafo  $G$

Dfs( $G$ ):

```
1    $t \leftarrow 1$ 
2   for  $u \in V(G)$  :
3        $u.start \leftarrow 0$ 
4        $u.end \leftarrow 0$ 
5   for  $u \in V(G)$  :
6       if  $u.start = 0$  :
7            $t \leftarrow \text{DfsVisit}(G, u, t)$ 
```

**input** : grafo  $G$ , nodo  $u \in V(G)$ ,  
tiempo  $t$

**output:** tiempo  $t \geq 1$

DfsVisit( $G, u, t$ ):

```
1    $u.start \leftarrow t$ 
2    $t \leftarrow t + 1$ 
3   for  $v \in N_G(u)$  :
4       if  $v.start = 0$  :
5            $t \leftarrow \text{DfsVisit}(G, v, t)$ 
6    $u.end \leftarrow t$ 
7    $t \leftarrow t + 1$ 
8   return  $t$ 
```

Importante: el recorrido DFS puede generar  
un **bosque** de árboles independientes

# Propiedades de los tiempos

## Definición

Dado  $G$  y  $u, v \in G$ , diremos que  $u$  es **descendiente** de  $v$  al ejecutar  $\text{Dfs}(G)$  si  $u$  es visitado por primera vez luego de  $v$  y antes de que  $v$  sea terminado. En tal caso diremos que ambos pertenecen al mismo **árbol DFS**

## Proposición

Dado  $G$  y  $u, v \in V(G)$ , luego de ejecutar  $\text{Dfs}(G)$  se definen los intervalos

$$I_u = \{u.start, \dots, u.end\} \quad I_v = \{v.start, \dots, v.end\}$$

Estos intervalos cumplen una de las siguientes propiedades

- $I_u \cap I_v = \emptyset$  (no están en el mismo árbol DFS)
- $I_u \subset I_v$  ( $u$  es descendiente de  $v$ )
- $I_v \subset I_u$  ( $v$  es descendiente de  $u$ )



# Tipos de aristas en DFS

Estas convenciones permiten distinguir aristas al recorrer con DFS

## Definición

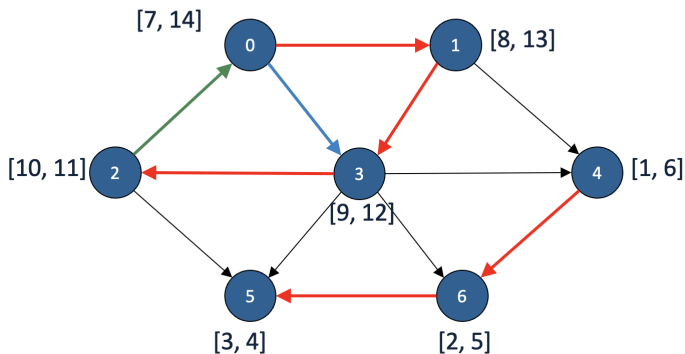
Dado  $G$  y  $u, v \in G$ , luego de ejecutar  $\text{Dfs}(G)$  la arista  $(u, v)$  puede ser

- **Arista de árbol** si  $v$  fue descubierto al transitar  $(u, v)$
- **Arista hacia atrás** si  $u$  es descendiente de  $v$  en un árbol DFS
- **Arista hacia adelante** si  $(u, v)$  no es de árbol y  $v$  es descendiente de  $u$
- **Arista cruzada** en otro caso

## Proposición

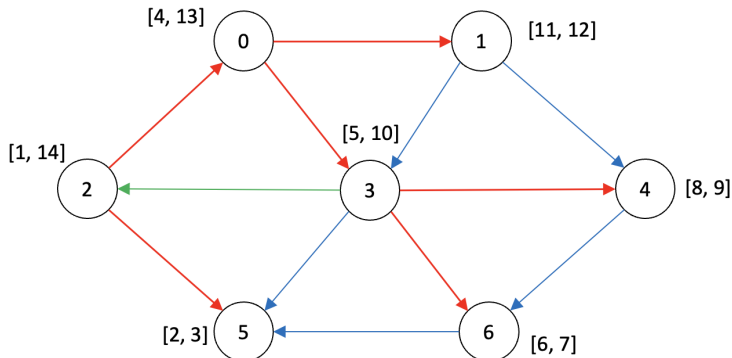
Un grafo  $G$  es acíclico si, y solo si,  $\text{Dfs}(G)$  no produce aristas hacia atrás

## Tipos de aristas en DFS



# Tipos de aristas en DFS

Notemos que la proposición no depende del orden que se escogen los nodos para llamar `DfsVisit` en los llamados recursivos



Comenzando el recorrido en  $u = 2$  también detecta el ciclo, formando un solo árbol DFS

# Sumario

Introducción

Algoritmo DFS

**Orden topológico**

Componentes conectadas

Cierre

# Orden topológico

## Definición

Sea  $G$  un grafo dirigido. Un **orden topológico** de  $G$  es una secuencia de sus nodos

$$v_0, v_1, \dots, v_n \quad v_i \in V(G)$$

tal que

- todo nodo  $u \in V(G)$  aparece en la secuencia
- no hay elementos repetidos en la secuencia
- si  $(v_i, v_j) \in E(G)$ , entonces  $v_i$  aparece antes que  $v_j$  en la secuencia

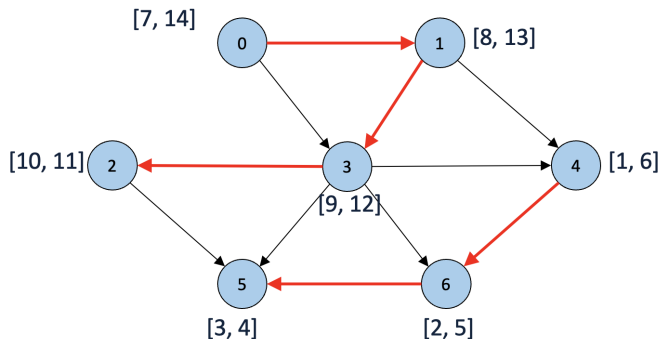
## Proposición

Si  $G$  es cíclico, entonces no existe un orden topológico

Podemos usar Dfs para construir un orden topológico de un grafo acíclico

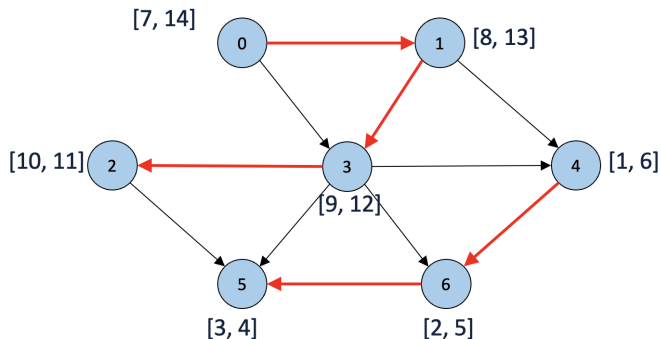
# Orden topológico

Consideremos el siguiente bosque de árboles DFS sobre un grafo acíclico



¿Qué orden topológico sugiere este bosque?

# Orden topológico



Deducimos el orden topológico de  $G$  dado por



# Orden topológico

**input** : grafo  $G$

**output**: lista  $L$  de nodos en orden topológico

TopSort( $G$ ):

- 1      $L \leftarrow$  lista vacía
- 2     Dfs( $G$ )
- 3     Insertar en  $L$  nodos en orden decreciente según *end*
- 4     **return**  $L$

¿Podemos modificar Dfs para no tener que ordenar en la línea 3?



# Orden topológico

**input** : grafo  $G$

**output**: lista de nodos  $L$

TopSort( $G$ ):

```
1   $L \leftarrow$  lista vacía
2   $t \leftarrow 1$ 
3  for  $u \in V(G)$  :
4       $u.start \leftarrow 0$ 
5       $u.end \leftarrow 0$ 
6  for  $u \in V(G)$  :
7      if  $u.start = 0$  :
8           $t \leftarrow$ 
              TopDfsVisit( $G, L, u, t$ )
9  return  $L$ 
```

**input** : grafo  $G$ , lista de nodos  $L$ ,

nodo  $u \in V(G)$ , tiempo  $t$

**output**: tiempo  $t \geq 1$

TopDfsVisit( $G, L, u, t$ ):

```
1   $u.start \leftarrow t$ 
2   $t \leftarrow t + 1$ 
3  for  $v \in N_G(u)$  :
4      if  $v.start = 0$  :
5           $t \leftarrow$  TopDfsVisit( $G, L, v, t$ )
6   $u.end \leftarrow t$ 
7  Insertar  $u$  como cabeza de  $L$ 
8   $t \leftarrow t + 1$ 
9  return  $t$ 
```

Al igual que Dfs, este algoritmo es  $\mathcal{O}(V + E)$

# Sumario

Introducción

Algoritmo DFS

Orden topológico

**Componentes conectadas**

Cierre

# Componentes fuertemente conectadas

## Definición

Sea  $G$  un grafo dirigido. Una **componente fuertemente conectada (CFC)** es un conjunto maximal de nodos  $C \subseteq V(G)$  tal que dados  $u, v \in C$ , existe un camino dirigido desde  $u$  hasta  $v$

## Proposición

Si  $G$  es cíclico y los nodos de  $B \subseteq V(G)$  forman un ciclo, entonces existe una componente fuertemente conectada  $C$  tal que  $B \subseteq C$

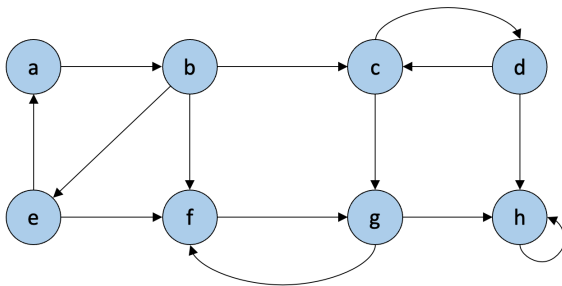
Los nodos de un ciclo pertenecen a la misma CFC

## Proposición

Un grafo  $G$  acíclico tiene 0 componentes fuertemente conectadas

# Componentes fuertemente conectadas

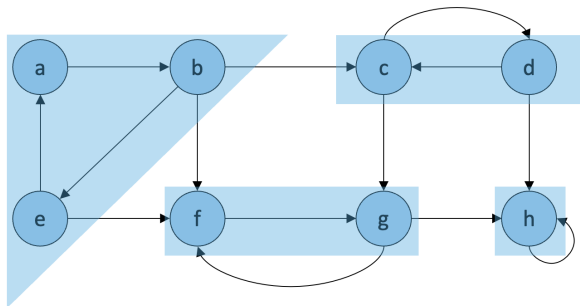
Consideremos el siguiente grafo dirigido cíclico



¿Cuáles son las componentes fuertemente conectadas de  $G$ ?

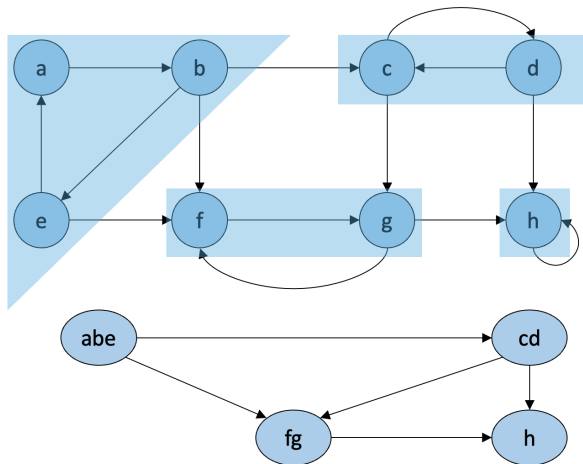
# Componentes fuertemente conectadas

Existen 4 CFC's en el grafo anterior



Notemos que es necesario poder *ir y volver* dentro de una CFC

# Componentes fuertemente conectadas



Cada componente tiene un **representante** que combina sus nodos

# Grafo transpuesto

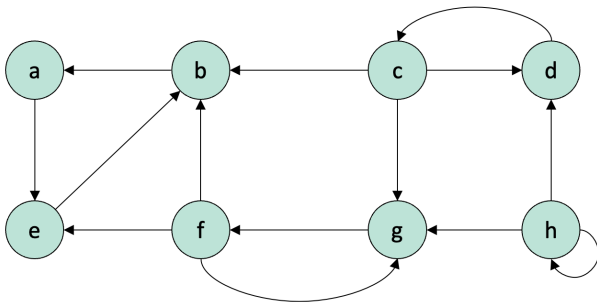
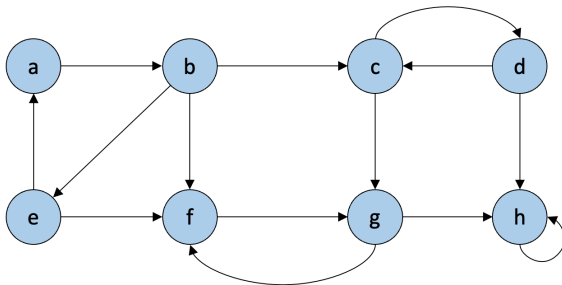
Para proponer un algoritmo, necesitamos un grafo nuevo

## Definición

Sea  $G$  un grafo dirigido. Decimos que  $G^T$  es el grafo **transpuesto** de  $G$  si

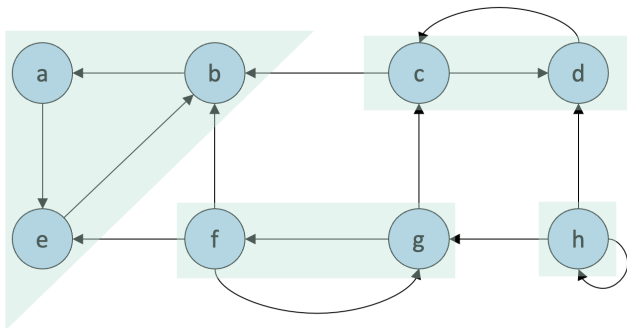
- $V(G) = V(G^T)$
- $\forall u, v \in V(G). (u, v) \in E(G) \rightarrow (v, u) \in E(G^T)$

El transpuesto se obtiene invirtiendo todas las aristas de  $G$





# Grafo transpuesto

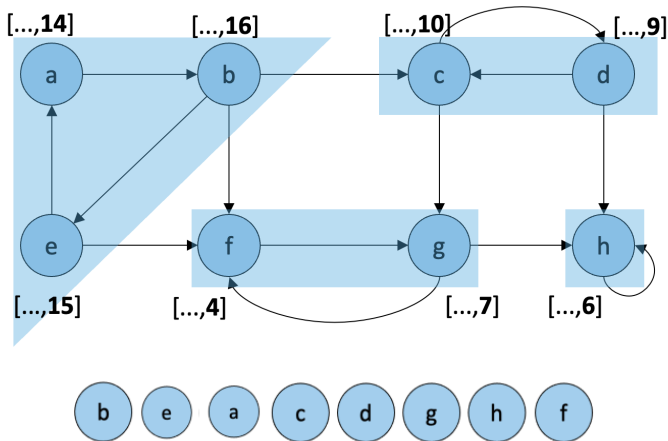


## Proposición

Los grafos  $G$  y  $G^T$  tienen las mismas componentes fuertemente conectadas

# Hacia un algoritmo para determinar las CFC

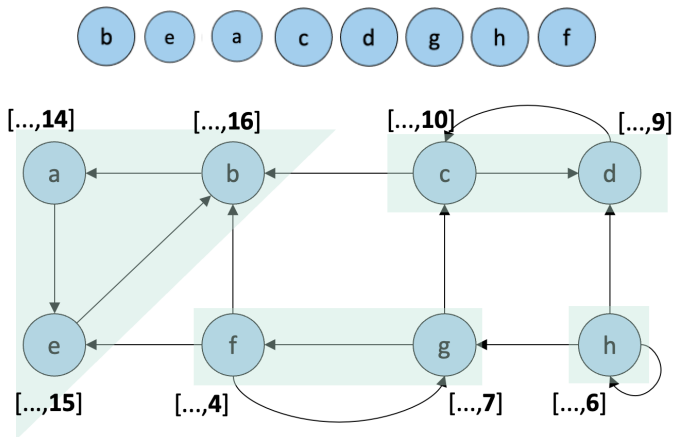
Construimos un orden de los nodos de  $G$  según tiempos de término



**¡Ojo!** Esto no es un orden topológico porque  $G$  es cíclico

# Hacia un algoritmo para determinar las CFC

Recorremos el grafo transpuesto partiendo según el orden anterior



Al transponer, no es posible ir de  $b$  a  $c$  porque están en componentes diferentes

# Algoritmo de Kosaraju

**input** : grafo  $G$

Kosaraju( $G$ ):

```
1   $L \leftarrow \text{TopSort}(G)$ 
2  for  $u \in L$  :
3      Assign( $u, u$ )
```

**input** : grafo  $G$ , nodo  $u \in V(G)$ , nodo representante  $r$

Assign( $G, u, r$ ):

```
1  if  $u.\text{rep} = \emptyset$  :
2       $u.\text{rep} \leftarrow r$ 
3      for  $v \in N_{GT}(u)$  :
4          Assign( $G, v, r$ )
```

No olvidar: no podemos interpretar  $L$  como orden topológico.  
Es un orden que se construye de la misma forma

# Algoritmo de Kosaraju

El algoritmo de Kosaraju se basa en las propiedades del siguiente grafo

## Definición

Dado un grafo  $G$  dirigido, sean  $C_1, \dots, C_k$  sus componentes fuertemente conectadas. Se define el **grafo de componentes**  $G^{CFC}$  según

- $V(G^{CFC}) = \{C_1, \dots, C_k\}$
- Si  $(u, v) \in E(G)$  y  $u \in C_i, v \in C_j$ , entonces  $(C_i, C_j) \in E(G^{CFC})$

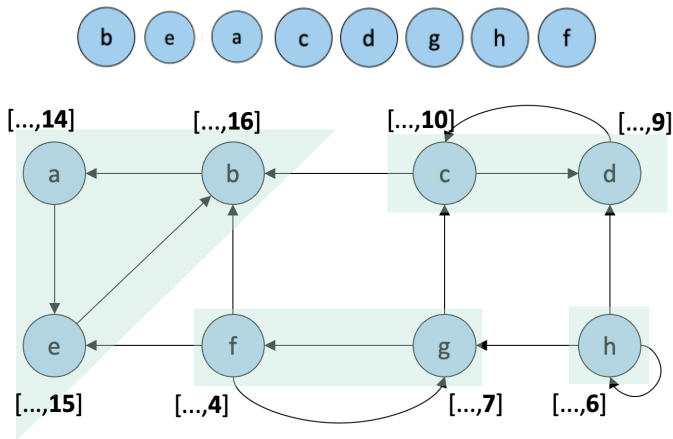
## Teorema

El grafo de componentes  $G^{CFC}$  es un grafo dirigido acíclico

## Corolario

El grafo de componentes  $G^{CFC}$  tiene un orden topológico

# Hacia un algoritmo para determinar las CFC



La forma en que recorremos las componentes nos da su orden topológico  
 $(bae)(cd)(gf)(h)$

# Sumario

Introducción

Algoritmo DFS

Orden topológico

Componentes conectadas

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido DFS de grafos dirigidos
- ☐ Comprender el algoritmo de orden topológico en grafos acíclicos
- ☐ Comprender el algoritmo de Kosaraju para componentes conexas