Árboles rojo negro

Clase 11

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros

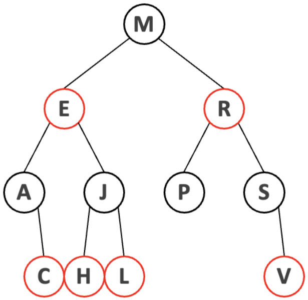
Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros



Esta es una nueva noción de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Al igual que en los árboles AVL, los cambios en el árbol pueden romper la propiedad de balance

- Tendremos una estrategia de restauración (rotaciones)
- En lugar de usar $x.balance$ usaremos $x.color$

Para facilitar la comprensión del rebalanceo, notamos que

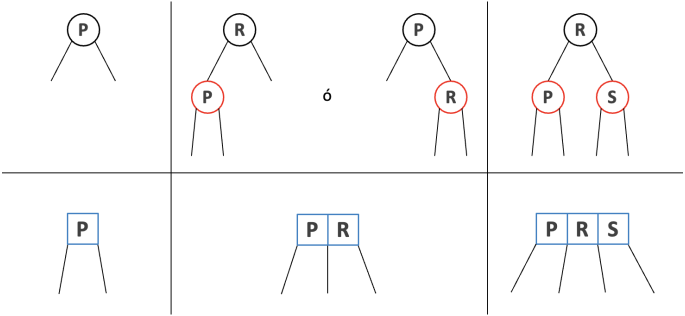
- Los árboles 2-3 son fáciles de visualizar
- No todo árbol rojo-negro tiene un árbol 2-3 equivalente
- Pero sí tiene un **árbol 2-4 equivalente**

Árboles rojo-negro y árboles 2-4

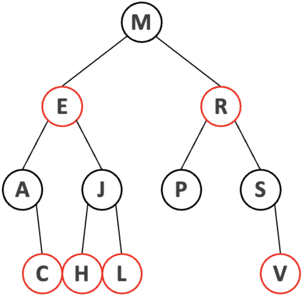
Un **árbol 2-4** es un árbol 2-3 que además puede tener **4-nodos**

- tiene 3 llaves ordenadas distintas
- si no es hoja, tiene 4 hijos

Con este nuevo modelo, podemos tener árboles equivalentes según



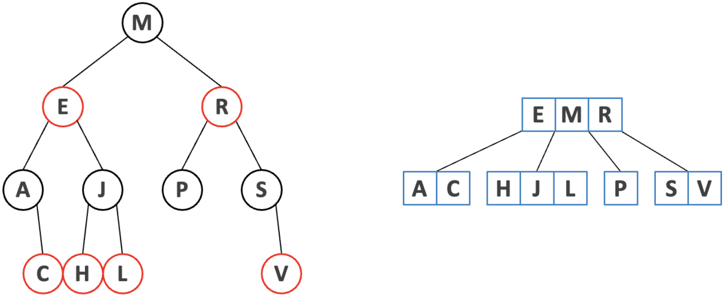
Árboles rojo-negro y árboles 2-4



Ejercicio

Obtenga un árbol 2-4 equivalente al árbol rojo-negro anterior

Árboles rojo-negro y árboles 2-4



Inserción en árboles rojo-negro

Estudiaremos cómo insertar nodos en árboles rojo negro

- Usaremos un árbol 2-4 equivalente como ayuda
- Nos permitirá comprender mejor cómo efectuar **rotaciones** y **cambios de color**

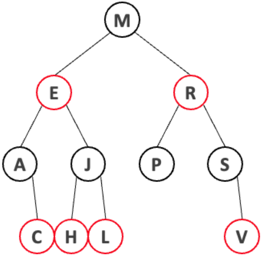
Trabajaremos con el siguiente árbol como punto de partida

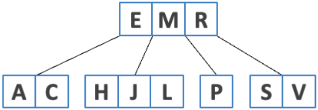
Inserción en árboles rojo-negro

Estudiaremos cómo insertar nodos en árboles rojo negro

- Usaremos un árbol 2-4 equivalente como ayuda
- Nos permitirá comprender mejor cómo efectuar **rotaciones** y **cambios de color**

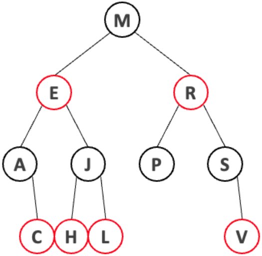
Trabajaremos con el siguiente árbol como punto de partida

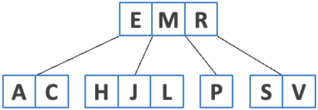




Inserción en árboles rojo-negro

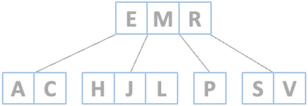
Insertamos la llave Z. ¿Dónde debiera ubicarse?

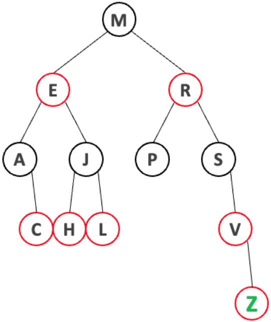




Inserción en árboles rojo-negro

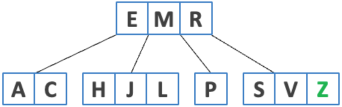
Para no romper la propiedad 4 de los rojo-negro, insertamos siempre como **nodo rojo**

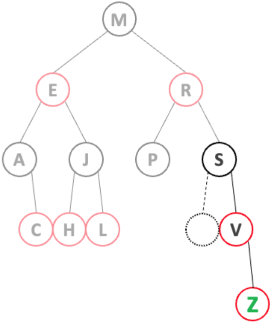




Inserción en árboles rojo-negro

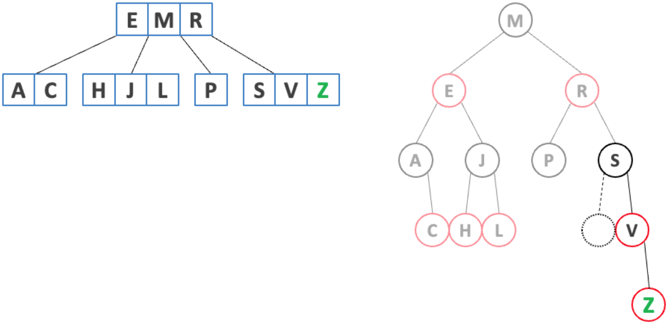
Actualizamos el árbol 2-4 equivalente, el cual nos sugiere una posible rotación de los nodos $S - V$





Inserción en árboles rojo-negro

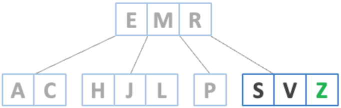
Además, notamos que el tío del nodo nuevo Z es negro (pues es un nodo vacío)

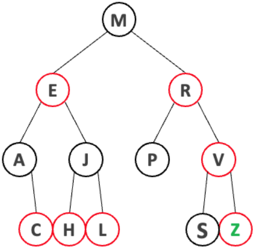


¿Qué pasa si el tío es rojo?
Lo veremos más adelante

Inserción en árboles rojo-negro

Efectuamos la rotación de acuerdo a lo que nos sugiere el nodo *SVZ* del 2-4

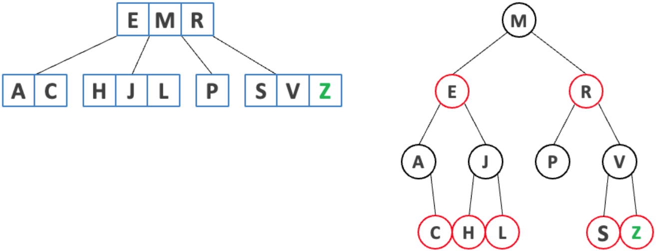




Ojo que ahora se rompe la propiedad 4 (los colores)

Inserción en árboles rojo-negro

Cambiamos color de S y V, los nodos que se rotaron



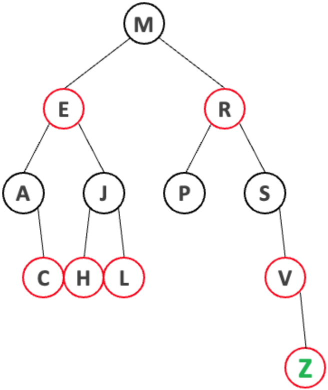
Esta rotación/coloración fue suficiente
para entregar un nuevo árbol rojo-negro

Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**
  if x *fue inserción exterior* **:**

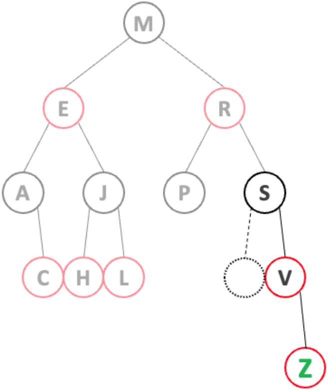


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
    if x *fue inserción exterior* **:**
        $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
        if $t.color = negro$ **:**

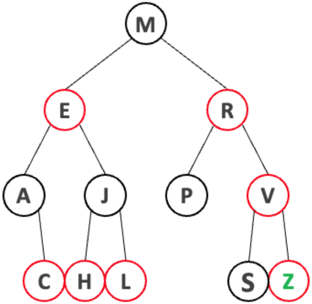


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción exterior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**
      $g \leftarrow x.p.p$ ▷ abuelo de x
      `Rotation`$(g, x.p)$

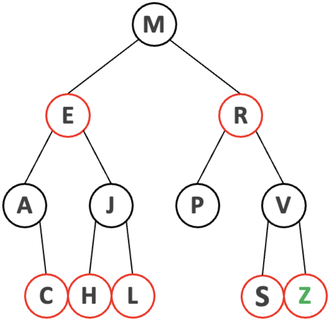


Inserción en árboles rojo-negro

A este tipo de inserción le llamaremos **exterior**

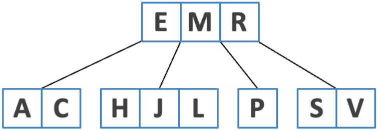
input : Nodo x
output: $\varnothing$

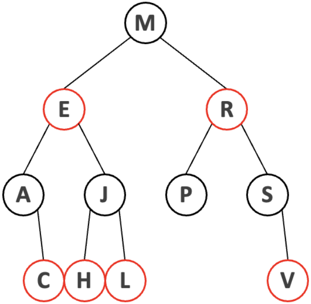
`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción exterior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**
      $g \leftarrow x.p.p$ ▷ abuelo de x
      `Rotation`$(g, x.p)$
      $x.p.color \leftarrow$ negro
      $g.color \leftarrow$ rojo



Inserción en árboles rojo-negro

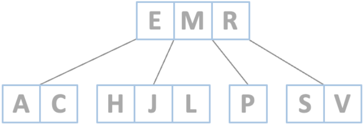
Nueva inserción: insertamos la llave U. ¿Dónde debiera ubicarse?

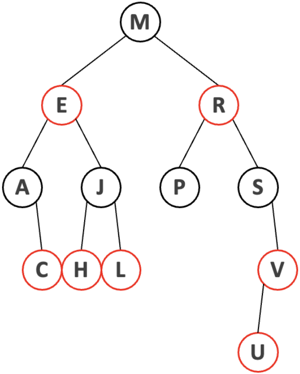




Inserción en árboles rojo-negro

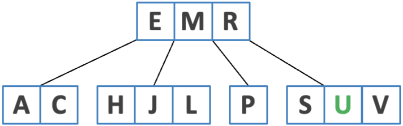
Tal como antes, la insertamos como nodo rojo... a este tipo de inserción le llamamos **interior**

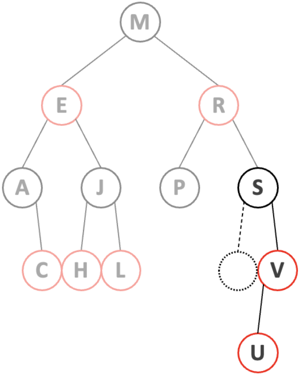




Inserción en árboles rojo-negro

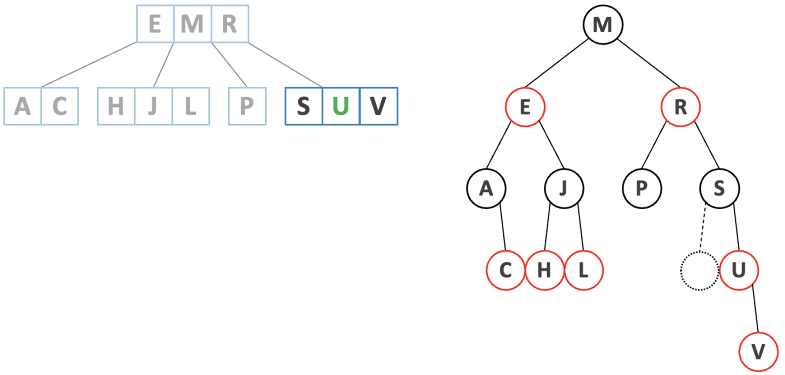
Vemos que tiene tío negro y al actualizar el 2-4 se nos sugiere una rotación





Inserción en árboles rojo-negro

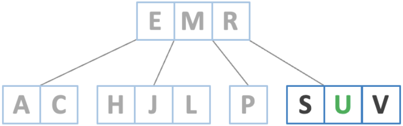
Efectuamos primera rotación $U - V$

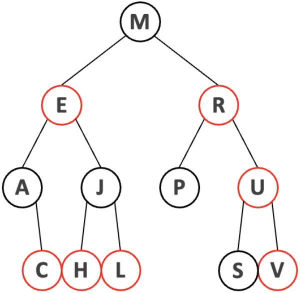


En este punto ya estamos con un escenario
como el caso de inserción exterior

Inserción en árboles rojo-negro

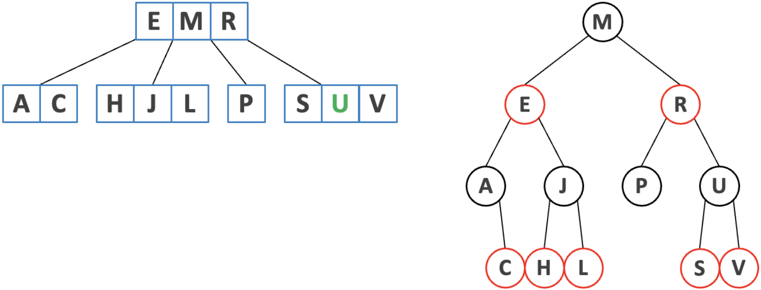
Luego, una segunda rotación $S - U$ que deja a U como padre de S, V





Inserción en árboles rojo-negro

Finalmente, cambiamos el color de los últimos nodos rotados

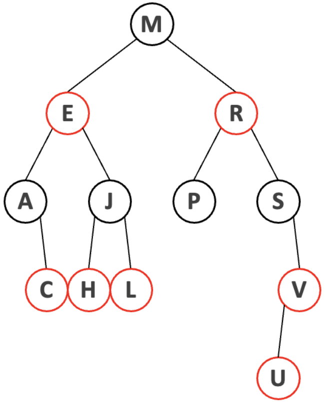


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**

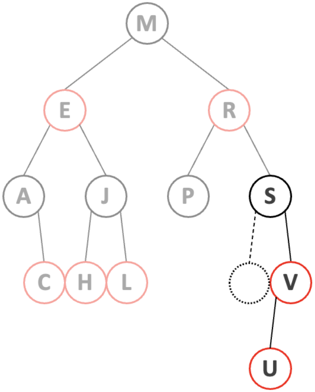


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**

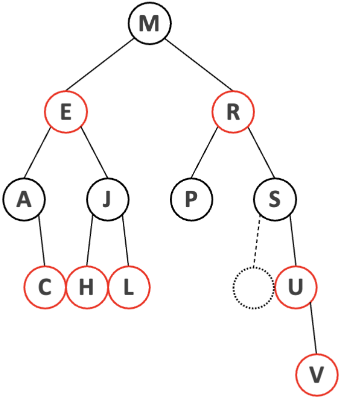


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**
    if x *fue inserción interior* **:**
        $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
        if $t.color = negro$ **:**
            $g \leftarrow x.p.p$ $\triangleright$ abuelo de x
            `Rotation`$(x.p, x)$

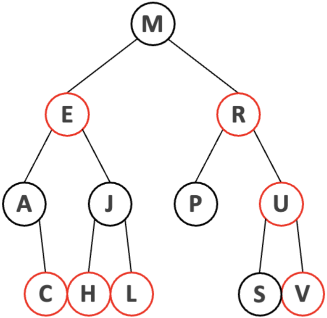


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

input : Nodo x
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x):
  if x *fue inserción interior* **:**
    $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
    if $t.color = negro$ **:**
      $g \leftarrow x.p.p$ ▷ abuelo de x
      `Rotation`($x.p$, x)
      `Rotation`(g, x)

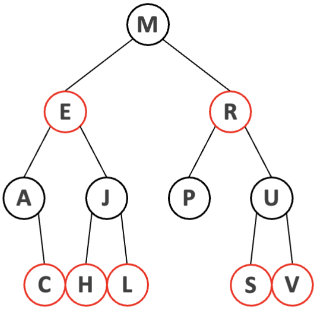


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción **interior**

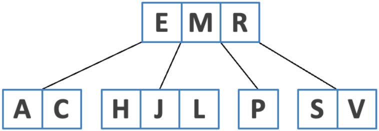
input : Nodo x
output: $\varnothing$

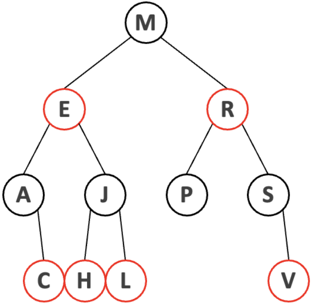
```
FixBalance (x):
    if x fue inserción interior :
        t ← x.uncle        ▷ tío de x
        if t.color = negro :
            g ← x.p.p      ▷ abuelo de x
            Rotation(x.p, x)
            Rotation(g, x)
            x.color ← negro
            g.color ← rojo
```



Inserción en árboles rojo-negro

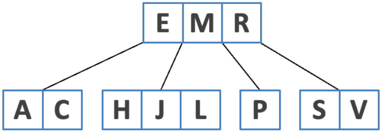
Nueva inserción: insertamos la llave K. ¿Dónde debiera ubicarse?

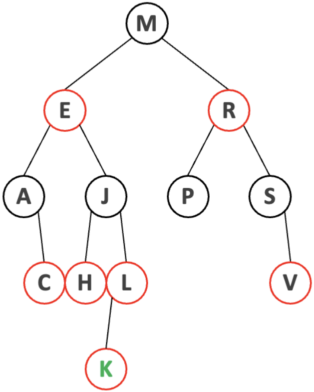




Inserción en árboles rojo-negro

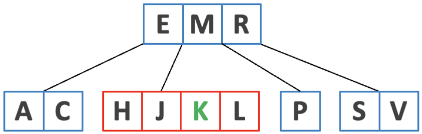
Lo agregamos como hoja roja

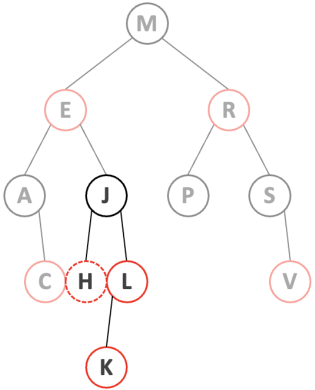




Inserción en árboles rojo-negro

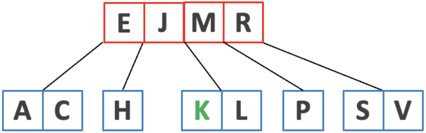
Actualizamos el árbol 2-4 y notamos un conflicto: notemos que el tío de K es rojo

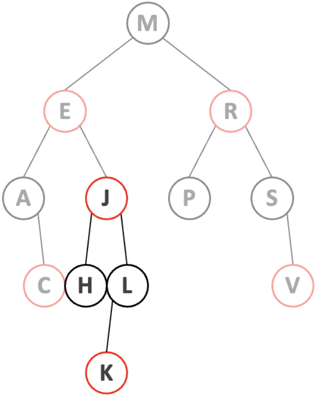




Inserción en árboles rojo-negro

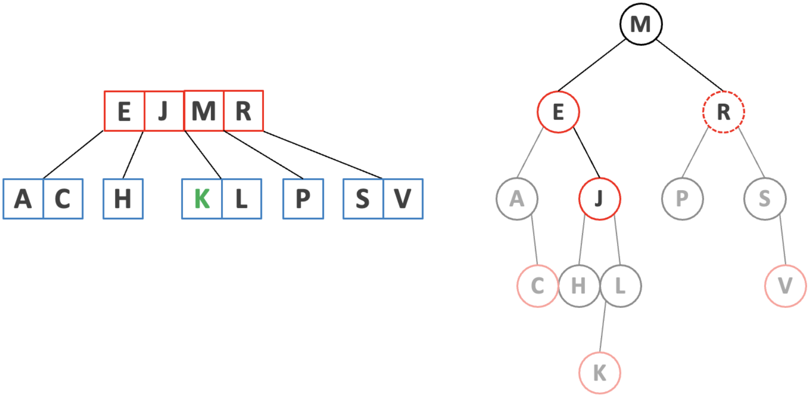
Al modificar el 5-nodo ilegal, se nos sugiere el cambio de colores en el árbol rojo-negro





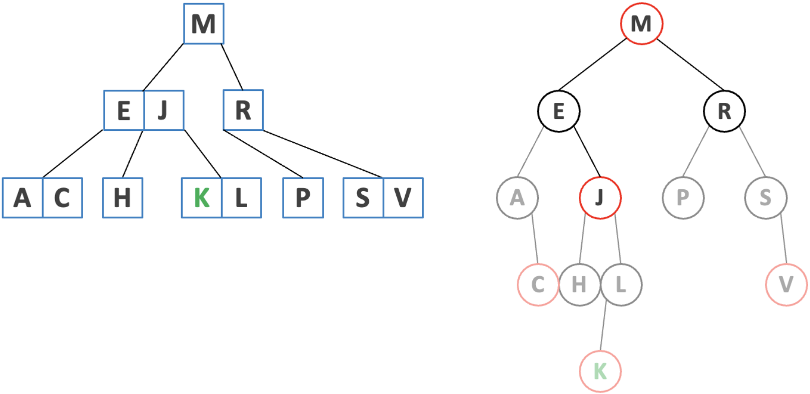
Inserción en árboles rojo-negro

Revisamos recursivamente hacia arriba, revisando el tío de *J*, que nuevamente es rojo



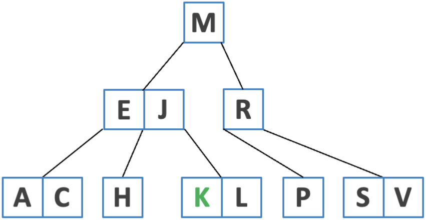
Inserción en árboles rojo-negro

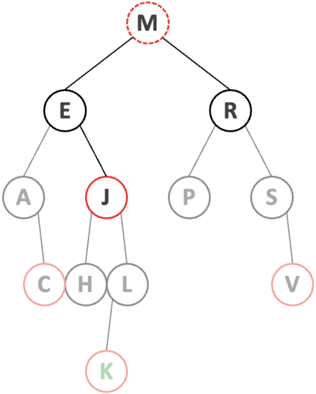
Nuevo cambio de colores que involucra solo a los tres nodos superiores



Inserción en árboles rojo-negro

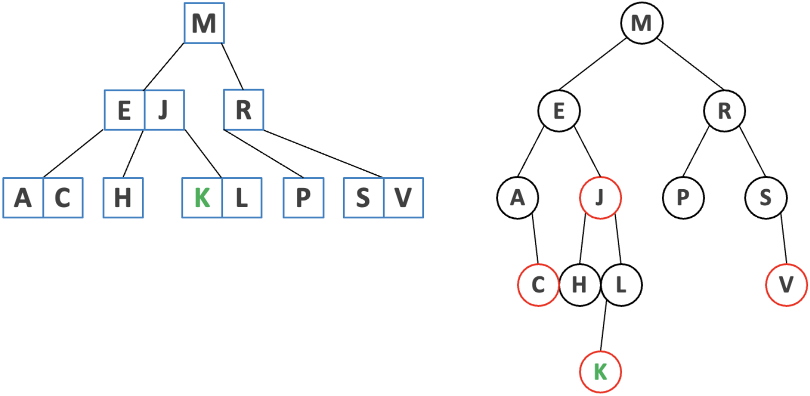
No hay más tíos que revisar, pero ahora falla la condición de que la raíz sea negra





Inserción en árboles rojo-negro

Le cambiamos su color y terminamos



Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

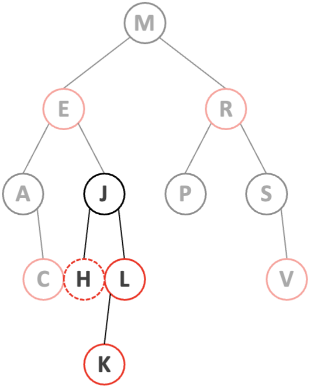
input : Nodo x, árbol rojo-negro A

output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**

  $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x

  if $t.color = rojo$ **:**

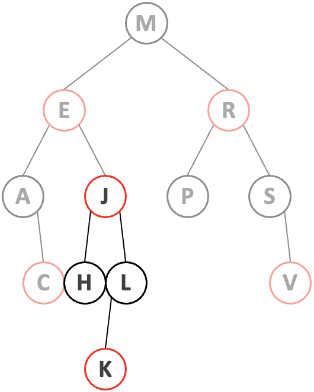


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

`FixBalance` (x)**:**
  $t \leftarrow x.uncle$ $\triangleright$ tío de x
  if $t.color = rojo$ **:**
    $x.p.color \leftarrow$ negro
    $t.color \leftarrow$ negro
    $x.p.p.color \leftarrow$ rojo

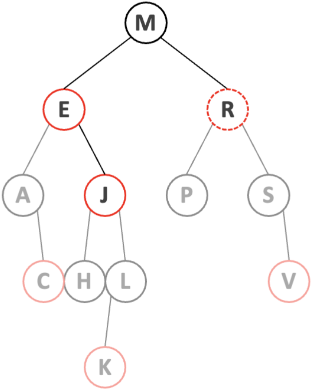


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle    ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
    A.root.color ← negro
```

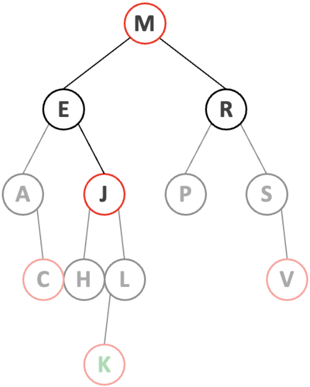


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle    ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
    A.root.color ← negro
```

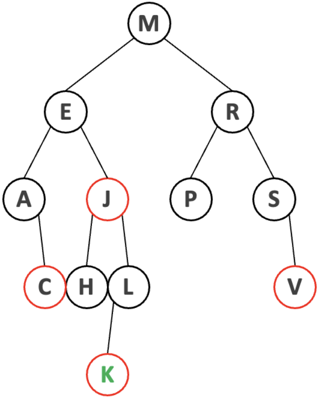


Inserción en árboles rojo-negro

Resumimos la estrategia para una inserción con tío rojo

input : Nodo x, árbol rojo-negro A
output: $\varnothing$

$\texttt{FixBalance}\ (x)$:
    while $x.p \neq \varnothing \land x.p.color = rojo$ **:**
        $t \leftarrow x.uncle$ ▷ tío de x
        if $t.color = rojo$ **:**
            $x.p.color \leftarrow$ negro
            $t.color \leftarrow$ negro
            $x.p.p.color \leftarrow$ rojo
            $x \leftarrow x.p.p$
    $A.root.color \leftarrow$ negro



Inserción en árboles rojo-negro

Al insertar, siempre lo hacemos como nodo rojo

- Si el padre es negro, no hacemos nada
- Si el padre es rojo, hay dos casos según el tío
  - Tío negro: el nodo del árbol 2-4 crece, pero no colapsa

    rotaciones y cambios de color

  - Tío rojo: el nodo del árbol 2-4 colapsa y hay que subir

    cambios de color hacia la raíz

Inserción en árboles rojo-negro

```
FixBalance (x):
    while x.p ≠ ∅ ∧ x.p.color = rojo :
        t ← x.uncle   ▷ tío de x
        if t.color = rojo :
            x.p.color ← negro
            t.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            x ← x.p.p
        else:
            if x es hijo interior de x.p :
                Rotation(x.p, x)
                x ← x.p
            x.p.color ← negro
            x.p.p.color ← rojo
            Rotation(x.p.p, x)
    A.root.color ← negro
```

Inserción en árboles rojo-negro

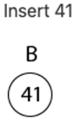
Ejercicio

Inserte en un árbol rojo-negro vacío las siguientes llaves consecutivas

$$41,\ 38,\ 31,\ 12,\ 19,\ 8$$

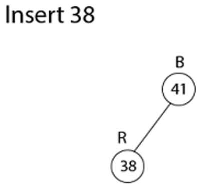
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 41 como raíz



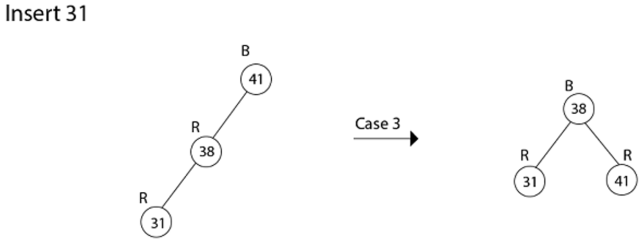
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 38 y terminamos, pues su padre es negro



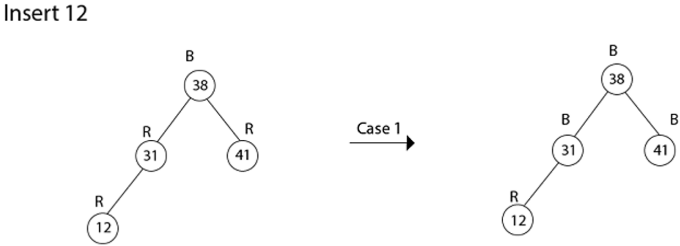
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 31 y es hijo exterior de un nodo rojo: rotación+cambio



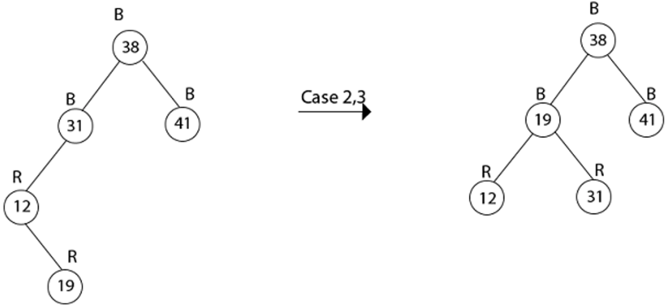
Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 12, hijo exterior de nodo rojo con tío rojo: cambios de color



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 19, hijo interior de nodo rojo con tío negro: rotación doble + cambio



Inserción en árboles rojo-negro

Insertamos el 8, hijo de nodo rojo y tío rojo: cambios de color

Árboles B+

Definición

Un **árbol B+ de orden d** es un árbol de búsqueda que almacena pares **(llave, valor)** y cumple con

1. Los nodos internos solo guardan llaves
2. La raíz tiene entre 1 y $2d$ hijos
3. Los nodos internos tienen entre d y $2d$ hijos
4. Las hojas están a la misma altura y guardan a lo más $2d$ pares (llave,valor) **ordenados por llave**
5. Las hojas están conectadas formando una lista doblemente ligada

¿Qué diferencias tiene este enfoque con los árboles 2-3?

Árboles de búsqueda 2-3

Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave k
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves k'' del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k_1$
  - las llaves k'' del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$
  - las llaves k''' del hijo derecho son $k_2 < k'''$

Árboles M-arios

Si consideramos un árbol M-ario

- Cada nodo tiene a lo más M hijos
- Si está lleno con n nodos, balanceado y con altura h

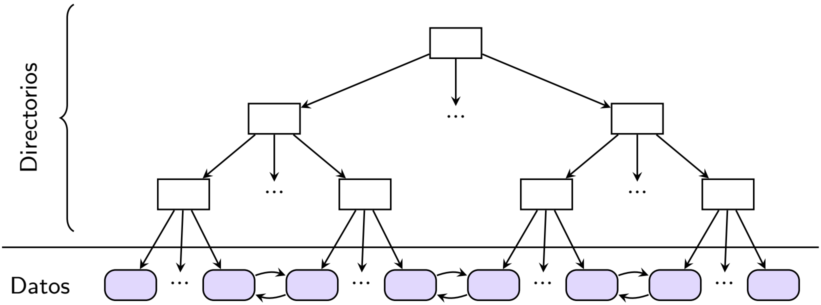
$$h \in \mathcal{O}(\log_M(n))$$

- Es decir, mientras mayor ramificación, menor altura (para n fijo)

Hoy veremos una versión más general de los árboles 2-3

Estructura de B+-trees

Distinguimos entre nodos que solo permiten navegar (directorios) y aquellos que contienen los pares (datos)



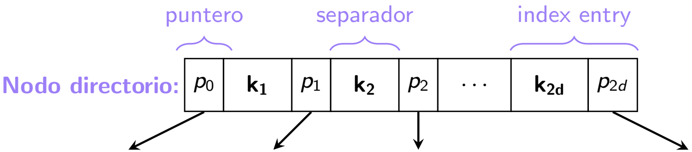
Árboles B+

Algunas observaciones ...

- Siempre esta **balanceado**.
- Mantiene la eficiencia de búsqueda: $\mathcal{O}\big(\log_{2d}(\#datos)\big)$.
- Procedimientos eficientes de insertar/eliminar elementos.
- Todos los nodos tienen un uso mínimo del 50% (menos el root).

"B+-trees are by far the most important access path structure in databases and file systems", Gray y Reuter (1993).

Estructura de B+-trees



- El mínimo y máximo número de llaves y punteros (n) viene dado por el **orden (d)** del B+-tree:

$$d \leq n \leq 2d \quad \text{para los intermedios}$$
$$1 \leq n \leq 2d \quad \text{para la raíz}$$

Búsqueda y range queries en B+-trees

Consideremos una consulta que use un índice sobre el atributo A:

```
SELECT  *
FROM    R
WHERE   A BETWEEN x AND y
```

1. Llamar P = `busquedaEnArbol`(x,raíz).
2. Realizar una búsqueda del mayor elemento k^* en P con $k^* \leq x$.
3. Hacer scan desde k^* sobre todos los valores menores o iguales a y.

¿Cómo cambia el desempeño de esta operación si x no está almacenado?