Comparación de técnicas de diseño

Clase 19

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Diego Arroyuelo

Sumario

Nuestra cuarta estrategia de diseño

Programación dinámica

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de **subproblemas** que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se **solapan**, i.e. comparten **sub-subproblemas**

La diferencia con **dividir para conquistar** es que en esta última los subproblemas son disjuntos

La clave de programación dinámica es
recordar las soluciones a los subproblemas

Problema de dar vuelto

Consideremos ahora el problema de dar S pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Asignar tantas monedas *grandes* como sea posible, antes de avanzar a la siguiente moneda *grande*

Ejemplo

Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{10, 5, 2, 1\}$, la estrategia codiciosa **siempre** produce el menor número de monedas para un vuelto S cualquiera

Problema de dar vuelto

Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera. Si $\{v_1, v_2, v_3\} = \{6, 4, 1\}$ y $S = 8$, entonces la estrategia produce

$$8 = 6 + 1 + 1$$

pero el óptimo es

$$8 = 4 + 4$$

Lo atacamos con programación dinámica

Problema de dar vuelto

Dado un conjunto de valores ordenados $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definimos $z(S, n)$ como el problema de encontrar el menor número de monedas para totalizar S

Ejercicio

Proponga una recurrencia para resolver el problema $z(S, n)$ y plantee un algoritmo a partir de ella.

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Sea $Z(S, n)$ la solución óptima al problema $z(S, n)$. Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor v_n

- Si se incluye una moneda de valor v_n,

$$Z(S, n) = Z(S - v_n, n) + 1$$

- Si no se usan monedas de valor v_n,

$$Z(S, n) = Z(S, n - 1)$$

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

- Para las monedas de de valor v_n,

$$Z(S,n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1,\ Z(S, n-1)\}$$

- Luego, generalizamos para el subconjunto de los primeros k valores de monedas

$$Z(T,k) = \min\{Z(T - v_k, n) + 1,\ Z(T, k-1)\}$$

donde $Z(T,0) = +\infty$ si $T > 0$, y $Z(0,k) = 0$

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Con esto, podemos plantear el siguiente algoritmo iterativo

```
Change(S):
    for T = 1, ..., S :
        Z[T][0] ← +∞
    for k = 0, ..., n :
        Z[0][k] ← 0
    for k = 1, ..., n :
        for T = 1, ..., S :
            Z[T][k] ← Z[T][k − 1]
            if T − v_k ≥ 0 :
                Z[T][k] ← min{Z[T][k], Z[T − v_k, k]}
```

Objetivos de la clase

- Comparar las técnicas estudiadas
- Aplicar las técnicas para resolver problemas

Sumario

Panorama de técnicas

En este punto ya conocemos las 4 estrategias siguientes

- Dividir para conquistar
- Backtracking
- Algoritmos codiciosos
- Programación dinámica

¿Cuándo preferimos una sobre otra en la práctica?

Panorama de técnicas

No todas las estrategias resuelven los mismos problemas

- ¿Problemas con subproblemas del mismo tipo?
- ¿Subestructura óptima?
- ¿Problema de satisfacción de restricciones?
- ¿Problema con estrategia codiciosa?
- ¿Subproblemas se repiten?

La práctica nos sugiere qué técnicas son relevantes ante un problema

Panorama de técnicas

Caso especial: problemas de optimización

- En general, se pueden resolver con más de una técnica

¿Qué criterios permiten escoger?

Optimización y las técnicas

Backtracking

- Requiere computar **todas** las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

- Solo si es que existe estrategia probada
- MUY eficientes en tiempo y memoria

Programación dinámica

- Solo si hay subestructura óptima
- Puede ser eficiente en tiempo y memoria

Sumario

Coloración de grafos

Definición

Una **k-coloración** de un grafo o árbol $G = (V, E)$ es una función $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ que asigna un color a cada vértice de G de forma que vértices conectados por una arista no tienen el mismo color. Decimos que G es **k-coloreable** si existe una k-coloración para sus vértices.

Problema:	COL
Input:	Un grafo G y un natural $k \geq 1$
Output:	¿G es k-coloreable?

¿Qué estrategias podemos emplear para dar una solución algorítmica?

Coloración de grafos

Problema:	COL
Input:	Un grafo G y un natural $k \geq 1$
Output:	¿G es k-coloreable?

COL involucra asignar colores bajo restricciones

- ¿Cómo se ve f que sea k-coloración?
- ¿Podemos comprobar fácilmente si f es k-coloración?

Nos encontramos frente a un CSP

Coloración de grafos

Plan de diseño de solución con **Backtracking**

1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
2. Escoger EDD para almacenar **asignación**: e.g. arreglo $A[0 \ldots n-1]$
3. Valores guardados se corresponden con los colores
4. Suponemos conocidos los vecinos $N(v)$ del nodo v
5. Con $N(v)$ revisamos la **restricción de color**

Definimos un pseudocódigo para resolver el problema de decisión $\textsc{Col}$

Coloración de grafos

Suponemos que los nodos tienen etiquetas $V = \{0, \ldots, n-1\}$ y que el arreglo $A[0 \ldots n-1]$ comienza con valores `null`

input : arreglo $A[0 \ldots n-1]$, número natural $k \geq 1$, índice $i \in \{0, \ldots, n\}$

`Col`(A, k, i)**:**

1 **if** $i = n$ **:**
2   **return True**
3 **for** $j = 1, \ldots, k$ **:**
4   **if** *vecinos de i en* $N(i)$ *tienen color distinto a* j **:**
5         $A[i] \leftarrow j$
6   **if** `Col`$(A, k, i+1)$ **:**
7   **return True**
8     $A[i] \leftarrow$ `null`
9 **return False**

¿Cómo se implementaría la línea 4?

Coloración de grafos

A partir del pseudocódigo anterior, podemos obtener **todas** las coloraciones existentes

input : arreglo $A[0 \dots n-1]$, número natural $k \geq 1$, índice $i \in \{0, \dots, n\}$

```
Col(A, k, i):
    if i = n :
        return True
    for j = 1, ..., k :
        if vecinos de i en N(i) tienen color distinto a j :
            A[i] ← j
            if Col(A, k, i + 1) :
                return True
        A[i] ← null
    return False
```

¿Dónde realizamos modificaciones para obtener todas las soluciones?

Otro problema de asignación

Definición

Sea $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ una secuencia de números naturales. Una **subsecuencia creciente** de A es una secuencia $B = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$ tal que $m \leq n$, cada elemento de B está en A y para todo $1 \leq i \leq m - 1$ se tiene que $u_i < u_{i+1}$. Considere el problema de encontrar la **subsecuencia creciente más larga** (SCML) para una secuencia.

Problema:	LIS
Input:	Una secuencia de naturales $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$
Output:	Subsecuencia creciente más larga $B = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$

Otro problema de asignación

Ejemplo

Para $A = \langle 3, 1, 5, 6 \rangle$, hay dos SCML de largo 3 dadas por $B_1 = \langle 3, 5, 6 \rangle$ y $B_2 = \langle 1, 5, 6 \rangle$.

Problema:	LIS
Input:	Una secuencia de naturales $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$
Output:	Subsecuencia creciente más larga $B = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$

¿Qué estrategias podemos emplear para dar una solución algorítmica?

Otro problema de asignación

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

Posibles abordajes

- Backtracking:
  - Intentar tomar todas las subsecuencias
  - Verificar que con cada una cumpla la definición de subsecuencia creciente
  - Comparar cantidad de elementos en soluciones factibles
- Greedy

Una posible estrategia codiciosa

Considere un algoritmo "codicioso" que revisa de izquierda a derecha los elementos de la secuencia $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ y determina si se debe incluir v_i con la siguiente estrategia codiciosa:

"*Si es menor que el último elemento incluido, no se le incluye.*
En otro caso, se incluye."

¿Cómo demostramos que esta estrategia no entrega el óptimo?

Una posible estrategia codiciosa

Idea general para desmentir estrategias "*codiciosas falsas*"

- Debemos aprovechar la decisión de la estrategia
- Forzar a que cometa un error basado en su decisión local

¿Qué secuencia muestra que esta estrategia no funciona?

Podemos tomar cualquier secuencia cuyo primer elemento no debiera ser incluído: $A = \langle 10, 1, 2, 3, 4 \rangle$.

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Comparar las técnicas estudiadas
- ☐ Aplicar las técnicas para resolver problemas