Comparación de técnicas de diseño

Clase 19

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Yadran Eterovic

Sumario

Introducción

Las técnicas

Dos casos

Cierre

Programación dinámica

Programación dinámica

Generalmente usada en problemas de optimización

Programación dinámica

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de subproblemas que permiten resolver el problema original

Programación dinámica

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de subproblemas que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se solapan, i.e. comparten sub-subproblemas

Programación dinámica

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de subproblemas que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se solapan, i.e. comparten sub-subproblemas

La diferencia con **dividir para conquistar** es que en esta última los subproblemas son disjuntos

Programación dinámica

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de subproblemas que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se solapan, i.e. comparten sub-subproblemas

La diferencia con **dividir para conquistar** es que en esta última los subproblemas son disjuntos

La clave de programación dinámica es recordar las soluciones a los subproblemas

Consideremos ahora el problema de dar ${\it S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

Consideremos ahora el problema de dar ${\cal S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

■ Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$

Consideremos ahora el problema de dar ${\cal S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Consideremos ahora el problema de dar ${\cal S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Consideremos ahora el problema de dar ${\cal S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \dots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Asignar tantas monedas *grandes* como sea posible, antes de avanzar a la siguiente moneda *grande*

Consideremos ahora el problema de dar ${\cal S}$ pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Asignar tantas monedas *grandes* como sea posible, antes de avanzar a la siguiente moneda *grande*

Ejemplo

Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{10, 5, 2, 1\}$, la estrategia codiciosa **siempre** produce el menor número de monedas para un vuelto S cualquiera

Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera.

Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera. Si $\{v_1, v_2, v_3\} = \{6, 4, 1\}$ y S = 8, entonces la estrategia produce

$$8 = 6 + 1 + 1$$

pero el óptimo es

$$8 = 4 + 4$$

Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera. Si $\{v_1, v_2, v_3\} = \{6, 4, 1\}$ y S = 8, entonces la estrategia produce

$$8 = 6 + 1 + 1$$

pero el óptimo es

$$8 = 4 + 4$$

Lo atacamos con programación dinámica

Dado un conjunto de valores ordenados $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definimos z(S, n) como el problema de encontrar el menor número de monedas para totalizar S

Dado un conjunto de valores ordenados $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definimos z(S, n) como el problema de encontrar el menor número de monedas para totalizar S

Ejercicio

Proponga una recurrencia para resolver el problema z(S,n) y plantee un algoritmo a partir de ella.

Ejercicio

Sea Z(S,n) la solución óptima al problema z(S,n). Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor v_n

Ejercicio

Sea Z(S,n) la solución óptima al problema z(S,n). Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor v_n

Si se incluye una moneda de valor v_n ,

$$Z(S,n)=Z(S-v_n,n)+1$$

Ejercicio

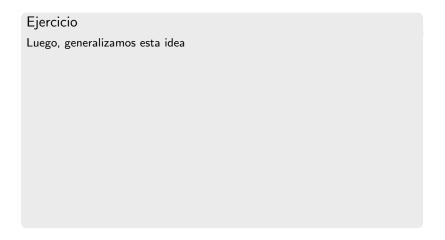
Sea Z(S, n) la solución óptima al problema z(S, n). Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor v_n

Si se incluye una moneda de valor v_n ,

$$Z(S,n)=Z(S-v_n,n)+1$$

Si no se usan monedas de valor v_n ,

$$Z(S,n)=Z(S,n-1)$$



Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

Para las monedas de de valor v_n ,

$$Z(S, n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1, Z(S, n - 1)\}$$

Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

Para las monedas de de valor v_n ,

$$Z(S, n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1, Z(S, n - 1)\}$$

 Luego, generalizamos para el subconjunto de los primeros k valores de monedas

$$Z(T, k) = \min\{Z(T - v_k, n) + 1, Z(T, k - 1)\}$$

donde
$$Z(T,0) = +\infty$$
 si $T > 0$, y $Z(0,k) = 0$

```
Ejercicio
Con esto, podemos plantear el siguiente algoritmo iterativo
  Change(S):
      for T = 1, ..., S:
          Z[T][0] \leftarrow +\infty
      for k = 0, ..., n:
          Z[0][k] \leftarrow 0
      for k = 1, ..., n:
          for T = 1, ..., S:
              Z[T][k] \leftarrow Z[T][k-1]
              if T - v_k > 0:
                  Z[T][k] \leftarrow \min\{Z[T][k], Z[T-v_k, k]\}
```

Objetivos de la clase

Objetivos de la clase

☐ Comparar las técnicas estudiadas

Objetivos de la clase

- □ Comparar las técnicas estudiadas
- ☐ Aplicar las técnicas para resolver problemas

Sumario

Introducción

Las técnicas

Dos casos

Cierre

Panorama de técnicas

En este punto ya conocemos las 4 estrategias siguientes

- Dividir para conquistar
- Backtracking
- Algoritmos codiciosos
- Programación dinámica

¿Cuándo preferimos una sobre otra en la práctica?

Panorama de técnicas

No todas las estrategias resuelven los mismos problemas

- ¿Problemas con subproblemas del mismo tipo?
- ¿Subestructura óptima?
- ¿Problema de satisfacción de restricciones?
- ¿Problema con estrategia codiciosa?
- ; Subproblemas se repiten?

La práctica nos sugiere qué técnicas son relevantes ante un problema

Panorama de técnicas

Caso especial: problemas de optimización

■ En general, se pueden resolver con más de una técnica

¿Qué criterios permiten escoger?

Optimización y las técnicas

Backtracking

Backtracking

Requiere computar todas las soluciones factibles

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

Solo si es que existe estrategia probada

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

- Solo si es que existe estrategia probada
- MUY eficientes en tiempo y memoria

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

- Solo si es que existe estrategia probada
- MUY eficientes en tiempo y memoria

Programación dinámica

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

- Solo si es que existe estrategia probada
- MUY eficientes en tiempo y memoria

Programación dinámica

Solo si hay subestructura óptima

Backtracking

- Requiere computar todas las soluciones factibles
- Eso puede ser útil en ciertas ocasiones
- Muy costoso en tiempo

Codiciosos

- Solo si es que existe estrategia probada
- MUY eficientes en tiempo y memoria

Programación dinámica

- Solo si hay subestructura óptima
- Puede ser eficiente en tiempo y memoria

Sumario

Introducción

Las técnicas

Dos casos

Cierre

Definición

Una k-coloración de un grafo o árbol G = (V, E) es una función $f: V \to \{1, \ldots, k\}$ que asigna un color a cada vértice de G de forma que vértices conectados por una arista no tienen el mismo color.

Definición

Una k-coloración de un grafo o árbol G = (V, E) es una función $f: V \to \{1, \dots, k\}$ que asigna un color a cada vértice de G de forma que vértices conectados por una arista no tienen el mismo color. Decimos que G es k-coloreable si existe una K-coloración para sus vértices.

Definición

Una k-coloración de un grafo o árbol G = (V, E) es una función $f: V \to \{1, \ldots, k\}$ que asigna un color a cada vértice de G de forma que vértices conectados por una arista no tienen el mismo color. Decimos que G es k-coloreable si existe una k-coloración para sus vértices.

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: $\downarrow G$ es k-coloreable?

Definición

Una k-coloración de un grafo o árbol G = (V, E) es una función $f: V \to \{1, \ldots, k\}$ que asigna un color a cada vértice de G de forma que vértices conectados por una arista no tienen el mismo color. Decimos que G es k-coloreable si existe una K-coloración para sus vértices.

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: i G es k-coloreable?

¿Qué estrategias podemos emplear para dar una solución algorítmica?

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: i G es k-coloreable?

Col involucra asignar colores bajo restricciones

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: i G es k-coloreable?

Col involucra asignar colores bajo restricciones

¿Cómo se ve f que sea k-coloración?

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: i G es k-coloreable?

Col involucra asignar colores bajo restricciones

- ¿Cómo se ve f que sea k-coloración?
- \blacksquare ¿Podemos comprobar fácilmente si f es k-coloración?

Problema: Col

Input: Un grafo G y un natural $k \ge 1$

Output: $\downarrow G$ es k-coloreable?

Col involucra asignar colores bajo restricciones

- ¿Cómo se ve f que sea k-coloración?
- ¿Podemos comprobar fácilmente si f es k-coloración?

Nos encontramos frente a un CSP

Plan de diseño de solución con Backtracking

1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)

- 1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
- 2. Escoger EDD para almacenar asignación: e.g. arreglo A[0...n-1]

- 1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
- 2. Escoger EDD para almacenar asignación: e.g. arreglo A[0...n-1]
- 3. Valores guardados se corresponden con los colores

- 1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
- 2. Escoger EDD para almacenar asignación: e.g. arreglo A[0...n-1]
- 3. Valores guardados se corresponden con los colores
- 4. Suponemos conocidos los vecinos N(v) del nodo v

- 1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
- 2. Escoger EDD para almacenar asignación: e.g. arreglo A[0...n-1]
- 3. Valores guardados se corresponden con los colores
- 4. Suponemos conocidos los vecinos N(v) del nodo v
- 5. Con N(v) revisamos la restricción de color

Plan de diseño de solución con Backtracking

- 1. Suponemos conocido el listado de nodos (n nodos) y de aristas (m aristas)
- 2. Escoger EDD para almacenar asignación: e.g. arreglo A[0...n-1]
- 3. Valores guardados se corresponden con los colores
- 4. Suponemos conocidos los vecinos N(v) del nodo v
- 5. Con N(v) revisamos la restricción de color

Definimos un pseudocódigo para resolver el problema de decisión COL

Suponemos que los nodos tienen etiquetas $V=\{0,\ldots,n-1\}$ y que el arreglo $A[0\ldots n-1]$ comienza con valores null

```
Suponemos que los nodos tienen etiquetas V = \{0, ..., n-1\} y que el
  arreglo A[0...n-1] comienza con valores null
  input: arreglo A[0...n-1], número natural k \ge 1, índice i \in \{0,...,n\}
  Col(A, k, i):
     if i = n:
1
         return True
2
     for j = 1, ..., k:
3
         if vecinos de i en N(i) tienen color distinto a j :
             A[i] \leftarrow j
             if Col(A, k, i + 1):
                 return True
7
         A[i] \leftarrow \text{null}
      return False
9
```

```
Suponemos que los nodos tienen etiquetas V = \{0, ..., n-1\} y que el
  arreglo A[0...n-1] comienza con valores null
  input: arreglo A[0...n-1], número natural k \ge 1, índice i \in \{0,...,n\}
  Col(A, k, i):
     if i = n:
1
         return True
2
     for j = 1, ..., k:
3
         if vecinos de i en N(i) tienen color distinto a j :
             A[i] \leftarrow j
             if Col(A, k, i + 1):
                 return True
7
         A[i] \leftarrow \text{null}
      return False
9
```

¿Cómo se implementaría la línea 4?

A partir del pseudocódigo anterior, podemos obtener todas las coloraciones existentes

```
input: arreglo A[0...n-1], número natural k \ge 1, índice i \in \{0,...,n\}
  Col(A, k, i):
     if i = n:
1
          return True
    for j = 1, ..., k:
3
          if vecinos de i en N(i) tienen color distinto a i:
              A[i] \leftarrow i
              if Col(A, k, i + 1):
                  return True
          A[i] \leftarrow \text{null}
      return False
9
```

¿Dónde realizamos modificaciones para obtener todas las soluciones?

Definición

Sea $A = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ una secuencia de números naturales. Una subsecuencia creciente de A es una secuencia $B = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$ tal que $m \le n$, cada elemento de B está en A y para todo $1 \le i \le m-1$ se tiene que $u_i < u_{i+1}$. Considere el problema de encontrar la subsecuencia creciente más larga (SCML) para una secuencia.

Problema: LIS

Input: Una secuencia de naturales $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

Output: Subsecuencia creciente más larga $B = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$

Ejemplo

Para A = (3, 1, 5, 6), hay dos SCML de largo 3 dadas por $B_1 = (3, 5, 6)$ y $B_2 = (1, 5, 6)$.

Problema: LIS

Input: Una secuencia de naturales $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

Output: Subsecuencia creciente más larga $B = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$

Ejemplo

Para $A = \langle 3, 1, 5, 6 \rangle$, hay dos SCML de largo 3 dadas por $B_1 = \langle 3, 5, 6 \rangle$ y $B_2 = \langle 1, 5, 6 \rangle$.

Problema: LIS

Input: Una secuencia de naturales $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

Output: Subsecuencia creciente más larga $B = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$

¿Qué estrategias podemos emplear para dar una solución algorítmica?

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

■ También se puede ver como un CSP

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

Posibles abordajes

Backtracking:

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

- Backtracking:
 - Intentar tomar todas las subsecuencias.

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

- Backtracking:
 - Intentar tomar todas las subsecuencias.
 - Verificar que con cada una cumpla la definición de subsecuencia creciente

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

- Backtracking:
 - Intentar tomar todas las subsecuencias
 - Verificar que con cada una cumpla la definición de subsecuencia creciente
 - Comparar cantidad de elementos en soluciones factibles

A diferencia del anterior, este es un problema de optimización

- También se puede ver como un CSP
- ... con el ingrediente adicional de ser un problema que busca minimizar

¿Existe subestructura óptima de forma intuitiva?

- Backtracking:
 - Intentar tomar todas las subsecuencias
 - Verificar que con cada una cumpla la definición de subsecuencia creciente
 - Comparar cantidad de elementos en soluciones factibles
- Greedy

Considere un algoritmo "codicioso" que revisa de izquierda a derecha los elementos de la secuencia $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ y determina si se debe incluir v_i con la siguiente estrategia codiciosa:

Considere un algoritmo "codicioso" que revisa de izquierda a derecha los elementos de la secuencia $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ y determina si se debe incluir v_i con la siguiente estrategia codiciosa:

"Si es menor que el último elemento incluido, no se le incluye. En otro caso, se incluye."

Considere un algoritmo "codicioso" que revisa de izquierda a derecha los elementos de la secuencia $A = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ y determina si se debe incluir v_i con la siguiente estrategia codiciosa:

"Si es menor que el último elemento incluido, no se le incluye."

En otro caso, se incluye."

¿Cómo demostramos que esta estrategia no entrega el óptimo?

Idea general para desmentir estrategias "codiciosas falsas"

Idea general para desmentir estrategias "codiciosas falsas"

Debemos aprovechar la decisión de la estrategia

Idea general para desmentir estrategias "codiciosas falsas"

- Debemos aprovechar la decisión de la estrategia
- Forzar a que cometa un error basado en su decisión local

Idea general para desmentir estrategias "codiciosas falsas"

- Debemos aprovechar la decisión de la estrategia
- Forzar a que cometa un error basado en su decisión local

¿Qué secuencia muestra que esta estrategia no funciona?

Idea general para desmentir estrategias "codiciosas falsas"

- Debemos aprovechar la decisión de la estrategia
- Forzar a que cometa un error basado en su decisión local

¿Qué secuencia muestra que esta estrategia no funciona?

Podemos tomar cualquier secuencia cuyo primer elemento no debiera ser incluído: $A = \langle 10, 1, 2, 3, 4 \rangle$.

Sumario

Introducción

Las técnicas

Dos casos

Cierre

Objetivos de la clase

Objetivos de la clase

☐ Comparar las técnicas estudiadas

Objetivos de la clase

- □ Comparar las técnicas estudiadas
- ☐ Aplicar las técnicas para resolver problemas