

# BFS y algoritmo de Dijkstra

Clase 23

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

**Introducción**

BFS

Algoritmo de Dijkstra

Cierre

# Rutas en viajes

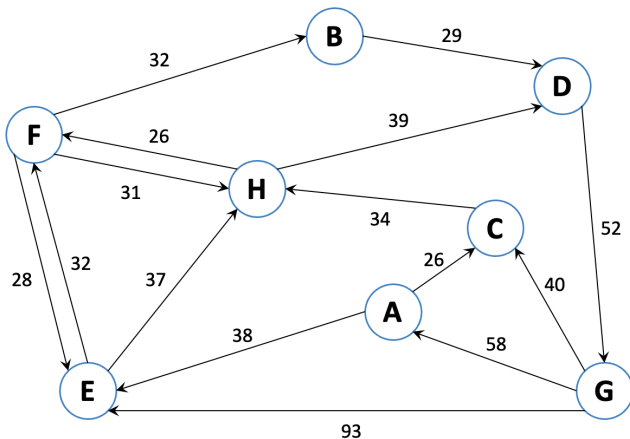
Consideremos el problema de planificar un viaje en auto entre dos ciudades

- Podemos pensar en un grafo **dirigido**: caminos y puntos de intersección
- El auto tiene un consumo
- El combustible tiene un costo
- Cada camino tiene un largo conocido
- Además, cada camino puede tener un peaje

El costo  $\sigma_i$  de usar el camino  $i$  engloba los estos diferentes costos

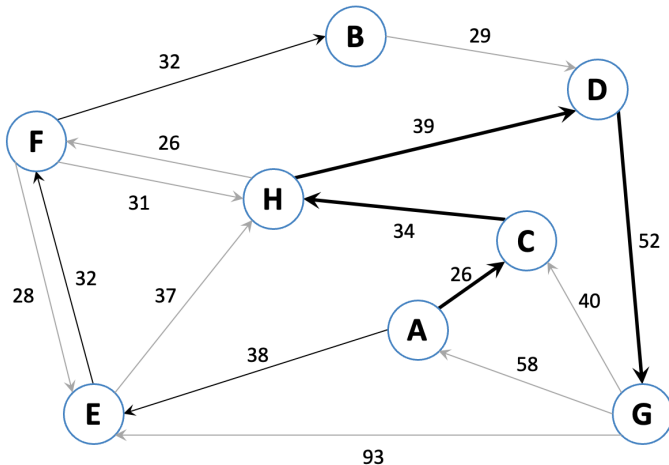
Podemos representar los  $\sigma_i$  en un **grafo dirigido con costos**

## Rutas en viajes



Notemos que en este problema, los costos son **no negativos**

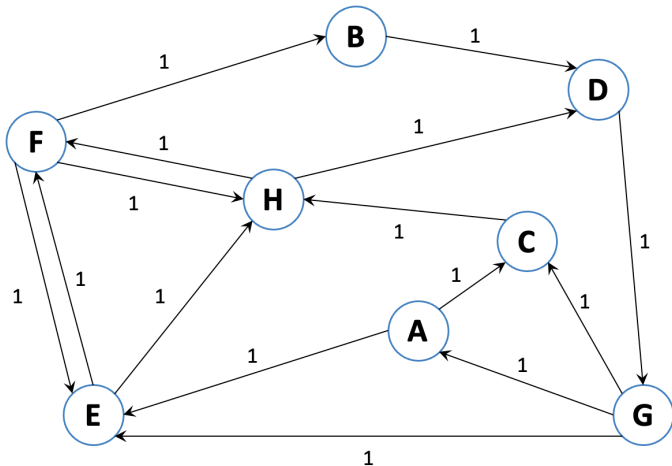
# Rutas en viajes



Objetivo: ruta más barata, i.e. suma de los costos debe ser mínima

# Rutas en viajes: versión 1.0

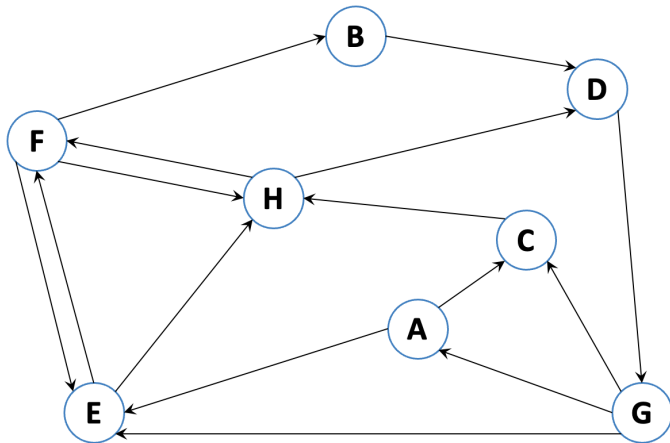
Consideremos el caso en que los costos son iguales:  $\sigma_i = K$



¿A qué equivale encontrar la ruta más barata en este caso?

# Rutas en viajes: versión 1.0

Consideremos el caso en que los costos son iguales:  $\sigma_i = K$



Simplemente buscamos la **ruta más corta** (menos cantidad de aristas)

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido BFS de un grafo
- ☐ Extender BFS para definir el algoritmo de rutas más cortas
- ☐ Demostrar que Dijkstra es un algoritmo correcto
- ☐ Determinar la complejidad de Dijkstra



# Sumario

Introducción

**BFS**

Algoritmo de Dijkstra

Cierre

# Búsqueda en amplitud

El algoritmo que utilizaremos para resolver este problema simplificado se llama **BFS** o **Búsqueda en amplitud**

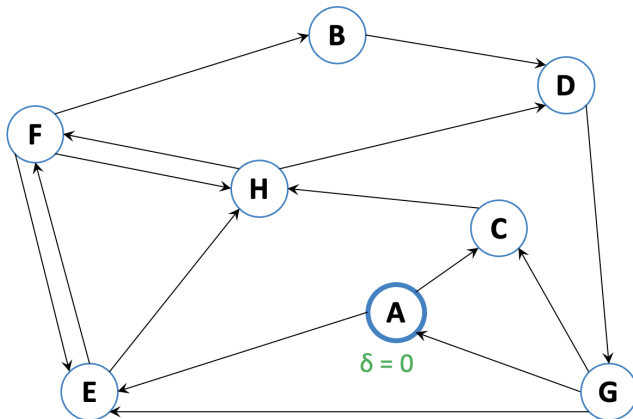
- Tal como DFS es un algoritmo de búsqueda
- BFS revisa los vecinos inmediatos y luego sigue con los vecinos de estos
- Es decir, BFS recorre en base a **distancia desde un nodo inicial**

Para nuestro problema,  $\delta$  será la distancia desde el punto de inicio hasta cada nodo

Por definición  $\delta$  es la **menor distancia** de  $A$  a cualquier nodo

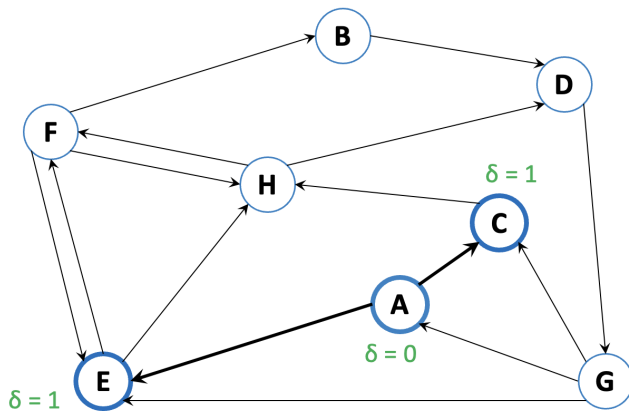
# BFS y rutas más cortas

Iniciamos visitando los nodos a distancia  $\delta = 0$  desde A



# BFS y rutas más cortas

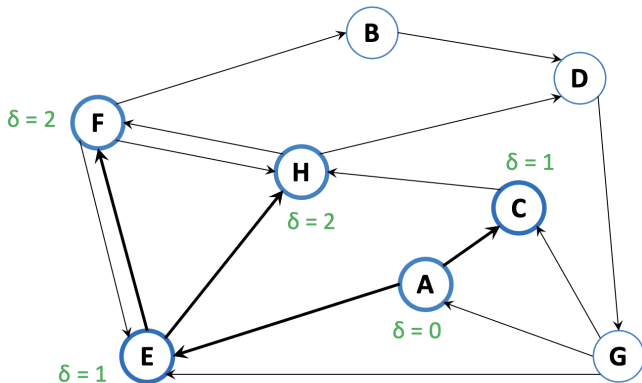
Ahora visitamos los nodos con  $\delta = 1$  desde A



Los nodos a distancia  $\delta = 1$  son alcanzables por una arista directa desde A

# BFS y rutas más cortas

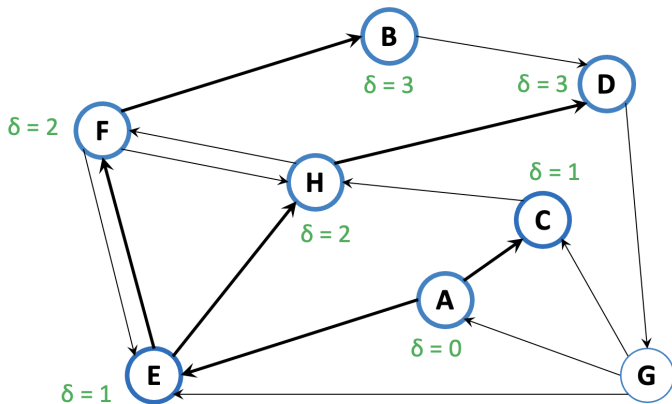
Ahora visitamos los nodos con  $\delta = 2$  desde A



Notemos que hay dos caminos de largo 2 desde A hasta H

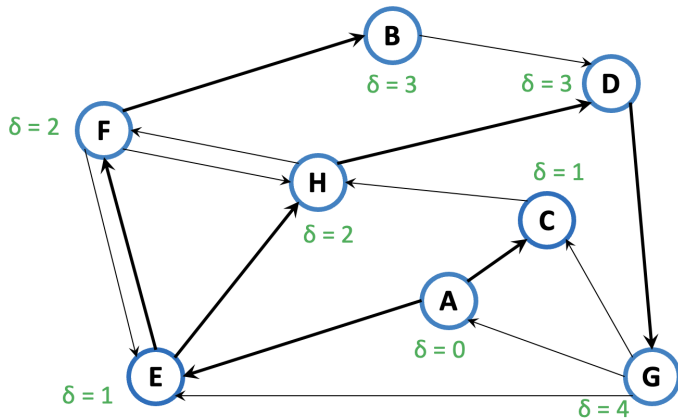
# BFS y rutas más cortas

Ahora visitamos los nodos con  $\delta = 3$  desde A



# BFS y rutas más cortas

Ahora visitamos los nodos con  $\delta = 4$  desde  $A$



Notemos que  $D$  no es descubierto desde  $B$

# Búsqueda en amplitud

BFS descubre los nodos a través del menor número de aristas

- Siempre se visitan primero los nodos a distancia  $\delta = k$
- Luego se llega a los que están a distancia  $\delta = k + 1$

Debemos asegurar que los nodos son descubiertos en el orden adecuado

¿Cómo distinguir entre descubiertos y no descubiertos?



# Implementación de BFS

Podemos distinguir los nodos con *colores*

- blanco: no descubierto
- gris: descubierto con vecinos no descubiertos (pendientes)
- negro: descubierto con vecinos descubiertos (terminado)

Como interesa descubrir nodos **en orden**, hay que almacenar los recién descubiertos

- Usaremos una **cola FIFO**
- Cuando descubrimos un nodo, lo agregamos al final de la cola
- Para revisar nuevos vecinos, sacamos el nodo prioritario

¿DFS se puede pensar con una estrategia análoga?

# Implementación de BFS

**input** : vértice de inicio  $s$

BFS( $s$ ):

**for**  $u \in V - \{s\}$  :

$u.color \leftarrow \text{blanco}$ ;  $u.\delta \leftarrow \infty$ ;  $\pi[u] \leftarrow \emptyset$

$s.color \leftarrow \text{gris}$ ;  $s.\delta \leftarrow 0$ ;  $\pi[s] \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow$  cola FIFO vacía

  Insert( $Q, s$ )

**while**  $Q$  no está vacía :

$u \leftarrow$  Extract( $Q$ )

**for**  $v \in \alpha[u]$  :

**if**  $v.color = \text{blanco}$  :

$v.color \leftarrow \text{gris}$ ;  $v.\delta \leftarrow u.\delta + 1$

$\pi[v] \leftarrow u$

        Insert( $Q, v$ )

$u.color \leftarrow \text{negro}$

# Implementación de BFS

BFS( $s$ ):

**for**  $u \in V - \{s\}$  :

$u.color \leftarrow \text{blanco}; u.\delta \leftarrow \infty; \pi[u] \leftarrow \emptyset$

$s.color \leftarrow \text{gris}; s.\delta \leftarrow 0; \pi[s] \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow$  cola FIFO vacía

Insert( $Q, s$ )

**while**  $Q$  no está vacía :

$u \leftarrow \text{Extract}(Q)$

**for**  $v \in \alpha[u]$  :

**if**  $v.color = \text{blanco}$  :

$v.color \leftarrow \text{gris}; v.\delta \leftarrow u.\delta + 1$

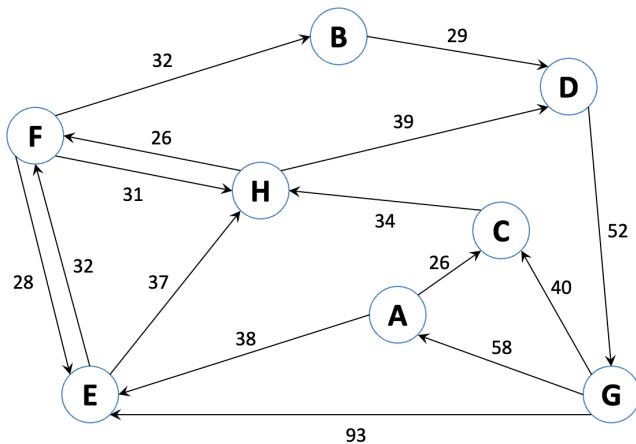
$\pi[v] \leftarrow u$

Insert( $Q, v$ )

$u.color \leftarrow \text{negro}$

BFS deja en  $\pi$  la representación de un árbol de **rutas más cortas** desde  $s$

## Rutas en viajes: versión 2.0



¿BFS funciona cuando queremos rutas más baratas con costos?

# Sumario

Introducción

BFS

Algoritmo de Dijkstra

Cierre

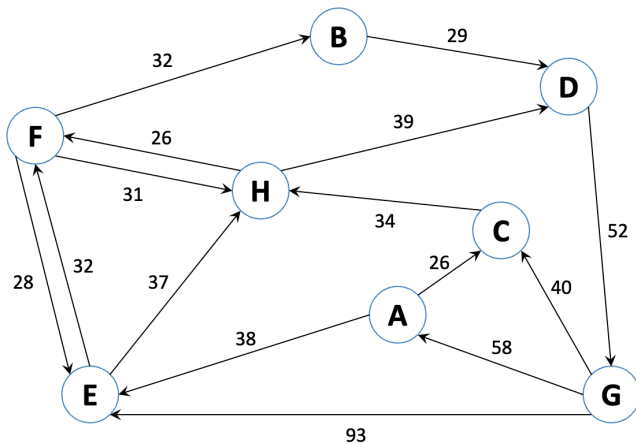
# Búsqueda en amplitud *mejorado*

Necesitamos extender BFS para rutas con costos acumulados

- La cola  $Q$  debe incorporar los costos
- Al sacar un elemento de  $Q$ , lo hemos descubierto por la ruta más barata

¿Qué partes del algoritmo BFS debemos modificar?

## Rutas en viajes: versión 2.0

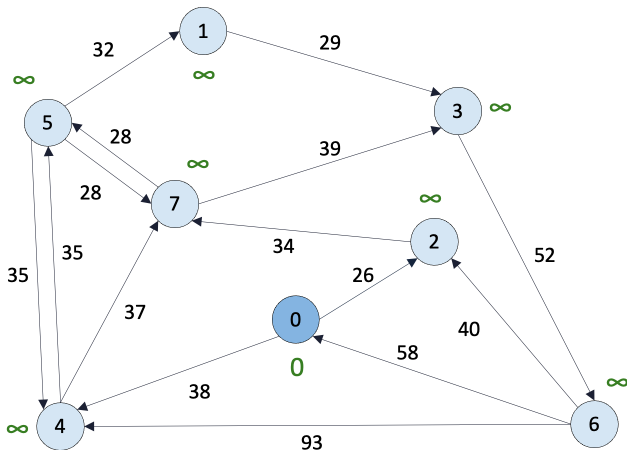


¿BFS funciona cuando queremos rutas más baratas con costos?

# Rutas en viajes: versión 2.0

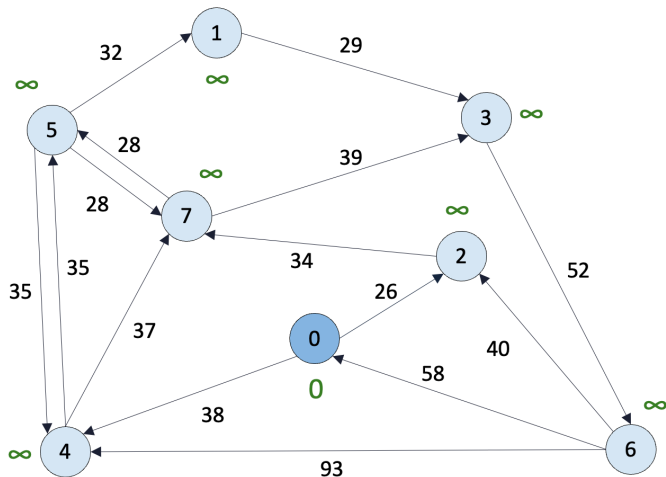
## Ejercicio

Determine la ruta más barata desde el nodo 0 hasta todos los demás nodos de la siguiente red con costos no negativos

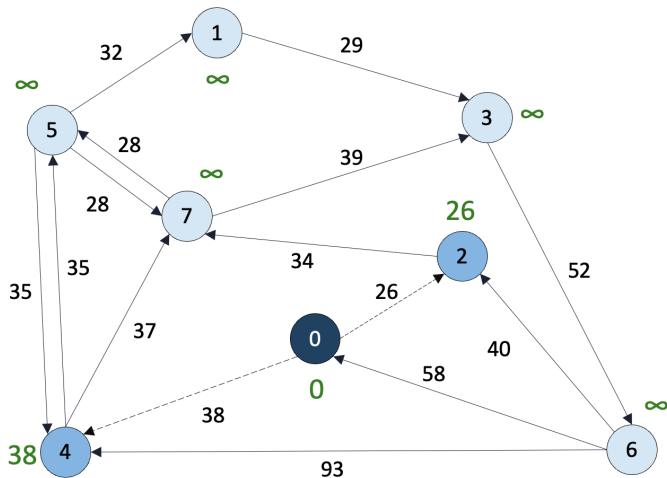




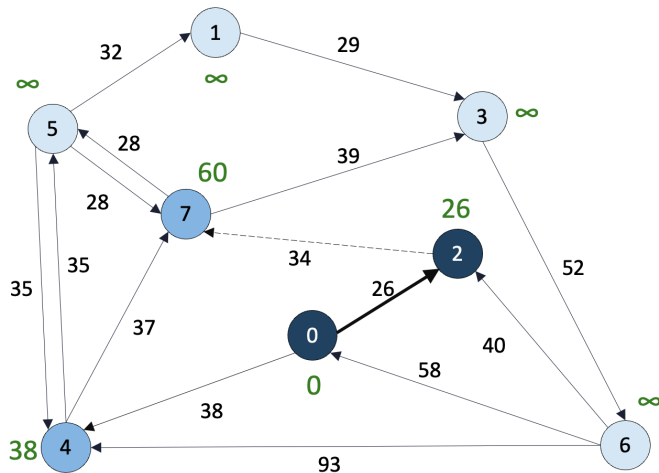
## Rutas en viajes: versión 2.0



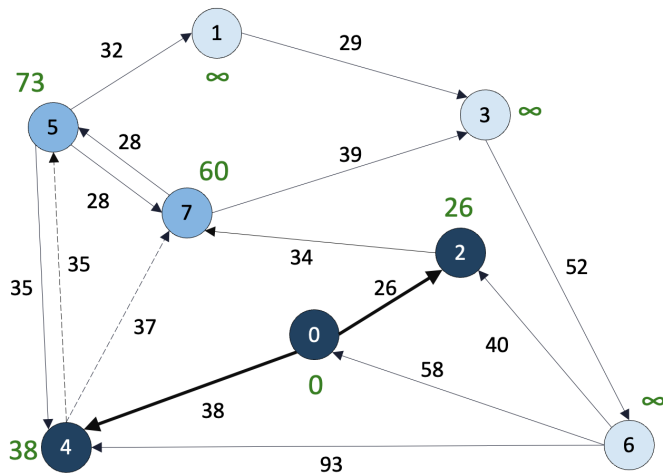
## Rutas en viajes: versión 2.0



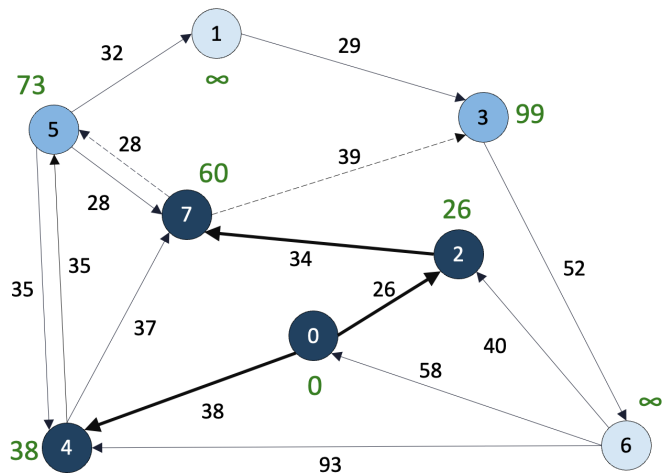
## Rutas en viajes: versión 2.0



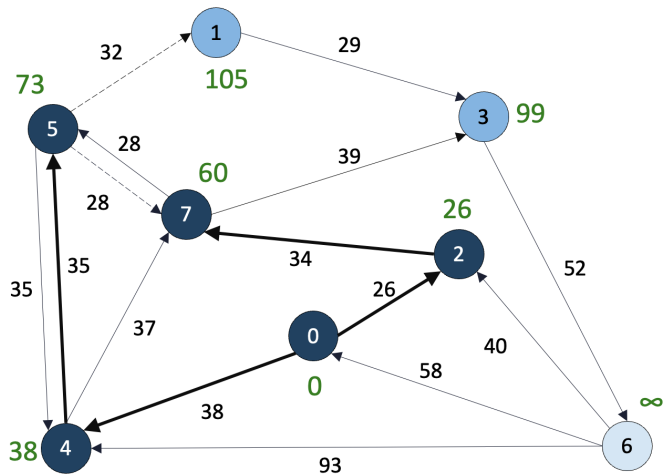
## Rutas en viajes: versión 2.0



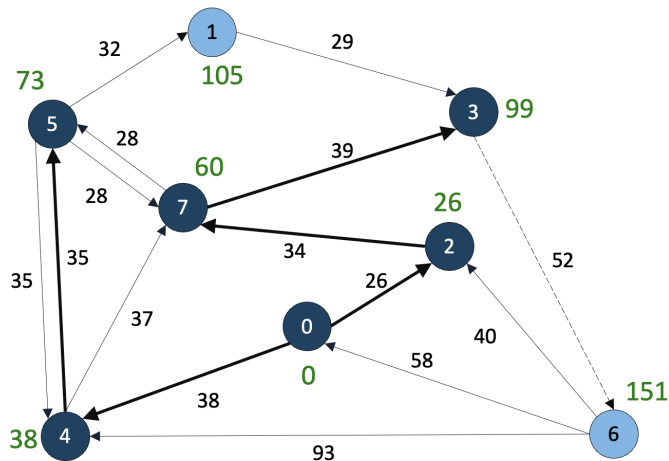
## Rutas en viajes: versión 2.0



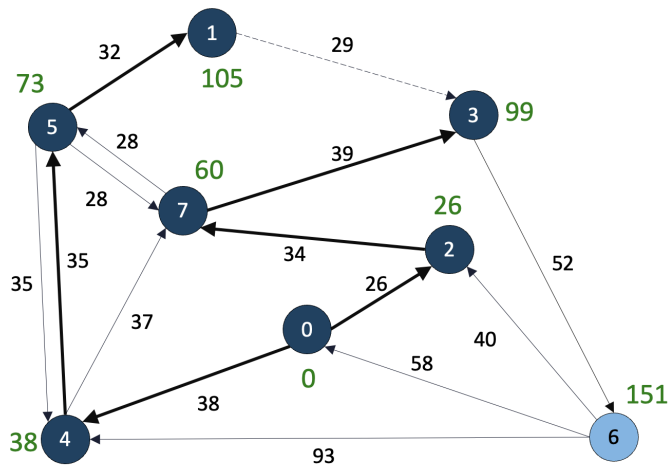
## Rutas en viajes: versión 2.0



## Rutas en viajes: versión 2.0

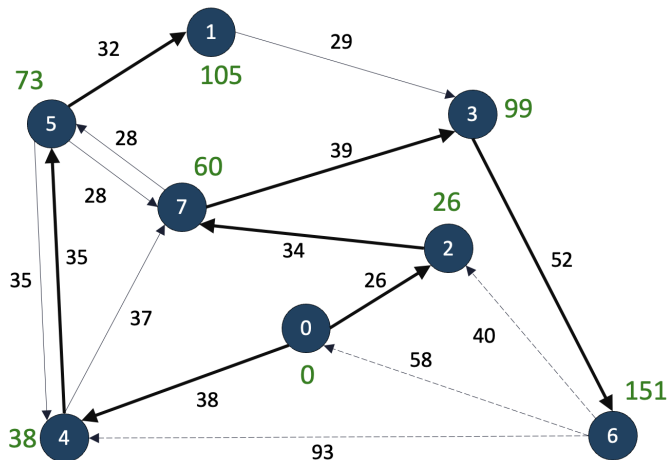


## Rutas en viajes: versión 2.0





## Rutas en viajes: versión 2.0



# Algoritmo de Dijkstra

Dijkstra( $s$ ):

for  $u \in V - \{s\}$  :

$u.color \leftarrow \text{blanco}$ ;  $d[u] \leftarrow \infty$ ;  $\pi[u] \leftarrow \emptyset$

$s.color \leftarrow \text{gris}$ ;  $d[s] \leftarrow 0$ ;  $\pi[s] \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow$  cola de **prioridades** vacía (Min Heap)

Insert( $Q, s$ )

while  $Q$  no está vacía :

$u \leftarrow \text{Extract}(Q)$

    for  $v \in \alpha[u]$  :

        if  $v.color = \text{blanco} \vee v.color = \text{gris}$  :

            if  $d[v] > d[u] + \text{cost}(u, v)$  :

$d[v] \leftarrow d[u] + \text{cost}(u, v)$ ;  $\pi[v] \leftarrow u$

                DecreaseKey( $Q, v, d[v]$ )

        if  $v.color = \text{blanco}$  :

$v.color \leftarrow \text{gris}$ ; Insert( $Q, v$ )

$u.color \leftarrow \text{negro}$

Solo cambia costo+ruta si hay arista que baja el costo

# Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra encuentra las rutas más baratas desde  $s$

- Solo a aquellos vértices alcanzables desde  $s$
- Ojo: puede haber más de una ruta con el mismo costo
- Dijkstra encuentra **una**

¿Qué estrategia algorítmica es usada por este algoritmo?

# Algoritmo de Dijkstra

El algoritmo de Dijkstra es **codicioso**

Además el problema de rutas más cortas tiene **subestructura óptima**

Dada una ruta entre  $v_0, v_k$

- Si  $p = v_0, v_1, \dots, v_k$  es una ruta de costo mínimo
- Entonces la sub-ruta

$$p_{ij} = v_i, \dots, v_j, \quad 0 \leq i \leq j \leq k$$

es una ruta más corta de  $v_i$  a  $v_j$

Si es codicioso, ¿cómo sabemos que funciona en todas las instancias?

# Correctitud de Dijkstra

## Demostración

### Finitud

Es claro que el algoritmo termina, pues no visita nodos ya descubiertos y cada arista es revisada a lo más una vez. Como el grafo es finito, el algoritmo es finito.

### Correctitud

Denotamos por  $\delta(s, v)$  el costo de la ruta más corta de  $s$  a  $v$ .

Probaremos la correctitud del algoritmo demostrando la siguiente propiedad

$P(n) :=$  al inicio de la  $n$ -ésima iteración del **while**  
el nodo  $u$  extraído de  $Q$  cumple  $d[u] = \delta(s, u)$

Lo haremos por inducción sobre  $n$ .

# Correctitud de Dijkstra

## Demostración

**C.B.** Para  $i = 1$ , tenemos que se extrae  $s$ . El óptimo es  $\delta(s, s) = 0$  y corresponde con el costo almacenado  $d[s] = 0$ .

**H.I.** Suponemos que al inicio de la  $k$ -ésima iteración, el nodo extraído cumple la propiedad, para  $k < n$ .

**T.I.** Probaremos el resultado para la iteración  $n$ . Supongamos que esta iteración es tal que  $u$  extraído es el primer nodo tal que

$$d[u] \neq \delta(s, u)$$

Llegaremos a una contradicción, que probará que no hay tal  $u$ , i.e. todos los elementos cumplen la propiedad pedida.

# Correctitud de Dijkstra

## Demostración

Para argumentar que existe un camino de  $s$  hasta  $u$ ,

- Si no existe tal camino, el costo ideal es  $\delta(s, u) = \infty$
- Pero este es el valor inicial  $d[u] = \infty$
- Como solo se puede reducir el costo al encontrar caminos desde  $s$ , se contradice el supuesto de que no hay camino

Sea  $p$  un camino de  $s$  a  $u$  de la forma

$$p = s, \dots, x, y, \dots, u$$

tal que  $y$  es el primer nodo gris desde  $s$  en  $p$

- Como  $y$  es gris, está en la cola  $Q$  y aún no ha sido extraído
- Como  $x$  es negro, ya fue extraído de la cola

# Correctitud de Dijkstra

## Demostración

Por **H.I.** y el hecho de que solo se puede alterar el costo de un nodo gris o blanco, sabemos que

$$d[x] = \delta(s, x)$$

Como la arista  $(x, y)$  fue visitada al haber extraído  $x$  y visitado sus vecinos,

$$d[y] = \delta(s, y)$$

Esto es cierto, pues de lo contrario,  $p$  no sería óptimo. Ahora, como  $y$  está antes que  $u$  en  $p$ , y los costos son no negativos

$$d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$$

Pero  $u$  fue extraído antes que  $y$  de  $Q$ , por lo que su costo cumple

$$d[u] \leq d[y]$$

De estas dos inecuaciones se deduce que  $d[u] = \delta(s, u)$  (contradicción).  $\square$



# Complejidad de Dijkstra

En el peor caso, el algoritmo realiza

- $\mathcal{O}(V)$  operaciones Extract
- $\mathcal{O}(|E|)$  operaciones  $d[v] \leftarrow d[u] + \text{cost}(u, v)$  (que actualizan la cola)

Si la cola se implementa como heap binario,

- La operación Extract es  $\mathcal{O}(\log(V))$
- La actualización de costos (prioridad) en el heap es  $\mathcal{O}(\log(V))$

El algoritmo de Dijkstra toma tiempo  $\mathcal{O}((V + E) \log(V))$

# Algunas variantes

Podemos adaptar el algoritmo para resolver otros problemas comunes

- Rutas más cortas en grafos acíclicos
- Rutas más cortas de un vértice a otro (específico)
- Rutas más cortas entre **todos** los pares de vértices
- Rutas más cortas en grafos Euclidianos

# Sumario

Introducción

BFS

Algoritmo de Dijkstra

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el recorrido BFS de un grafo
- ☐ Extender BFS para definir el algoritmo de rutas más cortas
- ☐ Demostrar que Dijkstra es un algoritmo correcto
- ☐ Determinar la complejidad de Dijkstra