

# Programación dinámica

Clase 18

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Diego Arroyuelo

# Sumario

**Introducción**

Programación dinámica

Dos aplicaciones

Cierre

# Programación de charlas 2.0

Consideremos el problema de asignar charlas en una misma sala

- Tenemos  $n$  charlas por asignar
- La charla  $i$  tiene hora de inicio  $s_i$  y de término  $f_i$
- Es decir, se define el intervalo de tiempo  $[s_i, f_i)$

Solo se puede realizar **una charla a la vez**

**ADEMÁS:** si la charla  $i$  es realizada, produce una ganancia  $v_i$

¿Qué charlas asignar de manera que maximicemos la ganancia?

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

■  $i = 1, [0, 5), v_1 = 2$

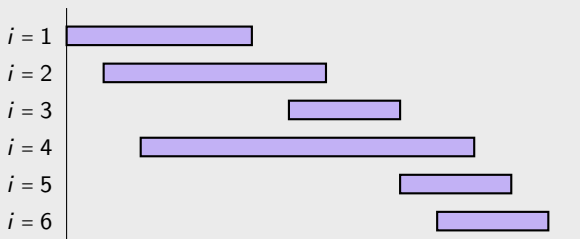
■  $i = 4, [2, 11), v_4 = 7$

■  $i = 2, [1, 7), v_2 = 4$

■  $i = 5, [9, 12), v_5 = 2$

■  $i = 3, [6, 9), v_3 = 4$

■  $i = 6, [10, 13), v_6 = 1$



# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

El caso que sabemos resolver consideraba  $v_i = c$  para cada charla

■  $i = 1, [0, 5), v_1 = c$

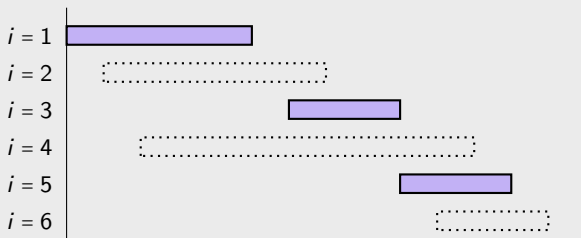
■  $i = 4, [2, 11), v_4 = c$

■  $i = 2, [1, 7), v_2 = c$

■  $i = 5, [9, 12), v_5 = c$

■  $i = 3, [6, 9), v_3 = c$

■  $i = 6, [10, 13), v_6 = c$



Cuando la ganancia es la misma, la estrategia codiciosa de **elegir la charla que termina antes** es óptima

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

$$\blacksquare i = 1, [0, 5), v_1 = 2$$

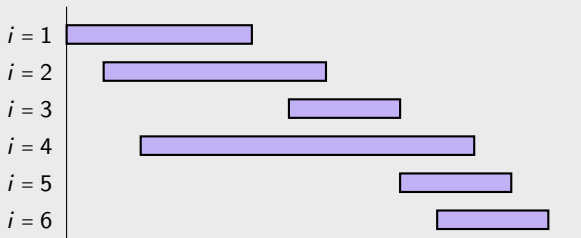
$$\blacksquare i = 4, [2, 11), v_4 = 7$$

$$\blacksquare i = 2, [1, 7), v_2 = 4$$

$$\blacksquare i = 5, [9, 12), v_5 = 2$$

$$\blacksquare i = 3, [6, 9), v_3 = 4$$

$$\blacksquare i = 6, [10, 13), v_6 = 1$$

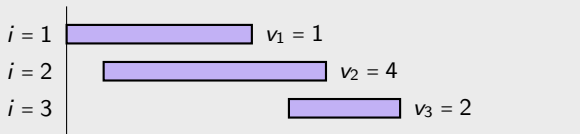


Con ganancias diferentes, el problema  
no es equivalente a maximizar el número de charlas

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Podemos pensar en una instancia del problema de forma que la estrategia codiciosa mencionada **no funciona**



En este caso,

estrategia	charlas	ganancia
codiciosa	$\{1, 3\}$	3
óptima	$\{2\}$	4

Nuestra estrategia codiciosa no es óptima  
en el caso general del problema con ganancias

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el paradigma de programación dinámica
- ☐ Identificar su estructura recursiva
- ☐ Aplicar la estrategia para resolver problemas concretos



# Sumario

Introducción

**Programación dinámica**

Dos aplicaciones

Cierre

# Una nueva estrategia algorítmica

Utilizaremos una nueva estrategia: **programación dinámica**

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de **subproblemas** que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se **solapan**, i.e. comparten **sub-subproblemas**

La diferencia con **dividir para conquistar** es que en esta última los subproblemas son disjuntos

La clave de programación dinámica es **recordar** las soluciones a los subproblemas

# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Dadas las charlas  $\{1, 2, \dots, 6\}$  ordenadas por  $f_i$ , añadimos

$$b(i) := \begin{cases} j, & j \text{ es la charla que termina más tarde antes de } s_i \\ 0, & \text{no hay tal charla} \end{cases}$$

■  $i = 1, [0, 5), v_1 = 2, b(1) = 0$

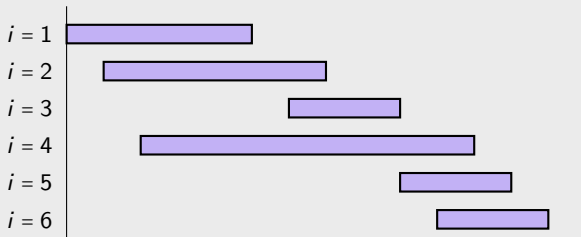
■  $i = 2, [1, 7), v_2 = 4, b(2) = 0$

■  $i = 3, [6, 9), v_3 = 4, b(3) = 1$

■  $i = 4, [2, 11), v_4 = 7, b(4) = 0$

■  $i = 5, [9, 12), v_5 = 2, b(5) = 3$

■  $i = 6, [10, 13), v_6 = 1, b(6) = 3$



# Programación de charlas 2.0

Consideremos una instancia con charlas  $\{1, \dots, n\}$  ordenadas por  $f_i$ .  
Supongamos que tenemos una solución óptima  $\Omega$  para este problema.

Consideremos la última charla, i.e.  $n$ . Tenemos dos opciones

- Si  $n \notin \Omega$ , entonces  $\Omega$  es solución del **subproblema** que solo considera las charlas  $\{1, \dots, n-1\}$
- Si  $n \in \Omega$ , entonces no hay charla  $r$  tal que  $b(n) < r < n$  que esté en  $\Omega$ . Además,  $\Omega$  contiene una solución óptima al **subproblema** con charlas  $\{1, \dots, b(n)\}$

Para encontrar la solución a un problema, necesitamos las soluciones a problemas más pequeños

# Programación de charlas 2.0

Formalicemos las ideas anteriores

- Sea  $\Omega_j$  la solución al problema con charlas  $\{1, \dots, j\}$  y sea  $opt(j)$  su ganancia total. **Objetivo final:** obtener  $\Omega_n$  con valor  $opt(n)$
- Para cada  $1 \leq j \leq n$ , hay dos casos
  - Si  $j \in \Omega_j$ , entonces  $opt(j) = v_j + opt(b(j))$
  - Si  $j \notin \Omega_j$ , entonces  $opt(j) = opt(j - 1)$
- Para saber si  $j \in \Omega_j$ , comparamos las dos opciones

$$opt(j) = \max\{v_j + opt(b(j)), opt(j - 1)\}$$

(★)

# Programación de charlas 2.0

La ecuación (★) permite plantear el siguiente algoritmo recursivo

**input** : natural  $0 \leq j \leq n$

**output**: ganancia óptima

$\text{Opt}(j)$ :

```
1  if  $j = 0$  :  
2      return 0  
3  else:  
4      return  $\max\{v_j + \text{Opt}(b(j)), \text{Opt}(j - 1)\}$ 
```

Notemos que  $\text{Opt}$  requiere

- tener ordenadas las charlas por hora de término y conocer  $b(j)$
- suponer que  $\text{Opt}(0) = 0$

¿Cuál es el problema de este algoritmo?

# Programación de charlas 2.0

El problema con el algoritmo presentado es su complejidad

- Cada llamada a  $\text{Opt}$ , en el peor caso da origen a dos llamados  $\text{Opt}$
- Complejidad  $\mathcal{O}(2^n)$

## Ejemplo (llamados recursivos)

$\text{Opt}(6)$

- $\text{Opt}(b(6)) = \text{Opt}(3)$ 
  - $\text{Opt}(b(3)) = \text{Opt}(1)$
  - $\text{Opt}(3 - 1) = \text{Opt}(2)$ 
    - ▶  $\text{Opt}(2 - 1) = \text{Opt}(1)$
- $\text{Opt}(6 - 1) = \text{Opt}(5)$ 
  - $\text{Opt}(b(5)) = \text{Opt}(3)$ 
    - ▶  $\text{Opt}(b(3)) = \text{Opt}(1)$
    - ▶  $\text{Opt}(3 - 1) = \text{Opt}(2) \dots$
  - $\text{Opt}(5 - 1) = \text{Opt}(4)$ 
    - ▶  $\text{Opt}(4 - 1) = \text{Opt}(3) \dots$

# Programación de charlas 2.0

A pesar de hacer una cantidad exponencial de llamados, realmente se resuelven solo  $n + 1$  subproblemas

$$\text{Opt}(0), \text{Opt}(1), \dots, \text{Opt}(n)$$

En este problema, un mismo llamado puede aparecer varias veces en el árbol de recursión

¿Podríamos hacerlo mejor?



## Programación de charlas 2.0

Agregaremos un arreglo global  $M$  donde almacenaremos cada  $\text{Opt}(j)$  la primera vez que lo calculamos

```
RecOpt( $j$ ):  
1   if  $j = 0$  :  
2       return 0  
3   else:  
4       if  $M[j] \neq \emptyset$  :  
5           return  $M[j]$   
6       else:  
7            $M[j] \leftarrow \max\{v_j + \text{RecOpt}(b(j)), \text{RecOpt}(j - 1)\}$   
8           return  $M[j]$ 
```

El algoritmo RecOpt toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$

# Programación de charlas 2.0

■  $i = 1, [0, 5), v_1 = 2, b(1) = 0$

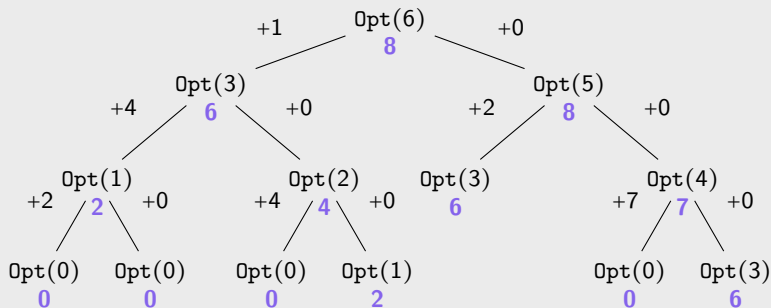
■  $i = 2, [1, 7), v_2 = 4, b(2) = 0$

■  $i = 3, [6, 9), v_3 = 4, b(3) = 1$

■  $i = 4, [2, 11), v_4 = 7, b(4) = 0$

■  $i = 5, [9, 12), v_5 = 2, b(5) = 3$

■  $i = 6, [10, 13), v_6 = 1, b(6) = 3$



# Programación de charlas 2.0

## Ejemplo

Utilizando RecOpt, obtenemos la matriz de ganancias

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ \hline \end{array}$$

0    1    2    3    4    5    6

Podemos **deducir la asignación** a partir de  $M$ , suponiendo que cada  $v_j > 0$ .

- Como  $M[6] = M[6 - 1]$ , no se incluye la charla 6
- Como  $M[5] = v_5 + M[b(5)]$ , se incluye la charla 5
- Como  $M[3] = v_3 + M[b(3)]$ , se incluye la charla 3
- Como  $M[1] = v_1 + M[b(1)]$ , se incluye 1

Con esto, las charlas asignadas son  $\{1, 3, 5\}$

# Programación de charlas 2.0

También podemos plantear una solución **iterativa** para este problema, computando los subproblemas en orden de tamaño

ItOpt:

```
1   $M[0] \leftarrow 0$   
2  for  $j = 1, \dots, n$  :  
3       $M[j] \leftarrow \max\{v_j + M[b(j)], M[j - 1]\}$ 
```

Al terminar, ItOpt deja en  $M$  las ganancias óptimas

El algoritmo ItOpt también toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$

# Programación dinámica

A partir de este ejemplo, planteamos la estrategia de **programación dinámica** para resolver un problema

1. El número de subproblemas es (idealmente) polinomial
2. La solución al problema original puede calcularse a partir de subsoluciones
3. Hay un **orden natural** de los subproblemas (*del más pequeño al más grande*) y una recurrencia *sencilla* (★)
4. Recordamos las soluciones a subproblemas

La recurrencia es la clave para plantear el algoritmo base

# Sumario

Introducción

Programación dinámica

**Dos aplicaciones**

Cierre

# Problema de la mochila 0/1

Consideremos el problema de la mochila con  $n$  objetos **no fraccionables** (cada uno se incluye o no se incluye)

- El objeto  $k$  tiene un valor  $v_k$  y un peso  $w_k$
- La mochila tiene capacidad de peso  $W$  tal que

$$W < \sum_k w_k$$

El **objetivo** es maximizar la suma de valores incluidos

Usaremos la variable  $x_k \in \{0, 1\}$  para indicar si el objeto  $k$  se incluye o no

Resolveremos este problema con programación dinámica

# Problema de la mochila 0/1

Denotaremos por  $knap(p, q, \omega)$  al problema de maximizar

$$\sum_{k=p}^q v_k x_k$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q w_k x_k &\leq \omega \\ x_k &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Nuestro problema a resolver es  $knap(1, n, W)$



# Problema de la mochila 0/1

Sea  $\Omega = y_1, y_2, \dots, y_n$  una elección óptima de valores binarios para las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$

En particular,  $y_1$  tiene dos opciones

- Si  $y_1 = 0$ , entonces el objeto 1 no está en la solución. Luego,  $y_2, \dots, y_n$  debe ser solución óptima para

$$\textit{knap}(2, n, W)$$

De lo contrario,  $y_2, \dots, y_n$  no sería solución óptima de  $\textit{knap}(1, n, W)$

# Problema de la mochila 0/1

En particular,  $y_1$  tiene dos opciones

- Si  $y_1 = 1$ , entonces  $y_2, \dots, y_n$  debe ser solución óptima para

$$\text{knap}(2, n, W - w_1)$$

De lo contrario, habría otra selección  $z_2, \dots, z_n$  binaria tal que

$$\sum_{k=2}^n w_k z_k \leq W - w_1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=2}^n v_k z_k > \sum_{k=2}^n v_k y_k$$

por lo que  $y_1, z_2, \dots, z_n$  sería una elección mejor para  $\text{knap}(1, n, W)$ .

Esto contradice que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  es óptima

# Problema de la mochila 0/1

Con este análisis de casos, planteamos nuestra estrategia recursiva de **subproblemas**

Sea  $g_k(\omega)$  el valor de una solución óptima para  $knap(k+1, n, \omega)$

- $g_0(W)$  es el valor óptimo de  $knap(1, n, W)$
- Como hay decisión binaria para  $x_1$ ,

$$g_0(W) = \max\{g_1(W), g_1(W - w_1) + v_1\}$$

- Podemos generalizar para un  $0 \leq k < n$

$$g_k(\omega) = \max\{g_{k+1}(\omega), g_{k+1}(\omega - w_{k+1}) + v_{k+1}\}$$

donde

$$g_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \geq 0 \\ -\infty, & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

# Problema de la mochila 0/1

## Ejercicio

Usando la recurrencia anterior, muestre los llamados recursivos que permiten resolver la siguiente instancia del problema de la mochila 0/1

- $n = 3, W = 6$
- $[w_1, w_2, w_3] = [2, 2, 3]$
- $[v_1, v_2, v_3] = [1, 2, 5]$

# Problema de dar vuelto

Consideremos ahora el problema de dar  $S$  pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Asignar tantas monedas *grandes* como sea posible, antes de avanzar a la siguiente moneda *grande*

## Ejemplo

Si  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{10, 5, 2, 1\}$ , la estrategia codiciosa **siempre** produce el menor número de monedas para un vuelto  $S$  cualquiera

# Problema de dar vuelto

## Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera. Si  $\{v_1, v_2, v_3\} = \{6, 4, 1\}$  y  $S = 8$ , entonces la estrategia produce

$$8 = 6 + 1 + 1$$

pero el óptimo es

$$8 = 4 + 4$$

Lo atacamos con programación dinámica

# Problema de dar vuelto

Dado un conjunto de valores ordenados  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , definimos  $z(S, n)$  como el problema de encontrar el menor número de monedas para totalizar  $S$

## Ejercicio

Proponga una recurrencia para resolver el problema  $z(S, n)$  y plantee un algoritmo a partir de ella.

# Problema de dar vuelto

## Ejercicio

Sea  $Z(S, n)$  la solución óptima al problema  $z(S, n)$ . Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor  $v_n$

- Si se incluye una moneda de valor  $v_n$ ,

$$Z(S, n) = Z(S - v_n, n) + 1$$

- Si no se usan monedas de valor  $v_n$ ,

$$Z(S, n) = Z(S, n - 1)$$



# Problema de dar vuelto

## Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

- Para las monedas de de valor  $v_n$ ,

$$Z(S, n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1, Z(S, n - 1)\}$$

- Luego, generalizamos para el subconjunto de los primeros  $k$  valores de monedas

$$Z(T, k) = \min\{Z(T - v_k, n) + 1, Z(T, k - 1)\}$$

donde  $Z(T, 0) = +\infty$  si  $T > 0$ , y  $Z(0, k) = 0$

# Problema de dar vuelta

## Ejercicio

Con esto, podemos plantear el siguiente algoritmo iterativo

**Change( $S$ ):**

**for**  $T = 1, \dots, S$  :

$Z[T][0] \leftarrow +\infty$

**for**  $k = 0, \dots, n$  :

$Z[0][k] \leftarrow 0$

**for**  $k = 1, \dots, n$  :

**for**  $T = 1, \dots, S$  :

$Z[T][k] \leftarrow Z[T][k-1]$

**if**  $T - v_k \geq 0$  :

$Z[T][k] \leftarrow \min\{Z[T][k], Z[T - v_k, k]\}$

# Sumario

Introducción

Programación dinámica

Dos aplicaciones

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el paradigma de programación dinámica
- ☐ Identificar su estructura recursiva
- ☐ Aplicar la estrategia para resolver problemas concretos