

# Insertion sort

Clase 02

IIC 2133 - Sección 3

Prof. Eduardo Bustos

# Sumario

**Introducción**

Insertion Sort

Inversiones

Cierre

# Continuamos ordenando el curso

- El sistema sigue malo, pero al menos ya ordenamos la lista de asistentes
- Sin embargo, ahora la Universidad nos pide cambiar 5 estudiantes de la sección 1 a la sección 2
- Tenemos que actualizar las listas de ambos cursos manteniendo el orden
- ¿Hay alguna forma de actualizar sin tener que ordenar todo de nuevo?

# Una posible solución

- En lugar de ordenar desde cero, podemos **insertar** elementos respetando el orden
- Insertar pocos elementos ordenadamente debiera ser (relativamente) barato
- ¿Cómo podemos usar este hecho para ordenar?
- ¿Cómo se deben insertar los elementos para asegurar el orden? ¿Al final?

# El algoritmo InsertionSort

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

InsertionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Tomar el primer dato  $x$  de  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$
  - 4 Insertar  $x$  en  $B$  de manera que  $B$  quede ordenada
  - 5 Si quedan datos en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

¿En qué se diferencia InsertionSort de SelectionSort?

# Objetivos de la clase

- ☐ Distinguir diferencias de InsertionSort y SelectionSort
- ☐ Demostrar correctitud de InsertionSort
- ☐ Comprender el efecto de la inserción general en las EDD básicas
- ☐ Comprender concepto de inversión y su rol en la ordenación
- ☐ Comprender casos (mejor, peor y promedio) en análisis en complejidad
- ☐ Determinar complejidad por caso para InsertionSort

# Sumario

Introducción

**Insertion Sort**

Inversiones

Cierre

# El algoritmo InsertionSort

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

InsertionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Tomar el primer dato  $x$  de  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$
  - 4 Insertar  $x$  en  $B$  de manera que  $B$  quede ordenada
  - 5 Si quedan datos en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

La idea empleada por los algoritmos es diferente

- SelectionSort: *elegir ordenadamente*
- InsertionSort: *insertar ordenadamente*



# Correctitud de InsertionSort

Este algoritmo es correcto y demostraremos su correctitud de manera similar al caso de SelectionSort

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

InsertionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Tomar el primer dato  $x$  de  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$
  - 4 Insertar  $x$  en  $B$  de manera que  $B$  quede ordenada
  - 5 Si quedan datos en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

¿En qué se diferencian ambas demostraciones?

# Correctitud de InsertionSort

## Demostración (finitud)

Sea  $n$  la cantidad (finita) de valores en la secuencia original  $A$ .

En cada iteración del algoritmo se borra un valor de  $A$  (línea 3).

Luego se inserta dicho valor en  $B$  (línea 4), para lo cual se requiere como máximo recorrer todo  $B$ . Como en todo momento  $B$  tiene largo finito, la inserción toma una cantidad finita de pasos.

Luego de  $n$  iteraciones, todos los valores en  $A$  fueron borrados. La condición de término (línea 5) garantiza que el algoritmo termina.

Por lo tanto, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos. □

# Correctitud de InsertionSort

## Demostración (ordenación)

Consideremos la propiedad

$P(n) \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración,}$   
 $B \text{ se encuentra ordenada}$

1. **Caso base.**  $P(1)$  corresponde al estado de la secuencia  $B$  luego de insertar el primer elemento. Dado que  $B$  solo tiene un elemento, está ordenada.

# Correctitud de InsertionSort

## Demostración (ordenación)

**P(n)**  $:=$  Luego de la  $n$ -ésima iteración,  
 $B$  se encuentra ordenada

2. **H.I.** Suponemos que luego de la  $n$ -ésima iteración,  $B$  está ordenada.

**P.D.** Luego de la iteración  $(n + 1)$ -ésima iteración,  $B$  sigue ordenada.

En la iteración  $n + 1$  extraemos el primer elemento de  $A$ , a saber  $a'$ . Si el estado de  $B$  es

$$a_1 \leq \dots \leq a_i \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_n$$

y  $a'$  cumple  $a_i \leq a' \leq a_{i+1}$ , lo insertamos de forma que  $B$  satisface

$$a_1 \leq \dots \leq a_i \leq a' \leq a_{i+1} \leq \dots \leq a_n$$

Es decir, luego de la iteración  $n + 1$ ,  $B$  está ordenada. □

# Inserción de datos

InsertionSort y SelectionSort no solo se diferencian en su estrategia.

También difieren en cómo realizan la inserción del dato en cada iteración

- SelectionSort inserta siempre al final de la nueva EDD
- InsertionSort inserta **de forma que la nueva EDD quede ordenada**, no necesariamente haciéndolo al final de esta

Nuestro análisis de complejidad de la inserción es insuficiente: interesa poder insertar en **cualquier posición**

¿Cómo cambia nuestro análisis de complejidad de la inserción?

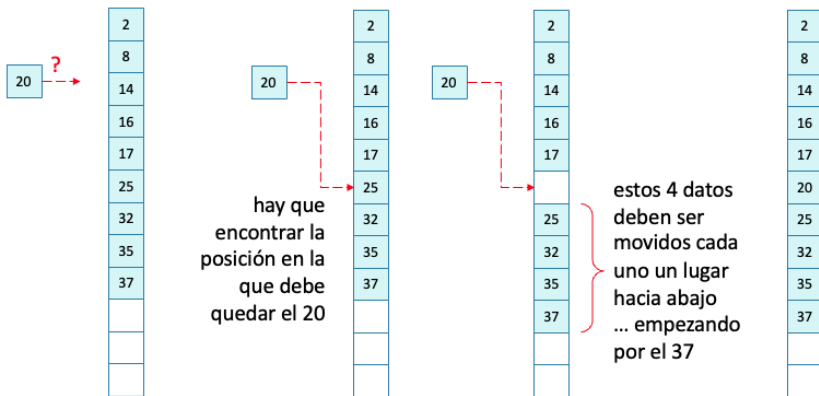
# Inserción de datos

Toda inserción de un dato en una estructura involucra dos pasos

1. Búsqueda de la posición en que se debe insertar el dato
2. Inserción propiamente tal, quizás incluyendo mover otros datos

¿Cuál es la complejidad de estos pasos usando arreglos? ¿Y listas ligadas?

# Inserción en arreglo ordenado



# Inserción en arreglo ordenado

Para un arreglo de largo  $n$

La búsqueda de la posición adecuada requiere un algoritmo de búsqueda

- Si usamos búsqueda binaria, toma tiempo  $\mathcal{O}(\log(n))$

Para insertar un elemento en una posición es posible que haya que desplazar elementos ya ordenados

- Si el elemento es mayor que todos, se agrega al final
- En caso contrario, hay que desplazar **todos los mayores a él**
- Esto toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$

La inserción en arreglos ordenados toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$



# Inserción en lista (doblemente) ligada

Consideramos una lista ligada con  $n$  elementos ordenados

La búsqueda de la posición adecuada requiere revisar la lista completa

- Esto toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$

Para insertar un elemento en una posición solo hay que reasignar punteros

- A lo más involucra 2 elementos previamente ordenados
- Esto toma tiempo  $\mathcal{O}(1)$

La inserción en listas ligadas ordenadas toma tiempo  $\mathcal{O}(n)$

# Complejidad de InsertionSort

Ya sabemos que la complejidad de la inserción es  $\mathcal{O}(n)$  para EDDs básicas.

## Ejercicio

¿Cuál es la complejidad de InsertionSort?

**input** : Secuencia de datos  $A$

**output**: Nueva secuencia de datos  $B$ , ordenada

InsertionSort ( $A$ ):

- 1 Definir secuencia  $B$ , inicialmente vacía
  - 2 Tomar el primer dato  $x$  de  $A$
  - 3 Sacar  $x$  de  $A$
  - 4 Insertar  $x$  en  $B$  de manera que  $B$  quede ordenada
  - 5 Si quedan datos en  $A$ , volver a la línea 2
- return**  $B$

# Ejecución de InsertionSort

Para buscar la intuición, consideremos una versión in place del algoritmo

- Tal como con SelectionSort,  $|A| + |B| = n$  se mantiene luego de cada iteración, i.e. es un **invariante**
- Podemos usar un mismo arreglo para ambas secuencias

**input** : Secuencia  $A[0 \dots n-1]$ , largo  $n \geq 2$

**output:**  $\emptyset$

InsertionSort ( $A, n$ ):

```
1   for  $i = 1 \dots n-1$  :  
2        $j = i$   
3       while  $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$  :  
4           Intercambiar  $A[j]$  con  $A[j-1]$   
5            $j = j - 1$ 
```

# Ejecución de InsertionSort

$j-1 \rightarrow$	0	20
$i, j \rightarrow$	1	82
	2	8
	3	29
	4	60
	5	32
	6	40
	7	70
	8	41
	9	15

Iteración con  $i = 1$ :  
no hay intercambio  
entre  $A[1]$  y  $A[0]$

	0	20
$j-1 \rightarrow$	1	8
$i, j \rightarrow$	2	82
	3	29
	4	60
	5	32
	6	40
	7	70
	8	41
	9	15

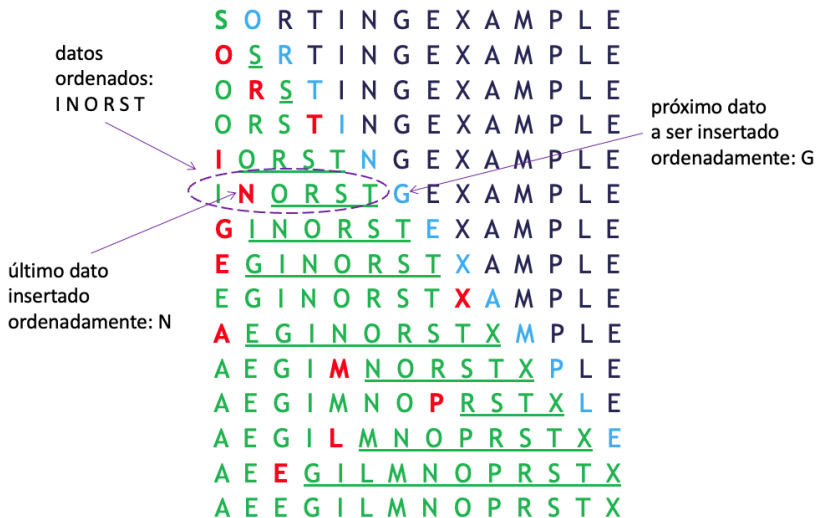
Iteración con  $i = 2$ :  
hay dos intercambios

$A[2] \leftrightarrow A[1]$  y  $A[1] \leftrightarrow A[0]$

$j-1 \rightarrow$	0	8
$j \rightarrow$	1	20
$i \rightarrow$	2	82
	3	29
	4	60
	5	32
	6	40
	7	70
	8	41
	9	15

InsertionSort puede hacer  $\mathcal{O}(n)$  intercambios por elemento

# Complejidad de InsertionSort



# Complejidad de InsertionSort

**input** : Secuencia  $A[0 \dots n-1]$ , largo  $n \geq 2$

**output:**  $\emptyset$

InsertionSort ( $A, n$ ):

```
1   for  $i = 1 \dots n-1$  :  
2        $j = i$   
3       while  $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$  :  
4           Intercambiar  $A[j]$  con  $A[j-1]$   
5            $j = j - 1$ 
```

¿Qué tiempo toma si los datos vienen ordenados?

A E E G I L M N O P R S T X

# Complejidad de InsertionSort

- A diferencia de SelectionSort que revisa toda la secuencia  $A$  para encontrar el menor elemento, InsertionSort siempre toma el primer elemento de  $A$
- Si los datos vienen ordenados, SelectionSort no cambia su complejidad
- En InsertionSort la inserción se ve beneficiada: sirve recordar dónde termina la lista ordenada para saber dónde insertar
- Pareciera entonces que la complejidad de InsertionSort depende de qué tan ordenados están los datos

¿Cómo medir qué tan ordenados vienen los datos?

# Sumario

Introducción

Insertion Sort

**Inversiones**

Cierre



# Inversiones

## Definición

Sea  $A$  un arreglo de  $n$  números distintos entre  $0$  y  $n - 1$ , y sean  $0 \leq i, j \leq n - 1$  índices del arreglo. Si  $i < j$  y  $A[i] > A[j]$ , entonces diremos que el par ordenado  $(i, j)$  es una **inversión**.

Usaremos el número de inversiones en un arreglo como una **métrica de desorden**

¿Esta idea sirve cuando hay repetidos?

¿Y cuando hay números fuera del rango  $0 \dots n - 1$ ?

# Inversiones

## Definición

Sea  $A$  un arreglo de  $n$  números y sean  $0 \leq i, j \leq n - 1$  índices del arreglo. Si  $i < j$  y  $A[i] > A[j]$ , entonces diremos que el par ordenado  $(i, j)$  es una **inversión**.

## Ejemplo

El arreglo

$A =$	34	8	64	51	32	21
	0	1	2	3	4	5

tiene 9 inversiones:

- $(0, 1)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(0, 5)$
- $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(2, 5)$
- $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$
- $(4, 5)$

# Inversiones e InsertionSort

Recordemos la versión in place del algoritmo

**input** : Secuencia  $A[0 \dots n-1]$ , largo  $n \geq 2$

**output**:  $\emptyset$

InsertionSort ( $A, n$ ):

```
1  for  $i = 1 \dots n-1$  :  
2       $j = i$   
3      while  $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$  :  
4          Intercambiar  $A[j]$  con  $A[j-1]$   
5           $j = j - 1$ 
```

Consideremos un arreglo  $A$  de largo  $n$  con  $k$  inversiones

- ¿Cuántas inversiones se arreglan con un intercambio (línea 4)?
- ¿Cuánto tiempo toma InsertionSort en ordenar  $A$ ?

# Inversiones e InsertionSort

**input** : Secuencia  $A[0 \dots n-1]$ , largo  $n \geq 2$

**output:**  $\emptyset$

InsertionSort ( $A, n$ ):

```
1   for  $i = 1 \dots n-1$  :  
2        $j = i$   
3       while  $(j > 0) \wedge (A[j] < A[j-1])$  :  
4           Intercambiar  $A[j]$  con  $A[j-1]$   
5            $j = j - 1$ 
```

- Antes de cada intercambio, comparan los datos con índices  $j$  y  $j-1$
- Los datos se intercambian solo si el par  $(j-1, j)$  es una inversión
- Por lo tanto, cada intercambio de datos adyacentes corrige exactamente una inversión
- Además, cada dato se compara al menos una vez

# Complejidad de InsertionSort

De acuerdo a lo anterior, la complejidad es

$$\mathcal{O}(n + k)$$

- $n$  considera que cada dato se compara al menos una vez
- $k$  es el número de inversiones

¿Qué valor tiene  $k$  en el mejor caso? ¿Y en el peor?

# Mejor y peor caso de InsertionSort

En el mejor caso, el arreglo tiene  $k = 0$  inversiones

- El arreglo está ordenado y la complejidad en el mejor caso es  $\mathcal{O}(n)$

# Mejor y peor caso de InsertionSort

En el peor caso, el arreglo tiene el número máximo de inversiones

- El arreglo está ordenado decrecientemente
- Al comparar cada índice  $i$  con  $j > i$ , se cuenta una inversión

$$k = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

- De forma equivalente, el número de inversiones es el número de pares de índices

$$k = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- La complejidad en el peor caso es  $\mathcal{O}(n^2)$

¿Qué hay del caso promedio?

# Caso promedio de InsertionSort

Haremos el análisis de caso promedio abstrayendo el orden del arreglo

Para esto, consideramos un arreglo  $A$  que viene en cualquier orden

¿Cuál es el número promedio de inversiones en un arreglo con  $n$  datos?

Para dar una definición supondremos que  $A$  no tiene elementos repetidos

## Definición

Dado el conjunto  $S$  con  $n$  elementos, una **permutación**  $P$  de  $S$  es una secuencia

$$s_1, s_2, \dots, s_n \quad s_i \in S$$

Para  $S$  con  $|S| = n$ , existen  $n!$  permutaciones diferentes

- Cada una es una forma de ordenar los elementos de  $S$
- El arreglo  $A$  corresponde a una de esas permutaciones



# Caso promedio de InsertionSort

Definiremos el número promedio de inversiones como el promedio aritmético del número de inversiones de cada una de las  $n!$  permutaciones

En lugar de contar inversiones para cada permutación, usaremos un truco

- Para una permutación  $P$ , consideremos su permutación inversa  $P^r$
- Existen  $n!/2$  pares de permutaciones acompañadas de su inversa

## Ejemplo

Para  $n = 3$ , las  $3! = 6$  permutaciones de  $S = \{4, 7, 8\}$  son

- $P_1 = 4, 7, 8$  y  $P_1^r = 8, 7, 4$
- $P_2 = 7, 4, 8$  y  $P_2^r = 8, 4, 7$
- $P_3 = 7, 8, 4$  y  $P_3^r = 4, 8, 7$

## Caso promedio de InsertionSort

Tomando un par de elementos distintos  $x, y$  de  $S$  y un par de permutaciones  $P, P^r$ , los índices de  $x$  e  $y$  están en inversión en **alguna de las dos permutaciones**

### Ejemplo

Para  $S = \{4, 7, 8\}$ , el par de elementos  $x = 4$  e  $y = 8$ , y el siguiente par de permutaciones

$$P_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 4 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$P_2^r = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 7 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

los índices de  $x, y$  en  $P_2$  son  $(1, 2)$  y en  $P_2^r$ ,  $(1, 0)$

- En  $P_2$ , como  $1 < 2$  y  $4 < 8$ ,  $(1, 2)$  no es inversión
- En  $P_2^r$ , como  $1 \not< 0$  y  $4 < 8$ ,  $(0, 1)$  es inversión

Un par de índices  $(i, j)$  es inversión en  $P$  o en  $P^r$

## Caso promedio de InsertionSort

Como cada inversión aparece en una de las dos permutaciones del par  $P, P^r$ ,

$$\# \text{ inv en } P + \# \text{ inv en } P^r = \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego, tomando los  $n!/2$  pares posibles de permutaciones de la forma  $P_k, P_k^r$ , el promedio de inversiones es

$$\begin{aligned} \frac{\sum_P (\# \text{ inv en } P)}{\# \text{ permutaciones}} &= \frac{\sum_{k=1}^{n!/2} (\# \text{ inv en } P_k + \# \text{ inv en } P_k^r)}{n!} \\ &= \frac{\frac{n(n-1)}{2} \cdot n!/2}{n!} \\ &= \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Una permutación promedio tiene una cantidad de inversiones  $\mathcal{O}(n^2)$

# Caso promedio de InsertionSort

Con este resultado podemos concluir la complejidad de InsertionSort en el caso promedio

- La complejidad de InsertionSort es de la forma  $\mathcal{O}(n + k)$
- En el caso promedio  $k \in \mathcal{O}(n^2)$
- Luego, en el caso promedio InsertionSort toma tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$

¡Ojo! Esto va más allá de InsertionSort

# Caso promedio de algoritmos de ordenación

## Teorema

Sea  $\mathcal{A}$  un algoritmo de ordenación. Si  $\mathcal{A}$  corrige una inversión por intercambio, entonces no puede ordenar más rápido que  $\mathcal{O}(n^2)$  en el caso promedio.

## Corolario

$\mathcal{A}$  no puede ordenar más rápido que  $\mathcal{O}(n^2)$  en el peor caso.

# Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	?	?	?	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Quick Sort	?	?	?	?
Merge Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

## Ejercicio (propuesto)

Aplicando las estrategias que vimos hoy

- Escriba el pseudocódigo de la versión in place de SelectionSort
- Especifique complejidad del mejor, peor y caso promedio de SelectionSort de acuerdo a su propuesta

# Sumario

Introducción

Insertion Sort

Inversiones

**Cierre**

# Objetivos de la clase

- ☐ Distinguir diferencias de InsertionSort y SelectionSort
- ☐ Demostrar correctitud de InsertionSort
- ☐ Comprender el efecto de la inserción general en las EDD básicas
- ☐ Comprender concepto de inversión y su rol en la ordenación
- ☐ Comprender casos (mejor, peor y promedio) en análisis en complejidad
- ☐ Determinar complejidad por caso para InsertionSort