Ordenación y Selectionsort

Clase 01

IIC 2133 coordinado

Prof. Yadran Eterovic, Mario
Droguett, Eduardo Bustos

Sumario

El Misterio de EDD

¿ Zallen Misterio $\in$

Apellido	Nombre
Alen	Misterio
Misterio	Misterio
Zalen	Berenice
Gonzalópez	D
Turing	Alan
Misterio	Yadran
Zeta	Hache
Ararán	Jota
Alenn	Cristina
...	...

pág. 1/376

?

El Misterio de EDD

¿ Zallen Misterio $\in$

Apellido	Nombre
Abarca	Yadran
Abusleme	Nicole
Arenas	Camila
Arenas	D
Bañados	Richard
Beterraga	Brócoli
Blanco	Ximena
Brahms	Johannes
Castillo	Raquel
...	...
	pág. 1/376

?

El Misterio de EDD

¿ 245.789.546 $\in$

Valor
1
2
3
56
57
64
68
99
124
125
...

pág. 1/376

?

Secuencias ordenadas

Definición

Una secuencia de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se dice **ordenada** (no decrecientemente) si cumple que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

¿Qué es entonces **ordenar** una secuencia de números arbitraria?

Una propuesta de algoritmo de ordenación

input : Lista de nombres L
output: Lista ordenada de nombres L'

```
Misterio (L):
1    Iniciamos L' vacía
2    Encontrar el menor valor en L
3    Borrar el valor encontrado
4    Escribirlo al final de L' (en el primer espacio disponible)
5    Si quedan valores en L, volver a la línea 2
     return L'
```

¿Es **correcto** este algoritmo?

Objetivos de la clase

- Comprender el concepto de ordenación como operación abstracta
- Interpretar de forma intuitiva un algoritmo en pseudocódigo
- Demostrar correctitud de un algoritmo dado
- Determinar complejidad del algoritmo de ordenación Selection Sort
- Distinguir ventajas comparativas de EDD's en las operaciones empleadas en Selection Sort

Sumario

Correctitud de algoritmos

En este curso nos centraremos en dos propiedades para decir que un algoritmo es **correcto**:

- Termina en una cantidad finita de pasos
- Cumple su propósito

En un problema de ordenación, un algoritmo será correcto si **ordena** los datos en una cantidad finita de pasos

Recordatorio: Inducción simple

Principio de inducción simple

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales, si $P(x)$ cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero,
2. para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

Recordatorio: Inducción simple

Inducción simple en la práctica

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales

1. Identificamos caso base n_0 y verificamos que cumple P
2. Suponemos que $P(n)$ es cierta para un n **cualquiera**
3. Demostramos que $P(n+1)$ es verdadero usando $P(n)$

Si logramos completar estos pasos, concluimos que P es cierta para $n \geq n_0$

No olvidar

- La propiedad puede ser cierta desde un $n_0 \neq 0$
- Puede haber varios casos base

Soltemos la mano...

Ejemplo

Demuestre que el siguiente algoritmo es correcto.

input : Lista de nombres L
output: Lista ordenada de nombres L'

`Misterio` *(L)*:

1 Iniciamos L' vacía
2 Encontrar el menor valor en L
3 Borrar el valor encontrado
4 Escribirlo al final de L' (en el primer espacio disponible)
5 Si quedan valores en L, volver a la línea 2
return L'

Soltemos la mano...

Demostración (finitud)

Primero demostraremos que termina en una cantidad finita de pasos.

Sea n la cantidad (finita) de valores en la lista original L.

En cada iteración del algoritmo se borra un valor de L y se escribe en la lista nueva L'.

Luego de n iteraciones, todos los valores en L fueron borrados. Debido a la línea 5, que verifica si existen valores en L, el algoritmo no sigue iterando.

Por lo tanto, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos. $\square$

Soltemos la mano...

Demostración (ordenación)

Demostraremos por **inducción** que efectivamente genera una lista ordenada.

1. Probamos el caso base $\mathbf{P(n_0)}$
2. Suponemos verdadera la hipótesis inductiva $\mathbf{P(n)}$.
   P.D. Tesis inductiva $\mathbf{P(n+1)}$...

¿Qué propiedad probaremos?
¿Cuál es el parámetro *n* que haremos avanzar?
¿Cuáles son los casos base?

Soltemos la mano...

Demostración (ordenación)

Consideremos la propiedad

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) \quad := \quad \text{Los primeros } n \text{ valores borrados de } L \text{ son los menores de } L \text{ y están ordenados en } L'$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P}(\mathbf{1})$ corresponde al estado de las listas luego de borrar el menor elemento de L. Este elemento es el menor de todos debido al criterio de selección de la línea 2 del algoritmo. Dado que L' solo tiene un elemento, a saber a_1, L' está ordenada.

Soltemos la mano...

Demostración (ordenación)

Consideremos la propiedad

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) \quad := \quad \text{Los primeros } n \text{ valores borrados de } L \text{ son los menores de } L \text{ y están ordenados en } L'$$

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos que los primeros n valores borrados de L son los menores y se encuentran ordenados en L'.

   P.D. Los primeros $n+1$ elementos borrados de L son los menores y se encuentran ordenados en L'.

   Por **H.I.** los primeros n elementos borrados corresponden a los n menores de L y están ordenados en L'. Asignándoles las etiquetas a_i a estos elementos, tenemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \text{cualquier elemento restante en } L$$

Soltemos la mano...

Demostración (ordenación)

Al borrar el elemento $n+1$ de L, al que llamamos a_{n+1}, por el criterio de selección de la línea 2 sabemos que este es el menor de los que restan en L y por la **H.I.** sabemos que

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \text{el resto en } L$$

Al agregar a_{n+1} al final de L', dado que por **H.I.** los primeros n elementos están ordenados de forma no decreciente, L' queda ordenada con $n+1$ elementos.

Con esto se concluye que el algoritmo ordena. $\square$

Sumario

El algoritmo `SelectionSort`

El algoritmo `Misterio` se conoce como **selection sort**.

input : Secuencia de datos A
output: Nueva secuencia de datos B, ordenada

`SelectionSort` *(A)*:

1 Definir secuencia B, inicialmente vacía
2 Buscar el menor dato x en A
3 Sacar x de A e insertarlo al final de B
4 Si quedan valores en A, volver a la línea 2
return B

¿Cuál es la complejidad de `SelectionSort`?

Ejemplo

Determine la complejidad de `SelectionSort`

input : Secuencia de datos A
output: Nueva secuencia de datos B, ordenada

`SelectionSort` *(A)*:

1 Definir secuencia B, inicialmente vacía
2 Buscar el menor dato x en A
3 Sacar x de A e insertarlo al final de B
4 Si quedan valores en A, volver a la línea 2
return B

¿Cuál es la complejidad de `SelectionSort`?

Dada la secuencia de input A, diremos que $|A| = n$ es su largo cuando esta posee n elementos.

Podemos determinar la complejidad de `SelectionSort` en función de n a través de dos estrategias.

De forma intuitiva

- Buscar el menor dato en A significa revisar **todos** los elementos: $\mathcal{O}(n)$
- La búsqueda del menor elemento se hace una vez por dato, i.e. n veces
- Combinando los resultados obtenemos $\mathcal{O}(n^2)$

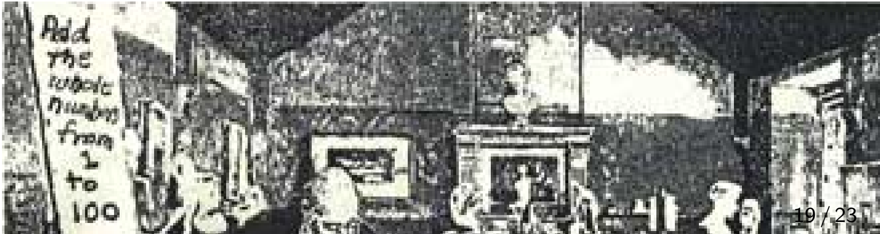
¿Cuál es la complejidad de `SelectionSort`?

De forma explícita

- Buscar el menor elemento de A implica revisar n elementos en la primera iteración
- En la siguiente iteración, como A tiene un elemento menos implica revisar $n - 1$ elementos
- Este proceso se repite hasta agotar A cuando tiene 1 elemento
- El tiempo del algoritmo es la suma de los tiempos de cada iteración

$$T(n) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Concluimos que $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$



Un paréntesis sobre la escritura de datos

No olvidemos el espíritu del curso: **estructuras de datos**

¿Qué tan costosa es la inserción del dato al final de B en `SelectionSort`?

Recordemos las dos estructuras básicas que discutimos: **arreglos** y **listas ligadas**

Mencionamos sus diferencias en cuanto al acceso por índice, pero ahora agregamos otra operación: **inserción**, i.e. añadir un dato a la estructura

En el contexto de `SelectionSort` nos interesa específicamente la **inserción del último elemento**

- En una lista ligada, si se cuenta con un puntero adicional al último elemento, la inserción toma $\Theta(1)$
- En un arreglo
  - si no se supera el espacio reservado para este, toma $\Theta(1)$
  - si se agotó el espacio, hay que reubicar todo el arreglo: $\Theta(n)$

Un paréntesis sobre la escritura de datos

Con esto, las operaciones que conocemos tienen las siguientes complejidades

Operación	Arreglo	Lista ligada
Acceso por índice	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$
Inserción (final)	$\Theta(1)$ sin reubicar $\Theta(n)$ reubicando	$\Theta(1)$ con puntero al final

No perdamos de vista la pregunta de
qué estructura es la **más adecuada** en cada escenario

Cabe notar que para el caso de los arreglos, en `SelectionSort` sabemos exactamente cuánto espacio necesitamos reservar

Más aún, veremos una forma de usar la menor cantidad de memoria posible con arreglos

Complejidad de memoria en `SelectionSort`

- Para secuencias de datos muy grandes, puede ser costoso reservar espacio para una copia completa de los datos

- Cabe notar que `SelectionSort` se puede hacer en **un solo arreglo**, ya que en todo minuto

$$|A| + |B| = n$$

- Como *reciclamos* el espacio dentro del mismo arreglo para llevar la nueva secuencia B, no es necesario reubicar el arreglo y toda inserción al final de B toma tiempo $\Theta(1)$

- Esta estrategia no necesita memoria adicional... o más precisamente, necesita $\mathcal{O}(1)$ de memoria adicional

- Los algoritmos que tienen esta propiedad se conocen como algoritmos **in place**

Sumario

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de ordenación como operación abstracta
- ☐ Interpretar de forma intuitiva un algoritmo en pseudocódigo
- ☐ Demostrar correctitud de un algoritmo dado
- ☐ Determinar complejidad del algoritmo de ordenación Selection Sort
- ☐ Distinguir ventajas comparativas de EDD's en las operaciones empleadas en Selection Sort