Teorías

Semana $(13)_2 = 1101$

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213

Prof. Sebastián Bugedo

Programa

Programa

Obertura

Acto único

- $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ no categórica
- Teorías decidibles

Epílogo

Teorías

Definición

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones Σ se dice una **teoría** si cumple

1. Σ es satisfacible
2. Σ es cerrado bajo consecuencia lógica, es decir, para toda oración φ se tiene que

$$\text{si } \Sigma \models \varphi \quad \text{entonces} \quad \varphi \in \Sigma$$

Una teoría Σ no tiene contradicciones y
contiene todas sus consecuencias lógicas

Proposición

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. El siguiente conjunto es una teoría

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Proposición

Sea Ψ un conjunto satisfacible de $\mathcal{L}$-oraciones. El siguiente conjunto es una teoría

$$\mathrm{Th}(\Psi) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \Psi \models \varphi\}$$

Ejemplos de teorías conocidas

Ejemplo

Para $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$, las estructuras

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{N} & = & \langle \mathbb{N},\ 0^{\mathfrak{N}},\ 1^{\mathfrak{N}},\ s^{\mathfrak{N}},\ +^{\mathfrak{N}},\ \cdot^{\mathfrak{N}},\ <^{\mathfrak{N}} \rangle \\ \mathfrak{R} & = & \langle \mathbb{R},\ 0^{\mathfrak{R}},\ 1^{\mathfrak{R}},\ s^{\mathfrak{R}},\ +^{\mathfrak{R}},\ \cdot^{\mathfrak{R}},\ <^{\mathfrak{R}} \rangle \end{array}$$

definen

- Teoría de la aritmética: $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$
- Teoría de los números reales: $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$

Para $\mathcal{L} = \{e, \circ\}$, el conjunto de axiomas $Gr = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ con

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & = & \forall x \forall y \forall z. (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \\ \varphi_2 & = & \forall x ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)) \\ \varphi_3 & = & \forall x \exists y ((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e)) \end{array}$$

define la teoría de grupos $\mathrm{Th}(Gr)$

Teorías completas

Definición

Una teoría Σ sobre $\mathcal{L}$ se dice **completa** si para toda $\mathcal{L}$-oración φ ocurre alguna de las siguientes alternativas

- $\Sigma \models \varphi$
- $\Sigma \models \neg\varphi$

Teorema

Una teoría Σ es completa si, y solo si, para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ, se tiene que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes

¿Algún ejemplo de teoría no completa?

Teorías categóricas

Definición

Una teoría Σ es **categórica** si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ, se tiene que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Teorema

Si Σ es una teoría categórica, entonces Σ es una teoría completa

Hoy veremos otro ejemplo de que el converso de este teorema es falso

Playlist Unidad IV y Orquesta

Playlist: LogiWawos #4

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar que $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica
- ☐ Comprender el concepto de teoría decidible
- ☐ Comprender la eliminación de cuantificadores
- ☐ Usar esta herramienta para demostrar decidibilidad de teorías

Programa

Una teoría completa y no categórica

Proposición

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

¿Qué necesitamos encontrar para probar esto?

Demostración

Vamos a construir una estructura $\mathfrak{N}^{\mathrm{ne}}$ tal que

- $\mathfrak{N}^{\mathrm{ne}} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$
- $\mathfrak{N}^{\mathrm{ne}} \not\cong \mathfrak{N}$
- Es decir, $\mathfrak{N}^{\mathrm{ne}}$ es **modelo no estándar** de $\mathfrak{N}$

¿Qué hicimos para construir el modelo no estándar de la línea infinita?

Una teoría completa y no categórica

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$

- $\mathcal{L}$ es el vocabulario estándar de la aritmética
- Definimos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$

Observemos que $\mathfrak{N}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, pero no una $\mathcal{L}'$-estructura.

Definimos las $\mathcal{L}'$-oraciones

$$\begin{array}{lcl}
\psi_0 & = & 0 < c \\
\psi_1 & = & 1 < c \\
\psi_2 & = & 1 + 1 < c \\
\psi_n & = & \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ símbolos } 1} < c \quad \text{para } n \geq 3
\end{array}$$

Además, sea $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\psi_n \mid n \geq 0\}$

¿Qué ingrediente invocamos ahora?

Una teoría completa y no categórica

Tenemos $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\psi_n \mid n \geq 0\}$ conjunto infinito de oraciones

Sea $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finito. Definimos

$$\ell = \max\{\{0\} \cup \{n \mid \psi_n \in \Sigma'\}\}$$

y consideremos la $\mathcal{L}'$-estructura

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$$

tal que interpreta todo símbolo de $\mathcal{L}$ como $\mathfrak{N}$, y la constante se toma como $c^{\mathfrak{A}} = \ell + 1$

Observamos que $\mathfrak{A} \vDash \Sigma'$, por lo que es satisfacible. Luego, como Σ' es arbitrario, por **compacidad** tenemos que Σ es satisfacible.

¿Qué significa que Σ sea satisfacible?

Una teoría completa y no categórica

Como Σ es satisfacible, existe una $\mathcal{L}'$-estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \Sigma$.

Definimos $\mathfrak{N}^{\mathsf{ne}}$ como la restricción de $\mathfrak{B}$ a los símbolos de $\mathcal{L}$, i.e. nos olvidamos de la constante c.

- $\mathfrak{N}^{\mathsf{ne}} \vDash \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$
- $\mathfrak{N}^{\mathsf{ne}}$ y $\mathfrak{N}$ son equivalentes
- $\mathfrak{N}^{\mathsf{ne}}$ y $\mathfrak{N}$ no son isomorfas

Concluimos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica. $\square$

Programa

Teorías decidibles

Definición

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es **decidible** si existe un algoritmo tal que para cualquier $\mathcal{L}$-oración φ, verifica si $\varphi \in \Sigma$.

¿Hay algún caso sencillo de estructura decidible?

Teorías decidibles

Ejemplo

Si $\Sigma = Th(\mathfrak{A})$ y $\mathfrak{A}$ tiene dominio finito, entonces Σ es decidible.

Sea φ una oración cualquiera. Queremos verificar si $\varphi \in \Sigma$

- Por definición de teoría, esto corresponde a verificar si $\Sigma \vDash \varphi$
- Como la teoría es completa, basta con analizar si $\mathfrak{A} \vDash \varphi$
- Dado su dominio finito, y que φ también es finita, podemos verificar exhaustivamente si $\mathfrak{A} \vDash \varphi$

¿Son $Th(\mathfrak{N})$ y $Th(\mathfrak{R})$ decidibles?

Una técnica para decidibilidad

Definición

Una teoría Σ **admite eliminación de cuantificadores** si para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ^{sc} sin cuantificadores tal que

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_k \big[\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{sc}}(x_1, \ldots, x_k)\big]$$

Ejemplo

Notemos que si φ es oración, entonces φ^{sc} es una tautología o contradicción según si φ está o no en Σ

$$\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{sc}}$$

Ojo: la posibilidad de eliminar cuantificadores es una característica de **la teoría**, no de fórmulas específicas!

Eliminación de cuantificadores

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y φ la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \exists y (x_1 \cdot y \cdot y + x_2 \cdot y + x_3 = 0)$$

¿Se pueden eliminar los cuantificadores en $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$?

Definamos φ^{sc} como

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{\mathrm{sc}}(x_1, x_2, x_3) & = & \Big[(x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) < x_2 \cdot x_2\Big] \vee \\ & & \Big[(x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) = x_2 \cdot x_2\Big] \end{array}$$

Se tiene entonces que

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}) \ \models \ \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \Big[\varphi(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{sc}}(x_1, x_2, x_3)\Big]$$

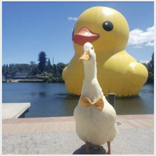
¿Esto demuestra que $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ admite eliminación de cuant.?

Eliminación de cuantificadores

Ejercicio

Para $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}$ se interpreta como suma, considere $\varphi(x) = \exists y(x + y = x)$. Construya una fórmula $\varphi^{\mathrm{sc}}(x)$ sin cuantificadores tal que

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \forall x\big[\varphi(x) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{sc}}(x)\big]$$



Hacia la decidibilidad

Teorema

Si una teoría Σ cumple

1. admite eliminación de cuantificadores
2. existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ, para toda fórmula φ

entonces Σ es decidible.

¿Cómo demostramos la parte 1.?

Hacia la decidibilidad

Proposición

Sea Σ una teoría tal que para toda fórmula de la forma

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \exists y(\alpha_0 \wedge \cdots \alpha_m)$$

con α_i sin cuantificadores, existe una fórmula φ^{sc} sin cuantificadores tal que

$$\Sigma \ \models \ \forall x_1 \cdots \forall x_k \big[\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\mathsf{sc}}(x_1, \ldots, x_k)\big]$$

Entonces Σ admite eliminación de cuantificadores.

Para probar eliminación de cuantif. basta con probarlo
para fórmulas conjuntivas existenciales!

Un ejemplo concreto

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<) = \langle \mathbb{R}, <^{\mathfrak{R}_<} \rangle$ que interpreta $<$ de forma usual

Teorema

$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<)$ admite eliminación de cuantificadores y además, existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ

Ejemplo

Observemos algunas oraciones que están en $\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<)$

irreflexividad	$\forall x \neg (x < x)$
transitividad	$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
tricotomía	$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$
sin primer elemento	$\forall x \exists y (y < x)$
sin último elemento	$\forall x \exists y (x < y)$
densidad	$\forall x \forall y [x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)]$

Un ejemplo concreto

Idea de demostración

Para probar que $\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<)$ admite eliminación de cuantificadores, sea

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \exists y(\alpha_0 \wedge \cdots \alpha_m)$$

con α_i sin cuantificadores.

Realizamos los siguientes cambios sintácticos para variables u, v

- Reemplazar $\neg(u < v)$ por $(u = v \vee v < u)$
- Reemplazar $\neg(u = v)$ por $(u < v \vee v < u)$

Habiendo eliminado las negaciones, se puede obtener una fórmula equivalente en DNF φ'

- Como $\exists y(\gamma \vee \delta) \equiv (\exists y \gamma) \vee (\exists y \delta)\ldots$
- se puede reescribir $\varphi' = \psi_0 \vee \ldots \vee \psi_\ell$, donde cada $\psi_i = \exists y(\beta_0 \wedge \cdots \wedge \beta_{m_i})$, y los β_j son fórmulas atómicas

Un ejemplo concreto

Idea de demostración

Hasta aquí, la fórmula es de la forma

$$\varphi' = \psi_0 \vee \ldots \vee \psi_\ell$$

con cada

$$\psi_i = \exists y(\beta_0 \wedge \cdots \wedge \beta_{m_i})$$

Para cada β_j atómica de ψ_i se hacen los siguientes reemplazos que involucran a la variable cuantificada y

- Si $\beta_j = (y < y)$, se reemplaza ψ_i por una contradicción
- Si $\beta_j = (y = y)$, se elimina β_j de ψ_i
- Si β_j no menciona y, se elimina β_j de ψ_i y se reemplaza ψ_i por $\beta_j \wedge \psi_i$ (se *saca para afuera* de la cuantificación)
- Si $\beta_j = (y = x)$, se reemplaza cada y en ψ_i por x y se elimina β_j

Un ejemplo concreto

Idea de demostración

Luego de estos pasos, la fórmula debiera ser de la forma

$$\exists y \left[\bigwedge_i (u_i < y) \land \bigwedge_j (y < v_j) \right]$$

que es equivalente a

$$\varphi^{\mathsf{sc}} = \bigwedge_i \bigwedge_j (u_i < v_j)$$

Esta es la estrategia para construir φ^{sc}.

Un ejemplo concreto

Ejemplo

Consideremos la fórmula $\varphi(x) = \exists y(y < x \wedge x < y)$

Notamos que

- no tiene negaciones
- ya está en DNF, para $\varphi(x) = \psi_0$ con $\psi_0 = \exists y(\beta_0 \wedge \beta_1)$
- i.e. es equivalente a $\varphi^{\mathrm{sc}}(x) = (x < x)$

Vemos que se cumple lo pedido en la definición:

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<) \ \vDash \ \forall x\big[(\exists y(y < x \wedge x < y)) \leftrightarrow (x < x)\big]$$

Una teoría decidible

Corolario

$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}_<)$ es decidible

Esta no es la única teoría que admite eliminación de cuantificadores

Teorema (Tarski)

$\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ.

Corolario

$\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ es decidible

¿Toda teoría que hemos estudiado es decidible?
¿Para todas sirve esta estrategia?

¿Hacia dónde vamos?

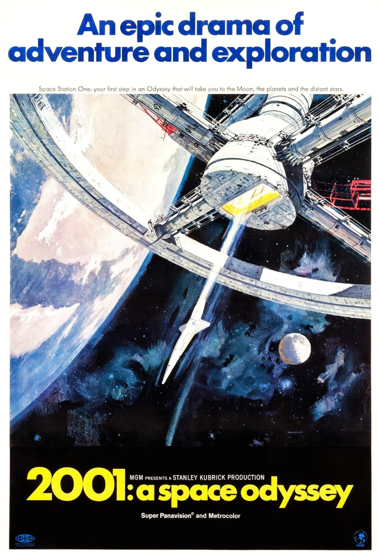
Nos centraremos en las estructuras de naturales

- Mostraremos que la técnica de eliminación de cuantificadores permite estudiar algunas de ellas
- Enunciaremos un primer resultado de incompletitud de Gödel

Próxima clase concluiremos nuestro estudio de decidibilidad

Programa

Actividad Espiritual Complementaria #2



Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar que $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica
- ☐ Comprender el concepto de teoría decidible
- ☐ Comprender la eliminación de cuantificadores
- ☐ Usar esta herramienta para demostrar decidibilidad de teorías

¿Qué aprendí hoy? ¿Comentarios?

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

6574 0248

O usa el código QR