Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

IIC2213 - Lógica para ciencia de la computación

Ayudantía 7 - Viernes 12 de Mayo del 2023

Problema 1. Suponga usted que tenemos un vocabulario $\mathcal{L}$ con los símbolos siguientes:

- N significa *"es un número"*
- I significa *"es interesante"*
- $<$ significa *"es menor que"*
- 0 significa es un símbolo constante que significa cero

Además se tienen los cuantificadores siguientes:

- $\forall$ significa *"para todos las cosas"*
- $\exists$ significa *"existe una cosa tal que"*

Traduzca a este lenguaje los enunciados del español que aparecen abajo. Si el enunciado en español es ambiguo, necesitará más de una traducción.

a) Cero es menor que cualquier número.
b) Si cualquier número es interesante, entonces el cero es interesante.
c) Ningún número es menor que cero.
d) Cualquier número no interesante con la propiedad de que todos los números menores son interesantes es, desde luego, interesante.
e) No existe un número tal que todos los números sean menores que él.
f) No existe un número tal que ningún número sea menor que él.

Solución

a) $\forall x(N(x) \to 0 < x)$
b) $\forall x(N(x) \to I(x)) \to I(0)$
c) $\forall x(N(x) \to \neg(x < 0))$
d) $\forall x((N(x) \land \neg I(x) \land \forall y(N(y) \land (y < x \to I(y)))) \to I(x))$
e) $\neg\exists x(N(x) \to (\forall y(N(y) \to y < x)))$
f) $\neg\exists x(N(x) \to (\neg\exists y(N(y) \to y < x)))$

Problema 2. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot)\}$ un lenguaje utilizado para representar grafos (no dirigidos). En cada una de las siguientes preguntas escriba una $\mathcal{L}$-oración que represente la propiedad mencionada.

a) El grafo es un clique.

b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.

c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.

d) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 3.

e) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3 (asuma grafo conexo).

Solución

a) $\forall x \forall y E(x, y)$

b) $\exists x \exists y \exists z \exists w (E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge E(x, w) \wedge E(y, z) \wedge E(y, w) \wedge E(z, w))$

c) $\exists x \exists y \exists z \exists w (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, w) \wedge E(w, x))$

d)
$$\exists x \exists y \exists z \exists w (E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, w) \wedge$$
$$(\neg \exists v (E(x, v) \wedge E(v, w))) \wedge \neg E(x, w))$$

e)
$$\forall x \forall y$$
$$(E(x, y) \vee$$
$$(\exists z \neg z = x \wedge E(x, z) \wedge E(z, y)) \vee$$
$$(\exists z \exists w \neg z = x \wedge \neg w = x \wedge E(x, z) \wedge E(z, w) \wedge E(w, y)))$$

Problema 3. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que una oración φ es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones σ, denotado como $\sigma \vDash \varphi$, si para cada estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

a) $\{\forall x \exists y R(x, y)\} \vDash \exists x \forall y R(x, y)$.
b) $\{\exists x \forall y R(x, y)\} \vDash \forall x \exists y R(x, y)$.
c) $\{\exists x (P(x) \wedge Q(x))\} \vDash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$.
d) $\{\exists x P(x), \exists y Q(y))\} \vDash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.
e) $\{\forall x \exists y S(x, y)\} \vDash \exists y S(y, y)$.

Solución

a) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
b) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.
c) Verdadero. Si existe un elemento x tal que $P(x)$ y $Q(x)$, entonces existe un elemento x tal que $P(x)$ y existe un elemento x tal que $Q(x)$.
d) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{1\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{2\}$.
e) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $S^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Problema 4. Muestre que ninguno de los enunciados siguientes es concecuencia lógica de los otros dos.

a) $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.
b) $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$.
c) $\forall x R(x, x)$.

Solución

a) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.
b) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.
c) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$.