Bases de conocimiento y razonamiento

Semana $(1)_2 = 1$

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213

Prof. Sebastián Bugedo

Programa

Programa

Sintaxis de la lógica proposicional

Sea P un conjunto de variables proposicionales

Definición

Dado P, se define $\mathcal{L}(P)$ como el menor conjunto que satisface

1. $P \subseteq \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \circ \psi) \in \mathcal{L}(P)$

Cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es una **fórmula proposicional**

Notemos que $\mathcal{L}(P)$ se define **inductivamente** a partir de un P fijo

Semántica de la lógica proposicional

Definición

Sea P un conjunto y $\sigma : P \to \{0,1\}$ una valuación de las variables de P. Se define la **valuación extendida** $\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ según

- Si $\varphi = p$ con $p \in P$,entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$
- **Semántica de la negación.**Si $\varphi = (\neg\psi)$ para $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi) = 1 \end{cases}$$

- **Semántica de la conjunción.**Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (cont.)

- **Semántica de la disyunción.** Si $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 0 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

Definición (cont.)

- **Semántica de la doble implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = \hat{\sigma}(\psi_2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por simplicidad usaremos σ en vez de $\hat{\sigma}$

Visualizando la semántica: mundos posibles

Supongamos $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y tomemos una de las posibles valuaciones σ

- Definamos
$$S_\sigma = \{p \in P \mid \sigma(p) = 1\}$$
i.e. S_σ es el conjunto de proposiciones satisfechas por σ
- Luego, podemos caracterizar cada valuación por su conjunto S_σ
- S_σ enfatiza que una valuación representa un **mundo posible** donde las variables de S_σ son verdaderas

Visualizando la semántica: mundos posibles

Los **mundos posibles** se pueden expresar de forma exhaustiva en **tablas de verdad**

p	q	φ
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Las valuaciones que satisfacen a φ se conocen como **modelos** de φ

$$\text{models}(\varphi) = \{\sigma \mid \sigma(\varphi) = 1\}$$

Una fórmula queda determinada semánticamente por su tabla

Visualizando la semántica: mundos posibles

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Comparemos con una fórmula particular $\varphi = (\neg((\neg p) \wedge (\neg q)))$

p	q	φ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Notemos que su tabla de verdad es igual a la de $(p \vee q)$...

Equivalencia lógica

Las visualizaciones anteriores sugieren la existencia de fórmulas con sintaxis diferente, pero misma semántica

Definición

Dos fórmulas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ son **lógicamente equivalentes** si para toda valuación σ, se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$, denotándolo como $\varphi \equiv \psi$.

Notemos que

- Usando modelos, $\varphi \equiv \psi$ si, y solo si, $\text{models}(\varphi) = \text{models}(\psi)$
- Es una **relación de equivalencia** (refleja, simétrica y transitiva)
- Esto motiva el uso de reglas de equivalencia

¿Cómo se demuestra que dos fórmulas son lógicamente equivalentes?

Equivalencia lógica

Para demostrar que $\varphi \equiv \psi$ podemos

1. Verificar que sus tablas de verdad son iguales
2. Usar reglas de equivalencia para transformar fórmulas

Evidentemente, solo podemos usar tablas de verdad si conocemos la forma explícita de las fórmulas

Equivalencia lógica

Daremos por demostradas todas las reglas vistas en Mat. Discretas

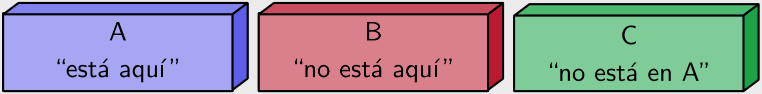
Algunas de ellas	Ejemplos
Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$	$(p \wedge p) \equiv p$
Doble negación	$(\neg(\neg p)) \equiv p$
Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$	$(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$
Distributividad de $\wedge$ y $\vee$	$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
De Morgan	$(\neg(p \wedge q)) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
Implicación material	$(p \to q) \equiv ((\neg p) \vee q)$

En el repositorio está disponible un resumen de las reglas

Un acertijo

Ejercicio

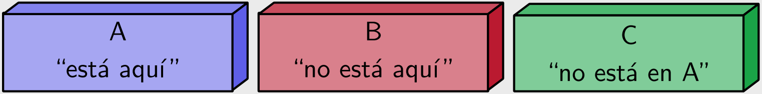
Existe un premio en una de las siguientes tres cajas



Solo una de las cajas dice la verdad. ¿Cuál tiene el premio?

Un acertijo

Ejercicio



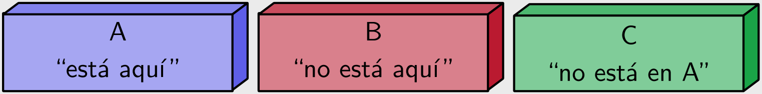
Modelamos el problema usando **proposiciones**:

- $p :=$ el premio está en A
- $q :=$ el premio está en B
- $r :=$ el premio está en C

Un mundo posible asigna valor de verdad a estas variables. Notemos que solo nos interesan los mundos posibles que satisfacen **solo a una y exactamente a una** de ellas.

Un acertijo

Ejercicio



Definimos las fórmulas que modelan los mensajes de cada caja

$$\varphi_A = p \qquad \varphi_B = \neg q \qquad \varphi_C = \neg p$$

y analizamos los mundos posibles mediante una tabla de verdad: **solo valuaciones que satisfacen a una variable**

Un acertijo

Ejercicio

p	q	r	φ_A	φ_B	φ_C
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0

Un acertijo

Ejercicio

p	q	r	φ_A	φ_B	φ_C
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0

La valuación que asigna el premio a una sola caja, y que además satisface solo un texto indica que el premio está en B.

Playlist y Orquesta

Playlist: LogiWawos #1

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de equivalencia lógica
- ☐ Representar fórmulas como formas normales
- ☐ Comprender concepto de consecuencia lógica
- ☐ Demostrar consecuencias con tablas y reglas de inferencia
- ☐ Demostrar propiedades relevantes de consecuencia lógica
- ☐ Comprender la técnica de revisión de conocimiento

Programa

Simplificación de notación

A partir de ahora, eliminaremos paréntesis innecesarios según

1. Orden de precedencia: mandan los más prioritarios

Conectivo	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Por ejemplo,

$$(p \wedge (\neg q)) \wedge r \quad \text{se escribirá} \quad (p \wedge \neg q) \wedge r$$

Simplificación de notación

2. Asociatividad: paréntesis internos se eliminan, e.g.

$$(p \wedge \neg q) \wedge r \quad \text{se escribirá} \quad p \wedge \neg q \wedge r$$

3. Eliminación de paréntesis exteriores, e.g.

$$((p \wedge (\neg q)) \wedge r) \quad \text{se escribirá} \quad (p \wedge (\neg q)) \wedge r$$

Conectivos n-arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos con n variables

Denotamos por $C(p_1, \ldots, p_n)$ a un conectivo con variables $p_1, \ldots, p_n$, cuya semántica está dada por la siguiente tabla de verdad

p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, \ldots, p_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	b_1
0	1	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

Conectivos *n*-arios

Ejemplo

Para $P = \{p, q\}$, sabemos por reglas de equivalencia que las siguientes fórmulas tienen las mismas tablas de verdad

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Vemos que representan al mismo conectivo binario... ¿en qué se diferencian las fórmulas (su escritura)?

¿Existe un conjunto de símbolos capaz de representar **cualquier** conectivo binario? ¿Y *n*-ario?

Conectivos n-arios

Ejemplo

p	q	r	$C(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

¿Es posible representar $C(p,q,r)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

Ejemplo

p	q	r	$C(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

p	q	r	$\alpha_4(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\alpha_4(p,q,r) \;:=\; (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

¿Es posible representar $C(p,q,r)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

p_1	$\cdots$			p_{n-1}	p_n	$C(p_1, \ldots, p_n)$
0	$\cdots$			0	0	b_1
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_i(p_1)$	$\cdots$	$\sigma_i(p_j)$	$\cdots$	$\sigma_i(p_{n-1})$	$\sigma_i(p_n)$	b_i
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\cdots$			1	1	b_{2^n}

Suponiendo que $\sigma_i(p_j)$ es la valuación correspondiente a la fila i y variable p_j, entonces:

$$C(p_1, \ldots, p_n) \quad \equiv \quad \bigvee_{i \,:\, b_i = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, \sigma_i(p_j) = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, \sigma_i(p_j) = 0} \neg p_j \right) \right)$$

Toda tabla se puede representar con símbolos de $\{\wedge, \vee, \neg\}$!!!

$$C(p_1, \ldots, p_n) \;\equiv\; \bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,\sigma_i(p_j)=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,\sigma_i(p_j)=0} \neg p_j \right) \right)$$

Observaciones

- **Codifica** las valuaciones que satisfacen a C
- No es la única forma de representarlo con $\{\wedge, \vee, \neg\}$

Formas normales

Definición

Un **literal** es una variable proposicional p o la negación de una variable proposicional

Ejemplo

¿Qué fórmulas son literales para $P = \{p, q, r\}$?

- p
- $\neg q$
- $\neg\neg r$

Formas normales

Definición

Una fórmula proposicional φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si es de la forma

$$\varphi = \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_j} \ell_{ij} \right)$$

donde ℓ_{ij} es un literal

Ejemplo

¿Qué fórmulas están en DNF para $P = \{p, q, r\}$?

- $p \vee q$
- $p \wedge (q \vee r)$
- $p \wedge q$
- $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Formas normales

Teorema (equivalencia DNF)

Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, existe $\psi \in \mathcal{L}(P)$ en DNF tal que $\varphi \equiv \psi$

Se puede demostrar una conexión con su forma complementaria

Formas normales

Definición

Una fórmula proposicional φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si es de la forma

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_j} \ell_{ij} \right)$$

donde ℓ_{ij} es un literal

Teorema (equivalencia CNF)

Para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, existe $\psi \in \mathcal{L}(P)$ en CNF tal que $\varphi \equiv \psi$

Más allá de las formas normales

¿Es $\{\neg, \vee, \wedge\}$ el único conjunto de símbolos que permite construir fórmulas equivalentes para φ cualquiera?

Definición (funcionalmente completo)

Un conjunto de conectivos $\mathcal{C}$ es **funcionalmente completo** si para todo conjunto P de variables proposicionales y para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, existe $\psi \in \mathcal{L}(P)$ que solo usa conectivos de $\mathcal{C}$ y tal que $\varphi \equiv \psi$.

Los teoremas de equivalencia DNF y CNF
muestran que $\mathcal{C} = \{\neg, \vee, \wedge\}$ es func. completo

Programa

¿Dónde estamos?

Hasta aquí hemos formalizado la sintaxis y semántica para la lógica proposicional

- Un primer modelo de lógica
- Nuestro norte: capturar la **validez** de los argumentos

Buscamos formalizar la siguiente idea:
Si se cumplen las premisas, entonces se cumple la conclusión

Conjuntos de fórmulas

Definición

Dado P, sea Σ un conjunto de fórmula en $\mathcal{L}(P)$.

- Si existe una valuación $\sigma : \mathcal{L}(P) \to \{0, 1\}$ tal que satisface cada fórmula $\varphi \in \Sigma$, entonces decimos que Σ es **satisfacible**. Además, decimos que σ satisface a Σ y lo denotamos por $\sigma(\Sigma) = 1$
- Si no existe tal valuación, decimos que Σ es **insatisfacible**

Dado un conjunto Σ, ¿cuándo podemos decir que φ se deduce de Σ?

Noción de consecuencia lógica

Definición (consecuencia lógica)

Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, si para toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. En tal caso, lo denotamos por $\Sigma \vDash \varphi$.

Observaciones

- Al conjunto Σ le llamamos **conjunto de premisas** o también **base de conocimiento** (KB)
- A la fórmula φ tal que $\Sigma \vDash \varphi$ le llamamos **consecuencia**

La consecuencia debe cumplirse en todos los mundos donde las premisas son verdaderas

Reglas de inferencia

La consecuencia lógica permite demostrar **reglas de inferencia** que toman premisas, analizan su sintaxis y entregan conclusiones

Ejemplo

Modus ponens: $\{p, p \rightarrow q\} \vDash q$

p	q	p	$p \rightarrow q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

En el repositorio está disponible un resumen de las reglas

Noción de consecuencia lógica

Definición (consecuencia lógica)

Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, si para toda valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. En tal caso, lo denotamos por $\Sigma \vDash \varphi$.

Ejercicio

¿Es cierto que si $\Sigma \vDash \varphi \vee \psi$, entonces $\Sigma \vDash \varphi$ o $\Sigma \vDash \psi$?

Programa

Programa

Resultados sobre consecuencia lógica

La consecuencia en lógica proposicional cumple un set de propiedades

Teorema

Sean $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$.

1. Σ es inconsistente si, y solo si, $\Sigma \vDash \varphi$, para cualquier φ.
2. φ es tautología si, y solo si, $\{\top\} \vDash \varphi$, para cualquier tautología $\top$.
3. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ si, y solo si, $\Sigma \vDash (\varphi \to \psi)$
4. Si $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \psi$ (intermedia)

¡La propiedad 4 (intermedia) es uno de los dos ingredientes para demostrar consecuencias sin tablas de verdad!

Resultados sobre consecuencia lógica

Teorema (propiedad 4.)

Si $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \psi$

Demostración

La propiedad intermedia permite ignorar consecuencias "intermedias"

Resultados sobre consecuencia lógica

Teorema (propiedad 4.)

Si $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \psi$

Demostración

Sean Σ, φ, ψ tales que $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$. Además, sea σ una valuación cualquiera tal que $\sigma(\Sigma) = 1$.

Como $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\Sigma \vDash \varphi$, obtenemos que $\sigma(\varphi) = 1$. Luego, $\sigma(\Sigma \cup \{\varphi\}) = 1$ y como $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, tenemos que $\sigma(\psi) = 1$.

Como cualquier σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$ cumple que $\sigma(\psi) = 1$, se tiene $\Sigma \vDash \psi$. $\square$

Monotonía

Teorema (monotonía)

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces para toda fórmula $\psi \in \mathcal{L}(P)$ se tiene que $\Sigma \cup \{\psi\} \vDash \varphi$

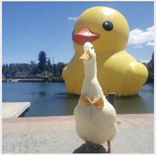
Al agregar premisas, no perdemos conclusiones
que son deducidas de las premisas originales

Monotonía

Teorema (monotonía)

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Si $\Sigma \models \varphi$, entonces para toda fórmula $\psi \in \mathcal{L}(P)$ se tiene que $\Sigma \cup \{\psi\} \models \varphi$

Demostración



Monotonía

Teorema (monotonía)

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces para toda fórmula $\psi \in \mathcal{L}(P)$ se tiene que $\Sigma \cup \{\psi\} \vDash \varphi$

Demostración

Sean Σ, φ tales que $\Sigma \vDash \varphi$. Para una fórmula cualquiera ψ, sea σ una valuación tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\psi\}) = 1$.

Como $\sigma(\Sigma \cup \{\psi\}) = 1$, se tiene que $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\sigma(\psi) = 1$. Dado que $\sigma(\Sigma) = 1$, por la hipótesis de $\Sigma \vDash \varphi$ concluímos que $\sigma(\varphi) = 1$.

Como para cualquier valuación σ tal que $\sigma(\Sigma \cup \{\psi\}) = 1$ se cumple que $\sigma(\varphi) = 1$, se tiene $\Sigma \cup \{\psi\} \vDash \varphi$. $\square$

Monotonía

Teorema (monotonía)

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y $\varphi \in \mathcal{L}(P)$. Si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces para toda fórmula $\psi \in \mathcal{L}(P)$ se tiene que $\Sigma \cup \{\psi\} \vDash \varphi$

Observación

- Esta propiedad diferencia a la lógica proposicional del razonamiento que usamos los humanos

Ejemplo

De la regla modus ponens sabemos $\{p, p \to q\} \vDash q$. Por el teorema de monotonía,

$$\{p, p \to q, \neg q\} \vDash q$$

Deducción con reglas de inferencia

Tenemos dos propiedades que permiten usar reglas de inferencia secuencialmente

1. Si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces $\Sigma \cup \Sigma' \vDash \varphi$ (monotonía versión conjuntos)
2. Si $\Sigma \vDash \varphi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$, entonces $\Sigma \vDash \{\psi\}$

En chileno:

1. Si queremos demostrar φ desde $\Sigma \cup \Sigma'$, pero lo demostramos desde un subconjunto, estamos listos
2. Si demostramos φ desde Σ, y demostramos ψ usando Σ y φ, hemos demostrado ψ desde Σ

¿Cómo usamos estas propiedades para demostrar $\Sigma \vDash \alpha$?

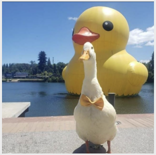
Deducción con reglas de inferencia

Para probar $\Sigma \vDash \alpha$

- Con reglas de inferencia y mononotía obtenemos conclusiones
- Agregamos esas conclusiones a Σ
- Cuando logramos deducir α, terminamos

Ejercicio

Demuestre que $\{p, p \to q, q \to r\} \vDash r$.



Programa

Revisión de conocimiento

Monotonía nos dice que no podemos retractarnos al recibir nueva info

Nos gustaría actualizar nuestro conocimiento al recibir info contradictoria

Dados Σ y la nueva info φ

- Nos interesa generar una fórmula que refleje el nuevo conocimiento
- Denotamos esta nueva fórmula como $\Sigma \circ \varphi$
- Reemplazaremos Σ con el nuevo conjunto $\{\Sigma \circ \varphi\}$

¿Cómo actualizamos lo que sabíamos? ¿Qué fórmula $\Sigma \circ \varphi$ usamos?

Ejemplo

Consideremos $\Sigma = \{p, p \rightarrow q\}$ y la nueva información $\varphi = \neg q$

El conjunto $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ es contradictorio y nos interesa actualizarlo reflejando lo nuevo que recibimos

Primera propuesta: $\Sigma \circ \varphi = \varphi$

- Nuestro nuevo conjunto de premisas es $\{\neg q\}$
- Borramos todo lo que sabíamos y nos quedamos **solo** con lo nuevo

¿Es una buena forma de actualizar nuestro conocimiento?

Revisión de conocimiento

Una mejor alternativa se conoce como **Belief Revision**

- Interesa incorporar la nueva información...
- ...pero manteniendo la info antigua que es consistente con lo nuevo
- Consideraremos los modelos de las premisas iniciales y la nueva información
- Estos mundos *en común* permiten construir la nueva fórmula

Revisión de conocimiento

Si tenemos los modelos de $\Sigma \circ \varphi$

- Tenemos su tabla de verdad
- Podemos construir una fórmula con la misma tabla

Nuestro objetivo es determinar los modelos de $\Sigma \circ \varphi$

Revisión de conocimiento

Dado un conjunto P fijo y $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$, definimos

- $\text{models}(\Sigma) = \{\sigma \mid \sigma(\Sigma) = 1\}$
- $\Delta(\sigma_1, \sigma_2) = \{p \in P \mid \sigma_1(p) \neq \sigma_2(p)\}$, que mide cierta *distancia* entre valuaciones

Ejemplo

Para $P = \{p, q\}$, las valuaciones

$$\begin{array}{ll} \sigma_1(p) = 1 & \sigma_1(q) = 1 \\ \sigma_2(p) = 1 & \sigma_2(q) = 0 \end{array}$$

se diferencian en $\Delta(\sigma_1, \sigma_2) = \{q\}$

Usaremos Δ para decidir qué modelos tendrá la nueva fórmula $\Sigma \circ \varphi$

Para decidir los modelos de $\Sigma \circ \varphi$, comenzamos con los modelos de Σ

Dada $\sigma \in \text{models}(\Sigma)$, definimos

$$\begin{aligned} \min(\sigma, \varphi) = \quad \{\sigma_1 \mid \quad & \sigma_1(\varphi) = 1 \text{ y no existe } \sigma_2 \text{ tal que} \\ & \sigma_2(\varphi) = 1 \text{ y } \Delta(\sigma, \sigma_2) \subsetneq \Delta(\sigma, \sigma_1)\} \end{aligned}$$

$\min(\sigma, \varphi)$ contiene los modelos de φ tal que están *más cerca* de σ

Definimos los modelos de $\Sigma \circ \varphi$ según

$$\text{models}(\Sigma \circ \varphi) = \bigcup_{\sigma : \sigma(\Sigma) = 1} \min(\sigma, \varphi)$$

Luego, definimos $\Sigma \circ \varphi$ como cualquier fórmula ψ tal que

$$\text{models}(\psi) = \text{models}(\Sigma \circ \varphi)$$

Los modelos de $\Sigma \circ \varphi$ son los modelos de φ
que están *más cerca* de los de Σ

Ejemplo

Para $P = \{p, q\}$, consideramos $\Sigma = \{p, p \rightarrow q\}$ y la nueva info $\varphi = \neg q$

Computamos los modelos de Σ y φ

	p	q	p	$p \rightarrow q$	$\neg q$
σ_1	0	0	0	1	1
σ_2	0	1	0	1	0
σ_3	1	0	1	0	1
σ_4	1	1	1	1	0

- $\text{models}(\Sigma) = \{\sigma_4\}$
- $\text{models}(\varphi) = \{\sigma_1, \sigma_3\}$

Revisión de conocimiento

	p	q	p	$p \to q$	$\neg q$
σ_1	0	0	0	1	1
σ_2	0	1	0	1	0
σ_3	1	0	1	0	1
σ_4	1	1	1	1	0

- $\text{models}(\Sigma) = \{\sigma_4\}$
- $\text{models}(\varphi) = \{\sigma_1, \sigma_3\}$

Luego, verificamos las distancias necesarias

$$\Delta(\sigma_4, \sigma_1) = \{p, q\} \qquad \Delta(\sigma_4, \sigma_3) = \{q\}$$

y obtenemos $\min(\sigma_4, \varphi) = \{\sigma_3\}$. Con esto, $\text{models}(\Sigma \circ \varphi) = \{\sigma_3\}$ y proponemos

$$\Sigma \circ \varphi = p \wedge \neg q$$

La fórmula propuesta incorpora información antigua y nueva

Programa

Actividad Espiritual Complementaria #1

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el concepto de equivalencia lógica
- ☐ Representar fórmulas como formas normales
- ☐ Comprender concepto de consecuencia lógica
- ☐ Demostrar consecuencias con tablas y reglas de inferencia
- ☐ Demostrar propiedades relevantes de consecuencia lógica
- ☐ Comprender la técnica de revisión de conocimiento

¿Qué aprendí hoy? ¿Comentarios?

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

8122 5042

O usa el código QR