Pontificia Universidad Católica de Chile
Profesor: Sebastián Bugedo
Ayudante: Sofía Errázuriz

Lógica para ciencias de la computación - IIC2213
Ayudantía 10
2 de junio, 2023

Ejercicio 1. ¿Es la función $+$ definible en $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$?

Solución. No, para mostrar que $+$ no es definible, consideremos el automorfismo $h : \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ tal que $h(x) = x^3$. Notemos que es un automorfismo ya que claramente es biyección y $h(x \cdot y) = (x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3 = h(x) \cdot h(y)$.

Ahora supongamos que $+$ es definible, entonces existe una fórmula $\varphi(a, b, c)$ es satisfecha por la estructura si y solo si $a+b=c$. Esto debiera preservarse bajo isomorfismo, sin embargo $1^3+1^3 \neq 2^3$, por lo tanto $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle \not\models \varphi(h(1), h(1), h(2))$. Como llegamos a una contradicción, podemos concluir que $+$ no es definible en $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$. □

Ejercicio 2. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura. Demuestre que dadas dos propiedades S y P, se tiene que si las fórmulas que las definen tienen igual aridad entonces las siguientes son definibles:

1. $S \cup P$
2. $S \cap P$

¿Que sucede con la unión/intersección finita de propiedades? ¿Qué sucede con la unión/intersección numerable?

Solución. Supongamos que tenemos S y P propiedades definibles, entonces existen fórmulas φ y ψ tales que son satisfechas solo en los elementos de S y de P. Notemos que $\varphi \vee \psi$ define $S \cap P$ y $\varphi \wedge \psi$ define $S \cup P$, por lo tanto estas propiedades son satisfacibles.

La unión e intersección finita de propiedades también es una propiedad, para probar esto basta hacer inducción sobre el número de propiedades aplicando el resultado anterior.

La unión e intersección arbitraria de propiedades no necesariamente es una propiedad, por ejemplo sabemos que en grafos con dos constantes, la propiedad de tener un camino de largo n entre las constantes es definible, pero la unión arbitraria no lo es. Por otro lado, si consideramos el complemento de esto, tenemos que la intersección arbitraria de propiedades tampoco es necesariamente una propiedad. □

Ejercicio 3. Demuestre que el único automorfismo en $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ es el automorfismo trivial.

Solución. Recordemos que las propiedad de ser 0 es definibles en $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ a través de $\varphi_0(n) = \forall m.m+n = m$. Por lo tanto, dado un automorfismo $h : \langle \mathbb{N}, + \rangle \to \langle \mathbb{N}, + \rangle$, tenemos que $h(0) = 0$ por teorema de isomorfismo. Ahora que sabemos esto, supongamos que tenemos que $h(1) = n \neq 0$, entonces $h(m+1) = h(m)+h(1)$ por teorema de isomorfismo e inductivamente tenemos que $h(m) = mn > n$. Por lo tanto, si queremos que h sea biyección, $h(1)$ debe ser 1, entonces $h(m) = mn = m$. Es decir, el automorfismo es trivial. $\square$

Ejercicio 4. Muestre que el siguiente lenguaje $\mathrm{SAT}_1 := \{\varphi : \varphi$ es una $\mathcal{L}$- oración satisfacible por alguna $\mathcal{L}$-estructura con exactamente un elemento en el dominio$\}$ es decidible. ¿Es en general cierto que $\mathrm{SAT}_{<n}$ es decidible?

Solución. En primer lugar, notemos que las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ con dominio $\{x\}$ son finitas. Además dada una $\mathcal{L}-$oración φ entonces es posible decidir si $\mathfrak{A} \models \varphi$ para cada una de estas estructuras. Por lo tanto, es posible construir una máquina $\mathcal{M}$ tal que dado un input,

1. Revisa si el input tiene formato de una $\mathcal{L}$-oración φ, si no es así rechaza.
2. Para cada $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ con dominio $\{x\}$, revisa si $\mathfrak{A} \models \varphi$ si es así acepta y si no se tiene para ninguna, entonces rechaza

Notemos que esto es un proceso que siempre termina por la cantidad finita de estructuras. Además, notemos que dada cualquier $\mathcal{L}$-estructura con un elemento podemos contruir un isomorfismo a una estructura exactamente igual, pero cambiando el nombre del elemento a x, por lo tanto, por teorema de isomorfismo, la máquina construida anteriormente decide VAL_1. Notemos que dadas estructuras con menos de $n+1$ elementos en el dominio, entonces podemos hacer lo mismo que antes pero con dominio $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y concluir que $\mathrm{SAT}_{<n}$ es decidible. $\square$

Ejercicio 5. Demuestre usando compacidad que si un grafo (finito o infinito) es finitamente 4-coloreable, entonces es 4-coloreable. ¿Se puede generalizar esta demostración para k-coloreabilidad?

Demostración. Para este ejercicio utilizaremos compacidad en lógica proposicional. En primer lugar, notemos que dado un grafo finito $G = ([n], E)$ existe una fórmula φ_G tal que es satisfacible si y solo si G es 4-coloreable. Esta se construye tomando las variables $p_{i,j}$ para $i \in [n], j \in [4]$ y definiendo $\varphi_G = \varphi_{uni} \wedge \varphi_{exis} \wedge \varphi_{col}$ con

$$\varphi_{uni} = \bigwedge_{\substack{i\in[n]\\ j\in[4]}} p_{i,j} \Rightarrow \bigwedge_{j'\neq j} \neg p_{i,j'}$$

$$\varphi_{exis} = \bigwedge_{i\in[n]} \bigvee_{j\in[4]} p_{i,j}$$

$$\varphi_{col} = \bigwedge_{\substack{i\in[n]\\ j\in[4]}} p_{i,j} \Rightarrow \bigwedge_{\substack{i'\in[n]\\ (i,i')\in E}} \neg p_{i',j}$$

Entonces φ_G cumple lo pedido (¿Por qué?). Además dado un grafo cualquiera $G' = (V, E)$, podemos definir

$$\Sigma = \{\varphi_G : G \text{ subgrafo finito de } G'\}$$

. Notemos que decir que Σ es finitamente satisfacible equivale a decir que todos los subgrafos finitos de G' son 4-coloreable, entonces por compacidad, podemos encontrar una 4-coloración que satisface todo Σ, entonces el grafo G' es 4-coloreable.

Notemos que nunca usamos que teníamos solo 4 colores, entonces esto se tiene para cualquier cantidad de colores. □

Ejercicio 6. Demuestra que existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{S}$ que es lógicamente equivalente a $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, s, +, \cdot, < \rangle$ y tal que el dominio de $\mathfrak{S}$ contiene a los números naturales, pero que además $\mathfrak{S}$ tiene un elemento mayor que cualquier número natural.
Concluya que la compacidad (topológica) no es definible de forma generalizada.

Solución. En primer lugar, sea Σ el conjunto de $\mathcal{L}$ oraciones φ tales que $\mathfrak{N} \models \varphi$, por otro lado, definamos la constante ∞ y $\{\Phi_n\}_n$ el conjunto de oraciones tales que Φ_n es la oración $\infty > n$ (para simplificar la notación escribiré n en lugar de $s(s(\dots s(0)\dots))$ n veces). Ahora, sea $S \subset \Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ un subconjunto finito, notemos que $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \subset \Sigma$ y $S_2 \subset \{\Phi_n\}_n$. Ya sabemos que $\mathfrak{N}$ satisface todas las oraciones de S_1 y además, como S_2 es finito, podemos definir $\infty = \text{máx}\{n : \Phi_n \in S_2\} + 1$ y así creamos un modelo que satisface S. Por lo tanto, $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ es finitamente satisfacible.

Ahora sea $\mathfrak{S}$ el modelo que satisface $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$. Notemos que $\mathfrak{S}$ debe tener un primer elemento y todos sus sucesores, entonces si definimos el primer elemento como 1, tenemos que $\mathfrak{S}$ contiene los naturales. Además, tenemos que son lógicamente equivalentes ya que $\mathfrak{N}$ satisface todas las oraciones de $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ por separado (el problema es cuando se satisfacen todas al mismo tiempo) y como $\mathfrak{S}$ satisface $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$, tenemos que $\varphi \models \mathfrak{S} \Rightarrow \varphi \models \mathfrak{N}$. Además, tenemos que $\Sigma \subset \Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$, por lo tanto $\varphi \models \mathfrak{N} \Rightarrow \varphi \models \mathfrak{S}$. Es decir, ambas estructuras son lógicamente equivalentes. □