PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 1

Publicación:	Martes 14 de marzo.
Entrega:	**Lunes 27 de marzo hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- Todos los incisos de una pregunta pregunta tienen el mismo puntaje.
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

Esta tarea busca evaluar si el estudiante es capaz de

- Definir inductivamente propiedades/objetos en $\mathcal{L}(P)$
- Demostrar usando diversas técnicas, entre ellas inducción en $\mathcal{L}(P)$
- Aplicar conceptos de sintaxis y semántica proposicional, y consecuencia lógica

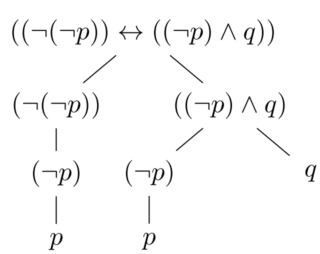
Pregunta 1: Sintaxis e inducción en $\mathcal{L}(P)$

Advertencia. Para evitar confusiones, en esta pregunta considere el uso de paréntesis visto en la clase 0, es decir, no elimine paréntesis innecesarios.

En clases definimos de informalmente el árbol sintáctico de una fórmula proposicional φ como aquel tal que

- su raíz es φ
- cada nodo tiene como hijos a sus subfórmulas inmediatas
- cada hoja es una variable proposicional

con la posibilidad de que existan nodos repetidos. Se define el número de subfórmulas de φ como el número de nodos en su árbol sintáctico.
Por ejemplo, para $((\neg(\neg p)) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge q))$, el número de subfórmulas es 8, dado que su árbol sintáctico es



(a) Defina de manera inductiva la función $\text{nsf}(\varphi)$ que retorna la cantidad de subfórmulas de φ. Por ejemplo, $\text{nsf}(((p \lor q) \to (p \land (\neg r)))) = 8$.

(b) Defina $\text{la}(\alpha)$ como el largo de la fórmula proposicional α, que cuenta cada símbolo y variable mencionado en α. Por ejemplo, $\text{la}(((p \lor q) \to (p \land (\neg r)))) = 16$.

(c) Demuestre que para toda fórmula φ se tiene que $\text{nsf}(\varphi) \leq \text{la}(\varphi)$.

Pregunta 2: Semántica en $\mathcal{L}(P)$ y equivalencia lógica

Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo $\neg p$, $(\neg p \lor \neg q)$ y $(p \lor \neg q \lor \neg r \lor \neg s)$ son todas cláusulas de Horn, mientras que $(p \lor q \lor \neg r)$ no es una cláusula de Horn porque tiene dos literales positivos. Decimos que una fórmula es una *fórmula de Horn* si es una conjunción de cláusulas de Horn.

Dadas dos valuaciones $\sigma_1, \sigma_2 : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$, se define la valuación $\sigma_1 \land \sigma_2 : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ como aquella que, para cualquier fórmula atómica $p \in P$, asigna el valor

$$\sigma_1 \land \sigma_2(p) = \text{mín}\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\}$$

Por ejemplo, si consideramos $P = \{p, q\}$, con valuaciones $\sigma_1(p) = \sigma_1(q) = 1$, $\sigma_2(p) = 1$ y $\sigma_2(q) = 0$, se tiene $\sigma_1 \land \sigma_2(p) = 1$ y $\sigma_1 \land \sigma_2(q) = 0$, con lo cual $\sigma_1 \land \sigma_2(p \to q) = 0$.

(a) Demuestre que si φ es una cláusula de Horn, entonces

$$\text{si } \sigma_1(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma_2(\varphi) = 1, \text{ entonces } \sigma_1 \land \sigma_2(\varphi) = 1$$

(b) Demuestre que si una fórmula ψ es equivalente a una fórmula de Horn, entonces

$$\text{si } \sigma_1(\psi) = 1 \text{ y } \sigma_2(\psi) = 1, \text{ entonces } \sigma_1 \land \sigma_2(\psi) = 1$$

Hint: defina las fórmulas de Horn inductivamente. Además, puede responder este inciso asumiendo demostrado el resultado de (a).

(c) Demuestre que existe una fórmula que no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

Hint: puede responder este inciso asumiendo demostrado el resultado de (b).

Pregunta 3: Consecuencia lógica en $\mathcal{L}(P)$

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$. Decimos que Σ es *redundante* si existe $\varphi \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Un conjunto Σ' se dice un *subconjunto no redundante equivalente* de Σ si

1. $\Sigma' \subseteq \Sigma$,
2. $\text{models}(\Sigma') = \text{models}(\Sigma)$,
3. Σ' no es redundante.

(a) Muestre que el conjunto $\Sigma = \{p \land q, p \lor q, \neg p \land \neg q\}$ tiene dos subconjuntos no redundantes equivalentes. Justifique.

(b) Una fórmula $\varphi \in \Sigma$ es *necesaria* en Σ si pertenece a todos los subconjuntos no redundantes equivalentes de Σ. Demuestre que si una fórmula φ es necesaria en Σ, entonces $\Sigma \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$.