Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

IIC2213 - Lógica para ciencia de la computación

Ayudantía 7 - Viernes 12 de Mayo del 2023

Problema 1. Suponga usted que tenemos un vocabulario $\mathcal{L}$ con los símbolos siguientes:

- N significa *"es un número"*
- I significa *"es interesante"*
- $<$ significa *"es menor que"*
- 0 significa es un símbolo constante que significa cero

Además se tienen los cuantificadores siguientes:

- $\forall$ significa *"para todos las cosas"*
- $\exists$ significa *"existe una cosa tal que"*

Traduzca a este lenguaje los enunciados del español que aparecen abajo. Si el enunciado en español es ambiguo, necesitará más de una traducción.

a) Cero es menor que cualquier número.
b) Si cualquier número es interesante, entonces el cero es interesante.
c) Ningún número es menor que cero.
d) Cualquier número no interesante con la propiedad de que todos los números menores son interesantes es, desde luego, interesante.
e) No existe un número tal que todos los números sean menores que él.
f) No existe un número tal que ningún número sea menor que él.

Solución

Los enunciados del estilo: *"Cualquier cosa (x) tal que P(x) entonces Q(x)"* se traducen como $\forall x(P(x) \to Q(y))$. Donde $P(x)$ y $Q(x)$ podrían ser una $\mathcal{L}$-fórmula en si mismos. No es está bien traducirlo, en vez, por $\forall x(P(x) \land Q(y))$ ya que estaríamos diciendo que toda cosa (x) del universido cumple $P(x)$ y $Q(x)$.

a) $\forall x(N(x) \to 0 < x)$
b) $\forall x(N(x) \to I(x)) \to I(0)$
c) $\forall x(N(x) \to \neg(x < 0))$
d) $\forall x(N(x) \land \neg I(x) \land (\forall y((N(y) \land y < x) \to (I(y))) \to I(x))$
e) $\neg\exists x(N(x) \to (\forall y(N(y) \to y < x)))$
f) $\neg\exists x(N(x) \to (\neg\exists y(N(y) \to y < x)))$

Problema 2. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot)\}$ un lenguaje utilizado para representar grafos (no dirigidos). En cada una de las siguientes preguntas escriba una $\mathcal{L}$-oración que represente la propiedad mencionada.

a) El grafo es un clique.

b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.

c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.

d) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 3.

e) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.

Solución

a) $\forall x \forall y E(x, y)$

b) Vamos a pedir lo siguiente:

En *chileno*	**En LPO**
Existen cuatro nodos	$\exists x \exists y \exists z \exists w$
Todos los nodos distintos entre si	$\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg x = w \wedge$ $\neg y = z \wedge \neg y = w \wedge \neg z = w$
Todos conectados entre si	$E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge E(x, w) \wedge$ $E(y, z) \wedge E(y, w) \wedge E(z, w)$

La fórmula quedaría:

$$\begin{gathered}\exists x \exists y \exists z \exists w (\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg x = w \wedge \\ \neg y = z \wedge \neg y = w \wedge \neg z = w \wedge \\ E(x, y) \wedge E(x, z) \wedge E(x, w) \wedge \\ E(y, z) \wedge E(y, w) \wedge E(z, w))\end{gathered}$$

c) Muy similar al anterior:

En *chileno*	**En LPO**
Existen cuatro nodos	$\exists x \exists y \exists z \exists w$
Todos los nodos distintos entre si	$\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg x = w \wedge$ $\neg y = z \wedge \neg y = w \wedge \neg z = w$

Existe un ciclo	$E(x,y) \land E(y,z) \land$ $E(z,w) \land E(w,x)$

La fórmula quedaría:

$$\exists x \exists y \exists z \exists w(\neg x = y \land \neg x = z \land \neg x = w \land \\ \neg y = z \land \neg y = w \land \neg z = w \land \\ E(x,y) \land E(y,z) \land \\ E(z,w) \land E(w,x))$$

d) Recordemos que la distancia entre dos nodos es el menor número de aristas que hay que recorrer para llegar de uno a otro.

En *chileno*	**En LPO**
Existen cuatro nodos	$\exists x \exists y \exists z \exists w$
Todos los nodos distintos entre si	$\neg x = y \land \neg x = z \land \neg x = w \land$ $\neg y = z \land \neg y = w \land \neg z = w$
Existe un camino de longitud 3	$E(x,y) \land E(y,z) \land$ $E(z,w)$
No hay un camino de logitud 2	$\neg \exists v(E(x,v) \land E(v,w))$
No hay un camino de logitud 1	$\neg E(x,w)$

La fórmula quedaría:

$$\exists x \exists y \exists z \exists w(\neg x = y \land \neg x = z \land \neg x = w \land \\ \neg y = z \land \neg y = w \land \neg z = w \land \\ E(x,y) \land E(y,z) \land E(z,w) \land \\ \neg \exists v(E(x,v) \land E(v,w)) \land \\ \neg E(x,w))$$

e) Podemos pensar que es equivalente a que no existan elementos con distancia igual a 4. Ya que si existen elementos con distancia mayor a 3, entonces el camino que une a estos elementos debe conetener al menos 4 elementos y por ende contener un camino minimal de largo 4.

En *chileno*	En LPO
No existen cinco nodos	$\neg\exists x\exists y\exists z\exists w\exists v$
Todos los nodos distintos entre si	$\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg x = w \neg x = v$ $\wedge \neg y = z \wedge \neg y = w \wedge \neg y = v \wedge$ $\neg z = w \wedge \neg z = v \wedge$ $\neg w = v$
Existe un camino de longitud 4	$E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge$ $E(z, w) \wedge E(w, v)$
No hay un camino de logitud 3	$\neg\exists a\exists b(E(x, a) \wedge E(a, b) \wedge E(b, v))$
No hay un camino de logitud 2	$\neg\exists a(E(x, a) \wedge E(a, v))$
No hay un camino de logitud 1	$\neg E(x, v)$

La fórmula quedaría:

$$
\begin{gathered}
\neg\exists x\exists y\exists z\exists w\exists v(\neg x = y \wedge \neg x = z \wedge \neg x = w \neg x = v \\
\wedge \neg y = z \wedge \neg y = w \wedge \neg y = v \wedge \\
\neg z = w \wedge \neg z = v \wedge \\
\neg w = v \wedge \\
E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(z, w) \wedge E(w, v) \wedge \\
\neg\exists a\exists b(E(x, a) \wedge E(a, b) \wedge E(b, v)) \wedge \\
\neg\exists a(E(x, a) \wedge E(a, v)) \wedge \\
\neg E(x, v))
\end{gathered}
$$

Problema 3. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que una oración φ es consecuencia lógica de un conjunto de oraciones σ, denotado como $\sigma \vDash \varphi$, si para cada estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \vDash \varphi$.
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

a) $\{\forall x\exists y R(x, y)\} \vDash \exists x\forall y R(x, y)$.
b) $\{\exists x\forall y R(x, y)\} \vDash \forall x\exists y R(x, y)$.
c) $\{\exists x(P(x) \wedge Q(x))\} \vDash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$.
d) $\{\exists x P(x), \exists y Q(y))\} \vDash \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.
e) $\{\forall x\exists y S(x, y)\} \vDash \exists y S(y, y)$.

Solución

a) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
b) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.
c) Verdadero. Si existe un elemento x tal que $P(x)$ y $Q(x)$, entonces existe un elemento x tal que $P(x)$ y existe un elemento x tal que $Q(x)$.
d) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $P^{\mathfrak{A}} = \{1\}$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{2\}$.
e) Falso. Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $S^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Problema 4. Muestre que ninguno de los enunciados siguientes es concecuencia lógica de los otros dos.

a) $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x))$.
b) $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z))$.
c) $\forall x R(x, x)$.

Solución

a) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$.
b) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.
c) Considere la estructura $\mathfrak{A}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$.