

# Teorema de compacidad y aplicaciones

Semana  $(10)_2 = 1010$

Lógica para Ciencia de la  
Computación - IIC2213

Prof. Sebastián Buggedo

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo

# Programa

## Obertura

### Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

### Intermedio

### Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

### Epílogo



# Complejidad de problemas en LPO

Teorema (Church)

VAL es indecidible

Corolario

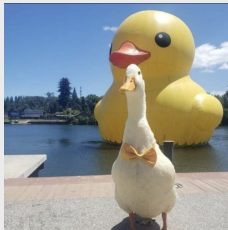
SAT en LPO es indecidible

# Indecidibilidad en LPO

## Ejercicio

Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible

$\text{EQUIV} = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi, \psi \text{ } \mathcal{L}\text{-oraciones y para toda } \mathcal{L}\text{-estruc. } \mathfrak{A} \text{ se tiene que } \mathfrak{A} \models \varphi \text{ si, y solo si, } \mathfrak{A} \models \psi\}$



# El problema de definibilidad

## Notación

Si  $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi(x_1, \dots, x_k)$  y la asignación es  $\sigma(x_i) = a_i$  para cada  $1 \leq i \leq k$ , entonces denotamos

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$$

## Problema de definibilidad

Dada una estructura  $\mathfrak{A}$  con dominio  $A$  y  $S \subseteq A^k$  para  $k \geq 1$ , decimos que  $S$  es **definible** en  $\mathfrak{A}$  si existe una fórmula  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  tal que

$$S = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)\}$$

¿Todo conjunto  $S$  es definible?

# La noción de isomorfismo

Sea un vocabulario  $\mathcal{L}$  y dos estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  con dominios  $A$  y  $B$  respectivamente

## Definición (isomorfismo)

Dos  $\mathcal{L}$ -estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son **isomorfas**, denotado por  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  si existe una biyección  $h : A \rightarrow B$  tal que

- para cada símbolo de constante  $c \in \mathcal{L}$

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

- para cada sím. de función  $m$ -aria  $f \in \mathcal{L}$  y elementos  $a_1, \dots, a_m \in A$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_m))$$

- para cada sim. relación  $n$ -aria  $R \in \mathcal{L}$  y elementos  $a_1, \dots, a_n \in A$

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si, y solo si, } (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

Llamamos a tal  $h$  un **isomorfismo** de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$



# Teorema de isomorfismo (v2.0)

## Teorema (isomorfismo)

Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras,  $\sigma$  asignación para  $\mathfrak{A}$  y  $h$  un isomorfismo de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ . Entonces para toda  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  se tiene que

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$$

## Observación

- $h \circ \sigma$  es una asignación para  $\mathfrak{B}$  (Demo PROPUESTA)

Con este teorema podemos demostrar que un conjunto no es definible:  
mostrar un isomorfismo de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{A}$  (**automorfismo**) adecuado

# Conjuntos no definibles

## Ejemplo

Para  $\mathcal{L} = \{+\}$  y  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$  demuestre que no se puede definir la multiplicación en  $\mathfrak{A}$ . Es decir, que el siguiente conjunto no es definible

$$\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \cdot b = c\}$$

Supongamos que existe  $\varphi(x, y, z)$  tal que para todo  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a, b, c) \quad \text{si, y solo si,} \quad a \cdot b = c$$

Luego, consideremos el isomorfismo de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{A}$ ,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $h(x) = x/2$  (esto es un **automorfismo**).

Notamos que  $\mathfrak{A} \models \varphi(2, 2, 4)$ , pero  $\mathfrak{A} \not\models \varphi(h(2), h(2), h(4))$ . Esto contradice el resultado del teorema de isomorfismo.

Concluimos que tal  $\varphi$  no existe, y por lo tanto  $\mathcal{S}$  no es definible. □

# ¿En qué estamos?

Tenemos una primera estrategia para demostrar que no todo es definible

- Demostraremos el teorema de isomorfismo
- Extenderemos la idea de definibilidad más allá de conjuntos
- Agregaremos un nuevo ingrediente teórico para demostrar no-definibilidad

Hoy: teorema de compacidad

# Playlist Unidad III y Orquesta



Playlist: LogiWawos #3

Además sigan en instagram:

@orquesta\_tamen

# Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar el teorema de isomorfismo
- ☐ Definir elementalmente propiedades en LPO
- ☐ Conocer el teorema de compacidad
- ☐ Utilizar el teorema para demostrar propiedades no definibles
- ☐ Definir propiedades de forma generalizada
- ☐ Utilizar modelos no estándar para demostrar propiedades no definibles

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo

# Teorema de isomorfismo

## Teorema (isomorfismo)

Sean  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$   $\mathcal{L}$ -estructuras,  $\sigma$  asignación para  $\mathfrak{A}$  y  $h$  un isomorfismo de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ . Entonces para toda  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  se tiene que

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$$

## Demostración



# Teorema de isomorfismo

## Demostración

Dado  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}$ -estructuras  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ , y  $\sigma$  asignación para  $\mathfrak{A}$ , demostraremos que toda  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  cumple

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi$$

Usaremos inducción estructural sobre  $\varphi$  y su sintaxis

■ Si  $\varphi = (t_1 = t_2)$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi &\Leftrightarrow \hat{\sigma}(t_1) = \hat{\sigma}(t_2) && \text{(def. de } \models \text{)} \\ &\Leftrightarrow h(\hat{\sigma}(t_1)) = h(\hat{\sigma}(t_2)) && \text{(} h \text{ biyectiva)} \\ &\Leftrightarrow (h \circ \hat{\sigma})(t_1) = (h \circ \hat{\sigma})(t_2) && \text{(composición)} \\ &\Leftrightarrow \widehat{h \circ \sigma}(t_1) = \widehat{h \circ \sigma}(t_2) && \text{(????)} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi && \text{(def. de } \models \text{)} \end{aligned}$$

Propuesto: demostrar que si  $\sigma$  es asignación para  $\mathfrak{A}$  y  $h$  isomorfismo de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{B}$ , entonces  $\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}$



# Teorema de isomorfismo

## Demostración

■ Si  $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi &\Leftrightarrow (\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}} && (\text{def. de } \models) \\&\Leftrightarrow (h(\hat{\sigma}(t_1)), \dots, h(\hat{\sigma}(t_n))) \in R^{\mathfrak{B}} && (h \text{ isom.}) \\&\Leftrightarrow (h \circ \hat{\sigma}(t_1), \dots, h \circ \hat{\sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{B}} && (\text{comp.}) \\&\Leftrightarrow (\widehat{h \circ \sigma}(t_1), \dots, \widehat{h \circ \sigma}(t_n)) \in R^{\mathfrak{B}} && (\widehat{h \circ \sigma} = h \circ \hat{\sigma}) \\&\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi && (\text{def. de } \models)\end{aligned}$$

Esto concluye el análisis de fórmulas atómicas...

Ahora vemos casos recursivos:  $\neg, \wedge, \exists$ . ¿Faltan?

# Teorema de isomorfismo

## Demostración

Suponemos que  $\psi_1, \psi_2$  cumplen la propiedad (**H.I.**)

■ Si  $\varphi = \neg\psi_1$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi_1 && \text{(def. de } \models \text{)} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \not\models \psi_1 && \text{(por H.I.)} \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi && \text{(def. de } \models \text{)}\end{aligned}$$

■ Si  $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi &\Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_1 \text{ y } (\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_2 \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \psi_1 \text{ y } (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \psi_2 \\ &\Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi\end{aligned}$$

# Teorema de isomorfismo

## Demostración

Suponemos que  $\psi$  cumple la propiedad (**H.I.**)

■ Si  $\varphi = \exists x.\psi$  (Dirección  $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi &\Rightarrow \text{existe } a \in A. (\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi && \text{(def. de } \models \text{)} \\ &\Rightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma[x/a]) \models \psi && \text{(por H.I.)}\end{aligned}$$

Notamos que  $h \circ \sigma[x/a] = (h \circ \sigma)[x/h(a)]$ . Como  $h$  es biyectiva, existe un  $b \in B$  tal que  $b = h(a)$  y con lo cual

$$\begin{aligned}(\mathfrak{B}, h \circ \sigma[x/a]) \models \psi &\Rightarrow (\mathfrak{B}, (h \circ \sigma)[x/b]) \models \psi && (h \text{ biyectiva}) \\ &\Rightarrow (\mathfrak{B}, h \circ \sigma) \models \varphi && \text{(def. de } \models \text{)}\end{aligned}$$

La otra dirección es análoga y utiliza  $h^{-1}$ .



# El poder expresivo de LPO

## Pati-Reflexión

Sea  $\mathcal{L} = \{+\}$ , donde  $+$  es símbolo de función binaria. Sea  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$  con la interpretación usual de suma en los naturales

No se puede definir la multiplicación en  $\mathfrak{A}$ . Es decir, el siguiente conjunto no es definible

$$\mathcal{S} = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b = c\}$$

¿Se puede demostrar con el teorema de isomorfismo?



Este teorema es una herramienta, pero no es un “si y solo si” para definibilidad

# El poder expresivo de LPO

Para demostrar el caso anterior, necesitamos más poder...

- TEORÍAS (Próxima unidad jj)
- Por ahora, nos centraremos en otro problema
- En lugar de definir conjuntos de elementos de  $A$ ...
- ¿podemos definir conjuntos de estructuras?

Para visualizar el verdadero poder expresivo de LPO,  
es clave poder el problema de definibilidad en estructuras

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo

# Definibilidad de estructuras

Sea  $\mathcal{L}$  un vocabulario y  $S[\mathcal{L}]$  el conjunto de  $\mathcal{L}$ -estructuras

## Definición

Un conjunto de  $\mathcal{L}$ -estructuras  $\mathcal{P}$  es una **propiedad**

Una propiedad  $\mathcal{P}$  es **elementalmente definible** en LPO si existe una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  tal que

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

# Definibilidad de estructuras

## Ejemplo

Para un vocabulario cualquiera, la propiedad

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{S}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un único elemento en su dominio}\}$$

es definible en LPO. Es definida por la oración

$$\varphi = \exists x \forall y (x = y)$$

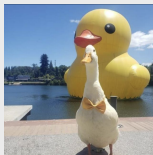


# Definibilidad de estructuras

## Ejercicio

Sea  $\mathcal{L}$  un vocabulario cualquiera y  $k \in \mathbb{N}$ . Demuestre que las siguientes propiedades son definibles en LPO

- $\mathcal{P}_1 = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{S}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene dominio con al menos } k \text{ elementos}\}$
- $\mathcal{P}_2 = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{S}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene dominio con a lo más } k \text{ elementos}\}$



¿Cómo demostramos que una propiedad no es definible?

# Conjuntos infinitos de fórmulas

## Definición

Decimos que un conjunto de fórmulas en LPO  $\Sigma$  es **satisfacible** si existe  $(\mathcal{A}, \sigma)$  tal que para toda fórmula  $\varphi \in \Sigma$  se cumple que  $(\mathcal{A}, \sigma) \models \varphi$ . Lo denotamos por  $(\mathcal{A}, \sigma) \models \varphi$

Si todo  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  finito es satisfacible, decimos que  $\Sigma$  es **finitamente satisfacible**

Hmm... a ver

- ¿Podemos tener conjuntos infinitos de fórmulas?
- ¿Existe algún conjunto  $\Sigma$  infinito y satisfacible?

Veamos un ejemplo de conjunto infinito y satisfacible

# Conjuntos infinitos de fórmulas

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{L} = \{E\}$  con  $E$  símbolo de relación binaria.

Para  $k \geq 2$ , la  $\mathcal{L}$ -oración

$$\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$$

es satisfecha por  $\mathcal{L}$ -estructuras donde existan al menos  $k$  elementos distintos en el dominio.

Consideremos ahora el conjunto

$$\Sigma = \{\varphi_k \mid k \geq 2\}$$

- ¿Es finitamente satisfacible?
- ¿Es satisfacible?

# Conjuntos infinitos de fórmulas

## Ejemplo

Para decidir si es finitamente satisfacible, sea  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  finito (no vacío).

- Existe un máximo índice  $k \geq 2$  tal que  $\varphi_k \in \Sigma'$ . Tomamos

$$\mathfrak{A} = \langle \{0, \dots, k-1\}, \emptyset \rangle$$

i.e. el grafo con  $k$  nodos aislados. Se cumple que  $\mathfrak{A} \models \Sigma'$ .

Concluimos que  $\Sigma$  es finitamente satisfacible.

Ojo: también sirven como estructuras grafos con aristas...  
lo importante es la cantidad de elementos

# Conjuntos infinitos de fórmulas

## Ejemplo

¿Hay alguna estructura que satisfaga al  $\Sigma$  completo?

Consideremos

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \emptyset \rangle$$

i.e. el grafo con una cantidad infinita (numerable) de vértices desconectados. Tenemos que  $\mathfrak{A}$  satisface a **cada** oración de  $\Sigma$ , por lo que el conjunto es satisfacible.

Veremos un resultado que nos ahorra este último análisis...

¡Y que tiene muchas aplicaciones!

# Teorema de compacidad

## Teorema (compacidad)

Un conjunto de fórmulas en LPO  $\Sigma$  es satisfacible si, y solo si,  $\Sigma$  es finitamente satisfacible

Usaremos este teorema para demostrar que  
ciertas propiedades no son definibles

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

**Intermedio**

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo



# Teorema de compacidad

## Teorema (compacidad)

Un conjunto de fórmulas en LPO  $\Sigma$  es satisfacible si, y solo si,  $\Sigma$  es finitamente satisfacible

Usaremos este teorema para demostrar que ciertas propiedades no son definibles

## Ejemplo

Para un vocabulario arbitrario, sea

$$\mathcal{P}_{\text{fin}} = \{\mathfrak{A} \in S[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene dominio finito}\}$$

Demostraremos que esta propiedad **no es definible** en LPO.

# Teorema de compacidad y definibilidad

## Ejemplo

Supongamos que  $\mathcal{P}_{\text{fin}}$  es definible en LPO. Es decir, que existe una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  tal que

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \text{ tiene dominio finito}$$

Para  $k \geq 2$ , recordemos las  $\mathcal{L}$ -oraciones

$$\varphi_k = \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$$

y consideremos el conjunto (infinito) de  $\mathcal{L}$ -oraciones

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\varphi_k \mid k \geq 2\}$$

¿Qué gracia (y desgracia) tiene  $\Sigma$ ?

# Teorema de compacidad y definibilidad

## Ejemplo

Dado

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\varphi_k \mid k \geq 2\}$$

notamos que

- $\Sigma$  es finitamente satisfacible
- por teorema de compacidad,  $\Sigma$  es satisfacible

¿Algún problema?

Como  $\Sigma$  es satisfacible, existe  $\mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{A} \models \Sigma$ . Luego,

- $\mathfrak{A} \models \Sigma \setminus \{\varphi\}$ , por lo que  $\mathfrak{A}$  tiene dominio infinito
- $\mathfrak{A} \models \varphi$ , por lo que  $\mathfrak{A}$  tiene dominio finito

Esta contradicción demuestra que  $\mathcal{P}_{\text{fin}}$  no es definible en LPO.

# Definibilidad generalizada

La definibilidad elemental requiere que exista una oración adecuada

- ¿Qué pasa si extendemos esto?
- Permitiremos una cantidad infinita de fórmulas

¿Podemos definir más cosas si permitimos esto?

# Definibilidad generalizada

## Definición

Una propiedad  $\mathcal{P}$  es **definible de forma generalizada** en LPO si existe un conjunto de  $\mathcal{L}$ -oraciones  $\Sigma$  tal que

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \models \Sigma$$

Si  $\mathcal{P}$  es elementalmente definible,  
entonces es definible de forma generalizada

# Definibilidad generalizada

## Ejemplo

La propiedad

$$\mathcal{P}_{\text{inf}} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{S}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene dominio infinito}\}$$

es definible de forma generalizada. Basta tomar

$$\Sigma = \left\{ \exists x_1 \dots \exists x_k \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j) \mid k \geq 2 \right\}$$

que cumple

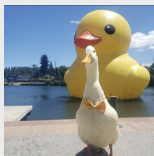
$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{inf}} \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \models \Sigma$$

¿Toda propiedad es definible de forma generalizada?

# Teorema de compacidad y definibilidad

## Ejercicio

Demuestre que  $\mathcal{P}_{\text{inf}}$  no es elementalmente definible



# Teorema de compacidad y definibilidad

## Ejercicio

Supongamos que  $\mathcal{P}_{\text{inf}}$  es elementalmente definible, i.e. existe una oración  $\varphi$  tal que

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{inf}} \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

Ahora, sabemos que para toda estructura  $\mathfrak{A}$ ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \models \{\varphi_k \mid k \geq 2\}$$

Esto nos sugiere tomar el conjunto de oraciones siguiente

$$\Psi = \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi_k \mid k \geq 2\}$$

que es insatisfacible (toda estructura que satisface  $\neg\varphi$ , es finita)



# Teorema de compacidad y definibilidad

## Ejercicio

Como  $\Psi$  no es satisfacible, por teorema de compacidad tampoco es finitamente satisfacible. Es decir, existe  $\Psi' \subseteq \Psi$  finito que no es satisfacible.

Si  $\Psi'$  es finito, existe un índice  $n$  máximo tal que  $\varphi_n \in \Psi'$ . Luego,

$$\Psi' \subseteq \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi_k \mid k \leq n\}$$

Consideremos ahora la estructura  $\mathfrak{A}$  con dominio  $A$  tal que  $|A| = n + 1$ , i.e.  $\mathfrak{A}$  es finita. Luego

$$\mathfrak{A} \text{ finita} \Rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi$$

Además, como  $|A| = n + 1$ , tenemos  $\mathfrak{A} \models \varphi_k$  para todo  $k \leq n$ . Con esto,

$$\mathfrak{A} \models \Psi' \Rightarrow \Psi' \text{ satisfacible}$$

¡Contradicción! Concluimos que no existe tal  $\varphi$ .



# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

Epílogo

# Construyendo modelos

El teorema de compacidad se usa frecuentemente para construir estructuras

- Estructuras que son **equivalentes** a otras
- Pero que no son isomorfas

## Definición

Dos  $\mathcal{L}$ -estructuras  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  son **equivalentes** si para toda  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$ ,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

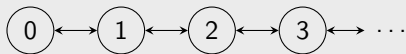
Con esta estrategia, podremos demostrar que hay propiedades que no son definibles de forma generalizada!

# Construyendo modelos

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{L} = \{E\}$  con  $E$  símbolo de relación binaria y consideremos la siguiente  $\mathcal{L}$ -estructura infinita

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \{(i, i+1), (i+1, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$$



Sea  $\Sigma = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$

- $\Sigma$  es el conjunto de todas las fórmulas satisfechas en  $\mathfrak{A}$
- Tenemos que  $\mathfrak{A} \models \Sigma$

Vamos a definir otra estructura que satisface al mismo conjunto, ¡pero que representa un grafo desconexo!

# Construyendo modelos

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{L}' = \{E, a, b\}$  con  $E$  símbolo de relación binaria y dos nuevos símbolos de constantes.

Definimos recursivamente las siguientes  $\mathcal{L}'$ -fórmulas para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &= E(x, y) \\ \psi_{n+1}(x, y) &= \exists z. \psi_n(x, z) \wedge E(z, y)\end{aligned}$$

Además, definimos  $\varphi_n^{ab} = \neg\psi_n(a, b)$

- Esta oración es satisfecha si no existe camino de largo  $n$  entre las constantes  $a$  y  $b$
- Notemos que es una  $\mathcal{L}'$ -oración y no una  $\mathcal{L}$ -oración

# Construyendo modelos

## Ejemplo

Para  $k$  fijo, ¿es satisfacible el siguiente conjunto?

$$\Sigma \cup \{\varphi_n^{ab} \mid n < k\}$$

Consideremos  $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{N}, E^{\mathfrak{A}}, 0, k \rangle$

- Mismo dominio que  $\mathfrak{A}$
- Mismo conjunto de aristas que  $\mathfrak{A}$
- Por lo tanto, satisface todas las oraciones de  $\Sigma$
- Las interpretaciones de  $a$  y  $b$  están a distancia  $k$ , por lo que satisface  $\{\varphi_n^{ab} \mid n < k\}$

Concluimos que efectivamente

$$\mathfrak{C} \models \Sigma \cup \{\varphi_n^{ab} \mid n < k\}$$

# Construyendo modelos

## Ejemplo

Como el siguiente conjunto es satisfacible para  $k$  arbitrario

$$\Sigma \cup \{\varphi_n^{ab} \mid n < k\}$$

el siguiente conjunto es finitamente satisfacible

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\varphi_n^{ab} \mid n \geq 1\}$$

y por teorema de compacidad, también es satisfacible.

De esto, sabemos que debe existir una  $\mathcal{L}'$ -estructura  $\mathfrak{B}$  tal que

$$\langle B, E^{\mathfrak{B}}, a^{\mathfrak{B}}, b^{\mathfrak{B}} \rangle \models \Sigma'$$

# Construyendo modelos

## Ejemplo

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\varphi_n^{ab} \mid n \geq 1\}$$

Como la  $\mathcal{L}'$ -estructura  $\mathfrak{B} = \langle B, E^{\mathfrak{B}}, a^{\mathfrak{B}}, b^{\mathfrak{B}} \rangle$  cumple  $\mathfrak{B} \models \Sigma'$ , en ella **no existe camino** entre  $a^{\mathfrak{B}}$  y  $b^{\mathfrak{B}}$ ... ¡de cualquier largo!

Es decir, el grafo representado por  $\mathfrak{B}$  es **disconexo**.

Ahora, como  $\Sigma \subseteq \Sigma'$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} \models \Sigma' &\Rightarrow \mathfrak{B} \models \Sigma && \text{(contención)} \\ &\Rightarrow \langle B, E^{\mathfrak{B}} \rangle \models \Sigma && \text{(constantes no necesarias)} \end{aligned}$$

Definimos entonces la  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A}' = \langle B, E^{\mathfrak{B}} \rangle$

Por definición de  $\Sigma$ , tenemos que  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}'$  son equivalentes

Llamamos a  $\mathfrak{A}'$  un **modelo no estándar** de  $\mathfrak{A}$



# Modelos no estándar

Observemos que en el ejemplo

- $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}'$  son equivalentes
- No son isomorfas (una es un grafo conexo, la otra no)

Decimos que la lógica de primer orden **no es capaz** de distinguir estas dos estructuras: satisfacen exactamente las mismas fórmulas

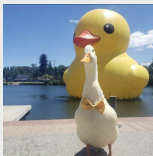
¿Para qué nos sirve este artilugio?

# Modelos no estándar

## Ejercicio

Sea  $\mathcal{L} = \{E\}$  para representar grafos. Demuestre que la siguiente propiedad no es definible de forma generalizada

$$\mathcal{P}_{\text{cnx}} = \{\mathfrak{B} \in S[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{B} \text{ representa un grafo conexo}\}$$



# Modelos no estándar

## Ejercicio

Supongamos que existe  $\Psi$  conjunto de oraciones tal que

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{P}_{\text{cnx}} \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{B} \models \Psi$$

Sea  $\mathfrak{A}$  la estructura del ejemplo (grafo conexo infinito). Como el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  es conexo,  $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{cnx}}$ . Luego  $\mathfrak{A} \models \Psi$ .

Como  $\mathfrak{A}' \models \Sigma$  por ser modelo no estándar de  $\mathfrak{A}$  y además  $\Psi \subseteq \Sigma$ , entonces  $\mathfrak{A}' \models \Psi$ . Pero el grafo representado por  $\mathfrak{A}'$  es desconexo, lo cual es una contradicción.

Concluimos que no existe tal conjunto  $\Psi$ , i.e. la propiedad  $\mathcal{P}_{\text{cnx}}$  no es definible de forma generalizada. □

# Programa

Obertura

Primer acto

Teorema de isomorfismo

Teorema de compacidad

Intermedio

Segundo acto: aplicaciones

No definibilidad

Modelos no estándar

**Epílogo**

# Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar el teorema de isomorfismo
- ☐ Definir elementalmente propiedades en LPO
- ☐ Conocer el teorema de compacidad
- ☐ Utilizar el teorema para demostrar propiedades no definibles
- ☐ Definir propiedades de forma generalizada
- ☐ Utilizar modelos no estándar para demostrar propiedades no definibles

# ¿Qué aprendí hoy? ¿Comentarios?

Vea

**www.menti.com**

Introduce el código

**4111 7037**



O usa el código QR