



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

## TAREA 4

Publicación: Martes 9 de mayo.  
Entrega: **Lunes 22 de mayo hasta las 23:59 horas.**

### Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en  $\text{\LaTeX}$ . No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

### Objetivos

- Aplicar el concepto de NP-completitud.
- Modelar propiedades con fórmulas en lógica de primer orden.
- Construir  $\mathcal{L}$ -estructuras con restricciones.

### Pregunta 1: Problemas NP-completos

- (a) Demuestre que si existe un lenguaje finito no vacío que es NP-completo, entonces  $P=NP$ .
- (b) ¿Es NP-completo el siguiente lenguaje? Demuestre su respuesta.

$$\text{NEQ} = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ y } \varphi_2 \text{ son fórmulas proposicionales no equivalentes}\}$$

### Pregunta 2: Fórmulas en lógica de primer orden

En un grafo dirigido  $G = (N, A)$ , un camino dirigido de  $n$  nodos es una secuencia  $u_0, \dots, u_n$  tal que

- $u_i \in N$ , para todo  $0 \leq i \leq n$
- $(u_i, u_{i+1}) \in A$ , para todo  $0 \leq i < n$

Un ciclo simple dirigido de  $n$  nodos es un camino dirigido tal que  $u_0 = u_n$  y todos los demás nodos deben ser distintos.

Sea el vocabulario  $\mathcal{L} = \{E\}$  con símbolo de relación binaria  $E$ . Construya  $\mathcal{L}$ -oraciones en lógica de primer orden que representen las siguientes propiedades.

- (a) El grafo es un clique. Utilice para esto la noción de clique dirigido en que deben existir todas las aristas dirigidas posibles.
- (b) El grafo contiene un ciclo simple dirigido de 3 nodos.

Observe que cada oración deben ser satisfecha por una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A}$  si, y solo si, el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  cumple la propiedad modelada con dicha oración.

### Pregunta 3: Estructuras en lógica de primer orden

Sea  $\mathcal{L} = \{c, f\}$  un vocabulario con símbolo de constante  $c$  y símbolo de función unaria  $f$ . Se definen las siguientes  $\mathcal{L}$ -oraciones

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \\ \varphi_2 &= \forall x (f(x) \neq c) \\ \varphi_3 &= \forall x (x \neq c \rightarrow \exists y f(y) = x)\end{aligned}$$

Construya  $\mathcal{L}$ -estructuras  $\mathfrak{A}_1$ ,  $\mathfrak{A}_2$  y  $\mathfrak{A}_3$  tales que

- (a)  $\mathfrak{A}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$
- (b)  $\mathfrak{A}_2 \models (\neg \varphi_1) \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$
- (c)  $\mathfrak{A}_3 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\neg \varphi_3)$

y justifique por qué satisfacen las fórmulas especificadas. No necesita entregar una demostración formal de que cada estructura satisface cada fórmula.