Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 2

Publicación: Martes 28 de marzo.
Entrega: **Miércoles 5 de abril hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución (P1 y P2) debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma. La P3 se entrega en un archivo `.txt` adicional y su formato se describe en el enunciado de la pregunta.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

- Modelar a través de fórmulas proposicionales y el concepto de satisfacibilidad.
- Aplicar resolución proposicional para demostrar consecuencia lógica.
- Diseñar máquinas de Turing que acepten lenguajes específicos.

Pregunta 1: Sintaxis e inducción en $\mathcal{L}(P)$

Decimos que dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son *isomorfos*, denotado por $G_1 \cong G_2$, si existe una biyección $f : V_1 \to V_2$ tal que para todo $a, b \in V_1$ se tiene que

$$\{a, b\} \in E_1 \quad \text{si y solo si} \quad \{f(a), f(b)\} \in E_2$$

Dado un par de grafos no dirigidos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, construya una fórmula proposicional φ_{iso} tal que

$$\varphi_{\text{iso}} \text{ es satisfacible} \quad \text{si y solo si} \quad G_1 \cong G_2$$

Demuestre la correctitud de su construcción.

Solución

Supongamos que tenemos los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, queremos encontrar una función entre V_1 y V_2 que preserva aristas, por lo tanto definiremos las variables proposicionales

$$p_{ij} := \text{el } i\text{-ésimo vértice de } G_1 \text{ se mapea al } j\text{-ésimo vértice de } G_2$$

Con esto, $P = \{p_{ij} : i \in V_1,\ j \in V_2\}$.

Ahora construiremos fórmulas para imponer las restricciones

- $\varphi_{\text{función}}$: La función está bien definida, es decir todo elemento de V_1 tiene exactamente una imagen en V_2.
- $\varphi_{\text{biyección}}$: La función es una biyección.
- φ_{aristas}: La función preserva aristas.

Primero, definimos $\varphi_{\text{función}} := \varphi_{\text{imagen}} \wedge \varphi_{\text{unicidad}}$ donde

$$\varphi_{\text{imagen}} = \bigwedge_{i \in V_1} \bigvee_{j \in V_2} p_{ij}$$

$$\varphi_{\text{unicidad}} = \bigwedge_{i \in V_1} \bigwedge_{j \in V_2} \left(p_{ij} \to \bigwedge_{\substack{k \in V_2 \\ k \neq j}} \neg p_{ik} \right)$$

La fórmula φ_{imagen} asegura que cada vértice tenga una imagen y $\varphi_{\text{unicidad}}$ asegura que esta imagen es única.

Luego, definimos $\varphi_{\text{biyección}} := \varphi_{\text{iny}} \wedge \varphi_{\text{sobre}}$ donde

$$\varphi_{\text{iny}} = \bigwedge_{i \in V_1} \bigwedge_{j \in V_2} \left(p_{ij} \to \bigwedge_{\substack{k \in V_1 \\ k \neq i}} \neg p_{kj} \right)$$

$$\varphi_{\text{sobre}} = \bigwedge_{j \in V_2} \bigvee_{i \in V_1} p_{ij}$$

La fórmula φ_{iny} asegura que la función sea inyectiva y $\varphi_{\text{unicidad}}$ asegura que es sobreyectiva.

Finalmente, definimos $\varphi_{\text{aristas}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$$\varphi_1 = \bigwedge_{\{i,j\} \in E_1} \bigvee_{\{s,t\} \in E_2} (p_{is} \wedge p_{jt})$$

$$\varphi_2 = \bigwedge_{\{s,t\} \in E_2} \bigvee_{\{i,j\} \in E_1} (p_{is} \wedge p_{jt})$$

Con esto, podemos definir la fórmula pedida como

$$\varphi_{\text{iso}} := \varphi_{\text{función}} \wedge \varphi_{\text{biyección}} \wedge \varphi_{\text{aristas}}$$

Ahora probemos que efectivamente φ_{iso} es satisfacible si y solo si $G_1 \cong G_2$.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe una valuación σ tal que satisface φ_{iso}, entonces definimos la función $f : V_1 \to V_2$ tal que $f(i) = j$ cuando $\sigma(p_{ij}) = 1$. En primer lugar, tenemos que esta función está bien definida por $\varphi_{\text{función}}$, ya que la fórmula imagen asegura que por cada $i \in V_1$ debe haber algún $\sigma(p_{ij}) = 1$, sino tendríamos que $\varphi_{\text{imagen}} = 0$. Además, al estar satisfaciéndose $\varphi_{\text{unicidad}}$ nos aseguramos que cada vértice de G_1 tiene solo una imagen.
Por otro lado, podemos asegurar que la función es biyectiva porque se está satisfaciendo $\varphi_{\text{biyección}}$ esto se obtiene del hecho que φ_{iny} asegura que por cada $j \in V_2$ solo hay un $i \in V_1$ con $\sigma(p_{ij}) = 1$ y del hecho que φ_{sobre} asegura que por cada $j \in V_2$ hay por lo menos un $i \in V_1$ tal que $\sigma(p_{ij}) = 1$. Es decir, para todo $j \in V_2$ existe un único $i \in V_1$ tal que $f(i) = j$.
Por último el isomorfismo se obtiene de la última fórmula φ_{aristas}, ya que φ_1 asegura que para toda arista $\{i, j\} \in E_1$ hay vértices $s, t \in V_2$ tales que forman una arista y $f(i) = s$, $f(j) = t$. Análogamente se tiene por φ_2 que para toda arista $\{s, t\} \in E_2$ hay vértices $i, j \in V_1$ tales que forman una arista y $f(i) = s$, $f(j) = t$.

($\Leftarrow$) Supongamos que tenemos un isomorfismo $f : V_1 \to V_2$, entonces podemos definir la valuación σ tal que

$$\sigma(p_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(i) = j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Veamos que esto satisface todas las fórmulas.
En primer lugar, como f es función, todo elemento de V_1 tiene exactamente una imagen. Por lo tanto, se cumplen las fórmulas de $\varphi_{\text{función}}$. Además, al ser un isomorfismo, en particular se tiene que es una biyección de lo que se concluye que las fórmulas φ_{iny} y φ_{sobre} se satisfacen. Finalmente, al tener la correspondencia de aristas entre G_1 y G_2 se concluye que se satisfacen las fórmulas de φ_{aristas}.

En esta pregunta se asignan 3 pts. por construir correctamente las fórmulas y otros 3 pts. por demostrar la correctitud de la construcción. En caso de tener la solución como se muestra aquí se asignaría un punto por ver que la función esté bien definida, que sea biyección y que sea isomorfismo respectivamente. Además en la demostración se dará 1.5 pts. por cada lado de la implicancia.
En caso de no incluir la demostración, pero de justificar muy bien cada fórmula se pueden dar hasta 2 pts. del puntaje de la demostración.

Pregunta 2: Semántica en $\mathcal{L}(P)$ y equivalencia lógica

Explique un procedimiento que utilice resolución para determinar si una fórmula φ cualquiera es tautología. Use su método para determinar si $\varphi = (p \to q) \to (\neg\, q \to \neg\, p)$ es tautología.

Solución

Supongamos que φ es una fórmula cualquiera. Recordemos que

$$\varphi \text{ es tautología } \iff \{\neg\varphi\} \text{ es inconsistente}$$

Definimos la fórmula ψ tal que $\psi \equiv \neg\varphi$ y está en CNF. Entonces tenemos que

$$\varphi \text{ es tautología } \iff \{\psi\} \models \bot$$

Pero ahora podemos aplicar el teorema de completitud débil de resolución visto en clase para concluir que

$$\varphi \text{ es tautología } \iff \{\psi\} \vdash_R \bot$$

Por lo tanto, el siguiente procedimiento sirve para determinar si una fórmula es tautología:

1. Pasar $\neg\varphi$ a CNF.
2. Deducir $\bot$ por resolución desde $\{\neg\varphi\}$

En el caso particular de $\varphi = (p \to q) \to (\neg\, q \to \neg\, p)$, primero vamos a quitar las implicancias como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv (p \to q) \to (\neg\, q \to \neg\, p) \\
&\equiv \neg\,(p \to q) \lor (\neg\, q \to \neg\, p) \\
&\equiv \neg\,(\neg\, p \lor q) \lor (\neg\,(\neg\, q) \lor \neg\, p) \\
&\equiv (p \land \neg\, q) \lor (q \lor \neg\, p)
\end{aligned}$$

Luego, pasemos $\neg\varphi$ a CNF,

$$\begin{aligned}
(\neg\varphi) &\equiv \neg\,((p \land \neg\, q) \lor q \lor \neg\, p) \\
&\equiv \neg\,(p \land \neg\, q) \land \neg\, q \land \neg\,(\neg\, p) \\
&\equiv (\neg\, p \lor q) \land \neg\, q \land p
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi = (\neg\, p \lor q) \land \neg\, q \land p$. Ahora apliquemos resolución para ver si se puede deducir $\bot$. Para esto sea $\Sigma = \{\neg\, p \lor q, \neg\, q, p\}$ consideremos la siguiente secuencia,

1) $\neg\, p \lor q$	(Pertenece a Σ)
2) $\neg\, q$	(Pertenece a Σ)
3) $\neg\, p$	(Deducción a partir de (1) y (2))
4) p	(Pertenece a Σ)
5) $\bot$	(Deducción a partir de (3) y (4))

Por lo tanto, $\psi \vdash_R \bot$, de lo que concluimos que φ es una tautología.

4 pts. por explicar el procedimiento (2 pts. por pasar a CNF y 2 pts. por la utilización de resolución) y 2 pts. por utilizar correctamente el método para φ
En caso de no utilizar resolución en absoluto en la respuesta, no dar puntaje.

Pregunta 3: Consecuencia lógica en $\mathcal{L}(P)$

Construya una máquina de Turing determinista con una cinta que acepte el lenguaje

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ tiene la misma cantidad de símbolos 0 y 1}\}$$

Formato de entrega. Su respuesta debe consistir en un archivo de texto plano `.txt` que se pueda ejecutar en Turing Machine Simulator. El formato usado en esta plataforma sigue las convenciones vistas en clase (estructura de la función parcial de transiciones) y además el simulador le ayudará a testear su propuesta. La solución se probará con 6 inputs de diferentes tamaños y la nota será la cantidad de tests aprobados +1.

Solución

6 testcases, 1 pt. por cada uno