Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

IIC2213 - Lógica para ciencia de la computación

Ayudantía 8 - Viernes 19 de Mayo del 2023

Satisfacibilidad

Problema 1. Demuestre que al igual que en el caso de la lógica proposicional, si Σ es un conjunto de oraciones y φ es una oración, entonces $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

Solución Ahondemos un poco en que signifca que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no sea satisfacible. Esto significa que no existe $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ junto con una asignación σ tal que:

$$(\mathfrak{A}, \sigma) \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$$

Es decir, hay al menos una oración ψ en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ tal que no se *cumple* para cualesquiera $\mathfrak{A}$ y σ que escojamos.

Ahora entremos de lleno a la demostración.

$\Rightarrow$ Si $\Sigma \vDash \varphi$ es equivalente a que para cualquier modelo que cumple con todas las oraciones en Σ, también cumple con φ.

Supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible, entonces existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación σ tal que todas las oraciones en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ se cumplen. En particular, todo Σ se cumple por lo tanto φ se cumple.

Llegamos a que $\mathfrak{A} \vDash \{\varphi, \neg\varphi\}$, lo cual es una contradictorio, pues $\mathfrak{A}$ no puede cumplir con φ y con $\neg\varphi$ al mismo tiempo. Por ende $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible.

$\Leftarrow$ Si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ no es satisfacible, entonces no existe $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ junto con una asignación σ tal que cumpla con todas las oraciones de $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$.

Asumamos que tenemos una estructura $\mathfrak{A}$ cualquiera que cumple con Σ. Tendremos que necesariamente no puede cumplir con $\neg\varphi$ ya que de ser el caso contradeciría la suposición inicial.

Por definición de $\neg$ (negación) $\mathfrak{A}$ cumple φ, es decir, $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Como $\mathfrak{A}$ era cualquiera $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, hemos demostrado que $\Sigma \vDash \varphi$.

Decibilidad

Problema 2. Sea EQUIV el siguiente lenguaje:

$$\text{EQUIV} = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \text{ y } \psi \text{ son oraciones equivalentes}\}$$

Demuestre que EQUIV es indecidible.

Solución En clases se vió una forma de escribir una máquina de turing como una oración en lógica de primer orden. En particular se vió una máquina de turing $\mathcal{M}$ acepta la palabra vacía ε si y sólo si la siguiente oración es válida:

$$\varphi_{\mathcal{M}} := \left(\varphi_L \wedge \varphi_S \wedge \varphi_P \wedge \varphi_I \wedge \varphi_C \wedge \varphi_\delta\right) \to \varphi_A$$

Para más información de que significan cada una de las oraciones, revisar la clase 9.

La oración φ_A significaba que $\mathcal{M}$ acepta la palabra vacía. Ahora bien, podemos modificar la oración para que dependa de una variable libre w y signifique que $\mathcal{M}$ acepta la palabra w.

Con esto podemos hacer una reducción del lenguaje:

$$\text{EQUIV}_{\mathcal{M}} = \{(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \mid \mathcal{M}_1 \text{ y } \mathcal{M}_2 \text{ son máquinas equivalentes}\}$$

a EQUIV. Esto nos sirve ya que sabemos que $\text{EQUIV}_{\mathcal{M}}$ es indecidible, por lo tanto $\text{EQUIV}(M)$ también lo es.

Basta con hacer la reducción de $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ a la siguiente oración en LPO:

$$\left(\varphi_{\mathcal{M}_1}(w), \varphi_{\mathcal{M}_2}(w)\right)$$

Donde $\varphi_{\mathcal{M}}(w)$ es la oración que significa que $\mathcal{M}$ acepta la palabra w. Donde se tiene que $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son máquinas de turing equivalentes si y sólo si $\varphi_{\mathcal{M}_1}(w)$ y $\varphi_{\mathcal{M}_2}(w)$ son oraciones equivalentes. Cabe recalcar que w es la misma variable en ambas oraciones.

Problema 3. Sea CONS el siguiente lenguaje:

$$\text{CONS} = \{(\Sigma, \varphi) \mid \Sigma \text{ es un conjunto finito de oraciones}, \varphi \text{ es una oración y } \Sigma \vDash \varphi\}$$

Demuestre que CONS es indecidible.

Solución Para esta demostración asumiremos que SAT en LPO es insatisfacible. Por ende el lenguaje se las oraciones insatisfacibles es también insatisfacible. Le llamaremos UNSAT.

Por el **Problema 1** sabemos que $\Sigma \vDash \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible. Luego la reducción de CONS a UNSAT es la siguiente:

$$(\Sigma, \varphi) \to (\Sigma \cup \{\neg\varphi\})$$

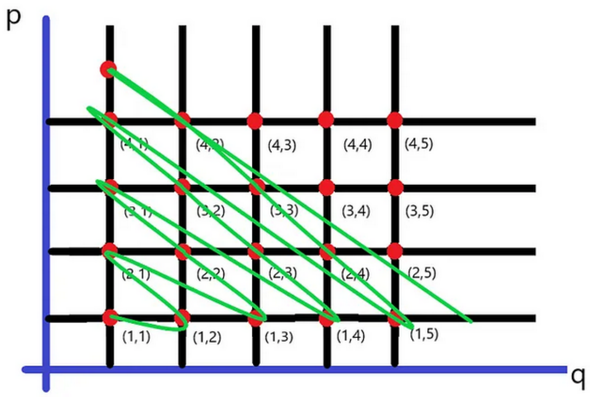
Por lo tanto, como UNSAT es indecidible, CONS también lo es.

Isoformismo

Problema 4. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, 0 \rangle$ isomorfas?

Solución Efectivamente lo son ya que existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ donde $f(0_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{Q}}$.

De hecho hay varias, pero puedes pensar en la biyección del *zigzag*



para más información puedes leer este artículo Counting the Rational Numbers.

Problema 5. Demuestre que las estructuras $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ no son isomorfas.

Solución Sabemos que $\mathbb{Q}$ contiene tanto números positivos como negativos, vamos a explotar que cada uno de estos conjuntos es infinito.

Supongamos que exista una función biyectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Luego sea $q_{\{1\}}$ un número racional positivo cualquiera. Entonces debe existir un número racional negativo tal que:

$$f(q_1) < f(q_2)$$

Esto ya que los racionales negativos son infinitos y por ende debería haber más de $f(q_1) - 1$.

Pero esto es contradictorio ya que nos estaría diciendo que:

$$q_1 < q_2$$

pero sabemos que q_1 es positivo y q_2 es negativo.

Finalmente podemos concluir que no existe una función biyectiva entre $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ y por ende no son isomorfas.

Problema 6. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ isomorfas? ¿Y qué sucede en el caso de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$?

Solución

- $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ no son isomorfas ya que $\mathbb{N}$ no tiene **inversos aditivos** y $\mathbb{Q}$ sí. O sea, para 1 en $\mathbb{Q}$ existe -1 tal que:

  $$1 + (-1) = 0$$

  Para lo cual si hubiese una función biyectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ entonces debería cumplirse que:

  $$f(1) + f(-1) = f(0)$$

  O sea, que para un natural $f(1)$ tenga un inverso aditivo $f(-1)$, lo cual no existe en $\mathbb{N}$.

- Acá tenemos un problema un poco más escondido. Veamos que pasa si existe una función biyectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

  Tenemos que en los racionales se cumple que:

  $$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
  $$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

  Por lo cual si hay un isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ entonces debería cumplirse que:

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$$
  $$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1)$$

  O sea que existe un número $a = f(1)$ en $\mathbb{Z}$ tal que:

  $$b + b = a$$
  $$c + c + c = a$$

  donde $b = f\left(\frac{1}{2}\right)$ y $c = f\left(\frac{1}{3}\right)$. Okey, esto no es ningún problema porque podemos ecoger $a := 6$, $b := 3$ y $c := 2$ y listo. Ya que en realidad pedimos solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

  $$2b = a$$
  $$3c = a$$

  ¿O no?

  El problema es que esto va a pasar con cualquier $\frac{1}{q}$ con q entero positivo. O sea, estamos diciendo que existe un número en $\mathbb{Z}$ que es *multiplo* de todos los números. Pero no existe tal número en $\mathbb{Z}$. Por ende no hay una función biyectiva entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Y por ende no son isomorfas.

Definibilidad

Problema 7. Demuestre que la relación de orden $<$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.

Solución Consideremos el siguiente isomorfirmo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Cumple con que:

$$x \cdot y = z \Leftrightarrow f(x) \cdot f(y) = f(z)$$

Luego por el teorema de isomorfismo como se cumple que:

$$1 < 2$$

entonces también

$$f(1) < f(2)$$

Pero esto es absurdo ya que:

$$1 \not< \frac{1}{2}$$

Así, la relación de orden $<$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.