# Teorías

Semana $(12)_2 = 1100$

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213

Prof. Sebastián Bugedo

# Programa

# Programa

# Recordatorio: el símbolo $\models$

### Definición

Decimos que un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones $\Sigma$ es **satisfacible** si existe $\mathfrak{A}$ tal que para toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$. Lo denotamos por $\mathfrak{A} \models \varphi$

### Definición

Sean una $\mathcal{L}$-oración $\varphi$ y un conjunto de oraciones $\Sigma$. Decimos que $\varphi$ es **consecuencia lógica** de $\Sigma$, denotado por $\Sigma \models \varphi$ si, y solo si, para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene

$$\text{si } \mathfrak{A} \models \Sigma \quad \text{entonces} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

Recordar que su significado cambia según los elementos que relaciona

# Teorema de compacidad

### Teorema (compacidad)

Un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas $\Sigma$ es satisfacible si, y solo si, $\Sigma$ es finitamente satisfacible

# Sistema de Hilbert

La lógica de primer orden tiene un sistema de deducción con buenas propiedades

### Teorema (correctitud)

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$,

$$\text{si } \Sigma \vdash_H \varphi, \quad \text{entonces} \quad \Sigma \models \varphi$$

### Teorema (completitud de Gödel)

Dado un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$,

$$\text{si } \Sigma \models \varphi, \quad \text{entonces} \quad \Sigma \vdash_H \varphi$$

El sistema solo deduce consecuencias y puede deducirlas todas

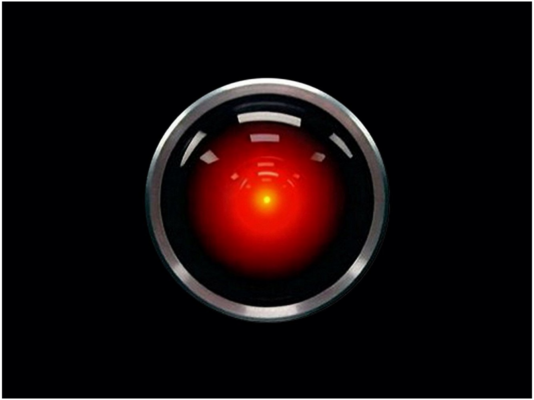
# Unidad IV: Teorías

¿Qué diantres es eso?

En esencia una **Teoría** es un **cúmulo de información**

¿Todo conjunto de información es *útil*?

# Unidad IV: Teorías



# Unidad IV: Teorías

Hoy comenzamos nuestro estudio de

- ¿Qué propiedades tienen los conjuntos de información?
- ¿Qué se puede deducir de ellos?
- ¿Qué relación hay entre los modelos que los satisfacen?
- ¿Toda teoría tiene buenas propiedades?
- ¿Podemos definir algoritmos para verificar conclusiones de una teoría?

# Playlist Unidad IV y Orquesta

Playlist: LogiWawos #4

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender concepto de teoría
- ☐ Construir teorías a partir de objetos
- ☐ Comprender el concepto de teoría completa
- ☐ Introducir el concepto de teoría categórica

# Programa

# Teorías

### Definición

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones $\Sigma$ se dice una **teoría** si cumple

1. $\Sigma$ es satisfacible
2. $\Sigma$ es cerrado bajo consecuencia lógica, es decir, para toda oración $\varphi$ se tiene que

$$\text{si } \Sigma \models \varphi \quad \text{entonces} \quad \varphi \in \Sigma$$

Una teoría $\Sigma$ no tiene contradicciones y
contiene todas sus consecuencias lógicas

# Teorías

¿Cómo podemos construir teorías?

- No nos pueden *faltar* oraciones (toda consecuencia lógica debe estar)
- Además debe ser satisfacible...
- ¿De qué ingredientes podemos partir para formar una?

Veremos dos formas de definir teorías

# Teoría de una estructura

## Proposición

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. El siguiente conjunto es una teoría

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

## Demostración

Para probar que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es satisfacible, basta notar que

$$\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

Para probar que es cerrada bajo cons. lógica, sea $\varphi$ una $\mathcal{L}$-oración tal que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$. En particular,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \quad &\Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi && \text{(cons. lógica)} \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{A} \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) && \text{(def. de } \mathrm{Th}(\mathfrak{A})\text{)} \end{aligned}$$

¿Qué teorías ya podemos definir con esta herramienta?

# Dos ejemplos fundamentales

## Ejemplo

Consideremos $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$. Recordemos las estructuras que definimos para naturales y reales en este vocabulario

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{N} & = & \langle \mathbb{N},\ 0^{\mathfrak{N}},\ 1^{\mathfrak{N}},\ s^{\mathfrak{N}},\ +^{\mathfrak{N}},\ \cdot^{\mathfrak{N}},\ <^{\mathfrak{N}} \rangle \\ \mathfrak{R} & = & \langle \mathbb{R},\ 0^{\mathfrak{R}},\ 1^{\mathfrak{R}},\ s^{\mathfrak{R}},\ +^{\mathfrak{R}},\ \cdot^{\mathfrak{R}},\ <^{\mathfrak{R}} \rangle \end{array}$$

con las interpretaciones usuales en los naturales y reales, respectivamente.

Con ellas, definimos dos teorías fundamentales

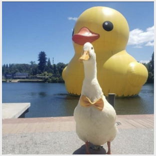
- Teoría de la aritmética: $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$
- Teoría de los números reales: $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$

# Dos ejemplos fundamentales

## Ejercicio

Dé un ejemplo de $\mathcal{L}$-oraciones $\varphi_1, \varphi_2$ tales que

- $\varphi_1 \in \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ y $\varphi_1 \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$
- $\varphi_2 \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ y $\varphi_2 \in \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$



¿Esta es la única forma de definir teorías?

# Teoría de un conjunto de axiomas

Proposición

Sea $\Psi$ un conjunto satisfacible de $\mathcal{L}$-oraciones. El siguiente conjunto es una teoría

$$\mathsf{Th}(\Psi) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \Psi \vDash \varphi\}$$

A $\Psi$ le llamamos **conjunto de axiomas**
y decimos que tal teoría es **axiomatizable**

# Teoría de un conjunto de axiomas

## Proposición

Sea $\Psi$ un conjunto satisfacible de $\mathcal{L}$-oraciones. El siguiente conjunto es una teoría

$$\mathrm{Th}(\Psi) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \Psi \vDash \varphi\}$$

## Demostración

Como $\Psi$ es satisfacible, existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \vDash \Psi$. Luego, por consecuencia lógica de los $\varphi$ se cumple

$$\mathfrak{A} \vDash \Psi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash \varphi$$

y concluimos $\mathfrak{A} \vDash \mathrm{Th}(\Psi)$, por lo que es satisfacible.

Si $\mathrm{Th}(\Psi) \vDash \varphi$, consideremos $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \vDash \Psi$. Ya probamos que se tiene $\mathfrak{B} \vDash \mathrm{Th}(\Psi)$ y por consecuencia lógica, $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. Concluimos que $\varphi \in \mathrm{Th}(\Psi)$.

# Un ejemplo clásico

## Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{e, \circ\}$ con $e$ símbolo de constante y $\circ$ símbolo de función binaria. Consideremos el conjunto de axiomas $Gr = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ con

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y \forall z.(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z) \\
\varphi_2 &= \forall x((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)) \\
\varphi_3 &= \forall x \exists y((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e))
\end{aligned}
$$

La teoría $\mathrm{Th}(Gr)$ es la **teoría de grupos**.

¿Qué características tienen las estructuras $\mathfrak{A}$ que satisfacen $\mathrm{Th}(Gr)$?

- El operador $\circ$ es asociativo
- Existe un elemento neutro según $\circ$
- Existe un inverso según $\circ$

# Teorías completas

## Definición

Una teoría $\Sigma$ sobre $\mathcal{L}$ se dice **completa** si para toda $\mathcal{L}$-oración $\varphi$ ocurre alguna de las siguientes alternativas

- $\Sigma \vDash \varphi$
- $\Sigma \vDash \neg\varphi$

¿Toda teoría es completa?

# Programa

# Programa

# Teorías completas

## Definición

Una teoría $\Sigma$ sobre $\mathcal{L}$ se dice **completa** si para toda $\mathcal{L}$-oración $\varphi$ ocurre alguna de las siguientes alternativas

- $\Sigma \models \varphi$
- $\Sigma \models \neg\varphi$

¿Toda teoría es completa?

# Teorías completas

## Definición

Una teoría $\Sigma$ sobre $\mathcal{L}$ se dice **completa** si para toda $\mathcal{L}$-oración $\varphi$ ocurre alguna de las siguientes alternativas

- $\Sigma \models \varphi$
- $\Sigma \models \neg\varphi$

## Proposición

Las teorías $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ y $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ son completas

Este es un caso especial de un resultado general

# Teorías completas

### Teorema

$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es una teoría completa para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$

### Demostración

Sea $\varphi$ una $\mathcal{L}$-oración cualquiera. Para $\mathfrak{A}$, se cumple $\mathfrak{A} \models \varphi$ o $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

- Si $\mathfrak{A} \models \varphi$, entonces $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$
- Si $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, entonces $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$

En ambos casos la fórmula está en la teoría y por lo tanto, es consecuencia lógica de ella. Concluimos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es completa.

¿Las teorías generadas a partir de axiomas son siempre completas?

# Teorías no completas

### Proposición

Th($Gr$) no es una teoría completa

### Demostración

Sea $\varphi = \forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$. Demostraremos que

$$\text{Th}(Gr) \not\models \varphi \quad \text{y} \quad \text{Th}(Gr) \not\models \neg\varphi$$

¿Qué significa (en chileno) demostrar esto?

# Teorías no completas

## Demostración

Primero demostraremos que $\text{Th}(Gr) \not\models \neg\varphi$. Para esto, construiremos un grupo $\mathfrak{A}$ tal que

- $\mathfrak{A} \models \text{Th}(Gr)$, i.e. es un grupo
- $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$, i.e. es conmutativo

Tomamos $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, e^{\mathfrak{A}}, \circ^{\mathfrak{A}} \rangle$ donde interpretamos

- $e^{\mathfrak{A}} = 0$ (cero de los enteros)
- $a \circ^{\mathfrak{A}} b = a + b$ (suma de enteros)

Esta estructura satisface los tres axiomas de $\text{Th}(Gr)$ y además cumple $\mathfrak{A} \models \varphi$. Concluimos que $\text{Th}(Gr) \not\models \neg\varphi$.

# Teorías no completas

## Demostración

Ahora demostraremos que $\mathrm{Th}(Gr) \not\models \varphi$. Para esto, construiremos un grupo $\mathfrak{B}$ tal que

- $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(Gr)$, i.e. es un grupo
- $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, i.e. **no** es conmutativo

Tomamos $\mathfrak{B} = \langle B, e^{\mathfrak{B}}, \circ^{\mathfrak{B}} \rangle$ donde

- $B = \{f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid f \text{ es inyectiva}\}$
- $e^{\mathfrak{B}}$ se interpreta como la función identidad
- $\circ^{\mathfrak{B}}$ se interpreta como la composición de funciones

$$(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2)(x) = f_1(f_2(x))$$

¿Está bien definida $\circ^{\mathfrak{B}}$?

# Teorías no completas

## Demostración

Verificamos que $\mathfrak{B}$ es un grupo

- La composición de funciones es asociativa
- Para toda $f \in B$

$$f(\circ^{\mathfrak{B}} e^{\mathfrak{B}}) = (e^{\mathfrak{B}} \circ^{\mathfrak{B}} f) = f$$

- Como toda $f \in B$ es inyectiva y ambos conjuntos en su definición son equinumerosos, $f$ es biyectiva. Luego, existe $f^{-1}$ y $f^{-1} \in B$. Con esto,

$$f(\circ^{\mathfrak{B}} f^{-1}) = (f^{-1} \circ^{\mathfrak{B}} f) = e^{\mathfrak{B}}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(Gr)$

¿Es conmutativa la composición de funciones?

# Teorías no completas

**Demostración**

Consideremos los siguientes elementos de $B$

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $g(x)$ | $h(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 1 |

Tenemos entonces que

$$(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2) = g \neq h = (f_2 \circ^{\mathfrak{B}} f_1)$$

Concluimos que $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

Esto demuestra que $\mathrm{Th}(Gr)$ no es completa. $\square$

¿Hay teorías definidas a partir de axiomas que sí sean completas?

# Caracterizando teorías completas

### Definición

Dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son **equivalentes** si para toda $\mathcal{L}$-oración $\varphi$,

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Observemos que todo par de estructuras isomorfas, son también equivalentes

¿Conocemos ejemplos de estructuras equivalentes pero no isomorfas?

# Caracterizando teorías completas

### Teorema

Una teoría $\Sigma$ es completa si, y solo si, para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen $\Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes

Una teoría completa define sus modelos *hasta* equivalencia.
No exige nada sobre isomorfismo

### Demostración

Propuesta jj

# Caracterizando teorías completas

## Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario usual para grafos. Recordemos las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ de la clase anterior:

- $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, \{(i, i+1), (i+1, i) \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle$
- $\mathfrak{A}'$ modelo no estándar de $\mathfrak{A}$

Vimos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ no son isomorfas, pero sí equivalentes.

Recordemos que $\mathfrak{A}'$ fue definida a partir de un conjunto de oraciones

$$\Sigma = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

¡Una teoría! De hecho, $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ y tenemos que $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y $\mathfrak{A}' \models \Sigma$.

Ojo, ya sabemos gratis que $\Sigma$ es completa
porque es generada a partir de una estructura

# Teorías categóricas

### Definición

Una teoría $\Sigma$ es **categórica** si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen $\Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Una teoría categórica define sus modelos de manera más estricta

# Teorías categóricas

Teorema

Si $\Sigma$ es una teoría categórica, entonces $\Sigma$ es una teoría completa

Notemos que esto se deduce de que dos estructuras isomorfas siempre son equivalentes

¿La dirección opuesta es cierta?
¿Es cierta al menos para teorías generadas a partir de estructuras?

# Teorías categóricas

### Teorema

Si $\Sigma$ es una teoría categórica, entonces $\Sigma$ es una teoría completa

El converso es falso:

- Tomemos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ su modelo no estándar del ejemplo mencionado
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es completa por ser generada a partir de una estructura
- $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}'$ son modelos de $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ tiene dos modelos no isomorfos
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ NO ES CATEGÓRICA

# ¿Hacia dónde vamos?

Nos estamos acercando a demostrar resultados muy potentes

¿Podemos diseñar algoritmos para verificar si $\varphi \in \Sigma$?

- Mostraremos que la teoría de la aritmética no es categórica: daremos un modelo no estándar para $\mathfrak{N}$
- Estudiaremos cuándo una teoría es **decidible**
- Enunciaremos un primer resultado de incompletitud de Gödel!

Próxima clase estudiaremos teorías decidibles

# Programa

# Actividad Espiritual Complementaria #2

# Objetivos de la clase

- ☐ Comprender concepto de teoría
- ☐ Construir teorías a partir de objetos
- ☐ Comprender el concepto de teoría completa
- ☐ Introducir el concepto de teoría categórica

# ¿Qué aprendí hoy? ¿Comentarios?

Ve a

**www.menti.com**

Introduce el código

**5420 9489**

O usa el código QR