Pontificia Universidad Católica de Chile
Profesor: Sebastián Bugedo
Ayudante: Sofía Errázuriz

Lógica para ciencias de la computación - IIC2213
Ayudantía 12
23 de junio, 2023

El objetivo de esta ayudantía es repasar los conceptos del curso entre las cases 07 y 13, para esto se hará un resumen de la materia, acompañado de los siguientes ejercicios:

Lógica de primer orden

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ un lenguaje utilizado para representar grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una $\mathcal{L}$-oración que represente la propiedad mencionada.

(a) El grafo es un clique.

(b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.

(c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.

(d) El grafo contiene una 3-rueda.

(e) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4.

(f) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.

(a) $\forall v.\forall u.E(u, v)$

(b) $\exists v_1.\exists v_2.\exists v_3.\exists v_4. \bigwedge_{i,j\in[4]} E(v_i, v_j)$

(c) $\exists v_1.\exists v_2.\exists v_3.\exists v_4.E(v_1, v_2) \wedge E(v_2, v_3) \wedge E(v_3, v_4) \wedge E(v_4, v_1)$

(d) $\exists v_1.\exists v_2.\exists v_3.\exists v_4. \bigwedge_{i,j\in[4]}(E(v_i, v_j) \wedge v_1 \neq v_j)$

(e) Primero definimos las oraciones

$$\varphi_n(u, v) = \exists v_1. \dots \exists v_n.E(u, v_1) \wedge E(v_n, v) \wedge \bigwedge_{i\in[n-1]} E(v_i, v_{i+1})$$

Luego, la oración pedida podría ser

$$\exists u.\exists v.\neg E(u, v) \wedge \neg\varphi_1(u, v) \wedge \neg\varphi_2(u, v) \wedge \varphi_3(u, v) \wedge v \neq u$$

(f) $\forall u.\forall v.E(u, v) \vee \varphi_1(u, v) \vee \varphi_2(u, v)$

Ejercicio 2. Demuestre que $S = \{0\}$ no es definible en $\langle \mathbb{N} \rangle$ y $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Notemos que cualquier función biyectiva será isomorfismo en $\langle \mathbb{N} \rangle$, por lo tanto podemos tomar la función que intercambia el 0 y el 1 y obtenemos que $\{0\}$ no es definible por teorema de isomorfismo.

Notemos que multiplicar por un medio es un automorfismo en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y no preserva el conjunto de los naturales, por lo tanto por teorema de isomorfismo, no son definibles.

Ejercicio 3. Decimos que un grafo $G = (N, A)$ contiene un ciclo finito si existen nodos a_1, $\ldots$, $a_n \in N$ $(n \geq 2)$ tal que para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in A$ y además $(a_n, a_1) \in A$.
Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$. Demuestre que no existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A}$ contiene un ciclo finito si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Supongamos que existe una oración que define si un grafo tiene un ciclo finito, llamémosla φ. Por otro lado, sean

$$\psi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n. \bigwedge_{\substack{i,j \in [n] \\ i \neq j}} v_i \neq v_j \wedge \bigwedge_{i \in [n-1]} E(v_i, v_{i+1}) \wedge E(v_n, v_1)$$

Entonces definimos $\Sigma = \{\neg \varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$. Este grupo es finitamente satisfacible tomando un grafo que sea un ciclo con más vértices que cualquier φ_n (esto es finito, ya que son subconjuntos finitos). Por teorema de capacidad tenemos que debe ser satisfacible, entonces existe un grafo que tiene un ciclo finito pero que no es de ningún largo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto no se puede tener la oración φ.

Teorías

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario con un conjunto finito de símbolos y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con dominio finito. Demuestre que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ es una teoría decidible.

Sea φ una oración cualquiera, notemos que podemos verificar exhaustivamente si $\mathfrak{A} \models \varphi$ ya que tiene dominio finito, entonces usamos ese algoritmo para decidir si $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.