Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 7

Publicación: Martes 20 de junio.
Entrega: **Viernes 30 de junio hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

- Aplicar el concepto de consecuencia lógica en lógica proposicional.
- Modelar problemas usando lógica proposicional.
- Aplicar el concepto de NP-completitud a problemas generales.
- Construir y demostrar correctitud de reducciones.

Pregunta 1: Lógica proposicional

(a) Sea P un conjunto de variables proposicionales. Dado $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ y fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(P)$ demuestre que

$$\Sigma \models (\alpha \to \beta) \quad \text{si y solo si} \quad \Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$$

(b) Sea $\mathcal{L} = \{R\}$ vocabulario con R símbolo de relación n-aria y sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con dominio finito. Construya una fórmula proposicional φ tal que φ sea satisfacible si y solo si existe un automorfismo no trivial en $\mathfrak{A}$. Demuestre la correctitud de su construcción. *Aclaración:* un automorfismo no trivial es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$, tal que es distinto de la función $f(a) = a$.

Solución P1.

Aquí va mi solución

Pregunta 2: Complejidad

(a) Sean L_1, L_2 dos lenguajes NP-completos. ¿Es $L_1 \cap L_2$ NP-completo? Demuestre su respuesta.

(b) Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ el vocabulario usual para grafos, i.e. E es símbolo de relación binaria. Una $\mathcal{L}$-oración φ se dice existencial si es de la forma $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_k \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, donce ψ es una $\mathcal{L}$-fórmula sin cuantificadores y k un entero positivo. Demuestre que el siguiente lenguaje es NP-hard

$$L = \{(\mathfrak{A}, \varphi) \mid \varphi \text{ es } \mathcal{L}\text{-oración existencial y } \mathfrak{A} \text{ es } \mathcal{L}\text{-estructura finita tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Sugerencia: reduzca desde 3-COL. *Sugerencia 2:* dado un grafo, construya $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ para codificar la asignación de colores a pares de nodos vecinos, de forma que A es el conjunto de colores y $E^{\mathfrak{A}}$ son pares de colores legales. ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Qué pares de colores son ilegales en una 3-coloración y no están dentro de $E^{\mathfrak{A}}$? La oración existencial debe intentar hacer match con pares de colores para cada arista del grafo original.

Solución P2.

Aquí va mi solución