Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 3

Publicación: Miércoles 12 de abril.
Entrega: **Viernes 28 de abril hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

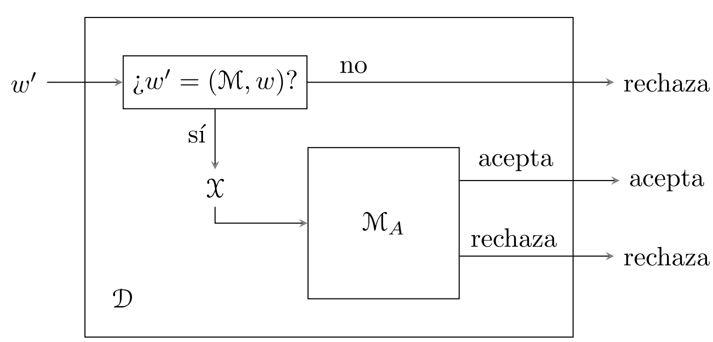
- Demostrar que lenguajes son indecidibles usando máquinas y reducciones.
- Identificar lenguajes R y RE y demostrar propiedades.
- Construir reducciones entre diferentes lenguajes.

Pregunta 1: Lenguajes indecidibles

(a) Considere el siguiente lenguaje

$$A = \{(\mathcal{M}, w) \mid \mathcal{M} \text{ es una TM determinista tal que } \mathcal{M} \text{ acepta } w\}$$

Note que este lenguaje es similar, pero no idéntico a H visto en clases, pues A habla de aceptar w y no solo de detenerse como lo hace H. Para demostrar que A es indecidible, supongamos que es decidible y por ende existe una máquina $\mathcal{M}_A$ que lo decide. Usando $\mathcal{M}_A$, se puede construir una máquina $\mathcal{D}$ que decide H, obteniendo una contradicción. A continuación se presenta la estructura de $\mathcal{D}$ que decide H



(i) Dé una descripción de la máquina que queda codificada en $\mathcal{X}$ y que se alimenta a $\mathcal{M}_A$. Puede ser un diagrama o una descripción con palabras. Si hace un diagrama, puede hacerlo a mano e incluirlo como foto, no es necesario usar la librería `tikz`.

(ii) Demuestre que la máquina $\mathcal{D}$ decide H.

(b) Un lenguaje indecidible conocido es

$$L_1 = \{(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ es una TM determinista tal que } L(\mathcal{M}) = \varnothing\}$$

Mediante reducción desde L_1, demuestre que el siguiente lenguaje también es indecidible

$$L_2 = \{(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \mid \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \text{ son TM deterministas tales que } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

Solución P1.

Aquí va mi solución

Pregunta 2: Clases R y RE

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuestre su respuesta.

(a) Si $L_1 \cup L_2$ es decidible, entonces L_1 y L_2 son decidibles.

(b) Sea $\mathcal{M}_1$ una MT. Si $L_1 = L(\mathcal{M}_1)$, entonces existe una MT $\mathcal{M}_2$ tal que $L(\mathcal{M}_2) = \overline{L_1}$.

Solución P2.

Aquí va mi solución

Pregunta 3: Reducciones polinomiales

(a) Demuestre que si $L_1 \leq_p L_2$ y $L_2 \leq_p L_3$, entonces $L_1 \leq_p L_3$.

(b) Dada una matriz de enteros A de $n \times m$ y un vector $\vec{b}$ de n enteros, el problema de *programación entera* en su versión de problema de decisión consiste en verificar si existe un vector $\vec{x}$ de m enteros tal que $A\vec{x} \leq \vec{b}$. Por ejemplo, el siguiente es un problema de programación entera para el cual el vector $\vec{x} = (1, 1)$ es adecuado

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Como lenguaje, lo definimos por

$$\text{PE} = \{(A, \vec{b}\,) \mid A \text{ de } n \times m,\ \vec{b} \text{ de } n \times 1 \text{ y existe vector } \vec{x} \text{ de } m \times 1 \text{ tal que } A\vec{x} \leq \vec{b}\}$$

Demuestre que 3SAT $\leq_p$ PE.

Solución P3.

Aquí va mi solución