Lógica de primer orden

Semana $(8)_2 = 1000$

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213

Prof. Sebastián Bugedo

Programa

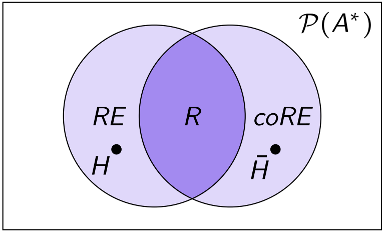
Programa

Clases según existencia de máquinas

Lenguajes **RE**: aceptados por alguna máquina

Lenguajes **coRE**: su complemento es aceptado por alguna máquina

Lenguajes **R** o **decidibles**: aceptados por alguna máquina que siempre se detiene



R es la clase de problemas con solución/algoritmo

Clases de complejidad no deterministas

Definición (clases de tiempo)

Dado un alfabeto A, se define

$$\mathrm{NTIME}(g) = \{L \subseteq A^* \mid L \text{ puede ser aceptado en tiempo } g \text{ por una máquina no determinista}\}$$

Una clase fundamental

$$\mathrm{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$$

NP es la clase de lenguajes aceptados por NTM polinomiales

La definición de NP

Teorema (def. alternativa de NP)

Sea L un lenguaje. $L \in \mathrm{NP}$ si, y solo si, existe una máquina determinista $\mathcal{M}$ que funciona en tiempo polinomial y un polinomio $p(\cdot)$ tales que

$$L = \{x \mid \text{existe } y \text{ tal que } |y| = p(|x|) \text{ y } \mathcal{M} \text{ acepta } (x, y)\}$$

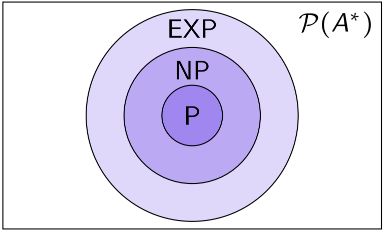
El teorema nos da una nueva forma de demostrar que $L \in \mathrm{NP}$:
buscar testigo y verificador ambos polinomiales

¿Cómo se relaciona NP con P y EXP?

Lenguajes **EXP**: decididos por $\mathcal{M}$ MT en t. exponencial

Lenguajes **NP**: aceptados por $\mathcal{N}$ NMT en t. polinomial

Lenguajes **P**: decididos por $\mathcal{M}$ MT en t. polinomial



No olvidar: todas estas clases están dentro de R

Problemas NP-completos

Teorema (Cook-Levin)

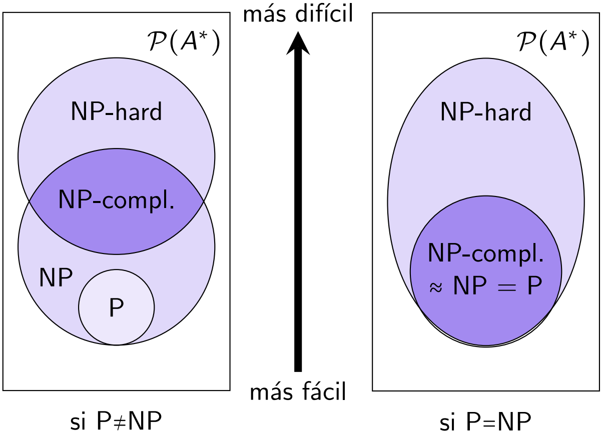
El problema SAT es NP-completo

El teorema de Cook-Levin es clave por varias razones

- Nos entrega un primer problema NP-completo
- Cualquier $L \in \mathrm{NP}$ tal que $\mathrm{SAT} \leq_p L$ es también NP-completo
- Si probamos que $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$, por teorema de reducciones tenemos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$

¿Cómo se demuestra que un lenguaje es NP-completo?

Relaciones de complejidad



OJO: hay dos lenguajes que debemos excluir del diagrama P = NP

NP-completitud en el caso P = NP

Proposición

Si P = NP, entonces todo lenguaje $L \in$ P es NP-completo, excluyendo a $L = \varnothing$ y $L = \Sigma^*$.

Demostración

Observe que si $L = \varnothing$ o $L = \Sigma^*$, no hay reducción posible: no son NP-completos, independiente de si P = NP

Unidad III: Lógica de primer orden

¿Qué diantres es eso?

Unidad III: Lógica de primer orden

Hoy comenzamos nuestro estudio de

- Una segunda lógica formal
- Sus diferencias en poder expresivo con la lógica proposicional
- La complejidad de sus problemas de decisión asociados
- Límites de expresividad... ¿se puede definir todo lo que queramos?

Playlist Unidad III y Orquesta

Playlist: LogiWawos #3

Además sigan en instagram:
@orquesta_tamen

Objetivos de la clase

- ☐ Conocer la sintaxis de la lógica de primer orden
- ☐ Comprender el concepto de estructura
- ☐ Comprender la semántica de la lógica de primer orden

Programa

Lógica como **sistema formal** para determinar **validez** de argumentos

Todas las personas son mortales.
Sócrates es persona.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos expresar este argumento en lógica proposicional?

Hacia nuestra segunda lógica

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado

- ¿Qué le falta?
- ¿Para qué se usa?

Nos proponemos desarrollar una lógica más robusta, capaz de expresar argumentos como el anterior

¿Esta nueva lógica mantendrá todas las buenas propiedades de la lógica proposicional?

Lógica de primer orden

Llamaremos **lógica de primer orden (LPO)** a nuestra nueva herramienta

- Incluirá dominios, constantes, funciones y relaciones
- Además tendrá **cuantificadores**
- ... esto vendrá con un costo

Formalizaremos sus ingredientes a continuación

Vocabulario

Notación

Un **vocabulario** $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos dados por

$$\begin{array}{rcl} \text{constantes} & : & \{c_1, \ldots, c_\ell, \ldots\} \\ \text{funciones} & : & \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\} \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \ldots, R_n, \ldots\} \end{array}$$

Dada una función f o relación R del vocabulario $\mathcal{L}$, diremos que su **aridad** es el número de argumentos que posee.

- f puede tener aridad mayor a 0
- R puede tener aridad mayor o igual a 0

Diremos que los elementos de $\mathcal{L}$ son los **símbolos del vocabulario**

Vocabulario

Ejemplo

Un vocabulario que podemos usar para trabajar con naturales es $\mathcal{L}$ dado por la unión de los conjuntos

$$\begin{aligned} \text{constantes} &\quad : \quad \{0, 1\} \\ \text{funciones} &\quad : \quad \{s, +, \cdot\} \\ \text{relaciones} &\quad : \quad \{<\} \end{aligned}$$

Observemos que

- 0 y 1 son símbolos, no son nuestros "*cero*" y "*uno*" conocidos
- $+$ y $\cdot$ son funciones binarias
- s es una función unaria... ¿para qué la usaremos?
- $<$ es una relación binaria

Los símbolos de $\mathcal{L}$ en este punto **no tienen significado**

Vocabulario

Ya tenemos símbolos... ¿son suficientes?

- queremos expresar ideas lógicas
- argumentos, demostraciones, propiedades...

¿Qué nos falta?

Programa

Más símbolos *legales*

No nos basta con un vocabulario... queremos símbolos **generales**

- conectivos lógicos
- paréntesis
- **relación binaria** $=$
- **variables**
- **cuantificadores** $\exists$ **y** $\forall$

Formalizaremos la sintaxis de la LPO con estos símbolos

Sintaxis de LPO: términos

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario. Supondremos además una lista infinita de variables conocida.

Definición

El conjunto de **$\mathcal{L}$-términos** es el menor conjunto que satisface

- Cada constante $c \in \mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-término
- Cada variable x es un $\mathcal{L}$-término
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y $f \in \mathcal{L}$ es una función n-aria, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$-término

Ejemplo

Para el vocabulario de los naturales $\mathcal{L}$ que vimos, son $\mathcal{L}$-términos

$$0 \qquad s(s(1)) \qquad s(0) \cdot s(x)$$

Sintaxis de LPO: fórmulas

Definición

El conjunto de **$\mathcal{L}$-fórmulas** es el menor conjunto que satisface

- Si t_1, t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es $\mathcal{L}$-fórmula
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y $R \in \mathcal{L}$ una relación n-aria, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es $\mathcal{L}$-fórmula
- Si φ, ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas
- Si φ es $\mathcal{L}$-fórmula que menciona la variable x, entonces $(\exists x.\ \varphi)$ y $(\forall x.\ \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas

Diremos que las $\mathcal{L}$-fórmulas de la forma
$t_1 = t_2$ y $R(t_1, \ldots, t_n)$ son **fórmulas atómicas**

Sintaxis de LPO: fórmulas

Cuando no haya riesgo de confusión, preferiremos notación **infija** para relaciones y funciones conocidas

Además, omitiremos paréntesis si no hay ambigüedad

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$. Las siguientes son $\mathcal{L}$-fórmulas

- $\varphi_1 := \; 1 = s(0)$
- $\varphi_2 := \; \forall x.\; x < s(x)$
- $\varphi_3 := \; \forall x. \exists y.\; x = y + y$
- $\varphi_4 := \; \forall x. \forall y.\; (s(x) = s(y) \to x = y)$

¿Las $\mathcal{L}$-fórmulas del ejemplo son verdaderas?

Hacia la semántica en LPO

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$. Consideremos

$$\varphi_3 := \ \forall x.\exists y.\ x = y + y$$

- En los naturales, ¿φ_3 es verdadera?
- En los reales, ¿φ_3 es verdadera?

Si ahora consideramos

$$\varphi_1 := \ 1 = s(0)$$

- En los naturales, ¿φ_1 es verdadera?
- En los reales, ¿φ_1 es verdadera?

El valor de verdad de las $\mathcal{L}$-fórmulas depende de...
un **dominio** y la **interpretación** que se le da a los símbolos de $\mathcal{L}$

Programa

Programa

Semántica de LPO: estructuras

Definición

Una **$\mathcal{L}$-estructura** $\mathfrak{A}$ es una tupla que contiene

- Un dominio $A \neq \varnothing$
- Para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{L}$, se tiene un elemento
$$c^{\mathfrak{A}} \in A$$
- Para cada símbolo de función m-aria $f \in \mathcal{L}$, se tiene una función
$$f^{\mathfrak{A}} : A^m \to A$$
- Para cada símbolo de relación n-aria $R \in \mathcal{L}$, se tiene una relación
$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$$

Los elementos $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ y $R^{\mathfrak{A}}$ se llaman **interpretaciones** de sus símbolos respectivos.

Denotamos una $\mathcal{L}$-estructura como $\mathfrak{A} = \langle A, c^{\mathfrak{A}}, \dots, f^{\mathfrak{A}}, \dots, R^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{L} = \{E\}$ con E símbolo de relación **binaria** y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ con

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & \{1,2,3,4\} \\
E^{\mathfrak{A}} & = & \{(1,2),\ (1,3),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2)\}
\end{array}
$$

¿Qué representa $\mathfrak{A}$?

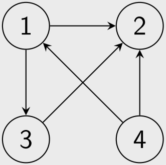
Semántica de LPO: estructuras

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{L} = \{E\}$ con E símbolo de relación **binaria** y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ con

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1,2,3,4\} \\ E^{\mathfrak{A}} & = & \{(1,2),\ (1,3),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2)\} \end{array}$$

Esta estructura representa el grafo dirigido



Semántica de LPO: estructuras

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$. Los números naturales se pueden representar con la $\mathcal{L}$-estructura

$$\mathfrak{N} \;=\; \langle \mathbb{N},\; 0^{\mathfrak{N}},\; 1^{\mathfrak{N}},\; s^{\mathfrak{N}},\; +^{\mathfrak{N}},\; \cdot^{\mathfrak{N}},\; <^{\mathfrak{N}} \rangle$$

- $0^{\mathfrak{N}}$ es el "cero" de $\mathbb{N}$ y $1^{\mathfrak{N}}$ es el "uno" de $\mathbb{N}$
- $s^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función unaria definida según
$$s^{\mathfrak{N}}(n) = n + 1$$
- $+^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función binaria definida según
$$+^{\mathfrak{N}}(a, b) = a + b$$
- $\cdot^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función binaria definida según
$$\cdot^{\mathfrak{N}}(a, b) = a \cdot b$$
- $<^{\mathfrak{N}} \subseteq \mathbb{N}^2$ es una relación binaria definida según
$$<^{\mathfrak{N}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a < b\}$$

Ejemplo

Consideremos otra $\mathcal{L}$-estructura para el mismo vocabulario

$$\mathfrak{A} = \langle A,\ 0^{\mathfrak{A}},\ 1^{\mathfrak{A}},\ s^{\mathfrak{A}},\ +^{\mathfrak{A}},\ \cdot^{\mathfrak{A}},\ <^{\mathfrak{A}} \rangle$$

- $A = \{\epsilon,\ 1,\ 11,\ 111,\ 1111\} = \{1\}^*$ (palabras de unos)
- $0^{\mathfrak{A}} = \epsilon$ y $1^{\mathfrak{A}} = 1$ (palabra "1")
- $s^{\mathfrak{A}} : A \to A$ es una función unaria definida según
$$s^{\mathfrak{A}}(w) = w1 \quad \text{(concatenar un 1)}$$
- $+^{\mathfrak{A}} : A^2 \to A$ es una función binaria definida según
$$+^{\mathfrak{A}}(w_1, w_2) = w_1 w_2 \quad \text{(concatenar las dos palabras)}$$

Semántica de LPO: estructuras

Ejemplo

Consideremos otra $\mathcal{L}$-estructura para el mismo vocabulario

$$\mathfrak{A} \;=\; \langle A,\; 0^{\mathfrak{A}},\; 1^{\mathfrak{A}},\; s^{\mathfrak{A}},\; +^{\mathfrak{A}},\; \cdot^{\mathfrak{A}},\; <^{\mathfrak{A}} \rangle$$

- $\cdot^{\mathfrak{A}} : A^2 \to A$ es una función binaria definida según
$$\cdot^{\mathfrak{A}}(w_1, w_2) = 1^{|w_1| \cdot |w_2|}$$
- $<^{\mathfrak{A}} \subseteq A^2$ es una relación binaria definida según
$$<^{\mathfrak{A}} = \{(w_1, w_2) \in A^2 \mid |w_1| < |w_2|\}$$

¿Qué puede representar $\mathfrak{A}$? ¿Se parece a $\mathfrak{N}$?

Semántica de LPO: hacia valores de verdad

Ejemplo

Consideremos $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$

Los números naturales se pueden representar con la estructura

$$\mathfrak{N} \;=\; \langle \mathbb{N},\; 0^{\mathfrak{N}},\; 1^{\mathfrak{N}},\; s^{\mathfrak{N}},\; +^{\mathfrak{N}},\; \cdot^{\mathfrak{N}},\; <^{\mathfrak{N}} \rangle$$

Los números reales se pueden representar con la estructura

$$\mathfrak{R} \;=\; \langle \mathbb{R},\; 0^{\mathfrak{R}},\; 1^{\mathfrak{R}},\; s^{\mathfrak{R}},\; +^{\mathfrak{R}},\; \cdot^{\mathfrak{R}},\; <^{\mathfrak{R}} \rangle$$

Con esto, $\varphi_3 := \;\forall x.\exists y.\; x = y + y$

- es falsa en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{N}$
- es verdadera en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{R}$

¿Basta con una estructura para saber si una $\mathcal{L}$-fórmula es verdadera?

Semántica de LPO: variables

Definición

Para un $\mathcal{L}$-término t, se definen sus **variables** $V(t)$ según

- Si t es un símbolo de constante, entonces $V(t) = \varnothing$
- Si $t = x$ es variable, entonces $V(t) = \{x\}$
- Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$ para $t_1, \dots, t_n$ $\mathcal{L}$-términos, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$

Ejemplo

Para $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$,

$$\begin{aligned} V(\ f(g(x,y), s(0))\ ) &= V(g(x,y)) \cup V(s(0)) \\ &= V(x) \cup V(y) \cup V(0) \\ &= \{x\} \cup \{y\} \cup \varnothing \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Semántica de LPO: variables

Definición

Para una $\mathcal{L}$-fórmula φ, se definen sus **variables** $V(\varphi)$ según

- Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$
- Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$
- Si $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi_1) \cup V(\psi_2)$
- Si $\varphi = (\exists x.\psi)$ o $\varphi = (\forall x.\psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$

Ejercicio

Para $\mathcal{L} = \{s, P, Q\}$ con P, Q símbolos de relaciones unarias y s símbolo de función unaria, determine el conjunto de variables de

$$(\exists x.P(x)) \vee (\forall y.Q(s(y)))$$

Semántica de LPO: variables

Definición

Para una $\mathcal{L}$-fórmula φ, se definen sus **variables libres** $VL(\varphi)$ según

- Si φ es atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$
- Si $\varphi = (\psi_1 \star \psi_2)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi_1) \cup VL(\psi_2)$
- Si $\varphi = (\exists x.\psi)$ o $\varphi = (\forall x.\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$

Las variables libres **no están cuantificadas**

Semántica de LPO: variables

Ejercicio

Para $\mathcal{L} = \{s, P, Q\}$ con P, Q símbolos de relaciones unarias y s símbolo de función unaria, determine el conjunto de variables libres de

$$P(z) \wedge \exists z.R(z)$$

Notación

Para una $\mathcal{L}$-fórmula φ

- Si $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$, denotaremos $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$
- Si $VL(\varphi) = \varnothing$, decimos que φ es una **oración**

¿Por qué son importantes las variables libres?

Semántica de LPO: variables

Ejemplo

Para $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y la estructura $\mathfrak{N}$, ¿es verdadera la siguiente fórmula?

$$x < s(0)$$

- Por si sola, la fórmula no es verdadera ni falsa!
- Si $x = 0$, entonces es cierta
- Para todo $x > 0$, es falsa

La estructura no es suficiente: necesitamos fijar las variables libres mediante una **asignación** en el dominio

Semántica de LPO: variables

Definición

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, se define una **asignación** σ como una función que para cada variable asigna un valor en A

Además, extendemos σ para dar valor a los $\mathcal{L}$-términos

- Si $t = c$ es un símbolo de constante, entonces $\hat{\sigma}(t) = c^{\mathfrak{A}}$
- Si $t = c$ es una variable, entonces $\hat{\sigma}(t) = \sigma(x)$
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $\hat{\sigma}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))$

Ejercicio

Para $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y la estructura $\mathfrak{N}$, considere la asignación $\sigma(x) = 7$ y evalúe el siguiente término

$$\hat{\sigma}(s(1) \cdot s(x))$$

Por simplicidad usaremos σ en lugar de $\hat{\sigma}$

Semántica de LPO

Sean $\mathcal{L}$ un vocabulario, $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura con dominio A y σ una asignación para $\mathfrak{A}$

Definición

Decimos que $(\mathfrak{A}, \sigma)$ **satisface** una $\mathcal{L}$-fórmula, denotado como $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$ si, y solo si,

- $\varphi := \; t_1 = t_2$ y $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$
- $\varphi := \; R(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$
- $\varphi := \; (\neg\psi)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$
- $\varphi := \; (\psi_1 \vee \psi_2)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_1$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_2$

Semántica de LPO

Definición

- $\varphi := (\psi_1 \wedge \psi_2)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_1$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_2$
- $\varphi := (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi_1$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_2$
- $\varphi := (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_1$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi_2$ o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi_1$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi_2$
- $\varphi = (\exists x. \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases}$$

- $\varphi = (\forall x. \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$

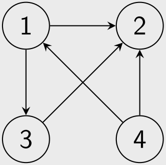
Si φ es oración, decimos simplemente $\mathfrak{A} \models \varphi$

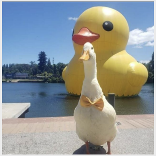
Semántica de LPO

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$ y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$ con

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & \{1, 2, 3, 4\} \\
E^{\mathfrak{A}} & = & \{(1,2),\ (1,3),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2)\}
\end{array}
$$





¿Cuáles de las siguientes oraciones son ciertas en $\mathfrak{A}$?

- $\varphi_1 := \exists x \forall y.\ E(x,y)$
- $\varphi_2 := \forall x \exists y.\ E(x,y)$
- $\varphi_3 := \exists x \forall y.\ \neg E(x,y)$

Equivalencia lógica

Definición

Dos $\mathcal{L}$-oraciones φ_1, φ_2 son **equivalentes**, denotado por $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, si, y solo si, para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi_1 \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathfrak{A} \vDash \varphi_2$$

Ejercicio

¿Es cierta la siguiente equivalencia lógica?

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x\ \varphi) \vee (\exists x\ \psi)$$

¿Qué reglas de equivalencia tenemos en LPO?

Consecuencia lógica

Notación

Decimos que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ satisface un conjunto Σ de oraciones, denotado por $\mathfrak{A} \vDash \Sigma$, si, y solo si, para cada oración $\varphi \in \Sigma$ se cumple $\mathfrak{A} \vDash \varphi$

Definición

Sean una $\mathcal{L}$-oración φ y un conjunto de oraciones Σ. Decimos que φ es **consecuencia lógica** de Σ, denotado por $\Sigma \vDash \varphi$, si y solo si, para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ se tiene

$$\text{si } \mathfrak{A} \vDash \Sigma \quad \text{entonces} \quad \mathfrak{A} \vDash \varphi$$

Próximamente ahondaremos en esto...

Satisfacibilidad

Definición

Una $\mathcal{L}$-fórmula φ es **satisfacible** si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación *sigma* para $\mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$

Si φ es una $\mathcal{L}$-oración, entonces φ es satisfacible si existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Definición

Una $\mathcal{L}$-fórmula φ es **válida** si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación *sigma* para $\mathfrak{A}$ se cumple que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$

Si φ es una $\mathcal{L}$-oración, entonces φ es válida si para toda $\mathfrak{A}$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$

¿Cómo se ve una oración válida?

Problemas de decisión en LPO

Al igual que en lógica proposicional, definimos problemas de decisión en LPO

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SAT} & = & \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración satisfacible}\} \\ \mathrm{VAL} & = & \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración válida}\} \end{array}$$

¿Son igual de difíciles que en el caso proposicional?

¿Qué punto débil tiene LPO?

En lógica proposicional, el problema de satisfacibilidad es difícil, pero tenemos algoritmos para resolverlo

¿Cómo sabemos si una fórmula en LPO es satisfacible?

- Debemos encontrar alguna $\mathcal{L}$-estructura que la satisfaga
- ¿Cuál es nuestro espacio de búsqueda?
- ¿Podemos hacer esto para una fórmula arbitraria?

Próximamente clase estudiaremos la complejidad de este problema

Programa

Objetivos de la clase

- ☐ Conocer la sintaxis de la lógica de primer orden
- ☐ Comprender el concepto de estructura
- ☐ Comprender la semántica de la lógica de primer orden

¿Qué aprendí hoy? ¿Comentarios?

Ve a

www.menti.com

Introduce el código

88 47 12 0

O usa el código QR