Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 6

Publicación:	Martes 6 de junio.
Entrega:	**Lunes 19 de junio hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

- Aplicar LPO al contexto de consultas en bases de datos.
- Aplicar conceptos de teorías.

Pregunta 1: Aplicación de LPO a consultas

Sea $\mathcal{L} = \{R_1, \dots, R_k\}$ un vocabulario relacional, i.e. que solo contiene símbolos de relaciones. Una $\mathcal{L}$-fórmula se dice **consulta conjuntiva** si es de la forma

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists z_1 \cdots \exists z_m \bigwedge_{1 \leq i \leq k} R_i(\bar{y}_i)$$

donde $\bar{y}_i$ es una tupla de variables en $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{z_1, \dots z_m\}$ y cuyo largo es igual a la aridad de R_i.

Para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y una consulta conjuntiva $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sobre el mismo vocabulario, se define la evaluación de φ en $\mathfrak{A}$ como la relación

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$$

El resultado puede visualizarse como las tuplas entregadas por una consulta a una base de datos cuyas tablas están representadas por la interpretación $R_i^{\mathfrak{A}}$ de cada relación. Cuando la consulta es una $\mathcal{L}$-oración, le llamamos **consulta conjuntiva booleana** y su evaluación $\varphi(\mathfrak{A})$ es simplemente verdadera o falsa e indica si $\mathfrak{A} \models \varphi$. Además, una **consulta conjuntiva completa** es aquella que no tiene variables cuantificadas, i.e. son todas libres.

Para los incisos (a), (b) y (c), considere $\mathcal{L} = \{R, S\}$ con R y S símbolos de relaciones binaria y ternaria, respectivamente. Sea además una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que

$R^{\mathfrak{A}}$	
Petrushka	Stravinsky
L'Amour de loin	Saariaho
El amor brujo	De Falla
Le sacre du printemps	Stravinsky

$S^{\mathfrak{A}}$		
Saariaho	Finlandia	Helsinki
Stravinsky	Rusia	Oranienbaum
Sibelius	Finlandia	Hämeenlinna
Respighi	Italia	Bologna
Albéniz	España	Camprodon

(a) Construya una consulta conjuntiva que entregue la siguiente evaluación

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{(\text{Petrushka}, \text{Rusia}), (\text{L'Amour de loin}, \text{Finlandia}), (\text{Le sacre du printemps}, \text{Rusia})\}$$

(b) Construya una consulta conjuntiva completa en $\mathfrak{A}$ e indique su resultado.

(c) Contruya una consulta conjuntiva booleana que sea verdadera en $\mathfrak{A}$.

Dado un vocabulario relacional $\mathcal{L} = \{R, S\}$ con símbolos de relaciones R y S de aridad n y m respectivamente, y dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R^{\mathfrak{A}}, S^{\mathfrak{A}} \rangle$, decida si es posible construir consultas conjuntivas que entreguen como evaluación los conjuntos de los incisos (d), (e) y (f). En caso negativo, justifique qué le falta a la definición de consultas conjuntivas y proponga una extensión adecuada.

(d) Proyección de la i-ésima columna de $R^{\mathfrak{A}}$: conjunto con los valores de la i-ésima coordenada de las tuplas de $R^{\mathfrak{A}}$ (sin repetidos).

(e) Selección por valor de la i-ésima columna de $R^{\mathfrak{A}}$: conjunto de tuplas de $R^{\mathfrak{A}}$ tales que el valor de la i-ésima coordenada es exactamente $v \in A$, para v fijo.

(f) *Cross join* de $R^{\mathfrak{A}}$ y $S^{\mathfrak{A}}$: conjunto de tuplas de tamaño $n + m$ tales que las primeras n coordenadas corresponden a alguna tupla de $R^{\mathfrak{A}}$, y las últimas m a alguna tupla de $S^{\mathfrak{A}}$.

Solución P1.

Para facilitar la notación se llamará R y S a las relaciones interpretadas en $\mathfrak{A}$.

Parte (a)

Notemos que las tuplas del enunciado son tales que el primer elemento es una de las obras que aparecen en las tuplas de R y el segundo elemento es el país de origen de su compositor, si este aparece en alguna tupla de S, por lo tanto una consulta conjuntiva que cumple lo pedido sería:

$$\varphi(x_1, x_2) = \exists z_1, z_2 \; R(x_1, z_1) \wedge S(z_1, x_2, z_2)$$

Parte (b)

Un ejemplo de una consulta conjuntiva completa, sería una que da como resultado las tuplas de la forma (*obra*, *compositor*, *país*, *ciudad*) para esto se considera la oración:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = R(x_1, x_2) \wedge S(x_2, x_3, x_4)$$

El resultado de esto será {(Petrushka, Stravisky, Rusia, Oranienbaum), (L'Amour de Loin, Saariaho, Finlandia, Helsinski), (Le sacre du printemps, Stravisky, Rusia, Oranienbaum)}.

Parte (c)

Un ejemplo de consulta booleana sería una que revisa que la relación R no sea vacía, es decir la definida por la oración:

$$\varphi = \exists z_1, z_2 \; R(z_1, z_2)$$

Esto es verdadero en $\mathfrak{A}$ ya que tenemos (Petrushka, Stravisnsky) $\in R$ y es completo ya que no tiene variables libres entonces es verdadero en $\mathfrak{A}$.

Parte (d)

Sí es posible, definimos

$$\varphi(x) = \exists z_1, \ldots, z_{n-1}\ R(z_1, \ldots, z_i, x, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1})$$

Claramente esta oración se satisface si existe una tupla con x en la i-ésima coordenada en R.

Parte (e)

No es posible. Esto se debe a que en las consultas conjuntivas solo se tienen las variables que se consultan y la variables libres. Para que fuera posible hacer lo pedido sería necesario poder utilizar igualdades dentro de la fórmula, ya que en ese caso podríamos definir la fórmula

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1, \ldots, x_n) \land x_i = v$$

Parte (f)

Sí es posible, basta tomar la fórmula

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n+m}) = R(x_1, \ldots, x_n) \land S(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

Ya que esta aceptará inputs tales que la tupla de las primeras n coordenadas esté en R y las últimas m coordenadas estén en S.

Dar 1 pt. por cada ítem. Si la fórmula está bien dar puntaje completo, si está mal pero incluye una justificación razonable, dar 0.5 pts. En la parte (e) dar 0.5 pts. por decir que no se puede y 0.5 pts. por la justificación.

Pregunta 2: Teorías

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario.

(a) Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y Σ una teoría sobre el mismo vocabulario, tal que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \subseteq \Sigma$. Demuestre que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \Sigma$.

(b) Sea $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ una secuencia de $\mathcal{L}$-estructuras. Se define

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k) = \{\varphi \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

Es decir, es el conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones satisfechas simultáneamente por todas las $\mathcal{L}$-estructuras mencionadas. Demuestre que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ es una teoría.

Solución P2.

Parte (a)

Supongamos que se tiene que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \subseteq \Sigma$, entonces solo falta probar la otra contención y se tiene lo pedido, esto lo haremos por contrapositiva.

Supongamos que tenemos $\varphi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, como las teorìas generadas a través de estructuras son completas, tenemos que $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Por la primera contención, sabemos que $\neg\varphi \in \Sigma$ y como esta es una teoría, es particular es satisfacible, por lo tanto no podemos tener que φ tambiés esté en Σ. Es decir, probamos que $\varphi \notin \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, entonces $\varphi \notin \Sigma$, concluyendo así lo pedido.

Probablemente no todos hagan este ejercicio por contrapositiva, pero en general dar 2 pts. por probar que $\varphi \in \Sigma$ implica $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ y 1 pt. por concluir lo pedido.

Parte (b)

En primer lugar, notemos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ es satisfacible por cada uno de los $\mathfrak{A}_i$ por definición.

Por otro lado, sea φ una oración tal que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k) \models \varphi$, entonces notemso que cualquier conjunto de oraciones que contenga a $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ va a tener a φ como conclusión lógica, en particular para todo $i \in [n]$ tenemos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$. Por lo tanto, para todo $i \in [n]$ se tiene que $\mathfrak{A}_\mathrm{i} \models \varphi$, de lo que se concluye que $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$.

En conclusión, tenemos que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ es satisfacible y cerrado bajo conclusión lógica, es decir, es una teoría.

Dar 1 pt. por probar que es satisfacible y 2 pts. por probar que es cerrada bajo conclusión lógica.