PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación 1'2023

Guía de Ejercicios Propuestos
Repaso para el Examen

Lógica proposicional

1. El conectivo lógico `NOR` es definido de la siguiente forma:

p	q	p `NOR` q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

   Demuestre que {`NOR`} es funcionalmente completo.

2. Los conectivos unarios $\perp$ y $\top$ se definen según:

p	$\perp p$
0	0
1	0

p	$\perp p$
0	1
1	1

   ¿Es $\{\wedge, \perp, \top\}$ funcionalmente completo?

3. Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

   > "Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

   Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

4. Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

   puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C.

5. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\varphi, \psi, \theta \in L(P)$, demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y solo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.

6. Dado $\Sigma \subseteq L(P)$ y $\alpha, \beta \in L(P)$ tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si y solo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$?

7. Proponga un algoritmo eficiente que verifique si una fórmula dada en DNF es satisfacible. Argumente por qué es eficiente.

8. Usando resolución proposicional, demuestre las siguientes afirmaciones

   a) $\{p\} \models (p \vee q)$

   b) $\{(p \wedge q) \rightarrow r\} \models (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

   c) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es tautología

Computabilidad y complejidad

En clases demostramos que los lenguajes H (Halting) y D (Diagonal) son indecidibles. Además, puede asumir demostrado que los siguientes lenguajes son indecidibles

- $A = \{(\mathcal{M}, w) \mid \mathcal{M}$ es una TM determinista tal que $\mathcal{M}$ acepta $w\}$ (tarea 3)
- $L_\varnothing = \{(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M}$ es una TM determinista tal que $L(\mathcal{M}) = \varnothing\}$
- $L_\epsilon = \{(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M}$ es una TM determinista tal que acepta la palabra vacía $\epsilon\}$
- $L_{\text{eq}} = \{(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \mid \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son TM deterministas tales que $L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$ (tarea 3)

1. Demuestre que los siguientes lenguajes son indecidibles

   a) $L_1 = \{(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M}$ es una TM determinista tal que $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}_1)\}$, donde $\mathcal{M}_1$ es una máquina fija y conocida.

   b) $L_2 = \{(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \mid \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son TM deterministas tales que $L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2) \neq \varnothing\}$

2. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones

   a) Si L_1 es decidible y $L_2 \subseteq L_1$, entonces L_2 es decidible

   b) Si L_1 es indecidible y $L_2 \subseteq L_1$, entonces L_2 es indecidible

3. Dado un conjunto de variables proposicionales $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, se define el orden total $<$ en P según $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Una valuación σ en P se puede representar como un string binario $a_1 a_2 \ldots a_n$ de largo n, donde $a_i = \sigma(p_i)$. Dada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, diremos que una valuación es maximal si es modelo de φ y al cambiar el valor de verdad de cualquier variable de 0 a 1, entonces deja de ser modelo para φ.

   Por ejemplo, para $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, la fórmula $\varphi = (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_1)$ tiene dos valuaciones maximales distintas: 101 y 011. Dado que son strings, podemos compararlas y decir que entre ellas, 101 es la valuación maximal lexicográficamente mayor.

   Demuestre que el siguiente lenguaje está en PTIME, para P fijo con n variables

$$L = \{(\varphi, \sigma) \mid \varphi \text{ fórmula en 2-CNF y } \sigma \text{ valuación maximal lexicográficamente mayor de } \varphi\}$$

   Observación: recuerde que el problema de decisión 2-CNF-SAT es un problema en PTIME.

Puede asumir demostrado que los siguientes problemas son NP-completos

- SAT $= \{\varphi \mid \varphi$ es fórmula proposicional satisfacible$\}$
- 3-COL $= \{G \mid G$ es un grafo no dirigido 3-coloreable$\}$
- CLIQUE $= \{(G, k) \mid G$ es no dirigido y contiene un clique de tamaño $k\}$

4. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo

$$\text{CLIQUE}^{\geq} = \{(G, k) \mid G \text{ es no dirigido y contiene un clique de tamaño a lo menos } k\}$$

5. ¿Es NP-completo el siguiente problema?

$$\text{CLIQUE}^{\leq} = \{(G, k) \mid G \text{ es no dirigido y contiene un clique de tamaño a lo más } k\}$$

6. Demuestre que el siguiente problema es NP-completo

$$\text{4-COL} = \{G \mid G \text{ es un grafo no dirigido 4-coloreable}\}$$

7. Se puede demostrar que lo anterior es cierto para el problema k-COL para todo $k \geq 3$. Se define el número cromático de un grafo $\chi(G)$ como el menor número de colores necesarios para k-colorear G. Se define el problema

$$\text{CROM} = \{(G, k) \mid \chi(G) = k\}$$

   a) Demuestre que CROM es NP-hard.
   b) ¿Está CROM en NP?

8. ¿Es NP-completo el siguiente problema?

$$\text{SUB-ISO} = \{(G_1, G_2) \mid \text{existe subgrafo } G_1' \subseteq G_1 \text{ tal que } G_1' \cong G_2\}$$

Lógica de primer orden y teorías

En clases demostramos que los lenguajes SAT y VAL en lógica de primer orden son indecidibles.

1. Demuestre que el siguiente problema es indecidible

$$\text{CONS}= \{(\Sigma, \varphi) \mid \Sigma \text{ conjunto de oraciones en LPO y } \varphi \text{ oración tal que } \Sigma \models \varphi\}$$

2. Considere las estructuras $\langle \mathbb{N}, +^{\mathbb{N}} \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}} \rangle$. ¿Son isomorfas?

3. Sea $\mathcal{L} = \{R\}$ con R símbolo de relación binaria. Considere las oraciones

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_1 & = & \forall x \neg R(x,x) \\
\varphi_2 & = & \forall x \forall y \forall z \neg R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow L(x,z) \\
\varphi_3 & = & \forall x \forall y (x = y \vee R(x,y) \vee R(y,x)) \\
\varphi_4 & = & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3 \wedge \forall y\, [y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3])
\end{array}$$

   a) ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$-estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ son isomorfas?

   b) ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$-estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ son isomorfas?

4. Demuestre que el conjunto de los naturales no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$

5. Demuestre que la siguiente propiedad es elementalmente definible

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene exactamente } k \text{ elementos}\}$$

6. Demuestre que si una teoría en LPO tiene modelos finitos con dominios arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo con dominio infinito.

7. Demuestre que si las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son equivalentes, y $\mathfrak{A}$ tiene dominio finito, entonces son isomorfas.