PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

# TAREA 4

| | |
|---|---|
| Publicación: | Martes 9 de mayo. |
| Entrega: | **Lunes 22 de mayo hasta las 23:59 horas**. |

## Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

## Objetivos

- Aplicar el concepto de NP-completitud.
- Modelar propiedades con fórmulas en lógica de primer orden.
- Construir $\mathcal{L}$-estructuras con restricciones.

## Pregunta 1: Problemas NP-completos

(a) Demuestre que si existe un lenguaje finito no vacío que es NP-completo, entonces P=NP.

(b) ¿Es NP-completo el siguiente lenguaje? Demuestre su respuesta.

$$\text{NEQ} = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ y } \varphi_2 \text{ son fórmulas proposicionales no equivalentes}\}$$

**Solución P1.**

Aquí va mi solución

## Pregunta 2: Fórmulas en lógica de primer orden

En un grafo dirigido $G = (N, A)$, un camino dirigido de $n$ nodos es una secuencia $u_0, \ldots, u_n$ tal que

- $u_i \in N$, para todo $0 \leq i \leq n$
- $(u_i, u_{i+1}) \in A$, para todo $0 \leq i < n$

Un ciclo simple dirigido de $n$ nodos es un camino dirigido tal que $u_0 = u_n$ y todos los demás nodos deben ser distintos.

Sea el vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$ con símbolo de relación binaria $E$. Construya $\mathcal{L}$-oraciones en lógica de primer orden que representen las siguientes propiedades.

(a) El grafo es un clique. Utilice para esto la noción de clique dirigido en que deben existir todas las aristas dirigidas posibles.

(b) El grafo contiene un ciclo simple dirigido de 3 nodos.

Observe que cada oración deben ser satisfecha por una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ si, y solo si, el grafo representado por $\mathfrak{A}$ cumple la propiedad modelada con dicha oración.

**Solución P2.**

Aquí va mi solución

## Pregunta 3: Estructuras en lógica de primer orden

Sea $\mathcal{L} = \{c, f\}$ un vocabulario con símbolo de constante $c$ y símbolo de función unaria $f$. Se definen las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y \ (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \\
\varphi_2 &= \forall x \ (f(x) \neq c) \\
\varphi_3 &= \forall x \ (x \neq c \rightarrow \exists y \ f(y) = x)
\end{aligned}$$

Construya $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{A}_3$ tales que

(a) $\mathfrak{A}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

(b) $\mathfrak{A}_2 \models (\neg\varphi_1) \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

(c) $\mathfrak{A}_3 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge (\neg\varphi_3)$

y justifique por qué satisfacen las fórmulas especificadas. No necesita entregar una demostración formal de que cada estructura satisface cada fórmula.

**Solución P3.**

Aquí va mi solución