



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

## TAREA 5

Publicación: Martes 23 de mayo.

Entrega: **Lunes 5 de junio hasta las 23:59 horas.**

### Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en  $\text{\LaTeX}$ . No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

### Objetivos

- Demostrar resultados de complejidad en lógica de primer orden.
- Utilizar isomorfismos entre estructuras para demostrar propiedades.
- Estudiar definibilidad de propiedades.

### Pregunta 1: Complejidad en LPO

Sea  $\mathcal{L}$  un vocabulario arbitrario. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible

$$\text{VAL}_{\geq 2} = \{ \varphi : \varphi \text{ es } \mathcal{L}\text{-oración tal que para toda } \mathcal{L}\text{-estructura } \mathfrak{A} \text{ con más de un elemento en el dominio, } \mathfrak{A} \models \varphi \}$$

### Pregunta 2: Isomorfismos

En ambos incisos, si utiliza un isomorfismo no olvide demostrar que efectivamente es un isomorfismo (biyección y propiedades de un isomorfismo entre estructuras).

- Sea  $\mathcal{L} = \{+\}$  vocabulario con  $+$  símbolo de función binaria. Sean  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$  y  $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathfrak{B}} \rangle$   $\mathcal{L}$ -estructuras tales que el símbolo  $+$  se interpreta como la suma usual. Decida si estas estructuras son isomorfas y demuestre su respuesta.
- Sea  $\mathcal{L} = \{0\}$  con  $0$  símbolo de constante y considere la  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}} \rangle$ , donde la interpretación del símbolo  $0$  es el cero de los naturales. Demuestre, usando el teorema de isomorfismo, que en  $\mathfrak{A}$  no es definible el siguiente conjunto

$$S = \{ (a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b \text{ es sucesor de } a \}$$

Es decir, en esta pregunta demostrará que la relación *sucesor* no es definible en esta estructura.

### Pregunta 3: Definibilidad de propiedades

- (a) Sea  $\mathcal{L}$  un vocabulario arbitrario. Demuestre que si una propiedad  $\mathcal{P}$  es elementalmente definible, entonces la propiedad

$$\overline{\mathcal{P}} = S[\mathcal{L}] \setminus \mathcal{P}$$

también es elementalmente definible.

- (b) Considere el vocabulario  $\mathcal{L} = \{a, b, E\}$  con símbolos de constantes  $a$  y  $b$ , y símbolo de relación  $E$  binaria. Demuestre usando el teorema de compacidad que la siguiente propiedad no es elementalmente definible

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in S[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un camino de largo finito entre } a^{\mathfrak{A}} \text{ y } b^{\mathfrak{A}}\}$$