Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 5

Publicación:	Martes 23 de mayo.
Entrega:	**Lunes 5 de junio hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Cada pregunta tiene 6 puntos (+1 base) y la nota de la tarea es el promedio de las preguntas.
- La solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

- Demostrar resultados de complejidad en lógica de primer orden.
- Utilizar isomorfismos entre estructuras para demostrar propiedades.
- Estudiar definibilidad de propiedades.

Pregunta 1: Complejidad en LPO

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario arbitrario. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible

$$\begin{aligned} \text{VAL}_{\geq 2} = \quad \{\varphi : \quad & \varphi \text{ es } \mathcal{L}\text{-oración tal que para toda } \mathcal{L}\text{-estructura } \mathfrak{A} \\ & \text{con más de un elemento en el dominio, } \mathfrak{A} \models \varphi \ \} \end{aligned}$$

Solución P1.

En primer lugar, recordemos la definición de VAL vista en clases.

$$\text{VAL} = \{\varphi : \varphi \text{ es } \mathcal{L}\text{-oración tal que para toda } \mathcal{L}\text{-estructura } \mathfrak{A} \text{ se tiene } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Por lo tanto, si definimos $\text{VAL}_{<2} = \{\varphi : \varphi$ es $\mathcal{L}$-oración tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con un solo elemento en el dominio se tiene $\mathfrak{A} \models \varphi\}$ se tiene que

$$\text{VAL} = \text{VAL}_{\geq 2} \cup \text{VAL}_{<2}$$

Ahora notemos que $\text{VAL}_{<2}$ es decidible ya que podemos construir una máquina $\mathcal{M}$ tal que dado un input w

1. Revisa si es una $\mathcal{L}$-oración φ.
2. Reemplaza las variables cuantificadas y funciones por un elemento x.

3. Revisa si para toda interpretación de las relaciones se cumple la oración, si es así se acepta w y si no, se rechaza.

Notemos que esto es un proceso que siempre termina, ya que existen finitas $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ con dominio $\{x\}$. Además, $L(\mathcal{M}) = \text{VAL}_{<2}$, ya que claramente la máquina acepta un input w si y solo si w es una $\mathcal{L}$-oración y toda $\mathcal{L}$-estructura con dominio $\{x\}$ satisface la oración. Esto es suficiente, ya que podemos construir un isomorfismo de cualquier $\mathcal{L}$-estructura de un elemento a una con dominio $\{x\}$, entonces si tenemos que una oración se satisface en toda $\mathcal{L}$ estructura con dominio $\{x\}$, se debe satisfacer en toda $\mathcal{L}$-estructura con un solo elemento en el dominio.

Ahora, supongamos que $\text{VAL}_{\geq 2}$ es decidible, entonces VAL es la unión de dos lenguajes decidibles y por lo visto en clases sabemos que esto significaría que VAL es decidible, por lo que llegamos a una contradicción.

Probablemente muchas respuestas utilicen una reducción, en ese caso dar 3 pts. por construir la reducción y 3 pts. por la justificación.
En caso de hacer el ejercicio como la pauta, dar 3 pts. por probar que el lenguaje $\text{VAL}_{<2}$ es decidible y 3 pts. por concluir correctamente lo pedido. Bajar 1 punto si no menciona teorema de isomorfismo.

Pregunta 2: Isomorfismos

En ambos incisos, si utiliza un isomorfismo no olvide demostrar que efectivamente es un isomorfismo (biyección y propiedades de un isomorfismo entre estructuras).

(a) Sea $\mathcal{L} = \{+\}$ vocabulario con $+$ símbolo de función binaria. Sean $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathfrak{B}} \rangle$ $\mathcal{L}$-estructuras tales que el símbolo $+$ se interpreta como la suma usual. Decida si estas estructuras son isomorfas y demuestre su respuesta.

(b) Sea $\mathcal{L} = \{0\}$ con 0 símbolo de constante y considere la $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde la interpretación del símbolo 0 es el cero de los naturales. Demuestre, usando el teorema de isomorfismo, que en $\mathfrak{A}$ no es definible el siguiente conjunto

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b \text{ es sucesor de } a\}$$

Es decir, en esta pregunta demostrará que la relación *sucesor* no es definible en esta estructura.

Solución P2.

Parte (a)

Estas estructuras no son isomorfas. Para demostrar eso supongamos que existe un isomorfismo $h : \langle \mathbb{Z}, +^{\mathfrak{B}} \rangle \to \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$ por teorema de isomorfismo, sabemos que si una oración se satisface en $\mathfrak{B}$ entonces se debe satisfacer en $\mathfrak{A}$ para esto primero definimos la oración

$$\varphi_0(x) = \forall y.\ x + y = x$$

Claramente tenemos que esta oración se cumple con $x = 0$ en $\mathfrak{B}$ y por teorema de isomorfismo se debe cumplir con $x = h(0)$ es $\mathfrak{A}$, por lo tanto tenemos que $h(0) = 0$. Además sabemos que en $\mathbb{Z}$

$$1 + (-1) = 0$$

entonces tenemos que

$$h(1) + h(-1) = h(0) = 0$$

Sin embargo, sabemos que en los naturales no existe inverso respecto a la suma y tendríamos que $h(1) = h(-1) = 0$, por lo que h no sería inyectiva y llegamos a una contradicción.

> Hay muchas formas de llegar a la contradicción necesitada, por lo tanto se otorgará un punto por la estructura de la demostración (usar teorema de isomorfismo para llegar a una contradicción) y 2 pts. por la construcción de la contradicción.

Parte (b)

En primer lugar tomemos la función $h : \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}} \rangle \to \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{A}} \rangle$ tal que $h(1) = 2$, $h(2) = 1$ y $h(n) = n$ para los otros naturales. Notemos que esta función es biyectiva y $h(0) = 0$, por lo tanto es un isomorfismo. Sin embargo, tenemos que $h((1, 2)) = (2, 1)$, por lo tanto tenemos que $S \neq h(S)$ y por teorema de isomorfismo tenemos que el conjunto S no es definible.

> Es esta pregunta se dará un punto por cada una de las siguientes cosas: construir el isomorfismo, argumentar por qué es isomorfismo y concluir usando el teorema.

Pregunta 3: Definibilidad de propiedades

(a) Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario arbitrario. Demuestre que si una propiedad $\mathcal{P}$ es elementalmente definible, entonces la propiedad

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathrm{S}[\mathcal{L}] \setminus \mathcal{P}$$

también es elementalmente definible.

(b) Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{a, b, E\}$ con símbolos de constantes a y b, y símbolo de relación E binaria. Demuestre usando el teorema de compacidad que la siguiente propiedad no es elementalmente definible

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathrm{S}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ tiene un camino de largo finito entre } a^{\mathfrak{A}} \text{ y } b^{\mathfrak{A}}\}$$

Solución P3.

Parte (a)

Supongamos que tenemos una propiedad elementalmente definible $\mathcal{P}$, entonces existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que se satisface en una estructura si y solo si la estructura está en $\mathcal{P}$. Luego notemos que podemos definir $\psi = \neg\varphi$, esta oración será satisfecha por las $\mathcal{L}$-estructuras que no satisfacen φ, por lo tanto se satisface en $\mathcal{L}$-estructuras en $\overline{\mathcal{P}}$. Es decir, $\overline{\mathcal{P}}$ es elementalmente definible.

Un punto por costruir la negación de la oración que define $\mathcal{P}$ y 2 pts. por argumentar correctamente lo pedido.

Parte (b)

En primer lugar, definimos las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones

$$\varphi_0 = \neg E(a, b)$$

$$\varphi_n = \forall x_1 \ldots \forall x_n. \left(\bigwedge_{\substack{i,j \in [n] \\ i \neq j}} \neg(x_i = x_j) \right) \wedge \left(\neg E(a, x_1) \vee \neg E(x_n, b) \vee \bigvee_{i \in [n-1]} \neg E(x_i, x_{i+1}) \right)$$

Notemos que si una estructura cumple alguna φ_i entonces la estructura no tiene un camino de largo $i + 1$. Por otro lado, definimos las $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}_n = \langle [n+2], a^{\mathfrak{A}_n}, b^{\mathfrak{A}_n}, E^{\mathfrak{A}_n} \rangle$ con $a^{\mathfrak{A}_n} = 1$, $b^{\mathfrak{A}_n} = n + 2$ y $E^{\mathfrak{A}_n} = \{(i, i+1) : i \in [n-1]\}$.

Ahora, supongamos que existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que define la propiedad $\mathcal{P}$, entonces podemos tomar el conjunto

$$\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Este conjunto es finitamente satisfacible, ya que en cualquier subconjunto finito vamos a tener un n máximo, luego la estructura $\mathfrak{A}_{n+1}$ lo satisface contenga o no a φ, por compacidad concluimos que Σ es satisfacible. Sin embargo, notemos que si esto sucede, tenemos una estructura que tiene un camino finito entre a y b, pero no tiene un camino de ningún largo entre a y b, por lo que llegamos a una contradicción.

Otorgar un punto por cada una de las siguientes cosas: definir las oraciones, explicar correctamente por qué son finitamente satisfacibles y llegar a la contradicción usando compacidad.