PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
PROFESOR: SEBASTIÁN BUGEDO
AYUDANTE: SOFÍA ERRÁZURIZ

Lógica para ciencias de la computación - IIC2213
Ayudantía 11
9 de junio, 2023

Ejercicio 1. Demuestre que el único automorfismo en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ es el automorfismo trivial. ¿Qué sucede en $\mathbb{Z}$? ¿y en $\mathbb{R}$?

Solución. Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un automorfismo en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y sea $a := h(1) \in \mathbb{N}$, sabemos que no es 0 porque al ser $\{0\}$ una propiedad definible, se debe cumplir que $h(0) = 0$. Por otro lado, notemos que $h(x) = h(x)h(1) = h(x)a \geq a$, es decir la imagen de 1 es minimal en $\mathbb{N}_{>0}$, por lo tanto, debe ser 1. Podemos proceder inductivamente de la misma manera para probar que $h(2) = 2$, $h(3) = 3$, etc. Por lo tanto, h es el isomorfismo trivial.

Sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un automorfismo en $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, entonces por propiedades de isomorfismo, tenemos $a < b \Rightarrow h(a) < h(b)$. Con esto concluimos igual que antes que $h(0)$ es minimal en $\mathbb{N}$, entonces es 0, $h(1)$ es minimal en $\mathbb{N}_{>0}$ entonces es 1, etc. Es decir, este automorfismo es trivial.

Finalmente notemos que existen automorfismos no triviales para $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ dados respectivamente por multiplicar por -1, sumar una constante, multiplicar por alguna constante no nula y sumar una constante. $\square$

Ejercicio 2. Demuestra que existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{S}$ que es lógicamente equivalente a $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ y tal que el dominio de $\mathfrak{S}$ contiene a los números naturales, pero que además $\mathfrak{S}$ tiene un elemento mayor que cualquier número natural.
Concluya que la compacidad (topológica) no es definible de forma generalizada.

Solución. En primer lugar, sea Σ el conjunto de $\mathcal{L}$ oraciones φ tales que $\mathfrak{N} \models \varphi$, por otro lado, definamos la constante ∞ y $\{\Phi_n\}_n$ el conjunto de oraciones tales que Φ_n es la oración $\infty > n$ (para simplificar la notación escribiré n en lugar de $s(s(\dots s(0) \dots))$ n veces). Ahora, sea $S \subset \Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ un subconjunto finito, notemos que $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \subset \Sigma$ y $S_2 \subset \{\Phi_n\}_n$. Ya sabemos que $\mathfrak{N}$ satisface todas las oraciones de S_1 y además, como S_2 es finito, podemos definir $\infty = \text{máx}\{n : \Phi_n \in S_2\} + 1$ y así creamos un modelo que satisface S. Por lo tanto, $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ es finitamente satisfacible.

Ahora sea $\mathfrak{S}$ el modelo que satisface $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$. Notemos que $\mathfrak{S}$ debe tener un primer elemento y todos sus sucesores, entonces si definimos el primer elemento como 1, tenemos que $\mathfrak{S}$ contiene los naturales. Además, tenemos que son lógicamente equivalentes ya que $\mathfrak{N}$ satisface todas las oraciones de $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$ por separado (el problema es cuando se satisfacen todas al mismo tiempo) y como $\mathfrak{S}$ satisface $\Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$, tenemos que $\varphi \models \mathfrak{S} \Rightarrow \varphi \models \mathfrak{N}$. Además, tenemos que $\Sigma \subset \Sigma \cup \{\Phi_n\}_n$, por lo tanto $\varphi \models \mathfrak{N} \Rightarrow \varphi \models \mathfrak{S}$. Es decir, ambas estructuras son lógicamente equivalentes. $\square$

Ejercicio 3. Demuestre que si una teoría tiene modelos finitos con dominios arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo con dominio infinito.

Solución. En primer lugar, recordemos que por lo visto en clases, ya sabemos que existen oraciones φ_n tales que destilan aquellas estructuras con más de n elementos en el dominio. Por otro lado, sea Σ la teoría a la que hace referencia el enunciado, entonces definimos $\Sigma' := \Sigma \cup \{\varphi_n\}$. Notemos que dado un subconjunto finito de Σ', este será satisfacible, ya que existen estructuras arbitrariamente grandes que satisfacen Σ. Por lo tanto, por compacidad, sabemos que Σ' es satisfacible, de lo que podemos concluir que existe un modelo con dominio infinito que satisface Σ' y en consecuencia debe ser modelo de la teoría Σ. $\square$

Ejercicio 4. Como bien ya saben, esta primavera vendrá la aclamada artista musical Taylor Swift a Sudamérica. Supongamos que existe una estructura $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, R_2 \rangle$ tal que R_1 contiene las tuplas de la forma (*fecha, ciudad, país*) de acuerdo al siguiente cronograma

y $R_2 = \{$(*Vale, 10/11, Speak Now*), (*Rodrigo, 10/11, Lover*), (*Fran, 9/11, Folklore*), (*Mario, 25/08, Reputation*)$\}$ es decir, son las tuplas de la forma (*persona, concierto al que asiste, álbum favorito*). Construya consultas conjuntivas tales que:

1. Entregue las personas que asistirán a algún concierto.
2. Entregue las tripletas (*persona, fecha, país*) que indique cuándo cada persona estará en los países de los conciertos.
3. Es una consulta conjuntiva completa.

Solución.

1. $\varphi(x) = \exists z_1, z_2.\, R_2(x, z_1, z_2)$
2. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \exists z_1, z_2, z_3\, R_1(x_2, x_3, z_1) \wedge R_2(x_1, z_2, z_3)$

3. $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = R_1(x_1, x_2, x_5) \wedge R_2(x_2, x_3, x_4)$

$\square$

Ejercicio 5. Sea $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ una lista de estructuras sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, y $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-oraciones φ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Demuestre que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ es una teoría. De un contraejemplo para el conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones φ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Solución. En primer lugar notemos que todas las estructuras $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ son modelos para la teoría $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$, por lo tanto solo queda ver que $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ es cerrado bajo conclusión lógica. Para esto notemos que si tenemos un subconjunto de $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$ tal que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \models \varphi$, entonces tenemos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \subset \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_i)$ para todo i, por lo tanto, $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_i)$ para todo i, entonces $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k)$. En conclusión este conjunto efectivamente es una teoría. $\square$