PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para ciencia de la computación — 1' 2023

TAREA 1

Publicación:	Martes 14 de marzo.
Entrega:	**Lunes 27 de marzo hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si está en blanco).
- Todas las preguntas tienen nota de 1 a 7 y la nota de la tarea es el promedio de todas las preguntas.
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas de otra forma.
- La tarea es individual, pudiendo discutirla con sus pares. Toda referencia externa debe citarse.

Objetivos

Esta tarea busca evaluar si el estudiante es capaz de

- Definir inductivamente propiedades/objetos en $\mathcal{L}(P)$
- Demostrar usando inducción en $\mathcal{L}(P)$
- Aplicar conceptos de sintaxis y semántica proposicional

Pregunta 1: Sintaxis e inducción en $\mathcal{L}(P)$

Advertencia. Para evitar confusiones, en esta pregunta considere el uso de paréntesis visto en la clase 0, es decir, no elimine paréntesis innecesarios.

En clases definimos de informalmente el árbol sintáctico de una fórmula proposicional φ como aquel tal que

- su raíz es φ
- cada nodo tiene como hijos a sus subfórmulas inmediatas
- cada hoja es una variable proposicional

con la posibilidad de que existan nodos repetidos. Se define el número de subfórmulas de φ como el número de nodos en su árbol sintáctico. Por ejemplo, para $((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))$, el número de subfórmulas es 8, dado que su árbol sintáctico es

$$\begin{tikzcd}
 & ((\neg(\neg p)) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge q)) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & & \\
(\neg(\neg p)) \arrow[d, no head] & & ((\neg p) \wedge q) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(\neg p) \arrow[d, no head] & (\neg p) \arrow[d, no head] & & q \\
p & p & &
\end{tikzcd}$$

(a) Defina de manera inductiva la función $\text{nsf}(\varphi)$ que retorna la cantidad de subfórmulas de φ. Por ejemplo, $\text{nsf}(((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))) = 8$.

(b) Defina $\text{la}(\alpha)$ como el largo de la fórmula proposicional α, que cuenta cada símbolo y variable mencionado en α. Por ejemplo, $\text{la}(((p \vee q) \rightarrow (p \wedge (\neg r)))) = 16$.

(c) Demuestre que para toda fórmula φ se tiene que $\text{nsf}(\varphi) \leq \text{la}(\varphi)$.

Solución

Para las tres partes la solución se hará por inducción sobre $\mathcal{L}(P)$.

Pregunta (a) - 2 pts.

Dado P, se define la función $\text{nsf}(\cdot) : \mathcal{L}(P) \rightarrow \mathbb{N}$ para cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ según

1. Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces $\text{nsf}(\varphi) = 1$, ya que la única subfórmula de p es p

2. Si $\varphi = (\neg\psi)$ con $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $\text{nsf}(\varphi) = \text{nsf}(\psi) + 1$, ya que las subfórmulas de φ serán $(\neg\psi)$ y todas las subfórmulas de ψ.

3. Si $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\text{nsf}(\varphi) = \text{nsf}(\psi_1) + \text{nsf}(\psi_2) + 1$ ya que las subfórmulas de φ serán $(\psi_1 \circ \psi_2)$, las subfórmulas de ψ_1 y las subfórmulas de ψ_2

Pregunta (b) - 2 pts.

Dado P, se define la función $\text{la}(\cdot) : \mathcal{L}(P) \rightarrow \mathbb{N}$ para cada $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ según

1. Si $\varphi = p$ con $p \in P$, entonces $\text{la}(\varphi) = 1$, ya que el único símbolo de φ es p.

2. Si $\varphi = (\neg\psi)$ con $\psi \in \mathcal{L}(P)$, entonces $\text{la}(\varphi) = \text{la}(\psi) + 1$, ya que , ya que al negar ψ se agregan ambos paréntesis y el símbolo $\neg$.

3. Si $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\text{la}(\varphi) = \text{la}(\psi_1) + \text{la}(\psi_2) + 3$ ya que a los símbolos de ψ_1 y ψ_2 se le agregarán los paréntesis y $\circ$.

Pregunta (c) - 2 pts.

Caso base: Sea $\varphi = p$ para algún $p \in P$. Por definición de las funciones dadas, $\text{la}(\varphi) = 1 \geq 1 = \text{nsf}(\varphi)$.

Paso inductivo: Supongamos que para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ tenemos que $\text{nsf}(\psi_1) \leq \text{la}(\psi_1)$ y $\text{nsf}(\psi_2) \leq \text{la}(\psi_2)$.

1. Sea $\varphi = (\neg\psi_1)$ entonces $\text{nsf}(\varphi) = \text{nsf}(\psi_1) + 1 \leq \text{la}(\psi_1) + 1 \leq \text{la}(\psi_1) + 3 = \text{la}(\varphi)$.

2. Sea $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$ con $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$ y $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $\text{nsf}(\varphi) = \text{nsf}(\psi_1) + \text{nsf}(\psi_2) + 1 \leq \text{la}(\psi_1) + \text{la}(\psi_2) + 1 \leq \text{la}(\psi_1) + \text{la}(\psi_2) + 3 = \text{la}(\varphi)$.

Por lo tanto, se tiene que $\text{nsf}(\varphi) \leq \text{la}(\varphi)$.

Lo más importante en este problema es aplicar bien la inducción. En cada ítem dar un punto por tener la estructura correcta y el segundo punto por hacer bien los cálculos.

Pregunta 2: Semántica en $\mathcal{L}(P)$ y equivalencia lógica

Una *cláusula de Horn* es una cláusula que tiene a lo más un literal positivo. Por ejemplo $\neg p$, $(\neg p \vee \neg q)$ y $(p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s)$ son todas cláusulas de Horn, mientras que $(p \vee q \vee \neg r)$ no es una cláusula de Horn porque tiene dos literales positivos. Decimos que una fórmula es una *fórmula de Horn* si es una conjunción de cláusulas de Horn.

Dadas dos valuaciones $\sigma_1, \sigma_2 : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$, se define la valuación $\sigma_1 \wedge \sigma_2 : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ como aquella que, para cualquier fórmula atómica $p \in P$, asigna el valor

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2(p) = \min\{\sigma_1(p), \sigma_2(p)\}$$

Por ejemplo, si consideramos $P = \{p, q\}$, con valuaciones $\sigma_1(p) = \sigma_1(q) = 1$, $\sigma_2(p) = 1$ y $\sigma_2(q) = 0$, se tiene $\sigma_1 \wedge \sigma_2(p) = 1$ y $\sigma_1 \wedge \sigma_2(q) = 0$, con lo cual $\sigma_1 \wedge \sigma_2(p \to q) = 0$.

(a) Demuestre que si φ es una cláusula de Horn, entonces

$$\text{si } \sigma_1(\varphi) = 1 \text{ y } \sigma_2(\varphi) = 1, \text{ entonces } \sigma_1 \wedge \sigma_2(\varphi) = 1$$

(b) Demuestre que si una fórmula ψ es equivalente a una fórmula de Horn, entonces

$$\text{si } \sigma_1(\psi) = 1 \text{ y } \sigma_2(\psi) = 1, \text{ entonces } \sigma_1 \wedge \sigma_2(\psi) = 1$$

Hint: defina las fórmulas de Horn inductivamente. Además, puede responder este inciso asumiendo demostrado el resultado de (a).

(c) Demuestre que existe una fórmula que no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

Hint: puede responder este inciso asumiendo demostrado el resultado de (b).

Solución

Pregunta (a) - 2 pts.

Haremos inducción en la cantidad de literales de la cláusula de Horn φ. Para esto tendremos que considerar dos casos, cuando φ contiene un literal positivo y cuando no lo contiene, estos dos casos se analizarán en el caso base y luego agregaremos solo literales negativos en el paso inductivo, ya que no se pueden tener dos literales positivos.

Caso base: Sea $\varphi = p$, si $\sigma_1(p) = \sigma_2(p) = 1$, por definición tenemos que $\sigma_1 \wedge \sigma_2(\varphi) = \min\{1, 1\} = 1$.
Por otro lado, si $\varphi = \neg p$, notemos que para que una valuación σ cumpla que $\sigma(\varphi) = 1$, se debe tener que $\sigma(p) = 0$, por lo tanto, si tenemos $\sigma_1(\varphi) = \sigma_2(\varphi) = 1$, entonces $\sigma_1 \wedge \sigma_2(p) = 0$ y $\sigma_1 \wedge \sigma_2(\varphi) = 1$.

Paso inductivo: Supongamos que φ es una fórmula de Horn que cumple lo pedido (H.I.). Definimos $\psi = \varphi \vee \neg p$ con $p \in P$. Sea $\sigma_1(\psi) = \sigma_2(\psi) = 1$, notemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_1 \wedge \sigma_2(\psi) &= \sigma_1 \wedge \sigma_2(\varphi \vee \neg p) \\
&= \max\{\sigma_1 \wedge \sigma_2(\varphi), \sigma_1 \wedge \sigma_2(\neg p) \quad \text{Aplicamos H.I.} \\
&= \max\{1, \sigma_1 \wedge \sigma_2(\neg p)\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Obteniendo así lo pedido.

Si la solución es por indicción, dar 1 pto. por la estructura y el caso base y el otro punto por completar bien el paso inductivo. Si la solución no es por inducción, probablemente hay una división en casos, dividir el puntaje total en la cantidad de casos para la corrección.

Pregunta (b) - 2 pts.

Recordemos que dos fórmulas son lógicamente equivalentes si dan el mismo valor de verdad para toda valuación, por lo tanto, si ψ es equivalente a una cláusula de Horn φ, tenemos la siguiente cadena de implicancias

$$\begin{aligned} \sigma_1(\psi) = \sigma_2(\psi) = 1 &\Rightarrow \sigma_1(\varphi) = \sigma_2(\varphi) = 1 && \text{por equivalencia lógica} \\ &\Rightarrow \sigma_1 \vee \sigma_2(\varphi) = 1 && \text{por parte (a)} \\ &\Rightarrow \sigma_1 \vee \sigma_2(\psi) = 1 && \text{por equivalencia lógica} \end{aligned}$$

Importante que mencionen la definición de equivalencia lógica y la parte (a).

Pregunta (c) - 2 pts.

Consideremos la fórmula $\varphi = p \vee q$ en $\mathcal{L}(P)$ con $P = \{p, q\}$ y las valuaciones σ_1 y σ_2 tales que $\sigma_1(p) = 1$, $\sigma_1(q) = 0$, $\sigma_2(p) = 0$ y $\sigma_2(q) = 1$. Entonces notemos que $\sigma_1(\varphi) = \sigma_2(\varphi) = 1$, sin embargo la valuación $\sigma_1 \vee \sigma_2$ cumple que $\sigma_1 \vee \sigma_2(p) = \sigma_1 \vee \sigma_2(q) = 0$, por lo tanto $\sigma_1 \vee \sigma_2(\varphi) = 0$. Como φ no cumple lo demostrado en (b), no puede ser equivalente a una fórmula de Horn.

Se da 0,5 pts. por el ejemplo y 1,5 pts. por argumentar por qué no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

Pregunta 3: Consecuencia lógica en $\mathcal{L}(P)$

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{L}(P)$ un conjunto de cláusulas (i.e. disyunción de literales). Decimos que Σ es *redundante* si existe $\varphi \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Un conjunto Σ' se dice un *subconjunto no redundante equivalente* de Σ si

1. $\Sigma' \subseteq \Sigma$,
2. $\Sigma' \equiv \Sigma$, i.e. para toda valuación σ, $\sigma(\Sigma') = \sigma(\Sigma)$,
3. Σ' no es redundante.

(a) Muestre que el conjunto $\Sigma = \{p \wedge q, p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}$ tiene dos subconjuntos no redundantes equivalentes. Justifique.

(b) Una cláusula $\varphi \in \Sigma$ es *necesaria* en Σ si pertenece a todos los subconjuntos no redundantes equivalentes de Σ. Demuestre que si una cláusula φ es necesaria en Σ, entonces $\Sigma \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi$.

Solución

Pregunta (a) - 3 pts.

Definimos $\Sigma' = \{p \wedge q, \neg p \wedge \neg q\}$ y $\Sigma'' = \{p \vee q, \neg p \wedge \neg q\}$. Claramente, ambos conjuntos son subconjuntos de Σ y por lo tanto cumplen la primera condición para ser subconjuntos no redundantes equivalentes de Σ.

Para probar que ambos conjuntos son lógicamente equivalentes a Σ, analicemos la siguiente tabla de verdad

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

De esto podemos concluir que para toda valuación σ, se tiene $\sigma(\Sigma) = \sigma(\Sigma') = \sigma(\Sigma'')$, por lo tanto se cumple la segunda condición.

Finalmente, notemos que si elimináramos una fórmula de Σ' o Σ'' nos quedaría un conjunto de una sola fórmula, pero viendo la tabla de verdad podemos notar que la única relación de consecuencia lógica entre dos fórmulas presente en Σ es $p \wedge q \models p \vee q$, de lo que se concluye que Σ' y Σ'' no son redundantes.

En esta pregunta se dará un punto por justificar cada una de las 3 condiciones.

Pregunta (b) - 3 pts.

En primer lugar, probemos que todo conjunto de fórmulas tiene un subconjunto no redundante equivalente. Sea $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas, definimos Σ_n como el conjunto generado con el siguiente algoritmo,

1. $\Sigma_0 = \Sigma$, $i = 1$
2. $\Sigma_i = \Sigma_{i-1} \setminus \{\varphi_i\}$ si $\Sigma_{i-1} \setminus \{\varphi_i\} \models \varphi_i$ y $\Sigma_i = \Sigma_{i-1}$ si $\Sigma_{i-1} \setminus \{\varphi_i\} \models \varphi_i$.
3. Si $i < n$ se suma uno y se vuelve al paso 2. Si $i = n$ se detiene el proceso

Claramente este conjunto es subconjunto de Σ y no es redundante, además, como Σ_n tiene a todas las fórmulas de Σ como consecuencia lógica, tenemos que $\Sigma_n \equiv \Sigma$. Por lo tanto Σ_n es un subconjunto no redundante equivalente de Σ.

Supongamos que $\Sigma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Luego, llamemos Σ' a un subconjunto no redundante equivalente de $\Sigma \setminus \{\varphi\}$ entonces $\Sigma' \equiv \Sigma \setminus \{\varphi\}$, en particular $\Sigma' \models \varphi$, por lo tanto podemos concluir que Σ' es un subconjunto no redundante equivalente de Σ y al no contener a φ, tenemos que φ no es una cláusula necesaria.

Si la demostración sigue un formato similar al anterior se otorgan 1,5 pts. por demostrar que siempre hay un subconjunto no redundante equivalente y 1,5 pts. por el resto del argumento.