

## Semana 7: Correctitud y completitud de resolución

### Problema a resolver

Sea  $P$  un conjunto de proposiciones, y  $\Sigma$  un conjunto de cláusulas en  $L(P)$ , y recuerda que  $\Sigma \vdash \perp$  indica que existe una demostración por resolución de  $\perp$  desde el conjunto  $\Sigma$ . Entonces vas a demostrar:

**Teorema (correctitud de resolución).** Si  $\Sigma \vdash \perp$  entonces  $\Sigma$  es inconsistente.

**Teorema (completitud de resolución).** Si  $\Sigma$  es inconsistente entonces  $\Sigma \vdash \perp$ .

### Correctitud

Vamos a demostrar un resultado un poco más fuerte (por que simplifica la demostración). Para un conjunto  $\Sigma$  de cláusulas y una cláusula  $C$ , demostraremos que

$$\text{Si } \Sigma \vdash C \text{ entonces } \Sigma \models C.$$

Supongamos entonces que  $\Sigma \vdash C$ , para  $\Sigma$  y  $C$  definidos anteriormente. Tenemos que mostrar que  $\Sigma \models C$ . La demostración es por inducción en el largo de la demostración por resolución de  $C$  desde el conjunto  $\Sigma$ .

*Caso base.* El caso base es cuando la demostración por resolución de  $C$  desde el conjunto  $\Sigma$  tiene largo 1. argumenta por que  $\Sigma \models C$  en ese caso.

*Caso inductivo.* Asume que, si existe una demostración por resolución de una cláusula  $C'$  desde un conjunto  $\Sigma'$  con  $k$  o menos reglas, entonces  $\Sigma' \models C'$ . Ahora supón que existe una demostración por resolución de  $C$  desde  $\Sigma$ , y que usa  $k + 1$  reglas. Demuestra que  $\Sigma \models C$ .

### Completitud

La idea es hacer una inducción por la cantidad de variables en  $P$ . Supongamos entonces que  $\Sigma$  es inconsistente. Tenemos que demostrar que  $\Sigma \vdash \perp$ .

*Caso base.* El caso base es cuando  $P$  tiene cero variables. Entonces  $\Sigma = \{\perp\}$ , en cuyo caso podemos encontrar una demostración por resolución de  $\perp$  desde el conjunto  $\Sigma$  (la demostración que solo tiene un paso:  $\{\perp\}$ , o  $\Sigma = \emptyset$ , en cuyo caso  $\Sigma$  es trivialmente satisfacible y por tanto no corresponde a nuestra hipótesis).

*Caso inductivo.* Vamos a asumir que para todo conjunto  $\Sigma'$  construido usando  $k$  o menos proposiciones se tiene que si  $\Sigma'$  es inconsistente entonces  $\Sigma' \vdash \perp$ . Supón ahora un conjunto  $\Sigma$  de cláusulas construido usando  $k + 1$  proposiciones.

Sea ahora  $p \in P$  una proposición cualquiera, y define

$$\mathcal{C}_p = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa el literal } p \text{ pero no usa } \neg p\}$$

$$\mathcal{C}_{\neg p} = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa el literal } \neg p \text{ pero no usa } p\}$$

$$\mathcal{C}_{p, \neg p} = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa tanto el literal } p \text{ como el literal } \neg p\}$$

$$\mathcal{C}_- = \{C \in \Sigma \mid C \text{ no usa ni el literal } p \text{ ni el literal } \neg p\}$$

Lo primero es sacarnos de encima las cláusulas de la forma  $C_1 \vee p \vee C_2 \vee \neg p \vee C_3$ . Demuestra el siguiente Lema:

**Lema 1.**  $\Sigma$  es inconsistente si y solo si  $\Sigma \setminus \mathcal{C}_{p, \neg p}$  es inconsistente.

Por lo que asumiremos que  $\Sigma$  no contiene cláusulas con  $p$  y  $\neg p$ .

Ahora, sea  $\mathcal{D}$  el producto de aplicar la regla de resolución para cada par de cláusulas  $C_p \in \mathcal{C}_p$  con una cláusula  $C_{\neg p} \in \mathcal{C}_{\neg p}$ . Como un ejemplo, si  $C_p$  es de la forma  $A \vee p \vee B$  y  $C_{\neg p}$  es de la forma  $A' \vee \neg p \vee B'$ , entonces aplicando

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee p \vee B \\ A' \vee \neg p \vee B' \end{array}}{A \vee B \vee A' \vee B'},$$

tenemos que la cláusula  $A \vee B \vee A' \vee B'$  pertenece a  $\mathcal{D}$ .

Nota que  $\Gamma = \mathcal{C}_- \cup \mathcal{D}$  es un conjunto de cláusulas con  $k$  variables (no usa ni  $p$  ni  $\neg p$ ), y por lo tanto podemos usar hipótesis de inducción: Si  $\Gamma$  es inconsistente, entonces  $\Gamma \vdash \perp$ . La demostración se sigue de los dos siguientes resultados (el primero fácil, el segundo algo más difícil):

**Lema 2.** Si  $\Gamma \vdash \perp$  entonces  $\Sigma \vdash \perp$ . Para demostrar este Lema debes mostrar que toda demostración por resolución de  $\perp$  desde el conjunto  $\Gamma$  puede ser extendida a una demostración por resolución de  $\perp$  desde el conjunto  $\Sigma$ .

**Lema 3.** Si  $\Sigma$  es inconsistente, entonces  $\Gamma$  es inconsistente. Para demostrar esto puedes asumir por contradicción que  $\Gamma$  es satisfacible, por una valuación  $\tau$ . En este caso,  $\tau$  no está definida para  $p$ , ya que ni  $p$  ni  $\neg p$  aparecen en  $\Gamma$ . Considera entonces que pasa al analizar las valuación  $\tau^p$  y  $\tau^{\neg p}$ , donde

$$\tau^p = \begin{cases} \tau^p(q) = \tau(q), & q \neq p \\ \tau^p(p) = 1 \end{cases} \quad \tau^{\neg p} = \begin{cases} \tau^{\neg p}(q) = \tau(q), & q \neq p \\ \tau^{\neg p}(p) = 0 \end{cases}$$

## Completitud fuerte

Si bien nuestro sistema deductivo es correcto y completo para mostrar inconsistencias, podemos demostrar que no nos basta para resolver consecuencia lógica en general.

**Ejercicio.** Encuentra un conjunto  $\Sigma$  de cláusulas y una cláusula  $C$  tal que  $\Sigma \models C$  pero en donde no es posible encontrar una demostración por resolución de  $C$  desde el conjunto  $\Sigma$ .

¿Cuál es el problema? Podríamos verificar si  $\Sigma \models C$  mirando que  $\Sigma \cup \{\neg C\}$  fuese inconsistente. El problema es que  $\neg C$  ya no es una cláusula, habría que transformarla primero a una cláusula, y después aplicar resolución. ¿Será posible agregar algunas reglas a resolución de manera que el sistema deductivo resultante sea correcto y completo incluso para consecuencia lógica? En otras palabras, ¿podemos modificar resolución de tal forma que  $\Sigma \models C$  si y solo si  $\Sigma \vdash C$ ?

Si se puede! La clave es permitir la introducción de tautologías en cualquier momento de la resolución. Más específicamente, definimos una demostración por resolución fuerte de la siguiente manera:

**Definición.** Una *demostración por resolución fuerte* de una cláusula  $C$  desde un conjunto de cláusulas  $\Sigma$  es una secuencia  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de cláusulas tales que

- Para cada  $i \leq n$ ,
  - $C_i \in \Sigma$ , o bien
  - $C_i$  es una tautología, o bien
  - existen  $j, k < i$  tal que  $C_i$  es producto de aplicar resolución sobre las cláusulas  $C_j$  y  $C_k$ , o bien
  - existe  $k < i$  tal que  $C_i$  es producto de aplicar factorización sobre  $C_k$ ;
- $C = C_n$

Escribimos  $\Sigma \vdash_F C$  cuando existe una demostración por resolución fuerte de una cláusula  $C$  desde un conjunto de cláusulas  $\Sigma$ .

**Ejercicio.** Muestra que  $\Sigma \vdash_F C$  si y solo si  $\Sigma \models C$ .