Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Lógica para Ciencias de la Computación

Ayudantía

1 de julio de 2021

1º semestre 2021 - Profesor: J. L. Reutter

Lógica de Primer Orden

Pregunta 1 (I2 2014-2)

Por mostrar, cómo obtener una fórmula en LPO $\varphi_\alpha(x, y)$ dada una operación α. Tal que (a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U})$ si y solo si existe una asignación (1) $\sigma(x) =$ a, $\sigma(y) =$ b y (2) $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Posible respuesta

Construimos nuestra fórmula de forma inductiva, sean β, α operaciones y φ_α, φ_β las fórmulas respectivas que estamos construyendo (de forma arbitraria).

Si $\alpha = R$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = R(x, Y)$

Si $\alpha = \beta^-$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \varphi_\beta(y, x)$

Si $\alpha = \beta_=$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \varphi_\beta(x, x)$

Si $\alpha = \beta^c$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \neg\varphi_\beta(x, y)$

Si $\alpha = \beta_1$ o β_2, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \exists z(\varphi_{\beta_1}(x, z) \wedge \varphi_{\beta_2}(z, y))$

Ahora debemos mostrar que la fórmula es correcta

Los cinco casos son análogos, supongamos el caso $\alpha = \beta_1$ o β_2, sobrecargando un poco la notación:

(a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U}) \rightarrow$ **existe una asignación (1)** $\sigma(x) =$ **a,** $\sigma(y)$ **= b y (2)** $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Por construcción $\varphi_\alpha(x, y) = \exists z(\varphi_{\beta_1}(x, z) \wedge \varphi_{\beta_2}(z, y))$ y sea σ tal que $\sigma(x) =$ a, $\sigma(y) =$ b.

Por definición de $\alpha(\mathfrak{U})$ $\exists c \in A$ tq $(a, c) \in \beta_1$ y $(c, b) \in \beta_2$. Como construimos la fórmula de manera inductiva, si z = c se tiene que $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c)$ y también que $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_2}(c, b)$. Es decir, $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c) \wedge \varphi_{\beta_2}(c, b)$

Por lo tanto $\mathfrak{U} \models \varphi_\alpha(a, b)$

(a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U}) \leftarrow$ **existe una asignación (1)** $\sigma(x) =$ **a,** $\sigma(y)$ **= b y (2)** $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Sabemos que $\mathfrak{U} \models \varphi_\alpha(a, b)$, es decir, $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c)$ y $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_2}(c, b)$ con z = c. Luego, por definición $(a, c) \in \beta_1$ y $(c, b) \in \beta_2$. Entonces $(a, b) \in \beta_1$ o β_2 y por ende $(a, b) \in \alpha(\mathfrak{U})$

■

Pregunta 2

Suponga que R es una relación de aridad tres que representa la fila, columna y número en un sudoku clásico. El alfabeto corresponde a los números naturales del 1 al 9.

Represente estas reglas de un sudoku clásico mediante fórmulas en LPO (estas reglas se satisfacen para una asignación tal que el sudoku corresponde a una solución válida):

1) Un bloque no puede tener dos números iguales.

Por simplicidad definimos el primer bloque, análogo para los otros bloques.

$\beta_1(z) = R(1, 1, z) \vee R(1, 2, z) \vee R(1, 3, z) \vee R(2, 1, z) \vee R(2, 2, z) \vee R(2, 3, z) \vee R(3, 1, z) \vee R(3, 2, z) \vee R(3, 3, z)$

$\varphi_1(z) = \beta_1(z) \wedge \beta_1(c) \rightarrow \neg(z = c)$

2) Una fila o columna no puede tener dos números iguales

Por simplicidad definimos la primera fila, análogo para las otras filas y columnas

$\gamma_1(z) = R(1, 1, z) \vee R(1, 2, z) \vee R(1, 3, z) \vee R(1, 4, z) \vee R(1, 5, z) \vee R(1, 6, z) \vee R(1, 7, z) \vee R(1, 8, z) \vee R(1, 9, z)$

$\varphi_2(z) = \gamma_1(z) \wedge \gamma_1(c) \rightarrow \neg(z = c)$

3) Todos las posiciones tienen algún número

$\varphi_3 = \forall x, \forall y, \exists z R(x, y, z)$

4) No hay dos números distintos en una misma casilla

$\varphi_4(z) = \forall x, \forall y \; R(x, y, z) \land R(x, y, c) \to z = c$