Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Lógica para Ciencias de la Computación

Ayudantía

3 de julio de 2021

1º semestre 2021 - Profesor: J. L. Reutter

Lógica de Primer Orden

Pregunta 1 (I2 2014-2)

Por mostrar, cómo obtener una fórmula en LPO $\varphi_\alpha(x, y)$ dada una operación α. Tal que (a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U})$ si y solo si existe una asignación (1) $\sigma(x) =$ a, $\sigma(y) =$ b y (2) $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Posible respuesta

Construimos nuestra fórmula de forma inductiva, sean β, α operaciones y φ_α, φ_β las fórmulas respectivas que estamos construyendo (de forma arbitraria).

Si $\alpha = R$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = R(x, Y)$

Si $\alpha = \beta^-$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \varphi_\beta(y, x)$

Si $\alpha = \beta_=$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \varphi_\beta(x, x)$

Si $\alpha = \beta^c$, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \neg\varphi_\beta(x, y)$

Si $\alpha = \beta_1$ o β_2, entonces:

$\varphi_\alpha(x, y) = \exists z(\varphi_{\beta_1}(x, z) \wedge \varphi_{\beta_2}(z, y))$

Ahora debemos mostrar que la fórmula es correcta

Los cinco casos son análogos, supongamos el caso $\alpha = \beta_1$ o β_2, sobrecargando un poco la notación:

(a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U}) \rightarrow$ **existe una asignación (1)** $\sigma(x) =$ **a,** $\sigma(y)$ **= b y (2)** $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Por construcción $\varphi_\alpha(x, y) = \exists z(\varphi_{\beta_1}(x, z) \wedge \varphi_{\beta_2}(z, y))$ y sea σ tal que $\sigma(x) =$ a, $\sigma(y) =$ b.

Por definición de $\alpha(\mathfrak{U})$ $\exists c \in A$ tq $(a, c) \in \beta_1$ y $(c, b) \in \beta_2$. Como construimos la fórmula de manera inductiva, si z = c se tiene que $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c)$ y también que $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_2}(c, b)$. Es decir, $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c) \wedge \varphi_{\beta_2}(c, b)$

Por lo tanto $\mathfrak{U} \models \varphi_\alpha(a, b)$

(a, b) $\in \alpha(\mathfrak{U}) \leftarrow$ **existe una asignación (1)** $\sigma(x) =$ **a,** $\sigma(y)$ **= b y (2)** $(\mathfrak{U}, \sigma) \models \varphi_\alpha(x, y)$

Sabemos que $\mathfrak{U} \models \varphi_\alpha(a, b)$, es decir, $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_1}(a, c)$ y $\mathfrak{U} \models \varphi_{\beta_2}(c, b)$ con z = c. Luego, por definición $(a, c) \in \beta_1$ y $(c, b) \in \beta_2$. Entonces $(a, b) \in \beta_1$ o β_2 y por ende $(a, b) \in \alpha(\mathfrak{U})$

■

Pregunta 2

Suponga que R es una relación de aridad tres que representa la fila, columna y número en un sudoku clásico. El alfabeto corresponde a los números naturales del 1 al 9.

Represente estas reglas de un sudoku clásico mediante fórmulas en LPO (estas reglas se satisfacen para una asignación tal que el sudoku corresponde a una solución válida):

1) Un bloque no puede tener dos números iguales.

Por simplicidad definimos el primer bloque, análogo para los otros bloques.

$\varphi_1(z_1, z_2, ..., z_9) = R(1, 1, z_1) \wedge R(1, 2, z_2) \wedge R(1, 3, z_3) \wedge R(2, 1, z_4) \wedge R(2, 2, z_5) \wedge R(2, 3, z_6) \wedge R(3, 1, z_7) \wedge R(3, 2, z_8) \wedge R(3, 3, z_9) \rightarrow \neg(\bigvee_{z_1,...,z_9} z_i = z_j)$

2) Una fila o columna no puede tener dos números iguales

Por simplicidad definimos la primera fila, análogo para las otras filas y columnas

$\varphi_2(z) = R(1, 1, z_1) \wedge R(1, 2, z_2) \wedge R(1, 3, z_3) \wedge R(1, 4, z_4) \wedge R(1, 5, z_5) \wedge R(1, 6, z_6) \wedge R(1, 7, z_7) \wedge R(1, 8, z_8) \wedge R(1, 9, z_9) \rightarrow \neg(\bigvee_{z_1,...,z_9} z_i = z_j)$

3) Todos las posiciones tienen algún número

$\varphi_3 = \forall x, \forall y, \exists z R(x, y, z)$

4) No hay dos números distintos en una misma casilla

$\varphi_4(z) = \forall x, \forall y \ R(x, y, z) \wedge R(x, y, c) \rightarrow z = c$