IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación

Apuntes Semana 14

1. Aplicaciones de Compacidad

Ya hemos visto como usar Compacidad para mostrar que ciertas propiedades no son definibles en lógica de primer orden. Ahora vemos otras dos aplicaciones.

1.1. Modelos no estándar

Considera un grafo $G = (V, E)$ DONDE $V = \mathbb{N}$ y $E = \{(i, +1) \mid i \geq 0\}$.

Este grafo lo representamos como una estructura sobre el vocabulario $L = \{E, a, b\}$. Ahora considera $\Sigma = \{\varphi \mid G \models \varphi\}$ como el conjunto de todas las L-oraciones que satisface G. Por definición, $G \models \Sigma$. Vamos a usar compacidad para construir otro grafo G' que es lógicamente equivalente a G (y en particular, $G' \models \Sigma$), pero que no es isomorfo a G. Este grafo se conoce como un *modelo no estándar* para Σ.

Vamos a extender el vocabulario L, haciendo $L' = L \cup \{a, b\}$, donde a y b son dos constantes. Además, para cada $n \geq 1$ definimos $\varphi_n^{a,b}$ como la L'-oración que dice que no hay un camino (no dirigido) entre a y b de largo n. Definamos $\Gamma = \{\varphi_n^{a,b} \mid n \geq 1\}$. Intuitivamente, lo que dice Γ es que a y b no pueden estar conectados.

El grafo G es una L-estructura, no una L'-estructura, por que no hemos definido las interpretaciones para a y b en G. Pero podemos extender G a L' definiendo dos nodos en G que sean la interpretación de las constantes a y b, respectivamente. Sin embargo, nota que cualquier extensión de G a L' no va a satisfacer Γ, por que G tiene una sola componente conexa.

Sin embargo, consideremos $\Sigma \cup \Gamma$. Cada subconjunto finito S de $\Sigma \cup \Gamma$ si es satisfacible: Si ℓ es el mayor índice dentro de todos los $\varphi_n^{a,b}$ en S, entonces la extensión de G donde $a^G = 0$ y $b^G = \ell + 1$ satisface a S. Por compacidad, $\Sigma \cup \Gamma$ es entonces satisfacible. ¿Pero qué clase de estructura satisface a $\Sigma \cup \Gamma$? Consideremos una L'-estructura $\langle D, E^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}}, b^{\mathcal{A}} \rangle$ que satisface a $\Sigma \cup \Gamma$. Nota entonces que $G' = \langle D, E^{\mathcal{A}} \rangle$ es una L estructura. G' en particular debe satisfacer las siguientes condiciones.

1. Debe satisfacer cada oración en Σ, y por lo tanto G y G' son lógicamente equivalentes.
2. Debe tener dos elementos que no estén conectados (las interpretaciones de a y b)

Observa que de este trabajo también obtenemos que no podemos definir la propiedad $P = \{G \mid G \text{ es un grafo conexo }\}$ en lógica de primer orden. Si pudieramos definir P usando una oración φ_P, entonces esa oración estaría en Σ (por que Σ son todas las oraciones que satisface G, y G es conexo), y luego G' debe satisfacer φ_P, lo que es una contradicción por el punto 2 arriba.

1.2. Grafos infinitos

Ejercicio. Demuestra que un grafo infinito es k-coloreable si y solo si todos sus subconjuntos finitos son k-coloreables. Este teorema fue demostrado por primera vez por Erdös.

Consultas conjuntivas

Esta semana nos interesa mirar el siguiente fragmento de lógica de primer orden.

Sea L un vocabulario que sólo tiene relaciones. Una *consulta conjuntiva* sobre L es una fórmula de la forma

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists z_1 \ \dots \ \exists z_m \bigwedge_{1 \leq i \leq k} R_i(\bar{y}_i),$$

en donde cada R_i es una de las relaciones en L y $\bar{y}_i$ es una tupla de variables en $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{z_1, \dots, z_m\}$. Una consulta conjuntiva es *booleana* si no tiene variables libres, y es *completa* si todas sus variables son libres.

Ejercicio. Considera un vocabulario con una relación binarias R. ¿Puedes dar un ejemplo de una consulta conjuntiva? ¿Cuántas consultas conjuntivas distintas puedes armar? ¿Cuántas consultas conjuntivas existen si solo contamos las consultas lógicamente equivalentes una sola vez?

Consultas conjuntivas para extraer información

Recuerda que usamos la notación $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ para decir que existe una valuación τ tal que (1): $(\mathcal{A}, \tau) \models \varphi$ y (2): $\tau(x_i) = a_i$.

Sea L un vocabulario solo con relaciones. Podemos ver a una consulta conjuntiva $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ como una forma de sacar información de una base de datos relacional (o de estructuras relacionales): Al ser evaluada sobre una L-estructura $\mathcal{A}$ con dominio A, φ entrega la siguiente respuesta:

$$\text{evaluacion}(\varphi, \mathcal{A}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}$$

Ejercicio. Considera L con una relación binaria S y una relación ternaria T, y la consulta conjuntiva $\varphi(x, z) = \exists y \ (S(x, z) \wedge T(z, y, z)$. Imagina ahora la L-estructura $\mathcal{A}$ con $S^{\mathcal{A}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ y $T^{\mathcal{A}} = \{(1, 2, 2), (2, 7, 2), (4, 4, 4))\}$. ¿Cuál es el resultado de evaluacion$(\varphi, \mathcal{A})$?

Consultas conjuntivas para describir mundos posibles

También podemos usar consultas conjuntivas para describir la información mínima que necesitamos en un mundo posible. Dado un vocabulario con solo relaciones $L = \{R_1, \dots, R_n\}$

y dos L estructuras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, abusamos notación y escribimos $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$ para denotar que $R_i^{\mathcal{A}_1} \subseteq R_i^{\mathcal{A}_2}$, para $1 \leq i \leq n$.

Además, una consulta conjuntiva con inigualdades sobre un vocabulario L con solo relaciones es una fórmula

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists z_1 \ \ldots \ \exists z_m \bigwedge_{1 \leq i \leq k} R_i(\bar{y}_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq p} \neg(u_j = v_j),$$

en donde cada R_i es una de las relaciones en L, $\bar{y}_i$ es una tupla de variables en $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z_1, \ldots, z_m\}$ y cada u_j y v_j son variables en $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z_1, \ldots, z_m\}$.

Teorías. Dado un conjunto Σ de L-oraciones, la *teoría* de Σ es el conjunto de L-estructuras que satisfacen:

$$\mathcal{T}(\Sigma) = \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \Sigma\}$$

¿Cómo se ven las teorías de consultas conjuntivas con inigualdades?

Ejercicio. Sea L un vocabulario con solo relaciones, y $\mathcal{A}$ una L-estructura con dominio finito. Muestra como construir una consulta conjuntiva con inigualdades φ, y sin variables libres, tal que para toda L-estructura $\mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{B} \models \varphi$ si y solo si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, o existe una estructura $\mathcal{A}'$ isomorfa a $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}$.

Ejercicio. ¿Como puedes caracterizar la teoría de una consulta conjunctiva con inigualdades y sin variables libres φ?

Consultas conjuntivas como estructuras, homomorfismos

¿Y qué pasa con las consultas conjuntivas? Para eso necesitamos definir la noción de *homomorfismo* entre estructuras. Dado un vocabulario L solo con relaciones y dos L-estructuras $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ con dominios A_1 y A_2, un *homomorfismo* de $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ es una función total $h : A_1 \to A_2$ que respeta las interpretaciones de $\mathcal{A}_1$: para cada tupla $(a_1, \ldots, a_n)$ en la interpretación $R^{\mathcal{A}_1}$ de una relación R de L en $\mathcal{A}_1$, se tiene que $(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathcal{A}_2}$.

Además, vamos a definir la estructura de una consulta conjuntiva. Sea

$$\varphi = \exists z_1 \ \ldots \ \exists z_m \bigwedge_{1 \leq i \leq k} R_i(\bar{y}_i)$$

una consulta conjuntiva booleana sobre un vocabulario L. Definimos la L-estructura $\mathcal{A}_\varphi$ de la siguiente forma.

- El dominio de $\mathcal{A}_\varphi$ tiene un elemento $\hat{z}_i$ por cada variable z_i en φ.
- Para cada $R \in L$, $R^{\mathcal{A}_\varphi}$ es el conjunto de tuplas $\{(\bar{\hat{z}}) \mid R(\bar{z})$ es una relación atómica de $\varphi\}$

Ejercicio. Muestra que para toda consulta conjuntiva booleana φ sobre L y toda L-estructura $\mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{A} \models \varphi$ si y solo si hay un homomorfismo de $\mathcal{A}_\varphi$ a $\mathcal{A}$.

Aplicación: complejidad de evaluar

Sea φ una consulta conjuntiva y $\mathcal{A}$ una estructura sobre el mismo vocabulario que φ. Luego, podemos demostrar que el problema de decidir si evaluacion$(\varphi, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ es un problema NP-completo.

Ejercicio:

- Formaliza el problema de arriba como un lenguaje. Para esto puedes asumir que tenemos disponible codificaciones $C(\varphi)$ y $C(\mathcal{A})$ de fórmulas y estructuras.
- Sea A el dominio de $\mathcal{A}$, y A_φ el dominio de $\mathcal{A}_\varphi$, como construimos arriba, y considera una función h que mapea cada elemento en A_φ a uno en A. Argumenta por que el problema de verificar si h es un homomorfismo de $\mathcal{A}_\varphi$ a $\mathcal{A}$ está en PTIME.
- Concluye que el problema de decidir si evaluacion$(\varphi, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ está en NP.
- Qué reducción puedes usar para mostrar que el problema es NP-duro?