Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2022

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación

Ayudantía 8: VAL, SAT y compacidad

1 Repaso:

Una L-fórmula φ es **satisfacible** si existe una estructura $\mathcal{A}$ y una asignación τ tal que hagan a φ verdadera, es decir $(\mathcal{A}, \tau) \models \varphi$. Si φ es una oración (no tiene variables libres) entonces solo basta con encontrar $\mathcal{A}$.

Una L-fórmula φ es **válida** si para toda estructura $\mathcal{A}$ y toda asignación asignación τ φ es verdadera, es decir $(\mathcal{A}, \tau) \models \varphi$. Si φ es una oración (no tiene variables libres) entonces solo basta con probar que esto se cumple para toda $\mathcal{A}$.

De estas definiciones creamos los siguientes conjuntos:

$$VAL = \{\varphi | \varphi \text{ es una oración válida}\}$$

$$SAT = \{\varphi | \varphi \text{ es una oración satisfacible}\}$$

Un gran problema en lógica es determinar si una fórmula pertenece a SAT o VAL. Tenemos además un teorema relacionado:
Teorema de Church: VAL es indecidible.

Teorema de compacidad: Un conjunto Σ de oraciones es satisfacible si y solo si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Podemos utilizar compacidad para mostrar que ciertas propiedades no son definibles. Una propiedad es **definible** si existe una oración φ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ si y solo si la estructura pertenece a la propiedad.

2 Ejercicio 1: VAL y SAT

Usa el Teorema de Church para demostrar que SAT es indecidible.

3 Ejercicio 2: LPO y estructuras

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario sin funciones ni constantes. Una $\mathcal{L}$-fórmula pertenece a la clase existencial-positiva si ϕ solo usa cuantificación existencial y los únicos conectivos que usa ϕ son $\vee$ y $\wedge$. Además decimos que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es subconjunto de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ si (1) el dominio de $\mathfrak{A}$ está contenido en el dominio de $\mathfrak{B}$, (2) para cada relación R en $\mathcal{L}$ se tiene que $R^{\mathfrak{A}} \subseteq R\mathfrak{B}$. Demuestra el siguiente teorema de monotonía.

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario sin funciones ni constantes y ϕ una fórmula existencia-positiva sobre $\mathcal{L}$. Entonces para todo par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y toda asignación τ, si $(\mathfrak{A}, \tau) \models \phi$ entonces $(\mathfrak{B}, \tau) \models \phi$.

4 Ejercicio 3: Compacidad

Usaremos compacidad para demostrar que las siguientes propiedades no son definibles en LPO sobre el vocabulario $\mathcal{L} = \{a, b, E(\cdot,\cdot), R(\cdot,\cdot)\}$.

- $P_1 = \{\mathcal{A} \in STRUCT[L] | R^{\mathcal{A}}$ contiene a la clausura transitiva de $E^{\mathcal{A}}\}$
- $P_2 = \{\mathcal{A} \in STRUCT[L] | a^{\mathcal{A}}$ está conectado a $b^{\mathcal{A}}$ mediante $E^{\mathcal{A}}\}$