Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2022

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación

Tarea 3 - Entrega Martes 19 de Abril a las 15:00 - via canvas

Recuerda que esta tarea es individual. Puedes discutir sobre la respuesta con tus compañeros (¡y eso está muy bien!), pero no puedes enviar la respuesta a nadie o utilizar la respuesta de alguien más. En esta tarea vamos a evaluar que puedas modelar cosas usando lógica proposicional. Esto es la base para poder modelar cosas con lógicas más completas hacia el final del curso. Además, ¿qué podría haber más entretenido que ir desarrollando la conexión entre máquinas de turing y lógica proposicional?

Modelo de máquina Decimos que una máquina de turing M sobre un alfabeto $\mathbf{A}$ es *estrictamente lineal* si para cada palabra w sobre A, la ejecución de M sobre w tiene exactamente $|w|$ pasos (recuerda que $|w|$ es el *largo* de la palabra w: la cantidad de caracteres que usa).

Problema

Sean $M = (Q, \mathbf{A}, B, q_0, F, \delta)$ una máquina de turing estrictamente lineal y $w = a_1, \ldots, a_n$ una palabra sobre $\mathbf{A}$. Explica como construir un conjunto de fórmulas Σ en lógica proposicional tal que Σ es satisfacible si y solo si M acepta a w. Recuerda que un conjunto Σ es satisfacible cuando existe al menos una valuación τ que lo satisface ($\tau \models \Sigma$).

Nota que la máquina M y la palabra w son arbitrarias, tu construcción debe servir para *cualquier* máquina M y palabra w.

Ayuda. Comienza por dibujar como se verían las ejecuciones de M sobre $w = a_1, \ldots, a_n$. En particular, nota que como M es estrictamente lineal, M nunca va a poder apuntar a ningún pedazo de la cinta que esté a una distancia mayor a n celdas en la cinta en alguna de las dos direcciones, contado a partir del punto de partida donde M apuntaba al inicio de w en la configuración inicial. Además, como M es estrictamente lineal, la ejecución con w va a tener exactamente n configuraciones.

Para poder armar tu conjunto Σ, sugerimos construir un set de proposiciones P de tal forma que los *modelos*, o *mundos posibles* de P representen una secuencia de n configuraciones. Por ejemplo, P debería incluir proposiciones $s_{(q,t)}$, para $q \in Q$ y para $1 \leq t \leq n$, de tal forma que un modelo donde $\tau(s_t) = 1$ representa el hecho de que el estado en el que se encuentra la máquina M en la configuración t sea precisamente q. Vas a necesitar formas de modelar también la cinta y donde apunta la cabeza lectora de M en cada configuración.

Luego, tu conjunto Σ deberá solo seleccionar aquellos modelos donde la secuencia de n configuraciones sea efectivamente una *ejecución valida*. Por ejemplo, agregando la siguiente fórmula a Σ te aseguras de que, en los modelos de Σ, hay exactamente un estado en cada configuración, es decir, para cada t, solo un $s_{(q,t)}$ puede ser verdad:

$$\bigwedge_{1 \leq t \leq n} \bigvee_{q_1 \in Q} \left(s_{(q_1,t)} \wedge \bigwedge_{q_2 \in Q, q_1 \neq q_2} \neg s_{(q_2,t)} \right)$$

Adicionalmente, la fórmula $s_{(q_0,1)}$ fuerza a que la proposición $s_{(q_0,1)}$ sea verdad (lo que intuitivamente significa que en los modelos de Σ pasa que en la primera configuración la máquina está en q_0), y de la misma forma la fórmula $\bigvee_{q \in F} s_{(q,n)}$ solo seleciona a los modelos en que en la configuración n (la última, pues asumimos que $n = |w|$) el estado sea un estado final.

Continúa con esta estrategia para ir especificando la configuración inicial y asegurando que los modelos para Σ solo representen ejecuciones válidas para w.

Formato de entrega Aceptamos documentos pdf escrito en latex, o, excepcionalmente, imágenes escaneadas o fotografiadas en buena calidad. La nota de esta tarea va desde un 1 a un 7.