Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2022

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación
Tarea 3 - Entrega Viernes 22 de Abril a las 20:00 - via canvas

Recuerda que esta tarea es individual. Puedes discutir sobre la respuesta con tus compañeros (¡y eso está muy bien!), pero no puedes enviar la respuesta a nadie o utilizar la respuesta de alguien más. En esta tarea vamos a evaluar que puedas modelar cosas usando lógica proposicional. Esto es la base para poder modelar cosas con lógicas más completas hacia el final del curso. Además, ¿qué podría haber más entretenido que ir desarrollando la conexión entre máquinas de turing y lógica proposicional?

Modelo de máquina Decimos que una máquina de turing M sobre un alfabeto $\mathbf{A}$ es *estrictamente lineal* si para cada palabra w sobre A de largo igual o mayor a 1, la ejecución de M sobre w tiene exactamente $|w|$ pasos (recuerda que $|w|$ es el *largo* de la palabra w: la cantidad de caracteres que usa).

Sean $M = (Q, \mathbf{A}, B, q_0, F, \delta)$ una máquina de turing estrictamente lineal y $w = a_1, \ldots, a_n$ una palabra sobre $\mathbf{A}$ de largo igual o mayor a 1. Explica como construir un conjunto de fórmulas Σ en lógica proposicional tal que Σ es satisfacible si y solo si M acepta a w.

Nota que la máquina M y la palabra w son arbitrarias, tu construcción debe servir para *cualquier* máquina M y palabra w.

Idea. Comienza por dibujar como se verían las ejecuciones de M sobre w. En particular, nota que como M es estrictamente lineal, M nunca va a poder apuntar a ningún pedazo de la cinta que esté a una distancia mayor a n celdas en la cinta del punto de partida donde M apuntaba al inicio de w en la configuración inicial. Ahora, construye un set de proposiciones P de tal forma que los *modelos* de P representen justamente $|w|$ configuraciones. Por ejemplo, P debería incluir proposiciones $s_{(q,t)}$, para $q \in Q$ y para $1 \leq t \leq |w|$, de tal forma que un modelo donde $\tau(s_t) = 1$ representa el hecho de que el estado de la configuración t sea precisamente q. Luego, tu conjunto Σ deberá solo seleccionar aquellos modelos donde esas $|w|$ ejecuciones representen una *ejecución valida*. Por ejemplo, agregando la siguiente fórmula a Σ te aseguras de que, en los modelos de Σ, hay exactamente un estado en cada configuración, es decir, para cada t, solo un $s_{(q,t)}$ puede ser verdad.

$$\bigwedge_{1 \leq t \leq n} \bigvee_{q_1 \in Q} \left(s_{(q_1,t)} \wedge \bigwedge_{q_2 \in Q, q_1 \neq q_2} \neg s_{(q_2,t)} \right)$$

Adicionalmente, la fórmula $s_{(q_0,1)}$ fuerza a que la proposición $s_{(q_0,1)}$ sea verdad (en la primera configuración la máquina está en q_0 y la fórmula $\bigvee_{q \in F} s_{(q,n)}$ fuerza a que en la configuración n (la última, pues asumimos que $n = |w|$) el estado sea un estado final.

Continúa con esta estrategia para ir especificando la configuración inicial y asegurando que los modelos para Σ solo representen ejecuciones válidas para w.

Formato de entrega Aceptamos documentos pdf escrito en latex, o, excepcionalmente, imágenes escaneadas o fotografiadas en buena calidad. La nota de esta tarea va desde un 1 a un 7.