IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación

Semana 7: Correctitud y completitud de resolución

Problema a resolver

Sea P un conjunto de proposiciones, y Σ un conjunto de cláusulas en $L(P)$, y recuerda que $\Sigma \vdash \bot$ indica que es existe una demostración por resolución de $\bot$ desde el conjunto Σ. Entonces vas a demostrar:

Teorema (correctitud de resolución). Si $\Sigma \vdash \bot$ entonces Σ es inconsistente.

Teorema (completitud de resolución). Si Σ es inconsistente entonces $\Sigma \vdash \bot$.

Correctitud

Vamos a demostrar un resultado un poco más fuerte (por que simplifica la demostración). Para un conjunto Σ de cláusulas y una cláusula C, demostraremos que

$$\text{Si } \Sigma \vdash C \text{ entonces } \Sigma \models C.$$

Supongamos entonces que $\Sigma \vdash C$, para Σ y C definidos anteriormente. Tenemos que mostrar que $\Sigma \models C$. La demostración es por inducción en el largo de la demostración por resolución de C desde el conjunto Σ.

Caso base. El caso base es cuando la demostración por resolución de C desde el conjunto Σ tiene largo 1. argumenta por que $\Sigma \models C$ en ese caso.

Caso inductivo. Asume que, si existe una demostración por resolución de una cláusula C' desde un conjunto Σ' con k o menos reglas, entonces $\Sigma' \models C'$. Ahora supón que existe una demostración por resolución de C desde Σ, y que usa $k+1$ reglas. Demuestra que $\Sigma \models C$.

Completitud

La idea es hacer una inducción por la cantidad de variables en P. Supongamos entonces que Σ es inconsistente. Tenemos que demostrar que $\Sigma \vdash \bot$.

Caso base. El caso base es cuando P tiene cero variables. Entonces $\Sigma = \{\bot\}$, en cuyo caso podemos encontrar una demostración por resolución de $\bot$ desde el conjunto Σ (la demostración que solo tiene un paso: $\{\bot\}$, o $\Sigma = \emptyset$, en cuyo caso Σ es trivialmente satisfacible y por tanto no corresponde a nuestra hipotesis.

Caso inductivo. Vamos a asumir que para todo conjunto Σ' construido usando k o menos proposiciones se tiene que si Σ' es inconsistente entonces $\Sigma' \vdash \bot$. Supón ahora un conjunto Σ de cláusulas construido usando $k+1$ proposiciones.

Sea ahora $p \in P$ una proposición cualquiera, y define

$$\mathcal{C}_p = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa el literal } p \text{ pero no usa } \neg p\}$$

$$\mathcal{C}_{\neg p} = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa el literal } \neg p \text{ pero no usa } p\}$$

$$\mathcal{C}_{p,\neg p} = \{C \in \Sigma \mid C \text{ usa tanto el literal } p \text{ como el literal } \neg p\}$$

$$\mathcal{C}_{-} = \{C \in \Sigma \mid C \text{ no usa ni el literal } p \text{ ni el literal } \neg p\}$$

Lo primero es sacarnos de encima las cláusulas de la forma $C_1 \vee p \vee C_2 \vee \neg p \vee C_3$. Demuestra el siguiente Lema:

Lema 1. Σ es inconsistente si y solo si $\Sigma \setminus \mathcal{C}_{p,\neg p}$ es inconsistente.

Por lo que asumiremos que Σ no contiene cláusulas con p y $\neg p$.

Ahora, sea $\mathcal{D}$ el producto de aplicar la regla de resolución para cada par de cláusulas $C_p \in \mathcal{C}_p$ con una cláusula $C_{\neg p} \in \mathcal{C}_{\neg p}$. Como un ejemplo, si C_p es de la forma $A \vee p \vee B$ y $C_{\neg p}$ es de la forma $A' \vee \neg p \vee B'$, entonces aplicando

$$\begin{array}{c} A \vee p \vee B \\ A' \vee \neg p \vee B' \\ \hline A \vee B \vee A' \vee B', \end{array}$$

tenemos que la cláusula $A \vee B \vee A' \vee B'$ pertenece a $\mathcal{D}$.

Nota que $\Gamma = \mathcal{C}_{-} \cup \mathcal{D}$ es un conjunto de cláusulas con k variables (no usa ni p ni $\neg p$), y por lo tanto podemos usar hipótesis de inducción: Si Γ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \bot$. La demostración se sigue de los dos siguientes resultados (el primero fácil, el segundo algo más difícil):

Lema 2. Si $\Gamma \vdash \bot$ entonces $\Sigma \vdash \bot$. Para demostrar este Lema debes mostrar que toda demostración por resolución de $\bot$ desde el conjunto Γ puede ser extendida a una demostración por resolución de $\bot$ desde el conjunto Σ.

Lema 3. Si Σ es inconsistente, entonces Γ es inconsistente. Para demostrar esto puedes asumir por contradicción que Γ es satisfacible, por una valuación τ. En este caso, τ no está definida para p, ya que ni p ni $\neg p$ aparecen en Γ. Considera entonces que pasa al analizar las valuación τ^p y $\tau^{\neg p}$, donde

$$\tau^p = \begin{cases} \tau^p(q) = \tau(q), & q \neq p \\ \tau^p(p) = 1 \end{cases} \qquad \tau^{\neg p} = \begin{cases} \tau^{\neg} p(q) = \tau(q), & q \neq p \\ \tau^{\neg p}(p) = 0 \end{cases}$$

Completitud fuerte

Si bien nuestro sistema deductivo es correcto y completo para mostrar inconsistencias, podemos demostrar que no nos basta para resolver consecuencia lógica en general.

Ejercicio. Encuentra un conjunto Σ de cláusulas y una cláusula C tal que $\Sigma \models C$ pero en donde no es posible encontrar una demostración por resolución de C desde el conjunto Σ.

¿Cuál es el problema? Podríamos verificar si $\Sigma \models C$ mirando que $\Sigma \cup \{\neg C\}$ fuese inconsistente. El problema es que $\neg C$ ya no es una cláusula, habría que transformarla primero a una cláusula, y después aplicar resolución. ¿Será posible agregar algunas reglas a resolución de manera que el sistema deductivo resultante sea correcto y completo incluso para consecuencia lógica? En otras palabras, ¿podemos modificar resolución de tal forma que $\Sigma \models C$ si y solo si $\Sigma \vdash C$?

Si se puede! La clave es permitir la introducción de tautologías en cualquier momento de la resolución. Más específicamente, definimos una demostración por resolución fuerte de la siguiente manera:

Definición. Una *demostración por resolución fuerte* de una cláusula C desde un conjunto de cláusulas Σ es una secuencia $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de cláusulas tales que

- Para cada $i \leq n$,
  - $C_i \in \Sigma$, o bien
  - C_i es una tautología, o bien
  - existen $j, k < i$ tal que C_i es producto de aplicar resolución sobre las cláusulas C_j y C_k, o bien
  - existe $k < i$ tal que C_i es producto de aplicar factorización sobre C_k;
- $C = C_n$

Escribimos $\Sigma \vdash_F C$ cuando existe una demostración por resolución fuerte de una cláusula C desde un conjunto de cláusulas Σ.

Ejercicio. Muestra que $\Sigma \vdash_F C$ si y solo si $\Sigma \models C$.