IIC2213 — Lógica para Ciencia de la Computación

Notas Semana 3

1. Relaciones entre lenguajes recursivamente enumerables e indecidibles

Claramente, todo lenguaje decidible también es recursivamente enumerable (RE), pero el teorema de diagonalización nos muestra que hay lenguajes RE que no son decidibles. Podemos explicar como hacer máquinas de turing para mostrar:

Propiedad 1. Si L_1 y L_2 son lenguajes decidibles, entonces $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$ y el complemento $\bar{L}_1$ son todos decidibles.

Esta propiedad se demuestra construyendo las máquinas adecuadas. Un poco más complicado, pero podemos mostrar también:

Propiedad 2. Si L_1 y L_2 son lenguajes RE, entonces $L_1 \cap L_2$ y $L_1 \cup L_2$ son RE.

Y qué pasa con el complemento de un lenguaje RE? Su complemento no necesariamente es RE. De hecho:

Propiedad 3. Si L es RE, y el complemento $\bar{L}$ es RE, entonces L es decidible.

Demostración. Por definición tenemos una máquina M_L que acepta a una palabra w si y solo si w pertenece a L, y una una máquina $M_{\bar{L}}$ que acepta a una palabra w si y solo si w pertenece a $\bar{L}$. Luego, podemos construir una máquina M que funcione de la siguiente forma: con input w, M echa a correr M_L y $M_{\bar{L}}$ *en paralelo*, una instrucción a la vez. Si M_L acepta, aceptamos, si $M_{\bar{L}}$ acepta, M rechaza. Si $w \in L$ entonces sabemos que la componente M_L de M va a parar, y si $w \notin L$ significa que $w \in \bar{L}$, y por tanto la componente $M_{\bar{L}}$ va a parar. Concluimos que M acepta a L, y se detiene en todas sus entradas, por lo que L es decidible.

En general, la clase de lenguajes cuyo complemento es RE se conoce como coRE, y por la propiedad anterior vemos que RE intersectado con coRE corresponde a la clase de lenguajes decidibles.