Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
Primer Semestre de 2022

IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación

Ayudantía 8: VAL, SAT y compacidad

1 Repaso:

Una L-fórmula φ es **satisfacible** si existe una estructura $\mathcal{A}$ y una asignación τ tal que hagan a φ verdadera, es decir $(\mathcal{A}, \tau) \models \varphi$. Si φ es una oración (no tiene variables libres) entonces solo basta con encontrar $\mathcal{A}$.

Una L-fórmula φ es **válida** si para toda estructura $\mathcal{A}$ y toda asignación asignación τ φ es verdadera, es decir $(\mathcal{A}, \tau) \models \varphi$. Si φ es una oración (no tiene variables libres) entonces solo basta con probar que esto se cumple para toda $\mathcal{A}$.

De estas definiciones creamos los siguientes conjuntos:

$$VAL = \{\varphi | \varphi \text{ es una oración válida}\}$$

$$SAT = \{\varphi | \varphi \text{ es una oración satisfacible}\}$$

Un gran problema en lógica es determinar si una fórmula pertenece a SAT o VAL. Tenemos además un teorema relacionado:
Teorema de Church: VAL es indecidible.

Teorema de compacidad: Un conjunto Σ de oraciones es satisfacible si y solo si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Podemos utilizar compacidad para mostrar que ciertas propiedades no son definibles. Una propiedad es **definible** si existe una oración φ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ si y solo si la estructura pertenece a la propiedad.

2 Ejercicio 1: VAL y SAT

Usa el Teorema de Church para demostrar que SAT es indecidible.

Solución:

Como ya sabemos por el teorema que VAL es indecidible vamos a probar que podemos transformar una máquina que decidiría por VAL a que decida por SAT demostrando que esta también es indecible. Así vamos a demostrar que estos problemas tienen la misma dificultad de decisión.

$$VAL = \{\varphi | \varphi \text{ es una oración válida}\}$$

Para esto vamos a usar la reducción. Si VAL fuera decidible entonces tendríamos una máquina de Turing M que fuera tomando todas las estructuras $\mathcal{A}$ en el lenguaje y preguntaría si esta estructura satisface a φ. Solo aceptaría al llegar al final de la lista y haber verificado que se cumplía la fórmula con todas las estructuras posibles. Para que esta máquina funcionara con SAT la modificación que al comprobar con cualquier estructura $\mathcal{A}$ se va a dirigir al estado de aceptación y terminar la ejecución. Como hemos logrado hacer la reducción queda demostrado que SAT es indecible.

3 Ejercicio 2: LPO y estructuras

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario sin funciones ni constantes. Una $\mathcal{L}$-fórmula pertenece a la clase existencial-positiva si ϕ solo usa cuantificación existencial y los únicos conectivos que usa ϕ son $\vee$ y $\wedge$. Además decimos que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ es subconjunto de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ si (1) el dominio de $\mathfrak{A}$ está contenido en el dominio de $\mathfrak{B}$, (2) para cada relación R en $\mathcal{L}$ se tiene que $R^{\mathfrak{A}} \subseteq R\mathfrak{B}$. Demuestra el siguiente teorema de monotonía.

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario sin funciones ni constantes y ϕ una fórmula existencia-positiva sobre $\mathcal{L}$. Entonces para todo par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y toda asignación τ, si $(\mathfrak{A}, \tau) \models \phi$ entonces $(\mathfrak{B}, \tau) \models \phi$.

Solución:

Suponemos que se cumple la primera parte del teorema. Tenemos un vocabulario $\mathcal{L}$ sin funciones ni constantes y ϕ una fórmula existencial-positiva sobre $\mathcal{L}$. Además suponemos que tenemos una estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación τ tal que $(\mathfrak{A}, \tau) \models \phi$. Como ϕ es una fórmula existencial-positiva esto significa que τ mapea los valores de las variables de la formula a valores reales que existen en la estructura. Encuentra que estas sí existen. Ahora supongamos una estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Como esta estructura contiene a la otra todas las variables que existían en la primera van a seguir existiendo en esta, por lo tanto cuando se evalúe con τ se van a cumplir las mismas existencias que antes. En conclusión $(\mathfrak{B}, \tau) \models \phi$.

Ahora examinemos por qué es importante que ϕ sea existencial-positiva. Esto es porque si tenemos una negación entonces podremos decir que no existe un elemento que cumple tal parte de la fórmula para $\mathfrak{A}$ pero para $\mathfrak{B}$ esta va a contener todo lo de la primera estructura pero puede tener más elementos. Por lo tanto podría existir un elemento en $\mathfrak{B}$ que sí cumple esa existencia. Por eso el teorema solo que cumple para fórmulas existenciales-positivas.

4 Ejercicio 3: Compacidad

Usaremos compacidad para demostrar que las siguientes propiedades no son definibles en LPO sobre el vocabulario $\mathcal{L} = \{a, b, E(\cdot,\cdot), R(\cdot,\cdot)\}$.

- $P_1 = \{\mathcal{A} \in STRUCT[L] | R^{\mathcal{A}}$ contiene a la clausura transitiva de $E^{\mathcal{A}}\}$
- $P_2 = \{\mathcal{A} \in STRUCT[L] | a^{\mathcal{A}}$ está conectado a $b^{\mathcal{A}}$ mediante $E^{\mathcal{A}}\}$

Solución:

1. Partimos con P_1, que define todos los grados en que $R^{\mathcal{A}}$ contenga la clausura transitiva de $E^{\mathcal{A}}$. La clausura transitiva va a ser el grafo original más una conexión entre todos los nodos conectados por un camino mayor a 1.

Si por contradicción suponemos que esta propiedad es definible entonces debiera existir una oración φ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ solo si cumple la propiedad. Necesitamos encontrar un conjunto que no sea satisfacible pero sus subconjuntos finitos si lo sean. Por lo tanto vamos a agarrar el siguiente conjunto:

$$
\begin{aligned}
&\neg\varphi \cup \Sigma \\
&\Sigma = \{\psi_i | i \geq 1\} \\
&\psi_1 = \forall x \forall y E^{\mathcal{A}}(x,y) \to R^{\mathcal{A}}(x,y) \\
&\psi_2 = \forall x \forall y \forall z E^{\mathcal{A}}(x,y) \wedge E^{\mathcal{A}}(y,z) \to R^{\mathcal{A}}(x,z) \\
&\psi_i = \text{para todos los caminos en } E^{\mathcal{A}} \text{ de largo } i \text{ desde} \\
&\quad \text{un elemento } a \text{ a un elemento } b \text{ se tiene que } (a,b) \text{ está en R.}
\end{aligned}
$$

El conjunto Σ entonces representa que la se contiene los caminos de la clausura transitiva hasta el largo i y como tenemos una fórmula para cualquier i cualquier grafo que cumpla la propiedad va a satisfacer al menos una de las fórmulas. Tenemos que $\neg\varphi$ indica lo opuesto, no contiene la clausura transitiva por lo tanto es insatisfacible porque no pueden pasar las dos cosas al mismo tiempo. Sin embargo, cada subconjunto finito sí es satisfacible. Tomemos el siguiente subconjunto arbitrario:

$$
\begin{aligned}
S = \{\neg\varphi, \psi_j, \psi_{j+1} \ldots \psi_k\} \\
k > j
\end{aligned}
$$

Tenemos que k es el índice máximo, entonces si se cumple ψ_k se cumplen todas las fórmulas con índices menores. Pero para cumplir con la primera fórmula podemos elegir un grafo $R^{\mathcal{A}}$ que tiene todos los caminos de la clausura transitiva de $E^{\mathcal{A}}$ de largo k pero que no aquellos que sean mayores. Como hay un grafo que cumple todas las fórmulas este conjunto es satisfacible. Por lo tanto se contradice el teorema de compacidad y por lo tanto sabemos que nuestra suposición es incorrecta, la propiedad no es definible.

2. Ahora vamos a demostrar que la propiedad 2 no es definible. Nuevamente vamos a usar contradicción, vamos a suponer que existe una oración φ tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ solo si cumple la propiedad. Ahora debemos encontrar nuestro conjunto infinito insatisfacible.

$$\begin{aligned} &\varphi \cup \Sigma \cup \neg(a = b), \neg E(a, b) \\ &\Sigma = \{\psi_n | n > 0\} \\ \psi_n &= \neg(\exists x_1 \ldots \exists x_n (E(a, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge E(x_n, b))) \end{aligned}$$

Tenemos que cada fórmula psi_n indica que no existe un camino de largo $n + 1$ desde el nodo a hasta el nodo b. El conjunto de disyunciones no es satisfacible porque si están conectados los nodos entonces va a haber un camino de largo n que permite transitar de uno al otro haciendo ese $\psi_n = 0$. Pero si tomamos el siguiente subconjunto finito:

$$\begin{aligned} S = \{\varphi, \psi_j, \psi_{j+1} \ldots \psi_k\} \\ k > j \end{aligned}$$

Tenemos que k es el índice máximo, entonces, si seleccionamos un grafo tal que a y b están conectados con el camino más corto entre ellos con largo $k + 2$ entonces se cumplen todas las fórmulas. Esto es que van a estar conectados y no existen caminos con largo menor a $k - 1$. Como hay un grafo que cumple todas las fórmulas este conjunto es satisfacible. Por lo tanto se contradice el teorema de compacidad y por lo tanto sabemos que nuestra suposición es incorrecta, la propiedad no es definible.