Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencias de la Computación — 1' 2022

Ayudantía 7

Pregunta 1

Considere el vocabulario $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot)\}$ usado para representar grafos. Para cada una de las siguientes frases, escriba una oración en lógica de primer orden (usando $\mathcal{L}$) que la represente.

1. El grafo es un clique
2. El grafo contiene un clique de tamaño k
3. El grafo contiene un ciclo con k nodes
4. La distancia máxima entre elementos en el grafo es 7
5. Cada nodo esta conectado a lo más por dos aristas

---

1. $\varphi_1 = \forall x \forall y \neg(x = Y) \rightarrow E(x, y)$
2. Definimos ρ_k como la oración que expresa que existen k vértices distintos en el grafo.

$$\rho_k = \exists x_1 ... \exists x_k (\neg(x_1 = x_2) \wedge ... \wedge \neg(z_1 = x_k) \wedge ... \wedge \neg(x_{k-1} = x_k)) \wedge (E(x_1,))$$

   Además, definimos γ como la oración que describe que todos los k nodos se unen entre sí

$$\gamma_k = (E(x_1, x_2) \vee E(x_2, x_1)) \wedge ... \wedge (E(x_1, x_k) \vee (x_k, x_1)) \wedge ... \wedge (E(x_{k-1}, x_k) \vee (E(x_k, x_{k-1})))$$

   Con esto, la oración pedida será

$$\varphi_2 = \rho_k \wedge \gamma_k$$

3. El grafo contiene un ciclo con k nodes Ya tenemos la oración que representa que existen k nodos, ahora agregamos una oración que representa en ciclo en sí:

$$\alpha_k = E(x_1, x_2) \wedge ... \wedge E(x_{k-1}, k)$$

   Así, nos queda que

$$\varphi_3 = \rho_k \wedge \alpha_k$$

4. Definimos una oración β que representa que hay dos elementos del grafo a una distancia k:

$$\beta_k = \exists x_1 ... \exists x_k E(x_1, x_2) \wedge ... \wedge E(x_{k-1}, x_k)$$

   Así, la oración que representa lo que queremos será:

$$\varphi_4 = \beta_7 \wedge \neg \beta_8$$

5. Acá crearemos la oración que hay un nodos por tres o más aristas δ y la negaremos:

$$\delta = \rho_4 \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_1, x_4)$$

   Y la oración pedida será

$$\varphi_5 = \neg \delta$$

Pregunta 2

(Tarea 7 2021-1)

En un campo existe un sistema de sensores capaces de detectar humedad y temperatura. El sistema consta de varios sensores para medir humedad y temperatura, y a cada hora entrega un conjunto con todas las mediciones de todos los sensores en esa hora.

La agrónoma a cargo del sistema tiene una serie de eventos que necesita detectar con los sensores, pero a su disposición solo tiene un programa que modela cada set de mediciones como un set $d_1, ..., d_n$ de eventos ordenados (se puede pensar en cada d_i como un evento de tipo date, y con $d_i < d_i + 1$), dos relaciones unarias HB y HA y dos relaciones unarias TB y TA. La relación unaria HB tiene todos los di que representan fechas de mediciones donde algún sensor marca que la humedad es baja HA tiene todos los d_i que representan fechas de mediciones donde algun sensor marca que la humedad es alta, TB tiene todos los d_i que representan fechas de mediciones donde la temperatura en algun sensor marca cero o menos grados, y TA tiene todos los d_i que representan fechas de mediciones donde la temperatura en algun sensor marca sobre cero.

En este programa uno puede especificar situaciones de alerta, por medio de expresiones con la siguiente sintaxis:

- hb, ha, tb y ta son expresiones.
- Si e_1 y e_2 son expresiones, entonces $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \vee e_2$ y $\neg e_2$ son expresiones.
- Si e_1 y e_2 son expresiones, entonces $e_1 \cdot e_2$ es una expresión..

La semántica de las expresiones es la siguiente. Como mencionamos, un conjunto de mediciones es una tupla $M = (D, TA, TB, HA, HB)$, donde $D = d_1, ..., d_n$ es un set de fechas ordenadas, con $d_i < d_i + 1$, y TA, TB, HA y HB son subconjuntos de D que satisfacen $TA = D - TB$ y $HA = D - HB$, es decir, TA y TB definen una partición para D, y lo mismo con HA y HB. Definimos la semántica de cuando una expresión se gatilla con un d_i en particular de una medición $M = (D, TA, TB, HA, HB)$.

- Si e es la expresión ta, entonces e se gatilla en d_i cuando $d_i \in TA$.
- Si e es la expresión tb, entonces e se gatilla en d_i cuando $d_i \in TB$.
- Si e es la expresión ha, entonces e se gatilla en d_i cuando $d_i \in HA$.
- Si e es la expresión hb, entonces e se gatilla en d_i cuando $d_i \in HB$.
- Si $e = e_1 \wedge e_2$ entonces e se gatilla en d_i cuando ambas e_1 y e_2 se gatillan en d_i.
- Si $e = e_1 \vee e_2$ entonces e se gatilla en d_i cuando una de e_1 o e_2 se gatilla en en d_i.
- Si $e = \neg e_2$ entonces e se gatilla en d_i cuando e_2 no se gatilla en d_i.
- Si $e = e_1 \cdot e_2$ entonces e se gatilla en d_i cuando e_1 se gatilla en d_i y existe un $j > i$ tal que e_2 se gatilla en d_j.

  Finalmente, dada una expresión e, decimos que e entrega una alerta para $M = (D, TA, TB, HA, HB)$ si existe un $d_i \in D$ tal que e se gatilla en d_i.

Calentamiento: Definir restricciones.

Muestra como hacer que tu lenguaje entregue alerta en todas las mediciones que cumplan lo siguiente:

- Si en algun momento baja la humedad y posteriormente baja la temperatura.
- Si la temperatura siempre se mantiene alta.
- Si en algun momento hay más de 2 cambios entre temperatura alta y temperatura baja.

- $hb \cdot tb$
- No existe solución. Esto ocurre porque con la semántica definida en el problema, las expresiones quedan con un $\exists$ por delante y no hay forma de definir un $\forall$. Por ejemplo, si definieramos la expresión $\neg tb$ esto significaría "Existe un d_i tal que $\neg TB(d_i)$ es verdad·" o en otras palabras "Hay al menos un tiempo d_i donde la temperatura es alta".
- $(ta \cdot tb \cdot ta \cdot tb) \vee (tb \cdot ta \cdot tb \cdot ta)$

Propiedades Definibles

1. Muestra como especificar cada medición $M = (D, TA, TB, HA, HB)$ como una estructura $\mathfrak{A}_M$ sobre el vocabulario $L = \{menor, TA, TB, HA, HB\}$, donde *menor* es una relación binaria (la idea es que menor represente el orden entre las observaciones d_i).
2. Escribe una formula φ tal que una estructura $\mathfrak{A}$ sobre L satisface a φ si y solo si i) la inerpretación $menor^{\mathfrak{A}}$ de la relación *menor* en $\mathfrak{A}$ es un orden total, ii) $TA = D - TB$, y iii) $HA = D - HB$.
3. Demuestra que para cada expresión e en el lenguaje descrito anteriormente existe una fórmula φ tal que e entrega una alerta para una medición M si y solo si $\mathfrak{A}_M$ satisface a φ.

- El dominio de $\mathfrak{A}_M$ es D, la interpretacion de *menor* es el orden lineal total que ya hay sobre D (osea $menor(di, dj)$ si y solo si $di < dj$ en D), y las cuatro relaciones restantes se interpretan como M (osea $TA^{\mathfrak{A}}$ tiene los elementos de D que están en TA en M, etc).
- El and de todas estas cosas:
  - $\forall x \forall y\ x \neq y \rightarrow (menor(x, y) \vee menor(y, x))$
  - $\forall x \forall y \forall z (menor(x, y) \wedge menor(y, z)) \rightarrow menor(x, z)$
  - $\forall x \neg menor(x, x), \forall x TA(x) \leftrightarrow \neg TB(x)$
  - $\forall x HA(x) \leftrightarrow \neg HB(x)$
  - $\forall x TA(x) \leftrightarrow \neg TB(x)$
- Primero se construye, para cada expresión e, una fórmula $\varphi_e(x)$ tal que $\mathfrak{A}_M, \tau \vDash \varphi$ si y solo si $\tau(x) = d$ y e se gatilla en d_i. Definimos por inducción (cada vez que mencionamos un x es una variable no usada en ingún otro lado)
  - Si $e = ta$, $\varphi_e = TA(x)$, lo mismo para el resto.
  - Si $e = e_1 \vee e_2$, $\varphi_e = \varphi_{e_1} \vee \varphi_{e_2}$, y lo mismo para las otras combinaciones booleanas ($\wedge$, $\neg$)
  - Si $e = e_1 \cdot e_2$, $\varphi_e = \varphi_{e_1} \wedge \exists y (menor(x, y) \wedge \varphi_{e_2}(y))$