Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Nicolás Van Sint Jan
Ayudante: Dante Pinto

Ayudantía 14

Repaso Examen

La solución a esta ayudantía se encuentra en el siguiente video.

Problema 1: La tercera es la vencida

Un grupo $(G, \circ)$ se dice conmutativo si para todos $x, y \in G$ se cumple que $x \circ y = y \circ x$. Como notación, definimos $[a, b] = a^{-1} \circ b^{-1} \circ a \circ b$.

1. Demuestre que $a \circ b = b \circ a$ si y solo si $[a, b] = 1$.

2. Decimos que un grupo es generado por $S \subseteq G$ si todo elemento $g \in G$ se puede expresar como producto de elementos e inversos de elementos en S.

   Desarrolle y analice un algoritmo que dado un conjunto finito $S = (g_1, ..., g_n)$ y una operación binaria $\circ$, determine si el grupo generado S y $\circ$ es conmutativo.

3. Definimos el centro de un grupo G como:

   $$Z(G) = \{x \in G \mid \text{ para todo } g \in G. [x, g] = 1\}$$

   Además para cada $g \in G$, definimos el centralizador de g como:

   $$C(g) = \{x \in G \mid [x, g] = 1\}$$

   Demuestre que $Z(G)$ es un subgrupo de G y que para todo $g \in G$, $C(g)$ es un subgrupo de G.

4. Dado un grupo $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, definimos un subproducto aleatorio como:

   $$r = g_1^{\varepsilon_1} \circ ... \circ g_n^{\varepsilon_n} \in G$$

   donde cada ε_i se elige de forma uniforme e independiente del conjunto $\{0, 1\}$.

   Demuestre que si H es un subgrupo propio de G, entonces:

   $$Pr[r \notin H] \geq \frac{1}{2}$$

5. Desarrolle y analice un algoritmo aleatorizado que dados generadores $S = g_1, ..., g_n$ y una operación binaria $\circ$ determine si el grupo generado por S y $\circ$ es conmutativo.

Problema 2: Ecuación de recurrencia

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} n & n \leq 3 \\ T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n & n > 3 \end{cases}$$

Encuentre una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$ y demuestre que se cumple esta propiedad.

Solución: Dado que no podemos usar teorema maestro directamente sobre $T(n)$, podemos acotarla por ambos lados y utilizar el teorema sobre estas otras funciones. Sean:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 3 \\ 2L(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n & n > 3 \end{cases}$$

$$U(n) = \begin{cases} 3 & n \leq 3 \\ 2U(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)\rfloor) + n & n > 3 \end{cases}$$

Podemos usar inducción para demostrar que $L(n) \leq T(n) \leq U(n)$ para todo n. Los casos para $1, 2, 3$ son triviales, mientras que para $L(4)$ tenemos:

$L(4) = 2L(1) + 4 = 6$ $T(4) = 2T(1) + 4 = 6$ $U(4) = 2U(1) + 4 = 10$

Sup. que para todo $k < n$ se cumple que $L(k) \leq T(k) \leq U(k)$, luego:

$$\begin{aligned} L(n) &= 2L\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n \\ &\leq 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n \\ &\leq T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n \\ &= T(n) \\ &\leq 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n \\ &\leq 2U\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n \\ &= U(n) \end{aligned}$$

Luego, aplicando teorema maestro a L y a U tenemos que $n \in \Omega(n^0.5 + \varepsilon)$ y $n \in \Omega(n^0.63 + \varepsilon)$, respectivamente, lo que nos dice que si n es 2,3 y 2,4 regular se cumplirá que $L(n) \in \Theta(n)$ y $U(n) \in \Theta(n)$.

Para que n sea a, b regular debe existir $c < 1$ y n_0 natural tales que para todo $n > n_0$:

$$af(\lfloor n/b \rfloor) \leq cf(n)$$

Ambas demostraciones son análogas, por lo que tomando $a = 2$, $b = 4$ y $f = n$:

$$2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot n$$

Por tanto, usando $n_0 = 1$ y $c = \frac{1}{2}$, tenemos que n es $2, 4$ regular y, análogamente, será también $2, 4$ regular.

De acuerdo a todo lo anterior, tenemos entonces que $T(n) \in \Theta(n)$.

Problema 3: Déjà vu

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + log(T(n-1)) + n & n > 1 \end{cases}$$

Encuentre una constante $k \in \mathbb{N}$ tal que $T(n) \in \Theta(n^k)$ y demuestre que se cumple esta propiedad.

Solución: Siguiendo una estrategia similar, podemos encontrar una cota inferior para T si ignoramos el término logarítmico.

$$L(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ L(n-1) + n & n > 1 \end{cases}$$

Como casos base tenemos $n = 1$ y $n = 2$, que se cumplen trivialmente, por lo que suponiendo que $L(n-1) \leq T(n-1)$ tenemos:

$$\begin{aligned} L(n) &= L(n-1) + n \\ &\leq T(n-1) + n \\ &\leq T(n-1) + log(T(n-1)) + n \\ &\leq T(n) \end{aligned}$$

Luego, expandiendo la recursión, tenemos:

$$\begin{aligned} L(n) &= L(n-1) + n \\ &= L(n-2) + n - 1 + n \\ &= ... \\ &= L(n-i) - \sum_{j=1}^{i} j + i \cdot n \\ &= ... \\ &= n \cdot n - \sum_{j=1}^{n} j \\ &\in \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Finalmente, necesitamos acotar superiormente T, lo que podemos hacer usando inducción.

$$T(1) = 1 \leq 1^2$$

$$T(2) = 1 + log(1) + 2 \leq 2^2$$

Sup. que $T(n-1) \leq c \cdot (n-1)^2$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + log(T(n-1)) + n \\ &\leq c \cdot (n-1)^2 + log(c \cdot (n-1)^2) + n \\ &= cn^2 - 2cn + c + 2log(n-1) + log(c) + n \\ &= cn^2 + n(1-2c) + 2log(n-1) + log(c) + c \end{aligned}$$

Tomando $c = 1$:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq cn^2 + n(1-2c) + 2log(n-1) + log(c) + c \\ &\leq n^2 - n + 2log(n-1) + 1 \end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumplirá para $n \geq 3$, por tanto, tomando $n_0 = 3$ y $c = 1$ sabremos que $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ y entonces $T(n) \in \Theta(n^2)$.