Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Nicolás Van Sint Jan
Ayudante: Dante Pinto

Ayudantía 13

Teoría de Números y Complejidad Promedio

Problema 1: Grupos Conmutativos

Un grupo $(G, \circ)$ se dice conmutativo si para todos $x, y \in G$ se cumple que $x \circ y = y \circ x$. Como notación, definimos $[a, b] = a^{-1} \circ b^{-1} \circ a \circ b$.

1. Demuestre que $a \circ b = b \circ a$ si y solo si $[a, b] = 1$.
2. Decimos que un grupo es generado por $S \subseteq G$ si todo elemento $g \in G$ se puede expresar como producto de elementos e inversos de elementos en S.

   Desarrolle y analice un algoritmo que dado un conjunto finito $S = (g_1, ..., g_n)$ y una operación binaria $\circ$, determine si el grupo generado S y $\circ$ es conmutativo.
3. Definimos el centro de un grupo G como:

   $$Z(G) = \{x \in G \mid \text{ para todo } g \in G. [x, g] = 1\}$$

   Además para cada $g \in G$, definimos el centralizador de g como:

   $$C(g) = \{x \in G \mid [x, g] = 1\}$$

   Demuestre que $Z(G)$ es un subgrupo de G y que para todo $g \in G$, $C(g)$ es un subgrupo de G.
4. Dado un grupo $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, definimos un subproducto aleatorio como:

   $$r = g_1^{\varepsilon_1} \circ ... \circ g_n^{\varepsilon_n} \in G$$

   donde cada ε_i se elige de forma uniforme e independiente del conjunto $\{0, 1\}$.

   Demuestre que si H es un subgrupo propio de G, entonces:

   $$Pr[r \notin H] \geq \frac{1}{2}$$
5. Desarrolle y analice un algoritmo aleatorizado que dados generadores $S = g_1, ..., g_n$ y una operación binaria $\circ$ determine si el grupo generado por S y $\circ$ es conmutativo.

Problema 2: Ordenamiento en tiempo lineal

Suponga que tiene una lista de largo n con números enteros, elegidos de forma uniforme e independiente del intervalo $[0, 100]$.

1. Diseñe un algoritmo que ordene la lista en tiempo lineal.
2. Analice la complejidad de su algoritmo en el peor caso.
3. Analice la complejidad de su algoritmo en el caso promedio.
4. ¿Cómo se compara su algoritmo con el algoritmo de Quicksort?

Problema 3: Déjà vu

Suponga que tiene una lista de largo n con números reales, elegidos de forma uniforme e independiente del intervalo $[0, 100]$.

1. Diseñe un algoritmo que ordene la lista en tiempo lineal.
2. Analice la complejidad de su algoritmo en el peor caso.
3. Analice la complejidad de su algoritmo en el caso promedio.
4. ¿Cómo se compara su algoritmo con el algoritmo de Quicksort?