Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Nicolás Van Sint Jan
Ayudante: Dante Pinto

Ayudantía 13

Repaso Examen

Problema 1: La tercera es la vencida

Un grupo $(G, \circ)$ se dice conmutativo si para todos $x, y \in G$ se cumple que $x \circ y = y \circ x$. Como notación, definimos $[a, b] = a^{-1} \circ b^{-1} \circ a \circ b$.

1. Demuestre que $a \circ b = b \circ a$ si y solo si $[a, b] = 1$.
2. Decimos que un grupo es generado por $S \subseteq G$ si todo elemento $g \in G$ se puede expresar como producto de elementos e inversos de elementos en S.

   Desarrolle y analice un algoritmo que dado un conjunto finito $S = (g_1, ..., g_n)$ y una operación binaria $\circ$, determine si el grupo generado S y $\circ$ es conmutativo.
3. Definimos el centro de un grupo G como:

   $$Z(G) = \{x \in G \mid \text{ para todo } g \in G. [x, g] = 1\}$$

   Además para cada $g \in G$, definimos el centralizador de g como:

   $$C(g) = \{x \in G \mid [x, g] = 1\}$$

   Demuestre que $Z(G)$ es un subgrupo de G y que para todo $g \in G$, $C(g)$ es un subgrupo de G.
4. Dado un grupo $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$, definimos un subproducto aleatorio como:

   $$r = g_1^{\varepsilon_1} \circ ... \circ g_n^{\varepsilon_n} \in G$$

   donde cada ε_i se elige de forma uniforme e independiente del conjunto $\{0, 1\}$.

   Demuestre que si H es un subgrupo propio de G, entonces:

   $$Pr[r \notin H] \geq \frac{1}{2}$$
5. Desarrolle y analice un algoritmo aleatorizado que dados generadores $S = g_1, ..., g_n$ y una operación binaria $\circ$ determine si el grupo generado por S y $\circ$ es conmutativo.

Problema 2: Ecuación de recurrencia

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} n & n \leq 3 \\ T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n & n > 3 \end{cases}$$

Encuentre una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$ y demuestre que se cumple esta propiedad.

Problema 3: Déjà vu

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + log(T(n-1)) + n & n > 1 \end{cases}$$

Encuentre una constante $k \in \mathbb{N}$ tal que $T(n) \in \Theta(n^k)$ y demuestre que se cumple esta propiedad.