Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Nicolás Van Sint Jan
Ayudante: Dante Pinto

Ayudantía 1

Notación asintótica

1. Demuestre que para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y para todo $k, a \in \mathbb{N}$, con $a \geq 2$, se cumple que:

$$log_a^k(n) \in \mathcal{O}(n^\varepsilon)$$

Hint: Puede asumir que $log_a(x) \leq x$ para todo $x > 0$

Queremos demostrar que $\exists c \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n > n_0 : log_a^k(n) \leq c \cdot n^\varepsilon$.

Para se cumpla que $log_a^k(n) \leq c \cdot n^\varepsilon$, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}
log_a^k(n) &\leq c \cdot n^\varepsilon \\
log_a(n) &\leq (c \cdot n^\varepsilon)^{1/k} \\
log_a(n) &\leq \sqrt[k]{c} \cdot n^{\varepsilon/k} \\
\frac{1}{\sqrt[k]{c}} \cdot log_a(n) &\leq n^{\varepsilon/k} \\
log_a(n^{1/\sqrt[k]{c}}) &\leq n^{\varepsilon/k}
\end{aligned}$$

Luego, para utilizar el Hint, necesitamos que se cumpla:

$$\begin{aligned}
& n^{1/\sqrt[k]{c}} = n^{\varepsilon/k} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\sqrt[k]{c}} = \frac{\varepsilon}{k} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt[k]{c} = \frac{k}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad & c = \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^k
\end{aligned}$$

Finalmente, si consideramos $c = \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^k$, bastará que tomemos $n_0 = 1$ y podremos concluir que

$$log_a^k(n) \in \mathcal{O}(n^\varepsilon)$$

2. Suponga que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe y es igual a ℓ. Demuestre que:

- Si $\ell = 0$, entonces $f \in \mathcal{O}(g)$ y $g \notin \mathcal{O}(f)$.

  Por definición de límite tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ significa que $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}. \forall n > N$:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(n) < \varepsilon \cdot g(n)$$

  Luego, tomando $n_0 = max(0, \lceil N \rceil)$ y $c = 1$, se cumple que $f \in \mathcal{O}(g)$.
  Por otra parte, si suponemos que $g \in \mathcal{O}(f)$, esto implica que $\exists c > 0 \exists n_0 > 0. \forall n > n_0$:

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

$$\Rightarrow \frac{g(n)}{f(n)} \geq \frac{1}{c}$$

  Finalmente, considerando $\varepsilon = c$ es claro que encontramos una contradicción con la definición de límite, por tanto $g \notin \mathcal{O}(f)$

- Si $\ell = \infty$, entonces $g \in \mathcal{O}(f)$ y $f \notin \mathcal{O}(g)$.

  Sabemos que si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$, por lo que esta demostración es análoga a la anterior.

- Si $\ell \in \mathbb{R}^+$, entonces $f \in \Theta(g)$.

  Por definición de límite tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \ell$ significa que $\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R}. \forall n > N$:

$$\left|\frac{f(n)}{g(n)} - \ell\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{g(n)} - \ell < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(n) < (\varepsilon + \ell) \cdot g(n)$$

  Luego, tomando $n_0 = max(0, \lceil N \rceil)$ y $c = \ell + 1$, se cumple que $f \in \mathcal{O}(g)$.
  Por otra parte, a partir de la misma definición de límite, tenemos que::

$$-\left(\frac{f(n)}{g(n)} - \ell\right) < \varepsilon$$

$$-\frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon - \ell$$

$$\Rightarrow f(n) > (\ell - \varepsilon) \cdot g(n)$$

  Finalmente, considerando $n_0 = max(0, \lceil N \rceil)$ y $c = \ell - \varepsilon$, con $\varepsilon < \ell$, se cumple que $f \in \Omega(g)$ y, por lo tanto, $f \in \Theta(g)$.

3. Demuestre las siguientes afirmaciones:

- $n! \in \Omega(2^n)$.
  Es claro que:

$$\begin{aligned}
n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ ... \ \cdot n \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot \ ... \ \cdot n \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ ... \ \cdot n \\
&> 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ ... \ \cdot 2 \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

  Luego, considerando $c = 1$ y $n = 4$, tendremos que $n! \in \Omega(2^n)$.

- $n^n \notin \mathcal{O}(n!)$.
  Podemos demostrar esta afirmación utilizando límites. Es fácil ver que:

$$0 < \frac{n!}{n^n}$$

  Además:

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1}{n \cdot \quad n \quad \cdot ... \cdot n} \\
&= 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot ... \cdot \frac{1}{n} \\
&\leq 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

  Por otra parte, es claro que:

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

  Por lo tanto, $n! \in \mathcal{O}(n^n)$ y $n^n \notin \mathcal{O}(n!)$

- $\log(n^n) \in \mathcal{O}(\log(n!))$. Podemos desarrollar $\log(n!)$ como:

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \log(n) + \log(n-1) + ... + \log(n/2) + \log(n/2 - 1) + ... + \log(2) + \log(1) \\
&\geq \log(n/2) + \log(n/2) + ... + \log(n/2) + \log(n/2 - 1) + ... + \log(2) + \log(1) \\
&\geq \frac{n}{2} \cdot \log(n/2) + \log(n/2 - 1) + ... + \log(4) + \log(3) + \log(2) + \log(1) \\
&= \frac{n}{2} \cdot \log(n/2) + \log(n/2 - 1) + ... + \log(2^2) + \log(3) + \log(2) + 0 \\
&\geq \frac{n}{2} \cdot \log(n/2) + \log(n/2 - 1) + ... + \log(2) + \log(3) + \log(2) + \log(2) \\
&= \frac{n}{2} \cdot \log(n/2) + \frac{n}{2} \log(2) \\
&= \frac{n}{2} \cdot (\log(n) - \log(2) + \log(2)) \\
&= \frac{n}{2} \cdot \log(n)
\end{aligned}$$

  Por tanto, si consideramos $c = 1/2$ y $n_0 = 8$, tenemos que $\log(n^n) \in \mathcal{O}(\log(n!))$