



Ayudantía 9

Algoritmos aleatorizados

Problema 1: Multiplicación de Matrices

Sean $A, B, C \in \mathbb{Q}^{n \times n}$. Queremos determinar si $A \cdot B = C$.

1. Diseñe un algoritmo determinista que resuelva el problema y caracterice su tiempo de ejecución.
2. Diseñe un algoritmo aleatorizado que resuelva el problema con un mejor tiempo que el algoritmo anterior.
3. Calcule la probabilidad de error del algoritmo 2.

Problema 2: Descarga de monedas

Suponga que tiene acceso a una función `MonedaCargada` que retorna 0 con probabilidad p y 1 con probabilidad $1 - p$. Utilizando esta función:

1. Construya el algoritmo de Las Vegas `LanzarMoneda`, que retorna 0 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$.
2. Demuestre que su algoritmo retorna los valores 0 y 1 con las probabilidades pedidas.
3. Calcule la probabilidad de fallo de su algoritmo.
4. Modifique el algoritmo para que siempre retorne un output 0 o 1. En promedio, ¿Cuántas veces se debe ejecutar `MonedaCargada`?
5. Construya el algoritmo `LanzarDado` que retorne un número entre 0 y 5 con probabilidad uniforme.

Problema 3: Comunicación aleatorizada

Una persona A desea enviarle un mensaje M , codificado como un string binario de m bits, pero por problemas de conexión solo puede enviar $n < m$ bits.

Para resolver lo anterior, A define $p = \frac{M}{2^m}$ y envía n bits, eligiendo un 1 con probabilidad p y un 0 con probabilidad $1 - p$, de manera independiente para cada bit.

1. Entregue un algoritmo que decodifica el mensaje de A a partir de los n bits y el largo m del mensaje.
2. Acote la probabilidad de que el mensaje decodificado sea incorrecto.
3. ¿Cuántos bits debe enviar A para que la probabilidad de error sea menor a ε ? ¿Es eficiente la solución de A ?