Algoritmos en teoría de números

Parte III

Segundo semestre 2022

IIC2283

Prof. Nicolás Van Sint Jan

Recordatorio: Un primer ingrediente

Pequeño Teorema de Fermat

Sea p un número primo. Si $a \in \{0, \ldots, p-1\}$, entonces

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Corolario

Sea p un número primo. Si $a \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Recordatorio: Primera versión de un test de primalidad

El test de primalidad que vamos a estudiar está basado en estas propiedades ($n \geq 2$):

1. Si n es primo y $a \in \{1, \ldots, n-1\}$, entonces

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

2. Si n es compuesto, entonces **existe** $a \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que

$$a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$$

Recordatorio: Test de primalidad: primera versión

Para $n \geq 2$, defina el conjunto $\mathbb{Z}_n^*$ como:

$$\mathbb{Z}_n^* \quad = \quad \{a \in \{1, \ldots, n-1\} \mid \gcd(a, n) = 1\}$$

Es decir, $\mathbb{Z}_n^*$ es el conjunto de todos los primos relativos de n que son menores que él.

Suponga que n es compuesto. Luego si $a \in \{1, \ldots, n-1\} - \mathbb{Z}_n^*$, entonces $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$.

Test de primalidad entonces depende de qué tan grande es $\mathbb{Z}_n^*$.

Supongamos que $|\mathbb{Z}_n^*| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ para cada número compuesto $n \geq 2$.

Recordatorio: primera versión

TestPrimalidad1(n)

sea a un número elegido de manera uniforme desde $\{1, \ldots, n-1\}$

if EXP$(a, n-1, n) \neq 1$

then return COMPUESTO

else

return PRIMO

Recordatorio: Versión mejorada

TestPrimalidad2(n, k)
    sea $a_1, \ldots, a_k$ una secuencia de números elegidos de
                manera uniforme e independiente desde $\{1, \ldots, n-1\}$
    for $i := 1$ **to** k **do**
        if **EXP**$(a_i, n-1, n) \neq 1$
            then return COMPUESTO
    return PRIMO

Recordatorio: La función ϕ de Euler

Considere la **función de Euler** $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ |\mathbb{Z}_n^*| & n > 1 \end{cases}$$

Teorema

$$\phi(n) \quad \in \quad \Omega\left(\frac{n}{\log_2(\log_2(n))}\right)$$

Conclusión

Para cada número n, el conjunto $\mathbb{Z}_n^*$ tiene un número de elementos cercano a n

- No es cierto que $|\mathbb{Z}_n^*| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ para cada número compuesto $n \geq 2$
- No podemos basar nuestro test en los elementos del conjunto $(\{1, \ldots, n-1\} - \mathbb{Z}_n^*)$

Outline

Test de primalidad: segunda versión

Una observación importante: si n es compuesto, entonces puede existir $a \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$

- Por ejemplo: $3^{15} \bmod 16 = 11$

En lugar de considerar $\mathbb{Z}_n^*$ en el test de primalidad, consideramos:

$$J_n \quad = \quad \{a \in \mathbb{Z}_n^* \mid a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}\}$$

Si demostramos que para cada número compuesto n se tiene que $|J_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{Z}_n^*|$, entonces tenemos un test de primalidad.

- Puesto que para p primo: $|J_p| = |\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$

Test de primalidad: segunda versión

Recuerde que en nuestros algoritmos consideramos $n \geq 2$

TestPrimalidad3(n, k)
    sea $a_1, \ldots, a_k$ una secuencia de números elegidos de
                manera uniforme e independiente desde $\{1, \ldots, n-1\}$
    for $i := 1$ **to** k **do**
        if MCD$(a_i, n) > 1$ **then return** COMPUESTO
        else
            if EXP$(a_i, n-1, n) \neq 1$
                then return COMPUESTO
    return PRIMO

Algunas consideraciones sobre **TestPrimalidad3**

Ejercicio

1. Demuestre que **TestPrimalidad3** funcionan en tiempo polinomial.

2. Suponiendo que para cada número compuesto n se tiene que $|J_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{Z}_n^*|$, demuestre que la probabilidad de error de **TestPrimalidad3** es menor o igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^k$

¿Qué enfoque podríamos usar para demostrar que $|J_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{Z}_n^*|$ para cada número n compuesto?

Outline

Teoría de grupos

Definición

Un conjunto G y una función (total) $\circ : G \times G \to G$ forman un **grupo** si:

1. (**Asociatividad**) Para cada $a, b, c \in G$:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

2. (**Elemento neutro**) Existe $e \in G$ tal que para cada $a \in G$:

$$a \circ e = e \circ a = a$$

3. (**Inverso**) Para cada $a \in G$, existe $b \in G$:

$$a \circ b = b \circ a = e$$

Propiedades básicas

- **Neutro es único**: Si e_1 y e_2 satisfacen 2, entonces $e_1 = e_2$
- **Inverso de cada elemento a es único**: Si $a \circ b = b \circ a = e$ y $a \circ c = c \circ a = e$, entonces $b = c$

Teoría de grupos: algunos ejemplos

Ejercicios

Muestre que los siguientes son grupos:

1. $(\mathbb{Z}_n, +)$, donde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $+$ es la suma en módulo n
2. $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación en módulo n
3. $(J_n, \cdot)$, donde $\cdot$ es la multiplicación en módulo n

Teoría de grupos: subgrupos

Definición

$(H, \circ)$ es un subgrupo de un grupo $(G, \circ)$, para $\emptyset \subsetneq H \subseteq G$, si $(H, \circ)$ es un grupo.

Ejercicio

Demuestre que $(J_n, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$

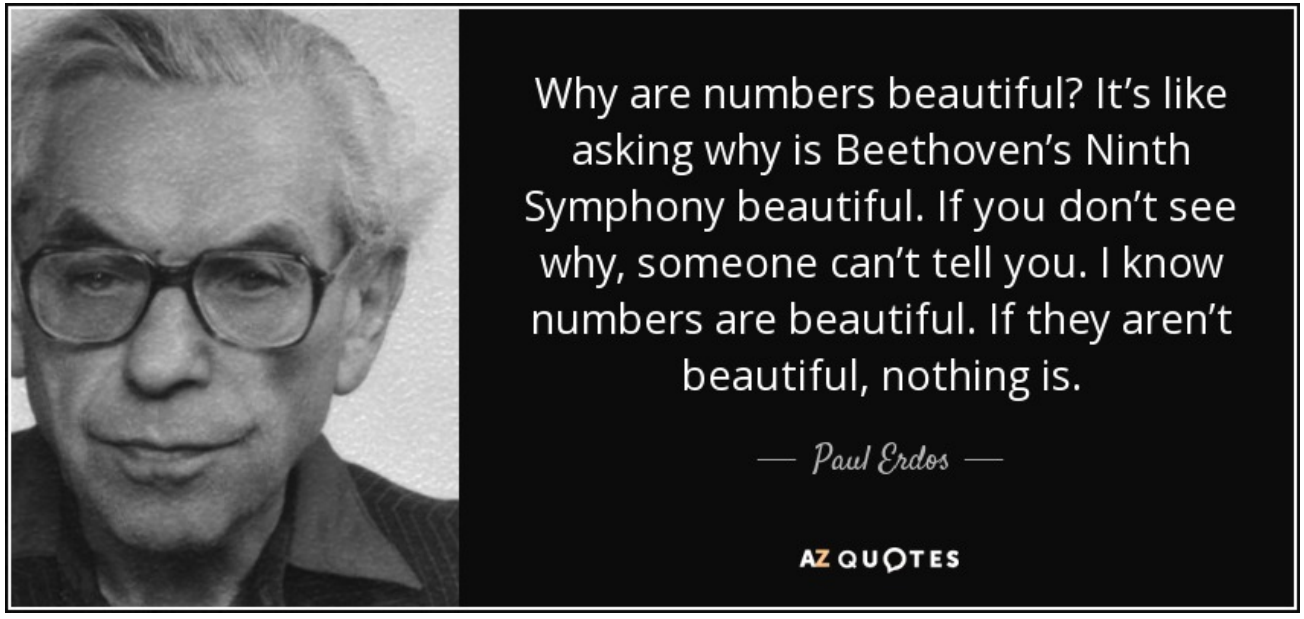
Propiedades básicas

- Si e_1 es el neutro en $(G, \circ)$ y e_2 es el neutro de $(H, \circ)$, entonces $e_1 = e_2$
- Para cada $a \in H$, si b es el inverso de a en $(G, \circ)$ y c es el inverso de a en $(H, \circ)$, entonces $c = b$

Teoría de grupos: una propiedad fundamental

Teorema de Lagrange

Si $(G, \circ)$ es un grupo finito y $(H, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$, entonces $|H|$ divide a $|G|$



Teorema de Lagrange: demostración

Demostración

Suponga que e es el elemento neutro de $(G, \circ)$ y a^{-1} es el inverso de a en $(G, \circ)$

Sea $\sim$ una relación binaria sobre G definida como:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } b \circ a^{-1} \in H$$

Lema

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Teorema de Lagrange: demostración del primer lema

Lema

Sea $\sim$ una relación binaria sobre G definida como:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } b \circ a^{-1} \in H$$

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración

(**Refleja**) $a \sim a$ ya que $a \circ a^{-1} = e$ y $e \in H$.

(**Simétrica**) Suponga que $a \sim b$. Demostramos que $b \sim a$.

Dado que $a \sim b$: $b \circ a^{-1} \in H$, tenemos que demostrar que $a \circ b^{-1} \in H$.
pause Tenemos que:

$$\begin{aligned}
(b \circ a^{-1}) \circ (a \circ b^{-1}) &= (b \circ (a^{-1} \circ a)) \circ b^{-1} \\
&= (b \circ e) \circ b^{-1} \\
&= b \circ b^{-1} \\
&= e
\end{aligned}$$

Teorema de Lagrange: demostración del primer lema

Lema

Sea $\sim$ una relación binaria sobre G definida como:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } b \circ a^{-1} \in H$$

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración

De la misma forma concluimos que $(a \circ b^{-1}) \circ (b \circ a^{-1}) = e$. Por lo tanto,

$$(b \circ a^{-1})^{-1} = a \circ b^{-1}.$$

Concluimos que $a \circ b^{-1}$ está en H, ya que $(H, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$.

Teorema de Lagrange: demostración del primer lema

Lema

Sea $\sim$ una relación binaria sobre G definida como:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } b \circ a^{-1} \in H$$

$\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración

(**Transitiva**) Suponga que $a \sim b$ y $b \sim c$. Tenemos que demostrar que $a \sim c$.

Por hipótesis: $b \circ a^{-1} \in H$ y $c \circ b^{-1} \in H$. Tenemos que demostrar que $c \circ a^{-1} \in H$.

Pero $(c \circ b^{-1}) \circ (b \circ a^{-1}) = c \circ a^{-1}$ y $\circ$ es cerrada en H.

Por lo tanto: $c \circ a^{-1} \in H$ $\square$

Teorema de Lagrange: demostración

Demostración

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$

Lema

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Del lema se concluye el teorema (!). Puesto que las clases de equivalencia de $\sim$ particionan G.

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

1. Se tiene que:

$$\begin{aligned} a \in [e]_\sim &\Leftrightarrow e \sim a \\ &\Leftrightarrow a \circ e^{-1} \in H \\ &\Leftrightarrow a \circ e \in H \\ &\Leftrightarrow a \in H \end{aligned}$$

2. Sean $a, b \in G$, y defina la función f de la siguiente forma:

$$f(x) = x \circ (a^{-1} \circ b)$$

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

Se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x \in [a]_\sim \quad &\Rightarrow \quad a \sim x \\
&\Rightarrow \quad x \circ a^{-1} \in H \\
&\Rightarrow \quad (x \circ a^{-1}) \circ e \in H \\
&\Rightarrow \quad (x \circ a^{-1}) \circ (b \circ b^{-1}) \in H \\
&\Rightarrow \quad (x \circ (a^{-1} \circ b)) \circ b^{-1} \in H \\
&\Rightarrow \quad f(x) \circ b^{-1} \in H \\
&\Rightarrow \quad b \sim f(x) \\
&\Rightarrow \quad f(x) \in [b]_\sim
\end{aligned}
$$

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

Por lo tanto: $f : [a]_\sim \to [b]_\sim$.

Vamos a demostrar que f es una **biyección**, de lo cual concluimos que $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$.

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

f es 1-1:

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad x \circ (a^{-1} \circ b) = y \circ (a^{-1} \circ b) \\
&\Rightarrow \quad (x \circ (a^{-1} \circ b)) \circ (b^{-1} \circ a) = \\
&\qquad\quad (y \circ (a^{-1} \circ b)) \circ (b^{-1} \circ a) \\
&\Rightarrow \quad x \circ (a^{-1} \circ (b \circ b^{-1}) \circ a) = \\
&\qquad\quad y \circ (a^{-1} \circ (b \circ b^{-1}) \circ a) \\
&\Rightarrow \quad x \circ ((a^{-1} \circ e) \circ a) = y \circ ((a^{-1} \circ e) \circ a) \\
&\Rightarrow \quad x \circ (a^{-1} \circ a) = y \circ (a^{-1} \circ a) \\
&\Rightarrow \quad x \circ e = y \circ e \\
&\Rightarrow \quad x = y
\end{aligned}$$

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

f es sobre:

$$\begin{aligned} y \in [b]_\sim &\Rightarrow b \sim y \\ &\Rightarrow y \circ b^{-1} \in H \\ &\Rightarrow (y \circ b^{-1}) \circ (a \circ a^{-1}) \in H \\ &\Rightarrow ((y \circ b^{-1}) \circ a) \circ a^{-1} \in H \\ &\Rightarrow a \sim ((y \circ b^{-1}) \circ a) \\ &\Rightarrow ((y \circ b^{-1}) \circ a) \in [a]_\sim \end{aligned}$$

Teorema de Lagrange: demostración del segundo lema

Lema

Sea $[a]_\sim$ la clase de equivalencia de $a \in G$ bajo la relación $\sim$. Luego:

1. $[e]_\sim = H$
2. Para cada $a, b \in G$: $|[a]_\sim| = |[b]_\sim|$

Demostración

Sea $x = ((y \circ b^{-1}) \circ a)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \circ (a^{-1} \circ b) \\ &= ((y \circ b^{-1}) \circ a) \circ (a^{-1} \circ b) \\ &= y \circ (b^{-1} \circ (a \circ a^{-1}) \circ b) \\ &= y \circ ((b^{-1} \circ e) \circ b) \\ &= y \circ (b^{-1} \circ b) \\ &= y \circ e \\ &= y \end{aligned}$$

□

Test de primalidad: segunda versión (continuación)

Dejamos pendiente la siguiente pregunta:

¿Qué enfoque podríamos usar para demostrar que $|J_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{Z}_n^*|$?

R: Usamos el Teorema de Lagrange.

Dado que $(J_n, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$:

Si existe $a \in (\mathbb{Z}_n^* \setminus J_n)$, entonces $|J_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{Z}_n^*|$

¿Tenemos entonces nuestro test de primalidad?

Test de primalidad: segunda versión (continuación)

Definición

Un número n es de Carmichael si $n \geq 2$, n es compuesto y $|J_n| = |\mathbb{Z}_n^*|$

Ejemplo

561, 1105 y 1729 son números de Carmichael.

Teorema (Alford-Granville-Pomerance)

Existe un número infinito de números de Carmichael.