Transformada rápida de Fourier

Parte IV

Segundo semestre 2022

IIC2283

Prof. Nicolás Van Sint Jan

Recordatorio: Un algoritmo recursivo eficiente para **DFT**

FFT$(a_0, \ldots, a_{n-1})$
  if $n = 2$ **then**
    $y_0 = a_0 + a_1$
    $y_1 = a_0 - a_1$
    return $[y_0, y_1]$
  else
    $[u_0, \ldots, u_{\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(a_0, \ldots, a_{n-2})$
    $[v_0, \ldots, v_{\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(a_1, \ldots, a_{n-1})$
    $\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$
    $\alpha := 1$
    for $k := 0$ **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**
      $y_k := u_k + \alpha \cdot v_k$
      $y_{\frac{n}{2}+k} := u_k - \alpha \cdot v_k$
      $\alpha := \alpha \cdot \omega_n$
    return $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$

Recordatorio: La nueva situación con el algoritmo **FFT**

$$\bar{a} = \overbrace{(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)}^{\text{largo } 2n}$$
$$\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$
$$p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$
$$q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

$O(n \cdot \log_2(n))$

$$\textbf{FFT}(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{2n-1}]$$
$$\textbf{FFT}(\bar{b}) = [z_0, \ldots, z_{2n-1}]$$
$$p(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1})\}$$
$$q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, z_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

$O(n)$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0 \cdot z_0), \ldots$$
$$\ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1})\}$$

$$p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})$$

Todavía nos falta un algoritmo para calcular la **inversa de la transformada discreta de Fourier**.

Outline

La inversa de la DFT

La transformada discreta de Fourier como matriz

Suponga nuevamente que $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ con $n \geq 2$. Luego para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$y_k = p(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\omega_n^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \omega_n^{i \cdot k}$$

La transformada discreta de Fourier puede ser representada entonces de la siguiente forma en **notación matricial**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

La transformada discreta de Fourier como matriz

Definimos la **n-ésima matriz de Fourier $\mathbf{F}_n$** como:

$$\mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz va a ser muy útil al momento de definir la **inversa de la transformada discreta de Fourier**.

La matrices $\mathbf{F}_n$ y $\mathbf{F}_n^*$

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que

$$\mathbf{F}_n[i,j] = (\omega_n^{i-1})^{j-1} = \omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}$$

Por lo tanto $\mathbf{F}_n[i,j] = \mathbf{F}_n[j,i]$, de lo cual se deduce que $\mathbf{F}_n$ es una **matriz simétrica**.

Definición

La **matriz adjunta** A^* de una matriz A se define como

$$A^*[i,j] = \overline{A[j,i]}$$

Donde $\overline{b+ci} = b - ci$ es el conjugado del número complejo $b + ci$

Para calcular $\mathbf{F}_n^*$ necesitamos calcular el conjugado de ω_n^k

El conjugado de ω_n^k

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{(\omega_n^k)} &= \overline{\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k} \\
&= \overline{e^{\frac{2\pi ki}{n}}} \\
&= \overline{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= e^{\frac{-2\pi ki}{n}} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{-k} \\
&= \omega_n^{-k}
\end{aligned}
$$

Las matrices $\mathbf{F}_n$ y $\mathbf{F}_n^*$ (continuación)

Tenemos entonces que para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n^*[i,j] &= \overline{\mathbf{F}_n[j,i]} \\
&= \overline{(\omega_n^{j-1})^{i-1}} \\
&= \overline{\omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}} \\
&= \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)}
\end{aligned}$$

Vamos a utilizar esta propiedad para calcular $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n$.

Las matrices $\mathbf{F}_n$ y $\mathbf{F}_n^*$ (continuación)

Lema

Sea I_n la matriz identidad de tamaño n. Entonces $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n = n \cdot I_n$.

Demostración

Sea $A = \mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n$.

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A[i,i] &= \sum_{k=1}^{n} M_n^*[i,k] \cdot \mathbf{F}_n[k,i] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n \end{aligned}$$

Las matrices $\mathbf{F}_n$ y $\mathbf{F}_n^*$ (continuación)

Demostración

Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_n^*[i,k] \cdot \mathbf{F}_n[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\omega_n^{-(i-1)+(j-1)}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_n^{j-i})^{k-1} \\
&= \frac{(\omega_n^{j-i})^n - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} \qquad \text{(¿Por qué?)} \\
&= \frac{(\omega_n^n)^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = \frac{1^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = \frac{1 - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = 0
\end{aligned}
$$

$\square$

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{2, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_n[i, n+2-j] &= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+2-j-1)} \\
&= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)+(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)} \cdot \omega_n^{(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= (\omega_n^n)^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= 1^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= \mathbf{F}_n^*[i, j]
\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Para $j \in \{2, \ldots, n\}$, concluimos que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_n^*[1,j] \\ \mathbf{F}_n^*[2,j] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^*[n,j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n[1, n+2-j] \\ \mathbf{F}_n[2, n+2-j] \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n[n, n+2-j] \end{pmatrix}$$

Vamos a usar esta propiedad para definir $\mathbf{F}_n^*$ como una **permutación** de $\mathbf{F}_n$.

$\mathbf{F}_n^*$ como una permutación de $\mathbf{F}_n$

Considere la siguiente matriz de permutación de $n \times n$:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la propiedad en la transparencia anterior se concluye que:

$$\mathbf{F}_n^* = \mathbf{F}_n \cdot P_n$$

Calculando la inversa de la DFT

Teorema

Sea $n \geq 2$, $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}) = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$.

Si $\bar{p} = (y_0, y_{n-1}, \ldots, y_1)$, entonces:

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p}) \quad = \quad [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

La demostración del teorema

Demostración

Tenemos que:

$$\mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P_n \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = P_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Demostración

Concluimos que:

$$\mathbf{F}_n \cdot P_n \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dado que $\mathbf{F}_n \cdot P_n = \mathbf{F}_n^*$, tenemos que:

$$M_n^* \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Demostración

Así, puesto que $\mathbf{F}_n^* \cdot \mathbf{F}_n = n \cdot I_n$, tenemos que:

$$n \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

De lo cual concluimos que:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{F}_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Demostración

Así, utilizando la notación matricial para la transformada discreta de Fourier concluimos que:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p})$$

$\square$

Multiplicando polinomios en tiempo $O(n \cdot \log n)$

$$\bar{a} = \overbrace{(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)}^{\text{largo } 2n}$$
$$\bar{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}, 0, \ldots, 0)$$
$$p(x) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$
$$q(x) \mapsto (b_0, \ldots, b_{n-1})$$

$O(n \cdot \log_2(n))$

$$\textbf{FFT}(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{2n-1}]$$
$$\textbf{FFT}(\bar{b}) = [z_0, \ldots, z_{2n-1}]$$
$$p(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1})\}$$
$$q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, z_0), \ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, z_{2n-1})\}$$

$O(n)$

$$\bar{p} = (y_0 \cdot z_0, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1}, \ldots, y_1 \cdot z_1)$$
$$p(x) \cdot q(x) \mapsto \{(\omega_{2n}^0, y_0 \cdot z_0), \ldots$$
$$\ldots, (\omega_{2n}^{2n-1}, y_{2n-1} \cdot z_{2n-1})\}$$

$O(n \cdot \log_2(n))$

$$\frac{1}{2n} \cdot \textbf{FFT}(\bar{p}) = [c_0, \ldots, c_{2n-1}]$$
$$p(x) \cdot q(x) \mapsto (c_0, \ldots, c_{2n-2})$$