Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2283 - Diseño y Análisis de Algoritmos
Profesor: Nicolás Van Sint Jan
Ayudante: Dante Pinto

Ayudantía 3

Dividir para conquistar y Teorema Maestro

1. Utilice el teorema maestro para resolver las siguientes recurrencias, suponiendo que todas las ecuaciones cumplen con que $T(1) = 1$.

   (a) $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ Para utilizar el teorema maestro, identificamos:

   $$a = 9,\ b = 3,\ f(n) = n$$
   $$\Rightarrow n^{\log_b(a)} = n^{\log_3(9)} = n^2$$

   Luego, tomando $\varepsilon = 1$ se cumple que $f(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_b(a)-\varepsilon})$ y por lo tanto $T(n) \in \Theta(n^2)$.

   (b) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\ \log(n)$ Similarmente, tenemos:

   $$a = 3,\ b = 4,\ f(n) = n\log(n)$$
   $$\Rightarrow n^{\log_b(a)} = n^{\log_4(3)}$$

   Dado que $0 < \log_4(3) < 1$, tomando $\varepsilon = 1 - \log_4(3)$ encontramos que $n^{\log_b(a)+\varepsilon} = n$, lo que a su vez significa que $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$.
   Por otra parte, necesitamos que f sea regular.

   $$\begin{aligned} af\left(\frac{n}{b}\right) &= 3 \cdot \frac{n}{4}\log\left(\frac{n}{4}\right) \\ &\leq \frac{3}{4} \cdot n\log(n) \\ &= \frac{3}{4} \cdot f(n) \end{aligned}$$

   Luego, $f(n)$ es regular con $c = 3/4$ y, por lo tanto, $T(n) \in \Theta(n\log(n))$

   (c) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\ \log(n)$ Nuevamente podemos identificar:

   $$a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n\log(n)$$
   $$\Rightarrow n^{\log_b(a)} = n^{\log_2(2)} = n$$

   Es fácil ver que $f(n) \in \Omega(ns^{\log_b(a)})$, pero no se cumplirá que $f(n) \in \Omega(n^{\log_b(a)+\varepsilon})$.
   Sup, que $n\log(n) \in \Omega(n^{1+\varepsilon})$:

   $$\Leftrightarrow n\log(n) \geq c \cdot (n^{1+\varepsilon})$$
   $$\Leftrightarrow \log(n) \geq c \cdot \frac{n^{1+\varepsilon}}{n}$$
   $$\Leftrightarrow \log(n) \geq c \cdot n^{\varepsilon}$$

   Sin embargo, demostramos en la ayudantía 1 que esto no es posible, lo que significa que $n\log(n) \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ y, por lo tanto, no podemos utilizar el teorema maestro en este caso.

2. Considere la ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \alpha \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \beta \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + k \cdot n^{\gamma} & n > 3 \end{cases}$$

Entregue la clasificación de $T(n)$ en notación Θ para los distintos valores de α, β y γ

Es claro que:

$$(\alpha + \beta) \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \;\leq\; \alpha \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \beta \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) \;\leq\; (\alpha + \beta) \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Luego, sean:

$$T_f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (\alpha + \beta) \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + k \cdot n^{\gamma} & n > 3 \end{cases}$$

$$T_c(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (\alpha + \beta) \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + k \cdot n^{\gamma} & n > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_f(n) \leq T(n) \leq T_c(n)$$

$$\Rightarrow T_f(n) \in \Theta(f) \;\wedge\; T_c(n) \in \Theta(f) \rightarrow T(n) \in \Theta(f)$$

Además, es claro que si aplicamos el teorema maestro sobre T_c y T_f obtendremos el mismo resultado, por lo que identificamos:

$$a = (\alpha + \beta),\; b = 2,\; f(n) = k \cdot n^{\gamma}$$

Dado lo anterior, queremos comparar $k \cdot n^{\gamma}$ con $n^{\log_2(\alpha+\beta)}$ y es claro que tanto para $\gamma < \log_2(\alpha + \beta)$ como para $\gamma = \log_2(\alpha + \beta)$ podremos usar directamente el teorema maestro. Nos falta evaluar el caso en que $\gamma > \log_2(\alpha + \beta)$, para el cuál tendremos que evaluar la regularidad de $f(n)$.

Podemos ver que:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot k \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^{\gamma} &\leq (\alpha + \beta) \cdot k \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\gamma} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2^{\gamma}} \cdot k \cdot n^{\gamma} \end{aligned}$$

Es decir, f es regular con $c = \frac{\alpha+\beta}{2^{\gamma}}$ y, por lo tanto:

- Si $\gamma < \log_2(\alpha + \beta)$, $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(\alpha+\beta)})$
- Si $\gamma = \log_2(\alpha + \beta)$, $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(\alpha+\beta) \cdot \log_2(n)})$
- Si $\gamma > \log_2(\alpha + \beta)$, $T(n) \in \Theta(n^{\gamma})$

3. Demuestre usando inducción constructiva que $T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_2(3)})$, con $T(n)$ dado por:

$$T(n) = \begin{cases} e_1 & n \leq 3 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + e_2 \cdot n & n > 3 \end{cases}$$

Hint: Demuestre que $\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists d \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 :$

$$T(n) \leq c \cdot n^{\log_2(3)} - d \cdot n$$

Para demostrar el *Hint* usando inducción, comenzamos por los casos bases. Los casos para $n < 4$ son triviales, sin embargo necesitamos el caso base $n = 4$ para la inducción.

$$\begin{aligned} T(4) &= T(2) + T(2) + T(3) + e_2 \cdot n \\ &= 3e_1 + e_2 \cdot n \in n^{\log_2(3)} \end{aligned}$$

Luego, sup. que para todo $k < n$:

$$T(k) \leq c \cdot k^{\log_2(3)} - d \cdot k$$

Sea $n = 2 \cdot k$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(k) + T(k) + T(k+1) + 2k \cdot e_2 \\ &\leq 2c \cdot k^{\log_2(3)} - 2dk + c(k+1)^{\log_2(3)} - d(k+1) + 2k \cdot e_2 \\ &= 2c \cdot k^{\log_2(3)} + c(k+1)^{\log_2(3)} - 3dk - d + 2k \cdot e_2 \end{aligned}$$

Por simplicidad, definimos $d' = d/2$ y encontramos que lo que queremos demostrar es:

$$\begin{aligned} 2c \cdot k^{\log_2(3)} + c(k+1)^{\log_2(3)} - 3dk - d + 2k \cdot e_2 &\leq c \cdot (2k)^{\log_2(3)} - 2dk \\ 2c \cdot k^{\log_2(3)} + c(k+1)^{\log_2(3)} - c \cdot (2k)^{\log_2(3)} + 2k \cdot e_2 &\leq dk + d \\ 2c \cdot k^{\log_2(3)} + c(k+1)^{\log_2(3)} - c \cdot 3k^{\log_2(3)} + 2k \cdot e_2 &\leq 2d'k + 2d' \\ c(k+1)^{\log_2(3)} - c \cdot k^{\log_2(3)} + 2k \cdot e_2 &\leq d'(k+2) + d'k \end{aligned}$$

Es fácil ver que lo anterior se cumple si se cumplen dos condiciones:

(a) $c(k+1)^{\log_2(3)} - c \cdot k^{\log_2(3)} \leq d'(k+2)$

(b) $2k \cdot e_2 \leq d'k$

De (b) podemos encontrar que $e_2 \leq d$, asegurando la existencia de d, y desarrollando (a) encontramos que es equivalente a:

$$\frac{(k+1)^{\log_2(3)} - k^{\log_2(3)}}{k+2} \leq \frac{d'}{c}$$

Luego, podemos calcular el límite: $\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^{\log_2(3)} - k^{\log_2(3)}}{(k+2)}$ y, al encontrar que su valor es 0, concluir que podemos acotarlo por la constante d'/c y, por tanto asegurar la existencia de c.

A pesar de lo anterior, el límite mostrado no es fácil de calcular sin utilizar algún software, por lo que podemos demostrar esta desigualdad utilizando la generalización del teorema del binomio, que nos dirá:

$$\begin{aligned}
(k+1)^{\log_2(3)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\log_2(3)}{i} (k+1)^{\log_2(3)-i} 1^i \\
&= k^{\log_2(3)} + \log_2(3) \cdot k^{\log_2(3)-1} + \frac{\log_2(3) \cdot (\log_2(3)-1)}{2!} k^{\log_2(3)-2} + \ldots
\end{aligned}$$

Reemplazando ahora esta expresión en la desigualdad desarrollada para (a), podemos ver que el primer término se cancelará con $-k^{\log_2(3)}$, mientras que el resto de los términos consistirá de una constante acompañada de un polinomio con exponente menor a 1, dejando claro que la función será decreciente y, por lo tanto, podrá ser acotada por d'/c.

Por otra parte, al inicio de la demostración supusimos que n es un número par, sin embargo el caso impar es análogo y, por tanto, podemos decir que $\exists c \in \mathbb{R}^+ .\, \exists d \in \mathbb{R}^+ .\, \exists n_0 \in \mathbb{N} .\, \forall n \geq n_0 :$

$$T(n) \leq c \cdot n^{\log_2(3)} - d \cdot n$$

Finalmente, se sigue que $c \cdot n^{\log_2(3)} - d \cdot n \leq c \cdot n^{\log_2(3)}$

$$\Rightarrow T(n) \leq c \cdot n^{\log_2(3)} - d \cdot n \leq c \cdot n^{\log_2(3)}$$
$$\therefore T(n) \in \mathcal{O}(n^{\log_2(3)})$$