

Ayudantía 5

Presentación Tarea 3, MiniMax

Por Bernardita Alliende y Anaís Montanares

3 octubre, 2025



Contenidos

- 1. Búsqueda Adversaria
- 2. Minimax
- 3. Tarea 3



Búsqueda Adversaria

Problemas a desarrollar Teoría de juegos

Problemas de dos jugadores, de turnos, **información perfecta** y **suma cero**.

- Información perfecta: Conocemos toda la información del tablero de juego (estados).
- **Suma cero:** Todo lo que me beneficia a mí, perjudica a mi contrincante en igual medida y viceversa.





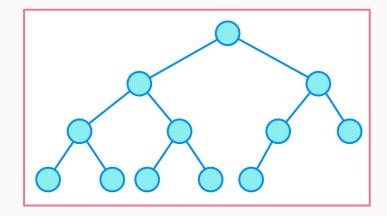
Búsqueda

Podemos considerar un juego como un **espacio de búsqueda**:

- Estado del juego = nodo
- **Jugadas/acciones** = aristas

El **objetivo** será un **estado donde ganamos** (estado objetivo):

- Gato: Tres fichas (nuestras) en línea
- Conecta-4: Cuatro fichas (nuestras) en línea
- Ajedrez: Jaque-mate al rey del oponente





Adversario

Yo **no sé** cómo va a jugar mi adversario, pero **asumo que siempre juega lo que es mejor para él.** En consecuencia, considero que **juega lo peor para mí**.

Luego, si mi adversario toma decisiones subóptimas durante el juego, solo es mejor para mí.



Algoritmo Minimax

La búsqueda puede presentarse como una simulación del juego entre dos jugadores: **Max** y **Min**.

Si es mi turno: Max

Elijo la mejor jugada que tengo disponible, para maximizar el puntaje.

Si es el turno de mi oponente: Min

 Asumo que mi oponente siempre toma las decisiones óptimas (para él) entonces elige la opción que minimiza mi puntaje (la mejor jugada para mi oponente es la que me "hace peor").



Algoritmo Minimax

```
function MAX-VALUE(game, state) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
  v.\ move \leftarrow -\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MIN-VALUE(game, game.RESULT(state, a))
    if v^2 > v then
       v, move \leftarrow v2, a
  return v, move
function MIN-VALUE(game, state) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
  v, move \leftarrow +\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MAX-VALUE(game, game.RESULT(state, a))
    if v^2 < v then
       v, move \leftarrow v2, a
  return v, move
```

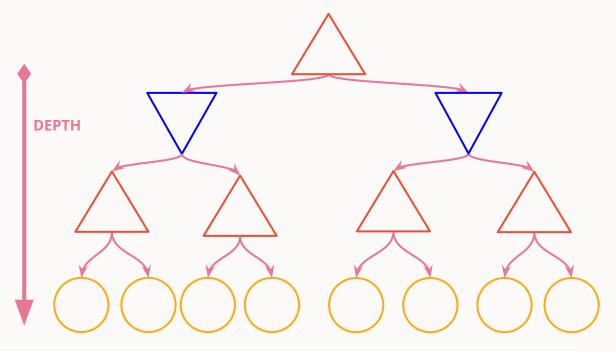


Función de evaluación

- Es como una **heurística** pero en el contexto de búsqueda adversaria
- Asigna puntajes a estados no terminales, lo que permite limitar a un máximo la altura de un árbol

Básicamente, hace una estimación sobre "quién va ganando" llegada una altura máxima definida.





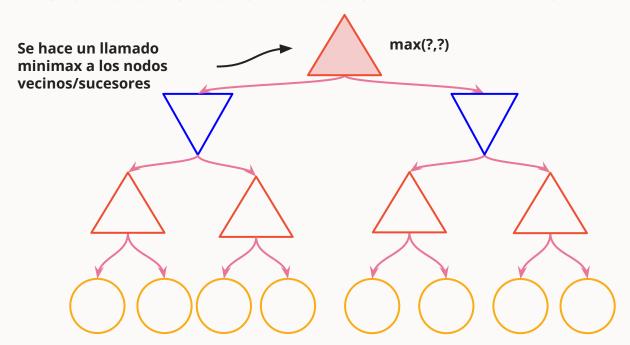






```
 \begin{aligned} \text{MINIMAX(s)} &= \begin{cases} \text{UTILITY}(s, \text{MAX}) & \text{if IS-TERMINAL}(s) \\ \text{máx}_{a \in \text{Actions}(s)} & \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if TO-MOVE}(s) = \text{MAX} \\ \text{mín}_{a \in \text{Actions}(s)} & \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if TO-MOVE}(s) = \text{MIN} \end{cases} \end{aligned}
```



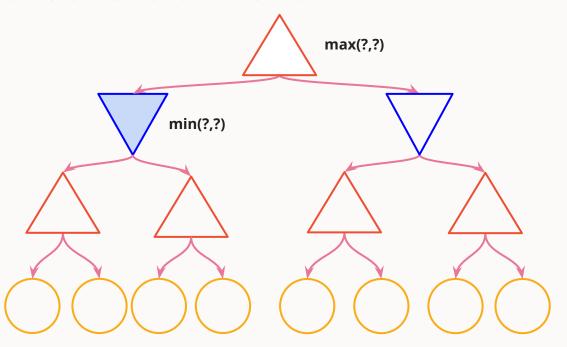










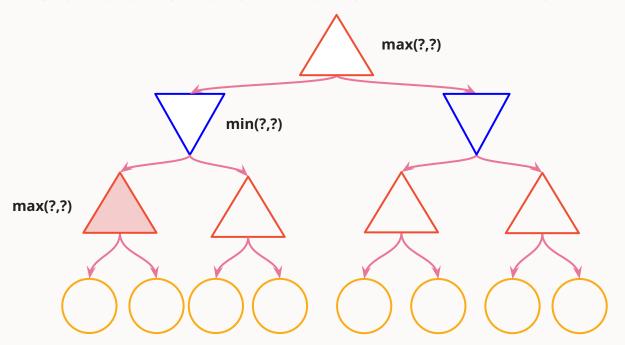










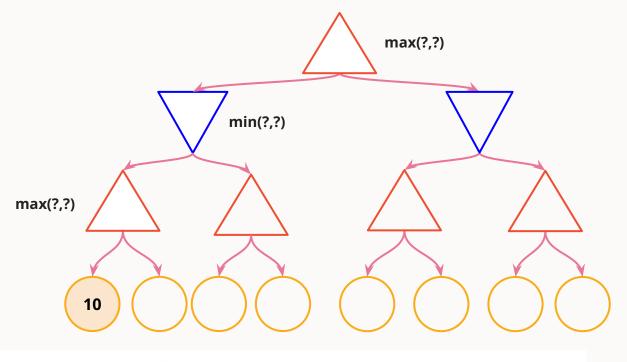
















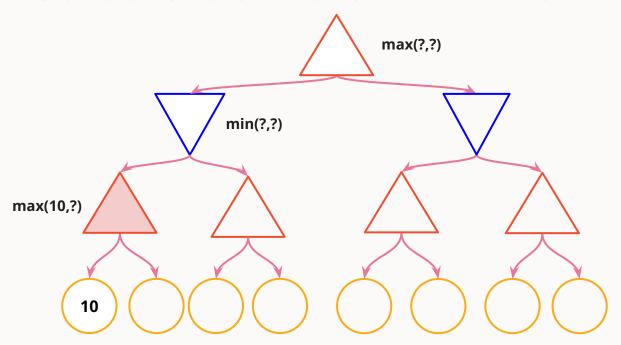


Se calcula el score con la función de evaluación del estado terminal

$$\text{MINIMAX(s)} = \begin{cases} \text{UTILITY}(s, \text{MAX}) & \text{if IS-TERMINAL}(s) \\ \text{m} \acute{\text{ax}}_{a \in \text{Actions}(s)} & \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if TO-MOVE}(s) = N \\ \text{m} \acute{\text{in}}_{a \in \text{Actions}(s)} & \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) & \text{if TO-MOVE}(s) = N \end{cases}$$

if TO-MOVE(s) = MAX



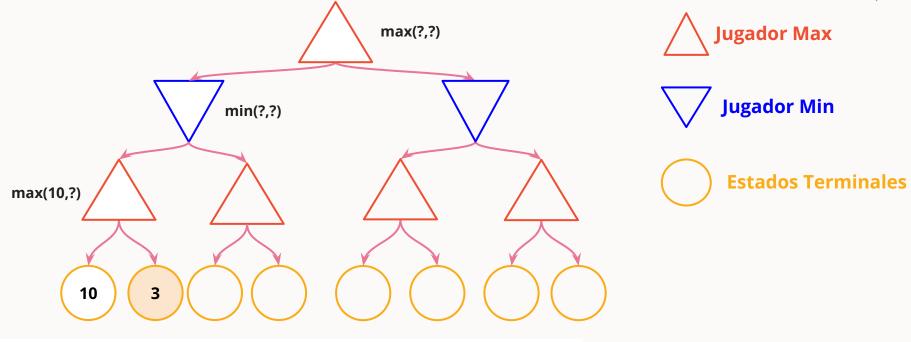










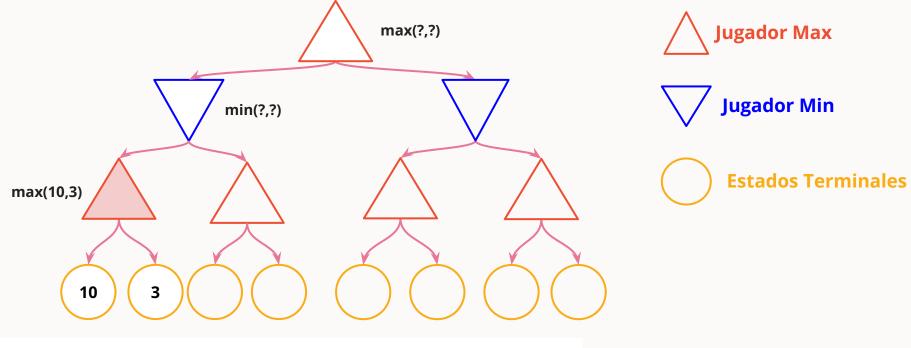


$$MINIMAX(s) = \begin{cases} UTILITY(s, MAX) \\ máx_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \\ mín_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s)

if TO-MOVE(s) = MAX

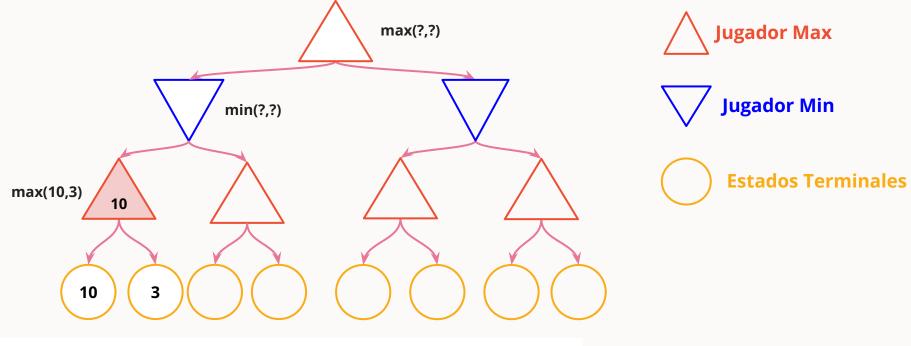




$$MINIMAX(s) = \begin{cases} UTILITY(s, MAX) \\ máx_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \\ mín_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s)if TO-MOVE(s) = MAX



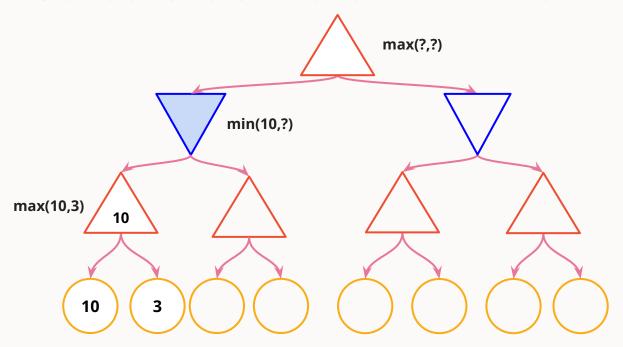


$$\text{MINIMAX(s)} = \begin{cases} \text{UTILITY}(s, \text{MAX}) \\ \text{m} \acute{\text{ax}}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \\ \text{m} \acute{\text{in}}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s) if TO-MOVE(s) = MAX

if TO-MOVE(s) = MAX if TO MOVE(s) = MIN



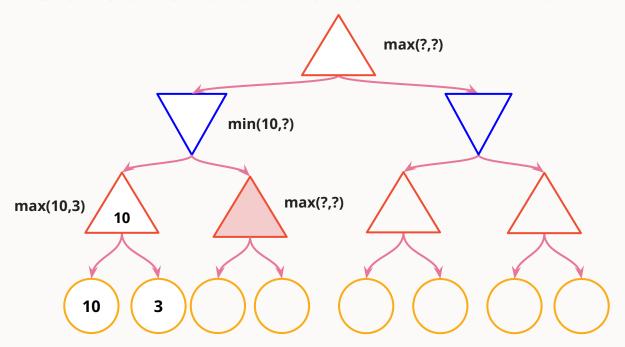










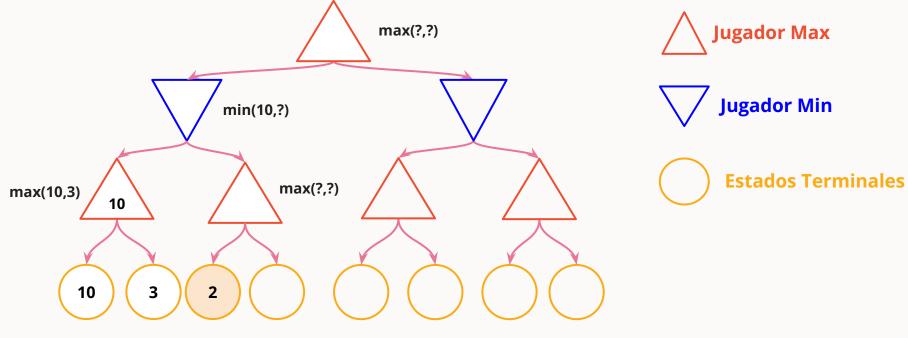










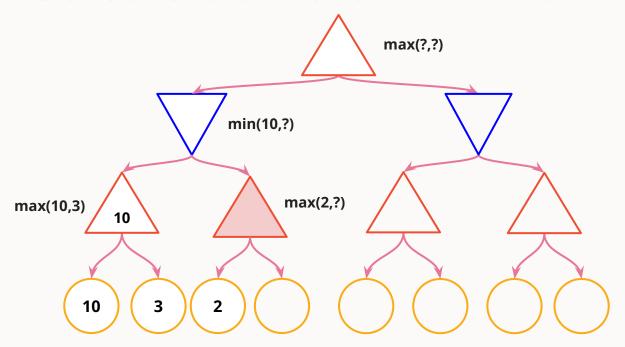


$$MINIMAX(s) = \begin{cases} UTILITY(s, MAX) \\ máx_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \\ mín_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s)

if TO-MOVE(s) = MAX



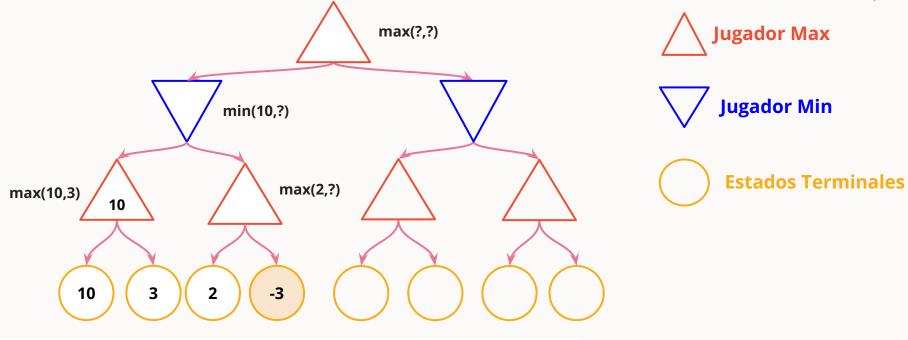


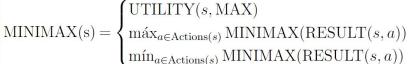






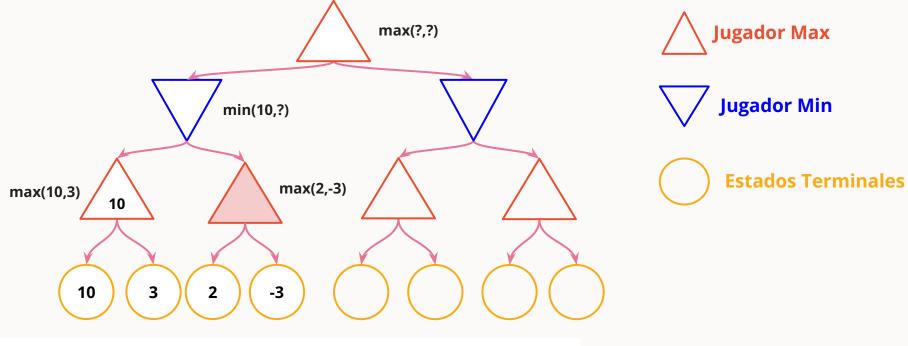






if IS-TERMINAL(s)if TO-MOVE(s) = MAX

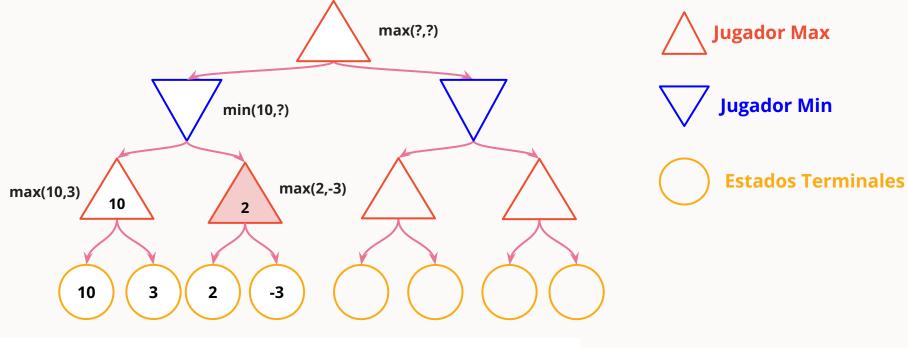




$$MINIMAX(s) = \begin{cases} UTILITY(s, MAX) \\ máx_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \\ mín_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s)if TO-MOVE(s) = MAX

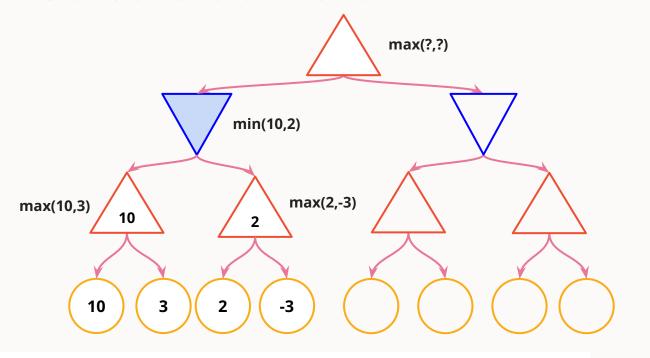




$$MINIMAX(s) = \begin{cases} UTILITY(s, MAX) \\ máx_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \\ mín_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL(s) if TO-MOVE(s) = MAX











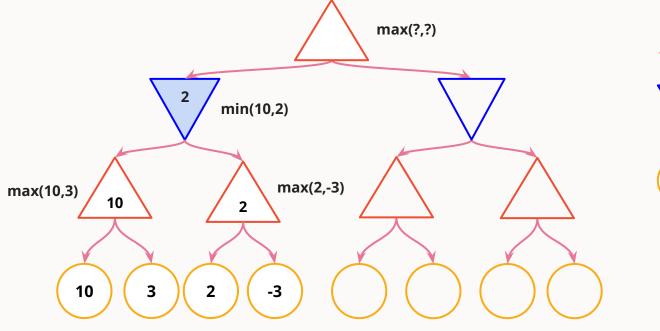
$$\text{MINIMAX(s)} = \begin{cases} \text{UTILITY}(s, \text{MAX}) \\ \text{m} \land \mathbf{x}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{ MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \\ \text{m} \land \mathbf{n}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{ MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \end{cases}$$

if
$$TO\text{-}MOVE(s) = MAX$$

if IS-TERMINAL(s)

if
$$TO\text{-}MOVE(s) = MIN$$









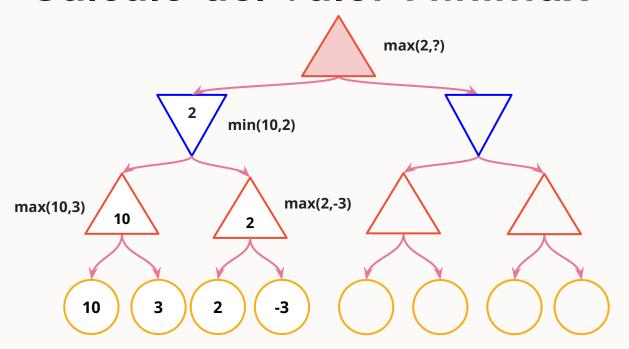
$$\text{MINIMAX(s)} = \begin{cases} \text{UTILITY}(s, \text{MAX}) \\ \text{m} \acute{\text{ax}}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \\ \text{m} \acute{\text{in}}_{a \in \text{Actions}(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s, a)) \end{cases}$$

if IS-TERMINAL
$$(s)$$

if
$$TO\text{-}MOVE(s) = MAX$$

if
$$TO\text{-}MOVE(s) = MIN$$



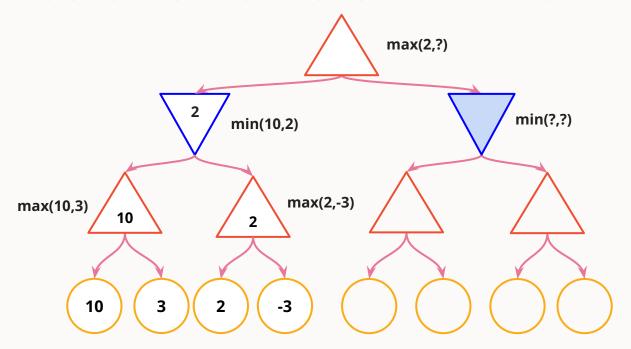










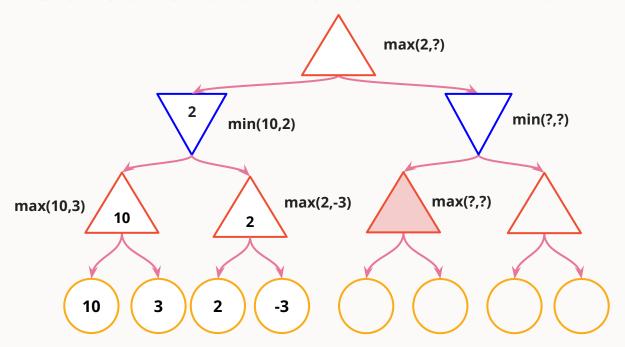










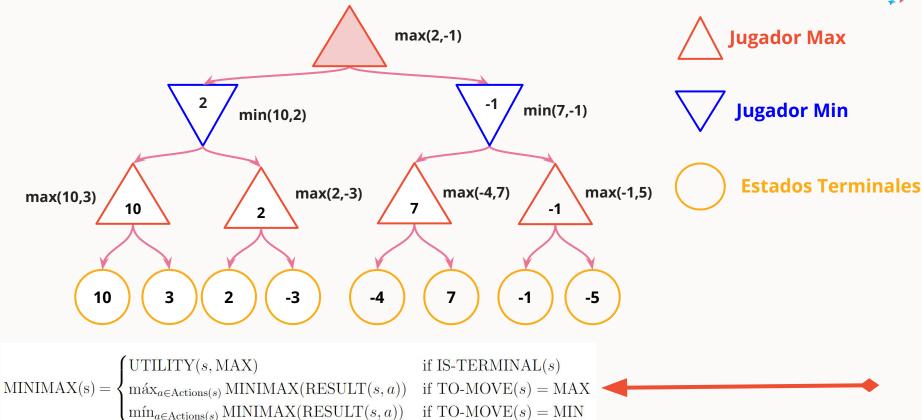




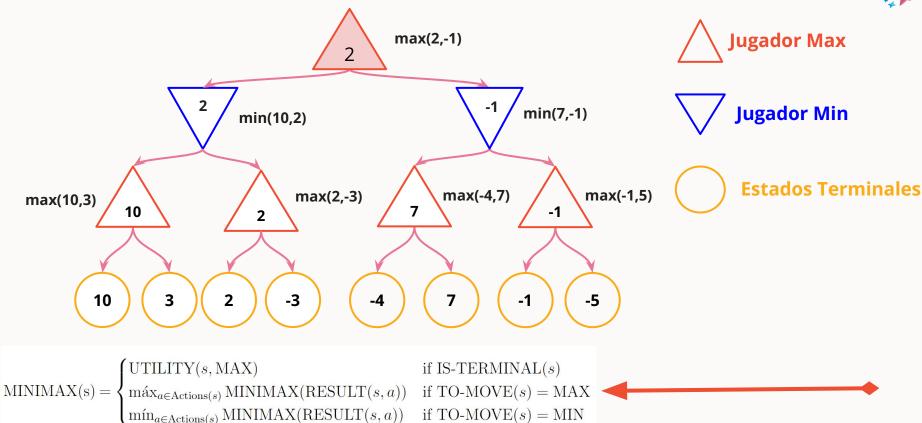






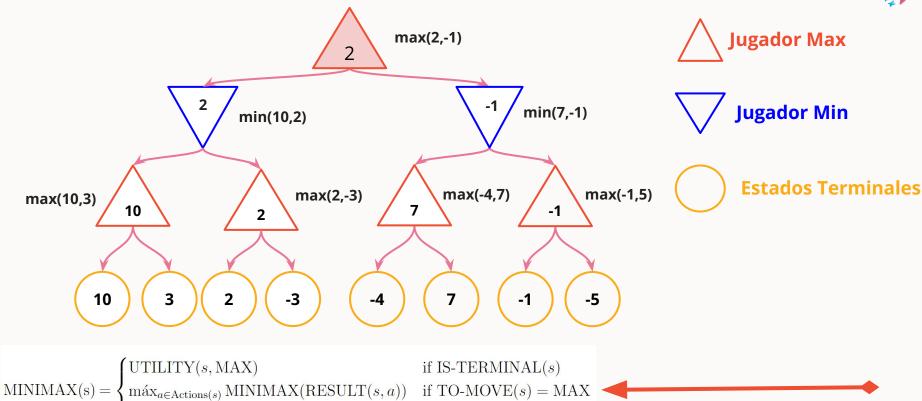




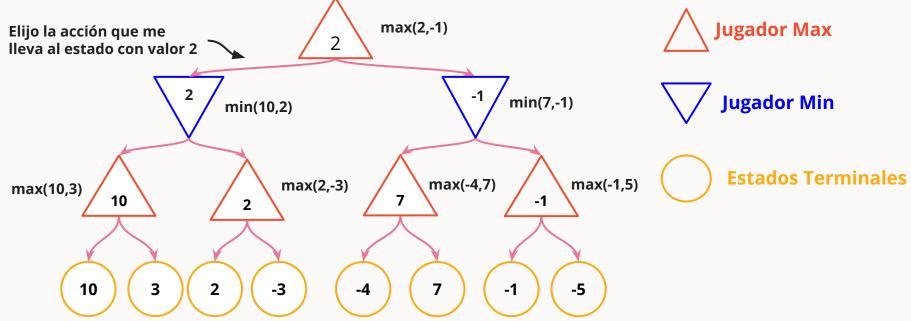


 $\min_{a \in Actions(s)} MINIMAX(RESULT(s, a))$











Rendimiento Minimax

La búsqueda Minimax corre DFS **sobre el árbol de estados completo.** Esto genera muchísimos estados para juegos complejos (ej. Ajedrez)

Para mejorar el rendimiento podemos:

- Acotar la profundidad del árbol de búsqueda
- Podar ramas del árbol de búsqueda



Poda Alpha-Beta

Podemos podar buena parte del árbol si guardamos dos parámetros adicionales en cada llamada a la búsqueda Minimax:

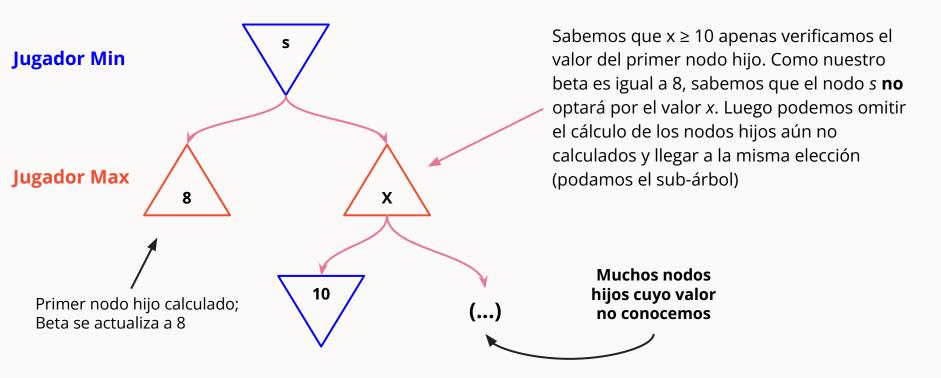
- Alpha: cota **inferior** del valor de un nodo
- Beta: cota **superior** del valor de un nodo

Tener estas cotas nos indica si es necesario calcular un nodo. Esta decisión **no afecta la optimalidad de la solución.**

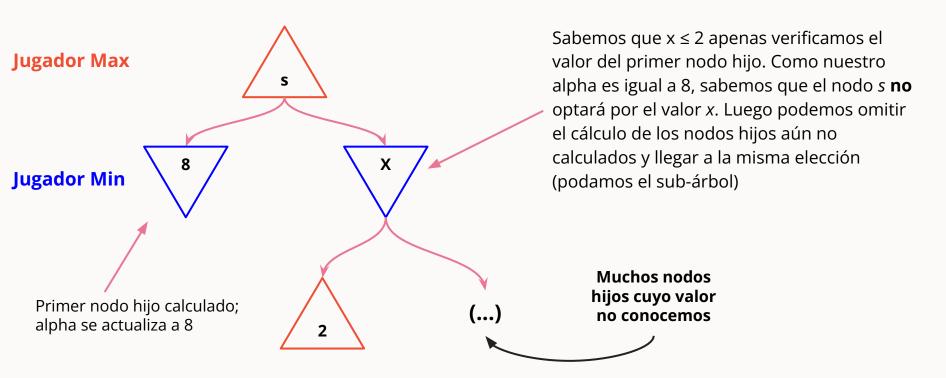


```
function MAX-VALUE(game, state, \alpha, \beta) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
   v \leftarrow -\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MIN-VALUE(game, game.RESULT(state, a), <math>\alpha, \beta)
     if v^2 > v then
        v, move \leftarrow v2, a
        \alpha \leftarrow \text{MAX}(\alpha, \nu)
     if v > \beta then return v, move
  return v. move
function MIN-VALUE(game, state, \alpha, \beta) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
   v \leftarrow +\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MAX-VALUE(game, game.RESULT(state, a), \alpha, \beta)
     if v^2 < v then
        v, move \leftarrow v2, a
        \beta \leftarrow MIN(\beta, \nu)
     if v < \alpha then return v, move
  return v, move
```

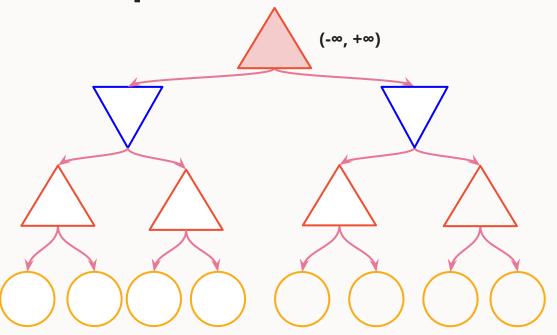
Poda Alpha-Beta - Cota superior Beta



Poda Alpha-Beta - Cota inferior Alpha





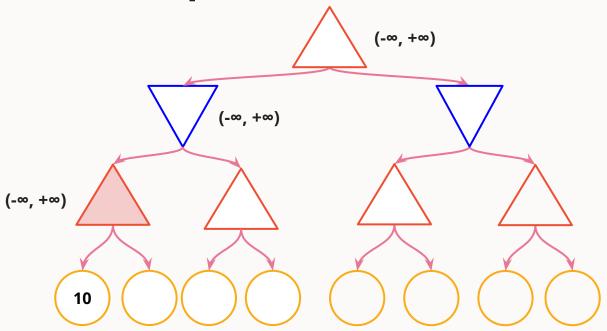










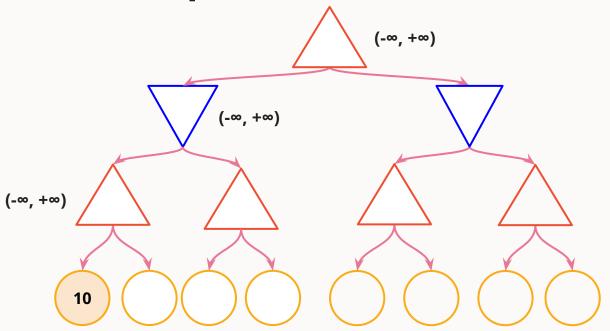










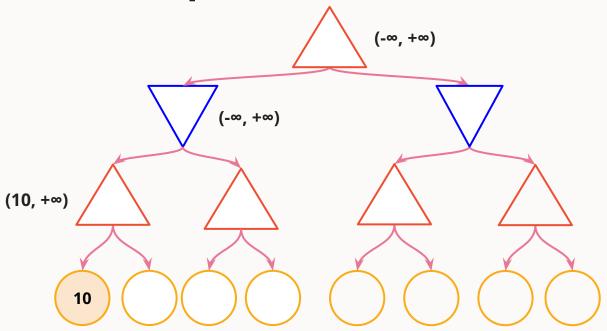










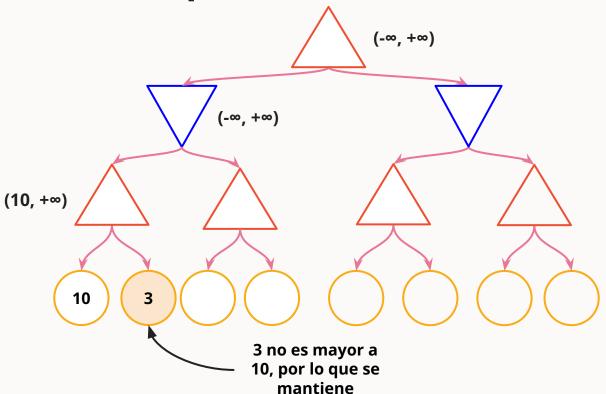










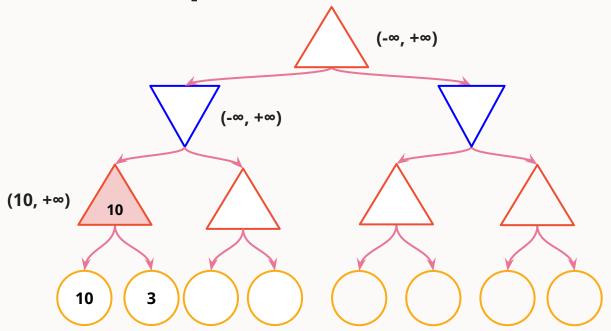










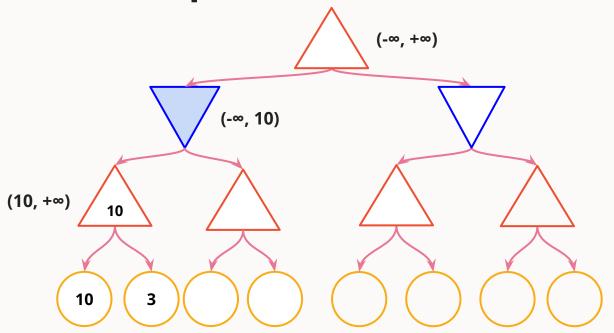










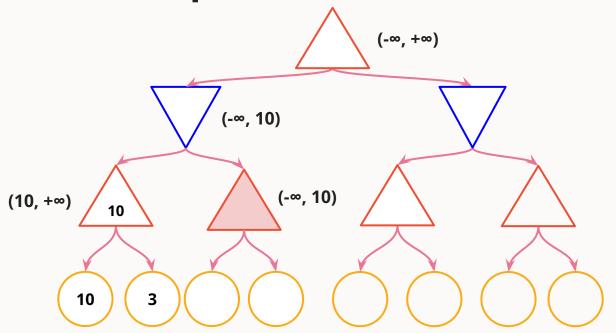










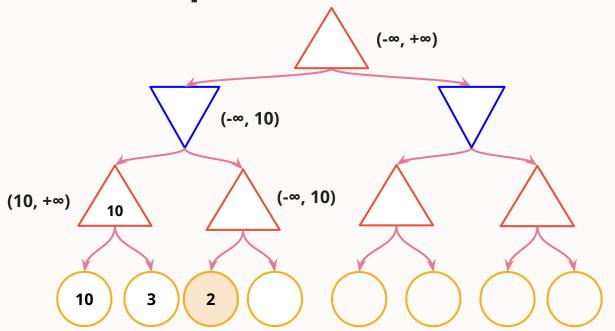










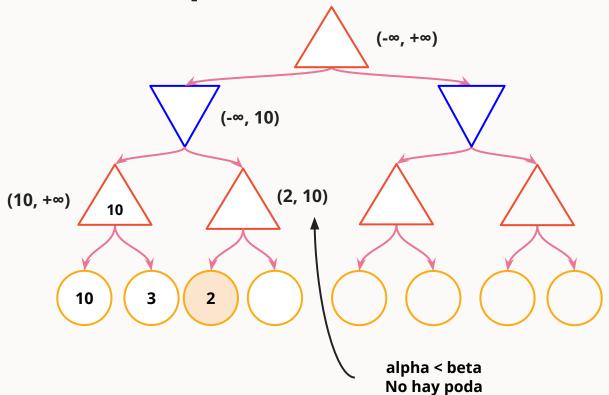










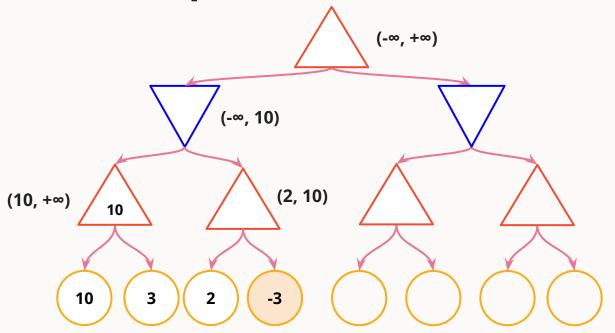










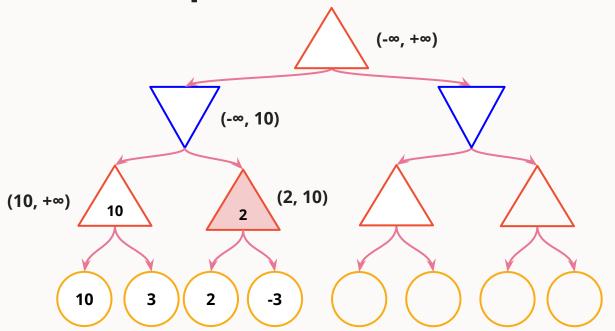










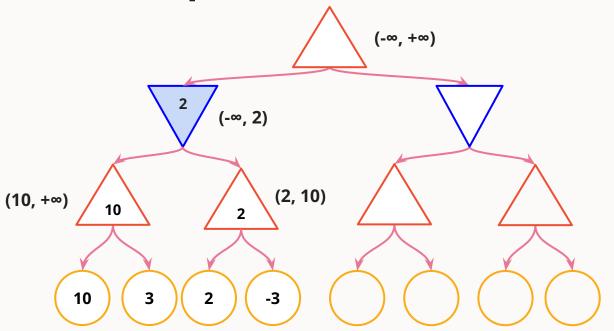










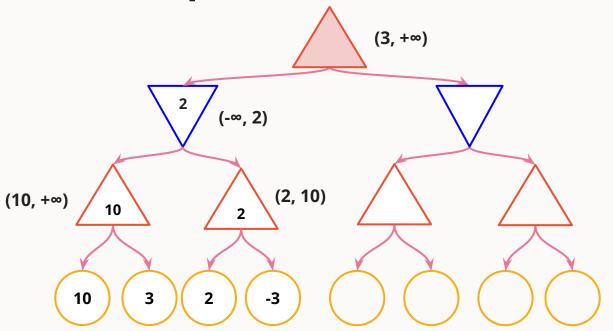










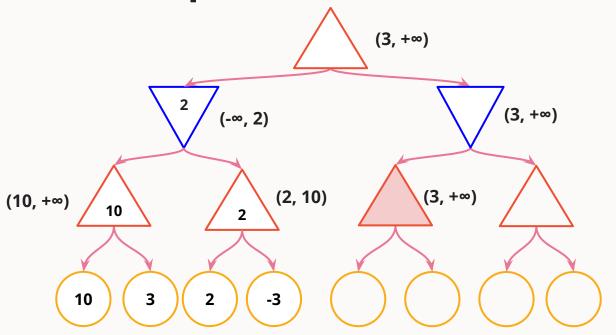










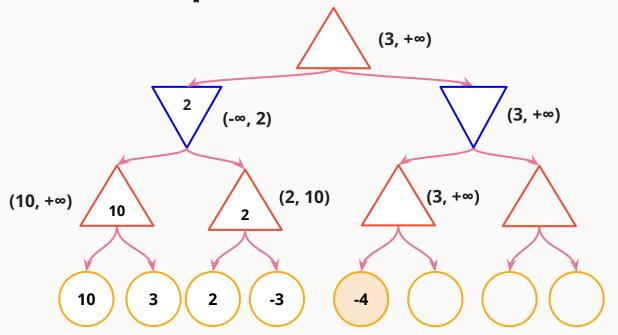










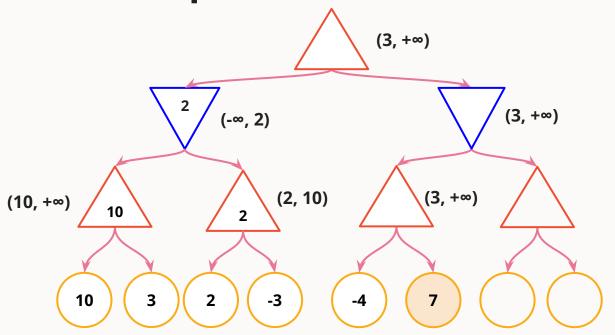










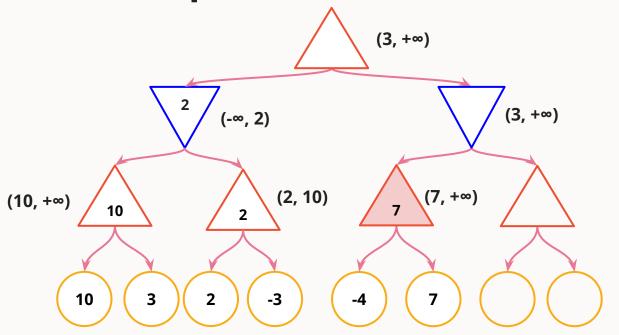










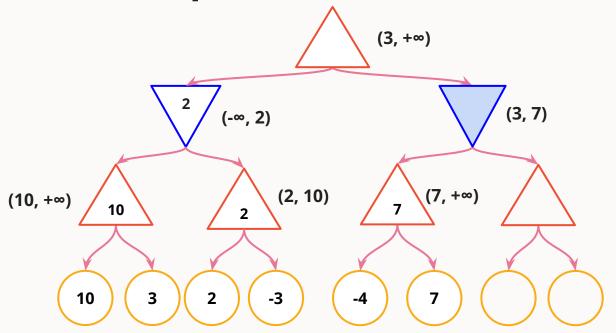










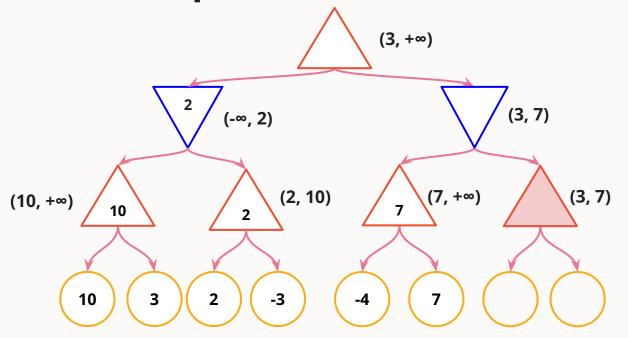










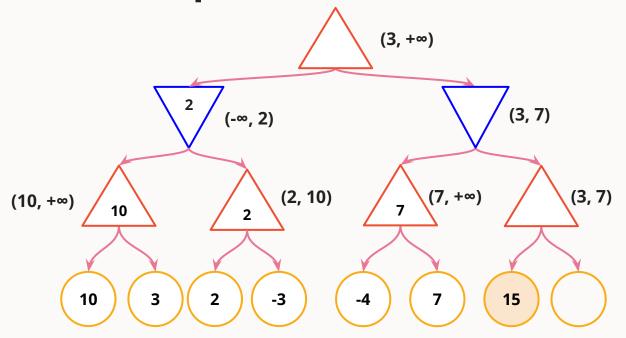










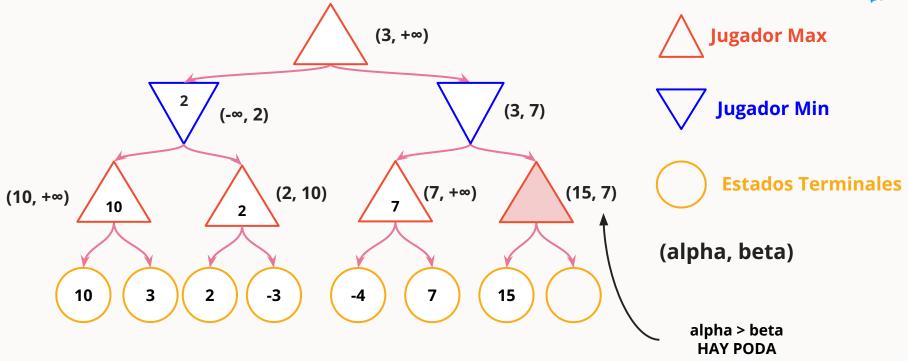




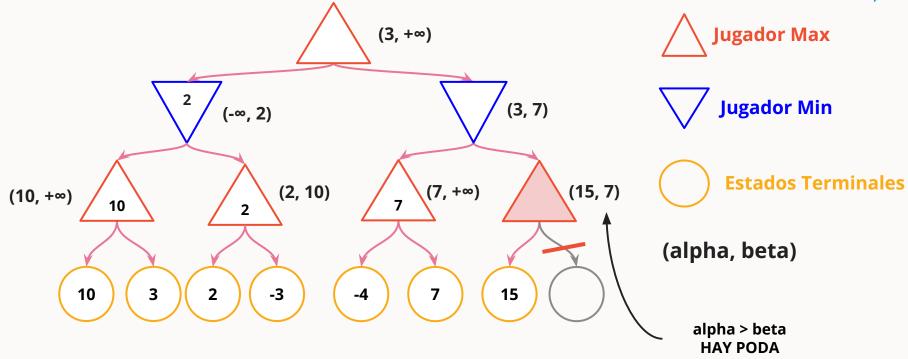




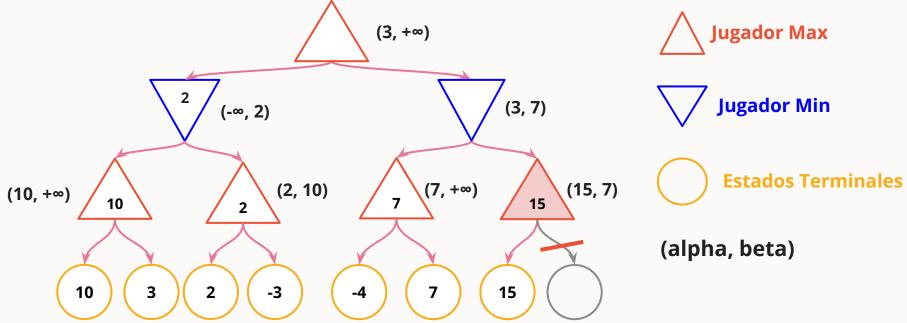




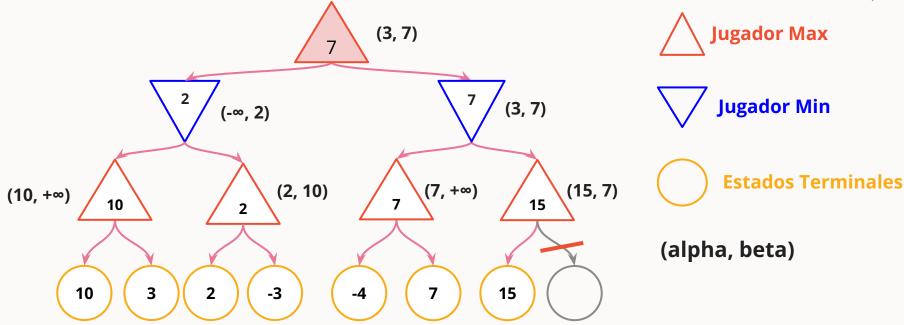














Aunque en este ejemplo solo se eliminó un nodo, hay casos en que puede eliminar ramas enteras de un árbol. Influye el orden de los nodos, por lo que funciona mejor cuando las jugadas están ordenadas por prioridad.

Lo importante es que NO afecta la optimalidad, ya que solamente elimina nodos que no pueden mejorar la solución.



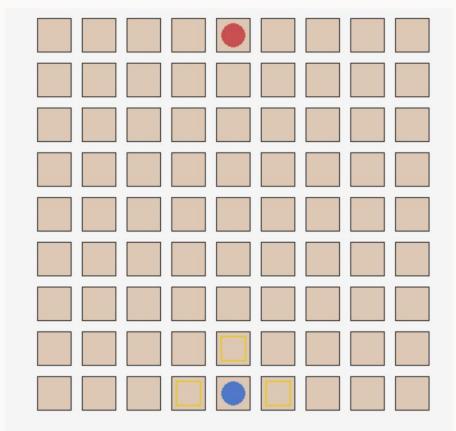
Tarea 3



DCC Quoridor

Juego

- 2 jugadores adversarios
- Cada jugador posee 10 paredes
- Cada turno se debe decidir si poner una pared o mover el peón
- **SIEMPRE** debe existir un camino para ganar
- OBJETIVO: llegar al extremo opuesto antes que el oponente



Mode: MOVE | Turn: Player 1

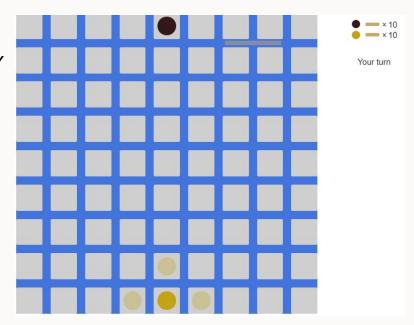
Walls left player 1: 10 Walls left player 2: 10





Juego

Link: https://es.igre.games/quoridor-online/play/





Actividades

- Act. 1: Poda Alpha-Beta
- Act. 2: Comparación profundidades
- Act. 3: Comparación de funciones de evaluación
- Act. 4: Nueva función de evaluación



```
function MAX-VALUE(game, state, \alpha, \beta) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
   v \leftarrow -\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MIN-VALUE(game, game.RESULT(state, a), <math>\alpha, \beta)
     if v^2 > v then
        v, move \leftarrow v2, a
        \alpha \leftarrow \text{MAX}(\alpha, \nu)
     if v > \beta then return v, move
  return v. move
function MIN-VALUE(game, state, \alpha, \beta) returns a (utility, move) pair
  if game.IS-TERMINAL(state) then return game.UTILITY(state, player), null
   v \leftarrow +\infty
  for each a in game. ACTIONS(state) do
     v2, a2 \leftarrow MAX-VALUE(game, game.RESULT(state, a), \alpha, \beta)
     if v^2 < v then
        v, move \leftarrow v2, a
        \beta \leftarrow MIN(\beta, \nu)
     if v < \alpha then return v, move
  return v, move
```



```
player1 = MinimaxPlayer("AI 1", depth=3, eval_fun=evaluate, use_alphabeta=True)
player2 = MinimaxPlayer("AI 2", depth=2, eval_fun=chat_gpt_eval, use_alphabeta=True)
```

```
def minimax(game, player_id,

# Poda alfa-beta
if use_alphabeta:

# COMPLETAR
pass
```

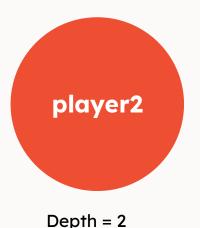


- Act. 1: Poda Alpha-Beta
- Act. 2: Comparación profundidades
- Act. 3: Comparación de funciones de evaluación
- Act. 4: Nueva función de evaluación



Comparación profundidades





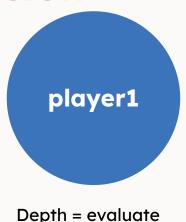
player1 = MinimaxPlayer("AI 17, depth=3, eval_fun=evaluate, use_alphabeta=True)
player2 = MinimaxPlayer("AI 2", depth=2, eval_fun=chat_gpt_eval, use_alphabeta=True)



- Act. 1: Poda Alpha-Beta
- Act. 2: Comparación profundidades
- Act. 3: Comparación de funciones de evaluación
- Act. 4: Nueva función de evaluación

Comparación de funciones de evaluación







Depth = chat_gpt_eval

```
player1 = MinimaxPlayer("AI 1", depth=3, eval_fun=evaluate, use_alphabeta=True)
player2 = MinimaxPlayer("AI 2", depth=2, eval_fun=chat_gpt_eval_use_alphabeta=True)
```



- Act. 1: Poda Alpha-Beta
- Act. 2: Comparación profundidades
- Act. 3: Comparación de funciones de evaluación
- Act. 4: Nueva función de evaluación



Nueva función de evaluación



Importante

- Reportar TODOS los experimentos pedidos
- Las profundidades más altas pueden demorarse, así que partan con anticipación
- Para el desarrollo, se recomienda apagar la visualización, así se demora menos y hay menos riesgo de quedarse pegado



DCCBrazo







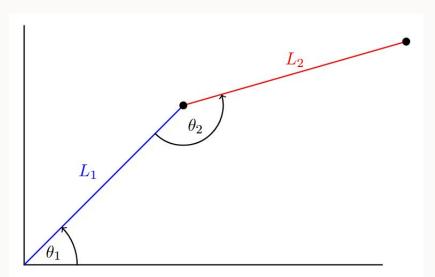
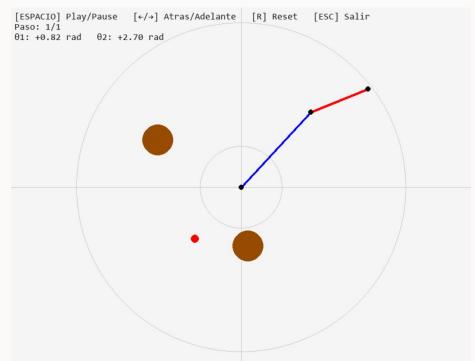


Figura 2: Componentes del brazo





- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



Act. 1: Ecuaciones y heurística

Deberás implementar dos funciones:

- ang_to_cart(theta1, theta2, L1, L2): Función que dado los ángulos theta1, theta2 y los largos L1, L2 de los segmentos del brazo, retorna la posición del extremo de cada segmento.
- heuristic_trig(state, goal, L1, L2): Función heurística que recibe el estado (los ángulos del brazo), el objetivo (las coordenadas a las que queremos que llegue el final del brazo) y los largos de los segmentos del brazo



ang_to_cart()

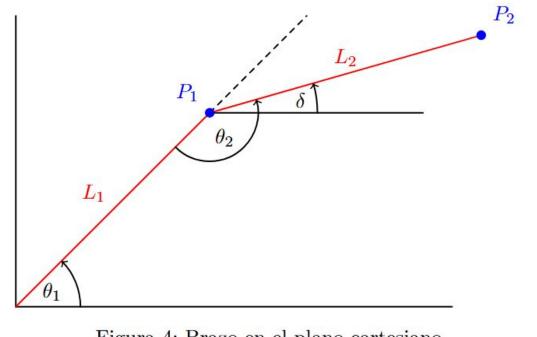


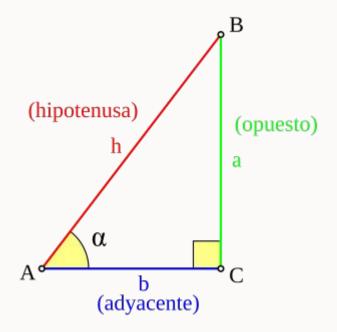
Figura 4: Brazo en el plano cartesiano



$$sen \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

$$\cos \alpha = rac{ ext{adyacente}}{ ext{hipotenusa}} = rac{b}{h}$$

$$\operatorname{tg} lpha = rac{\operatorname{opuesto}}{\operatorname{adyacente}} = rac{a}{b}$$





heuristic_trig()

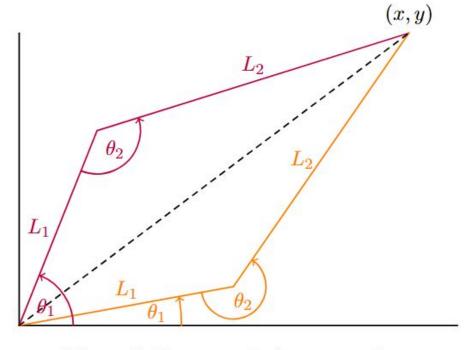
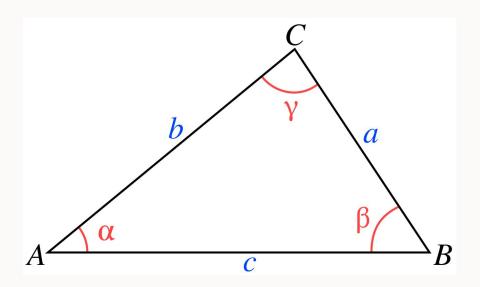


Figura 5: Brazo en el plano cartesiano





$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\coslpha, \ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\coseta.$$



- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



Act. 2: Problemas sin obstáculos

- BFS
- A* con heurística zero
- A* con heurística heuristic_trig



- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



Act. 3: Problemas con obstáculos

- BFS
- A* con heurística zero
- A* con heurística heuristic_trig



- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



Act. 4: Weighted A*

- A* con heurística heuristic_trig y w = 2
 A* con heurística heuristic_trig y w = 3
 A* con heurística heuristic_trig y un valor de w que te resulte interesante



- Act. 1: Ecuaciones y heurística
- Act. 2: Problemas sin obstáculos
- Act. 3: Problemas con obstáculos
- Act. 4: Weighted A*
- Act. 5: Búsqueda Anytime



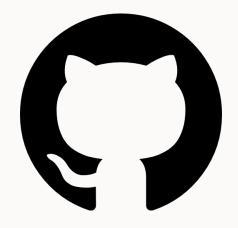
Act. 5: Búsqueda Anytime

- A grandes rasgos, les pedimos implementar una búsqueda donde el peso (w) es **variable**

$$w = rac{c_{ ext{ult}}}{\min_{s \in Open}(g(s) + h(s))}$$



Pueden utilizar las issues para responder sus dudas :)





Dudas