IIC3253

Funciones de hash

Marvin Minsky: A computer scientist is someone who believes that hashing is possible

Mencionado por Jeffrey Ullman en una charla sobre hashing

Funciones de hash criptográficas

Función de un espacio de posibles mensajes a un espacio de mensajes de largo fijo:

$$h : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$$

$\mathcal{M}$ es el espacio de mensajes y $\mathcal{H}$ es el espacio de posibles valores de la función de hash

- Por ejemplo, $\mathcal{M} = \{0,1\}^*$ y $\mathcal{H} = \{0,1\}^{128}$
- Decimos que $h(m)$ es el *hash* del mensaje m

Una propiedad básica de las funciones de hash

Debe existir un algoritmo eficiente que, dado $m \in \mathcal{M}$, calcula $h(m)$

Una primera propiedad fundamental de las funciones de hash

No debe existir un algoritmo eficiente que, dado $x \in \mathcal{H}$, encuentra $m \in \mathcal{M}$ tal que $h(m) = x$

Esta propiedad se denota como ser resistente a preimagen

¿Por qué insistimos en el adjetivo "criptográficas"?

Considere la siguiente función de hash:

$$h(m) \ = \ (A \cdot m + B) \mod C$$

Suponemos que los mensajes son números naturales

- A, B y C son constantes, C es un número primo

¿Es esta función resistente a preimagen?

La función anterior no es resistente a preimagen

Considere $h(m) = (13 \cdot m + 97) \bmod 641$

Suponga que tiene el valor "de hash" 200. ¿Puede encontrar un mensaje m tal que $h(m) = 200$?

Una combinación de herramientas de aritmética modular nos pueden dar una respuesta rápida: 501

$$h(501) = (13 \cdot 501 + 97) \mod 641 = 200$$

Una segunda propiedad fundamental de las funciones de hash

No debe existir un algoritmo eficiente que pueda encontrar $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ tales que $m_1 \neq m_2$ y $h(m_1) = h(m_2)$

Esta propiedad se denota como ser resistente a colisiones

Las funciones de hash en la práctica

```python
import hashlib

if __name__ == "__main__":
    h1 = hashlib.md5(b"este es mi primer mensaje")
    h2 = hashlib.md5(
        b"El objetivo del curso es introducir al alumno a "
        b"los conceptos fundamentales de criptografia y "
        b"seguridad computacional, poniendo enfasis tanto en "
        b"los aspectos formales necesarios para definir"
    )
    h3 = hashlib.md5(b"este es mi prXmer mensaje")

    print(h1.hexdigest())
    print(h2.hexdigest())
    print(h3.hexdigest())
```

Output: 30635f74755bfb8c9faeac3ab106c2ab

c0e1fe34f764e458463c4fd8a91355d0

2c5956c357577eed8e76608cf40e79ee

Las funciones de hash en la práctica

```python
import hashlib

if __name__ == "__main__":
    h1 = hashlib.sha256(b"este es mi primer mensaje")
    h2 = hashlib.sha256(
        b"El objetivo del curso es introducir al alumno a "
        b"los conceptos fundamentales de criptografia y "
        b"seguridad computacional, poniendo enfasis tanto en "
        b"los aspectos formales necesarios para definir"
    )
    h3 = hashlib.sha256(b"este es mi prXmer mensaje")

    print(h1.hexdigest())
    print(h2.hexdigest())
    print(h3.hexdigest())
```

Output:

105f0a373501caffc828ce3da6b0b9c7569c68194f1db1057831fa8b3844cc8c

5a022e6e371bf654c33025642eb147a432f26dc3c3206ec992fc7725799c3868

5d94508d4fb9a1daeade09995904a281ccbdd165d2dc7a24798fcff9a80c96e7

¿Para qué son usadas las funciones de hash criptográficas?

Aplicaciones de las funciones de hash

Las funciones de hash (criptográficas) tienen muchas aplicaciones prácticas, y nos van a acompañar durante todo el curso

Vamos ahora a ver algunas aplicaciones que dan una idea de su utilidad

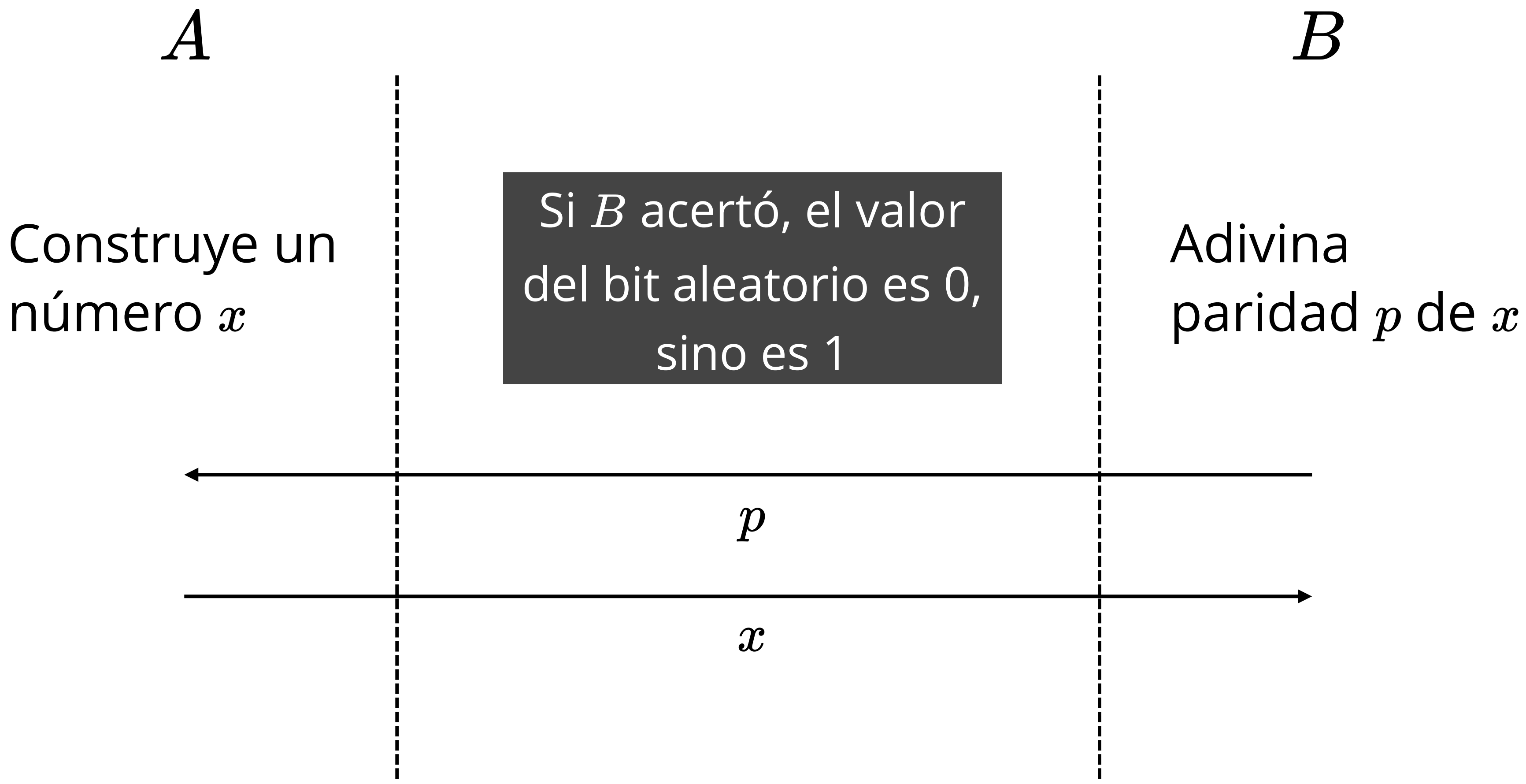
Una primera aplicación: integridad de un documento

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{D} \arrow[r] \arrow[d, dashed, red] & h(D) & \\
\color{red}{\boxed{D'}} \arrow[r] & h(D') & \cancel{\text{¿}h(D') = h(D)?}
\end{tikzcd}
$$

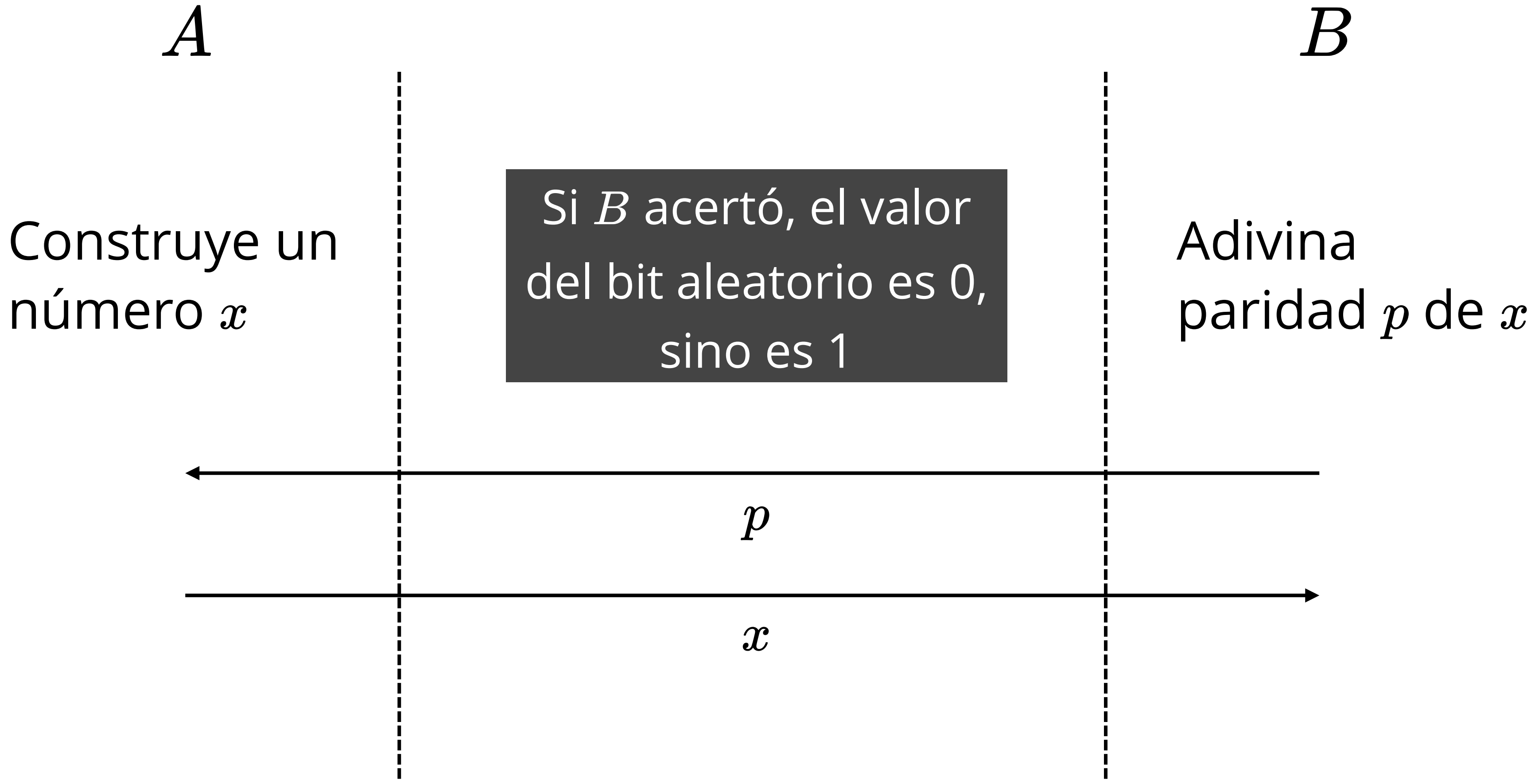
Una segunda aplicación: lanzar una moneda por teléfono

¿Pueden dos usuarios ponerse de acuerdo en un número aleatorio de manera remota?

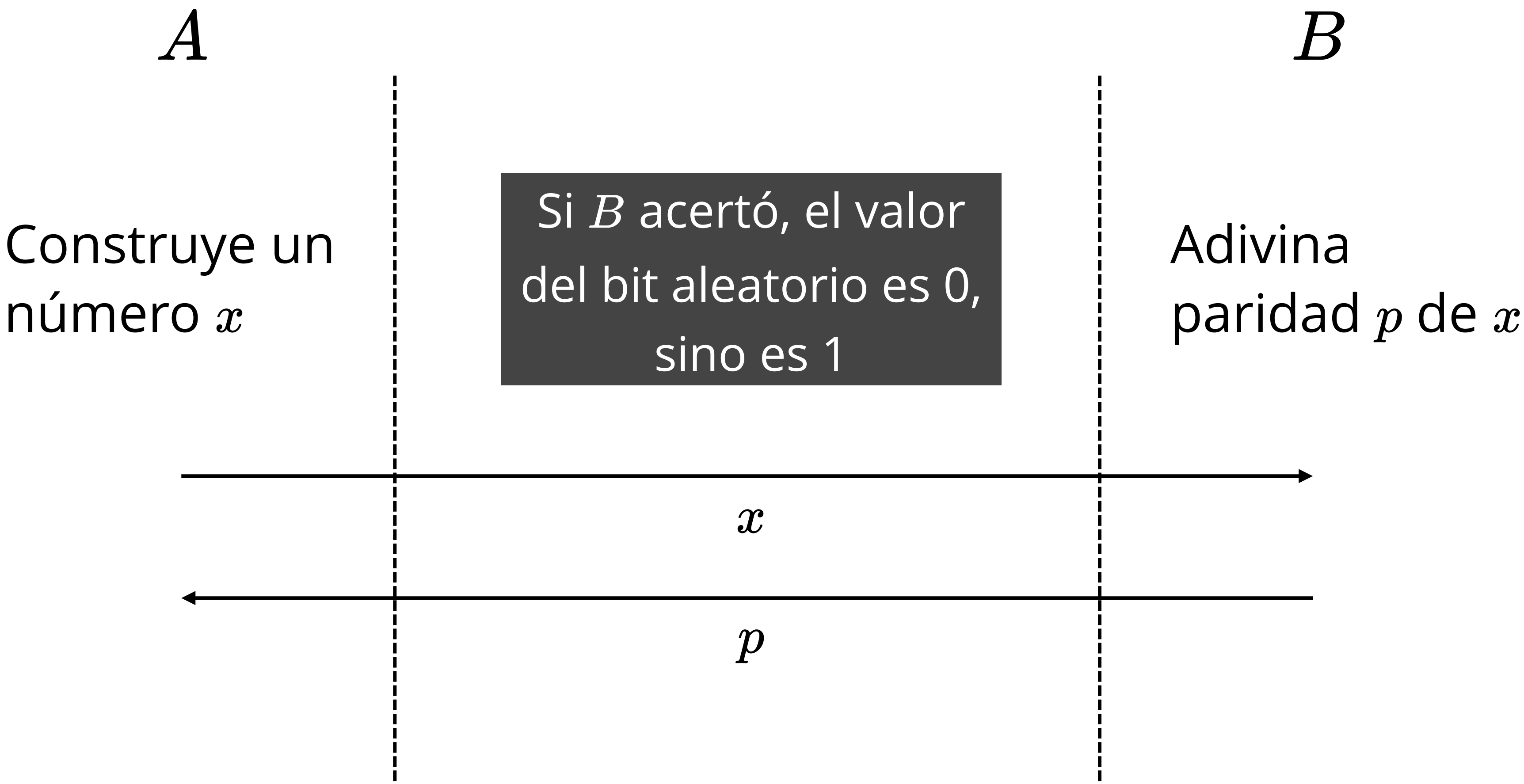
Un primer protocolo



~~Un primer protocolo~~



Un segundo protocolo



~~Un segundo protocolo~~

A

B

Construye un número x

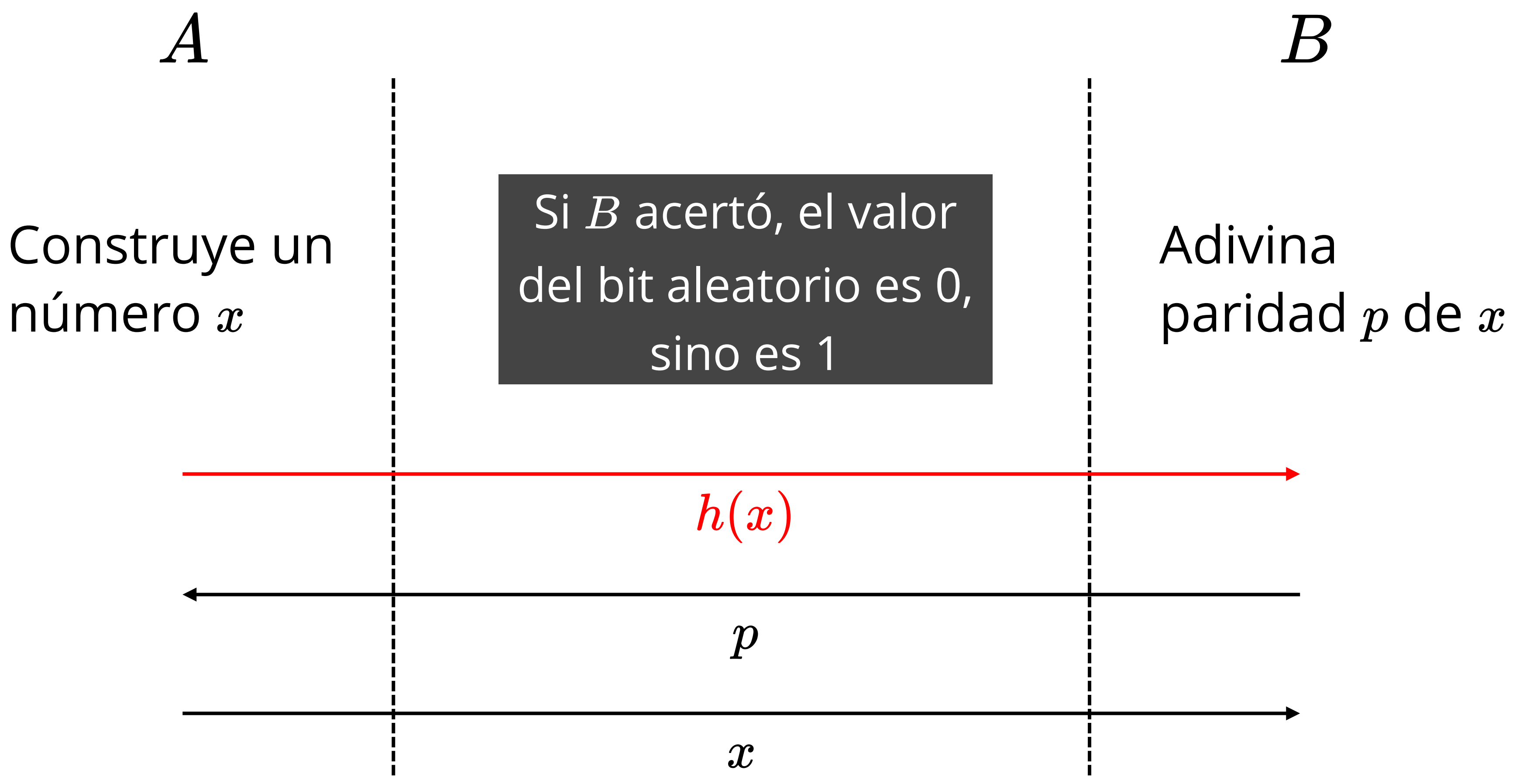
Si B acertó, el valor del bit aleatorio es 0, sino es 1

Adivina paridad p de x

$A \xrightarrow{x} B$

$B \xrightarrow{p} A$

¡Un protocolo correcto!



¿Cómo se formaliza la noción de función de hash?

¿Por qué es necesario formalizar esta noción?

Un primer intento

Una función de hash es una función h tal que:

- h toma un mensaje $m \in \{0,1\}^*$, y retorna un hash $h(m) \in \{0,1\}^\ell$, donde ℓ es un largo fijo.
- h se puede calcular en tiempo polinomial.

¿Es h resistente a preimagen?

Sea $m_0 \in \{0,1\}^\ell$. Si me dan $h(m_0)$, cuánto me demoro en encontrar su preimagen?

En el peor de los casos, ejecuto 2^ℓ veces un algoritmo polinomial.

¿Podemos considerar esto *ineficiente*?

Un segundo intento

Una *función de hash* es una familia de funciones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

- h_n toma un mensaje $m \in \{0,1\}^*$, y retorna un hash $h_n(m) \in \{0,1\}^{\ell(n)}$, donde $\ell(n)$ es fijo para cada n.
- h_n se puede calcular en tiempo polinomial en n

¿Podemos definir bien la resistencia a preimagen?

Una noción necesaria

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos, y $\mathbb{R}^+_0 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+_0$ es despreciable si:

$$(\forall \text{ polinomio } p : \mathbb{N} \to \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left(f(n) < \frac{1}{p(n)}\right)$$

1. Muestre que 2^{-n} y $n^{-\log(n)}$ son funciones despreciables
2. Demuestre que si f y g son funciones despreciables y p es un polinomio, entonces $f + g$ y $f \cdot p$ son funciones despreciables

Resistencia a colisiones

Considere una función de hash $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Definimos el juego $\mathit{Hash\text{-}Col}(n)$:

1. El adversario elige mensajes m_1 y m_2 con $m_1 \neq m_2$
2. El adversario gana el juego si $h_n(m_1) = h_n(m_2)$, y en caso contrario pierde

Formalizando la noción de resistencia a colisiones

Una función de hash $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice resistente a colisiones si para todo adversario que funciona como un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial, existe una función despreciable $f(n)$ tal que:

$$\Pr(\text{Adversario gane } \textit{Hash-Col}(n)) \leq f(n)$$

¿Cómo se formaliza la noción de ser resistente a preimagen usando las ideas anteriores?

Dejamos esta definición como ejercicio

Además, dejamos como ejercicio demostrar que ser resistente a colisiones implica ser resistente a preimagen

Una definición formal de función de hash

Una función de hash es un par (Gen, h) tal que:

- Gen es un algoritmo aleatorizado de tiempo polinomial. Gen toma como entrada un parámetro de seguridad 1^n, y genera una llave s
- h es algoritmo de tiempo polinomial. h toma como entrada s y un mensaje $m \in \{0,1\}^*$, y retorna un hash $h^s(m) \in \{0,1\}^{\ell(n)}$, donde ℓ es un polinomio fijo

Una definición formal de función de hash

Si $m \in \{0,1\}^{\ell'(n)}$ para un polinomio fijo ℓ' tal que $\ell'(n) > \ell(n)$, entonces (Gen, h) es una función de hash de largo fijo

¿Dónde estamos?

- Estudiamos dos conceptos fundamentales en criptografía: cifrado simétrico y funciones de hash
    - Vimos algunas propiedades teóricas de estos conceptos

- Vamos a estudiar un tercer concepto fundamental: autentificación de mensajes
    - También vamos a ver algunas de sus propiedades teóricas

- Después de esto vamos a ver cómo se pueden implementar estos conceptos en la práctica