Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

IIC3263

Terminología

Restricción

Recuerde que en este curso consideramos vocabularios sin funciones.

De hecho, inicialmente nos vamos a restringir más.

- Para empezar vamos a considerar vocabularios sin constantes.

Importante

En este capítulo consideramos estructuras con dominios tanto finitos como infinitos.

- Resultados son válidos para estructuras arbitrarias.

Terminología: Sub-estructura inducida

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- Los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B, respectivamente.

Notación

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si $B \subseteq A$ y para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k:

$$R^{\mathfrak{B}} \quad = \quad R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$$

Terminología: Isomorfismo

Notación

$f : A \to B$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- *f es una biyección.*
- *Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, se tiene que:*

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \quad \textit{si y sólo si} \quad (f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

Notación

$\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Terminología: Isomorfismo parcial

Dado: Tuplas $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ en $\mathfrak{B}$.

Notación

$(\bar{a}, \bar{b})$ es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si la función f definida como $f(a_j) = b_j$ es un isomorfismo entre las sub-estructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ inducidas por $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y $\{b_1, \ldots, b_k\}$, respectivamente.

Ejercicio

Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, 2, 3, 4\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$. ¿Es ((1,3),(2,5)) un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$? ¿Y ((1,3),(4,2))?

Terminología: Rango de cuantificación

Notación

El rango de cuantificación de una $\mathcal{L}$-fórmula φ, denotado como $rc(\varphi)$, se define como:

- *Si φ es atómica, entonces $rc(\varphi) = 0$.*
- *Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $rc(\varphi) = rc(\psi)$.*
- *Si $\varphi = (\psi \star \theta)$, donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $rc(\varphi) = \text{máx}\{rc(\psi), rc(\theta)\}$.*
- *Si $\varphi = (\exists x\, \psi)$ ó $\varphi = (\forall x\, \psi)$, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$.*

Ejercicio

¿Cuáles son los rangos de cuantificación de $\exists x \forall y\, P(x, y)$ y $(\exists x\, P(x)) \wedge (\neg\exists y\, Q(y))$?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura y un elemento en esa estructura.
2. **D** responde con un elemento en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los elementos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$: **S** gana el juego si $(\bar{a}, \bar{b})$ no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**.

¿Qué están tratando de hacer **S** y **D**?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Para ganar, **D** tiene que mantener un isomorfismo parcial en todas las movidas.

- **D** no puede corregir en una movida posterior un error.

Notación

D *tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de* k *rondas entre* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *si para cada posible forma de jugar de* **S**, *existe una forma de jugar de* **D** *que le permite ganar.*

- $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Un momento para jugar ...

Ejercicios

1. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_5 \mathfrak{B}$?

2. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\},\ P^{\mathfrak{A}} = \{1, 2\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\},\ P^{\mathfrak{B}} = \{3, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

3. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3\},\ R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 3)\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4\},\ R^{\mathfrak{B}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

4. En el ejercicio anterior, suponga que A y B tienen k y $k + 1$ elementos, respectivamente. ¿Existe algún valor de k para el cual $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

Juegos y la lógica de primer orden

¿Por qué nos interesan los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé?

- Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces para cada oración φ tal que $rc(\varphi) \leq k$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

¿Por qué es esto cierto?

- Idea: Sea $\varphi = \forall x \exists y\, R(x, y)$, $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Demuestre que $\mathfrak{A} \not\equiv_2 \mathfrak{B}$.

Vamos a demostrar que la relación descrita arriba es cierta.

Pero antes vamos a ver para que la podemos usar.

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y propiedad $\mathcal{P}$ de las $\mathcal{L}$-estructuras.

- Queremos demostrar que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Metodología:

1. Suponga que $\mathcal{P}$ si es expresable: Existe φ tal que para todo $\mathfrak{A} \in \textsc{AllStruct}[\mathcal{L}]$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

2. Suponga que $rc(\varphi) = k$ y encuentre estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ pero $\mathfrak{B} \notin \mathcal{P}$.

Se puede concluir que φ no representa a $\mathcal{P}$. ¿Por qué?

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras que tienen una cantidad par de elementos en U. Demuestre que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Queda mucho por recorrer ...

- ¿Qué tan buena es la metodología?
- ¿Qué tan cercanos son los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé a la lógica de primer orden?

Poder expresivo de una lógica sobre una clase de estructuras

Dado: Clase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-estructuras.

- Por ejemplo, $\mathcal{C}$ puede ser el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras finitas ($\textsc{Struct}[\mathcal{L}]$)

Notación

- *$\mathcal{P}$ es expresable en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$ si existe una oración φ tal que para toda $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}$$

¿Se puede usar la metodología para demostrar que una propiedad no es expresable en $\mathcal{C}$? ¿Cómo?

Poder expresivo de una lógica sobre una clase de estructuras

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$, clase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-estructuras y propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{C}$.

- Queremos demostrar que $\mathcal{P}$ no es expresable en $\mathcal{C}$

Metodología:

1. Suponga que $\mathcal{P}$ si es expresable: Existe φ tal que para todo $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

2. Suponga que $rc(\varphi) = k$ y encuentre estructuras $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ pero $\mathfrak{B} \notin \mathcal{P}$.

Se concluye que φ no representa a $\mathcal{P}$.

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$.

- Existe φ tal que para todo orden lineal finito $\mathfrak{A}$:

  $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

- $rc(\varphi) = k$

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{C}$ tales que:

- $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$,
- $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y
- $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

Parece no ser tan fácil...
¿Cuan grandes tienen que ser los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

- Con una fórmula con rango de cuantificación k, ¿De qué tamaño son la estructuras que podemos distinguir?

Distancias y lógica de primer orden

Pronto vamos a demostrar que la lógica de primer orden es *local*, en el sentido que las fórmulas solo pueden ver un vecindario alrededor de ellas.

- El vecindario, eso si, es bastante grande.
- Vamos a ver un caso particular: órdenes lineales.

Lógica de primer orden y ordenes lineales

Definimos una familia de fórmulas $\alpha_n(x, y)$, para $n \geq 1$, de manera recursiva:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(x, y) &:= x < y, \\
\alpha_n(x, y) &:= \exists x_n \, (\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n) \wedge \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y)).
\end{aligned}
$$

Veamos cuáles son las propiedades fundamentales de estas fórmulas.

Rango de cuantificación de α_n

Lema

$rc(\alpha_n(x, y)) = \lceil \log n \rceil$.

Demostración: Por inducción en n. Para $n = 1$ se cumple trivialmente.

Supongamos que $n \geq 2$ y que la propiedad se cumple para todo número menor que n.

Por definición:

$$rc(\alpha_n(x, y)) = 1 + \text{máx}\{rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n)),\ rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y))\}.$$

Rango de cuantificación de α_n

Por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x,y)) &= \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil, \\ rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x,y)) &= \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil. \end{aligned}$$

Como $\log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \log \lceil \frac{n}{2} \rceil$, concluimos que:

$$rc(\alpha_n(x,y)) = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Por demostrar: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

Consideramos tres casos:

1. Suponemos que $n = 2^\ell$, donde $\ell \geq 1$. Entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1}$, por lo que:

   $$\lceil \log n \rceil = \ell = 1 + (\ell - 1) = 1 + \lceil \log 2^{\ell-1} \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

2. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c$, donde $\ell \geq 1$ y $0 < 2c < 2^\ell$.

   Como $2^\ell < 2^\ell + 2c < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1.$

   Como $0 < 2c < 2^\ell$, se tiene que $0 < c < 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c < 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c$.

   De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

3. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c + 1$, donde $\ell \geq 1$ y $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$.

   Como $2^\ell < 2^\ell + 2c + 1 < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

   Como $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$, se tiene que $\frac{1}{2} \leq c + \frac{1}{2} < 2^{\ell-1}$. Entonces tenemos que $1 \leq c + 1 \leq 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c + 1 \leq 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c + 1$.

   De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$ $\square$

Distancias medidas por α_n

Lema

Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$. Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces $j - i \geq n$.

Demostración: Por inducción en n. Para $n = 1$ es fácil de verificar.

Sea $n \geq 2$ y supongamos que la propiedad se cumple para todo número menor que n.

Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces existe k tal que $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(i, k)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(k, j)$.

Distancias medidas por α_n

Por hipótesis de inducción:

$$k - i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad \text{y} \quad j - k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Como $j - i = (j - k) + (k - i)$, concluimos que:

$$\begin{aligned} j - i &\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &= n \end{aligned}$$

$\square$

Juegos y ordenes lineales

Corolario

Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k.

Tenemos que:

- Con una fórmula con rango de cuantificación k podemos verificar si dos puntos están a distancia 2^k.
- $\mathfrak{A}$ tiene al menos $2^k + 1$ elementos.

Tenemos una primera indicación de que si queremos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ deben tener un número exponencial de elementos.

- Hagamos más precisa esta afirmación ...

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \ldots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

- Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Proposición

Si $m < n < 2^{k-1}$, entonces existe una oración φ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $rc(\varphi) \leq k$.

Demostración: Sea

$$\varphi \quad = \quad \exists x \, (\exists y \, \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x) \ \wedge \ \exists z \, \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}(x, z)).$$

Juegos y ordenes lineales

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$.

- ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. $\square$

Conclusión

Si queremos que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $|A|$ y $|B|$ deben ser $\Omega(2^k)$.

- Vamos a ver que esta es una buena estimación ...

Ordenes lineales indistinguibles

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \ldots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \ldots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

Proposición

Si $m, n \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Demostración: Vamos a definir una estrategia ganadora para **D**.

Utilizamos una estrategia que en la ronda $\ell \leq k$ cumpla lo siguiente: Si las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $(b_1, \ldots, b_\ell)$, respectivamente, entonces para todo $1 \leq i, j \leq \ell$:

1a. si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$;

1b. si $|a_i - 1| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| = |a_i - 1|$;

1c. si $|a_i - m| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| = |a_i - m|$;

Ordenes lineales indistinguibles

2a. si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$;

2b. si $|a_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$;

2c. si $|a_i - m| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| \geq 2^{k-\ell}$;

3. $a_i < a_j$ si y sólo si $b_i < b_j$.

Cuando tomamos $\ell = k$, concluimos que gana **D**. ¿Por qué?

Vamos a demostrar por inducción en $\ell \leq k$ que **D** puede jugar de tal forma de cumplir las condiciones anteriores.

Ordenes lineales indistinguibles

Suponga que en la ronda $\ell < k$ las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $(b_1, \ldots, b_\ell)$, respectivamente.

Suponga que **S** decide jugar un punto $a_{\ell+1}$ en $\mathfrak{A}$ (si **S** juega un punto en $\mathfrak{B}$, la estrategia se define de la misma forma).

Tenemos tres casos posibles:

- Existe $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que a_i es el menor elemento en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $1 \leq a_{\ell+1} \leq a_i$.
- Existe $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que a_i es el mayor elemento en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq m$.
- Existen $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ tales que $a_i \leq a_j$, no existe un elemento entre ellos en $(a_1, \ldots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq a_j$.

Ordenes lineales indistinguibles

Vamos a ver como se define la estrategia en el tercer caso. Los otros dos casos son idénticos a este.

- Si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - b_j|$. Los intervalos $[a_i, a_j]$ en $\mathfrak{A}$ y $[b_i, b_j]$ en $\mathfrak{B}$ son isomorfos, por lo que es fácil definir $b_{\ell+1}$. ¿Cómo se define?

- Si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$. Para definir $b_{\ell+1}$ consideramos tres casos.
  - Si $|a_i - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ mayor o igual a b_i tal que $|a_i - a_{\ell+1}| = |b_i - b_{\ell+1}|$.
  - Si $|a_j - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ menor o igual a b_j tal que $|a_j - a_{\ell+1}| = |b_j - b_{\ell+1}|$.

Ordenes lineales indistinguibles

- Si $|a_i - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|a_j - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ de la siguiente forma.

  Sabemos que existe por lo menos un punto $b_i \leq b \leq b_j$ tal que $|b_i - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|b_j - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$. Definimos $b_{\ell+1}$ como uno de estos puntos.

Para terminar la demostración tenemos que demostrar que $(a_1, \ldots, a_{\ell+1})$ y $(b_1, \ldots, b_{\ell+1})$ satisfacen las condiciones iniciales.

- ¿Cómo se hace esto?

$\square$

Paridad no es definible sobre ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$ y

$$\mathcal{P} \quad = \quad \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Corolario

$\mathcal{P}$ no es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Volvemos a considerar vocabularios con constantes.

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- Los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B, respectivamente.

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si

- $B \subseteq A$
- para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $c^{\mathfrak{A}} \in B$ y $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$
- para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k: $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$

Terminología: Isomorfismo incluyendo constantes

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- f es una biyección
- Para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$
- Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, se tiene que $(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(f(a_1), \ldots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$

Notación

$\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

¡El juego no cambia!

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura y un punto en esa estructura.
2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \ldots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \ldots, a_k)$ y $(b_1, \ldots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- **S** gana el juego si

  $$((c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_k), (c_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \ldots, b_k))$$

  no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**.

¿Por qué incluimos las constantes?

- Nótese que puede pasar que $\mathfrak{A} \not\equiv_0 \mathfrak{B}$. ¿Tiene sentido esto?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Estrategia ganadora

Notación

D *tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de* **S**, *existe una forma de jugar de* **D** *que le permite ganar.*

- $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{<, min, max\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de $\mathcal{L}$-estructuras tales que $<$ es un orden lineal finito, *min* es el menor elemento de $<$ y *max* es el mayor elemento de $<$.

- Demuestre que para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, si $|A|, |B| \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación

- *LPO[k] es el conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones en lógica de primer orden con rango de cuantificación a lo más k.*
- *Dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en LPO[k] si para cada $\varphi \in$ LPO[k]:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *están de acuerdo en* $LPO[k]$

Ejercicio

Use el teorema para demostrar que la clausura transitiva no es definible en lógica de primer orden sobre la relación sucesor.