Lógica de primer orden: Repaso y notación

IIC3263

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes y predicados.

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de dos conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \text{constantes} & : & \{c_1, \ldots, c_\ell, \ldots\} \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \ldots, R_n, \ldots\} \end{array}$$

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes y predicados.

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de dos conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \text{constantes} & : & \{c_1, \ldots, c_\ell, \ldots\} \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \ldots, R_n, \ldots\} \end{array}$$

Notación

La aridad de una relación R es el número de argumentos de R.

- *Cada relación tiene una aridad mayor o igual a 0*

Lógica de primer orden: Vocabulario

Ejemplo

Para los números naturales $\mathcal{L}$ es la unión de

$$\begin{array}{lcl} \text{constantes} & : & \{0, 1\} \\ \text{relaciones} & : & \{\mathit{suma}, \mathit{mult}, \mathit{suc}, <\} \end{array}$$

suma y *mult* son relaciones ternarias, *suc* y $<$ son relaciones binarias.

Lógica de primer orden: Sintaxis

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- Paréntesis: (y)
- Relación binaria $=$
- Variables
- Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Veamos algunos ejemplos, antes de introducir formalmente la sintaxis de la lógica de primer orden.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{0,\ 1,\ \mathit{suma},\ \mathit{mult},\ \mathit{suc},\ <\}$

- $\mathit{suc}(0, 1)$
- $\forall x \forall y\ (\mathit{suc}(x, y) \to x < y)$
  Usamos notación infija para relaciones comunes.
- $\forall x \exists y\ \mathit{suma}(y, y, x)$
- $\forall x \forall y \forall z\ ((\mathit{suc}(x, y) \wedge \mathit{suc}(x, z)) \to y = z)$

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Suponemos dada una lista infinita de variables.

$\mathcal{L}$-términos:

- Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-término
- Cada variable x es un $\mathcal{L}$-término

Ejemplo

Términos en el vocabulario para los números naturales: 0, 1 y x.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si t_1, ..., t_n son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si t_1, ..., t_n son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.
- Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\ \varphi)$ y $(\forall x\ \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si t_1, ..., t_n son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.
- Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\ \varphi)$ y $(\forall x\ \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Notación

$t_1 = t_2$ *y* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *son llamadas fórmulas atómicas.*

Lógica de primer orden: Semántica

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce ambigüedad.

¿Es $\forall x \exists y \; suma(y, y, x)$ cierta en $\mathcal{L} = \{0, 1, suma, mult, suc, <\}$?

- Si pensamos en los números naturales es falsa.
- Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta.

El valor de verdad de una fórmula depende de la **interpretación que se da a las constante y relaciones.**

- Tenemos que introducir la noción de estructura.

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$-estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ contiene:

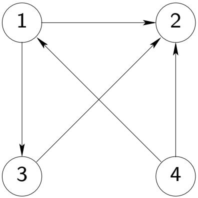
- Un dominio A no vacío.
- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^{\mathfrak{A}} \in A$ de c.
- Para cada relación n-aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ de R.

Notación

$\mathfrak{A} = \langle A, c^{\mathfrak{A}}, \ldots, R^{\mathfrak{A}}, \ldots \rangle$

Algunos ejemplos de estructuras

Para representar grafos usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$. Por ejemplo, el siguiente grafo:



es representado por la estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \{1, 2, 3, 4\} \\ E^{\mathfrak{A}} & = & \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\} \end{array}$$

Algunos ejemplos de estructuras

Los números naturales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{N} \quad = \quad \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, \mathit{suma}^{\mathfrak{N}}, \mathit{mult}^{\mathfrak{N}}, \mathit{suc}^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle,$$

Mientras que los números reales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{R} \quad = \quad \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, \mathit{suma}^{\mathfrak{R}}, \mathit{mult}^{\mathfrak{R}}, \mathit{suc}^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle.$$

Ahora podemos decir que $\mathfrak{N}$ no satisface $\forall x \exists y \; \mathit{suma}(y, y, x)$ y que $\mathfrak{R}$ si satisface esta fórmula.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Sea $V(\varphi)$ el conjunto de variables de una fórmula φ.

El conjunto de variables libres de una $\mathcal{L}$-fórmula φ se define como:

- Si φ es una fórmula atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$.
- Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$.
- Si $\varphi = (\exists x\ \psi)$ o $\varphi = (\forall x\ \psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
VL(P(x) \wedge \exists y\ Q(x,y)) &= \{x\} \\
VL(P(z) \wedge \exists z\ R(z)) &= \{z\}
\end{aligned}
$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Ejemplos

$$\begin{aligned} VL(P(x) \wedge \exists y\; Q(x,y)) &= \{x\} \\ VL(P(z) \wedge \exists z\; R(z)) &= \{z\} \end{aligned}$$

Notación

- *Si φ es una fórmula, entonces usamos $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ para indicar que $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$.*
- *Decimos que φ es una oración si $VL(\varphi) = \emptyset$.*

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una estructura.

- ¿Es $suc(0, x)$ cierta en $\mathfrak{N}$?

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

- Si x es 2, entonces $suc(0, x)$ es falsa en $\mathfrak{N}$. Pero si x es 1, entonces es cierta.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función tal que:

- $\sigma(x) \in A$ para cada variable x,
- $\sigma(c) = c^{\mathfrak{A}}$ para cada constante c en $\mathcal{L}$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función tal que:

- $\sigma(x) \in A$ para cada variable x,
- $\sigma(c) = c^{\mathfrak{A}}$ para cada constante c en $\mathcal{L}$.

Definición

Decimos que $(\mathfrak{A}, \sigma)$ *satisface una* $\mathcal{L}$*-fórmula* φ*, denotado como* $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$*, si y sólo si:*

- $\varphi \;=\; t_1 = t_2 \quad y \;\; \sigma(t_1) = \sigma(t_2).$
- $\varphi \;=\; R(t_1, \ldots, t_n) \quad y \;\; (\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}.$
- $\varphi \;=\; (\neg\psi) \quad y \;\; (\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi.$
- $\varphi \;=\; (\psi \vee \theta) \quad y \;\; (\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi \text{ o } (\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta.$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$.
- $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$.
- $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$ y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$ o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \theta$.
- $\varphi = (\exists x\ \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases}$$

- $\varphi = (\forall x\ \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$.

Nota: Si φ es una oración, podemos decir que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Semántica de la lógica de primer orden

Ejemplo

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

- ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son ciertas en $\mathfrak{A}$: $\exists x \forall y\ E(x, y)$, $\forall x \exists y\ E(x, y)$, $\exists x \forall y\ \neg E(x, y)$, $\forall x \exists y\ \neg E(x, y)$?

Dos nociones útiles

Decimos que una $\mathcal{L}$-fórmula φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación σ para $\mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- Si φ es oración, entonces φ es satisfacible si existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Decimos que una $\mathcal{L}$-fórmula φ es válida si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para $\mathfrak{A}$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- Si φ es oración, entonces φ es válida si para todo $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Ejercicio

Construya una fórmula válida.

Dos nociones útiles

Al igual que en la lógica proposicional, la lógica de primer orden tiene asociados algunos problemas de decisión:

$$\begin{aligned} \mathsf{SAT} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración satisfacible}\} \\ \mathsf{VAL} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración válida}\} \end{aligned}$$

Dos nociones útiles

Al igual que en la lógica proposicional, la lógica de primer orden tiene asociados algunos problemas de decisión:

$$\begin{aligned} \text{SAT} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración satisfacible}\} \\ \text{VAL} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración válida}\} \end{aligned}$$

Teorema (Church)

VAL y SAT son indecidibles.

La noción de consecuencia lógica

Dado: Conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

Decimos que φ es consecuencia lógica de Σ si para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Notación

$\Sigma \models \varphi$

La noción de consecuencia lógica

Dado: Conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

Decimos que φ es consecuencia lógica de Σ si para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Notación

$\Sigma \models \varphi$

Ejemplo

$\{\forall x\, R(x,x)\} \models \forall x \exists y\, R(x,y)$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

El sistema de deducción de Hilbert para la lógica de primer orden está formado por los siguientes elementos:

- Esquemas para generar fórmulas válidas:
  - $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
  - $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$
  - $(\forall x\, \varphi(x)) \to \varphi(t)$, donde t es un término cualquiera
  - $\varphi(t) \to (\exists x\, \varphi(x))$, donde t es un término cualquiera
  - $(\exists x\, \varphi) \leftrightarrow (\neg\forall x\, \neg\varphi)$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

- Axiomas para la igualdad:
  - $\forall x\,(x = x)$
  - $\forall x \forall y\,(x = y \to y = x)$
  - $\forall x \forall y \forall z\,((x = y \land y = z) \to x = z)$
  - Para todo predicado m-ario P:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_m \forall y_1 \cdots \forall y_m\,((P(x_1, \ldots, x_m) \land \\ x_1 = y_1 \land \cdots \land x_m = y_m) \to P(y_1, \ldots, y_m))$$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

- Reglas de inferencia:
  - Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \to \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

  - Generalización: Si y no aparece libre en φ, entonces

$$\frac{\varphi \to \psi(y)}{\varphi \to \forall x \psi(x)}$$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ desde Σ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tal que:

- Para cada $i \leq n$:
  - $\varphi_i \in \Sigma$ o
  - φ_i es un axioma lógico o
  - existen $j, k < i$ tales que φ_i es obtenido desde φ_j y φ_k usando modus ponens o
  - existe $j < i$ tal que φ_i es obtenido desde φ_j usando la regla de generalización.
- $\varphi_n = \varphi$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ desde Σ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tal que:

- Para cada $i \leq n$:
  - $\varphi_i \in \Sigma$ o
  - φ_i es un axioma lógico o
  - existen $j, k < i$ tales que φ_i es obtenido desde φ_j y φ_k usando modus ponens o
  - existe $j < i$ tal que φ_i es obtenido desde φ_j usando la regla de generalización.
- $\varphi_n = \varphi$

Notación

$\Sigma \vdash \varphi$

El sistema de Hilbert: Propiedades

El sistema de Hilbert: Propiedades

Teorema (Corrección)

Si $\Sigma \vdash \varphi$*, entonces* $\Sigma \models \varphi$*.*

El sistema de Hilbert: Propiedades

Teorema (Corrección)

Si $\Sigma \vdash \varphi$, *entonces* $\Sigma \models \varphi$.

Teorema (Completitud de Gödel)

Si $\Sigma \models \varphi$, *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$.

El teorema de Compacidad

Notación

Decimos que un conjunto Σ *de fórmulas es finitamente satisfacible si cada subconjunto finito de* Σ *es satisfacible.*

El teorema de Compacidad

Notación

Decimos que un conjunto Σ de fórmulas es finitamente satisfacible si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Teorema (Compacidad)

Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si Σ es finitamente satisfacible.

El teorema de Compacidad

Notación

Decimos que un conjunto Σ de fórmulas es finitamente satisfacible si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Teorema (Compacidad)

Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si Σ es finitamente satisfacible.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Poder expresivo de una lógica

Notación

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, $\textsc{AllStruct}[\mathcal{L}]$ es el conjunto de todas las $\mathcal{L}$-estructuras.

Una propiedad $\mathcal{P}$ de las $\mathcal{L}$-estructuras es un subconjunto de $\textsc{AllStruct}[\mathcal{L}]$.

Ejemplo

El conjunto de las $\mathcal{L}$-estructuras con dos elementos en el dominio.

Poder expresivo de una lógica

Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ es expresable en lógica de primer orden si existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathfrak{A} \in \textsc{AllStruct}[\mathcal{L}]$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

Poder expresivo de una lógica

Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ es expresable en lógica de primer orden si existe una $\mathcal{L}$-oración φ tal que para toda $\mathfrak{A} \in \textsc{AllStruct}[\mathcal{L}]$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

Ejemplo

El conjunto de las $\mathcal{L}$-estructuras con dos elementos en el dominio es definible en lógica de primer orden.

Poder expresivo de una lógica: Teorema de compacidad

Ejercicios

Usando el teorema de compacidad, demuestre que las siguientes propiedades no son expresables en lógica de primer orden.

1. Sea $\mathcal{L}_1$ un vocabulario cualquiera y $\mathcal{P}_1$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}_1$-estructuras con dominio finito.

2. Sea $\mathcal{L}_2 = \{E(\cdot, \cdot),\ a,\ b\}$, donde a y b son constantes, y $\mathcal{P}_2$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}_2$-estructuras que tienen un camino de largo finito entre a y b.