Nociones de Localidad (segunda parte)

IIC3263

Noción de consulta

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que $\mathcal{L}$ sólo contiene símbolos de relación

Noción de consulta

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que $\mathcal{L}$ sólo contiene símbolos de relación

Una consulta m-aria Q $(m > 0)$ es una función tal que para todo $\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ con dominio A: $Q(\mathfrak{A}) \subseteq A^m$

- $Q(\mathfrak{A})$ es la imagen de Q para $\mathfrak{A}$
- Q puede no ser definible en LPO

Noción de consulta

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que $\mathcal{L}$ sólo contiene símbolos de relación

Una consulta m-aria Q ($m > 0$) es una función tal que para todo $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ con dominio A: $Q(\mathfrak{A}) \subseteq A^m$

- $Q(\mathfrak{A})$ es la imagen de Q para $\mathfrak{A}$
- Q puede no ser definible en LPO

De la misma forma se define las consultas 0-arias (o Booleanas)

- Una consulta 0-aria Q es una función con dominio $\textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ y recorrido $\{$*verdadero*, *falso*$\}$
- Si $Q(\mathfrak{A}) =$ *verdadero*, entonces decimos que $\mathfrak{A}$ satisface Q

Localidad de Hanf para consultas

Definición

Una consulta Q es local según Hanf si existe d tal que para todo par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, para todo $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ en $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \textit{ si y sólo si } \bar{b} \in Q(\mathfrak{B})$$

Localidad de Hanf para consultas

Definición

Una consulta Q es local según Hanf si existe d tal que para todo par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, para todo $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ en $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \textit{ si y sólo si } \bar{b} \in Q(\mathfrak{B})$$

Notación

Si Q es local según Hanf: $rlh(Q)$ es el menor d que satisface la condición de localidad.

Localidad de Hanf para consultas

Vamos a demostrar que toda consulta en LPO es local según Hanf.

Localidad de Hanf para consultas

Vamos a demostrar que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- De hecho, vamos a demostrar que si $rc(\varphi) = k$, entonces:

$$\mathrm{rlh}(\varphi) \quad \leq \quad \frac{3^k - 1}{2}$$

Localidad de Hanf para consultas

Vamos a demostrar que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- De hecho, vamos a demostrar que si $rc(\varphi) = k$, entonces:

$$\mathrm{rlh}(\varphi) \quad \leq \quad \frac{3^k - 1}{2}$$

Notación

Dado $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, en la demostración usamos lo siguiente:

- $f(\bar{a}) = (f(a_1), \ldots, f(a_m))$
- $B_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ *es el dominio de* $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$

Localidad de Hanf: Demostración

Lema (Libkin)

Si $N^{\mathfrak{A}}_{3d+1}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{B}}_{3d+1}(\bar{b})$ *y* $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$, *entonces* $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

Demostración: Dado que $N^{\mathfrak{A}}_{3d+1}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{B}}_{3d+1}(\bar{b})$, existe un isomorfismo g entre $N^{\mathfrak{A}}_{3d+1}(\bar{a})$ y $N^{\mathfrak{B}}_{3d+1}(\bar{b})$ tal que $g(\bar{a}) = \bar{b}$.

Concluimos que para todo $c \in A$ tal que $d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) \leq 2d + 1$:

- $d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) = d_{\mathfrak{B}}(\bar{b}, g(c))$
- $N^{\mathfrak{A}}_{d}(c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{d}(g(c))$

Localidad de Hanf: Demostración

Dado que $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{B}$: Existe una biyección $h_1 : A \to B$ tal que para todo $c \in A$ se tiene que $N_d^{\mathfrak{A}}(c) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(h_1(c))$.

De la existencia de g y h_1, podemos concluir que existe una biyección:

$$h_2 : (A \setminus B_{2d+1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \to (B \setminus B_{2d+1}^{\mathfrak{B}}(\bar{b}))$$

tal que para todo $c \in (A \setminus B_{2d+1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a}))$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(c) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(h_2(c))$$

¿Cómo se concluye esto?

Localidad de Hanf: Demostración

Definimos una biyección $f : A \to B$ de la siguiente forma:

$$f(c) = \begin{cases} g(c) & d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) \leq 2d + 1 \\ h_2(c) & d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) > 2d + 1 \end{cases}$$

Se tiene que para todo $c \in A$: $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}c) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b}f(c))$.

- ¿Por qué?

Concluimos que $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

$\square$

Localidad de Hanf: Demostración

Del lema podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario

Si $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$*, entonces existe una biyección* $f : A \to B$ *tal que para todo* $c \in A$*:* $(\mathfrak{A}, \bar{a}c) \leftrightarrows_{d} (\mathfrak{B}, \bar{b}f(c))$*.*

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Localidad de Hanf: Demostración

Teorema

Sea $\varphi(\bar{x})$ *una fórmula en LPO tal que* $rc(\varphi(\bar{x})) = k$. *Entonces* $\varphi(\bar{x})$ *es local según Hanf y* $rlh(\varphi(\bar{x})) \leq \frac{3^k - 1}{2}$.

Demostración: Por inducción en k. Si $k = 0$ es fácil demostrar que la propiedad se cumple

- ¿Cómo se demuestra esto?

Localidad de Hanf: Demostración

Teorema

Sea $\varphi(\bar{x})$ *una fórmula en LPO tal que* $rc(\varphi(\bar{x})) = k$*. Entonces* $\varphi(\bar{x})$ *es local según Hanf y* $rlh(\varphi(\bar{x})) \leq \frac{3^k - 1}{2}$.

Demostración: Por inducción en k. Si $k = 0$ es fácil demostrar que la propiedad se cumple

- ¿Cómo se demuestra esto?

Supongamos que la propiedad es cierta para cada fórmula con rango de cuantificación menor o igual a k.

Sea $\varphi(\bar{x})$ una fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k + 1$.

Localidad de Hanf: Demostración

$\varphi(\bar{x})$ es una combinación Booleana de fórmulas de la forma $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$, donde $rc(\psi(\bar{x}, y)) \leq k$.

- Nos basta demostrar que la propiedad se cumple para $\exists y\, \psi(\bar{x}, y)$, donde $rc(\psi(\bar{x}, y)) = k$. ¿Por qué?

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras, $\bar{a}$ una tupla en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ una tupla en $\mathfrak{B}$ tales que:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^{k+1}-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Tenemos que demostrar:

$$\mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \exists y\, \psi(\bar{b}, y)$$

Localidad de Hanf: Demostración

Supongamos que $\mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y)$

- Entonces existe $e \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, e)$

Sea $d = \frac{3^k - 1}{2}$

- Nótese que $\frac{3^{k+1}-1}{2} = 3d + 1$

Como $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{3d+1} (\mathfrak{B}, \bar{b})$:

- Por el último corolario: Existe una biyección $f : A \to B$ tal que para todo $c \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \bar{a}c) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b}f(c))$

Localidad de Hanf: Demostración

En particular: $(\mathfrak{A}, \bar{a}e) \leftrightarrows_d (\mathfrak{B}, \bar{b}f(e))$

Por hipótesis de inducción: $\mathfrak{B} \models \psi(\bar{b}, f(e))$

Concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists y\, \psi(\bar{b}, y)$

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists y\, \psi(\bar{b}, y)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists y\, \psi(\bar{a}, y)$. $\square$

Localidad de Gaifman: Demostración

Definición

Una consulta Q es *local según Gaifman* *si existe d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:*

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \text{ si y sólo si } \bar{b} \in Q(\mathfrak{A})$$

Localidad de Gaifman: Demostración

Definición

Una consulta Q es local según Gaifman si existe d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \text{ si y sólo si } \bar{b} \in Q(\mathfrak{A})$$

Notación

Si Q es local según Gaifman: $rlg(Q)$ es el menor d que satisface la condición de localidad.

Localidad de Gaifman: Demostración

Definición

Una consulta Q es local según Gaifman si existe d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \text{ si y sólo si } \bar{b} \in Q(\mathfrak{A})$$

Notación

Si Q es local según Gaifman: $rlg(Q)$ es el menor d que satisface la condición de localidad.

Por demostrar: Cada consulta φ en LPO es local según Gaifman.

- De hecho: si $rc(\varphi) = k$, entonces $\text{rlg}(\varphi) \leq \frac{3^{k+1}-1}{2}$.

Localidad de Hanf y Gaifman: Relación

Teorema

Si una consulta es local según Hanf, entonces es local según Gaifman. Además, $rlg(Q) \leq 3 \cdot rlh(Q) + 1$.

Demostración: Suponga que Q es local según Hanf y $\mathrm{rlh}(Q) = d$.

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\bar{a}$, $\bar{b}$ tuplas en $\mathfrak{A}$ tales que:

$$N^{\mathfrak{A}}_{3d+1}(\bar{a}) \;\; \cong \;\; N^{\mathfrak{A}}_{3d+1}(\bar{b})$$

Tenemos que demostrar que $\bar{a} \in Q(\mathfrak{A})$ si y sólo si $\bar{b} \in Q(\mathfrak{A})$

Localidad de Hanf y Gaifman: Relación

Como $\mathfrak{A} \leftrightarrows_d \mathfrak{A}$, por Lema de Libkin concluimos que:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_d (\mathfrak{A}, \bar{b})$$

Como $\mathrm{rlh}(Q) = d$, se tiene el resultado deseado:

$$\bar{a} \in Q(\mathfrak{A}) \quad \text{si y sólo si} \quad \bar{b} \in Q(\mathfrak{A})$$

$\square$

Localidad de Gaifman: Demostración

Para cada fórmula φ en LPO tal que $rc(\varphi) = k$, se tiene que φ es local según Hanf y $\text{rlh}(\varphi) \leq \frac{3^k - 1}{2}$.

Por el teorema anterior concluimos que:

Corolario

Sea $\varphi(\bar{x})$ una fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k$. Entonces $\varphi(\bar{x})$ es local según Gaifman y $rlg(\varphi(\bar{x})) \leq \frac{3^{k+1} - 1}{2}$.

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Sabemos que toda consulta en LPO es local según Hanf.

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Sabemos que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- ¿Es cierta la propiedad inversa?

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Sabemos que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- ¿Es cierta la propiedad inversa?
- Vale decir, ¿es cierto que si una consulta es local según Hanf entonces tiene que se expresable en LPO?

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Sabemos que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- ¿Es cierta la propiedad inversa?
- Vale decir, ¿es cierto que si una consulta es local según Hanf entonces tiene que se expresable en LPO?

La noción de localidad de Hanf nos permite demostrar de manera más simple que algo no es expresable en LPO.

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Sabemos que toda consulta en LPO es local según Hanf.

- ¿Es cierta la propiedad inversa?
- Vale decir, ¿es cierto que si una consulta es local según Hanf entonces tiene que se expresable en LPO?

La noción de localidad de Hanf nos permite demostrar de manera más simple que algo no es expresable en LPO.

- ¿Pero qué tan bien representa esta noción a la LPO?

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y Q una consulta tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$Q(\mathfrak{A}) = \textit{verdadero} \text{ si y sólo si } U^{\mathfrak{A}} \text{ tiene una cantidad par de elementos}$$

Demuestre que Q es local según Hanf.

Expresividad de LPO contra la localidad de Hanf

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y Q una consulta tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$:

$$Q(\mathfrak{A}) = \textit{verdadero} \text{ si y sólo si } U^{\mathfrak{A}} \text{ tiene una cantidad par de elementos}$$

Demuestre que Q es local según Hanf.

Conclusión

Localidad según Hanf es una buena herramienta para LPO

- Pero en algunos casos no puede ser utilizada para demostrar inexpresibilidad

Localidad para vocabularios con constantes

Sea $\mathcal{L} = \{c_1, \ldots, c_\ell, R_1, \ldots, R_m\}$

- $c_1, \ldots, c_\ell$ son los símbolos de constantes en $\mathcal{L}$

Notación

$N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$: *Subestructura de $\mathfrak{A}$ inducida por los elementos a distancia a lo más d de* $(c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_n)$

- *En particular:* $c_i^{N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})} = c_i^{\mathfrak{A}}$, *para cada* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$

Localidad para vocabularios con constantes

Sea $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_\ell, R_1, \dots, R_m\}$

- $c_1, \dots, c_\ell$ son los símbolos de constantes en $\mathcal{L}$

Notación

$N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$: *Subestructura de* $\mathfrak{A}$ *inducida por los elementos a distancia a lo más d de* $(c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_n)$

- *En particular:* $c_i^{N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})} = c_i^{\mathfrak{A}}$, *para cada* $i \in \{1, \dots, \ell\}$

Importante

La notación restante para las nociones de localidad de Gaifman y Hanf se define de igual forma como para el caso sin constantes.

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Sea $\varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k$.

Teorema

Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y par de tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Sea $\varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k$.

Teorema

Para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y par de tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$$

Demostración: Sea $\mathcal{L}^\star$ el vocabulario $\{R_1, \ldots, R_m\}$

- Recuerde que $\mathcal{L} = \{c_1, \ldots, c_\ell, R_1, \ldots, R_m\}$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Suponga que $c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}$ son las constantes mencionadas en $\varphi(\bar{x})$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq \ell)$

- Sea $\bar{y} = (y_{i_1}, \ldots, y_{i_p})$ una tupla de variables frescas
- Sea $\varphi^\star(\bar{y}, \bar{x})$ la $\mathcal{L}^\star$-fórmula que resulta de reemplazar en $\varphi(\bar{x})$ cada constante c_{i_j} por la variable y_{i_j} $(1 \leq j \leq p)$

Finalmente, sea $\mathfrak{A}^\star$ una $\mathcal{L}^\star$-estructura tal que $R_i^{\mathfrak{A}^\star} = R_i^{\mathfrak{A}}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$

- Y sea $\bar{d} = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_p})$ una tupla en $\mathfrak{A}^\star$ tal que $d_{i_j} = c_{i_j}^{\mathfrak{A}}$, para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Para cada tupla $\bar{e}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{e}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{e})$$

De esto y el Teorema de Gaifman para vocabularios sin constantes:

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Para cada tupla $\bar{e}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{e}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{e})$$

De esto y el Teorema de Gaifman para vocabularios sin constantes:

$$N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow$$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Para cada tupla $\bar{e}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{e}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{e})$$

De esto y el Teorema de Gaifman para vocabularios sin constantes:

$$N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\,\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\,\bar{b})$$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Para cada tupla $\bar{e}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{e}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{e})$$

De esto y el Teorema de Gaifman para vocabularios sin constantes:

$$\begin{aligned} N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad &\Rightarrow \quad N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\bar{b}) \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{b}) \end{aligned}$$

Localidad de Gaifman para vocabularios con constantes

Para cada tupla $\bar{e}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{e}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{e})$$

De esto y el Teorema de Gaifman para vocabularios sin constantes:

$$\begin{aligned}
N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{b}) \quad & \Rightarrow \quad N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}) \cong N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^{k+1}-1}{2}}(\bar{d}\bar{b}) \\
& \Rightarrow \quad \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{b}) \\
& \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})
\end{aligned}$$

$\square$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

Sea $\varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k$.

Teorema

Para cada par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y tuplas $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ en $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k - 1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

Sea $\varphi(\bar{x})$ una $\mathcal{L}$-fórmula en LPO tal que $rc(\varphi(\bar{x})) = k$.

Teorema

Para cada par de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y tuplas $\bar{a}$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b}$ en $\mathfrak{B}$:

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})$$

Demostración: Sean $\mathcal{L}^\star$ y $\varphi^\star(\bar{y}, \bar{x})$ como en la demostración anterior.

- Además suponga que A, B son los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente.

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

Además:

- Sean $\mathfrak{A}^\star$ y $\mathfrak{B}^\star$ $\mathcal{L}^\star$-estructuras tales que $R_i^{\mathfrak{A}^\star} = R_i^{\mathfrak{A}}$ y $R_i^{\mathfrak{B}^\star} = R_i^{\mathfrak{B}}$, respectivamente, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$
- Sean $\bar{d} = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_p})$ y $\bar{e} = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ tuplas tales que $d_{i_j} = c_{i_j}^{\mathfrak{A}}$ y $e_{i_j} = c_{i_j}^{\mathfrak{B}}$, para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

Además:

- Sean $\mathfrak{A}^\star$ y $\mathfrak{B}^\star$ $\mathcal{L}^\star$-estructuras tales que $R_i^{\mathfrak{A}^\star} = R_i^{\mathfrak{A}}$ y $R_i^{\mathfrak{B}^\star} = R_i^{\mathfrak{B}}$, respectivamente, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$
- Sean $\bar{d} = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_p})$ y $\bar{e} = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ tuplas tales que $d_{i_j} = c_{i_j}^{\mathfrak{A}}$ y $e_{i_j} = c_{i_j}^{\mathfrak{B}}$, para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$

Se tiene que:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) & \text{si y sólo si} & \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{a}) \\
\mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b}) & \text{si y sólo si} & \mathfrak{B}^\star \models \varphi^\star(\bar{e}, \bar{b})
\end{array}
$$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad \Rightarrow$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad \Rightarrow \quad$ existe biyección $f : A \to B$ tal que para todo $c \in A$: $N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{b}f(c))$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad & \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{b}f(c)) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{e}\bar{b}f(c))
\end{aligned}
$$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad & \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{b}f(c)) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{e}\bar{b}f(c)) \\
& \Rightarrow \quad (\mathfrak{A}^\star, \bar{d}\bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}^\star, \bar{e}\bar{b})
\end{aligned}
$$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad &\Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
&\qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{b}f(c)) \\
&\Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
&\qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{e}\bar{b}f(c)) \\
&\Rightarrow \quad (\mathfrak{A}^\star, \bar{d}\bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}^\star, \bar{e}\bar{b}) \\
&\Rightarrow \quad \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{B}^\star \models \varphi^\star(\bar{e}, \bar{b})
\end{aligned}
$$

Ultimo caso: Localidad de Hanf para vocabularios con constantes

De lo anterior y el Teorema de Hanf:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}, \bar{b}) \quad & \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{b}f(c)) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe biyección } f : A \to B \text{ tal que para} \\
& \qquad \text{todo } c \in A\text{: } N^{\mathfrak{A}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{d}\bar{a}c) \cong N^{\mathfrak{B}^\star}_{\frac{3^k-1}{2}}(\bar{e}\bar{b}f(c)) \\
& \Rightarrow \quad (\mathfrak{A}^\star, \bar{d}\bar{a}) \leftrightarrows_{\frac{3^k-1}{2}} (\mathfrak{B}^\star, \bar{e}\bar{b}) \\
& \Rightarrow \quad \mathfrak{A}^\star \models \varphi^\star(\bar{d}, \bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{B}^\star \models \varphi^\star(\bar{e}, \bar{b}) \\
& \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ ssi } \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{b})
\end{aligned}
$$

$\square$