Complejidad descriptiva - parte 3

IIC3263

Complejidad Descriptiva: recordatorio

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ **captura** *una clase de complejidad* $\mathcal{C}$ *si:*

- *Para toda oración* φ *en* $\mathcal{LO}$*, se tiene que:*

$$L_\varphi = \{\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \text{ está en } \mathcal{C}$$

- *Para cada lenguaje* $L \in \mathcal{C}$*, existe una oración* φ *en* $\mathcal{LO}$ *tal que*

$$L = L_\varphi$$

Vale decir: $\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \in L$ *si y sólo si* $\mathfrak{A} \models \varphi$

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Tenemos un candidato: LPO con operador de menor punto fijo

Y ahora PTIME ...

Pregunta fundamental en bases de datos:

- Encontrar una lógica que pueda expresar todas las propiedades computables en tiempo polinomial

Tenemos un candidato: LPO con operador de menor punto fijo

Problema: Vamos a ver que esta lógica no es suficiente

- Necesitamos herramientas para estudiar la expresividad de las lógicas con operadores de punto fijo

Una lógica infinitaria

Dado: vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

La lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida como la extensión de LPO con dos conectivos infinitarios:

- *Si para cada $i \in I$ se tiene que φ_i es una fórmula, donde I no es necesariamente finito, entonces también son fórmulas:*

$$\bigvee_{i \in I} \varphi_i \qquad y \qquad \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$$

Una lógica infinitaria: Semántica

Definición

La semántica de $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es definida de manera usual:

- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigvee_{i \in I} \varphi_i$ *si existe* $i \in I$ *tal que* $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ *si para todo* $i \in I$, *se tiene que* $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi_i$

¿Qué propiedades podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$?

Ejercicio

Dado $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$, construya una fórmula $\varphi(x, y)$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y elementos c, d en $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi(c, d)$ si y sólo si existe un camino desde c a d en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

¿Qué propiedades podemos expresar en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$?

Ejercicio

Dado $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot)\}$, construya una fórmula $\varphi(x,y)$ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y elementos c, d en $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi(c,d)$ si y sólo si existe un camino desde c a d en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Sea $\alpha_1(x,y) = E(x,y)$, y para $n \geq 2$:

$$\alpha_n(x,y) = \exists z_1 \exists z_2 \cdots \exists z_n \, (E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge \cdots \wedge E(z_n,y))$$

Entonces: $\varphi(x,y) \; = \; \bigvee_{n \geq 1} \alpha_n(x,y)$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

$\mathcal{L}_{\infty\omega}$: Expresividad

Problema: $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ es demasiado expresiva

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\mathcal{C} \subseteq \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras cerrada bajo isomorfismo.

- Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración φ en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ tal que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Ejercicio

Demuestre la proposición

Lógicas con un número fijo de variables

Vamos a restringir la lógica $\mathcal{L}_{\infty\omega}$.

- Para cada $k \geq 1$, sea $\mathcal{L}^k_{\infty\omega}$ el conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}_{\infty\omega}$ construidas sólo usando variables $x_1, \ldots, x_k$

¿Qué podemos expresar en $\mathcal{L}^k_{\infty\omega}$?

- Depende del valor de k

Lógicas con un número fijo de variables: Expresividad

Ejemplo

Clausura transitiva es expresable en $\mathcal{L}^3_{\infty\omega}$

Sea $\beta_1(x_1, x_2) = E(x_1, x_2)$, y para $n \geq 1$:

$$\beta_{n+1}(x_1, x_2) \quad = \quad \exists x_3 \, (E(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 \, (x_1 = x_3 \wedge \beta_n(x_1, x_2)))$$

Clausura transitiva: $\displaystyle\bigvee_{n \geq 1} \beta_n(x_1, x_2)$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es definida como $\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es definida como $\displaystyle\bigcup_{k\geq 1} \mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, entonces existe $k \geq 1$ tal que φ está en $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

- φ sólo menciona a las variables $x_1, \ldots, x_k$

Una lógica con un número restringido de variables

Definición

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es definida como $\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Si φ es una fórmula en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, entonces existe $k \geq 1$ tal que φ está en $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

- φ sólo menciona a las variables $x_1, \ldots, x_k$

¿Cuan expresiva es la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \ldots, R_\ell$
- La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq \ell)$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \ldots, R_\ell$
- La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq \ell)$

$\mathcal{O}$ es la clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre el dominio de $\mathfrak{A}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que contiene el símbolo $<$

- Suponemos que los otros predicados de $\mathcal{L}$ son $R_1, \ldots, R_\ell$
- La aridad de R_i es $k_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq \ell)$

$\mathcal{O}$ es la clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ tal que $<^{\mathfrak{A}}$ es un orden lineal sobre el dominio de $\mathfrak{A}$

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{O}$ es una propiedad sobre las estructuras en $\mathcal{O}$

- Suponemos que $\mathcal{P}$ es cerrada bajo isomorfismo

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es muy expresiva

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es muy expresiva

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración Φ en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \Phi$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sobre la clase $\mathcal{O}$ la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ es muy expresiva

Proposición

Existe una $\mathcal{L}$-oración Φ en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tal que para cada $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$:

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \textit{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \Phi$$

Demostración: Sea $\alpha_1(x_1) = (x_1 = x_1)$, y para $n \geq 1$:

$$\alpha_{n+1}(x_1) \quad = \quad \exists x_2 \, (x_2 < x_1 \wedge \exists x_1 \, (x_1 = x_2 \wedge \alpha_n(x_1)))$$

$\mathfrak{A} \models \alpha_n(c)$ si y sólo si existen al menos $(n-1)$ elementos antes que c de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) \quad = \quad \alpha_n(x_1) \wedge \neg\alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n-ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) \quad = \quad \alpha_n(x_1) \wedge \neg\alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n-ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

- Cada fórmula $\beta_n(x_1)$ está en $\mathcal{L}^{2}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $n \geq 1$:

$$\beta_n(x_1) \quad = \quad \alpha_n(x_1) \wedge \neg\alpha_{n+1}(x_1)$$

$\mathfrak{A} \models \beta_n(c)$ si y sólo si c es el n-ésimo elemento de acuerdo al orden $<^{\mathfrak{A}}$

- Cada fórmula $\beta_n(x_1)$ está en $\mathcal{L}^{2}_{\infty\omega}$

Vamos a utilizar las fórmulas $\{\beta_n(x_1)\}_{n\geq 1}$ para definir Φ

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Sea $\mathfrak{A} \in \mathcal{O}$ con dominio A

- Suponga que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$, con $n \geq 1$ y $a_1 <^{\mathfrak{A}} a_2 <^{\mathfrak{A}} \cdots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1} <^{\mathfrak{A}} a_n$

Sea $\Psi_{\mathfrak{A}}$:

$$\exists x_1\, \beta_n(x_1) \wedge \neg\exists x_1\, \beta_{n+1}(x_1) \wedge$$
$$\bigwedge_{j=1}^{\ell} \Bigg[\forall x_1 \cdots \forall x_{k_j} \Bigg(R_j(x_1, \ldots, x_{k_j}) \leftrightarrow$$
$$\bigvee_{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k_j}}) \in R_j^{\mathfrak{A}}} \Bigg(\beta_{i_1}(x_1) \wedge \exists x_1\, (x_1 = x_2 \wedge \beta_{i_2}(x_1)) \wedge \cdots$$
$$\wedge\, \exists x_1\, (x_1 = x_{k_j} \wedge \beta_{i_{k_j}}(x_1)) \Bigg)\Bigg)\Bigg]$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad?

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg\exists x\,(x = x)$

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x \, (x = x)$
- Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg\exists x\,(x = x)$
- Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

Sea $p = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_\ell, 2\}$

- $\Psi_{\mathfrak{A}}$ está en $\mathcal{L}^{p}_{\infty\omega}$

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras ordenadas

Para cada $\mathfrak{B} \in \mathcal{O}$: Si $\mathfrak{B} \models \Psi_{\mathfrak{A}}$, entonces $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$

- ¿Cómo se representa una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio vacío para que se tenga esta propiedad? Se representa con la oración $\Psi_{\mathfrak{A}} = \neg \exists x \, (x = x)$
- Sólo permitimos relaciones con aridad mayor a 0. ¿Cómo podemos manejar las relaciones con aridad igual a 0?

Sea $p = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_\ell, 2\}$

- $\Psi_{\mathfrak{A}}$ está en $\mathcal{L}^{p}_{\infty\omega}$

Entonces: $$\Phi = \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \Psi_{\mathfrak{A}}$$

- ¿Cómo se demuestra que $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \Phi$?

$\square$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

¿Por qué nos interesan estos resultados?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias

¿Cuan expresiva es $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ sobre estructuras arbitrarias?

- Vamos a demostrar que no todas las propiedades (cerradas bajo isomorfismo) son expresables en esta lógica

¿Cómo podemos demostrar estos resultados?

- Vamos a presentar juegos que caracterizan $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

¿Por qué nos interesan estos resultados?

- Nos sirven para demostrar que hay propiedades que no son expresable en LPO con operador de menor punto fijo y LPO con operador parcial de punto fijo

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Tablero	:	$\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (**D**) y Spoiler (**S**)
Número de guijarros	:	$k \geq 1$ (parámetro del juego)
Número de rondas	:	infinito

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g^1_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (g^k_{\mathfrak{A}}, g^k_{\mathfrak{B}})\}$

En cada ronda:

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g^1_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (g^k_{\mathfrak{A}}, g^k_{\mathfrak{B}})\}$

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g^1_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (g^k_{\mathfrak{A}}, g^k_{\mathfrak{B}})\}$

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)
2. **S** elije un número $i \in \{1, \ldots, k\}$ y coloca $g^i_{\mathfrak{A}}$ sobre algún elemento de $\mathfrak{A}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Los jugadores tienen pares de guijarros: $\{(g^1_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{B}}), \ldots, (g^k_{\mathfrak{A}}, g^k_{\mathfrak{B}})\}$

En cada ronda:

1. **S** elije una estructura, digamos $\mathfrak{A}$ (el juego es definido de la misma forma para $\mathfrak{B}$)
2. **S** elije un número $i \in \{1, \ldots, k\}$ y coloca $g^i_{\mathfrak{A}}$ sobre algún elemento de $\mathfrak{A}$
3. **D** responde colocando $g^i_{\mathfrak{B}}$ sobre algún elemento de $\mathfrak{B}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

En cada ronda los guijarros en juego definen una función:

- $g^i_{\mathfrak{A}}$ tiene como imagen a $g^i_{\mathfrak{B}}$

S gana si en alguna ronda los guijarros en juego no forman un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- En caso contrario gana **D**

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros: Estrategia ganadora

Notación

D *tiene una estrategia ganadora en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé con k guijarros entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, si para cada posible forma de jugar de* **S**, *existe una forma de jugar de* **D** *que le permite ganar.*

- $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé con guijarros

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

Dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones de $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \equiv^{\infty\omega}_{k} \mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Un poco de intuición . . .

Ejercicios

1. Sea $\mathfrak{A}$ un grafo formado por un ciclo y $\mathfrak{B}$ un grafo formado por la unión disjunta de dos ciclos.
   1.1 Demuestre que si los ciclos son lo suficientemente largos, entonces $\mathfrak{A} \equiv_2^{\infty\omega} \mathfrak{B}$
   1.2 Demuestre que sin importar cuan largos son los ciclos, se tiene que $\mathfrak{A} \not\equiv_3^{\infty\omega} \mathfrak{B}$
   1.3 Encuentre una oración en $\mathcal{L}^3_{\infty\omega}$ que distingue entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Un poco de intuición ...

Ejercicios

2. Demuestre que para todo $k \geq 1$ se tiene que $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$ es menos expresivo que $\mathcal{L}^{k+1}_{\infty\omega}$

3. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

   Demuestre que PARIDAD no es expresable en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

Vamos a demostrar que la LPO con operador de menor punto fijo está contenida en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Hay propiedades que no pueden ser expresadas en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- De hecho, sabemos que algunas de estas propiedades son computables en tiempo polinomial

Vamos a demostrar que la LPO con operador de menor punto fijo está contenida en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- Concluimos que la LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- R_1, ..., R_n son símbolos de predicados que no son mencionados en $\mathcal{L}$
- La aridad de R_i es k_i $(1 \leq i \leq n)$

Sea $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \ldots, R_n\})$ que es positiva en R_1, ..., R_n

- El número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i
- V_i es el conjunto de variables mencionadas en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) \quad = \quad [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) \quad = \quad [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

Sean:

$$\begin{aligned} k &= \max\{k_1, \ldots, k_n\} \\ v &= |V_1| + \cdots + |V_n| \end{aligned}$$

Vamos a mostrar como expresar $\alpha(\bar{y})$ en $\mathcal{L}^{2 \cdot k + v + k_\ell}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos:

$$\psi_i^0(\bar{x}_i) = \neg(u = u),$$

donde u es una variable en $\bar{x}_i$

¿Qué representa ψ_i^0?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $m \geq 0$

Definimos $\psi_i^{m+1}(\bar{x}_i)$ como $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$ pero aplicando la siguiente regla de reemplazo.

- Suponga que $R_j(\bar{v})$ es mencionado en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$, con $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_{k_j})$ y $\{v_1, \ldots, v_{k_j}\} \subseteq V_i$.

  $R_j(\bar{v})$ es reemplazado en $\psi_i^{m+1}(\bar{x}_i)$ por:

$$\exists \bar{z} \left[\bar{z} = \bar{v} \wedge \exists \bar{x}_j \left(\bar{x}_j = \bar{z} \wedge \psi_j^m(\bar{x}_j) \right) \right]$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador de menor punto fijo

Entonces $\alpha(\bar{y})$ es equivalente a:

$$\exists \bar{x}_\ell \left[\bar{y} = \bar{x}_\ell \wedge \left(\bigvee_{m \geq 0} \psi_\ell^m(\bar{x}_\ell) \right) \right]$$

¿Por qué la equivalencia es cierta?

LPO con operador de menor punto fijo: Inclusión

De lo anterior obtenemos como conclusión:

Proposición

Cada fórmula φ en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador de menor punto fijo

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador de menor punto fijo

Corolario

LPO con operador de menor punto fijo no captura PTIME

Complejidad Descriptiva: Orden

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene predicado binario $<$

Notación

- $\textsc{OrdStruct}[\mathcal{L}] = \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid <^{\mathfrak{A}}$ *es un orden lineal*$\}$
- *Lenguaje: Subconjunto de* $\{\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \textsc{OrdStruct}[\mathcal{L}]\}$, *donde* $\mathrm{enc}(\mathfrak{A})$ *no incluye al predicado* $<$
- *Clase de complejidad: Conjunto de lenguajes*

Complejidad Descriptiva: Orden

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ captura una clase de complejidad $\mathcal{C}$ sobre la clase de estructuras ordenadas si:

- *Para toda oración φ en $\mathcal{LO}$, se tiene que* $L^{<}_{\varphi} = \{\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \textsc{OrdStruct}[\mathcal{L}]$ *y* $\mathfrak{A} \models \varphi\}$ *está en* $\mathcal{C}$
- *Para cada $L \in \mathcal{C}$, existe una oración φ en $\mathcal{LO}$ tal que $L = L^{<}_{\varphi}$*

  Vale decir, para cada $\mathfrak{A} \in \textsc{OrdStruct}[\mathcal{L}]$: $\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \in L$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PTIME

Teorema (Immerman-Vardi)

LPO con operador de menor punto fijo captura PTIME sobre la clase de estructuras ordenadas

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PTIME

Teorema (Immerman-Vardi)

LPO con operador de menor punto fijo captura PTIME sobre la clase de estructuras ordenadas

Demostración: Consideramos el caso $\mathcal{L} = \{G(\cdot,\cdot), <\}$

- Para otros vocabularios la demostración es similar

Sabemos que para toda oración φ en LPO con operador de menor punto fijo, se tiene que $L_{\varphi}^{<}$ está en PTIME

- Sólo tenemos que demostrar la otra dirección

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Dado L en PTIME, vamos a encontrar φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que $L = L_{\varphi}^{<}$

- Para cada $\mathfrak{A} \in \textsc{OrdStruct}[\mathcal{L}]$: $\mathrm{enc}(\mathfrak{A}) \in L$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$

Suponemos que L es aceptado por una MT determinista M que para en todas las entradas y funciona en tiempo n^k

- Como en la demostración del teorema de Fagin: M funciona en tiempo n^{2k} para una estructura con n elementos

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Además, suponemos que $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, donde:

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $Q = \{q_0, \ldots, q_m\}$
- $F = \{q_m\}$
- $\delta : (Q \smallsetminus \{q_m\}) \times (\Sigma \cup \{\mathtt{B}, \vdash\}) \to Q \times (\Sigma \cup \{\mathtt{B}, \vdash\}) \times \{\leftarrow, \square, \rightarrow\}$ es una función total

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

- φ_O: Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1,\ldots,x_{2k},y_1,\ldots,y_{2k}) \;=\; \bigvee_{i=1}^{2k}\left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j\right)\wedge x_i < y_i\right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

- φ_O: Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k}) \quad = \quad \bigvee_{i=1}^{2k} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j \right) \wedge x_i < y_i \right)$$

- φ_P: Primer elemento del orden O

$$\varphi_P(\bar{x}) \quad = \quad \neg \exists \bar{y}\, \varphi_O(\bar{y}, \bar{x})$$

Cada tupla de variables tiene largo $2k$ ($|\bar{x}| = |\bar{y}| = 2k$)

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Fórmulas auxiliares:

- φ_O: Orden lexicográfico construido a partir de $<$

$$\varphi_O(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k}) \;=\; \bigvee_{i=1}^{2k} \left(\left(\bigwedge_{j=1}^{i-1} x_j = y_j \right) \wedge x_i < y_i \right)$$

- φ_P: Primer elemento del orden O

$$\varphi_P(\bar{x}) \;=\; \neg\exists \bar{y}\, \varphi_O(\bar{y}, \bar{x})$$

  Cada tupla de variables tiene largo $2k$ ($|\bar{x}| = |\bar{y}| = 2k$)

- φ_S: Relación de sucesor asociada a O

$$\varphi_S(\bar{x}, \bar{y}) \;=\; \varphi_O(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg\exists \bar{z}\, (\varphi_O(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}))$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Oración φ es definida como:

$$
\begin{aligned}
\exists \bar{u} \Bigg[\mathbf{lfp}_{\bar{u}_m, E_{q_m}} \Bigg(& \theta_{T_0}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \theta_{T_1}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \theta_{T_{\mathtt{B}}}(\bar{x}_3, \bar{y}_3, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \theta_{T_{\vdash}}(\bar{x}_4, \bar{y}_4, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \theta_{H}(\bar{x}_5, \bar{y}_5, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \color{red}{\theta_{NH}(\bar{x}_6, \bar{y}_6, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}),} \\
& \theta_{E_{q_0}}(\bar{u}_0, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}), \\
& \ldots, \\
& \theta_{E_{q_m}}(\bar{u}_m, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m}) \Bigg) \Bigg] (\bar{u})
\end{aligned}
$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_0}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_1) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \Big(\neg \exists w\,(w < z_1) \wedge \neg G(z_2, z_3) \wedge$$

$$\varphi_S(\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{2k-2 \text{ veces}}, z_2, z_3, \bar{y}_1)\Big)$$

$$\vee$$

$$\exists \bar{z}\,(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_1) \wedge T_0(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_1))$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',0,X)} \exists \bar{z}\,\Big(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_1) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_1) \wedge E_q(\bar{z})\Big)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_1}(\bar{x}_2, \bar{y}_2, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_2) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \left(\neg \exists w\, (w < z_1) \wedge G(z_2, z_3) \wedge \varphi_S(\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{2k-2 \text{ veces}}, z_2, z_3, \bar{y}_2) \right)$$

$$\vee$$

$$\exists \bar{z}\, (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_2) \wedge T_1(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_2))$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',1,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_2) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_2) \wedge E_q(\bar{z}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_{\mathrm{B}}}(\bar{x}_3, \bar{y}_3, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_3) \wedge \exists z_1 \exists z_2 \left(\neg\exists v\,(v < z_1) \wedge z_1 < z_2 \wedge \neg\exists z_3\,(z_1 < z_3 \wedge z_3 < z_2) \wedge \varphi_O(\underbrace{z_1, \ldots, z_1}_{2k-3 \text{ veces}}, z_2, z_1, z_1, \bar{y}_3) \right)$$

$$\vee$$

$$\exists \bar{z}\,(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_3) \wedge T_{\mathrm{B}}(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_3))$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',\mathrm{B},X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_3) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_3) \wedge E_q(\bar{z}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{T_\vdash}(\bar{x}_4, \bar{y}_4, T_0, T_1, T_{\mathtt{B}}, T_\vdash, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$
\begin{gathered}
(\varphi_P(\bar{x}_4) \wedge \varphi_P(\bar{y}_4)) \\
\vee \\
\exists \bar{z}\, (\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_4) \wedge T_\vdash(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge NH(\bar{z}, \bar{y}_4)) \\
\vee \\
\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',\vdash,X)} \exists \bar{z} \left(\varphi_S(\bar{z}, \bar{x}_4) \wedge T_a(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge H(\bar{z}, \bar{y}_4) \wedge E_q(\bar{z})\right)
\end{gathered}
$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_H(\bar{x}_5, \bar{y}_5, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{x}_5, \bar{y}_5)$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\leftarrow)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \Big(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{y}_5, \bar{w}) \wedge$$

$$T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_q(\bar{v}) \Big)$$

$$\vee$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\rightarrow)} \exists\bar{v}\exists\bar{w}\,\Big(\varphi_S(\bar{v},\bar{x}_5) \wedge \varphi_S(\bar{w},\bar{y}_5) \wedge$$

$$T_a(\bar{v},\bar{w}) \wedge H(\bar{v},\bar{w}) \wedge E_q(\bar{v})\Big)$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\square)} \exists\bar{v}\,\Big(\varphi_S(\bar{v},\bar{x}_5) \wedge T_a(\bar{v},\bar{y}_5) \wedge H(\bar{v},\bar{y}_5) \wedge E_q(\bar{v})\Big)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{NH}(\bar{x}_6, \bar{y}_6, T_0, T_1, T_{\texttt{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{x}_6) \wedge \exists \bar{z}\, (\varphi_S(\bar{x}_6, \bar{z}) \ \wedge \ (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}_6)))$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\leftarrow)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \exists \bar{z} \Big(\varphi_S(\bar{v}, \bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \wedge H(\bar{v}, \bar{w}) \ \wedge$$

$$E_q(\bar{v}) \wedge \varphi_S(\bar{z}, \bar{w}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6, \bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z}, \bar{y}_6))\Big)$$

$$\vee$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\rightarrow)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \exists \bar{z} \Big(\varphi_S(\bar{v},\bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v},\bar{w}) \wedge H(\bar{v},\bar{w}) \wedge$$

$$E_q(\bar{v}) \wedge \varphi_S(\bar{w},\bar{z}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6,\bar{z}) \vee \varphi_O(\bar{z},\bar{y}_6)) \Big)$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q',b,\Box)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \Big(\varphi_S(\bar{v},\bar{x}_6) \wedge T_a(\bar{v},\bar{w}) \wedge H(\bar{v},\bar{w}) \wedge$$

$$E_q(\bar{v}) \wedge (\varphi_O(\bar{y}_6,\bar{w}) \vee \varphi_O(\bar{w},\bar{y}_6)) \Big)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

$\theta_{E_{q_0}}(\bar{u}_0, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0}, \ldots, E_{q_m})$:

$$\varphi_P(\bar{u}_0)$$
$$\vee$$
$$\bigvee_{(q,a)\,:\,\delta(q,a)=(q_0,b,X)} \exists \bar{v} \exists \bar{w} \left(\varphi_S(\bar{v}, \bar{u}_0) \wedge T_a(\bar{v}, \bar{w}) \ \wedge \right.$$
$$\left. H(\bar{v}, \bar{w}) \wedge E_q(\bar{v}) \right)$$

Teorema de Immerman-Vardi: Demostración

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $\theta_{E_{q_i}}(\bar{u}_i, T_0, T_1, T_{\mathrm{B}}, T_{\vdash}, H, NH, E_{q_0},$
$\ldots, E_{q_m})$ es definido como:

$$\bigvee_{(q',a)\,:\,\delta(q',a)=(q_i,b,X)} \exists\bar{v}\exists\bar{w}\left(\varphi_S(\bar{v},\bar{u}_i) \land T_a(\bar{v},\bar{w}) \land \right.$$
$$\left. H(\bar{v},\bar{w}) \land E_{q'}(\bar{v})\right)$$

$\square$

Teorema de Immerman-Vardi: Un corolario fundamental

Corolario

PTIME $\neq$ NP si y sólo si LPO con operador de menor punto fijo es menos expresiva que $\exists$LSO sobre la clase de las estructuras ordenadas

Teorema de Immerman-Vardi: Un corolario fundamental

Corolario

PTIME $\neq$ NP si y sólo si LPO con operador de menor punto fijo es menos expresiva que $\exists$LSO sobre la clase de las estructuras ordenadas

- *Existe una oración φ en $\exists$LSO que no puede ser expresada en LPO con operador de menor punto fijo sobre la clase de las estructuras ordenadas*

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- Es una lógica *natural*

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si PTIME $=$ NP, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME sobre la clase de todas las estructuras

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si PTIME $=$ NP, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME sobre la clase de todas las estructuras

- Esta lógica es $\exists$LSO

¿Y qué pasa si no tenemos un orden?

El Teorema de Immerman-Vardi nos da una lógica que captura PTIME sobre la clase de las estructuras ordenadas.

- Es una lógica *natural*

Una consecuencia del Teorema de Fagin: Si PTIME $=$ NP, entonces existe una lógica *natural* que captura PTIME sobre la clase de todas las estructuras

- Esta lógica es $\exists$LSO

Conjetura de Gurevich

No existe una lógica *natural* que captura a PTIME sobre la clase de todas las estructuras

Y finalmente PSPACE ...

Una última preguntar por responder:

- ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Y finalmente PSPACE ...

Una última preguntar por responder:

- ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Candidato natural: LPO con operador parcial de punto fijo

Y finalmente PSPACE ...

Una última preguntar por responder:

- ¿Existe una lógica que captura PSPACE?

Candidato natural: LPO con operador parcial de punto fijo

- ¿Captura esta lógica a PSPACE sobre la clase de todas las estructuras?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- R_1, ..., R_n son símbolos de predicados que no son mencionados en $\mathcal{L}$
- La aridad de R_i es k_i $(1 \leq i \leq n)$

Sea $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \ldots, R_n\})$

- El número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i
- V_i es el conjunto de variables mencionadas en $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) \quad = \quad [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Sea $\ell \in \{1, \ldots, n\}$. La siguiente es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo:

$$\alpha(\bar{y}) \quad = \quad [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_\ell, R_\ell}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

Sean:

$$\begin{aligned} k &= \max\{k_1, \ldots, k_n\} \\ v &= |V_1| + \ldots + |V_n| \end{aligned}$$

Vamos a mostrar como expresar $\alpha(\bar{y})$ en $\mathcal{L}^{2 \cdot k + v + k_\ell}_{\infty\omega}$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $m \geq 0$:

- $\psi_i^m(\bar{x}_i)$ es definida como en la demostración de que la LPO con operador de menor punto fijo está incluida en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

Además, para cada $m \geq 0$:

$$\Phi^m \quad = \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \forall \bar{x}_i \left(\psi_i^m(\bar{x}_i) \leftrightarrow \psi_i^{m+1}(\bar{x}_i) \right)$$

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

Entonces $\alpha(\bar{y})$ es equivalente a:

$$\exists \bar{x}_\ell \left[\bar{y} = \bar{x}_\ell \wedge \bigvee_{m \geq 0} \left(\Phi^m \wedge \psi^m_\ell(\bar{x}_\ell) \right) \right]$$

¿Por qué la equivalencia es cierta?

$\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ y la LPO con operador parcial de punto fijo

De lo anterior obtenemos como conclusión:

Proposición

Cada fórmula φ en LPO con operador parcial de punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Obtenemos como corolarios de los resultados anteriores:

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO con operador parcial de punto fijo

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

¿Qué faltó para capturar PSPACE?

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

Corolario

LPO con operador parcial de punto fijo no captura PSPACE

- *De hecho, LPO con operador parcial de punto fijo ni siquiera incluye a PTIME*

¿Qué faltó para capturar PSPACE?

- Nuevamente vamos a demostrar que el ingrediente faltante era un orden lineal

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PSPACE

Teorema

LPO con operador parcial de punto fijo captura PSPACE sobre la clase de estructuras ordenadas

Complejidad Descriptiva: Una lógica para PSPACE

Teorema

LPO con operador parcial de punto fijo captura PSPACE sobre la clase de estructuras ordenadas

Obtenemos como corolario:

Corolario

NP $\neq$ PSPACE si y sólo si $\exists$LSO es menos expresiva que LPO con operador parcial de punto fijo sobre la clase de las estructuras ordenadas