Complejidad descriptiva - parte 2

IIC3263

Lógicas con recursión

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y símbolo de relación R con k argumentos

- $R \notin \mathcal{L}$

Notación

Para $X \subseteq A^k$: $(\mathfrak{A}, X)$ es una $(\mathcal{L} \cup \{R\})$-estructura donde R es interpretado como X

Lógicas con recursión

Definición

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *una fórmula en LPO sobre* $\mathcal{L} \cup \{R\}$

- $T_\varphi : 2^{A^k} \to 2^{A^k}$ *es un operador tal que para cada* $X \subseteq A^k$*:*

$$T_\varphi(X) \;\; = \;\; \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \ldots, a_k, R)\}$$

- $X \subseteq A^k$ *es un punto fijo de* T_φ *si* $T_\varphi(X) = X$

Lógicas con recursión

Definición

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *una fórmula en LPO sobre* $\mathcal{L} \cup \{R\}$

- $T_\varphi : 2^{A^k} \to 2^{A^k}$ *es un operador tal que para cada* $X \subseteq A^k$*:*

$$T_\varphi(X) \quad = \quad \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \ldots, a_k, R)\}$$

- $X \subseteq A^k$ *es un punto fijo de* T_φ *si* $T_\varphi(X) = X$

Ejemplo

Muestre que T_φ no tiene punto fijo si $\varphi(x, S) = \neg S(x)$

Monotonía y la existencia de un punto fijo

Definición

T_φ es monótono si para $X_1 \subseteq X_2$: $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

Monotonía y la existencia de un punto fijo

Definición

T_φ es monótono si para $X_1 \subseteq X_2$: $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

Teorema (Tarski-Knaster)

Si T_φ es monótono, entonces tiene un menor punto fijo.

Monotonía y la existencia de un punto fijo

Definición

T_φ es monótono si para $X_1 \subseteq X_2$: $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

Teorema (Tarski-Knaster)

Si T_φ es monótono, entonces tiene un menor punto fijo.

Demostración: Defina $T_0 = \emptyset$ y

$$T_{n+1} = T_\varphi(T_n)$$

Entonces: $T_n \subseteq T_{n+1}$ puesto que T_φ es monótono

- Como A^k es finito: Existe ℓ tal que $T_\ell = T_{\ell+1} = T_\varphi(T_\ell)$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$T_1 = T_\varphi(T_0) \quad \subseteq \quad T_\varphi(Y) = Y$$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$\begin{array}{lcl} T_1 = T_\varphi(T_0) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \end{array}$$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$\begin{array}{rcl} T_1 = T_\varphi(T_0) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ & \cdots & \\ T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \end{array}$$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$\begin{array}{rcl} T_1 = T_\varphi(T_0) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ & \cdots & \\ T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\ T_\ell = T_\varphi(T_{\ell-1}) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \end{array}$$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$\begin{array}{rcl}
T_1 = T_\varphi(T_0) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\
T_2 = T_\varphi(T_1) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\
 & \cdots & \\
T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y \\
T_\ell = T_\varphi(T_{\ell-1}) & \subseteq & T_\varphi(Y) = Y
\end{array}$$

Se tiene que T_ℓ es el menor punto fijo de T_φ $\square$

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Suponga que $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ no utiliza conectivos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

$\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ es una fórmula positiva en R si cada aparición de R está bajo un número par de negaciones

- $\neg R(x)$ no es positiva en R
- $\neg\neg R(x)$ y $\neg(\neg R(x) \wedge T(x))$ son positivas en R

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Proposición

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *es positiva, entonces* T_φ *es monótono*

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Proposición

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *es positiva, entonces* T_φ *es monótono*

Ejercicio

Demuestre la proposición

- ¿Es la dirección contraria también válida?

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Corolario

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *es una fórmula positiva, entonces* T_φ *tiene un menor punto fijo.*

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Corolario

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ *es una fórmula positiva, entonces* T_φ *tiene un menor punto fijo.*

Notación

$\mathbf{lfp}(T_\varphi)$ *es el menor punto fijo de* T_φ

Lógicas con operadores de punto fijo

La lógica de primer orden con operador de menor punto fijo extiende a la LPO.

Lógicas con operadores de punto fijo

La lógica de primer orden con operador de menor punto fijo extiende a la LPO.

Incluimos una regla de la siguiente forma para definir esta lógica:

- Si R es un símbolo de predicado k-ario y $\varphi(x_1, \ldots, x_k, R)$ es una fórmula positiva en LPO, entonces:

$$[\mathbf{lfp}_{(x_1,\ldots,x_k),R}\, \varphi(x_1, \ldots, x_k, R)](y_1, \ldots, y_k)$$

es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo

Lógicas con operadores de punto fijo

La semántica de $[\mathbf{lfp}_{\bar{x},R}\,\varphi(\bar{x},R)](\bar{y})$ es definida como:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x},R}\,\varphi(\bar{x},R)](\bar{a}) \;\text{ si y sólo si }\; \bar{a} \in \mathbf{lfp}(T_\varphi)$$

Lógicas con operadores de punto fijo

La semántica de $[\mathbf{lfp}_{\bar{x},R}\, \varphi(\bar{x}, R)](\bar{y})$ es definida como:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x},R}\, \varphi(\bar{x}, R)](\bar{a}) \;\; \text{si y sólo si} \;\; \bar{a} \in \mathbf{lfp}(T_\varphi)$$

Ejercicio

Muestre que las siguientes propiedades pueden ser expresadas en la LPO con operador de menor punto fijo:

1. Determinar si un nodo es alcanzable desde otro en un grafo
2. Determinar si un grafo dirigido es acíclico
3. Determinar si un grafo es un árbol

Primer ejemplo: Graph reachability

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Vamos a definir una fórmula $\varphi_{\text{gr}}(x, y)$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{gr}}(a, b)$ si y sólo si b es alcanzable desde a en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Primer ejemplo: Graph reachability

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Vamos a definir una fórmula $\varphi_{\mathrm{gr}}(x, y)$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathrm{gr}}(a, b)$ si y sólo si b es alcanzable desde a en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

$\varphi_{\mathrm{gr}}(x, y)$ se define como:

$$\begin{array}{rcl} \alpha(u, v, R) & = & E(u, v) \vee \exists w \, (E(u, w) \wedge R(w, v)) \\ \varphi_{\mathrm{gr}}(x, y) & = & [\mathbf{lfp}_{(u,v),R} \, \alpha(u, v, R)](x, y) \end{array}$$

Segundo ejemplo: Graph acyclicity

Vamos a definir una oración Φ_{ga} tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{ga}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ no contiene ciclos

Segundo ejemplo: Graph acyclicity

Vamos a definir una oración Φ_{ga} tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Phi_{\text{ga}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ no contiene ciclos

Φ_{ga} se define como:

$$\Phi_{\text{ga}} \quad = \quad \neg \exists x \, \varphi_{\text{gr}}(x, x)$$

Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula $\Psi_{\text{árbol}}$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ es un árbol

Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula $\Psi_{\text{árbol}}$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ es un árbol

Sean:

$$\begin{aligned} \beta(u, v) &= E(u, v) \vee E(v, u) \\ \gamma(u, v, R) &= \beta(u, v) \vee \exists w \, (\beta(u, w) \wedge R(w, v)) \end{aligned}$$

Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula $\Psi_{\text{árbol}}$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ es un árbol

Sean:

$$\begin{aligned} \beta(u, v) &= E(u, v) \vee E(v, u) \\ \gamma(u, v, R) &= \beta(u, v) \vee \exists w\, (\beta(u, w) \wedge R(w, v)) \end{aligned}$$

$\Psi_{\text{árbol}}$ es definido como:

$$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \varphi_{\text{gr}}(x, y)) \;\wedge\; \neg \exists z\, [\mathbf{lfp}_{(u,v),R}\, \gamma(u, v, R)](z, z)$$

Lógicas con operadores de punto fijo: Anidación

¿Pueden aparecer operadores de punto fijo anidados?

- Todavía no hemos dicho como hacer esto

Vamos a definir de manera precisa como anidar operadores.

- Vamos a definir la sintaxis de la lógica de primer orden con operador de menor punto fijo

LPO con operador de menor punto fijo: Sintaxis

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

LPO con operador de menor punto fijo: Sintaxis

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

LPO con operador de menor punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:

- *Sea* $n \geq 1$, $\{R_1, \ldots, R_n\}$ *un conjunto de símbolos de relación no mencionados en* $\mathcal{L}$, *y* $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ *una fórmula en LPO sobre* $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \ldots, R_n\})$ *que es positiva en* R_1*, ...,* R_n *y tal que el número de variables en* $\bar{x}_i$ *es igual al número de argumentos en* R_i*.*

  Entonces para $k \in \{1, \ldots, n\}$*:*

  $$[\mathbf{lfp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

  es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo, suponiendo que $\bar{x}_k$ *e* $\bar{y}$ *tienen el mismo número de variables.*

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Dado: Sistema de fórmulas $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$, donde cada R_i tiene aridad k_i

- Suponemos que cumple las condiciones de la definición

Notación

- $(A_1, \ldots, A_n) \subseteq (B_1, \ldots, B_n)$ *si* $A_i \subseteq B_i$ *para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$
- *Para* $(X_1, \ldots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \ldots, A^{k_n})$*:* $(\mathfrak{A}, X_1, \ldots, X_n)$ *es una* $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \ldots, R_n\})$*-estructura donde* R_i *es interpretado como* X_i $(1 \leq i \leq n)$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

$(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ define n operadores:

$$T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} \; : \; 2^{A^{k_1}} \times \cdots \times 2^{A^{k_n}} \; \to \; 2^{A^{k_i}}$$

Para cada $(X_1, \ldots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \ldots, A^{k_n})$:

$$\begin{aligned} T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1, \ldots, X_n) \; = \; & \{(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid \\ & (\mathfrak{A}, X_1, \ldots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, R_1, \ldots, R_n)\} \end{aligned}$$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Notación

$T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1,\ldots,X_n) = (T^1_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1,\ldots,X_n), \ldots, T^n_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1,\ldots,X_n))$

$T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ es un operador:

$$T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)} \quad : \quad 2^{A^{k_1}} \times \cdots \times 2^{A^{k_n}} \;\rightarrow\; 2^{A^{k_1}} \times \cdots \times 2^{A^{k_n}}$$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Como en un sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ cada φ_i es positiva en R_1, …, R_n, cada $T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ es monótono.

Entonces: $T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ es monótono

- Tiene un menor punto fijo: **lfp**$(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)})$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Como en un sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ cada φ_i es positiva en R_1, ..., R_n, cada $T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ es monótono.

Entonces: $T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ es monótono

- Tiene un menor punto fijo: $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)})$

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_i,R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{a})$ *si y sólo si* $\bar{a}$ *pertenece a la i-ésima componente de* $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)})$

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$. Usar puntos fijos simultáneos para expresar la consulta que retorna todas las tuplas (a, b) tal que la distancia entre a y b es par, en todas las estructuras $\mathfrak{A}$ donde $E^{\mathfrak{A}}$ es una relación de sucesor.

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{E\}$. Usar puntos fijos simultáneos para expresar la consulta que retorna todas las tuplas (a, b) tal que la distancia entre a y b es par, en todas las estructuras $\mathfrak{A}$ donde $E^{\mathfrak{A}}$ es una relación de sucesor.

Ejercicio

Expresar la consulta que retorna las tuplas (a, b) tal que hay un camino simple entre a y b que tiene largo par, en cualquier $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$.

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador de menor punto fijo se tiene que L_φ está en PTIME*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que L_φ es PTIME-completo*

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador de menor punto fijo se tiene que L_φ está en PTIME*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que L_φ es PTIME-completo*

Vamos a demostrar la segunda parte del teorema.

- Dejamos la primera parte como ejercicio

Un problema completo para PTIME: Cláusulas de Horn

Notación

p es un literal positivo y $\neg p$ es un literal negativo.

Notación

Una cláusula C es de Horn si C contiene a lo más un literal positivo

Ejemplo

$$
\begin{array}{ll}
p \vee \neg q \vee \neg r & \qquad p \\
\neg q \vee \neg r & \qquad \neg q
\end{array}
$$

Cláusulas de Horn: Conocimiento definitivo

Las cláusulas de Horn corresponden al siguiente tipo de reglas que expresan conocimiento definitivo:

- q
- $\neg q$
- $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$
- $(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow \neg q$

La complejidad de HORN-SAT y 3-HORN-SAT

Sean:

$$
\begin{aligned}
\text{HORN-SAT} \;&=\; \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn} \\
&\qquad\quad \text{y } \varphi \text{ es satisfacible}\} \\
\text{3-HORN-SAT} \;&=\; \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn,} \\
&\qquad\quad \text{donde cada clausula tiene a lo más 3 literales,} \\
&\qquad\quad \text{y } \varphi \text{ es satisfacible}\}
\end{aligned}
$$

La complejidad de HORN-SAT y 3-HORN-SAT

Sean:

$$\begin{aligned}
\text{HORN-SAT} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn} \\
&\qquad \text{y } \varphi \text{ es satisfacible}\} \\
\text{3-HORN-SAT} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn,} \\
&\qquad \text{donde cada clausula tiene a lo más 3 literales,} \\
&\qquad \text{y } \varphi \text{ es satisfacible}\}
\end{aligned}$$

Teorema

HORN-SAT y 3-HORN-SAT son PTIME-completos

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración Φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- 3-HORN-SAT puede ser reducido a L_Φ en espacio logarítmico

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración Φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- 3-HORN-SAT puede ser reducido a L_Φ en espacio logarítmico

Sea $\mathcal{L} = \{P_1(\cdot), P_2(\cdot, \cdot), P_3(\cdot, \cdot, \cdot), N_1(\cdot), N_2(\cdot, \cdot), N_3(\cdot, \cdot, \cdot)\}$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración Φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- 3-HORN-SAT puede ser reducido a L_Φ en espacio logarítmico

Sea $\mathcal{L} = \{P_1(\cdot), P_2(\cdot,\cdot), P_3(\cdot,\cdot,\cdot), N_1(\cdot), N_2(\cdot,\cdot), N_3(\cdot,\cdot,\cdot)\}$

Además, sean:

$$\begin{aligned}
\alpha(u,P) &= P_1(u) \vee \exists v\,(P_2(u,v) \wedge P(v)) \;\vee \\
&\qquad\qquad \exists w_1 \exists w_2\,(P_3(u,w_1,w_2) \wedge P(w_1) \wedge P(w_2)) \\
\varphi_{\mathrm{pos}}(x) &= [\mathbf{lfp}_{u,P}\,\alpha(u,P)](x)
\end{aligned}$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Entonces Φ se define como:

$$\begin{gathered}
\neg\exists x\,(N_1(x) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(x)) \;\wedge \\
\neg\exists x\exists y\,(N_2(x,y) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(x) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(y)) \;\wedge \\
\neg\exists x\exists y\exists z\,(N_3(x,y,z) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(x) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(y) \wedge \varphi_{\mathrm{pos}}(z))
\end{gathered}$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Entonces Φ se define como:

$$\begin{gathered}\neg\exists x\,(N_1(x) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(x)) \ \land \\ \neg\exists x\exists y\,(N_2(x,y) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(x) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(y)) \ \land \\ \neg\exists x\exists y\exists z\,(N_3(x,y,z) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(x) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(y) \land \varphi_{\mathrm{pos}}(z))\end{gathered}$$

Vamos a mostrar como reducir 3-HORN-SAT a L_Φ en espacio logarítmico

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Sea θ una conjunción de clausulas de Horn con a lo más 3 literales por clausula

- Suponga que $\theta = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_\ell$
- Suponga que $p_1, \ldots, p_n$ son las variables proposicionales mencionadas en θ

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Sea θ una conjunción de clausulas de Horn con a lo más 3 literales por clausula

- Suponga que $\theta = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_\ell$
- Suponga que $p_1, \ldots, p_n$ son las variables proposicionales mencionadas en θ

Vamos a mostrar como construir una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}_\theta$ tal que:

$$\theta \in \text{3-HORN-SAT} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}_\theta \in L_\Phi$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Dominio de $\mathfrak{A}_\theta$ es $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Dominio de $\mathfrak{A}_\theta$ es $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$

$$
\begin{aligned}
P_1^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{p \in A \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = p\} \\
P_2^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{(p, q) \in A^2 \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = (p \vee \neg q)\} \\
P_3^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = (p \vee \neg q \vee \neg r)\} \\
N_1^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{p \in A \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = (\neg p)\} \\
N_2^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{(p, q) \in A^2 \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = (\neg p \vee \neg q)\} \\
N_3^{\mathfrak{A}_\theta} &= \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{ existe } i \in \{1, \ldots, \ell\} : \ \theta_i = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)\}
\end{aligned}
$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Tenemos que demostrar que θ es satisfacible si y sólo si $\mathfrak{A}_\theta \models \Phi$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Además, tenemos que demostrar que la reducción se puede calcular en espacio logarítmico

- ¿Cómo se demuestra esto?

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Tenemos que demostrar que θ es satisfacible si y sólo si $\mathfrak{A}_\theta \models \Phi$

- ¿Cómo se demuestra esto?

Además, tenemos que demostrar que la reducción se puede calcular en espacio logarítmico

- ¿Cómo se demuestra esto?

Concluimos que 3-HORN-SAT se puede reducir a L_Φ en espacio logarítmico

- Por lo tanto: L_Φ es PTIME-hard

$\square$

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Opción 1: Tomamos el punto fijo inflacionario

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Opción 1: Tomamos el punto fijo inflacionario
- $I_\varphi : 2^{A^k} \to 2^{A^k}$ es un operador tal que para cada $X \subseteq A^k$:

$$I_\varphi(X) \quad = \quad X \cup \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \dots, a_k, R)\}$$

- Notar que $I_\varphi(X)$ siempre tiene un punto fijo, sea ϕ monótona o no, por que $X \subseteq I_\varphi(X)$

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Opción 1: Tomamos el punto fijo inflacionario

- $I_\varphi : 2^{A^k} \to 2^{A^k}$ es un operador tal que para cada $X \subseteq A^k$:

$$I_\varphi(X) \quad = \quad X \cup \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \ldots, a_k, R)\}$$

- Notar que $I_\varphi(X)$ siempre tiene un punto fijo, sea ϕ monótona o no, por que $X \subseteq I_\varphi(X)$

Es posible demostrar que le poder expresivo de LPO + punto fijo es el mismo que el de LPO + punto fijo inflacionario (Teorema de Gurevich-Shelah)

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Opción 2: Definimos una nueva lógica (sobre un vocabulario $\mathcal{L}$)

Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Opción 2: Definimos una nueva lógica (sobre un vocabulario $\mathcal{L}$)

Definición

LPO con operador parcial de punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:

- *Sea* $n \geq 1$, $\{R_1, \ldots, R_n\}$ *un conjunto de símbolos de relación no mencionados en* $\mathcal{L}$, *y* $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \ldots, R_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ *una fórmula en LPO sobre* $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \ldots, R_n\})$ *tal que el número de variables en* $\bar{x}_i$ *es igual al número de argumentos en* R_i*.*

  Entonces para $k \in \{1, \ldots, n\}$*:*

  $$[\mathbf{pfp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{y})$$

  es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo, suponiendo que $\bar{x}_k$ *e* $\bar{y}$ *tienen el mismo número de variables.*

LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Sistema de fórmulas $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots,$ $\varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$, donde cada R_i tiene aridad k_i

Al igual que para el caso de LPO con operador de menor punto fijo:

$$\begin{aligned} T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1,\ldots,X_n) \;=\; \{&(a_1,\ldots,a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid \\ &(\mathfrak{A}, X_1,\ldots,X_n) \models \varphi_i(a_1,\ldots,a_{k_i}, R_1,\ldots,R_n)\} \end{aligned}$$

LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Sistema de fórmulas $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots,$ $\varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$, donde cada R_i tiene aridad k_i

Al igual que para el caso de LPO con operador de menor punto fijo:

$$
\begin{aligned}
T^i_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1, \ldots, X_n) \; = \; & \{(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid \\
& (\mathfrak{A}, X_1, \ldots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_{k_i}, R_1, \ldots, R_n)\}
\end{aligned}
$$

Notación

$T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1, \ldots, X_n) = (T^1_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1, \ldots, X_n), \ldots,$
$T^n_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(X_1, \ldots, X_n))$

LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ ya **no** pedimos a cada φ_i ser positiva

- $T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ puede no tener punto fijo

LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ ya **no** pedimos a cada φ_i ser positiva

- $T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ puede no tener punto fijo

Sea $\overline{T}_0 = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$ y $\overline{T}_{n+1} = T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(\overline{T}_n)$

LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))$ ya **no** pedimos a cada φ_i ser positiva

- $T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}$ puede no tener punto fijo

Sea $\overline{T}_0 = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$ y $\overline{T}_{n+1} = T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}(\overline{T}_n)$

Definición

$$\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}) = \begin{cases} \overline{T}_k & \overline{T}_k = \overline{T}_{k+1} \\ \emptyset & \overline{T}_k \neq \overline{T}_{k+1} \; \textit{para todo } k \geq 0 \end{cases}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{a})$ *si y sólo si* $\bar{a}$ *pertenece a la* i*-ésima componente de* $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)})$

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{a})$ *si y sólo si* $\bar{a}$ *pertenece a la* i*-ésima componente de* $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{a})$ *si y sólo si* $\bar{a}$ *pertenece a la* i*-ésima componente de* $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

- ¿Está bien definido **pfp**? ¿Es $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)}) = \mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)})$ si cada fórmula φ_i es positiva?

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \ldots, R_n), \ldots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \ldots, R_n))](\bar{a})$ *si y sólo si* $\bar{a}$ *pertenece a la* i*-ésima componente de* $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

- ¿Está bien definido **pfp**? ¿Es $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}) = \mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)})$ si cada fórmula φ_i es positiva?
- ¿Es esta nueva lógica más expresiva que la LPO con operador de menor punto fijo?
    - ¿Podemos expresar propiedades difíciles de verificar?

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot), L(\cdot,\cdot)\}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \ = \ \{&\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}}, L^{\mathfrak{A}}\rangle, \text{ el grafo } (A, E^{\mathfrak{A}}) \text{ es} \\ &\text{no dirigido y 3-coloreable, y } L^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal en } A\} \end{aligned}$$

¿Cuál es la complejidad de $\mathcal{P}$?

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot), L(\cdot,\cdot)\}$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \;=\; & \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}}, L^{\mathfrak{A}}\rangle,\ \text{el grafo } (A, E^{\mathfrak{A}}) \text{ es} \\ & \text{no dirigido y 3-coloreable, y } L^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal en } A\}\end{aligned}$$

¿Cuál es la complejidad de $\mathcal{P}$?

Proposición

$\mathcal{P}$ es NP-completo

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Proposición

$\mathcal{P}$ es expresable en LPO con operador parcial de punto fijo

Demostración: Queremos encontrar una fórmula φ en LPO con operador parcial de punto fijo tal que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Definimos φ como $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$

ψ_1 indica que el grafo es no dirigido:

$$\forall x \forall y \, (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

ψ_2 indica que L es un orden lineal:

$$\forall x \, (\neg L(x, x)) \wedge \forall x \forall y \, (x = y \vee L(x, y) \vee L(y, x)) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z \, (L(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow L(x, z)).$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Para definir ψ_3 usamos la siguiente fórmula:

$$mc(u, v) \;=\; (B(u) \wedge B(v)) \vee (A(u) \wedge A(v)) \vee (R(u) \wedge R(v))$$

Entonces ψ_3 es definida como:

$$\exists u\, [\mathbf{pfp}_{x,B}\, (\theta_1(x, B, A, R), \theta_2(y, B, A, R), \theta_3(z, B, A, R))](u)$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_1(x, B, A, R)$ es definida como:

$$\Big(\forall u\,(\neg B(u) \wedge \neg A(u) \wedge \neg R(u))\Big) \vee$$

$$\Big(\neg\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \wedge B(x)\Big) \vee$$

$$\Big(\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \wedge$$

$$\exists w\,(\neg R(w) \wedge \forall u\,(L(u,w) \to R(u)) \wedge (L(x,w) \vee (L(w,x) \wedge B(x))))\Big)$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_2(y, B, A, R)$ es definida como:

$$
\begin{aligned}
&\exists u\,(B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \;\wedge \\
&\qquad \Bigg[\Bigg(\neg\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \wedge A(y)\Bigg) \vee \\
&\qquad\qquad \Bigg(\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \;\wedge \\
&\qquad \exists w\,(\neg R(w) \wedge \forall u\,(L(u,w) \rightarrow R(u)) \;\; \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad ((B(w) \wedge w = y) \vee (L(w,y) \wedge A(y))))\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_3(z, B, A, R)$ es definida como:

$$
\begin{aligned}
&\exists u\,(B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \wedge \\
&\qquad \Big[\Big(\neg\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \wedge R(z)\Big) \vee \\
&\qquad\quad \Big(\exists u \exists v\,(E(u,v) \wedge mc(u,v)) \wedge \\
&\qquad \exists w\,(\neg R(w) \wedge \forall u\,(L(u,w) \rightarrow R(u)) \wedge \\
&\qquad\qquad ((A(w) \wedge w = z) \vee (L(w,z) \wedge R(z))))\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

$\square$

LPO con operador parcial de punto fijo: Complejidad

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo se tiene que L_φ está en PSPACE*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo tal que L_φ es PSPACE-completo*

LPO con operador parcial de punto fijo: Complejidad

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo se tiene que L_φ está en PSPACE*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo tal que L_φ es PSPACE-completo*

Ejercicio

Demuestre la primera parte del teorema

Comentarios finales

Tenemos dos lógicas nuevas

- La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

Comentarios finales

Tenemos dos lógicas nuevas

- La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Podrán capturar PTIME? ¿PSPACE?

Comentarios finales

Tenemos dos lógicas nuevas

- La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Podrán capturar PTIME? ¿PSPACE?

- ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?

Comentarios finales

Tenemos dos lógicas nuevas

- La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Podrán capturar PTIME? ¿PSPACE?

- ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?
- ¿Qué sucede con el caso de PSPACE y LPO con operador parcial de punto fijo?

Comentarios finales

Tenemos dos lógicas nuevas

- La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Podrán capturar PTIME? ¿PSPACE?

- ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?
- ¿Qué sucede con el caso de PSPACE y LPO con operador parcial de punto fijo?

Para responder a esto necesitamos ver el poder expresivo de estas lógicas