Leyes 0-1

IIC3263

Leyes 0-1: Notación

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que una propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-propiedad) es un subconjunto de $\textsc{Struct}[\mathcal{L}]$

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

- Recuerde que una propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$-propiedad) es un subconjunto de $\textsc{Struct}[\mathcal{L}]$

Notación

- $s^n_{\mathcal{L}}$: *Número de $\mathcal{L}$-estructuras con dominio $\{1, \ldots, n\}$*
- $s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$: *Número de $\mathcal{L}$-estructuras con dominio $\{1, \ldots, n\}$ que satisfacen la propiedad $\mathcal{P}$*

Leyes 0-1: Notación

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$

- $s^n_{\mathcal{L}} = 2^{n^2}$
- Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de estructuras que satisfacen la dependencia funcional:

$$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(x,z) \rightarrow y = z),$$

  entonces $s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = (n+1)^n$

Leyes 0-1: Probabilidad asintótica

Definición

- $\mu_{\mathcal{L}}^{n}(\mathcal{P}) = \frac{s_{\mathcal{L}}^{n}(\mathcal{P})}{s_{\mathcal{L}}^{n}}$: *Representa la probabilidad de que una $\mathcal{L}$-estructura satisfaga la propiedad $\mathcal{P}$*

Leyes 0-1: Probabilidad asintótica

Definición

- $\mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \frac{s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})}{s^n_{\mathcal{L}}}$: *Representa la probabilidad de que una $\mathcal{L}$-estructura satisfaga la propiedad $\mathcal{P}$*
- $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$

Leyes 0-1: Probabilidad asintótica

Definición

- $\mu_{\mathcal{L}}^{n}(\mathcal{P}) = \frac{s_{\mathcal{L}}^{n}(\mathcal{P})}{s_{\mathcal{L}}^{n}}$: *Representa la probabilidad de que una $\mathcal{L}$-estructura satisfaga la propiedad $\mathcal{P}$*
- $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu_{\mathcal{L}}^{n}(\mathcal{P})$

Ejemplo

Si $\mathcal{P}$ es el conjunto de estructuras que satisfacen la dependencia funcional $\forall x \forall y \forall z\,(R(x,y) \wedge R(x,z) \to y = z)$, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) \;=\; 0$$

Leyes 0-1: Ejercicios

Notación

Dada una oración φ en una lógica:

$$s^n_{\mathcal{L}}(\varphi) \ = \ |\{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \ \mid \ \textit{el dominio de } \mathfrak{A} \textit{ es } \{1, \ldots, n\} \textit{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\}|$$

Notación

Dada una oración φ *en una lógica:*

$$s^n_{\mathcal{L}}(\varphi) \ = \ |\{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \ \mid \ \textit{el dominio de } \mathfrak{A} \textit{ es } \{1, \ldots, n\} \textit{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\}|$$

Ejercicios

1. Sea $\varphi = \forall x \exists y\, R(x, y)$. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$
2. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ puede no estar definido
3. Demuestre que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ puede tomar un valor distinto de 0 y 1

Ejercicio 1: Relación entre $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}})$

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-propiedad $\mathcal{P}$:

$$\overline{\mathcal{P}} \ = \ \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \notin \mathcal{P}\}$$

Suponga que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = c$, donde $c \in [0, 1]$

- Se tiene que $\lim_{n\to\infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = c$

Entonces se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}}) = 1 - c$

- Ya que $\lim_{n\to\infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}}) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})\Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$

Sea $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$ y $\varphi = \forall x \exists y\, R(x,y)$

- $\neg\varphi \;\equiv\; \exists x \forall y\, \neg R(x,y)$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 0$

- Concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Sea $n \geq 1$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ y:

$$N_i \;=\; \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1,\ldots,n\} \\ \text{y no existe } j \in \{1,\ldots,n\} \text{ tal que } (i,j) \in R^{\mathfrak{A}}\}$$

Ejercicio 1: Relación entre $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\overline{\mathcal{P}})$

Tenemos que $s^n_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) \leq \sum_{i=1}^{k} |N_i|$

Dado que $|N_i| = 2^{(n-1)\cdot n}$, concluimos que $s^n_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) \leq n \cdot 2^{(n-1)\cdot n}$

Por lo tanto:

$$\mu^n_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) \ \leq \ \frac{n \cdot 2^{(n-1)\cdot n}}{2^{n^2}} \ = \ \frac{n}{2^n}$$

Concluimos que:

$$0 \ \leq \ \mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) \ \leq \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \ = \ 0$$

$\square$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y $\mathcal{P}$ la siguiente propiedad:

$$\{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid U^{\mathfrak{A}} \text{ tiene una cantidad par de elementos}\}$$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$

Para $n \geq 1$, sea:

$$P_n \;=\; \{A \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid |A| \text{ es par}\}$$

Lema

Para cada $n \geq 1$, se tiene que $|P_n| = 2^{n-1}$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Vamos a demostrar el lema por inducción:

- Caso base ($n = 1$): $P_1 = \{\emptyset\}$, por lo que $|P_1| = 1 = 2^{1-1}$
- Case inductivo: Suponga que la propiedad se cumple para n

  Tenemos que:

$$\begin{aligned} P_{n+1} \ = \ & \{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \not\in A\} \cup \\ & \{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\} \end{aligned}$$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Como estos conjuntos son disjuntos:

$$\begin{aligned} |P_{n+1}| &= |\{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \notin A\}| + \\ &\quad\ |\{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\}| \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} |\{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \notin A\}| &= |P_n| \\ |\{A \subseteq \{1, \ldots, n+1\} \mid |A| \text{ es par y } n+1 \in A\}| &= 2^n - |P_n| \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $|P_n| = 2^{n-1}$

Concluimos que $|P_{n+1}| \ = \ 2^{n-1} + 2^{n-1} \ = \ 2^n$

Ejercicio 3: Un poco de inducción

Sea $n \geq 1$. Dado que $s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = |P_n|$, concluimos del lema que:

$$\mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) \;=\; \frac{s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P})}{s^n_{\mathcal{L}}} \;=\; \frac{2^{n-1}}{2^n} \;=\; \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$

$\square$

Leyes 0-1: Definición

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ tiene la ley 0-1 para un vocabulario $\mathcal{L}$ si para cada $\mathcal{L}$-propiedad $\mathcal{P}$ definible en $\mathcal{LO}$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 0$ o $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 1$

Leyes 0-1: Definición

Definición

Una lógica $\mathcal{LO}$ tiene la ley 0-1 para un vocabulario $\mathcal{L}$ si para cada $\mathcal{L}$-propiedad $\mathcal{P}$ definible en $\mathcal{LO}$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 0$ o $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = 1$

Teorema (Glebskii-Kogan-Liogon'kii-Talanov & Fagin)

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$

Leyes 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que LPO tiene la ley 0-1

- Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Leyes 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que LPO tiene la ley 0-1

- Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Pero antes:

- Vamos a mostrar como pueden ser utilizadas las leyes 0-1 para demostrar resultados de inexpresibilidad

Leyes 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que LPO tiene la ley 0-1

- Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Pero antes:

- Vamos a mostrar como pueden ser utilizadas las leyes 0-1 para demostrar resultados de inexpresibilidad
- Vamos a mostrar porque no podemos considerar lenguajes con constantes

Leyes 0-1: Usos

¿Para qué nos sirve esta ley?

- Nos indica que una lógica no puede contar
- Podemos utilizarla para demostrar que una propiedad no es expresable en alguna lógica

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$.

Vamos a demostrar que PARIDAD no es expresable en LPO

Leyes 0-1: Paridad

Ejemplo (continuación)

Supongamos que PARIDAD si es expresable en LPO

- Existe φ en LPO tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

Dado que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Pero:

$$s^n_{\mathcal{L}}(\varphi) = \begin{cases} 0 & n \text{ es impar} \\ 1 & n \text{ es par} \end{cases}$$

Como $s^n_{\mathcal{L}} = 1$, concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi)$ no está definido

- Esto contradice que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Vamos a mostrar que LPO no necesariamente tiene la ley 0-1 para un vocabulario con constantes.

Sea $\mathcal{L} = \{P(\cdot), c\}$ y $\varphi = P(c)$. Vamos a demostrar que $\mu^k_{\mathcal{L}}(\varphi) = \frac{1}{2}$ para todo $k \geq 1$.

- Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = \frac{1}{2}$

Para cada $k \geq 1$, sea:

$$
\begin{aligned}
S_k &= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \ldots, k\} \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi\} \\
N_k &= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \ldots, k\} \text{ y } \mathfrak{A} \models \neg\varphi\}
\end{aligned}
$$

Leyes 0-1: Vocabularios con constantes

Sea $f : S_k \to N_k$ definida como:

$$f(\langle A, P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle) \quad = \quad \langle A, A \smallsetminus P^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle$$

La función f es una biyección

- ¿Por qué?

Se tiene que $|S_k| = |N_k|$

- De esto se concluye que $\mu^k_{\mathcal{L}}(\varphi) = \frac{1}{2}$ ya que $s^k_{\mathcal{L}} = |S_k| + |N_k|$ y $s^k_{\mathcal{L}}(\varphi) = |S_k|$

$\square$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Vamos a demostrar que la LPO tiene la ley 0-1

- Para cada vocabulario que sólo contiene relaciones

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- El caso general se demuestra de la misma forma

Pieza fundamental: Axiomas de extensión

- Está es la demostración dada por Fagin

Axiomas de extensión: Definición

Dado: Variables x_1, …, x_n $(n \geq 0)$

- $A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$: Conjunto de todas las fórmulas atómicas de la forma $R(u, v)$, donde $\{u, v\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Para cada $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$, definimos $\chi_F(x_1, \ldots, x_n)$ como:

$$\left(\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \right) \wedge \left(\bigwedge_{\psi \in (A_{\mathcal{L}}(x_1,\ldots,x_n) \setminus F)} \neg \psi \right)$$

Axiomas de extensión: Definición

Dado: Variable z tal que $z \neq x_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

- Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ y $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n, z)$, decimos que G extiende a F si $F = G \cap A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$

Nota: Si $n = 0$, entonces $A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n) = \emptyset$

Definición (Axioma de extensión)

Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n, z)$ *tal que* G *extiende a* F*, definimos* $AE_{F,G}$ *como:*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \Bigg(\Bigg(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \ldots, x_n) \Bigg) \to \exists z \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} z \neq x_i \wedge \chi_G(x_1, \ldots, x_n, z) \Bigg) \Bigg)$$

Axiomas de extensión: Definición

Definición (Axioma de extensión)

Dado $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n)$ y $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_n, z)$ tal que G extiende a F, definimos $AE_{F,G}$ como:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \Bigg(\bigg(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \ldots, x_n) \bigg) \to \exists z \bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} z \neq x_i \wedge \chi_G(x_1, \ldots, x_n, z) \bigg) \Bigg)$$

Si $n = 0$, entonces obtenemos el axioma de extensión $\exists z \, \chi_G(z)$

- Tenemos dos posibilidades: $\exists z \, R(z, z)$ ó $\exists z \, \neg R(z, z)$

Lema

$\mu_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) = 0$

Demostración: $\neg AE_{F,G}$ es equivalente a la siguiente oración:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_k \bigg(\bigg(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} x_i \neq x_j \wedge \chi_F(x_1, \ldots, x_k) \bigg) \wedge \forall z \bigg(\bigwedge_{i=1}^{k} z \neq x_i \to \neg \chi_G(x_1, \ldots, x_k, z) \bigg) \bigg)$$

Sea $n \geq k + 1$ y $a_1, \ldots, a_k$ puntos en el intervalo $\{1, \ldots, n\}$

De las 2^{n^2} $\mathcal{L}$-estructuras con dominio $\{1, \ldots, n\}$:

- $\frac{1}{2^{k^2}}$ es la fracción de estructuras que satisfacen $\chi_F(a_1, \ldots, a_k)$
- $\frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)$ es la fracción de estructuras que satisfacen $\chi_F(a_1, \ldots, a_k) \wedge \neg\chi_G(a_1, \ldots, a_k, b)$, para un b distinto de cada a_i

- $\frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{n-k}$ es la fracción de estructuras que satisfacen:

$$\chi_F(a_1, \ldots, a_k) \wedge \forall z \left(\bigwedge_{i=1}^{k} z \neq x_i \to \neg \chi_G(a_1, \ldots, a_k, z) \right)$$

Concluimos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}^n(\neg AE_{F,G}) \leq n \cdot (n-1) \ \cdots \\ (n-k+1) \cdot \frac{1}{2^{k^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^{n-k}$$

Por lo tanto:

$$0 \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) \;\leq$$

$$\frac{\frac{1}{2^{k^2}}}{\left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^k} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} n^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)^n \right)$$

Como k es una constante y $\left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right) < 1$, tenemos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu^n_{\mathcal{L}}(\neg AE_{F,G}) \;=\; 0$$

$\square$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k $(k \geq 1)$ el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\left\{ AE_{F,G} \;\middle|\; \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i), \right.$$

$$\left. G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F \right\}$$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k $(k \geq 1)$ el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\Big\{ AE_{F,G} \;\Big|\; \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i), \\ G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F \Big\}$$

Corolario

Para cada $k \geq 1$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE_k $(k \geq 1)$ el siguiente conjunto de oraciones en LPO:

$$\Big\{AE_{F,G} \;\Big|\; \text{existe } i \in [0, k-1] \text{ tal que } F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i), \\ G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_i, z) \text{ y } G \text{ extiende a } F\Big\}$$

Corolario

Para cada $k \geq 1$, se tiene que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

Demostración: El corolario es una consecuencia del lema anterior y de los dos siguientes lemas.

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Dado: $\mathcal{L}$-propiedades $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Dado: $\mathcal{L}$-propiedades $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, entonces:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \quad = \quad \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Demostración: Para cada $\mathcal{L}$-propiedad $\mathcal{P}$, sea:

$$\mathcal{P}^n \quad = \quad \{\mathfrak{A} \in \mathcal{P} \mid \text{el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es } \{1, \ldots, n\}\}$$

Tenemos que: $s^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}^n|$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea $n \geq 1$. Dado que:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n &= \mathcal{P}_1^n \cap \mathcal{P}_2^n \\
(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n &= \mathcal{P}_1^n \cup \mathcal{P}_2^n \\
|\mathcal{P}_1^n \cup \mathcal{P}_2^n| &= |\mathcal{P}_1^n| + |\mathcal{P}_2^n| - |\mathcal{P}_1^n \cap \mathcal{P}_2^n|
\end{aligned}$$

Tenemos que:

$$|(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n| = |\mathcal{P}_1^n| + |\mathcal{P}_2^n| - |(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n|$$

Por lo tanto:

$$\frac{|(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)^n|}{2^{n^2}} = \frac{|\mathcal{P}_1^n|}{2^{n^2}} + \frac{|\mathcal{P}_2^n|}{2^{n^2}} - \frac{|(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)^n|}{2^{n^2}}$$

Concluimos que:

$$\mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \quad = \quad \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu^n_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

Así, dado que $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1)$, $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2)$ y $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$ están definidos, concluimos que:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \quad = \quad \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

$\square$

Lema

Si $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) = 1$ *y* $\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) = 1$, *entonces:*

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) \quad = \quad 1$$

Demostración: Dado que $\mathcal{P}_1 \subseteq (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$, tenemos que

$$1 \ = \ \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) \ \leq \ \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \ \leq \ 1$$

Por lo tanto, por lema anterior:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) &= \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1) + \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_2) - \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \\ &= 1 + 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k?

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k?

- En este caso no es difícil demostrar que existe un modelo, pero sí lo es construirlo

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Concluimos que para cada $k \geq 1$:

- AE_k es un conjunto satisfacible de fórmulas

¿Puede dar un modelo de AE_k?

- En este caso no es difícil demostrar que existe un modelo, pero sí lo es construirlo

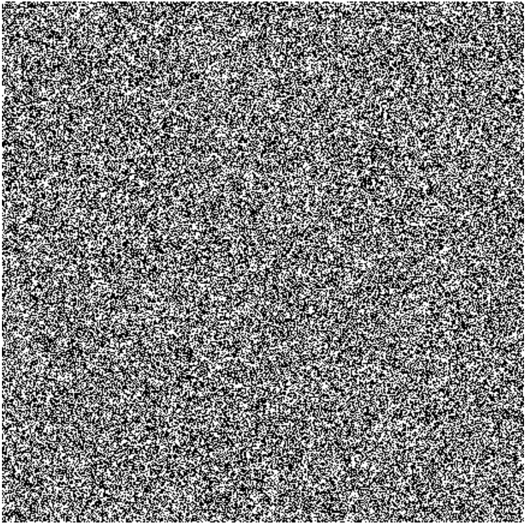
Esta es la esencia del método probabilista

Paréntesis: Un modelo para AE_2

La matriz de adyacencia para una estructura que satisface AE_2:

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Este es el modelo de AE_2 con menor número de nodos



Este modelo tiene 343 nodos (gracias a Martín Ugarte por ambos modelos)

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Proposición

AE es satisfacible. Además, cada modelo de AE es infinito

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Sea AE el conjunto de todos los axiomas de extensión.

- Para estudiar AE también tenemos que considerar modelos infinitos

Proposición

AE es satisfacible. Además, cada modelo de AE es infinito

Demostración: Usando compacidad y los corolarios anteriores.

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Axiomas de extensión: Propiedades fundamentales

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Corolario

Si $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son modelos de AE y* φ *es una* $\mathcal{L}$*-oración en LPO, entonces* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *si y sólo si* $\mathfrak{B} \models \varphi$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Sea Φ una oración en LPO.

- Suponga que $k = rc(\Phi)$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

Finalmente tenemos todos los ingredientes para demostrar que LPO tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$.

Sea Φ una oración en LPO.

- Suponga que $k = rc(\Phi)$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 1$

- Consideramos dos casos

Ley 0-1 para LPO: Demostración

1. Existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

   Sea $\mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{B} \models AE_k$

   Por resultados anteriores: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones con rango de cuantificación k

   - Entonces: $\mathfrak{B} \models \Phi$

   Concluimos que $AE_k \models \Phi$, por lo que para todo $n \geq 1$: $s^n_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq s^n_{\mathcal{L}}(\Phi)$

   De esto y los resultados anteriores concluimos que:

$$1 \;=\; \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \;\leq\; \mu_{\mathcal{L}}(\Phi) \;\leq\; 1$$

Ley 0-1 para LPO: Demostración

2. No existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

   Entonces existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$

   Por caso anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\Phi) = 1$

   Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$

$\square$

Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$-estructuras) no son 3-coloreables

Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$-estructuras) no son 3-coloreables

Vamos a demostrar algo más fuerte: Casi todos los grafos contienen un clique con 4 nodos (K_4)

- De esto se concluye que no son 3-coloreables

Una aplicación: Casi todos los grafos no son 3-coloreables

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Queremos demostrar que casi todos los grafos (o $\mathcal{L}$-estructuras) no son 3-coloreables

Vamos a demostrar algo más fuerte: Casi todos los grafos contienen un clique con 4 nodos (K_4)

- De esto se concluye que no son 3-coloreables

Sea:

$$\varphi \quad = \quad \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 4} \Big(x_i \neq x_j \wedge E(x_i, x_j) \wedge E(x_j, x_i) \Big)$$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Considere las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas:

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_1(x_1) & = & \neg E(x_1, x_1) \\
\alpha_2(x_1, x_2) & = & \alpha_1(x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge \neg E(x_2, x_2) \\
\alpha_3(x_1, x_2, x_3) & = & \alpha_2(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \\
& & E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_2) \wedge \neg E(x_3, x_3) \\
\alpha_4(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & \alpha_3(x_1, x_2, x_3) \wedge E(x_1, x_4) \wedge E(x_4, x_1) \wedge \\
& & E(x_2, x_4) \wedge E(x_4, x_2) \wedge E(x_3, x_4) \wedge E(x_4, x_3) \wedge \neg E(x_4, x_4)
\end{array}
$$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones son elementos de AE_4:

$$
\begin{aligned}
&\exists z\, \alpha_1(z)\\
&\forall x_1\, [\alpha_1(x_1) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))]\\
&\forall x_1 \forall x_2\, [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))]\\
&\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \to\\
&\qquad \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))]
\end{aligned}
$$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones son elementos de AE_4:

$$\begin{aligned}
&\exists z\, \alpha_1(z)\\
&\forall x_1\, [\alpha_1(x_1) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))]\\
&\forall x_1 \forall x_2\, [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))]\\
&\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \to\\
&\qquad \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))]
\end{aligned}$$

Concluimos que si $\mathfrak{A} \models AE_4$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$

- Tenemos que $AE_4 \models \varphi$

Una aplicación: Casi todos los grafos contienen K_4

Las siguientes $\mathcal{L}$-oraciones son elementos de AE_4:

$$\begin{aligned}
&\exists z\, \alpha_1(z) \\
&\forall x_1\, [\alpha_1(x_1) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge \alpha_2(x_1, z))] \\
&\forall x_1 \forall x_2\, [(x_1 \neq x_2 \wedge \alpha_2(x_1, x_2)) \to \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, z))] \\
&\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, [(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \alpha_3(x_1, x_2, x_3)) \to \\
&\qquad \exists z\, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge z \neq x_3 \wedge \alpha_4(x_1, x_2, x_3, z))]
\end{aligned}$$

Concluimos que si $\mathfrak{A} \models AE_4$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$

- Tenemos que $AE_4 \models \varphi$

Por lo tanto $1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_4) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) \leq 1$

- Así, tenemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$

Ley 0-1 para otras lógicas

Existen lógicas que no tienen la ley 0-1.

- ¿Puede dar algún ejemplo?

¿Existen otras lógicas que satisfagan la ley 0-1?

Ley 0-1 para otras lógicas

Existen lógicas que no tienen la ley 0-1.

- ¿Puede dar algún ejemplo?

¿Existen otras lógicas que satisfagan la ley 0-1?

Teorema

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$

Axiomas de extensión y la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv_k^{\infty\omega} \mathfrak{B}$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv^{\infty\omega}_{k} \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Axiomas de extensión y la lógica $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

Lema

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ *satisfacen* AE_k*, entonces* $\mathfrak{A} \equiv^{\infty\omega}_{k} \mathfrak{B}$

Ejercicio

Demuestre el lema

Corolario

Si $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son modelos de* AE *y* φ *es una* $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$*-oración, entonces* $\mathfrak{A} \models \varphi$ *si y sólo si* $\mathfrak{B} \models \varphi$

Ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

- Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tiene la ley 0-1

Ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

- Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tiene la ley 0-1

Sea Φ una oración en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

- Entonces existe k tal que Φ es una oración en $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Demostración

Sabemos que $\mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) = 1$

- Este resultado es fundamental para la demostración de que $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$ tiene la ley 0-1

Sea Φ una oración en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

- Entonces existe k tal que Φ es una oración en $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$

Vamos a demostrar que $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 1$

- Al igual que para LPO, tenemos que considerar dos casos

1. Existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

   Sea $\mathfrak{B} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{B} \models AE_k$

   Por los resultados anteriores: $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en todas las oraciones de $\mathcal{L}^{k}_{\infty\omega}$.

   - Entonces: $\mathfrak{B} \models \Phi$

   Concluimos que $AE_k \models \Phi$, por lo que para todo $n \geq 1$: $s^n_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq s^n_{\mathcal{L}}(\Phi)$

   De esto y los resultados anteriores concluimos que:

$$1 \ = \ \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \ \leq \ \mu_{\mathcal{L}}(\Phi) \ \leq \ 1$$

2. No existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \Phi$

   Entonces existe $\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}]$ tal que $\mathfrak{A} \models AE_k$ y $\mathfrak{A} \models \neg\Phi$

   Por caso anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\Phi) = 1$

   Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\Phi) = 0$

$\square$

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Primer corolario

Existen propiedades de grafos que no pueden ser expresadas en LPO pero si en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Primer corolario

Existen propiedades de grafos que no pueden ser expresadas en LPO pero si en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot,\cdot)\}$ y CONEXO el siguiente lenguaje:

$$\{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} \text{ representa un grafo conexo}\}$$

CONEXO es expresable en $\mathcal{L}^{3}_{\infty\omega}$ como:

$$\forall x_1 \forall x_2 \, (x_1 \neq x_2 \rightarrow \bigvee_{i \geq 1} \theta_i(x_1, x_2))$$

donde $\theta_1(x_1, x_2) = (E(x_1, x_2) \vee E(x_2, x_1))$ y:

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) \ = \ \exists x_3 \, ((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \wedge \exists x_1 \, (x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Primer corolario

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) \ = \ \exists x_3 \, ((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \ \wedge \\ \exists x_1 \, (x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

Entonces: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

Ejemplo (continuación)

$$\theta_{n+1}(x_1, x_2) \;=\; \exists x_3\,((E(x_1, x_3) \vee E(x_3, x_1)) \wedge \\ \exists x_1\,(x_1 = x_3 \wedge \theta_n(x_1, x_2)))$$

Entonces: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 0$ ó $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

Casi todos los grafos son conexos, o casi todos no lo son

- ¿Cuál de las dos alternativas es la correcta?

Ejemplo (continuación)

Suponga que $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura tal que $\mathfrak{A} \models AE_3$

Dados elementos distintos a y b en $\mathfrak{A}$, existe $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, x_2)$ tal que $\mathfrak{A} \models \chi_F(a, b)$

Entonces, dado que el siguiente es un axioma en AE_3:

$$\forall x_1 \forall x_2 \, [(x_1 \neq x_2 \wedge \chi_F(x_1, x_2)) \rightarrow \exists z \, (z \neq x_1 \wedge z \neq x_2 \wedge \chi_F(x_1, x_2) \wedge E(x_1, z) \wedge E(z, x_1) \wedge E(x_2, z) \wedge E(z, x_2) \wedge \neg E(z, z))]$$

concluimos que:

$$\mathfrak{A} \models \exists z \, (z \neq a \wedge z \neq b \wedge E(a, z) \wedge E(z, a) \wedge E(b, z) \wedge E(z, b) \wedge \neg E(z, z))$$

Ejemplo (continuación)

Como a y b son elementos arbitrarios, tenemos que:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \, (x_1 \neq x_2 \to \theta_2(x_1, x_2))$$

Concluimos que:

$$AE_3 \models \forall x_1 \forall x_2 \, (x_1 \neq x_2 \to \bigvee_{i \geq 1} \theta_i(x_1, x_2))$$

Por lo tanto: $\mu_{\mathcal{L}}(\text{CONEXO}) = 1$

- ¿Por qué?

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Segundo corolario

Sabemos que cada fórmula en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- Y también tenemos este resultado para LPO con operador parcial de punto fijo

La ley 0-1 para $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$: Segundo corolario

Sabemos que cada fórmula en LPO con operador de menor punto fijo puede ser expresada en $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

- Y también tenemos este resultado para LPO con operador parcial de punto fijo

Corolario

Si $\mathcal{L}$ es un vocabulario que sólo contiene relaciones, entonces:

- *LPO con operador de menor punto fijo tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$*
- *LPO con operador parcial de punto fijo tiene la ley 0-1 para $\mathcal{L}$*

Consecuencia fundamental: Lógicas que no pueden contar

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y PARIDAD $= \{\mathfrak{A} \in \textsc{Struct}[\mathcal{L}] \mid$ dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos$\}$

Corolario

PARIDAD no es expresable en LPO, LPO con operador de menor punto fijo, LPO con operador parcial de punto fijo o $\mathcal{L}^{\omega}_{\infty\omega}$

Ninguna de las lógicas mencionadas en el corolario *puede contar*

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} \quad = \quad \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Fije un vocabulario $\mathcal{L}$ que sólo contiene relaciones. ¿Es el siguiente problema decidible?

$$\text{CASI-VAL} \quad = \quad \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración y } \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1\}$$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Sabemos que el siguiente problema es indecidible:

$$\text{FIN-VAL} \quad = \quad \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfecha por todos los modelos finitos}\}$$

Fije un vocabulario $\mathcal{L}$ que sólo contiene relaciones. ¿Es el siguiente problema decidible?

$$\text{CASI-VAL} \quad = \quad \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración y } \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1\}$$

En este caso estamos preguntando si una fórmula es "casi válida"

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidible

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidible

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidible

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidible

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Consideramos nuevamente el conjunto de los axiomas de extensión AE para el vocabulario $\mathcal{L}$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Teorema

CASI-VAL es decidible

Demostración: Usamos herramientas de lógica clásica

- Consideramos modelos infinitos

Suponemos que $\mathcal{L} = \{R(\cdot, \cdot)\}$

- La demostración puede ser extendida fácilmente a cualquier vocabulario que sólo contiene relaciones

Consideramos nuevamente el conjunto de los axiomas de extensión AE para el vocabulario $\mathcal{L}$

- ¿Cómo se define este conjunto para un vocabulario arbitrario (sólo con relaciones)?

Decibilidad de la ley 0-1 para LPO: Demostración

Sabemos que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son modelos de AE, entonces para toda oración φ en LPO se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$

Entonces: Para toda oración φ en LPO, $AE \models \varphi$ ó $AE \models \neg\varphi$

- $\text{Th}(AE)$ es una teoría completa

Este resultado combinado con el siguiente lema nos va a dar la decibilidad de CASI-VAL

Lema

$\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ *si y sólo si* $AE \models \varphi$

Demostración del lema:

($\Leftarrow$) Si $AE \models \varphi$, entonces por compacidad sabemos que existe $AE' \subseteq AE$ tal que AE' es finito y $AE' \models \varphi$

Por lo tanto: $AE_k \models \varphi$, para algún $k \geq 1$

Tenemos que $1 = \mu_{\mathcal{L}}(\bigwedge AE_k) \leq \mu_{\mathcal{L}}(\varphi) \leq 1$

($\Rightarrow$) Si $AE \not\models \varphi$, entonces $AE \models \neg\varphi$

- Por el punto anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 1$ y, por lo tanto, $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$

$\square$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \text{Th}(AE)$

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \mathrm{Th}(AE)$

Pero $\mathrm{Th}(AE)$ es una teoría completa con una axiomatización infinita (enumerable) y decidible

- Tenemos que $\mathrm{Th}(AE)$ es una teoría decidible

Ley 0-1 para LPO: Decibilidad

Tenemos los ingredientes necesarios para demostrar el teorema

Del lema anterior: $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \text{Th}(AE)$

Pero $\text{Th}(AE)$ es una teoría completa con una axiomatización infinita (enumerable) y decidible

- Tenemos que $\text{Th}(AE)$ es una teoría decidible

Concluimos que CASI-VAL es decidible

$\square$

Un algoritmo para CASI-VAL

Demostramos que CASI-VAL es decidible

Un algoritmo para CASI-VAL

Demostramos que CASI-VAL es decidible

- Pero la demostración no nos da un algoritmo que pueda ser implementado fácilmente

Un algoritmo para CASI-VAL

Demostramos que CASI-VAL es decidible

- Pero la demostración no nos da un algoritmo que pueda ser implementado fácilmente

¿Cómo podemos generar un algoritmo más sencillo para CASI-VAL?

Un algoritmo para CASI-VAL

Demostramos que CASI-VAL es decidible

- Pero la demostración no nos da un algoritmo que pueda ser implementado fácilmente

¿Cómo podemos generar un algoritmo más sencillo para CASI-VAL?

- Vamos a utilizar los axiomas de extensión y una técnica general para demostrar decibilidad de teorías lógicas

Eliminación de cuantificadores

Sea Σ un conjunto de oraciones en LPO sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Eliminación de cuantificadores

Sea Σ un conjunto de oraciones en LPO sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

Σ admite eliminación de cuantificadores si para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$, existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ^{sc} sin cuantificadores tal que:

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_k \, (\varphi(x_1, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{sc}(x_1, \ldots, x_k))$$

Nota

Si φ es una oración, entonces φ^{sc} es $\top$ (una tautología) o $\perp$ (una contradicción)

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y φ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) \quad = \quad \exists y \, (x_1 \cdot y \cdot y + x_2 \cdot y + x_3 = 0)$$

Sobre $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$, los cuantificadores de φ pueden ser eliminados. Si:

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathrm{sc}}(x_1, x_2, x_3) \; = \; & \Big((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) < x_2 \cdot x_2 \Big) \vee \\ & \Big((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) = x_2 \cdot x_2 \Big),\end{aligned}$$

se tiene que:

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{R}) \quad \models \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \, (\varphi(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \varphi^{\mathrm{sc}}(x_1, x_2, x_3))$$

Eliminación de cuantificadores

Teorema

Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, y existe un algoritmo que construye φ^{sc} *a partir de* φ*, entonces es decidible*

Eliminación de cuantificadores

Teorema

Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, y existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ, entonces es decidible

¿Cómo se demuestra este teorema?

- ¿Puede mencionar algunas teorías a las cuales se aplica?

Decibilidad de CASI-VAL: Eliminación de cuantificadores

Vamos a usar la técnica de eliminación de cuantificadores para demostrar que CASI-VAL es decidible.

Utilizamos la equivalencia entre CASI-VAL y Th(AE)

- Vamos a demostrar que AE admite eliminación de cuantificadores

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

AE admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye $\varphi^{sc}(\bar{x})$ a partir de $\varphi(\bar{x})$.

Decibilidad de CASI-VAL: Eliminación de cuantificadores

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema

AE admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye $\varphi^{sc}(\bar{x})$ a partir de $\varphi(\bar{x})$.

Demostración: Nuevamente consideramos el lenguaje $\mathcal{L} = \{R(\cdot,\cdot)\}$

La demostración es por inducción en $\varphi(\bar{x})$

- Si $\varphi(\bar{x})$ es una fórmula atómica, entonces $\varphi^{sc}(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$
- Para los conectivos lógicos la propiedad es simple de verificar

- Suponga que $\varphi(\bar{x}) = \exists y\, \psi(\bar{x}, y)$ y que la propiedad se cumple para $\psi(\bar{x}, y)$.

  Existe una fórmula $\psi^{\mathsf{sc}}(\bar{x}, y)$ sin cuantificadores tal que:

  $$AE \quad \models \quad \forall \bar{x} \forall y\, (\psi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi^{\mathsf{sc}}(\bar{x}, y))$$

  Vamos a construir $\varphi^{\mathsf{sc}}(\bar{x})$ a partir de $\psi^{\mathsf{sc}}(\bar{x}, y)$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

Como $\psi^{\text{sc}}(\bar{x}, y)$ no tiene cuantificadores, se puede transformar en una fórmula de la forma:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{k} \alpha_i(\bar{x}_i, y) \right) \vee \left(\bigvee_{i=k+1}^{\ell} \alpha_i(\bar{x}_i) \right)$$

donde cada α_i es una conjunción de fórmulas atómicas y negaciones de fórmulas atómicas

- Cada variable en $\bar{x}_i$ es mencionada en $\bar{x}$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

Es fácil verificar si cada una de las fórmulas α_i es consistente.

- ¿Cómo se puede hacer esto?

Si una fórmula α_i no es consistente, entonces es eliminada de la disyunción.

Si todas las fórmulas α_i son eliminadas, entonces:

- $\varphi^{sc}(\bar{x}) = \left(\bigwedge_{i=1}^{s} x_i \neq x_i \right)$ si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ con $s \geq 1$
- $\varphi^{sc} = \perp$ si φ es una oración

Suponga entonces que la eliminación fue realizada y quedó la fórmula:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m} \beta_i(\bar{x}_i, y)\right) \vee \left(\bigvee_{i=m+1}^{n} \beta_i(\bar{x}_i)\right)$$

Se tiene entonces:

$$AE \models \forall \bar{x} \left[\varphi^{\mathsf{sc}}(\bar{x}) \leftrightarrow \left(\left(\bigvee_{i=1}^{m} \exists y\, \beta_i(\bar{x}_i, y)\right) \vee \left(\bigvee_{i=m+1}^{n} \beta_i(\bar{x}_i)\right)\right)\right]$$

Vamos a mostrar que para cada fórmula $\exists y\, \beta_i(\bar{x}_i, y)$, es posible construir una fórmula $\beta_i^{\mathsf{sc}}(\bar{x}_i)$ tal que:

$$AE \quad \models \quad \forall \bar{x}_i\, (\exists y\, \beta_i(\bar{x}_i, y) \leftrightarrow \beta_i^{\mathsf{sc}}(\bar{x}_i))$$

Primero verificamos si una de las conjunciones en $\beta_i(\bar{x}_i, y)$ es $y = x$ o $x = y$, donde x es una de la variables en $\bar{x}_i$

- Si se cumple la condición: $\beta_i^{\mathsf{sc}}(\bar{x}_i) = \beta_i(\bar{x}_i, x)$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

Suponga que la condición mencionada antes no se cumple, y que $\bar{x}_i = (x_1, \ldots, x_p)$

Sabemos que:

$$\exists y\, \beta_i(\bar{x}_i, y) \quad \equiv \quad \left(\bigvee_{j=1}^{p} \beta_i(\bar{x}_i, x_j) \right) \vee \exists y \left(\bigwedge_{j=1}^{p} y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \right)$$

Por lo tanto, sólo tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula:

$$\exists y \left(\bigwedge_{j=1}^{p} y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \right) \tag{1}$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

En este punto vamos a usar los axiomas de extensión.

La fórmula (1) es equivalente a:

$$\exists y \Bigg[\bigwedge_{j=1}^{p} y \neq x_j \wedge \beta_i(\bar{x}_i, y) \wedge \Bigg(\bigwedge_{1 \leq q < r \leq p} x_q = x_r \vee x_q \neq x_r \Bigg) \wedge \Bigg(\bigwedge_{\theta \in A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_p, y)} \theta \vee \neg\theta \Bigg) \Bigg] \quad (2)$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

Continuamos el proceso distribuyendo las conjunciones sobre las disyunciones en (2)

- También eliminamos fórmulas inconsistentes

Se obtiene que (1) es equivalente a una disyunción de fórmulas de la forma:

$$\kappa_i(x_1, \ldots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \ldots, x_p) \wedge \exists y \left(\bigwedge_{j=1}^{p} y \neq x_j \wedge \rho_i(x_1, \ldots, x_p, y) \right)$$

Donde:

- Existe $F \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_p)$ tal que

$$\kappa_i(x_1, \ldots, x_p) \quad \equiv \quad \chi_F(x_1, \ldots, x_p)$$

- $\xi_i(x_1, \ldots, x_p)$ es una conjunción de fórmulas de la forma $x_q = x_r$ o $x_q \neq x_r$ $(1 \leq q < r \leq p)$
  - Para cada $q, r \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $q < r$, se tiene que $x_q = x_r$ o $x_q \neq x_r$ es mencionado en $\xi_i(x_1, \ldots, x_p)$

- Existe $G \subseteq A_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_p, y)$ que extiende a F y tal que:

$$\rho_i(x_1, \ldots, x_p, y) \quad \equiv \quad \chi_G(x_1, \ldots, x_p, y)$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Demostración

Entonces tenemos que:

$$AE \models \forall x_1 \cdots \forall x_p \Bigg[\Bigg(\kappa_i(x_1, \ldots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \ldots, x_p)\Bigg) \leftrightarrow \Bigg(\kappa_i(x_1, \ldots, x_p) \wedge \xi_i(x_1, \ldots, x_p) \wedge \exists y \Bigg(\bigwedge_{j=1}^{p} y \neq x_j \wedge \rho_i(x_1, \ldots, x_p, y)\Bigg)\Bigg)\Bigg]$$

Lo que nos permite eliminar el cuantificador $\exists y$

Un comentario final sobre el último paso:

- En este paso puede ocurrir que $\kappa_i(x_1, \ldots, x_p) \equiv \top$

Esto puede ocurrir cuando eliminamos el cuantificador $\exists y$ desde $\exists y\, R(y, y)$ ó $\exists y\, \neg R(y, y)$

- ¿Cómo se maneja este caso?

$\square$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

Sea $\varphi = \forall x \forall y\, (R(x, y) \to R(y, x))$

- Vamos a aplicar la técnica de eliminación de cuantificadores para determinar $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi)$

En la demostración eliminamos cuantificadores existenciales

- Consideramos entonces la fórmula $\neg\varphi = \exists x \exists y\, (R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

- Comenzamos con la fórmula $R(x, y) \wedge \neg R(y, x)$ que no tiene cuantificadores.

- Después consideramos la fórmula:

$$\exists y \, (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \tag{3}$$

  Esta fórmula es equivalente a:

$$(R(x, x) \wedge \neg R(x, x)) \vee \exists y \, (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

Pero: $R(x, x) \wedge \neg R(x, x)$ es inconsistente

Concluimos que (3) es equivalente a:

$$\exists y\, (x \neq y \wedge R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \tag{4}$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

- Tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula (4)

  Sabemos que esta fórmula es equivalente a:

$$\exists y \Big[x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \Big(R(x,x) \vee \neg R(x,x) \Big) \wedge \Big(R(x,y) \vee \neg R(x,y) \Big) \wedge \Big(R(y,x) \vee \neg R(y,x) \Big) \wedge \Big(R(y,y) \vee \neg R(y,y) \Big) \Big]$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

Vale decir, (4) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\Big(R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y))\Big) \vee \\
&\Big(R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y))\Big) \vee \\
&\Big(\neg R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y))\Big) \vee \\
&\Big(\neg R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y))\Big) \qquad (5)
\end{aligned}$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

- Ahora tenemos que eliminar los cuantificadores existenciales de la fórmula (5)

  Para esto utilizamos las siguientes equivalencias:

$$AE \models \forall x \Big[R(x,x) \leftrightarrow \Big(R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y))\Big)\Big]$$

$$AE \models \forall x \Big[R(x,x) \leftrightarrow \Big(R(x,x) \wedge \exists y\,(x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y))\Big)\Big]$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

$$AE \models \forall x \bigg[\neg R(x,x) \leftrightarrow \bigg(\neg R(x,x) \wedge \exists y\, (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge R(y,y))\bigg)\bigg]$$

$$AE \models \forall x \bigg[\neg R(x,x) \leftrightarrow \bigg(\neg R(x,x) \wedge \exists y\, (x \neq y \wedge R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge \neg R(y,y))\bigg)\bigg]$$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

Concluimos que:

$$AE \models \forall x \left[\left(\exists y \, (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \right) \leftrightarrow \left(R(x,x) \vee \neg R(x,x) \right) \right]$$

- Finalmente, tenemos que eliminar el cuantificador existencial de la fórmula $\exists x \, (R(x,x) \vee \neg R(x,x))$

Eliminación de cuantificadores para AE: Un ejemplo

- Distribuyendo obtenemos:

$$\exists x\, R(x,x) \vee \exists x\, \neg R(x,x)$$

Como ambas fórmulas son ciertas de acuerdo a los axiomas de extensión, concluimos que:

$$AE \models \left[\left(\exists x \exists y\, (R(x,y) \wedge \neg R(y,x))\right) \leftrightarrow \top\right]$$

De todo el proceso concluimos que $\mu_{\mathcal{L}}(\neg\varphi) = 1$, vale decir, $\mu_{\mathcal{L}}(\varphi) = 0$