红黑树

by chonepeceyb . 根据 《算法导论》整理，并加上了自己的一些解释

1. 红黑树的定义和性质

1.1. 定义

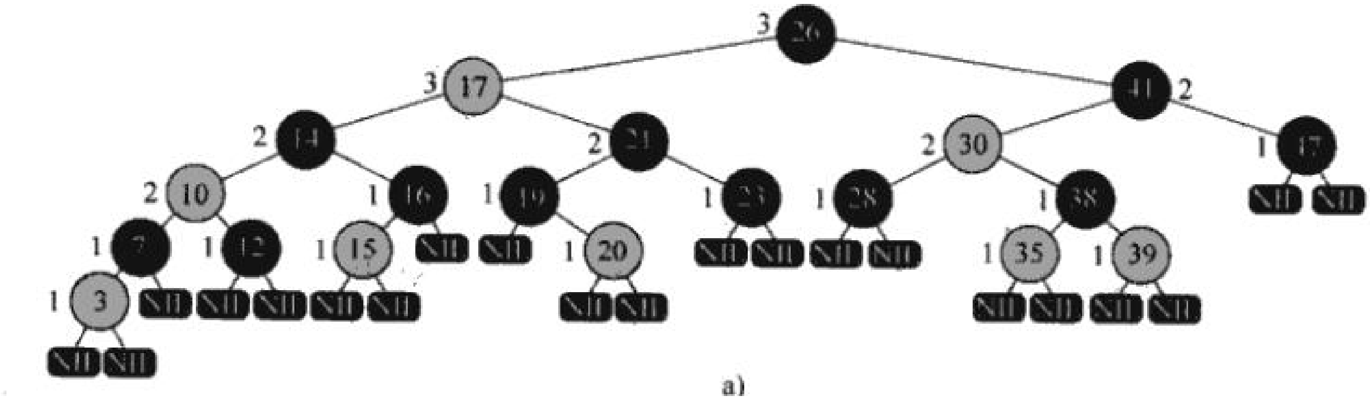
红黑树是一棵高度平衡(黑色完美平衡)的二叉搜索树。它在每个节点上增加一个存储位表示节点的颜色，可以是RED或者BLACK。通过对任何一条根到叶子的路径上，各个节点着色方式的限制，红黑树确保没有一条路径会比其它路径长两倍(黑色节点的个数相同)，因此是近似平衡的。

- 红黑树每个节点的域 **(color,key,left,right,p)**
- 外节点 : 如果某节点**没有一个子节点**或**父节点**,则其 **p**域的值为 **NIL**(NULL)，这些NIL节点视为树的**外节点**(叶子节点).
- 相应的带有关键字(key)的节点成为**内节点**。
- 从某个节点 x 出发(不包括该节点)，到达一个叶节点的任意一条路径上，黑色节点的个数成为 x的**黑高度** 用 $bh(x)$ 表示
- 红黑树的黑高度，定义为根节点的黑高度。(由红黑树的性质可知，从根节点到任意叶节点，其黑高度都相同)，例如在(图1)中红黑树的黑高度 3
- **NIL**节点的黑高度为 0

1.2. 红黑树的性质

1. 每个节点是红的，或是黑的
2. **根节点**是黑的
3. 每个**叶节点 NIL**是黑的。
4. 如果一个**节点是红**的，则它的两个儿子都是黑的。
5. 对每个节点，从**该节点**到其子孙节点的**所有路径**上包含**相同数目的黑节点** (黑色完美平衡)

（图1）红黑树范例：



a)

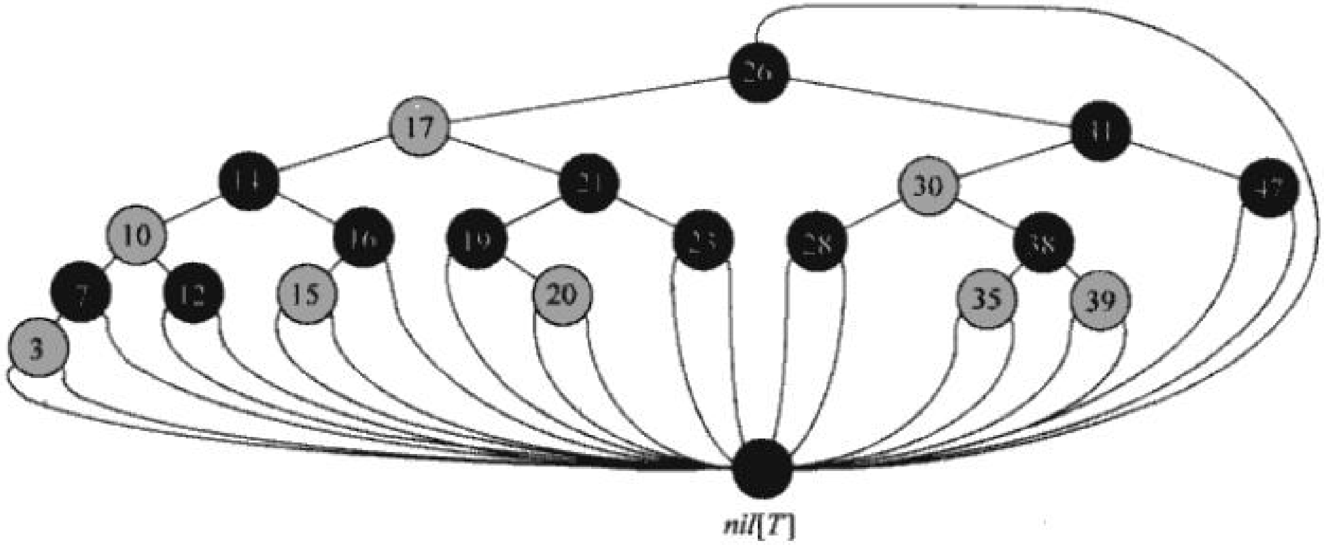
1.2.1. 红黑树性质推论

1. 在以某个节点 x 为根的子树中，至少包含 $2^{bh(x)}-1$ 个**内节点。**
   证明:
   思路通过对 x 的高度进行归纳证明(数学归纳法)
   1. 若 $h(x)=0 \to x必为叶节点(nil[T])$,此时 $h(x)=2^{bh(x)}-1=2^0-1=0$ 个节点。归纳的边界条件成立
   2. 现假设 节点x_1至少包含 $2^{bh(x_1)}-1$ 个**内节点**。考虑其父节点 x, x有两个子节点，如果 x 的子节点**红节点**，那么 $bh(x)=bh(x_{子节点})$, 如果 x 的子节点是**黑节点**，那么 $bh(x)=bh(x_{子节点})+1$ 。
   3. 现考虑最差情况，即 x的子节点都是黑节点，即 x_1是黑节点。x的两棵子树都是黑节点，以 x 为根的子树至少包含 ($2^{bh(x_1)}-1$) + ($2^{bh(x_1)}-1$) $+1=2^{bh(x_1)+1}-1=2^{bh(x)+1}-1$. 得证
2. 以一棵有 n 个内节点的红黑树高度**至多**为 $2log_2(n+1)$
   证明:
   1. 由性质(4), 如果在一条路径上存在一个红节点，那么必然存在一个黑节点(因为红节点的孩子都是黑节点) $\to$ 根的**黑高度**至少为 $h/2$
   2. 由 1 和性质1可得 $n \geq 2^{h/2}-1 \ \leftrightarrow \ log_2(n+1) \geq h/2 \ \leftrightarrow \ h \leq 2*log_2 n+1$
3. 由性质2 我们可以知道，红黑树的 SEARCH MINIMUM MAXMUM SUCCESSOR 操作的时间复杂度均为 $O(lgn)$

1.3. 哨兵节点

为了方便代码实现，定义一个哨兵节点 **nil[T]** , 其 color域为**BLACK**,其它域可以设任何值。原树中，所有指向 **NIL**的指针，都被指向哨兵节点，换句话说用一个哨兵节点来代替**NIL**节点(叶子节点)和**树根的父节点**(给树根设置一个父节点应该是为了代码实现方便)

ps: 树根的父节点也是**哨兵**



2. 红黑树的旋转

ps 旋转是插入操作和删除操作的基础

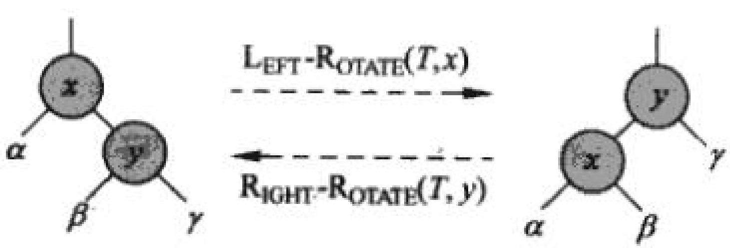
当对红黑树进行 INSERT 和 DELETE 操作时，普通的二叉树操作的时间复杂度为$O(lgn)$,但插入和删除操作对树做了修改，修改后的树可能不是一棵红黑树。为了让修改之后的树还能是一棵红黑树，需要改变**某些节点的颜色**和**指针结构**。而指针结构的操作称为**旋转** 。

旋转操作涉及**两个节点**，旋转绕着两个节点之间的**边**(或者轴)进行旋转。

important: 左右旋转不会导致**二叉搜索树**性质的改变，即旋转之后仍然是**二叉搜索树** (左孩子比树根小，右孩子比树根大)

前言万语不如一张图和加了注释的伪代码。所以直接放图和伪代码，操作和**AVL**树的**单旋**操作类似

旋转操作图解:
(假设x的右孩子y不是 nil 左旋 或者 y的左孩子 x 不是nil 右旋)



左旋伪代码(右旋的伪代码类似)

在 LEFT-ROTATE 的伪代码中，假设 $right[x] \neq nil[T]$，并且根的父结点是 $nil[T]$。

```
LEFT-ROTATE(T, x)
y ← right[x]                      ▷ Set y.
right[x] ← left[y]                ▷ Turn y's left subtree into x's right subtree.
p[left[y]] ← x
p[y] ← p[x]                       ▷ Link x's parent to y.
if p[x] = nil[T]
   then root[T] ← y
   else if x = left[p[x]]
           then left[p[x]] ← y
           else right[p[x]] ← y
left[y] ← x                       ▷ Put x on y's left.
p[x] ← y
```

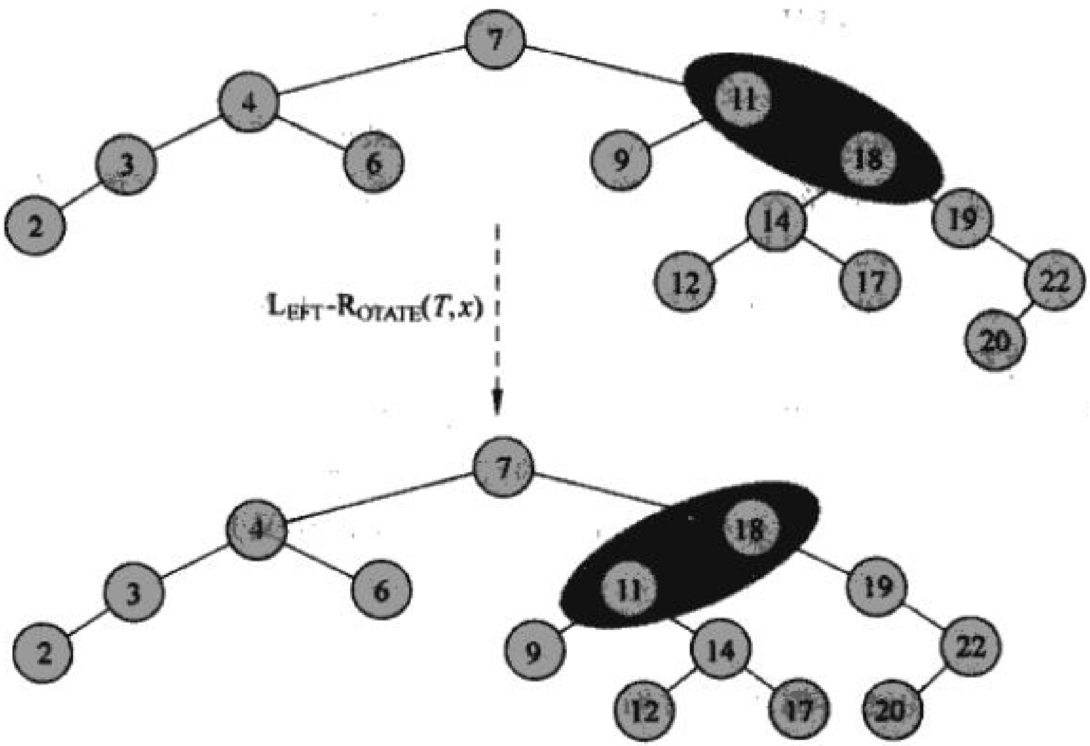


图 13-3 程序 LEFT-ROTATE(T, x)是如何修改一棵二叉查找树的示例。输入的树和修改过的树的中序遍历产生相同的关键字值列表

3. 插入操作

红黑树的插入操作分为两个阶段

1. 用普通的二叉搜索树算法，找到待插入节点位置，这个位置应该是一个叶节点(根据二叉搜索树的性质),这里的叶节点指的是新节点的孩子是 nil[T]，将节点插入，并将新插入的节点(z)染成红色。

2. 因为染色之后会破坏性质 (2) 和 (4) (因为插入的节点染为红色，所以不会破坏性质 5)，需要进行调整，使之重新满足红黑树的性质。
   ps :如果新节点**z**是根节点就破坏性质2

3.1. 插入一阶段伪代码分析

```
RB-INSERT(T, z)
1  y ← nil[T]
2  x ← root[T]
3  while x≠nil[T]
4       do y ← x
5          if key[z]<key[x]
6             then x ← left[x]
7             else x ← right[x]
8  p[z] ← y
9  if y=nil[T]
10     then root[T] ← z
11     else if key[z]<key[y]
12             then left[y] ← z
13             else right[y] ← z
14  left[z] ← nil[T]
15  right[z] ← nil[T]
16  color[z] ← RED
17  RB-INSERT-FIXUP(T, z)
```

注释:

- 第8行的 y 是 z的父节点，8行前面的while循环操作，就是为了找到 z的父节点
- 第9行 判断 z是不是根节点(根节点的父节点为哨兵节点)
- 第11行是为了判断 z 应该插在 y的左边还是右边
- 第17 行是调整操作。

3.2. 插入二阶段伪代码分析

```
RB-INSERT-FIXUP(T, z)
1   while color[p[z]] = RED
2       do if p[z] = left[p[p[z]]]
3           then y ← right[p[p[z]]]
4               if color[y] = RED
5                   then color[p[z]] ← BLACK                      ▷ Case 1
6                       color[y] ← BLACK                          ▷ Case 1
7                       color[p[p[z]]] ← RED                      ▷ Case 1
8                       z ← p[p[z]]                               ▷ Case 1
9                   else if z = right[p[z]]
10                      then z ← p[z]                             ▷ Case 2
```

```
11                          LEFT-ROTATE(T, z)                     ▷ Case 2
12                      color[p[z]] ← BLACK                       ▷ Case 3
13                      color[p[p[z]]] ← RED                      ▷ Case 3
14                      RIGHT-ROTATE(T, p[p[z]])                  ▷ Case 3
15          else (same as then clause with "right" and "left" exchanged)
16  color[root[T]] ← BLACK
```

根据 第 1 行 while循环，我们可以得知需要调整(进入while)的条件为 $p[z]$ 为 RED。那么在初始化的时候:

1. 当 $p[z]$为黑色的时候,不进入循环，表示不破坏原红黑树的红黑性质，可能的情况为:
    1. $p[z]$是**根节点**，这时候插入新的红色节点，显然不会破坏性质 (2) 和 (4)
    2. $p[z]$是**非跟节点**，这时候插入新的红色节点，同样不会破坏 性质(2) 和 (4)
    3. z是**根节点**，由于根节点的父节点是哨兵节点，哨兵节点$nil[T]$是黑色的，此时满足$p[z]$是黑色。但是此时z是红色的，并且z是这棵树唯一的内节点，因此只需要改变z的颜色即可
2. 当 $p[z]$为红色，根据红黑树的性质$p[z]$不可能为根节点，因此$p[p[z]]$,存在，并且$p[p[z]]$一定是黑色的。(否则如果$p[p[z]]$是红色的， $p[z]$一定是黑色的)。在此基础上有一下的分析。

3.2.1. p[z]为红色时插入分析

在 2 阶段，需要调整的情况总共有 6 种，但是由于对称性，实际上只有 3 种(另外3种是对称的)。第 2 行的 if 判断 就表示只取1种对称，下面分情况讨论。

在下面的分析中我们仅关注 4 个节点。

1. 新插入的节点 z， z 为 **红色**
2. z 的父亲节点 $p[z]$， $p[z]$ 为**红色**
3. z 的祖父节点 $p[p[z]]$ ，$p[p[z]]$ 为**黑色**
4. z 的叔叔节点 y , 也就是 $p[z]$的兄弟节点

ps： 四个节点的颜色分析看上一部分.

3.2.1.1. case1: y 节点为红

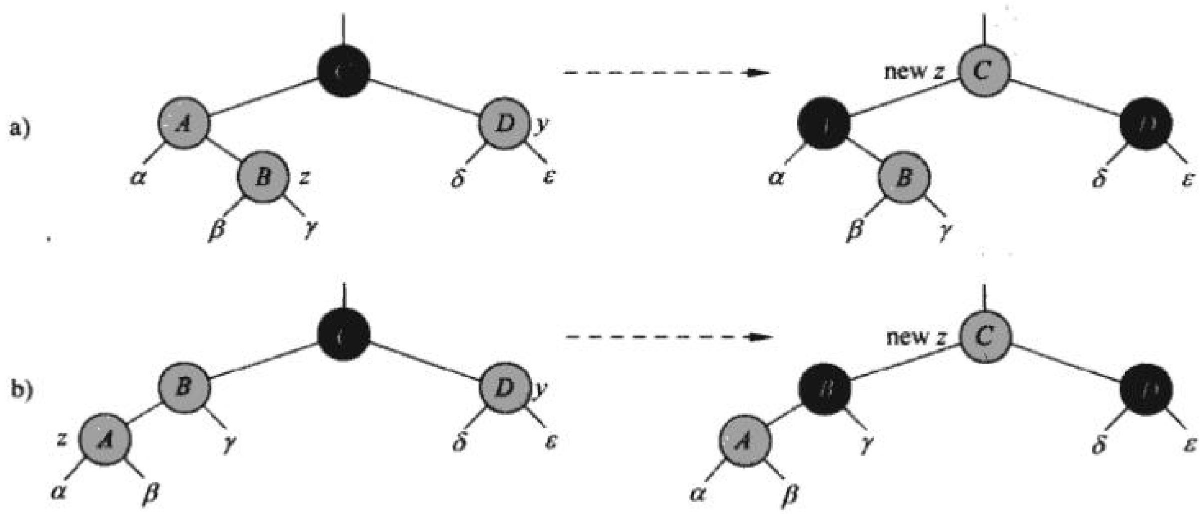


图 13-5 程序 RB-INSERT 中的情况 1)。性质 4)被违反，因为 z 和它的父结点 $p[z]$都是红的。相同的情形发生在 a)z 是一个右孩子或 b)z 是一个左孩子。每一棵子树 α、β、γ 和 δ 都有一个黑根，而且具有相同的黑高度。情况 1)的代码改变了某些结点的颜色，但保持了性质 5)：从一个结点向下到一个叶结点的所有路径都有相同数目的黑结点。while 循环将结点 z 的祖父 $p[p[z]]$作为新的 z 以继续迭代。现在性质 4)的破坏只能发生在新的红 z 和它的父结点之间，条件是如果父结点也是红的

ps: (a) 和 (b) 等价。

操作是，将 $p[z]$ 和 y 染成黑色，并将 $p[p[z]]$ 染成红色。

1. 将 $p[z]$ 和 y 染成黑色是为了修正性质(4)
2. 将 $p[p[z]]$ 染成红色。是为了满足性质 (5)，如果 $p[p[z]]$ 是黑色的话，那么会导致 $p[p[z]]$ 的父节点的黑色节点数+1 .可能破坏了性质(5)。(按照定义，原本子树A和子树D的黑色节点数同，那么C子树的黑色节点数是 NUM(A)+1 , 现在假如C是黑色的。子树B的黑色节点数不变，但增加了一个黑色节点(C)，所以C子树的黑色节点数变为 NUMA)+2)

操作过后，令 $z1 = p[p[z]]$, $z1$进入新的while循环，但是操作过后也可能出现以下的情况:

1. $z1$是根，那么$p[z1]$为黑色跳出循环，此时只有性质(2)被破坏了，此时只需要把$z1$染成黑色(语句16)，那么所有的性质都得到满足.（包括性质（5）,因为根节点不计入黑色高度中)
2. $z1$不是根，那么$p[z1]$存在。

3. 如果$p[z1]$是黑色的，显然此时所有的性质都得到了满足。(因为我们在上一步操作中证明了不会破坏性质(5),且上一步操作修正了性质(4),$p[z1]$是黑色的显然不会破坏性质(2),其余的性质很自然不会被破坏)
4. 如果$p[z1]$是红色的，重复进入**while**循环，继续对$z1$进行调整。

3.2.1.2. case2 and case3

case2: 如果 y 节点为黑色，且z是右孩子
case3: 如果 y 节点为黑色，且z是左孩子

对于case2 可以通过 **左旋** 操作转化为 case3,因此主要集中于case3 (注意case2旋转之后，z也变了),且由于 z和$p[z]$都是红色的，旋转操作不破坏性质(5)

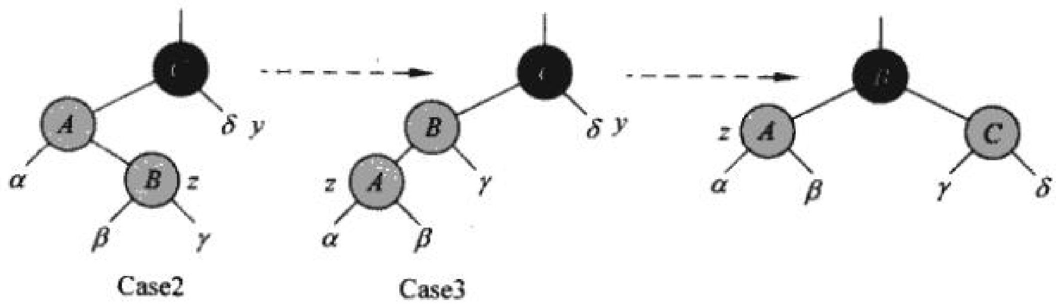


图 13-6　程序 RB-INSERT 的情况 2)、3)。如同情况 1)，性质 4)在情况 2)或情况 3)中被破坏是因为 z 和它的父亲 $p[z]$都是红的。每一棵子树 α、β、γ 和 δ 都有一个黑根(α、β 和 γ 是由性质 4)而来，δ 也有黑根是因为否则将导致情况 1))，而且具有相同的黑高度。情况 2)通过左旋转变为情况 3)，以保持性质 5)：从一个结点向下到一个叶结点的所有路径都有相同数目的黑结点。情况 3)引起某些结点颜色的改变，以及一个同样为了保持性质 5)的右旋。然后 while 循环结束，因为性质 4)已经得到了满足：一行中不再有两个连续的红色结点了

对于case3:
我们做的操作是

1. 对 $p[z]$ 和 $p[p[z]]$,作右旋操作。
2. 并把$p[z]$染为黑色，把$p[p[z]]$染红色

执行完操作之后，修正了性质(4),同时不会破坏性质(5)(仔细观察图可知，这里不赘述了)。同时旋转之后，$p[z]$成为最上面的节点

1. 如果 $p[z]$ 是根节点，显然满足(2)，所有的性质都满足，并且退出while循环
2. 如果 $p[z]$ 不是根节点，显然不会破坏(2)，所有的性质都满足，并且退出while循环

因此对于 case2 和 case3来说，最多经过2次旋转即可保持红黑树的性质。

3.3. 插入操作的复杂度分析

RB-INSERT的复杂度为 $O(lgn)$, 因为高度为 $O(lgn)$,所以阶段一的查找操作的复杂度为$O(lgn)$。对于case1:最多做$O(lgn)$次 while循环，对于case2 和 case3 ,旋转操作的复杂度为 $O(1)$。综上，总的插入操作的复杂度为: $O(lgn)$ 。

4. 删除操作

和插入操作类似，红黑树的操作也分为两个阶段。

1. 普通的二叉树删除算法。普通二叉树删除算法概述:
   首先找到待删除节点 z,根据 z 的类型:
   1. 如果 z是**叶子节点**(z的左右孩子都是$nil[T]$),直接把z删除，并将$p[z]$的孩子设置为 $nil[T]$
   2. 如果 z **只有一个孩子**(不管是左孩子还是右孩子),直接把z删除，并将z的孩子和$p[z]$链起来
   3. 如果 z 有**两个孩子**，那么首先找到 z的后继节点 ($SUCCESSPR$) y (也就是z的右子树中序遍历的第一个节点，或者是树的中序遍历下z的下一个节点)。先删除节点y,此时删除y的情形就是情况 1,2 (y一定没有左孩子),然后再将z替换为y即可。
2. 执行完普通删除之后，再根据被删除节点的颜色进行调整(**RB-DELETE-FIXUP**)。使之重新满足红黑树的性质。

4.1. 删除一阶段伪代码分析

```
RB-DELETE(T, z)
1   if left[z] = nil[T] or right[z] = nil[T]
2       then y ← z
3       else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
4   if left[y] ≠ nil[T]
5       then x ← left[y]
6       else x ← right[y]
7   p[x] ← p[y]
8   if p[y] = nil[T]
9       then root[T] ← x
10      else if y = left[p[y]]
11              then left[p[y]] ← x
12              else right[p[y]] ← x
13  if y ≠ z
14      then key[z] ← key[y]
15           copy y's satellite data into z
16  if color[y] = BLACK
17      then RB-DELETE-FIXUP(T, x)
18  return y
```

注释：

- z是待删除节点。
- 在代码中 y 表示 **执行 case1/case2 删除的节点**。换言之，如果是 case1/case2 y就是待删除节点z。 如果是 case3， y是 z的后继节点。
- x是y的孩子节点,如果y有一个内节点孩子，x是非$nil[T]$的孩子，如果x没有内节点孩子，那么x是$nil[T]$
- 第 1 行， 这个 if 将 case1\case2 和 case3区分开 。case1和case2的处理方式相同(第 2 行)。
- 第 3 行， 处理 csas3, 找到 待删除节点 z的后继节点 y
- 第 4 - 7 行，将 y 的 左孩子(或者右孩子)设为x, 将 x 和 $p[y]$ (y的父节点)链起来
- 第 8 - 9 行，如果节点y是根节点 (根节点的父节点是 $nil[T]$),那么因为y原本的位置现在是x了，将树的根节点设置为x.
- 第 10 -12 行，将 x 和 $p[y]$ 链起来
- 第 13 - 14 行 判断 y和z是否为同一个节点，如果是(对应case1,case2)什么都不做，如果不是意味着现在z还在树种，将z替换为y 从而完成对节点z的删除
- 第 16 - 17行 根据 y的颜色对红黑树进行调整，使之重新满足红黑树的性质

4.2. 删除二阶段伪代码分析

RB-DELETE-FIXUP 伪代码如下

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
while x ≠ root[T] and color[x] = BLACK
    do if x = left[p[x]]
        then w ← right[p[x]]
            if color[w] = RED
              then color[w] ← BLACK                                    ▷ Case 1
                  color[p[x]] ← RED                                    ▷ Case 1
                  LEFT-ROTATE(T, p[x])                                 ▷ Case 1
                  w ← right[p[x]]                                      ▷ Case 1
            if color[left[w]] = BLACK and color[right[w]] = BLACK
              then color[w] ← RED                                      ▷ Case 2
                  x ← p[x]                                             ▷ Case 2
              else if color[right[w]] = BLACK
                      then color[left[w]] ← BLACK                      ▷ Case 3
                          color[w] ← RED                               ▷ Case 3
                          RIGHT-ROTATE(T, w)                           ▷ Case 3
                          w ← right[p[x]]                              ▷ Case 3
                  color[w] ← color[p[x]]                               ▷ Case 4
                  color[p[x]] ← BLACK                                  ▷ Case 4
                  color[right[w]] ← BLACK                              ▷ Case 4
                  LEFT-ROTATE(T, p[x])                                 ▷ Case 4
                  x ← root[T]                                          ▷ Case 4
        else (same as then clause with "right" and "left" exchanged)
color[x] ← BLACK
```

4.2.1. y是红色

首先还是看 1阶段的代码 16-17行，这里的 if 语句表明只有 y (y 表示 执行 case1/case2 删除的节点)是黑色的才需要调整。如果y是红色的并不会破坏红黑树的性质。显然，当y是红色的时候:

1. y不是根节点，删除y不影响性质(2)
2. y是红色节点，删除红色节点不影响黑色节点的数目，所以删除y不影响性质 (5)
3. 由于y的子节点一定是黑色的，所以删除y之后不可能出现两个连续的红色节点,不破坏性质(4)
4. 显然剩下的性质也不会被破坏。

因此只需要对 y是黑色且不是根的情况进行讨论，

4.2.2. y是黑色

如果y是黑色的，此时y被删除，可能带来的问题有:

1. 如果y是根节点，且y的孩子x是红色的，那么此时x为根，破坏了性质(2)

2. y不是根节点，但是x和$p[y]$ (删除后同时也是 $p[x]$)都是红色的，此时破坏了性质(4)
3. 因为y是黑色的，删除y导致包含y的任意路径的黑色节点个数少1，因此性质(5)被 y的某一个祖先破坏了。

事实上对于上述的 1,2,3 最重要的是解决 3，如果问题 3解决了，1和2能同时得到解决。

解决问题3的方法是: 把 x视为还有额外的一重黑色。此时多出的这重黑色解决了(5),但此时 x为**红黑**(x原本的颜色是红) 或者 **黑黑**(x原本的颜色是黑) 。此时破坏了性质(1) (颜色只能是红色或者黑色)。为了解决这一随之而来的问题，我们希望在经过某种操作之后，能把多出的一重颜色去掉。

解决多重颜色问题先考虑:

1. 如果 x是**红黑**的，也就是x原本的颜色是**红色**，此时直接把x着色为**黑色**。就可以解决这个问题。(伪代码的第 1 行，就做了这个判断，第 23 行直接将x染黑)
   此时红黑树的所有性质满足:
   1. 将x染成黑色补偿了性质 (5)
   2. x为黑色显然就不会发生问题2和3了
2. 如果 x是**黑黑**的且x为根，也就是x原本是**黑色**，此时直接把x多余的那重黑色去掉，也即是把x染黑。(伪代码第 1 ，23行)
   此时红黑树所有性质得到满足;
   1. x为根，x的颜色不影响 黑色节点的数目(也就是说在原本树中y为根，y的颜色不影响黑色高度)，此时性质(5)满足
   2. x为跟，且x为黑色，问题 2，3都不会发生。
3. x 是 **黑黑** ，但**x**不是根节点，此时需要额外的调整。**调整的目标**是通过某些操作，使得在 **保持性质5**的基础上，将多出来的黑色层层上移，最终转化为前面两种情况，完成调整。(最外层的while循环体现了这种层层上移)。注意 **拥有额外一重黑色**的节点由 x标识，而不是由 节点原本的颜色标识。

4.2.2.1. x为 黑黑 且不为根节点时的调整操作

首先有上面的 3.所述，我们必须确保这些操作能够**保持性质(5)**，如何判断是否保持性质(5)？: **子树根节点到无关节点的路径上(包括子树根节点本身)黑色的数目 操作前后不变**。 这里的 无关节点指的是不涉及操作的节点。

下面可能出现的节点定义 :

1. 在代码中 y 表示 **执行 case1/case2 删除的节点**。换言之，如果是 case1/case2 y就是待删除节点z。 如果是 case3， y是 z的后继节点。
2. x 是 被删除节点 y 的子节点(和上面所有的x一致)，且由上面分析之此时， x的颜色为 **黑黑**.
3. w 是 x 的兄弟
4. 上述伪代码和下面的分析中 x是$p[x]$的左节点，x是右节点和x是左节点是对称的。因此只分析x是左孩子的情况。

在不考虑对称性的前提，一共有 **4种**情况(其它的4种和这4种对称)

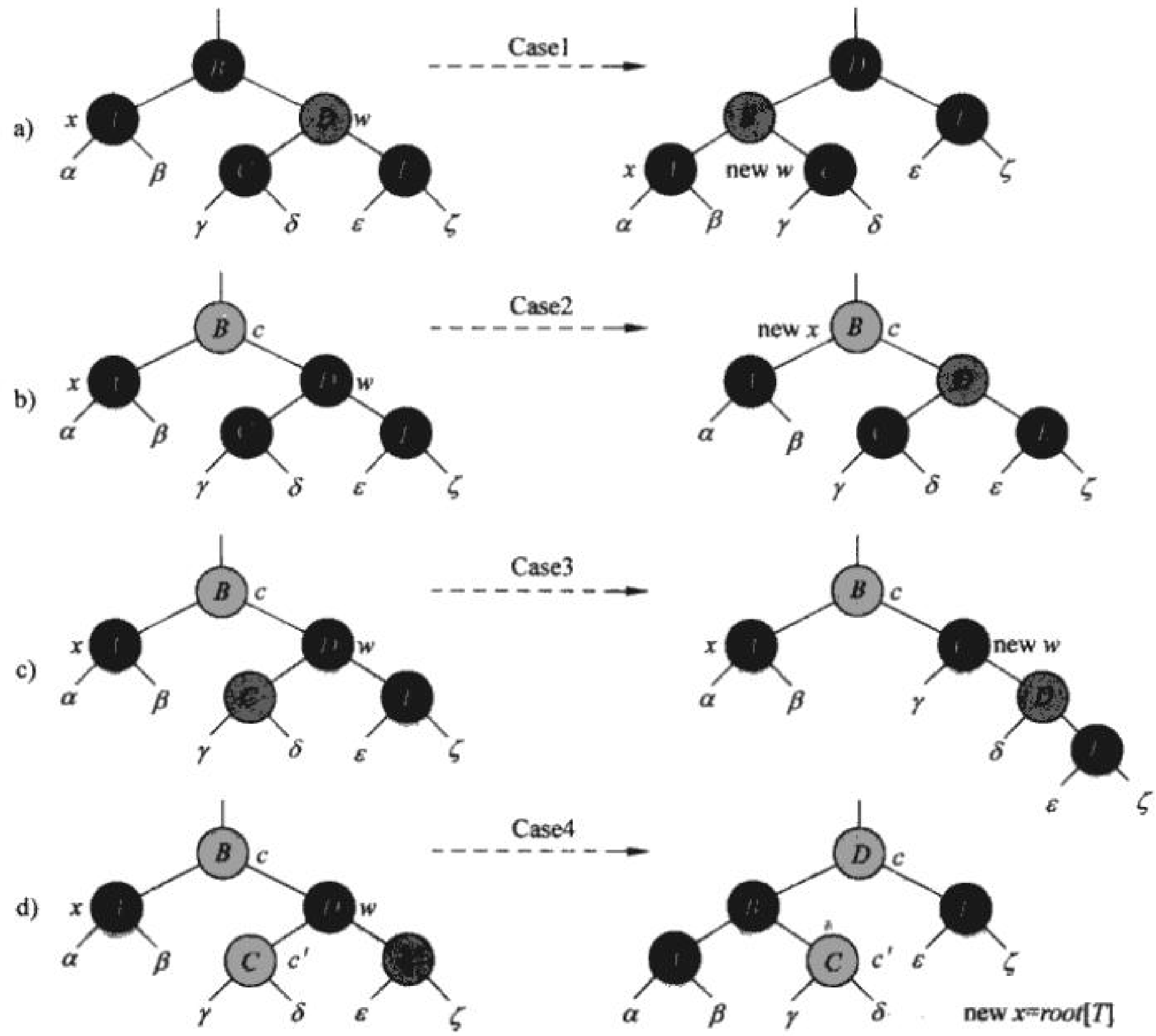


图 13-7 过程 RB-DELETE-FIXUP 中 while 循环的各种情况。加黑的结点 *color* 属性为 BLACK，深阴影的结点 *color* 属性为 RED，浅阴影的结点 *color* 属性用 c 和 c' 表示，也可为 RED 或者为 BLACK。字母 α，β，…，ζ 代表任意的子树。在每种情况中，通过改变某些结点的颜色及/或一次旋转，可以将左边的形式转化为右边的形式。x 指向的任何结点都具有额外的一重黑色而成为双重黑或红黑。引起循环重复的唯一情况即情况 2)。a)通过交换结点 B 和 D 的颜色以及执行一次左旋可将情况 1)转化为情况 2)、3)、4)。b)在情况 2)中，由指针 x 所表示的额外黑色在将结点 D 着为红色，并将 x 置为指向结点 B 后沿树上升。如果通过情况 1)进入情况 2)，则 while 循环结束，因为新的结点 x 是红黑的，因此其 *color* 属性 c 是 RED。c)通过交换结点 C 和 D 的颜色并执行一次右旋，可以将情况 3)转换成情况 4)。d)在情况 4)中，通过改变某些结点的颜色并执行一次左旋(不违反红黑性质)，可以将由 x 表示的额外黑色去掉，然后循环结束

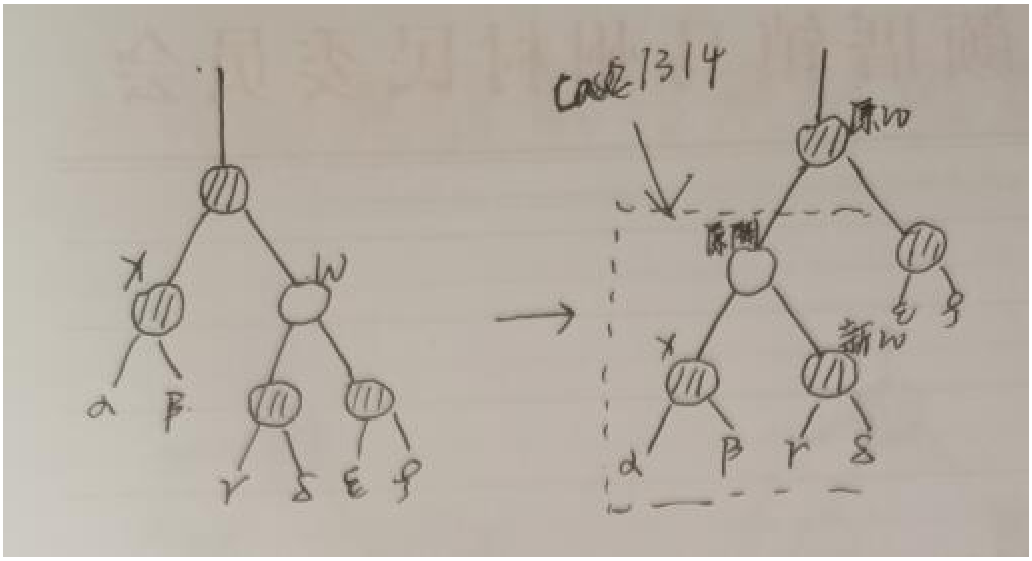
4.2.2.1.1. Case 1 x的兄弟 w 是红色的

当 x的兄弟 w 是红色的，$p[z]$一定为黑色

我们做的操作为 : 交换 $p[z]$ 和 w 的颜色，并对 $p[z]$ 和 w 做一次左旋。此时w变为子树根节点且为黑色， $p[z]$ 变为红色。 (图可能不是很清楚)
显然在做了这个操作之后:

1. 保持了性质(5)，从子树根节点到 α , β 距离均为3 (x为双重黑节点)。 到其余无关节点的距离可以类推。
2. 不违反红黑树的其它性质。

上述操作将 case1 转化为 case2 / case3 /case4



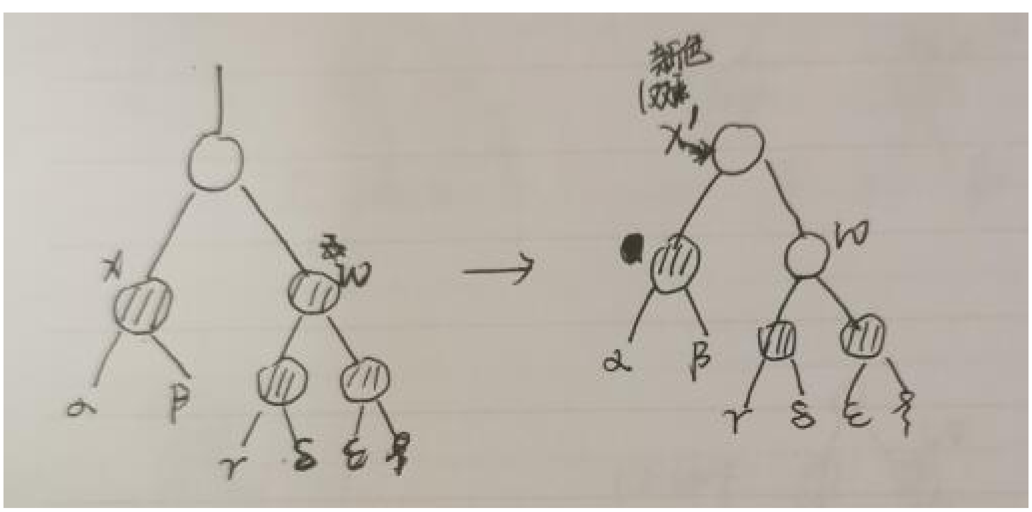
4.2.2.1.2. Case 2 x的兄弟 w 是黑色的，且w的两个孩子都是黑色的

x 的兄弟 w 是黑色的，且w的两个孩子都是黑色的。$p[z]$可为红色，可为黑色，图片以红色为例

我们的操作是:

1. 将x和w的黑色同时去掉，此时x变为黑色，w 变为红色(上面图不是很清楚)
2. 此时 x的那重黑色去掉了，但是 x路径上的某个祖先节点的黑色节点数目 -1 。
3. 为了补偿黑色节点的数目。我们将 $p[x]$ 新增一重额外的黑色。
4. 令 $p[x] = x_1$,此时针对 x_1做新一轮的while循环。(等价于将额外的黑色上移)

显然在操作之后，性质(5)未被破坏。



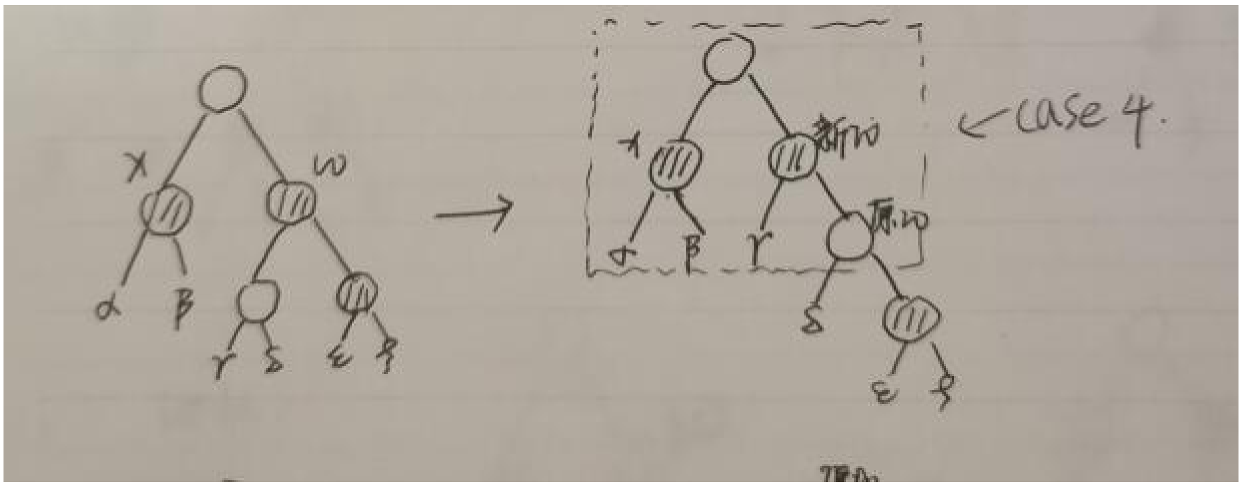
4.2.2.1.3. Case 3 x的兄弟 w 是黑色的，且w的左孩子是红色的，右孩子是黑色的

x的兄弟 w 是黑色的，且w的左孩子是红色的，右孩子是黑色的。$p[z]$可为红色，可为黑色，图片以红色为例

我们的操作是:

1. 将 w 染为红色
2. 将 $left[w]$ 染为黑色
3. 对 w 和 $left[w]$ 进行右旋操作。(这里的右旋操作指的是，w 绕 $left[w]$ 右旋)

经过上述操作 我们将 case 3 转化为 了 case4 并保持了性质(5)



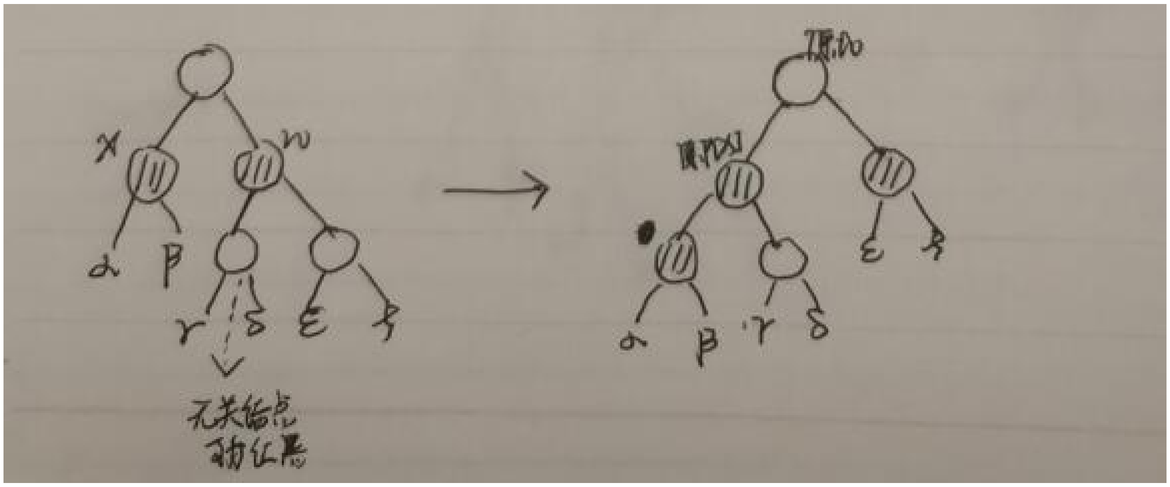
4.2.2.1.4. Case 4 x的兄弟 w 是黑色的，右孩子是红色的。

x的兄弟 w 是黑色的，右孩子是红色的。(左孩子此时是无关节点，红色或黑色都一样)。$p[z]$可为红色，可为黑色,图片以红色为例

我们的操作为:

1. 将 w的颜色设为$p[z]$的颜色(这步操作为了保持性质5)
2. 将 $right[w]$的颜色设为 **黑色** (这部操作是为了 补偿 w变为红色。保持了性质(5))
3. 将 $p[z]$ 绕着 w 做一次左旋。
4. 将 $p[z]$ 的颜色设为**黑色**,去除x多余的一重黑色(这步其实将x多余的那重黑色转移到了 $p[z]$上，同时补偿了 w的黑色，目的都是为了保持性质 5)
5. 将 x设为根节点。(直接进行伪代码 23行统一的操作)，同时将 x设为跟之后，就跳出循环。

通过上述操作，红黑性质都得到满足了。



4.2.3. 伪代码注释

- 第 1 行 如果 x 是 或者 x是红色就**不进入**循环。和 第 23 行统一将 x 设置为黑色。 处理的就是 **解决多重颜色问题**的 1，2两点 (x是红黑的和x是根)

4.3. 复杂度分析

含 n个节点的红黑树高度为 $O(lgn)$, 所以执行第一阶段的删除代码的复杂度为 $O(lgn)$, 在第二阶段的调整操作中， case 1, 3, 4 只需要经郭一定次数的颜色修改和最多三次(case1->case2->case3)的旋转操作便结束。 复杂度为 $O(1)$, 对于case2,while循环最多执行 $O(lgn)$ 次(上升次数)。综上 RB-DELETE的总的时间代价为 $O(lgn)$