非线性方程

第一章小结

- 误差理论的基本概念
- 误差在近似值运算中的传播规律及其估算方法
- 数值稳定性的概念。
- 过失误差
- 非过失误差
  - 模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差。
- 绝对误差和相对误差。
- 有效数字，其与误差之间的密切关联。

- **减少计算误差的措施：**

- 减少运算次数
- 避免相近数相减
- 避免小除数、大乘数和“溢出”
- 注意运算顺序（如若干数相加时先加绝对值较小的数，避免大数吃小数）
- 防止误差影响扩大（采用稳定算法）

第2章 一元非线性方程的解法

求 $f(x)=0$ 的根

2.1 引例及问题综述

2.2 二分法

2.3 简单迭代法

2.4 牛顿迭代法

2.5 弦截法

本章作业：1,3,5,11（P159-160）

2.1 引例及问题综述

2.1.1 引例

在解决实际问题的过程中，经常遇到求解一元非线性方程根的数学问题。

天文学中用开普勒方程 $x = q\sin x + a \quad (0 < q < 1, a\text{是常数})$

来确定行星在轨道上的位置。

2.1.2 问题综述

设 $f(x)$为一元连续函数，称方程 $f(x) = 0$为函数方程

- $f(x)$ 是单变量x的函数，当$f(x)$ 不是 x的线性函数时，称对应的函数方程为非线性方程。
- $f(x)$可以是代数多项式：

  $f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0)$

  称$f(x)=0$为n次代数方程，

  当n>1时，方程是非线性的。
- 当 $f(x)$包含指数函数或三角函数等特殊函数时，即不能表为代数多项式的形式时称为超越函数，则$f(x)=0$称为超越方程。

- 满足方程 $f(x)=0$ 的 x 值通常叫做方程的根或解，也叫函数 $f(x)$ 的零点。
- 如果 $f(x) = (x-x^*)^m g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$，则称 x^* 为 $f(x)=0$ 的 m 重根。

  $m=1$ 称为单根，$m>1$ 称为重根。

阅读

- 远在公元前1700年的古巴比伦人就已有关于一、二次方程的解法。《九章算术》(公元前50-100年)其中“方程术”有联立一次方程组的一般解法。

- 1535年意大利数学家坦特格里亚(TorTaglia)发现了三次方程的解法，卡当(H·Cardano)从他那里得到了这种解法，于1545年在其名著《大法》中公布了三次方程的公式解，称为卡当算法。

- 后来卡当的学生弗瑞里(Ferrari)又提出了四次方程的解法。此成果更激发了数学家们的情绪，但在以后的二个世纪中，求索工作始终没有成效，导致人们对高次代数方程解的存在性产生了怀疑。

阅读

- 1799年，高斯证明了代数基本定理，并由此可以立刻推理n次代数方程必有n个实根或复根。
- 但在以后的几十年中仍然没有找出高次代数方程的公式解。一直到18世纪，法国数学家拉格朗日用根置换方法统一了二、三、四方程的解法。但求解五次方程时未能如愿，开始意识到有潜藏其中的奥妙。
- 在继续探索5次以上方程解的艰难历程中，第一个重大突破的是挪威数学家阿贝尔(N·Abel1802-1829) 1824年阿贝尔发表了“五次方程代数解法不可能存在”的论文，但并未受到重视，连数学大师高斯也未理解这项成果的重要意义。

阅读

- 1828年17岁的法国数学家伽罗华(E·Galois 1811-1832)写出了划时代的论文“关于五次方程的代数解法问题”，指出即使在公式中容许用n次方根，并用类似算法求五次或更高次代数方程的根是不可能的

- 文章呈交法兰西科学院后，因辈份太低遭到冷遇，且文稿丢失。1830年伽罗华再进科学院递稿，得到泊松院士的判词“完全不能理解”。

- 后来伽罗华命运不佳，投考名校巴黎工科大学落榜，屈就高等师院，并卷入政事两次入狱，被开除学籍，又决斗受伤，死于1832年。决斗前，他把关于五次代数求解的研究成果写成长信，留了下来。

阅读

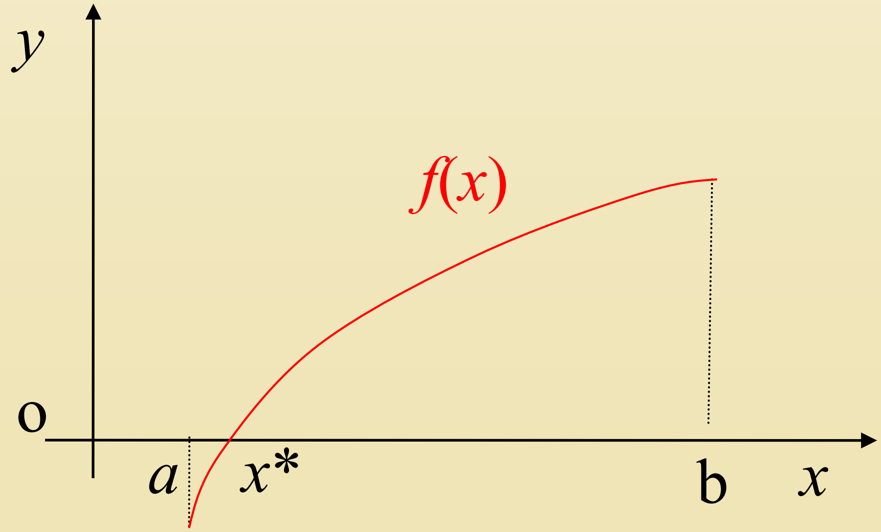
- 十四年后，法国数学家刘维尔(J·Liouville)整理并发表了伽罗华的遗作，人们才意识到这项近代数学发展史上的重要成果的宝贵。
- 38年后，即1870年，法国数学家若当(C·Jordan)在专著《论置换与代数方程》中阐发了伽罗华的思想，一门现代数学的分支——群论诞生了。
- 在前几个世纪中，曾开发出一些求解代数方程的有效算法，它们构成了数值分析中的古典算法。
- 鉴于五次以上的代数方程和一般超越方程都不能解析求出，因此本章只介绍方程的数值解法，它既可以用来求解代数方程，也可以用来解超越方程，但仅限于求方程的实根。

两个基本定理

定理I （代数基本定理）

设 $f(x)=0$ **为具有复系数的*n*次代数方程，则** $f(x)=0$ **于复数域上恰有*n*个根（*r*重根计算*r*个）。如果** $f(x)=0$ **为实系数代数方程，则复数根成对出现，即当** $\alpha+i\beta\ (\beta\neq 0)$ $f(x)=0$ **是复根，则** $\alpha-i\beta$ **亦是** $f(x)=0$ **根。**

定理2 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$内连续，严格单调，且有$f(a)\,f(b) < 0$，则在$[a, b]$内方程$f(x) = 0$有且仅有一个实根。



方程的求根问题一般分三步进行:

1.判定根的存在性，即方程有没有根?

如果有根，有几个根? → 利用闭区间上连续函数的零点定理

2.确定根的分布范围（根的隔离(分离)）

确定根所在的区间,使方程在这个小区间内有且仅有一个根,这一过程称为根的隔离,

做好根的隔离工作,实际上就可以获得方程各个根的初始近似值。

3.根的精确化　得到一个根的初始近似值后，再用一种方法把此近似值精确化，使其满足给定的精度要求。

确定根的分布范围（求根的初值）可以采用如下方法：

(1)通过研究函数作$f(x)$的单调性，极值等性质，就可以描绘出函数的略图，通过观察曲线与横轴交点的大致位置来确定根的隔离区间。—— 描图法

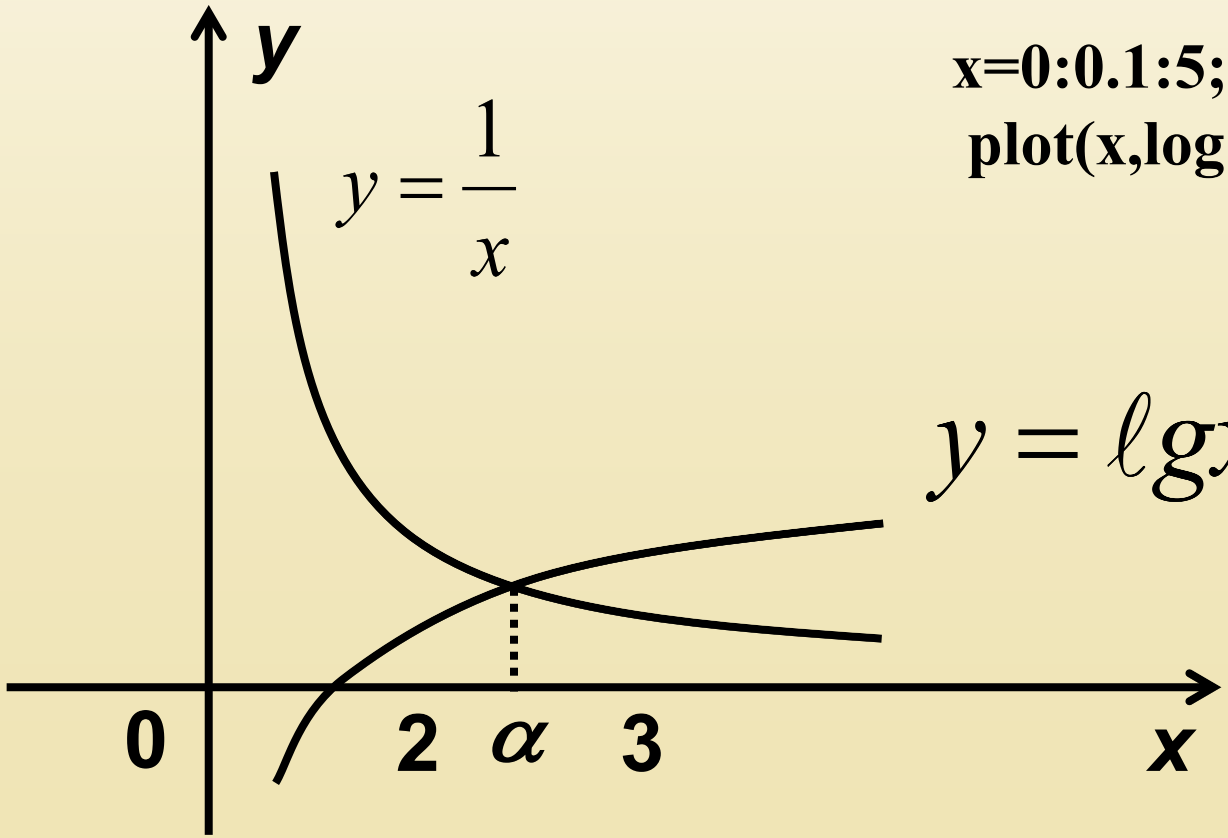
(1) 画图法

- 画出$y = f(x)$的草图，从而看出**曲线与x轴交点**的大致位置。
- 也可将$f(x) = 0$分解为$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$的形式，**$\varphi_1(x)$与$\varphi_2(x)$两曲线交点的横坐标**所在的子区间即为含根区间。

例如$x(\lg x) - 1 = 0$

可以改写为$\lg x = 1/x$

画出对数曲线 $y = \lg x$, 与双曲线 $y = 1/x$, 它们交点的横坐标位于区间$[2, 3]$内



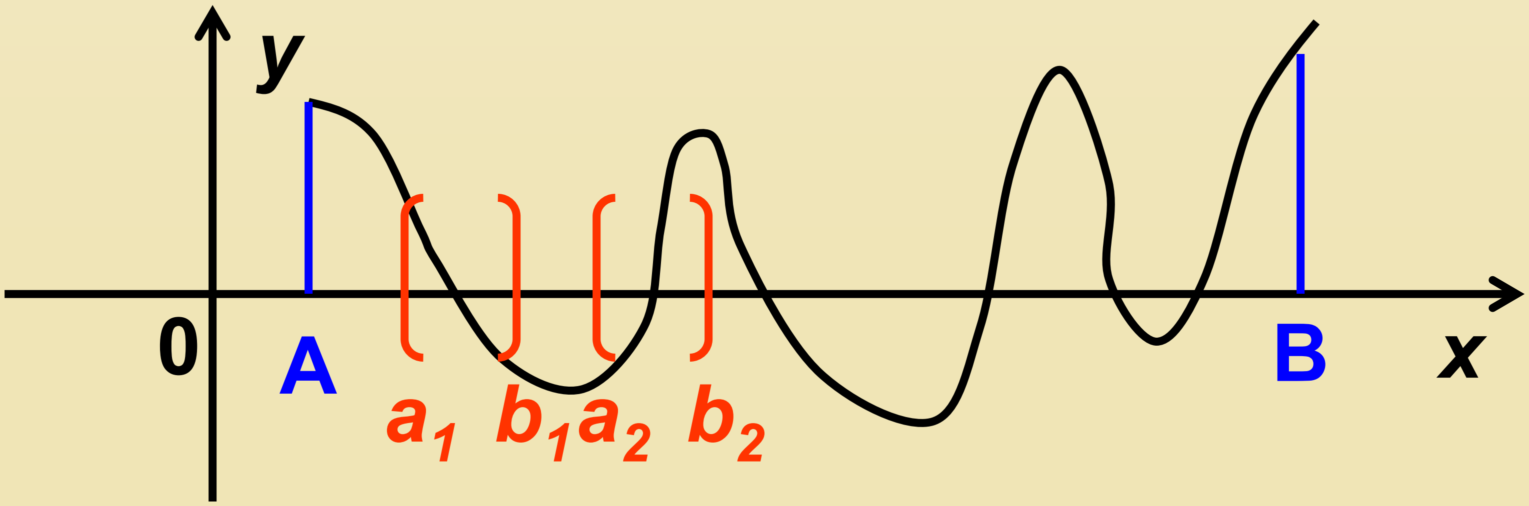

```
x=0:0.1:5;
plot(x,log10(x),x,1./x)
```

求根的隔离区间可以采用如下方法:

(1)作 $y=f(x)$ 的草图，由$f(x)$与横轴交点的大致位置来确定根的隔离区间。—— 画图法

(2) 搜索法，在连续区间 $[a,b]$ 内，选择一系列的 x 值（等步长或不等步长），当出现两个相邻点上函数值反号时，在此小区间内至少有一个实根。

搜索法：对于给定的$f(x)$，设有根区间为[A,B]，从x_0=A出发，以步长h=(B-A)/n(n是正整数)，在[A,B]内取定节点：$x_i=x_0+ih$（i=0，1，2，…，n)，从左至右检查$f(x_i)$的符号，如发现x_i与端点x_0的函数值异号，则得到一个缩小的有根子区间[x_{i-1},x_i]。

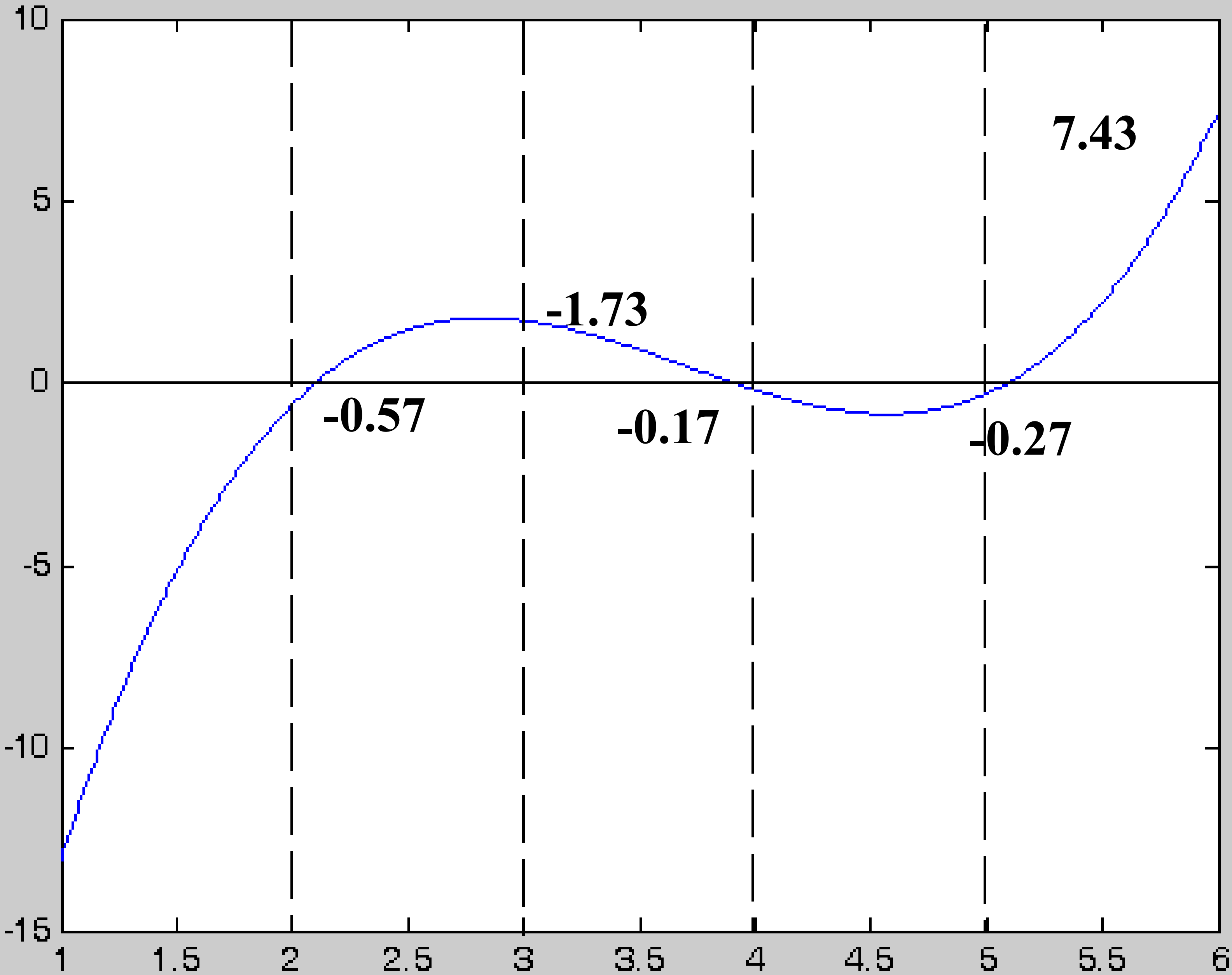


例 2.1 求方程 $f(x)=x^3-11.1x^2+38.8x-41.77=0$ 的有根区间。

取步长h=1对$f(x)$=0的根进行搜索，计算结果为：

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$的符号	-	-	-	+	-	-	+

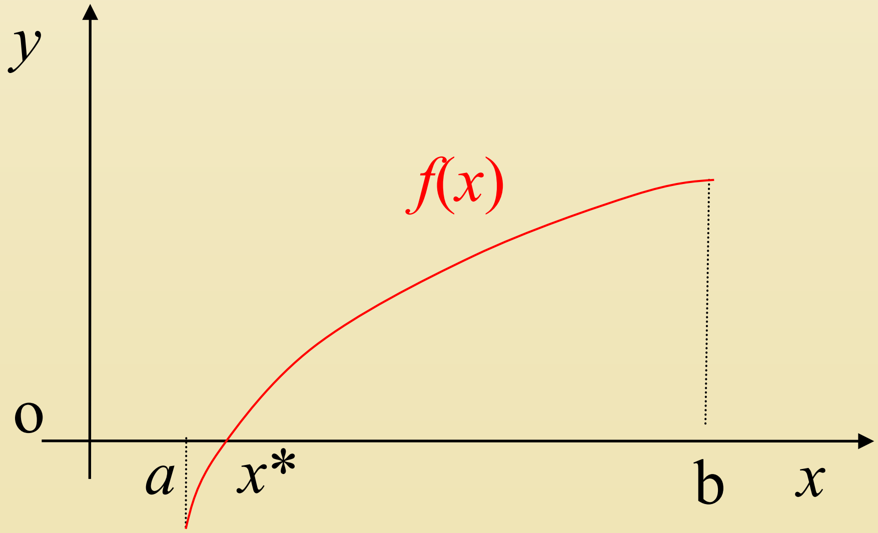
可知方程的有根区间为：[2，3]，[3，4]，[5，6]。



10
5
0
-5
-10
-15
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
7.43
-1.73
-0.57
-0.17
-0.27

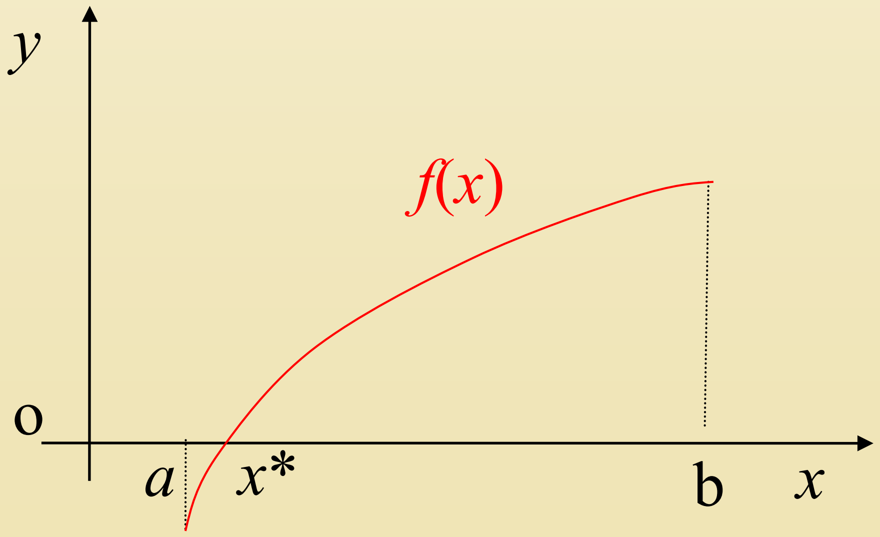
2.2 二分法

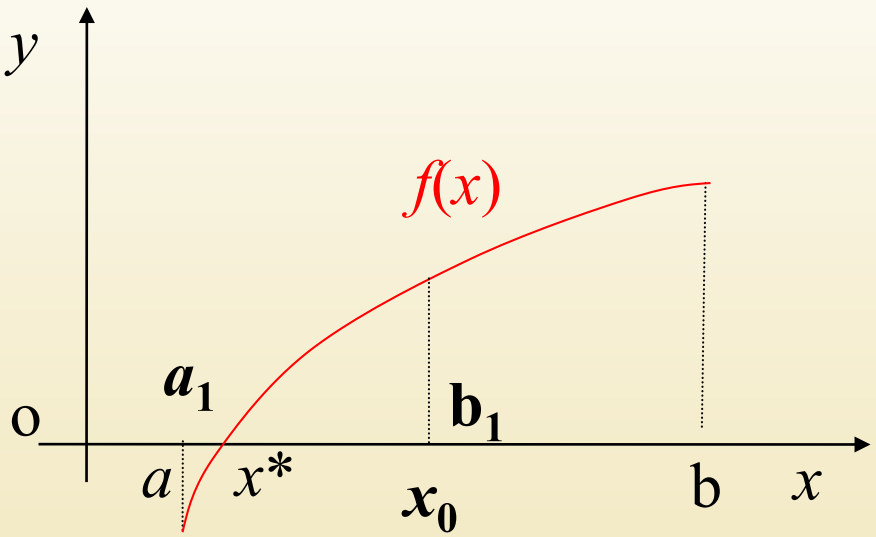
定理2 设函数 $f(x)$在 $[a, b]$内连续，严格单调，且有$f(a)\cdot f(b) < 0$，则在$[a, b]$内方程$f(x) = 0$有且仅有一个实根。



2.2.1 二分法的构造原理

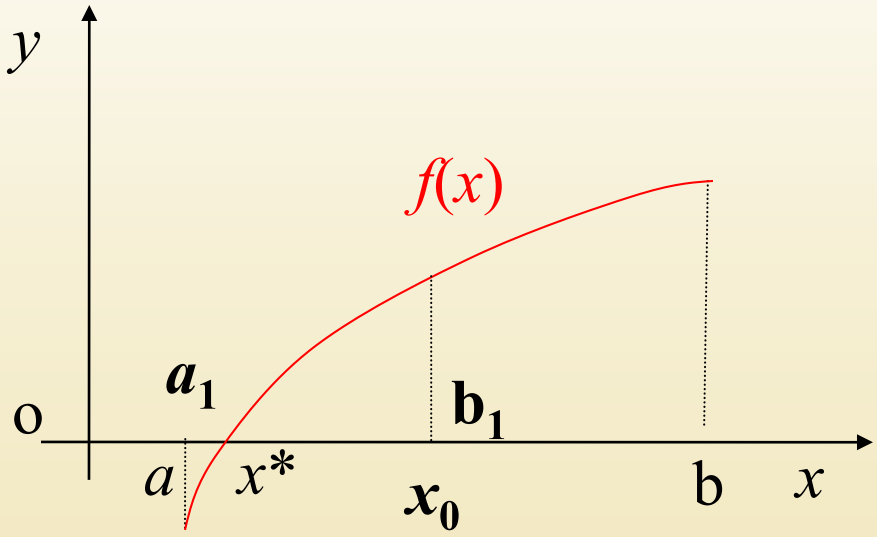
二分法的基本思想：用对分区间的方法，通过判别函数$f(x)$的符号，逐步将有根区间缩小，使在足够小的区间内，方程有且仅有一根。





$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

考察有根的区间[a,b]，取中点x_0将它分为两半，
然后进行根的搜索，即检查$f\,(x_0)$与$f\,(a)$是否同号：
如果确系同号，说明所求的根x^*在x_0的右侧，
这时令$a_1=x_0$,$b_1=b$;
否则x^*必在x_0的左侧，这时令$a_1=a$, $b_1=x_0$;
不管出现哪一种情形，新的有根区间[a_1,b_1]的长度仅为[a,b]的一半。



对压缩了的有根区间$[a_1,b_1]$又可以施行同样的手续，
即用中点$x_1=(a_1+b_1)/2$将区间$[a_1,b_1]$再分为两半，
然后通过根的搜索判定所求的根在x_1的哪一侧，
从而又确定一个新的有根区间$[a_2,b_2]$，其长度是$[a_1,b_1]$的一半。

如此反复二分下去，即可得出一系列有根区间

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_k,b_k]\supset\cdots$$

其中每个区间都是前一个区间的一半，因此二分*k*次后的有根区间[a_k, b_k]的长度

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$$

可见，如果二分过程无限地继续下去，这些有根区间最终必收缩于一点*x**，该点显然就是所求的根。

k次二分后，设取有根区间的中点 $x_k = \frac{1}{2}(b_k + a_k)$ 作为根的近似值，

则在二分过程中可以获得一个近似根的序列 $x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots,$

该序列以根x^*为极限。

在实际计算中，不可能完成这种无穷过程；
对这种无穷过程的截断就会产生截断误差。
数值计算结果允许带有一定的误差。

2.2.2 误差估计与分析:

因为根$x^*\in[a_k，b_k]$，所以

$$|x^*-x_k|\le\frac{1}{2}(b_k-a_k)=\frac{b-a}{2^{k+1}}$$

对于给定的精度 $\varepsilon>0$, 可估计二分法所需的步数 k：

$$|x^*-x_k|<\varepsilon\Rightarrow\frac{b-a}{2^{k+1}}\le\varepsilon$$

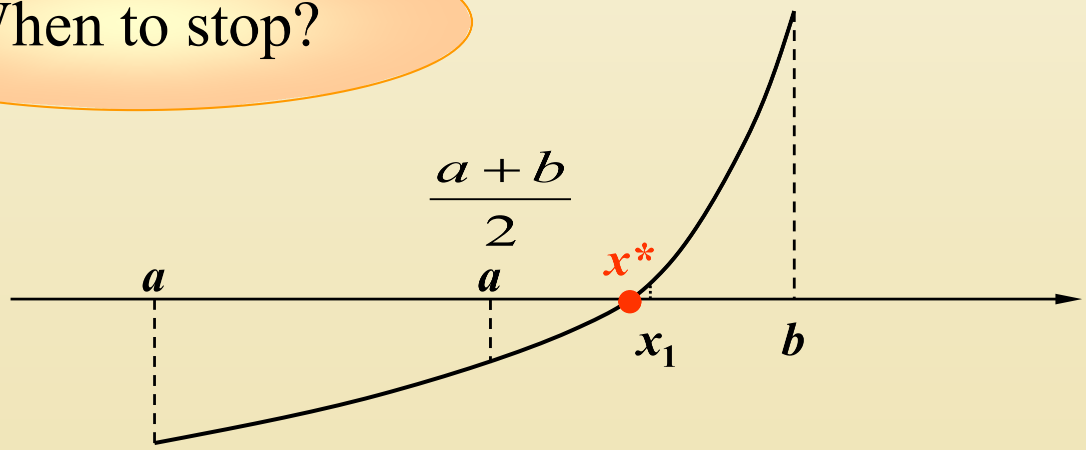
$$\Rightarrow k\ge\frac{\left[\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right]}{\ln 2}-1$$

算到第$k+1$次二分，计算得到的x_k**就是满足精度要求的近似根。**

一般情况下，由 $k \geq \frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}-1$ 确定k的往往偏大。

在程序中一般不用此式来决定二分区间的次数。

When to stop?



$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_1$ **或** $|a_k - b_k| < \varepsilon_1$

或 $|f(x)| < \varepsilon_2$

不能保证 x 的精度

2.2.3 二分法的计算步骤:

$$a \leftarrow a_k;\ b \leftarrow b_k;\ x \leftarrow x_k$$

1) 输入有根区间的端点a, b及预先给定的精度ε。

2) $\dfrac{a+b}{2} \Rightarrow x$

3) 若 $f(x) = 0$，则计算结束；否则转向4）

4) 若$f(a)\,f(x) < 0$，$x \rightarrow b$，转向5）；
否则$x \rightarrow a$，转向5）

5) $b - a < \varepsilon$，则输出方程满足精度的根 x，结束；
否则转向2）

例 2. 2 用二分法求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间[1,1.5]内的一个实根，要求用四位小数计算，误差不超过0.005。

解 因为在[1,1.5]上，

$$3x^2-1>0, f(1)=-1<0, f(1.5)=0.875>0$$

所以方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间[1,1.5]内有唯一实根，计得

$$k \geq \frac{\left[\ln(b-a)-\ln\varepsilon\right]}{\ln 2}-1=\frac{\ln 0.5-\ln 0.005}{\ln 2}-1=5.64$$

取 $k=6$，即只要二分7次，便能到达所要求的精度。

$$f(1)=-1<0, f(1.5)=0.875>0$$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x)$的符号
0	1.000	1.5000	1.2500	-
1	1.2500	1.500	1.3750	+
2	1.2500	1.3750	1.3125	-
3	1.3125	1.3750	1.3438	+
4	1.3125	1.3438	1.3282	+
5	1.3125	1.3282	1.3204	-
6	1.3204	1.3282	1.3243	-

$$f(1.3243)=-0.0018; \boxed{x^*=1.3247}$$

二分法的特点

1. 计算简单，方法可靠；
2. 对$f(x)$ 要求不高(只要连续即可)；
3. 收敛性总能得到保证。

1. 无法求复根及偶重根
2. 收敛慢

一般常用来为其它方法求近似根时提供初值。

2.3 简单迭代法

简单迭代法是方程求根最常用的方法，也是其他各类迭代法的基础。

2.3.1 迭代原理

迭代法的基本思想：

迭代法是一种逐次逼近的方法，首先给定一个粗糙的初始值，然后用同一个迭代公式，反复校正这个初值，直到满足预先给定的精度要求为止。

迭代法的关键在于如何构造一个合适的迭代公式。

简单迭代法:

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)=0$ **的根** $\Longleftrightarrow$ $y=x$与$y=\varphi(x)$ **的交点**

$f(x)=0$ 的根 x^*必满足$x^*=\varphi(x^*)$，即函数$\varphi(x)$作用在x^*上，其值不发生变化。

称x^*为函数$\varphi(x)$的不动点。

求不动点方程可采用如下方法:

1）从一个初值 x_0 出发，

计算序列:$\{x_k\}$

$x_1 = \varphi(x_0)$,

$x_2 = \varphi(x_1)$, → 迭代过程

$\cdots$,

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$,

$\cdots$

$\varphi(x)$：迭代函数

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$：迭代公式

（2）如果由迭代法产生的序列$\{x_k\}$有极限存在，即存在 x^*，使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$称**迭代公式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛**。

若 $\varphi(x)$连续,且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ 则有$x^* = \varphi(x^*)$，即x^*为方程 $f(x) = 0$的根。

对迭代过程两边取极限，则有

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k\to\infty} x_k) = \varphi(x^*)$$

如果由迭代法产生的序列x_k没有极限存在，称**迭代公式发散**

在由方程$f(x) = 0$转化为等价的方程$x = \varphi(x)$时，**选择不同的迭代函数$\varphi(x)$，就会产生不同的序列$\{x_k\}$** （即使初始值x_0选择一样），这些序列的收敛情况也不会相同。

例 用简单迭代法求区间[2,3]内方程 $x^3-2x-5=0$ 的根

解一 将方程两边同加$2x+5$，再开三次方，得

$$x=\sqrt[3]{2x+5}$$

作迭代序列 $$x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5},\quad k=0,1,\cdots$$

取$x_0=2.5$，迭代得

$x_1=2.154434690$，$x_2=2.103612029$，$x_3=2.095927410$，
$x_4=2.094760545$，$x_5=2.094583250$，$x_6=2.094556309$，
$x_7=2.094552215$，$x_8=2.094551593$，$x_9=2.094551498$，
$x_{10}=2.094551484$，$x_{11}=2.094551482=x_{12}$，

由于$x_{11}=x_{12}$，再迭代无变化，取根α≈ x_{11}

解二 将方程x^3-2x-5=0两边同加$2x^3+5$，**再同除**$3x^2-2$，**得**

$$x=(2x^3+5)/(3x^2-2)$$

作迭代序列 $$x_{k+1}=(2x_k^3+5)/(3x_k^2-2)$$

取$x_0=2.5$，**迭代得**

$x_1=2.164179104$，$x_2=2.097135356$， $x_3=2.094555232$，
$x_4=2.094551481=x_5$

取根α≈ x_4

解三 将方程$x^3-2x-5=0$两边同加$2x$，再同除2，得

$$x=(x^3-5)/2$$

作迭代序列 $$x_{k+1}=(x_k^3-5)/2$$

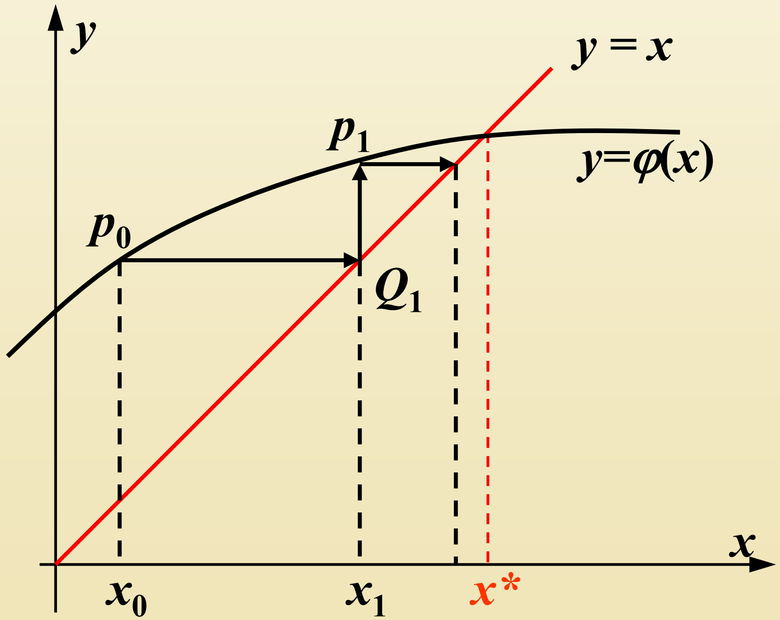
取$x_0=2.5$，迭代得

$x_1=5.312500000$，$x_2=72.46643066$， $x_3=190272.0118$，
$x_4=3.444250536\times10^{15}$，$x_5=2.042933398\times10^{46}$， **不收敛**

由计算看出，选取的三个迭代函数，分别构造的序列$\{x_k\}$收敛情况不一样（初值都取为2.5），在解一、解二情况下$\{x_k\}$收敛且解二比解一收敛快，在解三情况下，$\{x_k\}$不收敛。可见，迭代序列是否收敛和收敛的快慢，同迭代函数$\varphi(x)$有关。

迭代法的几何意义:

从几何上解释，求方程$x=\varphi(x)$根的问题，是求曲线$y=\varphi(x)$与直线$y=x$交点P*的横坐标x^*。



迭代序列

$x_1=\varphi(x_0),$

$x_2=\varphi(x_1),$

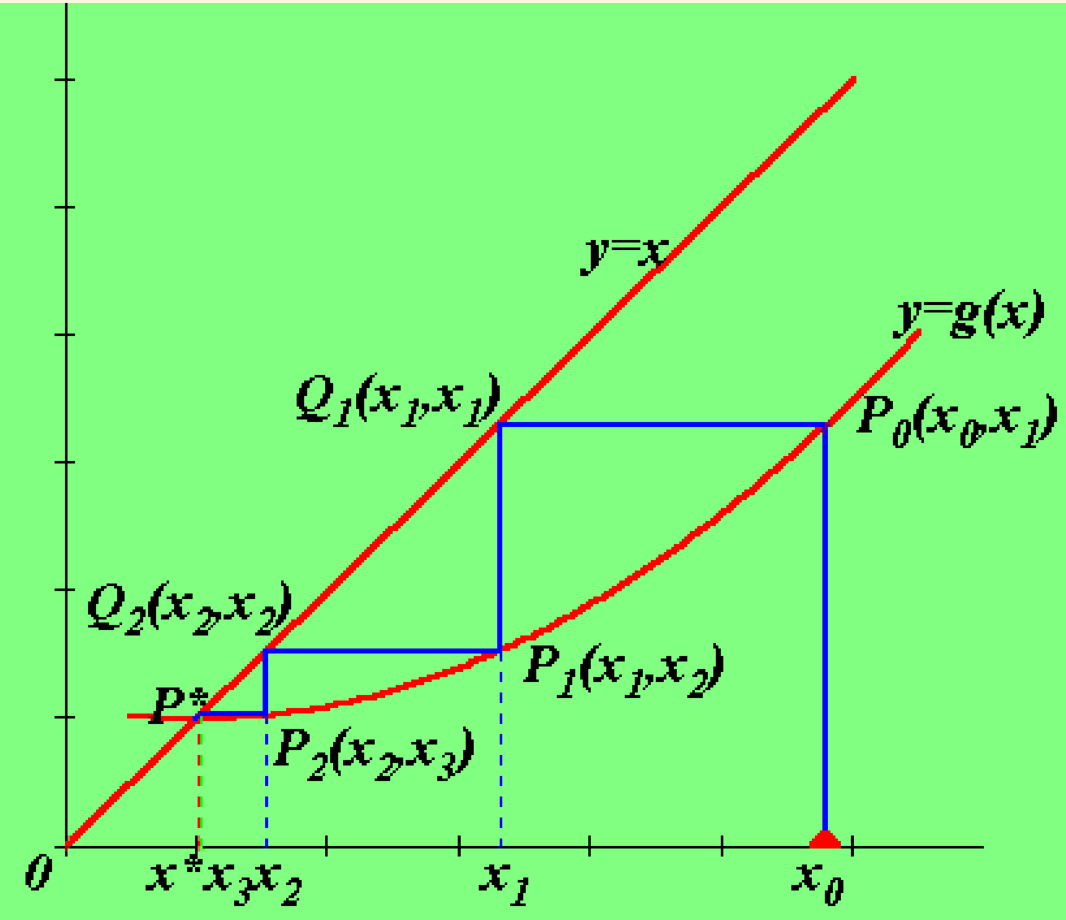
$\cdots,$

$x_{k+1}=\varphi(x_k),$

$\cdots$

由x_0求x_1,相当与从曲线$y=\varphi(x)$上一点$P_0(x_0,\varphi(x_0))$出发，沿着平行于x轴方向前进交$y=x$于一点Q_1，再从Q_1点沿平行于y轴方向前进交$y=\varphi(x)$于P_1点，显然，P_1的横坐标就是$x_1=\varphi(x_0)$。继续这过程就得到序列$\{x_k\}$。

迭代函数$\varphi(x)$的导数 $\varphi'(x)$在根x^*处满足几种条件时，从几何上来考查迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$的收敛情况

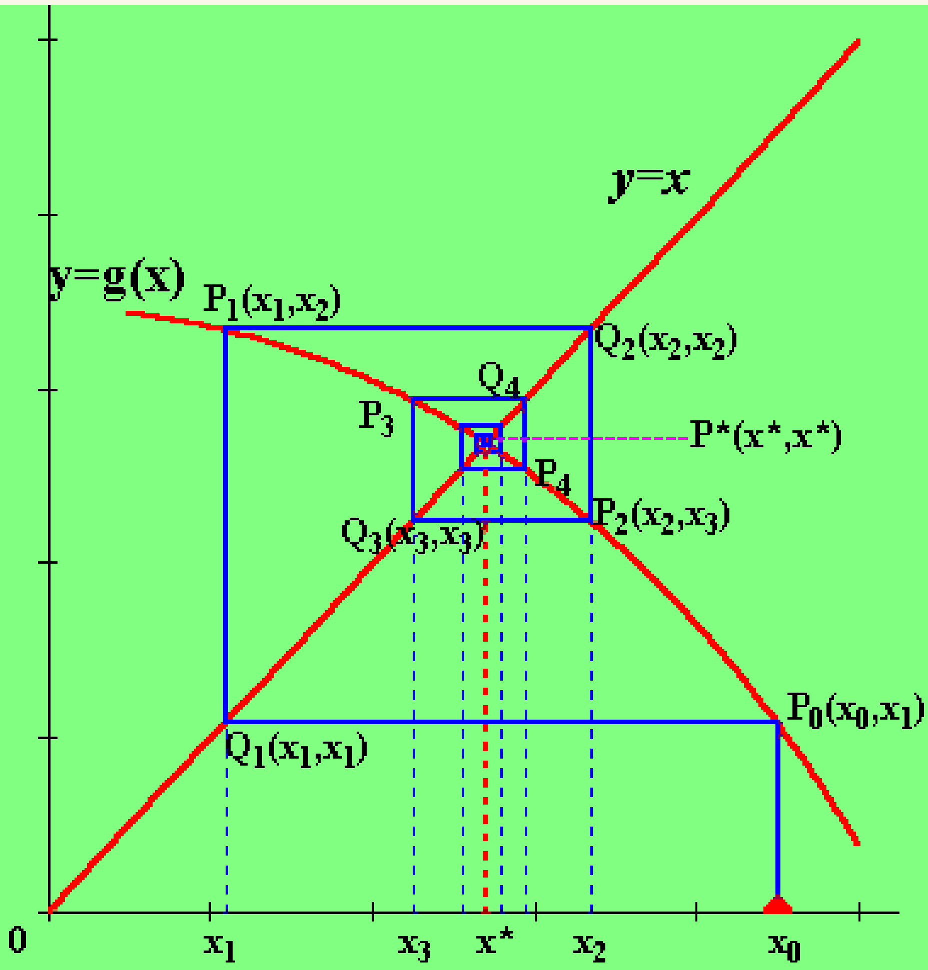


当$0<g'(x)<1$时
迭代公式

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

$k=0,1,2,......$

收敛



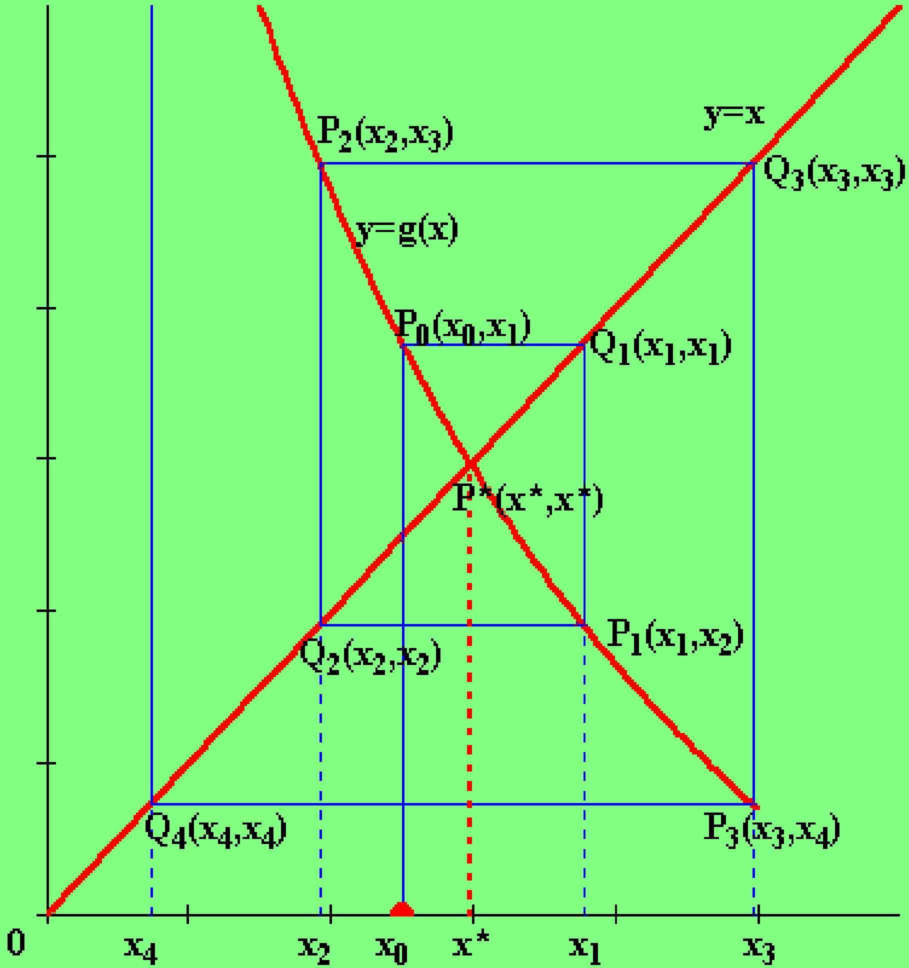
当$-1<g'(x)<0$时
迭代公式

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

$k=0,1,2,......$

收敛

wzz



当$g'(x)<-1$的情形

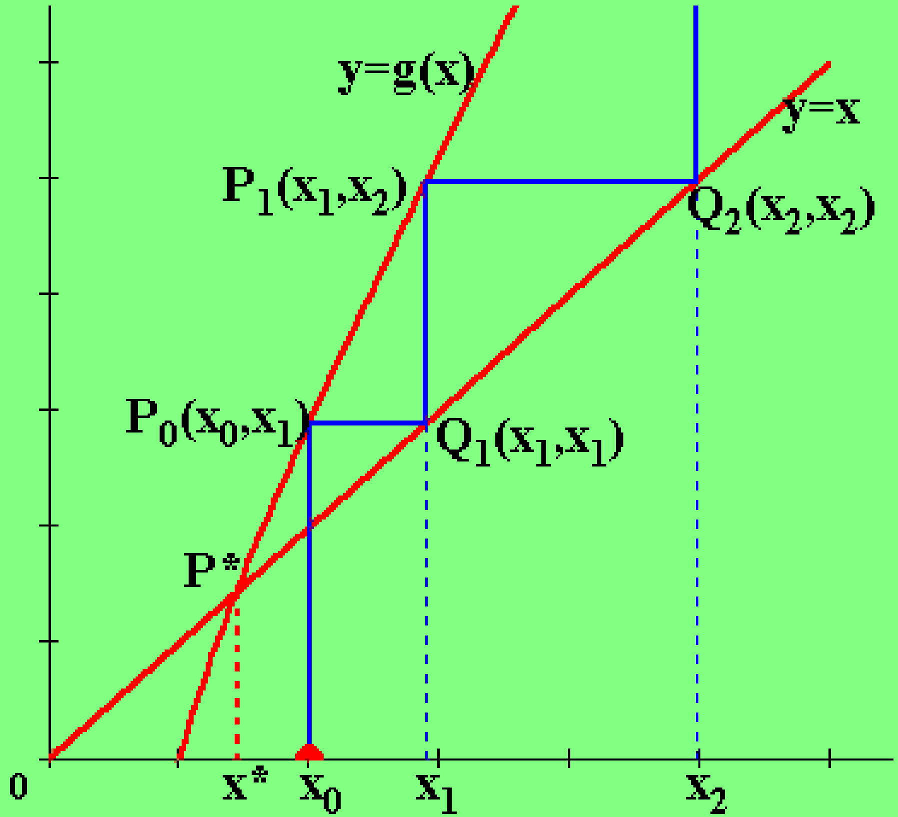
迭代公式

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

$k=0,1,2,\ldots\ldots$

发散

wzz



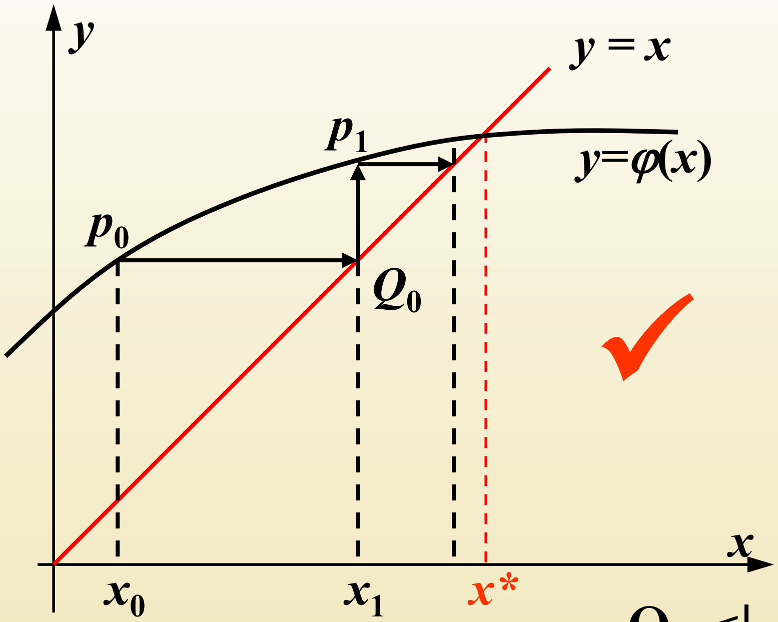
当$g'(x)>1$时
迭代公式

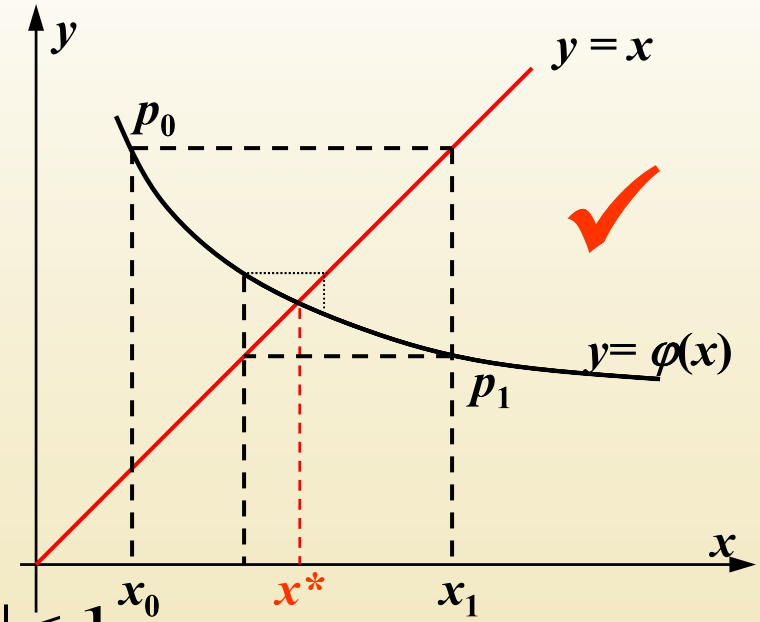
$$x_{k+1}=g(x_k)$$

$k=0,1,2,\ldots\ldots$

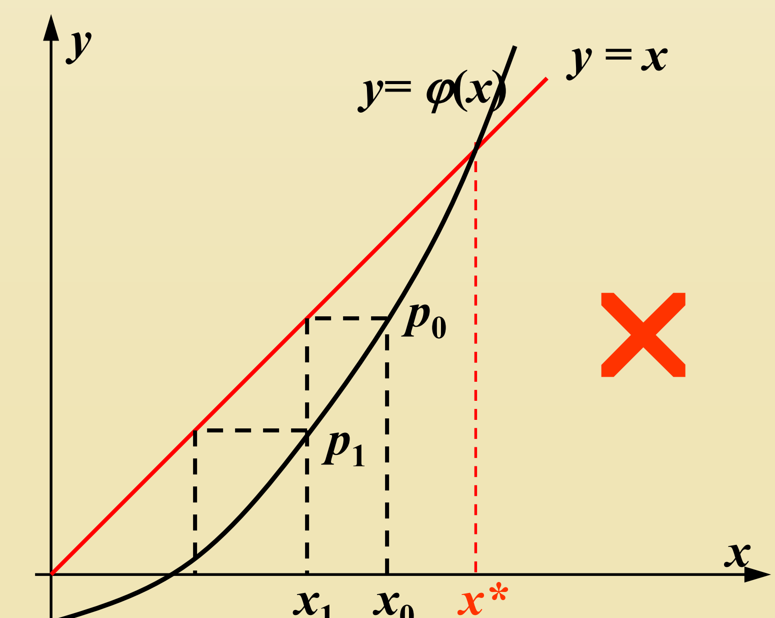
发散

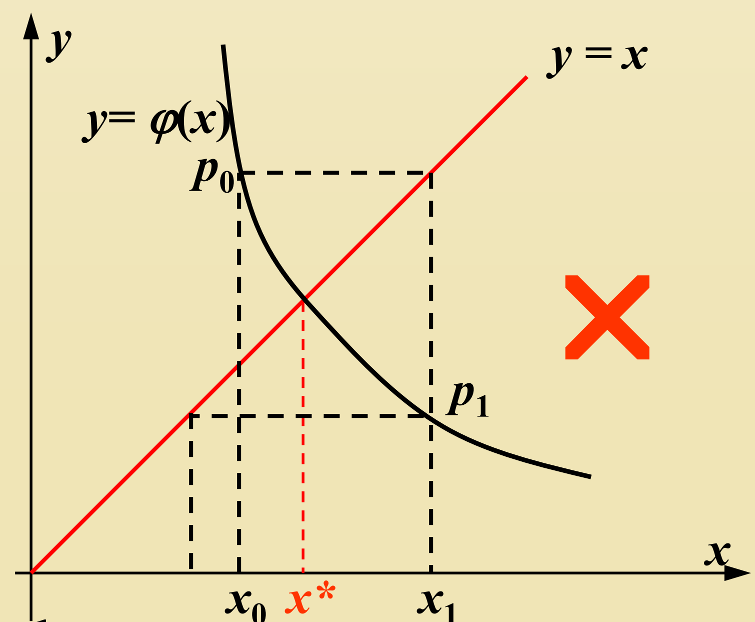
wzz





$$0 <|\varphi'(x)|< 1$$





$$|\varphi'(x)|> 1$$

2.3.2 迭代公式的收敛性与误差估计

对于用迭代法求方程$f(x)=0$近似根需要研究下述问题：

（1）如何选取迭代函数$\varphi(x)$使迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛。

（2）若$\{x_k\}$收敛较慢时，怎样加速 $\{x_k\}$收敛。

迭代法收敛定理2.1 考虑方程 $x=\varphi(x)$, $\varphi(x)\in[a, b]$，若

(I) 当 $x\in[a, b]$ 时， $\varphi(x)\in[a, b]$；

(II)存在 $0\le L<1$ 使得 $|\varphi'(x)|\le L<1$ 对 任意 $x\in[a, b]$ 成立。

则（1） $x=\varphi(x)$在$[a, b]$上有唯一解x^*；

（2）任取 $x_0\in[a, b]$，由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 得到的序列$\{x_k\}$收敛于x^*，并且有误差估计式：

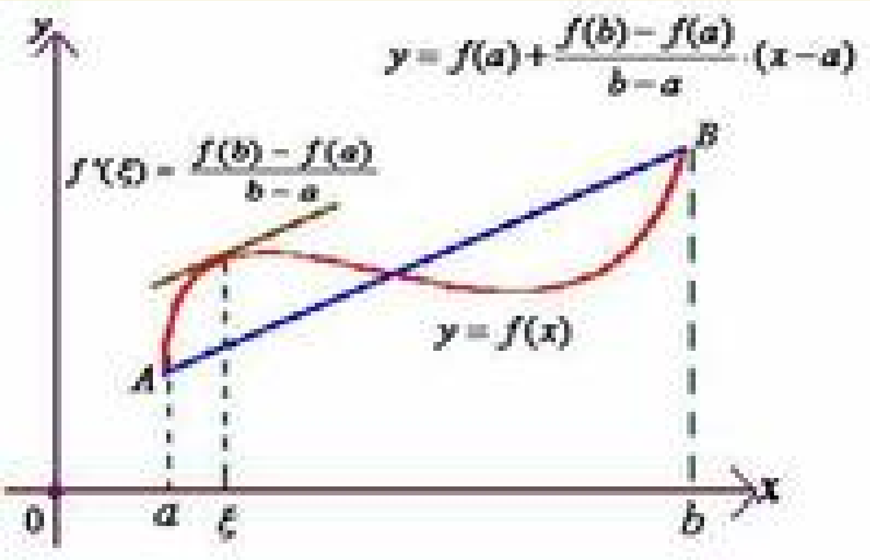
① $$|x^*-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$

② $$|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

($k=1, 2, \ldots$)

拉格朗日中值定理

如果函数f(x)在（a，b）上可导，[a,b]上连续，则必有一ξ∈[a,b]，使得 f'(ξ)*(b-a)=f(b)-f(a)



若连续曲线y=f(x)在A(a,f(a)),B(b,f(b))两点间的每一点处都有不垂直于x轴的切线,则曲线在A,B间至少存在1点P(c,f(c)),使得该曲线在P点的切线与割线AB平行.

证：

①先证$x=\varphi(x)$在$[a, b]$有解x^*

构造：$g(x)=x-\varphi(x)$，因$\varphi'(x)$存在，故$\varphi(x)$连续，则$g(x)$连续。

由条件（I）知$g(a)=a-\varphi(a)\le 0$，$g(b)=b-\varphi(b)\ge 0$，故存在

$x^*\in[a, b]$，使$g(x^*)=0$，即$x^*=\varphi(x^*)$，证明了方程$x=\varphi(x)$有根。

② 解唯一?

假定还有根$x^{**}\ne x^*$，则由拉格朗日中值定理及条件（II）得

$$0<|x^{**}-x^*|=\left|\varphi(x^{**})-\varphi(x^*)\right|=\left|\varphi'(\xi)(x^{**}-x^*)\right|$$

$$\le L\left|x^{**}-x^*\right|<\left|x^{**}-x^*\right|$$

即正数$|x^{**}-x^*|$小于其自身。这是不可能的。证明了方程$x=\varphi(x)$在$[a, b]$内只有一根。

③证明序列$\{x_k\}$ 收敛于x^* ✓

由定理假设条件（I），当取$x_0 \in [a, b]$时，则有$\boldsymbol{x_k} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$，（$k$=1，2，...）。记误差$e_k = x^* - x_k$，由拉格朗日中值定理

$$x^* - x_{k+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_k) = \varphi'(c)(x^* - x_k)$$

其中c在x^*与x_k之间，即$c \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$。又利用$|\,\boldsymbol{\varphi'(x)}\,| \le \boldsymbol{L} < \mathbf{1}$得到误差的递推关系

$$\left|x^* - x_{k+1}\right| = \left|\varphi'(c)\right|\left|x^* - x_k\right| \le L\left|x^* - x_k\right| \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

反复利用上式，得到

$$\left|x^* - x_k\right| \le L\left|x^* - x_{k-1}\right| \le L^2\left|x^* - x_{k-2}\right| \le \cdots \le L^k\left|x^* - x_0\right| \to 0 \quad (当\ k \to \infty)$$

即

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$

利用误差估计式，在给定精度ε>0后，要使$|x^*-x_k|<\varepsilon$，只要计算到：

① $|x^*-x_k|\le \dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$

或 ② $|x^*-x_k|\le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$

利用②式可以得到迭代次数k的值，但这样得到的k值往往偏大；而①式利用刚算出来的数值来估计误差，可用较少的迭代运算得到满足精度要求的近似解。

特别

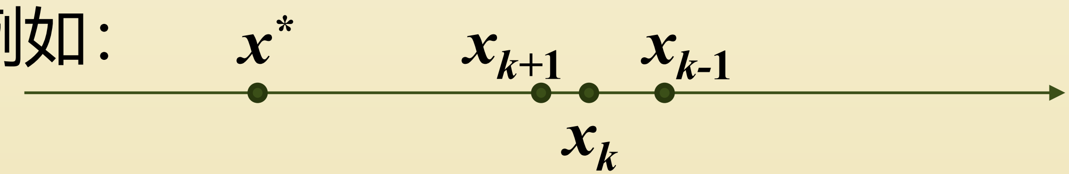
$$L\le\frac{1}{2}\Rightarrow|x^*-x_k|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|\le|x_k-x_{k-1}|$$

可用 $|x_k-x_{k-1}|$ 来控制收敛精度

利用 $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ **控制迭代终止，简单易处理**

一般不管$L\leq1/2$是否成立，都用$|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$来控制迭代终止，它通常也能求出满足精度要求的根。

但是要注意，当$L\approx1$时，即使$|x_k-x_{k-1}|$很小，但误差$|x^*-x_k|$还可能较大，例如：



定理2.1给出了迭代数列$\{x_k\}$在区间$[a，b]$上的收敛性，通常称为**全局收敛性**。
有时不易检验定理2.1的条件，实际应用时通常只在不动点x^*的邻近考察其收敛性，即**局部收敛性**。

➢迭代法的局部收敛性：

定义：对于方程 $x=\varphi(x)$，若在不动点x^*的某个邻域

$$U=\{x \mid |x-x^*|\le\delta\}$$

内，对任意初值 $x_0\in U$ ，迭代格式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)\qquad k=0,1,2,\cdots$$

产生的数列$\{x_k\}$都收敛于x^*，则称该迭代格式在不动点 x^*的附近是局部收敛的。

定理2.2 设方程$x=\varphi(x)$有根 x^* ，且在 x^*的某个邻域

$U=\{x \mid |x-x^*|\le\delta\}$ 内 $\varphi(x)$存在一阶连续导数，则

（1）当$|\varphi'(x^*)|<1$时，迭代格式局部收敛；

（2）当$|\varphi'(x^*)|>1$时，迭代格式发散。

对于前例中三种解法的迭代函数，因$x^* \approx 2.094551482$,可知

$$\varphi_1(x)=\sqrt[3]{2x+5},\qquad \varphi_1'(x^*)=\tfrac{2}{3}(2x^*+5)^{-\frac{2}{3}}\approx 0.151959082$$

$$\varphi_2(x)=\frac{2x^3+5}{3x^2-2},\qquad \varphi_2'(x^*)=\frac{6x^*(x^{*3}-2x^*-5)}{(3x^{*2}-2)^2}=0$$

$$\varphi_3(x)=\tfrac{1}{2}(x^3-5),\qquad \varphi_3'(x^*)=\tfrac{3}{2}x^{*2}\approx 6.580718866$$

根据局部收敛定理，前两种迭代收敛，第三种迭代发散

由于实际应用中，x^*事先不知道，故条件$|\varphi'(x^*)|<1$无法验证。

若已知根的初始值x_0在x^*的邻近，又根据$\varphi'(x)$的连续性，则可采用条件

$$|\varphi'(x_0)|<1$$

来代替$|\varphi'(x^*)|<1$

2.3.3 迭代法的计算步骤

迭代法的突出优点：

算法的逻辑结构简单；

计算时，中间结果若有扰动，不会影响计算结果

步一：准备　确定方程$f(x)=0$的等价形式$x=\varphi(x)$；

提供迭代初值x_0；

步二：迭代　计算迭代值$x_1=\varphi(x_0)$;

步三：判别　检查$|x_1-x_0|$：若$|x_1-x_0|>\varepsilon$(ε为预先指定的精度),则以x_1替换x_0转步二继续迭代;当$|x_1-x_0|\le\varepsilon$时终止计算,取x_1作为所求的结果。

例2.4 用两种收敛的迭代法求方程x^2-3=0的根 $x^*=\sqrt{3}$

解：等价方程：

$$1)\ \ x=\varphi_1(x)=x-\tfrac{1}{4}(x^2-3),$$

$$2)\ \ x=\varphi_2(x)=\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{3}{x})$$

且

$$1)\ \ \varphi_1'(x)=1-\tfrac{1}{2}x,$$

$$2)\ \ \varphi_2'(x)=\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{3}{x^2})$$

$$1)\ \ \varphi_1'(x^*)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.134<1,$$

$$2)\ \ \varphi_2'(x^*)=\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{3}{x^2})=0$$

迭代公式：

1) $x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = x_k - \frac{1}{4}(x_k^2 - 3)$,

2) $x_{k+1} = \varphi_2(x_k) = \frac{1}{2}(x_k + \frac{3}{x_k})$

均局部收敛

取初值x_0=2

k	$x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$	$x_{k+1} = \varphi_2(x_k)$
0	2.000000	2.000000
1	1.750000	1.750000
2	1.734750	1.732143
3	1.732361	1.732051
…	…	…

$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$

虽然两种迭代法都收敛，但第二种迭代法比第一种迭代法收敛得快，这是由于

$$\varphi_2'(x^*) = 0$$

2.3.4 收敛速度与迭代公式的加速/* Order of Convergence */

（1）**收敛速度**　一种迭代法具有使用价值，不但需要肯定它是收敛的，还要求它收敛得比较快，所谓迭代过程的收敛速度，是指在接近收敛时迭代误差的下降速度。具体地说：

定义 设有方程$x=\varphi(x)$及迭代过程

$$\begin{cases} x_0 & \text{初值} \\ x_{k+1}=\varphi(x_k) & (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

且设$\{x_k\}$收敛于x^*。对迭代误差$e_k=x^*-x_k$，

如果有误差关系

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^p}=c\neq 0$$

其中P为实数且$P\geq 1$，c为正常数，称迭代过程为***P*阶收敛**，

当$P=1$时　称迭代过程为线性收敛，

当$P>1$时　称迭代过程为超**线性收敛**，

当$P=2$时称迭代过程为**二次收敛（或为平方收敛）。**

定理2.3 对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根x^*的邻近连续，并且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{p}(x^*)\neq 0$$

则称该迭代过程在点x^*邻近是p阶收敛的。
(证明过程略)

对于前例中前两种解法的迭代函数， $x^*\approx 2.094551482$**，**

$$\varphi_1(x)=\sqrt[3]{2x+5},\qquad \varphi_1'(x^*)=\tfrac{2}{3}(2x^*+5)^{-\frac{2}{3}}\approx 0.151959082\neq 0$$

$$\varphi_2(x)=\frac{2x^3+5}{3x^2-2},\qquad \varphi_2'(x^*)=\frac{6x^*(x^{*3}-2x^*-5)}{(3x^{*2}-2)^2}=0$$

线性收敛

超线性收敛

平方收敛

$$\varphi_2''(x^*)=\frac{24(x^{*3}+15x^{*2}+2x^*)}{(3x^{*2}-2)^3}=1.366771471\neq 0$$

对于例2.4中

1) $x=\varphi_1(x)=x-\frac{1}{4}(x^2-3),$ 1) $\varphi_1'(x)=1-\frac{1}{2}x,$

2) $x=\varphi_2(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{3}{x})$ 2) $\varphi_2'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{3}{x^2})$

$\varphi_1'(x^*)\neq 0$ $\Longrightarrow$ **线性收敛**

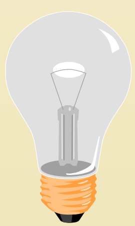
$\varphi_2'(x^*)=0,\quad \varphi_2''(x)=\frac{6}{x^3},\varphi_2''(x^*)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Longrightarrow$ **2阶收敛**

一般收敛阶数*P*越大，迭代序列收敛越快。

迭代法 总结

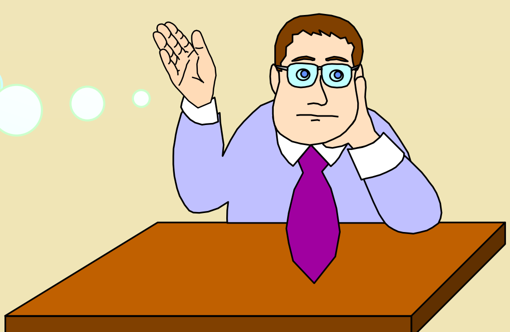
$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的根 $\longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点



思路 从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k)$ 可知 $x^* = \varphi(x^*)$，即x^* 是 φ 的不动点，也就是f 的根。

在所求区间上满足
$|\varphi'(x)|<1$, 就这
么简单！



2.4 牛顿迭代法 /* Newton - Raphson Method */

2.4.1 公式的构造

原理：将非线性方程逐步化为线性方程来求解。

设有非线性方程 $f(x)=0$

其中，设$f(x)$为$[a,b]$上**一阶连续可微**，且$f(a)*f(b)<0$；

又设x_0是$f(x)$一个零点$x^*\in(a,b)$的近似值（设$f'(x)\neq 0$），

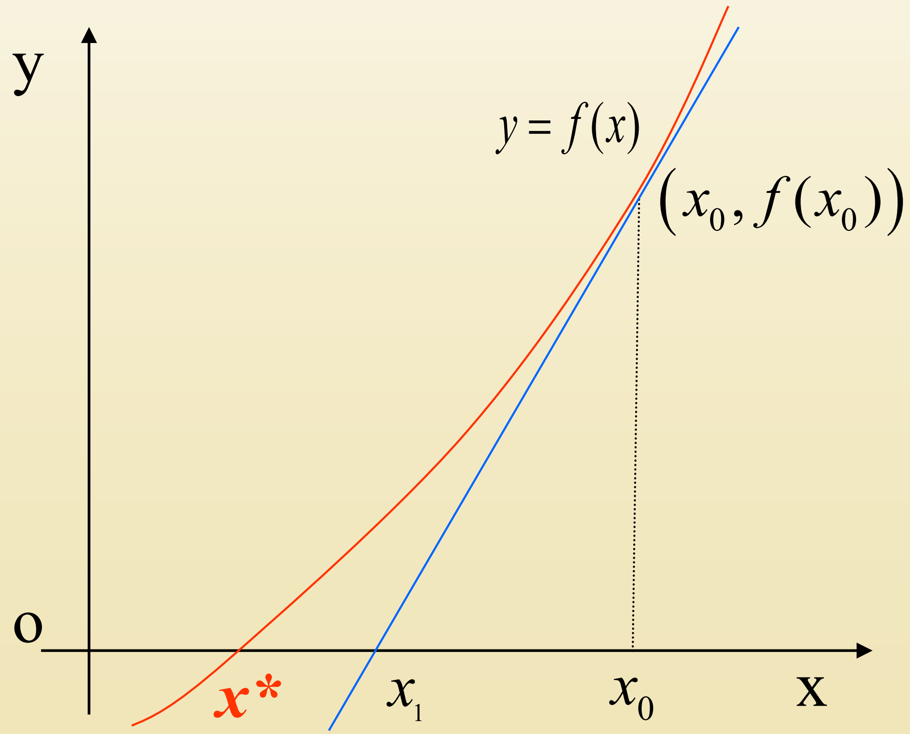
现考虑**用过曲线$y=f(x)$上点$P(x_0, f(x_0))$的切线**

近似代替函数$f(x)$，即用线性函数

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

代替$f(x)$。

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



用切线（即线性函数）的零点，记为x_1，作为方程$f(x) = 0$根x^*的近似值。

由 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

得到 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

一般，若已求得x_k，将上式中x_0换为x_k，重复上述过程，即得求方程$f(x)=0$的牛顿方法的计算公式

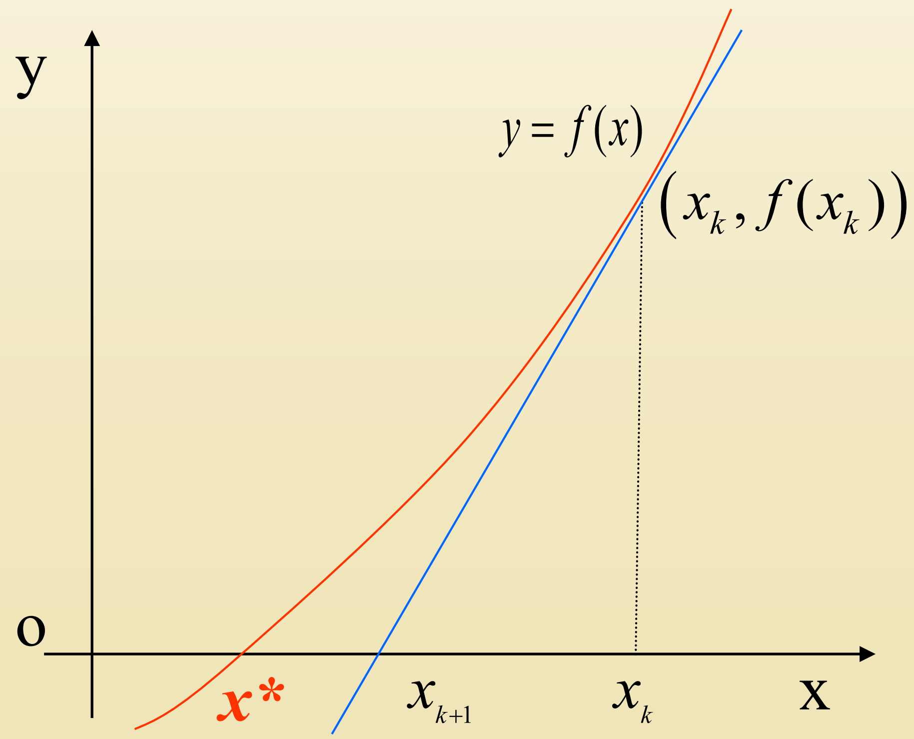
$$\begin{cases} x_0 & (\text{初值}) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} & (k = 0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

牛顿法的几何解释

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

迭代公式就是切线与x轴交点的横坐标，所以牛顿法是用切线与x轴的交点来近似代替曲线与x轴交点的横坐标。

切线法



2.4.2 牛顿法的收敛性

定理2.4 （收敛的充分条件）设 $f(x)$在区间$[a, b]$上满足下列条件:

(1) $f(a)\,f(b) < 0$;

有根

(2) $f'(x) \neq 0$;

根唯一

(3) $f''(x)$存在且不变号,

产生的序列单调有界，保证收敛。

选取 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$;

则Newton's Method产生的序列$\{ x_k \}$ 收敛到$f(x)=0$ 在 $[a, b]$ 的唯一根。

牛顿法的局部收敛性

设有方程 $f(x)=0$，显然，牛顿法是一种迭代法，即

$$x_{k+1}=g(x_k)$$

其中迭代函数为

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

，（设 $f'(x_k)\neq 0$）

于是，可用迭代法理论来考查牛顿方法的收敛性。

定理2.2 设方程 $x=\varphi(x)$ 有根 x^*，且在 x^* 的某个邻域 $U=\{x \mid |x-x^*|\le\delta\}$ 内 $\varphi(x)$ 存在一阶连续导数，则

（1）当 $|\varphi'(x^*)|<1$ 时，迭代格式局部收敛；

（2）当 $|\varphi'(x^*)|>1$ 时，迭代格式发散。

牛顿法的局部收敛定理

设有方程 $f(x)=0$

（1）设$f(x)$在根x^*邻近具有连续二阶导数；

（2）且设$f(x^*)=0$，但$f'(x^*)\neq 0$；

则存在x^*的一个邻域$S=\{x|\ |x^*-x|\leq\delta\}$

使得对于任意选取初值$x_0\in S$，由牛顿法产生的序列$\{x_k\}$收敛于x^*

证明 由于牛顿法是一个迭代法，其迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

计算

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

由假设条件(2)，则有

$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2}=0$$

于是由迭代法局部收敛定理，迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$（即牛顿法）为局部收敛

证毕

若$f^{(3)}(x)$在x_0的邻域内存在, 对

$$\varphi'(x)=1-\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

再求一次导数，得

$$\varphi''(x)=\frac{f'^2(x)f''(x)+f(x)f'(x)f^{(3)}(x)-2[f''(x)]^2f(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$f(x^*)=0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

$$\varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

只要 $f''(x^*) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\varphi''(x^*) \neq 0$

$\Longrightarrow$ **牛顿迭代公式是平方收敛的，**

若 $f''(x^*) = 0$ **收敛速度还会更快。**

定理2.3 对于迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在所求根x^*的邻近连续，并且

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^{p}(x^*) \neq 0$$

则称该迭代过程在点x^*邻近是p阶收敛的。

牛顿法的局部收敛定理

设有方程 $f(x)=0$

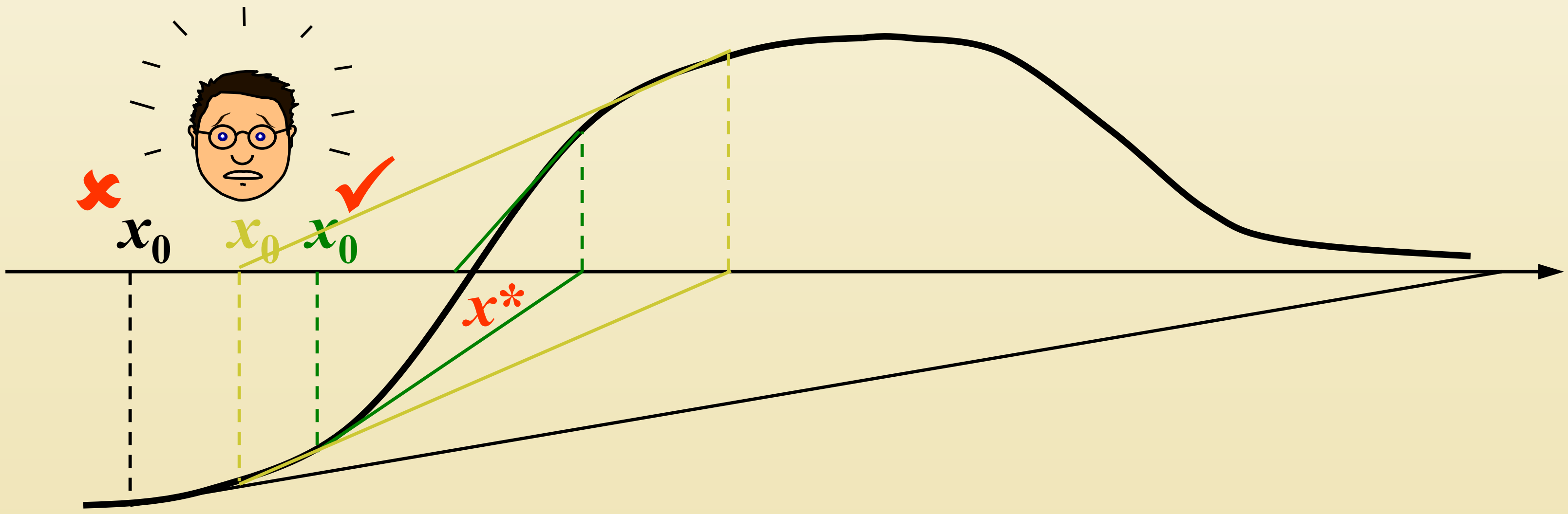
（1）设$f(x)$在根x^*邻近具有连续二阶导数；

（2）且设$f(x^*)=0$，但$f'(x^*)\neq 0$；

则存在x^*的一个邻域$S=\{x|\ |x^*-x|\leq\delta\}$

使得对于任意选取初值$x_0\in S$，由牛顿法产生的序列$\{x_k\}$收敛于x^*

注：Newton’s Method 收敛性依赖于x_0 的选取。



由于牛顿迭代法是局部收敛的，故初值x_0应充分靠近根x^*才能保证收敛，这在一般情况下不容易实现。

实用中可先用二分法做求根预处理，
二分若干次后得到较靠近根x^*的近似根x_0，
再用此根作为牛顿迭代法的初值来求根，
达到取长补短的作用。

2.4.3 牛顿迭代法的计算步骤：

步一：准备 选定初始近似值x_0，计算 $f_0 = f(x_0)$ 和 $f'_0 = f'(x_0)$

步二：迭代 按公式 $x_1 = x_0 - \frac{f_0}{f'_0}$ 迭代一次，得新的近似值 x_1

步三：控制 如果 x_1 满足 $\left|x_1 - x_0\right|$ 则终止迭代，以 x_1 作为所求的根；否则转步4。

步四：修改 如果迭代次数达到预先指定的次数 N，或者 $f'_1 = 0$ 则方法失败；否则以 (x_1, f_1, f'_1) 代替 (x_0, f_0, f'_0) 转步二继续迭代。

牛顿法优缺点

缺点：函数$f(x)$必须是光滑的，要容易计算导数;初始猜想要靠近零点。

优点：收敛速度快，二次收敛。

例：用牛顿法解方程x^3-2x-5=0，取x_0=2.5，求[2，3]之间的根

第一步：形成迭代函数

$$f'(x)=3x^2-2$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-2x_k-5}{3x_k^2-2}=\frac{2x_k^3+5}{3x_k^2-2}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

第二步：确定初值

$$f(x_0)=2.5^3-2\times 2.5-5=5.6250\qquad f''(x_0)=6x_0>0$$

第三步：迭代计算

$$x_1=\frac{2x_0^3+5}{3x_0^2-2}=2.164179104$$

$x_1=2.164179104$，$x_2=2.097135356$，$x_3=2.094555232$，

$x_4=2.094551482=x_5$

例 2.5 设C >0，试建立计算C的开平方正实根的牛顿迭代公式，并分析其收敛性。

解 作函数$f(x)=x^2-C$，$(x>0)$，**则方程**$f(x)=0$**的正根就是** $\sqrt{C}$

可得牛顿迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - C}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{C}{x_k})$$

因为$x > 0$**时，**

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 2x > 0 \\ f''(x) &= 2 > 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{定理2.4}]{}$$

取任意初值 $x_0 > \sqrt{C}$

迭代公式收敛

例 2.6 求方程 $f(x)=x^3-2x^2-4x-7=0$

在区间[3，4]中的根的近似值，要求误差不超过0.005

解 因为

$$\left.\begin{aligned}&f(3)=-10<0, f(4)=9>0\\&f'(x)=3x^2-4x-4, f''(x)=6x-4,\\&f'(x)>0, f''(x)>0, x\in[3,4]\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

取初值x_0=4时，牛顿迭代公式收敛。牛顿迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-2x_k^2-4x_k-7}{3x_k^2-4x_k-4}=\frac{2x_k^3-2x_k^2+7}{3x_k^2-4x_k-4}$$

计算结果为： $x_1=3.680, x_2=3.633, x_3=3.631$

$$\because |x_3-x_2|=0.002<0.005 \qquad \therefore x^*\approx 3.631$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

2.5 弦截法

2.5.1 弦截公式及其收敛性

牛顿法的突出优点是收敛速度快，但它有个明显的缺点，就是每次迭代都要计算导数：$f'(x_k)$

如果函数 $f(x)$ 比较复杂，求导可能有困难，这时可将牛顿公式中 $f'(x)$ 近似用插商来代替，即

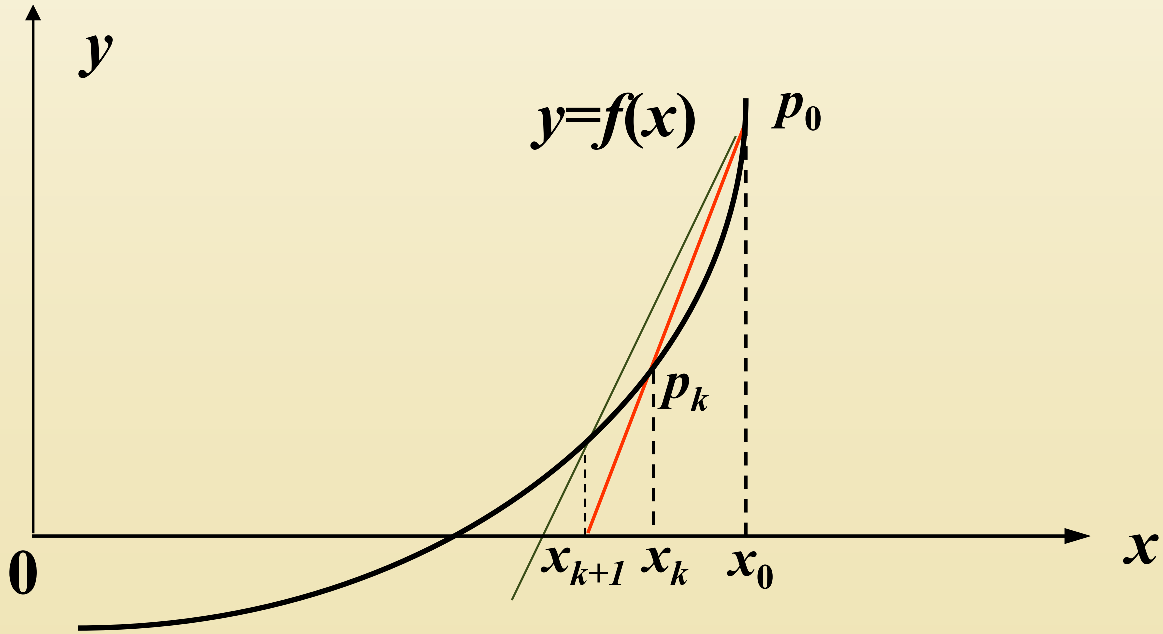
$$\boxed{f'(x)\approx\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}}$$

于是得到弦截法计算公式：

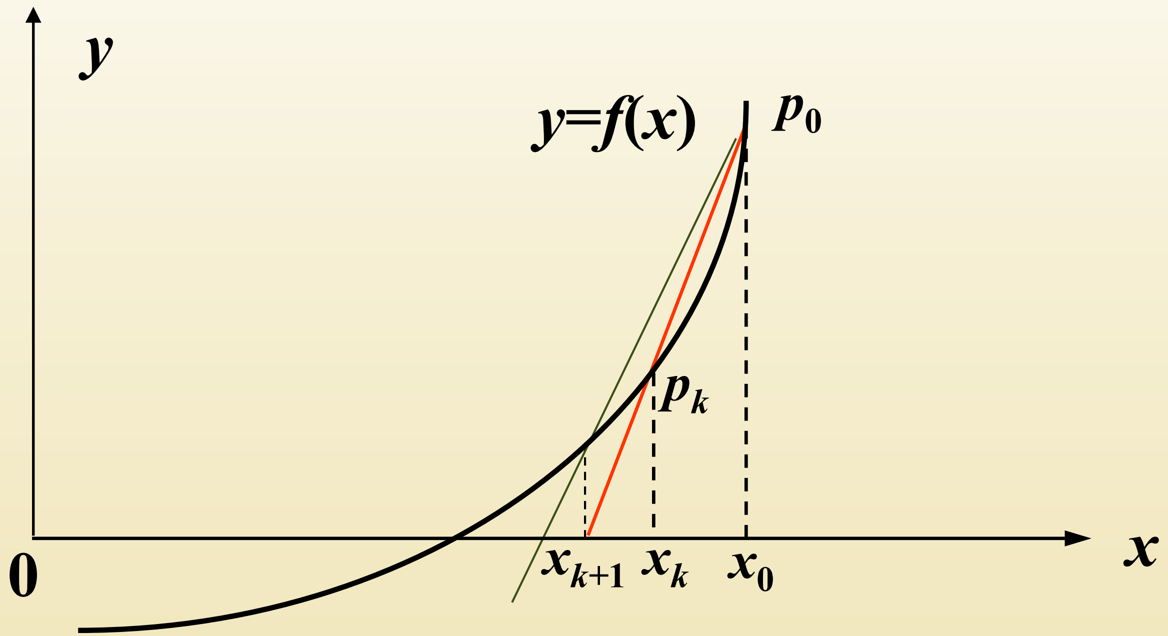
$$\begin{cases} \text{初值} x_0, x_1 \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0) \quad (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$

弦截法几何解释

设方程$f(x)=0$，且$f(a)*f(b)<0$，$f(x)$于$[a,b]$连续，取初值x_0，



曲线$y=f(x)$上横坐标为x_k的点记为P_k，则差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$ 表示弦线$\overline{P_0P_k}$的斜率。



可见，按公式 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k-x_0)$

求得的x_{k+1}实际上是弦线$\overline{P_0P_\text{k}}$与x轴的交点，

因此这种算法称作**弦截法——单点弦截法**。

与牛顿迭代法类似，当$f(x)$在根x^*的某邻域内有直到二阶的连续导数，且 $f'(x)\neq 0$ 时，

弦截公式可看作是根据方程$f(x)=0$的等价方程

$$x = x - \frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$$

建立的迭代公式，所以弦截法的迭代函数为

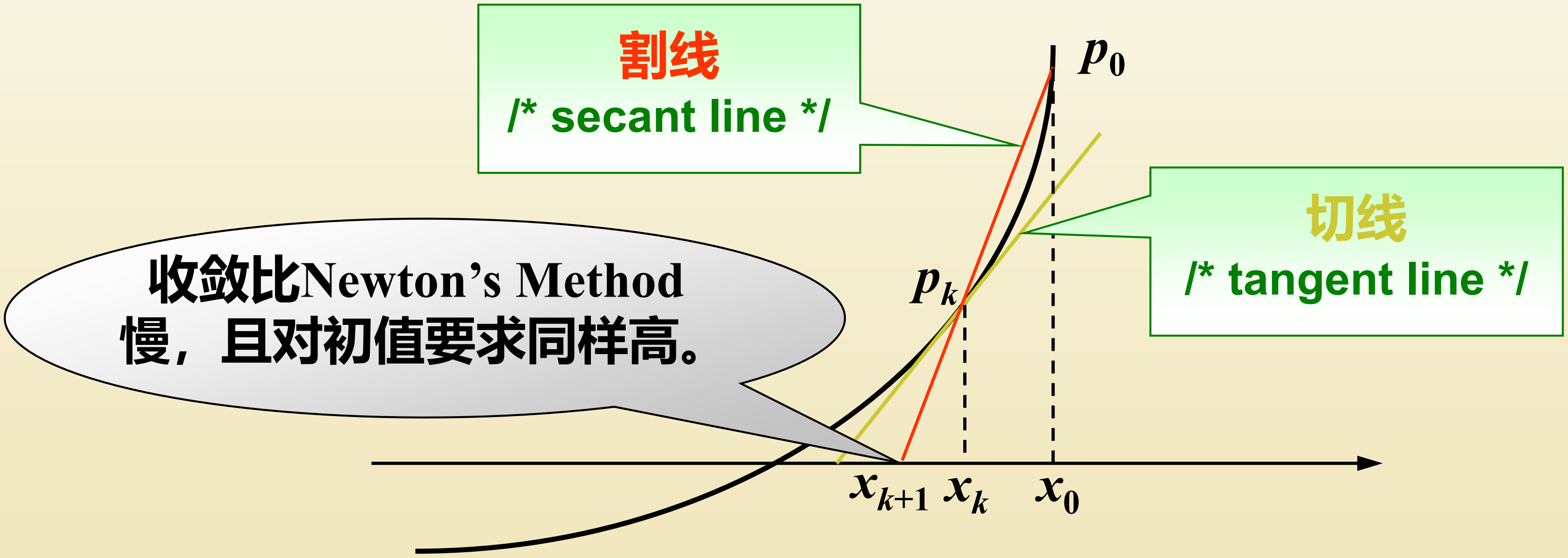
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$$

当x_0充分接近x^*时：$0<\left|\varphi'(x^*)\right|<1$

由定理2.2及定理2.3知弦截法具有局部收敛性，且具有线性收敛速度。

可见，弦截法的收敛速度比牛顿法慢，但它的优点是不需要计算导数值。



切线斜率 ≈ 割线斜率 $\Rightarrow f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$

2.5.2 快速弦截法

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

为了提高弦截法的收敛速度，改用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

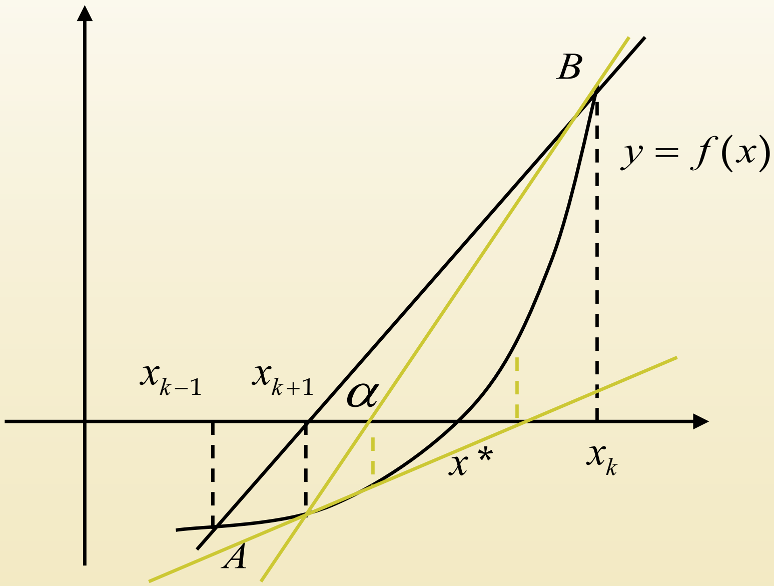
替代牛顿迭代公式中的导数 $f'(x_k)$

得到
$$\begin{cases} \text{初值} x_0, x_1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \quad (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$

需要2个初值 x_0 和 x_1。

$\Longrightarrow$ **快速（双点）弦截法**

$$\begin{cases} \text{初值} x_0, x_1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k - x_0) \quad (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
\text{初值} x_0, x_1 \\
x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1})
\end{cases}
$$

弦截法和快速弦截法计算一开始，

都需要给出2个初值 x_0 和 x_1，才能求出x_2，

但到后面计算x_{k+1} $(k>1)$时，

弦截法只需要前面的信息x_k及x_0，

而快速弦截法却需要用到前面两步信息x_k及x_{k-1}，

快速弦截法 $\longrightarrow$ 两步法

前面介绍的迭代法、弦截法 $\longrightarrow$ 单步法

2.5.3 快速弦截法的计算步骤

步一：准备 选定初始近似值x_0，x_1，并计算相应的函数值$f(x_0)$和$f(x_1)$。

步二：迭代 计算

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) \Rightarrow x_2,$$

$$x_1 \Rightarrow x_0, x_2 \Rightarrow x_1$$

步三：控制 如果 $|x_1 - x_0| < \varepsilon$（$\varepsilon$为事先给定的精度要求），则转步四；否则转步二

步四：结束 输出满足精度要求的根x_1。

例：用快速弦截法解方程x^3-2x-5=0，取x_0=3, x_1=2:

x_0=3 $f(x_0)=3^3-2*3-5=16$

x_1=2 $f(x_1)=2^3-2*2-5=-1$

$$x_2=\frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{3*(-1)-2*16}{(-1)-16}=2.058823529$$

$f(x_2)$= -0.390799919

$$\begin{cases} \text{初值} x_0, x_1 \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})=\dfrac{x_{k-1}f(x_k)-x_k f(x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})} \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2.096558637$$

$f(x_3) = 0.0224280615$

$x_4 = 2.094510554$ $\quad f(x_4) = -4.568046392e\text{-}004$

$x_5 = 2.094551435$ $\quad f(x_5) = -5.157851950e\text{-}007$

$x_6 = 2.094551482$ $\quad f(x_6) = 1.188471543e\text{-}011$

$x_7 = x_6 = 2.094551482$

弦截法解方程x^3-2x-5=0，取x_0=3, x_1=2:

$$\begin{cases} \text{初值} x_0, x_1 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_0)}(x_k - x_0) \end{cases}$$

x_{23}= 2.094551482 = x_{24}　　　　收敛较慢

牛顿法一步要计算$f(x)$和 $f\,'(x)$，相当于2个函数值，比较费时。

用弦截法，一步只计算$f(x)$，少算一个函数值。

作业：

P159

1, 3, 5, 11