线性方程组

1 下午5时0分45秒

第三章 解线性方程组的迭代法基础——向量与矩阵的范数

3.5.1 向量的范数/* vector norms */

为了研究线性方程组近似解的误差估计和迭代法的收敛性，需要对n维向量空间$\boldsymbol{R}^n$中的向量的“大小”给出某种度量。

衡量数的误差用到绝对值;

现代数学中常用“范数”来度量向量的“大小”。

定义3.1向量范数

定义3.1 设 $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|$ **为定义在*R*** ^{n}上的实函数，如果对任意 $\mathbf{x}\in R^n$ 它满足条件：

(1) $\|\mathbf{x}\|\geq 0$ ($\|\mathbf{x}\|=0$ 当且仅当**x=0**) （正定性）

(2) $\|\lambda\mathbf{x}\|=|\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$ （对任意常数 $\lambda\in R$ ） （齐次性）

(3) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ （对任意 $\mathbf{x}\in R^n$ ） （三角不等式）

则称 $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|$ 为***R*** ^{n}上的**向量范数**

（4） $\big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\big|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$

常用向量范数：

向量的1-范数：
$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

向量的2-范数：
$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

向量的∞ -范数：
$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

向量的p-范数：
$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

可以证明向量函数 $\|\mathbf{x}\|_p$ 是$\mathbf{R}^n$上的向量的范数（满足定义3.1），且前三种范数是“p”范数的特殊情况

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

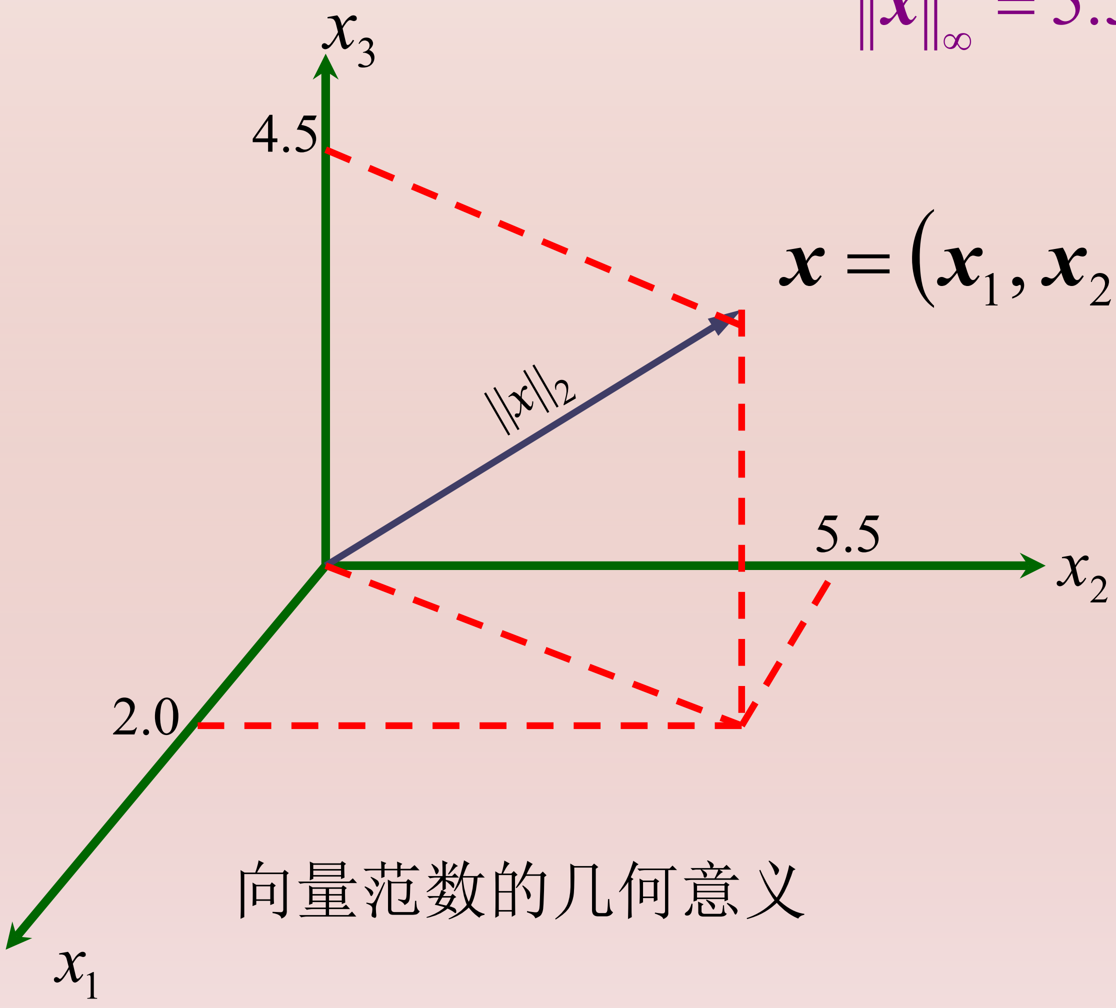
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = 7.4$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = 12$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 5.5$$



$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = (2.0, 5.5, 4.5)$$

向量范数的几何意义

例 设 $\mathbf{x}=(-1,\ 2,\ 3)^T$ 计算 $||\mathbf{x}||_1$，$||\mathbf{x}||_\infty$，$||\mathbf{x}||_2$

解

$\|\mathbf{x}\|_1=1+2+3=6$

$\|x\|_2=(1^2+2^2+3^2)^{1/2}=\sqrt{14}$

$\|x\|_\infty=\max\{1,2,3\}=3$

$$\|\mathbf{x}\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

定义3.2 向量收敛的定义

定义 向量序列 $\{x^{(k)}\}$收敛于向量 x^*是指对每一个 $1 \le i \le n$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$。 可以理解为 $\lim\limits_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x^* \| \to 0$

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^* \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - x^* \| \to 0$$

定义3.3 矩阵范数 /* matrix norms */

定义 $R^{m\times n}$空间的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $A, B \in R^{m\times n}$ 满足：

(1) $\|A\| \ge 0$； $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ （正定性 /* positive definite */)

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ 对任意$\alpha \in C$ (齐次性 /* homogeneous */)

(3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ （三角不等式 /* triangle inequality */)

(4)* $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ （相容 /* consistent */ 当 $m = n$ 时)

(5) $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ $\quad \|x\| \in R^n$

特别有： $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （行或无穷范数）

$\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ （列或1范数）

例 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ 计算$\|\mathbf{A}\|_1$、$\|\mathbf{A}\|_\infty$

解 $\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{5, 8\}=8$

$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4,9\}=9$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

3.6 线性方程组的迭代解法

在用直接法解线性方程组时要对系数矩阵不断变换

如果方程组的阶数很高,则运算量将会很大

因此对线性方程组

$$Ax = b$$

设$A \in R^{n \times n}, b \in R^n, x \in R^n$

要求找寻更经济、适用的数值解法

3.6 线性方程组的迭代解法

迭代法 是对任意给定的**初始近似解向量**，按照某种方法逐步生成**近似解序列**，使解序列的**极限**为方程组的**解**。

因此迭代法是用某种极限过程去**逐步逼近**线性方程组精确解的方法。

可以用有限步运算算出具有指定精确度的近似解。

主要方法：

1. **雅可比(Jacobi)迭代法**
2. **高斯-塞德尔（Gauss-Seidel)迭代法**
3. **逐次超松弛法**

例 1 设有方程组

$$\begin{cases} \boxed{10x_1} - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + \boxed{11x_2} - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + \boxed{10x_3} - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + \boxed{8x_4} = 15 \end{cases}$$

或简记 **Ax=b**

解 精确解 $x^* = (1, 2, -1, 1)^T$。

首先将 **Ax=b** 转化为等价方程组

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{10}(6 + x_2 - 2x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(25 + x_1 + x_3 - 3x_4) \\ x_3 = \dfrac{1}{10}(-11 - 2x_1 + x_2 + x_4) \\ x_4 = \dfrac{1}{8}(15 - 3x_2 + x_3) \end{cases}$$

或写为 **x=Bx+f**

迭代公式：初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}=(0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \end{cases}, \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

计算结果如下表：

$\mathbf{x}^{(0)}=(0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000)^T$

$\mathbf{x}^{(1)}=(0.6000, 2.2727, -1.1000, 1.8750)^T$

…

$\mathbf{x}^{(8)}=(1.0006, 1.9987, -0.9990, 0.9989)^T$

$\mathbf{x}^{(9)}=(0.9997, 2.0004, -1.0004, 1.0006)^T$

$\mathbf{x}^{(10)}=(1.0001, 1.9998, -0.9998, 0.9998)^T$

且有误差: $\|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^{(10)}\|_\infty \approx 0.0002$

从此例看出，由迭代法产生的向量序列$\{\mathbf{x}^{(k)}\}$逐次逼近方程组的精确解。但是，并不是对任何一个线性方程组，由迭代法产生的向量序列$\{\mathbf{x}^{(k)}\}$都收敛。

3.6.1 迭代格式的一般形式

解线性方程组的迭代法的基本思想与求非线性方程的迭代法的基本思想是类似的。

$$Ax = b$$

变形成等价的同解线性方程组

$$x = Bx + f$$

然后任取一个初始向量$x^{(0)} \in \mathrm{R}^n$作为近似解，由公式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

构造向量序列$\{x^{(k)}\}$，如果向量序列$\{x^{(k)}\}$满足

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{*}$$ ------迭代法收敛

方程组的解

否则，称此**迭代法发散。**

迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$

迭代矩阵

第k次迭代近似解

$$e^{(k)} = x^{*} - x^{(k)}$$ **-------第k次迭代误差**

用迭代法解方程组($Ax=b$)的关键是：

(1) 如何构造迭代格式

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

1. 雅可比(Jacobi)迭代法

2. 高斯-塞德尔（Gauss-Seidel)迭代法

3. 逐次超松弛法

(2) 由迭代格式产生的向量序列$\{x^{(k)}\}$的收敛条件是什么？

3.6.2 雅可比迭代法

设线性方程组 $Ax=b$的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

雅可比（Jacobi)迭代法的步骤为:

（1） 设$a_{ii} \neq 0 \ \ (i=1,2,\cdots,n)$,则可从上式解出x_i

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n]$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - a_{in}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

(2) 写成迭代格式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})
\end{cases}
$$

（3）取定初始向量 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_i^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T$

令 $k=0,1,2,\cdots$

根据迭代公式（3.23)

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(-a_{i1}x_1^{(k)}-\cdots-a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)}-a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)}-\cdots-a_{in}x_n^{(k)}+b_i)$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

可得向量序列$\{x^{(k)}\}$。

$$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$$

类似于非线性方程的迭代法，对于事先给定的精度要求ε，当

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty} < \varepsilon$$

就可以得到方程组的近似解

$$x^{*} \approx x^{(k+1)}$$

雅可比迭代法的矩阵形式， $A = \tilde{L} + D + \tilde{U}$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ a_{21} & 0 & & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & 0 & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

则 $A = \tilde{L} + D + \tilde{U}$

线性方程组(3.18) $Ax = b$可表示为

$$(\tilde{L} + D + \tilde{U})x = b$$

$$\Longrightarrow \quad Dx = b - (\tilde{L} + \tilde{U})x$$

$\because \quad a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad \therefore \quad \det(\mathrm{D}) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad x = D^{-1}[b - (\tilde{L} + \tilde{U})x]$$

相应的迭代格式为 $x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (\tilde{L} + \tilde{U})x^{(k)}]$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (\tilde{L} + \tilde{U})x^{(k)}]$$

所以Jacobi迭代格式的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + f_J$$

$$J = -D^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U})$$

-----Jacobi迭代矩阵

$$f_J = D^{-1}b$$

例. 用Jacobi迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

解: 按迭代公式，得雅可比迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})/20 \\ x_2^{(k+1)} = (12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/8 \\ x_3^{(k+1)} = (30 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)})/15 \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0,0,0)^T$ 令 $k = 0,1,2,\cdots$

$$x^{(1)}=[1.2,\ 1.5,\ 2]^T \qquad \left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty=2$$

$$x^{(2)}=[0.75,\ 1.1,\ 2.14]^T \qquad \left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_\infty=0.45$$

$$x^{(3)}=[0.769,\ 1.138,\ 2.12]^T$$

$$x^{(4)}=[0.768125,\ 1.138875,\ 2.125216667]^T$$

$$x^{(5)}=[0.76733,\ 1.13832292,\ 2.12535833]^T$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(12)}=[0.767353807,\ 1.138409760,\ 2.125368111]^T$$

$$=x^{(13)}$$

在计算机上，使用Jacobi迭代法求解方程组时，可用x，y分别表示$x^{(k)}$和$x^{(k+1)}$

当 $\max\limits_{i}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k+1)}\right|<\varepsilon$ 时，停止迭代，

计算步骤

（1）对 $i=1\sim n$ 令$x_i \leftarrow 0$

（2）$D \leftarrow 0$

（3）对 $i=1\sim n$做

令 $y_i = b_i$

对 $j=1\sim n$ 但 $j \neq i$令$y_i \leftarrow y_i - a_{ij}x_j$

令$y_i \leftarrow y_i / a_{ii}$

若$|x_i - y_i| > D$则令$D \leftarrow |x_i - y_i|$

（4）对 $i=1\sim n$ 令$x_i \leftarrow y_i$

（5）对 $D \geq \varepsilon$则转到(2)

（6）输出x_i（ $i=1\sim n$ ）并停止计算

高斯-赛德尔迭代法

分析Jacobi迭代法的迭代过程

$$x_1^{(k+1)} = (-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)/a_{11}$$

$$x_2^{(k+1)} = (-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)/a_{22}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(k+1)} = (-a_{i1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i)/a_{ii}$$

发现在$x_i^{(k+1)}$之前，$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$已经求出

但当求$x_i^{(k+1)}$时，仍用$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$进行迭代

在算$x^{(k+2)}$时才用$x^{(k+1)}$代换$x^{(k)}$。雅可比迭代又称**同时代换法**或**整体代换法**或**简单迭代法**。

能否求$x_i^{(k+1)}$时，利用$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$进行迭代呢？

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法或称逐个代换法

迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{cases}
$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - \tilde{L}x^{(k+1)} - \tilde{U}x^{(k)})$$

$$\Longrightarrow \quad x^{(k+1)} = (D+\tilde{L})^{-1}(b - \tilde{U}x^{(k)})$$

记

$$G = -(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U};$$

----- Gauss-Seidel迭代矩阵

$$f_G = (D+\tilde{L})^{-1}b$$

$$\Longrightarrow \quad x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f_G$$

例. 用高斯-赛德尔迭代法重新求解方程组

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

解: 按迭代公式，得高斯-赛德尔迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)})/20 \\ x_2^{(k+1)} = (12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/8 \\ x_3^{(k+1)} = (30 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)})/15 \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T = (0,0,0)^T$ 令 $k = 0,1,2,\cdots$

$$x_1^{(1)} = (-2x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)} + 24)/20 = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = (-x_1^{(1)} - x_3^{(0)} + 12)/8 = (-1.2 + 12)/8 = 1.35$$

$$x_3^{(1)} = (-2x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + 30)/15 = 2.11$$

$$x^{(1)} = [1.2,\ 1.35,\ 2.11]^T \qquad \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_\infty = 2.11$$

$$x_1^{(2)} = (-2x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)} + 24)/20 = 0.7485$$

$$x_2^{(2)} = (-x_1^{(2)} - x_3^{(1)} + 12)/8 = 1.1426875$$

$$x_3^{(2)} = (-2x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)} + 30)/15 = 2.1287375$$

$$x^{(2)} = [0.7485,\ 1.1426875,\ 2.1287375]^T$$

$$x^{(1)}=[1.2,\ 1.35,\ 2.11]^T$$

$$x^{(2)}=[0.7485,\ 1.1426875,\ 2.1287375]^T$$

$$x^{(3)}=[0.766420625,\ 1.138105234,\ 2.125431630]^T$$

$$x^{(4)}=[0.767374732,\ 1.138399205,\ 2.125363210]^T$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(8)}=[0.767353807,\ 1.138409760,\ 2.125368111]^T$$

$$=x^{(9)}$$

故$x \approx x^{(8)}$。

在计算机上，用高斯-赛德尔迭代法求解方程组时，

当 $\max\limits_{i}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k+1)}\right|<\varepsilon$ 时，停止迭代，

计算步骤

（1）对 $i=1\sim n$ 令$x_i \leftarrow 0$

（2）$D \leftarrow 0$

（3）对 $i=1\sim n$做

令 $y=b_i$

对 $j=1\sim n$ 但 $j \neq i$令$y \leftarrow y-a_{ij}x_j$

令$y \leftarrow y/a_{ii}$

若$|x_i-y|>D$则令$D \leftarrow |x_i-y|$

令 $x_i=y$

（4）对 $D \geq \varepsilon$则转到(2)

（5）输出x_i（ $i=1\sim n$ ）并停止计算

雅可比(Jacobi)	高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)
（1）对 $i=1\sim n$ 令 $x_i \leftarrow 0$	（1）对 $i=1\sim n$ 令 $x_i \leftarrow 0$
（2）$D \leftarrow 0$	（2）$D \leftarrow 0$
（3）对 $i=1\sim n$ 做	（3）对 $i=1\sim n$ 做
令 $y_i = b_i$	令 $y = b_i$
对 $j=1\sim n$ 但 $j\neq i$ 令 $y_i \leftarrow \underline{y_i - a_{ij}x_j}$	对 $j=1\sim n$ 但 $j\neq i$ 令 $y \leftarrow \underline{y - a_{ij}x_j}$
令 $y_i \leftarrow y_i / a_{ii}$	令 $y \leftarrow y / a_{ii}$
若 $\lvert x_i - y_i \rvert > D$ 则令 $D \leftarrow \lvert x_i - y_i \rvert$	若 $\lvert x_i - y \rvert > D$ 则令 $D \leftarrow \lvert x_i - y \rvert$
（4）对 $i=1\sim n$ 令 $x_i \leftarrow y_i$	令 $x_i = y$
（5）对 $D \geq \varepsilon$ 则转到(2)	（4）对 $D \geq \varepsilon$ 则转到(2)
（6）输出 x_i（$i=1\sim n$）并停止计算	（5）输出 x_i（$i=1\sim n$）并停止计算

3.6.4 逐次超松弛迭代法或SOR法

SOR法的构造方法：

从近似解$x^{(k)}$出发，先用Gauss-Seidel迭代格式计算一步，将计算结果记为$\tilde{x}_i^{(k+1)}$

记 $\Delta x_i = \tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}$

令新的近似解$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \Delta x_i$

松弛因子

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \Delta x_i = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$$

$$= (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \tilde{x}_i^{(k+1)}$$

逐次超松弛迭代法或SOR法的迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \omega(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} + (1-\omega)x_1^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} = \omega(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} + (1-\omega)x_2^{(k)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i^{(k+1)} = \omega(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots \\
\quad -a_{in}x_n^{(k)})/a_{ii} + (1-\omega)x_i^{(k)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \omega(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \\
\quad + (1-\omega)x_n^{(k)}
\end{cases}
$$

当ω＝1时就是高斯-赛德尔迭代法

在SOR法中，松弛因子的取值对迭代公式的收敛速度影响极大。

实际计算时，可以根据方程组的系数矩阵的性质，或结合实践计算的经验来选取松弛因子。

逐次**超松弛迭代法**的矩阵形式

$$x^{(k+1)}=(1-\omega)x^{(k)}+\omega D^{-1}(b-\tilde{L}x^{(k+1)}-\tilde{U}x^{(k)})$$

$$\Longrightarrow$$

$$(D+\omega\tilde{L})x^{(k+1)}=[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]x^{(k)}+\omega b$$

$$(D+\omega\tilde{L})x^{(k+1)}=[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]x^{(k)}+\omega b$$

$$\Longrightarrow x^{(k+1)}=S_\omega x^{(k)}+f_\omega$$

其中 $S_\omega=(D+\omega\tilde{L})^{-1}[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]$

$$f_\omega=\omega(D+\omega\tilde{L})^{-1}b$$

例3.12 用SOR方法解方程组
$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（它的精确解为$x^*=(-1,-1,-1,-1)^T$）

解 取$x^{(0)}=0$，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \omega(1 + 4x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 4x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_4^{(k+1)} = x_4^{(k)} - \omega(1 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} - x_3^{(k+1)} + 4x_4^{(k)})/4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \omega(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots \\ &-a_{in}x_n^{(k)})/a_{ii} + \underline{(1-\omega)x_i^{(k)}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k)} \\ - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k)})/a_{ii} \end{aligned}}$$

取ω=1.3，第11次迭代结果为

$x^{(11)}=(-0.999\,996\,46, -1.000\,003\,10,-0.999\,999\,53,-0.999\,999\,12)^T$

$$\left\|\varepsilon^{(11)}\right\| \le 0.46 \times 10^{-5}$$

对ω取其他值，迭代次数不同。

松弛因子ω	迭代次数	松弛因子ω	迭代次数
1.0	22	1.5	17
1.1	17	1.6	23
1.2	12	1.7	33
1.3	11	1.8	53
1.4	14	1.9	109

雅可比迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法或称逐个代换法

迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})
\end{cases}
$$

Jacobi迭代格式矩阵形式

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (\tilde{L} + \tilde{U})x^{(k)}]$$

$$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + f_J$$

$$J = -D^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U})$$ -----Jacobi迭代矩阵

$$f_J = D^{-1}b$$

高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法的矩阵形式

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - \tilde{L}x^{(k+1)} - \tilde{U}x^{(k)})$$

$$\Longrightarrow \quad x^{(k+1)} = (D + \tilde{L})^{-1}(b - \tilde{U}x^{(k)})$$

记

$$G = -(D + \tilde{L})^{-1}\tilde{U};$$

----- Gauss-Seidel迭代矩阵

$$f_G = (D + \tilde{L})^{-1}b$$

$$\Longrightarrow \quad x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f_G$$

3.6.5 迭代法的收敛性

设线性方程组 $Ax = b$ --------(3.29)

等价方程组 $x = Bx + f$ --------(3.30)

相应的迭代格式是

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \quad \text{--------(3.31)}$$

问题：迭代矩阵B满足什么条件时，由迭代格式产生的向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛到x^*?

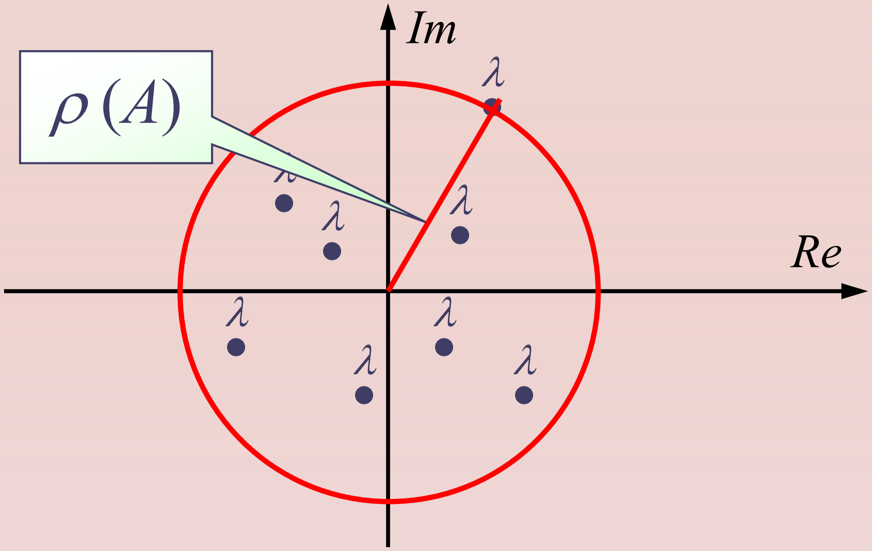
定义3.4谱半径

定义3.4 设$A\in R^{n\times n}$的特征值为$\lambda_i(i=1,2,\ldots,n)$，则称

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$ 为A的**谱半径**

- 谱半径 /* spectral radius */

定义 矩阵A的谱半径记为$\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$，其中$\lambda_i$为$A$的特征根。



定理3.11. (迭代法基本定理）迭代格式(3.31) $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

对于任意初值$x^{(0)}$均收敛的充要条件是 $\rho(B) < 1$

证 充分性：设 $\rho(B)<1$ ，则1不是B的特征值，因而$|I-B|\neq 0$

$\Longrightarrow (I-B)x = f$ 有唯一解x^*，即

$$x^* = Bx^* + f$$

误差向量

$$\varepsilon^{(k)} = x^* - x^{(k)} = (Bx^* + f) - (Bx^{(k-1)} - f) = B\varepsilon^{(k-1)}$$

$$= B^k \varepsilon^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\varepsilon^{(k)} = x^* - x^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\because \rho(B) < 1\text{时}, \lim_{k\to\infty} B^k = 0 \quad \therefore \lim_{k\to\infty} \varepsilon^{(k)} = 0$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$

必要性：设 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^*$ ，其中 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

两边取极限得 $x^* = Bx^* + f$

从而有误差向量

$$\varepsilon^{(k)} = x^* - x^{(k)} = (Bx^* + f) - (Bx^{(k-1)} - f) = B\varepsilon^{(k-1)}$$

$$= B^k \varepsilon^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$\varepsilon^{(k)} = x^* - x^{(k)} = B^k \varepsilon^{(0)} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

由于$x^{(0)}$是任意的，因而$\varepsilon^{(0)}$也是任意的，所以

$$\lim_{k\to\infty} B^{(k)}\varepsilon^{(0)} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0$$

由定理3.10得$\rho(B) < 1.$ 证毕。

推论1 若||B||<1，则迭代格式(3.31) $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f\,(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 收敛

证：$\because \rho(B) \le \|B\| < 1$（定理3.8)

定理3.11

迭代格式收敛

定理3.10 设 $B \in R^{n\times n}$,则$\lim_{k\to\infty} B^k = 0$的充分必要条件是$\rho(B) < 1$

定理3.8 设$A \in \mathrm{R}^{n\times n}$，则 $\rho(A) \le \|A\|$ 其中||A||为$\mathrm{R}^{n\times n}$上的任一范数。

推论2 设 $Ax=b$,其中$A=D+\tilde{L}+\tilde{U}$ 为非奇异矩阵且D也非奇异，则

（1）Jacobi迭代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(J)<1,\text{其中}J=-D^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U})$$

（2）Gauss-Seidel迭代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(G)<1,\text{其中}J=-(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U}$$

（3）SOR迭代法收敛的充分必要条件是

$$\rho(S_\omega)<1,\text{其中}S_\omega=(D+\omega\tilde{L})^{-1}[(1-\omega)D-\omega\tilde{U}]$$

例3.13 判别下列方程组用Jacobi法和Gauss-Seidel法求解是否收敛

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

解: (1) 求Jacobi法的迭代矩阵

$$J = -D^{-1}(\tilde{L}+\tilde{U}) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - J) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 = 0$$

所以 $\lambda_{1,2,2} = 0 \quad \rho(J) = \max(|\lambda|) = 0 < 1$

即Jaobi迭代法收敛

(2) 求高斯-赛德尔法的迭代矩阵

$$G = -(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_{2,3}=2$$

$$\rho(G)=\max(|\lambda|)=2>1$$

所以高斯-赛德尔迭代法发散

或 特征方程为

$$\det(\lambda I-G)=\det[\lambda I+(D+\tilde{L})^{-1}\tilde{U}]$$

$$=\det(D+\tilde{L})^{-1}\det[\lambda(D+\tilde{L})+\tilde{U}]=0$$

$$\because \quad \det(D+\tilde{L})^{-1}\neq 0 \quad \therefore \quad \det[\lambda(D+\tilde{L})+\tilde{U}]=0$$

即

$$\det[\lambda(\tilde{L}+D)+\tilde{U}]=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ \lambda & \lambda & 1\\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-2\lambda)-2(\lambda^2-2\lambda)$$

$$=\lambda(\lambda-2)^2$$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_{2,3}=2$$

$$\rho(G)=\max(|\lambda|)=2>1$$

所以高斯-赛德尔迭代法发散

定理3.12 设 $Ax = b$，如果A为**严格对角占优阵**，则Jacobi迭代法和Gauss-Seidel 迭代法均收敛。

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和。称A为严格对角占优

定理3.13 设解$Ax = b$ 的SOR法收敛，则$0<\omega<2$

定理3.14 设$Ax = b$，如果A为对称正定矩阵，且$0<\omega<2$，则SOR 迭代法收敛。