线性方程组

1 下午4时59分28秒

3.1 引例及问题综述

3.1.1 引例

引例1 电路问题（电网络 KCL、KVL、回路电流法等等)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

3.1.2 问题综述

在自然科学和工程技术中很多问题的解决常常归结为解线性代数方程组。

这些方程组的系数矩阵大致分为两种，

一种是低阶稠密矩阵（例如，阶数大约为≤150），

另一种是大型稀疏矩阵（即矩阵阶数高且零元素较多）。

线性方程组的数值解法一般分为直接法和迭代法两类。

直接法 就是经过有限步算术运算，可求得方程组精确解的方法（若计算过程中没有舍入误差）。

但实际计算中由于舍入误差的存在和影响，这种方法也只能求得线性方程组的近似解。

这类算法中最基本的高斯消去法及其某些变形。

这类方法是解低阶稠密矩阵方程组的有效方法，

近十几年来直接法在求解某些大型稀疏矩阵方程组方面取得了较大进展。

迭代法

基本思想与解一元非线性方程的迭代法类似。

从任意给定的初始近似解向量出发，按照某种方法逐步生成近似解序列，使解序列的极限为方程组的解。

迭代法就是用某种极限过程去逐步逼近线性方程组精确解的方法。

可以用有限步运算算出具有指定精确度的近似解。

迭代法主要有：雅可比（Jacobi)迭代法、高斯-赛德尔（Gauss-Seidel)迭代法。

迭代法具有需要计算机的存贮单元较少、程序设计简单、原始系数矩阵在计算过程中始终不变等优点，

但存在收敛性及收敛速度问题。

迭代法是解大型稀疏矩阵方程组（尤其是由微分方程离散后得到的大型方程组）的重要方法。

3.2 线性方程组的直接解法

我们知道，下面有*3*种方程的解我们可以直接求出：

① 对角矩阵

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) \Rightarrow x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i = 1, \cdots, n$$

② 下三角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow x_i = \frac{b_i \boxed{- \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}}{l_{ii}}, i = 1, \cdots, n$$

③ 上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow x_i=\frac{b_i-\boxed{\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}}{u_{ii}},\ i=n,\cdots,1$$

消元法就是对方程组做些等价的变换，变为我们已知的3种类型之一，而后求根

对方程组，作如下的变换，解不变

①交换两个方程的次序

②一个方程的两边同时乘以一个非**0**的数

③一个方程的两边同时乘以一个非**0**数，加到另一个方程

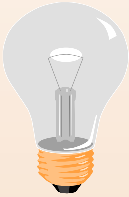
因此，对应的对**增广矩阵*(A,b)***，作如下的变换，解不变

①交换矩阵的两行

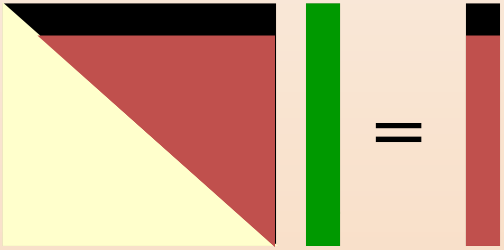
②某一行乘以一个非**0**的数

③某一个乘以一个非**0**数，**加到**另一行

3. 2. 1 高斯消去法的基本思想



思路 **首先将*A*化为上三角阵，再回代求解** 。



高斯消去法是一个古老的求解线性方程组的方法，但由它改进、变形得到的选主元素消去法、三角分解法仍然是目前计算机上常用的有效方法。

例1 用高斯消去法解方程组 **（0.5分）**

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=1 & (1) \\ 3x_1+2x_2+4x_3=1/2 & (2) \\ x_1+3x_2+9x_3=5/2 & (3) \end{cases}$$

解 第1步:

将方程（1）乘上（-3/2）加到方程（2）上去，

将方程（1）乘上（-1/2）加到方程（3）上去，

则得到与原方程组等价的方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=1/2 \\ x_1+3x_2+9x_3=5/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=1 \\ -x_2+x_3=-1 & (4) \\ 2x_2+8x_3=2 & (5) \end{cases}$$

其中方程（4），（5）已消去了未知数x_1。

第2步：将方程（4）乘上2加到方程（5），消去（5）式中未知数x_2，得到与原方程组等价的三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad -x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\quad x_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

最后由上述方程组，用回代的方法，即可求得原方程组的解。

x_3=0，x_2=1，x_1=-1/2

这种求解过程，称为具有回代的高斯消去法。

用高斯消去法解方程组的基本思想是用矩阵行的初等变换将系数矩阵A约化为具有简单形式的矩阵（如：上三角阵），而三角形方程组是很容易解的——（回代）

增广矩阵

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}2&2&2&\vdots&1\\3&2&4&\vdots&1/2\\1&3&9&\vdots&5/2\end{bmatrix}\underset{\rightarrow}{1}\begin{bmatrix}2&2&2&\vdots&1\\0&-1&1&\vdots&-1\\0&2&8&\vdots&2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\rightarrow}{2}\begin{bmatrix}2&2&2&\vdots&1\\0&-1&1&\vdots&-1\\0&0&10&\vdots&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+2x_3=1\\3x_1+2x_2+4x_3=1/2\\x_1+3x_2+9x_3=5/2\end{cases}$$

通常把这种按照先消元，再回代两个步骤求解线性方程组的方法称为高斯（Gauss)消去法。

3.2.2 高斯消去法的算法构造

设有n个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

引进记号

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(3.1)可用矩阵形式表示 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ (3.2)

为了讨论方便，记 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$，

$$\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(1)}=(b_1^{(1)},\cdots b_n^{(1)})^T$$

假设**A**为非奇异矩阵（即设det(**A**)≠0）。

(I) 消元过程

第1步 （k=1）： 设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$ 计算乘数： $m_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, (i = 2, \cdots, n)$

用m_{i1}乘上第一个方程，加到第i个方程上去（i=2，…，n）

（即施行行的初等变换$R_i \leftarrow R_i + m_{i1} * R_1$，i=2，…，n），

消去第2 个方程～第n个方程的未知数x_1，得到等价方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \tag{3.3}$$

记为: $\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(2)}$； 其中

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \qquad (i,j=2,3,\cdots,n)$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + m_{i1}b_1^{(1)}, \qquad (i=2,3,\cdots,n)$$

第2步 （k=2）：对线性方程组(3.3)中的第2，3，…，*n*个方程组成的*n*-1元方程组

$$\begin{cases} a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

做类似于第1步的处理，消去除第一个方程之外的变元x_2，得到第2步消元后的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} + m_{i2}a_{2j}^{(2)} \\ b_i^{(3)} = b_i^{(2)} + m_{i2}b_2^{(2)} \\ m_{i2} = -a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \end{cases} \qquad (i, j = 3, 4, \cdots, n)$$

第k步：（k=1，2，…，n-1）继续上述消去过程，设第1步～第k-1步计算已经完成，得到与原方程组等价的方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

记为$\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(k)}$；现进行第k步消元计算，设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算乘数

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, (i = k+1, \cdots, n)$$

用（m_{ik}）乘上式的第*k*个方程加到第*i*个方程（*i*=*k*+1，…，*n*），消去第*i*个方程（i=k+1，…，n）的未知数x_k，得到与原方程组等价的方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & & a_{k+1\ k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,\mathrm{n}}^{(k+1)} \\ & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

简记为$\mathbf{A}^{(k+1)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(k+1)}$；其中$\mathbf{A}^{(\mathrm{k}+1)}$，$\mathbf{b}^{(\mathrm{k}+1)}$元素计算公式为：

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \qquad (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + m_{ik}b_k^{(k)}, \qquad (i=k+1,\cdots,n) \\ \mathbf{A}^{(k+1)}\text{与}\mathbf{A}^{(k)}\text{前}k\text{行元素相同}, \\ \mathbf{b}^{(k+1)}\text{与}\mathbf{b}^{(k)}\text{前}k\text{个元素相同。} \end{cases}$$

最后，重复上述约化过程，即k=1，2，…，n-1且设$a_{kk}^{(k)} \neq 0$（k=1，2，…，n-1）共完成n-1步消元计算，得到与原方程组（3.1）等价的三角形方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \tag{3.4}$$

（2）回代过程

第1步　在方程（3.4）的最后一个方程中解出x_n，得

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

第2步 将x_n的值代入式（3.4）的倒数第二个方程，解出x_{n-1}，得

$$a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow x_{n-1}=\frac{b_{n-1}^{(n-1)}-a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}$$

第3步 依次继续下去，一般可得x_k的计算公式

$$x_k=\frac{b_k^{(k)}-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}},(k=n-2,n-3,\cdots,1)$$

当k=1时，就完成了回代过程，得到所求的解。

将（3.1)约化为(3.4)的过程称为消元过程，
（3.4）的求解过程称为回代过程，
由消元过程和回代过程求解线性方程组的方法称为高斯消去法。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \qquad (3.4)$$

定理3.1 设线性方程组$\boldsymbol{Ax=b}$，其中$\mathbf{A}\in\mathbf{R}_{n\times n}$($\mathbf{R}_{n\times n}$表示$n$阶方阵的集合）。

（1）如果 $a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$ 则可通过高斯消去法将$\boldsymbol{Ax=b}$化为等价的上三角方程组，且有计算公式：

① 消元计算 k=1，2，…，n-1

$$\begin{cases} m_{ik}=-\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},(i=k+1,\cdots,n) \\ a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}+m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \qquad (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}+m_{ik}b_k^{(k)}, \qquad (i=k+1,\cdots,n) \end{cases}$$

② 回代计算

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_n^{(n)}} \\ x_k = \dfrac{b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}}, (k = n-1, n-2, \cdots, 1) \end{cases}$$

(2) 如果A为非奇异矩阵时，可能有某 $a_{kk}^{(k)} = 0$，则在第k列存在有元素 $a_{i_k k}^{(k)} \neq 0 (k+1 \leq i_k \leq n)$ ，于是可能通过交换（A，b）的第*k*行和第i_k行元素，将 $a_{i_k k}^{(k)}$ 调到（*k*，*k*）位置，然后再进行消元计算。

于是，在A为非奇异矩阵时，只要引进行交换，则高斯消去法可将 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 化为上三角方程组，且通过回代即可求得方程组解。

有零怎么办？

换掉继续算！

高斯消去法要求 $a_{kk}^{(k)} \neq 0(k=1,2,\cdots,n)$

第k步消元的主元素

判断主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0(k=1,2,\cdots,n)$ 的一个充要条件：

定理3.2 对矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$消元时，主元素$a_{kk}^{(k)} \neq 0(k=1,2,\cdots,n)$ 的一个充要条件是矩阵的各阶顺序主子式

$$D_i \neq 0(i=1,2,\cdots n)$$

即

$$D_1 = a_{11} \neq 0,$$

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

3.2.3 高斯消去法算法分析

（1）高斯消去法的计算量

消元过程的计算量，高斯消去法消去过程分n−1步

第k步的计算工作量为：

1）计算乘数：需要作（n-k）次除法运算；

2）消元：需作$(n\text{-}k)^2$次乘法运算，和$(n\text{-}k)^2$次加减法运算；

3）计算b(k)：需作（n-k）次乘法运算和(n-k)次加减法运算；

$$
\begin{cases}
m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, (i = k+1, \cdots, n) \\
a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \qquad (i, j = k+1, \cdots, n) \\
b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + m_{ik} b_k^{(k)}, \qquad (i = k+1, \cdots, n)
\end{cases}
$$

于是完成全部消元计算共需要作

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}$$ 乘除法运算

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}$$ 加减法运算

求和公式 $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6(n \geq 1)$

（2）回代计算：

共需要作 n(n+1)/2 乘除法运算

n(n-1)/2 加减法运算

于是，用高斯消去法解 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$（其中$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$）的计算量为共需作

$$MD=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$$ 乘除法运算

$$AS=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)n(2n+5)}{6}$$ 加减法运算

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{b_n^{(n)}}{a_n^{(n)}} \\ x_k=\dfrac{b_k^{(k)}-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}},(k=n-1,n-2,\cdots,1) \end{cases}$$

克莱姆（Cramer）法则 求解

当n较大时，计算量相当惊人。

如：*n*=20时，(n+1)n!(n-1)≈9.7*10^{20}

（2）高斯消去法的矩阵解释

在计算机上用高斯消去法解低阶稠密矩阵线性方程组时要注意几点：

（1）要用一个二维数组A(n,n)存放系数矩阵A的元素，用一维数组b(n)存放常数项b分量。

（2）需要输入的数据： A，b。

（3）约化的中间结果$A^{(k)}$元素冲掉A元素，$b^{(k)}$冲掉b，乘数m_{ik}冲掉a_{ik}。例如，计算

（a）A(i,k)←A(i,k)/ A(k,k)，（i=k+1，…，n）；

（b）A(i,j)←A(i,j)-A(i,k)*A(k,j)，(i=k+1,…,n；j=k+1,…,n）；

（c） b(i)←b(i)-A(i,k)* b(k)，（i=k+1，…，n）。

（4）在高斯消去法中一般要引进行交换。

如果不存在i_k，使 $a_{i_k k}^{(k)} \neq 0$ ，要输出方程没有唯一解的信息。

3.2.4 列主元高斯消去法

用高斯消去法解**Ax=b**时，其中设**A**为非奇异矩阵，可能出现 $a_{kk}^{(k)}=0$ 情况，这时必须进行带行交换的高斯消去法。

但在实际计算中即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ 但其绝对值很小时，用 $a_{kk}^{(k)}$ 作除数，会导致中间结果矩阵 $\mathbf{A}^{(\mathbf{k})}$ 元素数量级严重增长和舍入误差的扩散，使得最后的计算结果不可靠。

例3.2 设有方程组 $\begin{cases} 0.0001x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

解

[方法1] 用高斯消去法求解（用具有舍入的4位浮点数进行运算）。

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0.1000\times 10^{-3} & 0.1000\times 10^{1} & \vdots & 0.1000\times 10^{1} \\ 0.1000\times 10^{1} & 0.1000\times 10^{1} & \vdots & 0.2000\times 10^{1} \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} + m_{21}a_{12}^{(1)} = 0.1000\times 10^1 - 0.1000\times 10^5$$

$$= 0.00001\times 10^5 - 0.1000\times 10^5 = -0.1000\times 10^5$$

$$b_2^{(2)} = -0.1000\times 10^5$$

$$\begin{cases} m_{ik} = -\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, (i = k+1, \cdots, n) \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad (i, j = k+1, \cdots, n) \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + m_{ik}b_k^{(k)}, \quad (i = k+1, \cdots, n) \end{cases}$$

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}0.1000\times10^{-3} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.1000\times10^{1}\\ 0.1000\times10^{1} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.2000\times10^{1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.1000\times10^{-3} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.1000\times10^{1}\\ 0 & -0.1000\times10^{5} & \vdots & -0.1000\times10^{5}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_n^{(n)}} \\ x_k = \dfrac{b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}},(k=n-1,n-2,\cdots,1) \end{cases}$$

回代，求得解x_2=1.000，x_1=0.000

不满足原方程：
$$\begin{cases}0.0001x_1+x_2=1\\ x_1+x_2=2\end{cases}$$
→ **错误**

[方法2] 用具有行交换的高斯消去法（避免小主元）。

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}] \underset{r_1 \Leftrightarrow r_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 0.1000\times10^{1} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.2000\times10^{1} \\ 0.1000\times10^{-3} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.1000\times10^{1} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[m_{21}=-10^{-4}]{} \begin{bmatrix} 0.1000\times10^{1} & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.2000\times10^{1} \\ 0 & 0.1000\times10^{1} & \vdots & 0.1000\times10^{1} \end{bmatrix}$$

$x_2=1.00$，$x_1=1.00$

方法1计算失败的原因，是用了一个绝对值很小的数作除数，乘数很大，引起约化中间结果数量很严重增长，再舍入就使得计算结果不可靠了。

精确解为

$$x_1=\frac{10000}{9999}, x_2=\frac{9998}{9999} \quad \text{或 } x^*=(0.9998999,\ 1.00010001)^T$$

- **对同一个数值问题，用不同的计算方法，得到的结果的精度大不一样。**
- 一个计算方法，如果用此方法的计算过程中舍入误差得到控制，对计算结果影响较小，称**此方法为数值稳定**的；否则，如果用此计算方法的计算过程中舍入误差增长迅速，计算结果受舍入误差影响较大称**此方法为数值不稳定**。
- **应选择和使用数值稳定的计算方法**，否则，如果使用数值不稳定的计算方法去解数值计算问题，就可能导致计算失败。

- 在采用高斯消去法解方程组时，小主元可能导致计算失败，故在消去法中应避免采用绝对值很小的主元素。
- 对一般矩阵方程组，需要引进选主元的技巧，即在高斯消去法的每一步应该选取系数矩阵或消元后的低阶矩阵中绝对值最大的元素作为主元素，保持乘数$|m_{ik}|\le 1$，以便减少计算过程中舍入误差对计算解的影响。

列主元消去法

完全主元素消去法是解低阶稠密矩阵方程组的有效方法，但完全主元素消去法在选取主元时要花费一定的计算机时间。（而且交换了未知数的位置）

现介绍一种在实际计算中常用的部分选主元（即列主元）消去法。列主元消去法即是每次选主元时，仅依次按列选取绝对值最大的元素作为主元素，且仅交换两行，再进行消元计算。

设有线性方程组Ax=b，其中设A为非奇异矩阵。方程组的增广矩阵为

$$
[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cccccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
{\color{red}a_{l1}} & & & & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n
\end{array}\right]
$$

第1步（*k*=1）：首先在A的第一列中选取绝对值最大的元素*a*$_{l1}$，作为第一步的主元素:

$$
\left|a_{l1}\right|=\max_{1\le i\le n}\left|a_{i1}\right|\neq 0
$$

然后交换（A，b）的第1行与第*l*行元素，
再进行消元计算。

设列主元素消去法已经完成第1步到第k-1步的按列选主元，交换两行，消元计算得到与原方程组等价的方程组 $A^{(k)}x=b^{(k)}$

$$
[\mathbf{A},\mathbf{b}]\rightarrow[\mathbf{A}^{(k)},\mathbf{b}^{(k)}]=\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_{1}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_{2}^{(2)} \\
 & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots & b_{k}^{(k)} \\
 & & & \color{red}{a_{k+1,k}^{(k)}} & & a_{k+1,n}^{(k)} & \vdots & b_{k+1}^{(k)} \\
 & & & \color{red}{\vdots} & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \color{red}{a_{nk}^{(k)}} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & \vdots & b_{n}^{(k)}
\end{array}\right]
$$

第k步选列主元区域

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]\to[\mathbf{A}^{(k)},\mathbf{b}^{(k)}]=\left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} & \vdots & b_2^{(2)} \\
 & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & \vdots & b_k^{(k)} \\
 & & & a_{k+1,k}^{(k)} & & a_{k+1,n}^{(k)} & \vdots & b_{k+1}^{(k)} \\
 & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & \vdots & b_n^{(k)}
\end{array}\right]$$

第k步计算如下：

对于k=1，2，…，n-1

（1）按列选主元：即确定t使

$$\left|a_{tk}^{(k)}\right|=\max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k)}\right|\ne 0$$

（2）如果$t\ne k$，则交换[**A**，**b**]第t行与第k行元素。

（3）消元计算

$$a_{ik}\leftarrow m_{ik}=-\frac{a_{ik}}{a_{kk}},(i=k+1,\cdots,n)$$

$$\begin{cases} a_{ij}\leftarrow a_{ij}+m_{ik}a_{kj}, & (i,j=k+1,\cdots,n) \\ b_i\leftarrow b_i+m_{ik}b_k, & (i=k+1,\cdots,n) \end{cases}$$

消元乘数m_{ik}满足: $$|m_{ik}|=\left|\frac{a_{ik}}{a_{kk}}\right|\le 1,(i=k+1,\cdots,n)$$

（4）回代求解

$$\begin{cases} x_n \leftarrow \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i \leftarrow \dfrac{(b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j)}{a_{ii}}, (i = n-1, n-2, \cdots, 1) \end{cases}$$

例 用列主元消去法解方程组？

$$\begin{cases} 0.729x_1 + 0.81x_2 + 0.9x_3 = 0.6867 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0.8338 \\ 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 = 1.000 \end{cases}$$

解 精确解为（舍入值）： $x^*=(0.2245, 0.2814, 0.3279)^T$

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0.7290 & 0.8100 & 0.9000 & \vdots & 0.6867 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0.8338 \\ 1.331 & 1.210 & 1.100 & \vdots & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$(r_1 \leftrightarrow r_3, \quad m_{21} = -0.7513, \quad m_{31} = -0.5477)$$

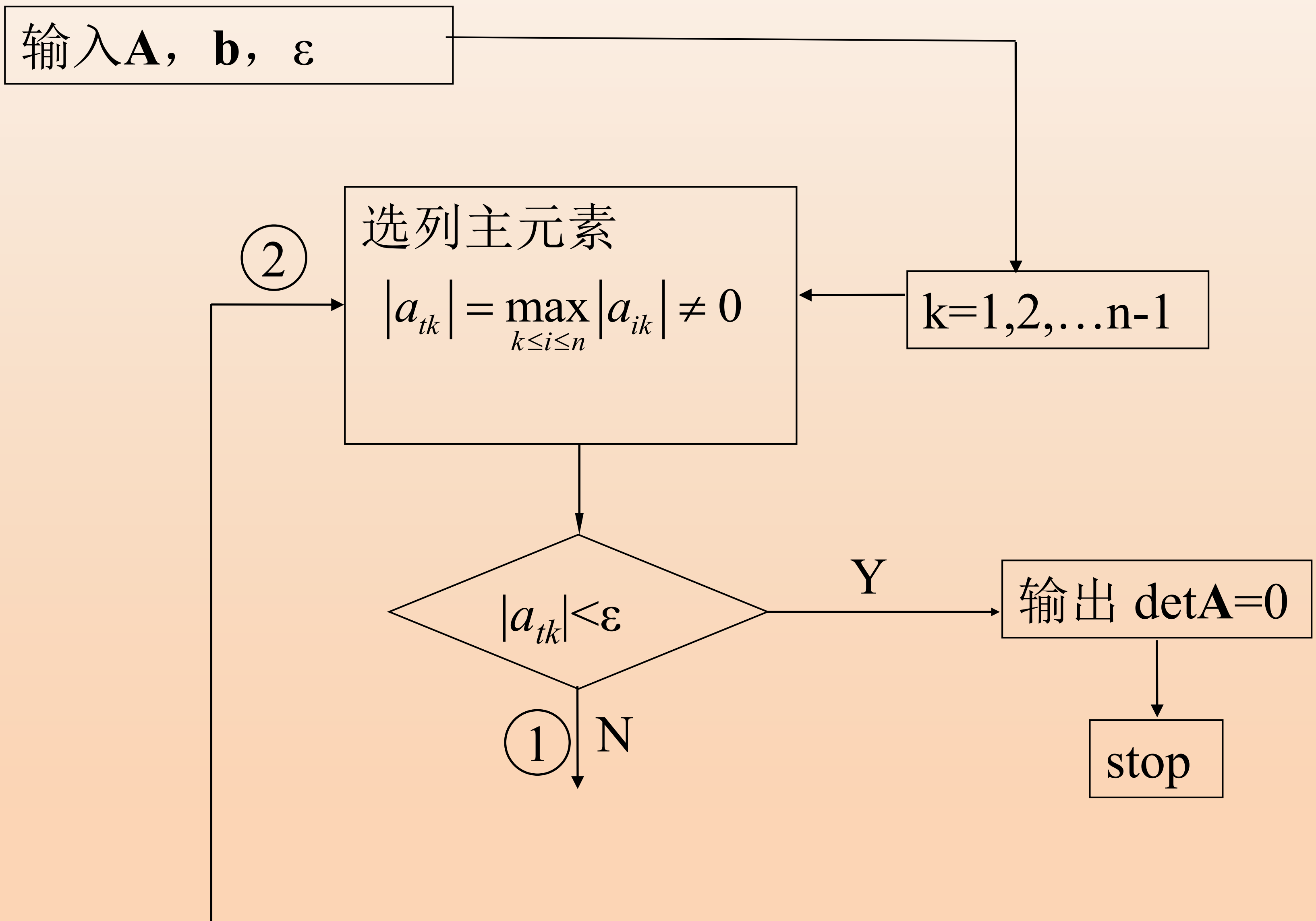
$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1.331 & 1.210 & 1.100 & \vdots & 1.000 \\ 0 & 0.09090 & 0.1736 & \vdots & 0.08250 \\ 0 & 0.1473 & 0.2975 & \vdots & 0.1390 \end{bmatrix}$$

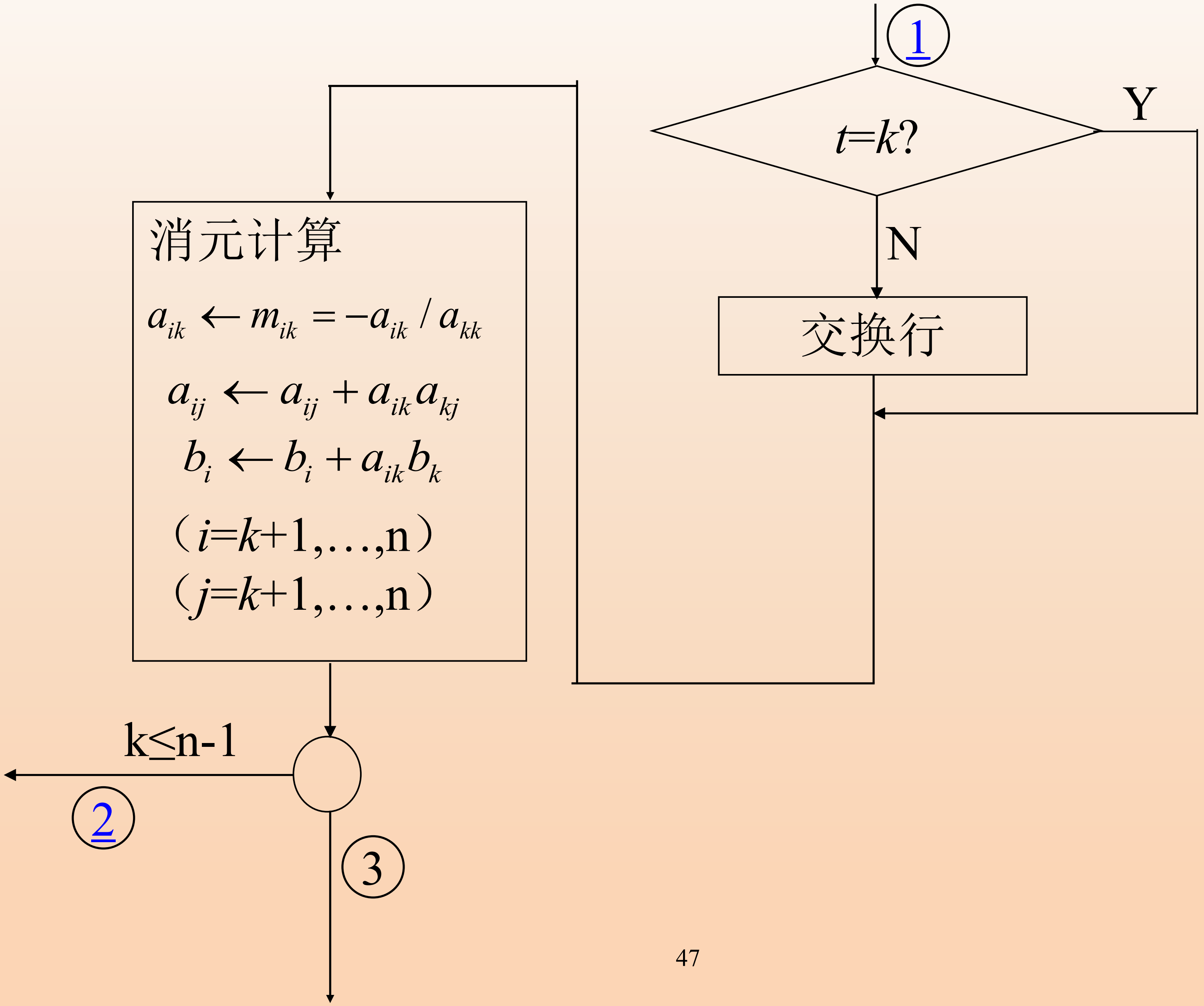
$$(r_2 \leftrightarrow r_3, \qquad m_{32} = -0.6171)$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix} 1.331 & 1.210 & 1.100 & \vdots & 1.000 \\ 0 & 0.1473 & 0.2975 & \vdots & 0.1390 \\ 0 & 0 & -0.01000 & \vdots & -0.003280 \end{bmatrix}$$

回代即得到计算解　　x=(0.2246, 0.2812, 0.3280)^T

列主元素消去法框图


输入**A**，**b**，ε
选列主元素
$|a_{tk}| = \max_{k \le i \le n} |a_{ik}| \ne 0$
k=1,2,…n-1
$|a_{tk}|<\varepsilon$
Y
输出 det**A**=0
stop
1
N
2


1
$t=k$?
Y
N
交换行
消元计算
$a_{ik} \leftarrow m_{ik} = -a_{ik} / a_{kk}$
$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + a_{ik} a_{kj}$
$b_i \leftarrow b_i + a_{ik} b_k$
（$i=k+1,\ldots,n$）
（$j=k+1,\ldots,n$）
$k \le n-1$
2
3

③

回代（当$a_{nn}\neq0$）
$x_n \leftarrow b_n/a_{nn}$
$x_i \leftarrow (b_i-\sum a_{ij}x_j)/a_{ii}$
$(i=n-1,\ldots,2,1)$

输出计算解
$x(i)$(i=1,2,…,n)

stop

作业：

P227　3

上机作业1:
列主元高斯消去法和列主元三角分解法解线性方程组程序实现p227 第3题。

要求: 给出matlab 程序，程序流程图，以及方程解结果（电子版）

3.3 矩阵的三角分解法

3.3.1 矩阵的三角分解法
——杜里特尔(Dolittle)分解法

Gauss消去法的矩阵解释

设约化主元素$a_{kk}^{(k)} \neq 0$（k=1, 2,…, n－1）。

消去法实际上是对线性方程组的增广矩阵**[A,b]**做第三种初等行变换。

由于对**[A,b]** 施行第三种初等行变换相当于用对应的第三种初等矩阵左乘于**[A,b]** 。

$$M_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & m_{ik} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{ccccccc} & & k\text{列} & & & & \end{array} & \\
M_{ik} = & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & m_{ik} & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ k\text{行} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

M_{ik}是特殊的初等矩阵，称为倍加矩阵，
某矩阵**Z**左乘M_{ik}相当于将矩阵**Z**的第k行m_{ik}倍加于第i行。

$$
\begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ m_{21}a_{11}+a_{21} & m_{21}a_{12}+a_{22} & m_{21}a_{13}+a_{23} & m_{21}a_{14}+a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}
$$

高斯消去法第1步： $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(1)}\rightarrow\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x}=\mathbf{b}^{(2)}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & & \vdots \\ & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

矩阵表示为 $M_{n1}M_{n-1,1}\cdots M_{21}(A,b)=(A^{(2)},b^{(2)})$

其中

$$M_{21}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{31}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ m_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{i1}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ m_{i1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}\qquad M_{n1}=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & 1\end{bmatrix}$$

$$m_{i1}=-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}},(i=2,\cdots,n)$$

记 $M_1=M_{n1}M_{n-1,1}\cdots M_{21}$, 有

$$M_1A=A^{(2)},M_1b=b^{(2)}$$

$$M_1 = M_{n1}M_{n-1.1}\cdots M_{i1}\cdots M_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ m_{21} & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ m_{i1} & & & 1 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ m_{n1} & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

高斯消去法第k步：$\mathbf{A}^{(k)}\mathrm{x}=\mathbf{b}^{(k)} \to \mathbf{A}^{(k+1)}\mathrm{x}=\mathbf{b}^{(k+1)}$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
 & & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
 & & & & a_{k+1\ k+1}^{(k+1)} & & a_{k+1,\mathrm{n}}^{(k+1)} \\
 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{n,k+1}^{(k+1)} & & a_{nn}^{(k+1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ \\ b_n^{(k+1)} \end{bmatrix}
$$

则有 $\mathbf{M}_k\mathbf{A}^{(k)}=\mathbf{A}^{(k+1)}$，$\mathbf{M}_k\mathbf{b}^{(k)}=\mathbf{b}^{(k+1)}$　（k=1, 2,…, n－1）

其中 $M_k = M_{nk}\cdots M_{ik}\cdots M_{k+1,k}$

$$M_{k+1,k} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & \text{K列} & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{K行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$M_{i,k}=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & \text{K列} & & & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ && m_{i,k} && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{K行} \\ \\ \text{i行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$m_{ik}=-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},(i=k+1,\cdots,n)$$

$$M_k = M_{nk}\cdots M_{ik}\cdots M_{k+1,k} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{K列} & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{nk} & & & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$\mathbf{M}_k\mathbf{A}^{(k)}= \mathbf{A}^{(k+1)}$， $\mathbf{M}_k\mathbf{b}^{(k)}=\mathbf{b}^{(k+1)}$ （k=1, 2,…, n－1）

经过n-1步消元后，可以得到

$$M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_1 A = A^{(n)} = U,$$

$$M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_1 b = b^{(n)} = y,$$

因此，不选主元的高斯消去法消去过程,实质是增广矩阵[A,b]被左乘一系列倍加矩阵M,变成上三角形矩阵[U,y]

记 $[\mathbf{A},\mathbf{b}] = \bar{\mathrm{A}},[U,\mathbf{y}] = \bar{\mathbf{R}}, U = A^{(n)}, y = b^{(n)}$

$$M_{n,n-1}\cdots M_{n,k}\cdots M_{k+1,k}\cdots M_{n2}\cdots M_{32}M_{n1}\cdots M_{31}M_{21}\bar{\mathrm{A}}$$
$$= M_{n-1}\cdots M_k\cdots M_2 M_1\bar{\mathrm{A}} = \bar{\mathbf{R}}$$

高斯消去法的矩阵形式

$\Longrightarrow$

$$\bar{\mathrm{A}} = (M_{n,n-1}\cdots M_{n,k}\cdots M_{k+1,k}\cdots M_{n2}\cdots M_{32}M_{n1}\cdots M_{31}M_{21})^{-1}\bar{\mathbf{R}}$$
$$= (M_{21}^{-1}M_{31}^{-1}\cdots M_{n,n-1}^{-1}\mathbf{E})\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}$$

$$M_{i,k}=\begin{array}{|ccccccc|l} \multicolumn{1}{c}{} & & \text{K列} & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \text{K行} \\ & & & \ddots & & & & \\ & & m_{i,k} & & 1 & & & \text{i行} \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{array}$$

$$M_{i,k}^{-1}=\begin{array}{|ccccccc|l} \multicolumn{1}{c}{} & & \text{K列} & & & & \multicolumn{1}{c}{} & \\ 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \text{K行} \\ & & & \ddots & & & & \\ & & -m_{i,k} & & 1 & & & \text{i行} \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{array}$$

M_{ik} 及其逆矩阵都是单位下三角阵，即对角线上方元素全为零的矩阵。

$\mathbf{L}=M_{21}^{-1}M_{31}^{-1}\cdots M_{n,n-1}^{-1}\mathbf{E}$是将单位矩阵E的第n-1行倍数加于第n行,…,将第一行的倍数加于第n行，…,第二行，可见L是单位下三角矩阵。

$$[\mathbf{A},\mathbf{b}]=\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{L}[U,\mathbf{y}]=[\mathbf{L}U,\mathbf{L}\mathbf{y}]\to\mathbf{A}=\mathbf{L}U,\quad \mathbf{L}\mathbf{y}=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{L}U\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

高斯消去法的消去过程，实质上是将**A**分解为两个三角矩阵的乘积**A**=**LU**，并求解**Ly**=**b**的过程。
回代过程就是求解上三角方程组*U***x**=**y**。

A=LU ：L为单位下三角阵，U为上三角阵。这种三角分解为杜利特尔分解。

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

L为由取负乘数构成的单位下三角阵

Ly=b

$$U=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Ux=y

矩阵L和U也可以直接算出，而不需要任何中间步骤，这就是所谓的三角分解法。

设A为非奇异的矩阵，且有分解式 **A=LU**

L为单位下三角阵，U为上三角阵。

$$A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法，由 $a_{1j}=u_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$

可得U的第一行元素；

$$A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

再由 $a_{i1}=l_{i1}u_{11}\quad(i=2,\cdots,n)$

可得**L**的第一列元素

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}\quad(i=2,\cdots,n)$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

一般地，当 $i \le j$ 时，有

$$a_{ij}=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{i,i-1},1,0,\cdots,0)\begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}+u_{ij}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

当$i>j$时，有

$$a_{ij}=(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{i,i-1},1,0,\cdots,0)\begin{bmatrix}u_{1j}\\ u_{2j}\\ \vdots \\ u_{jj}\\ 0\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}+l_{ij}u_{jj}$$

一般地，当 $i \le j$ 时，有

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} + u_{ij}$$

当 $i > j$ 时，有

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} + l_{ij} u_{jj}$$

由这两个式子可得计算公式

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (j = i, i+1, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n) \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & (i = j+1, j+2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (j = i, i+1, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n) \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & (i = j+1, j+2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{3.6}$$

利用(3.6)，可以按照先U的第k行，后L的第k列（k=1,2,…,n)的顺序完成对矩阵A的LU分解。

得到矩阵A的三角分解式后，由**Gauss消去法的矩阵解释**可知：

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}U, \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

求解方程组**A*x*=b**等价于解两个三角形方程组：

$$(1) Ly = b, \quad 求 y;$$

$$(2) Ux = y, \quad 求 x$$

利用已算出的l_{ij}，从前往后反复代入可求出下三角形方程组**L*y*=b**的解y^*：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \qquad (i = 2,3,\cdots,n) \end{cases} \tag{3.7}$$

利用已算出的u_{ij}和y^*，回代可求出上三角方程组Ux=y^*的解。

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n / u_{nn} \\ x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k) / u_{ii} \qquad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{cases}$$

实际计算时L的对角元l_{ii}=1不必存放，L和U中肯定为零的元素也不必存放，因此L和 $\bar{U}$ =[U,y] 可共同存放在增广矩阵 $\bar{A}$ =[A,b]中的相应位置：

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} & (j = i, i+1, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n) \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj} & (i = j+1, j+2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \quad (3.6)$$

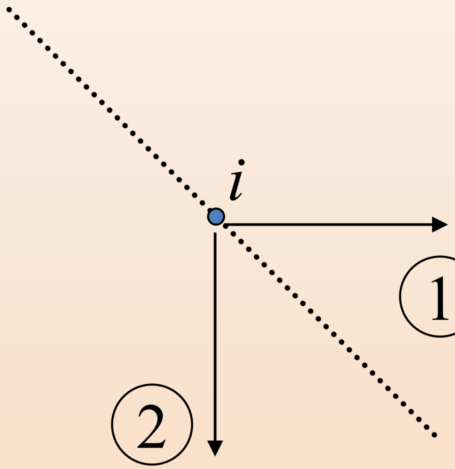
$$\begin{cases} y_1 = b_1 \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \quad (i = 2, 3, \cdots, n) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$
\begin{array}{l|l|llll}
u_{11}(a_{11}) & u_{12}(a_{12}) & u_{13}(a_{13}) & \cdots & u_{1n}(a_{1n}) & y_1(b_1) \\
\cline{1-1}
l_{21}(a_{21}) & u_{22}(a_{22}) & u_{23}(a_{23}) & \cdots & u_{2n}(a_{2n}) & y_2(b_2) \\
\cline{2-2}
l_{31}(a_{31}) & l_{32}(a_{32}) & u_{33}(a_{33}) & \cdots & u_{3n}(a_{3n}) & y_3(b_3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{u}_{ij} = \bar{a}_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\bar{u}_{kj} & (j = i, i+1, \cdots, n; i = 1, 2, \cdots, n) \\
l_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}) / u_{jj} & (i = j+1, j+2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n)
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

u_{ij}或l_{ij}都是原矩阵$\overline{\mathbf{A}}$对应的元素，减去同行左边L的元素与同列上边 $\bar{U}$ 的元素的乘积；只是对L的元素，然后需要除以U的对角元。计算顺序，通常先算 $\bar{U}$ 的第i行,再算L的第i列。

计算顺序



$i=1,2,\ldots,n$

对方程组的增广矩阵$\bar{A}=[A,b]$ 经过k-1步分解后，可变成如下形式

$$\bar{A}\to\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{cccccccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right] & \begin{array}{l}
\text{第1步} \\ \text{第2步} \\ \\ \text{第}k\text{-1步} \\ \text{第}k\text{步} \\ \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{cccccccccc}
\text{第1步} & \text{第2步} & & \text{第}k\text{-1步} & \text{第}k\text{步} & & & & &
\end{array} &
\end{array}$$

接下来的第k步，由公式(3.6)先算U的第k行，后算L的第k列。

$$
\bar{A} \to \left[\begin{array}{ccccc|c|c|c|c|c}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{cases}
u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} & (j = k, k+1, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n) \\
l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk} & (i = k+1, k+2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n)
\end{cases}
\quad (3.6)
$$

$$
\bar{A} \to \begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{bmatrix}
$$

手工计算时，可直接在矩阵上进行，

u_{kj}(j=k, k+1,…,n+1)等于a_{kj}减去已算出的L的第k行元素乘以已算出的U的第j列对应的元素；

$$
u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \qquad (j = k, k+1, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n)
$$

$$
\bar{A} \to \left[\begin{array}{cccccccccc}
u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\
l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\
l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

$l_{ik}(i=k+1, k+2,\ldots,n)$等于$a_{ik}$减去已算出的$L$的第$i$行元素乘以已算出的$U$的第$k$列对应的元素，再除以$u_{kk}$;

$$
l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk} \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n)
$$

这样，经过n步，即可完成对矩阵的分解。

$$\bar{A} \to \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & u_{kk} & \cdots & u_{kj} & \cdots & u_{kn} & y_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & l_{ik} & \cdots & \ddots & \cdots & u_{in} & y_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & l_{nk} & \cdots & l_{nj} & \cdots & u_{nn} & y_n \end{bmatrix}$$

最后一列，即为列向量y，这样只需要解三角形方程组$Ux=y$，即可得原方程组的解。

分解A=LU，并解方程组**A**x=b，其中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ -3 & -4 & -12 & 13\\ 2 & 10 & 0 & -3\\ 4 & 14 & 9 & -13\end{bmatrix},\quad \mathrm{b}=\begin{bmatrix}-2\\ 5\\ 10\\ 7\end{bmatrix}$$

解：

$$\begin{cases}\bar{u}_{ij}=\bar{a}_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\bar{u}_{kj} & (j=i,i+1,\cdots,n;i=1,2,\cdots,n)\\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj})/u_{jj} & (i=j+1,j+2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\qquad(3.6)$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\ 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & & & & \\ 2 & & & & \\ 4 & & & & \end{bmatrix}$$

$u_{11}=1$ $\quad u_{12}=2$ $\quad u_{13}=3$ $\quad u_{14}=-4$ $\quad y_1 = \overline{u}_{15} = -2$

$l_{21}=-3/1=-3$

$$a_{1j} = u_{1j} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$l_{31}=2/1=2$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad (i = 2, \cdots, n)$$

$l_{41}=4/1=4$

$$\overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & -2\\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5\\ 2 & 10 & 0 & -3 & 10\\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & -2\\ -3 & 2 & -3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & & & \\ 4 & 3 & & & \end{bmatrix}$$

u_{22}=-4-(-3)*2=2 u_{23}=-12-(-3)*3=-3 u_{24}=13-(-3)*(-4)=1

$$y_2=\overline{u}_{25}=5-(-3)*(-2)=-1$$

l_{32}=(10-2*2)/2=3

l_{42}=(14-4*2)/2=3

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -12 & 13 & 5 \\ 2 & 10 & 0 & -3 & 10 \\ 4 & 14 & 9 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 17 \\ 4 & 3 & 2 & -4 & -16 \end{bmatrix}$$

u_{33}=0-2*3-3*(-3)=3　u_{34}=-3-2*(-4)-3*1=2

$$y_3 = \overline{u}_{35} = 10 - 2*(-2) - 3*(-1) = 17$$

l_{43}=(9-4*3-3*(-3))/3=2

r_{44}=-13-4*(-4)-3*1-2*2=-4

$$y_4 = \overline{u}_{45} = 7 - 4*(-2) - 3*(-1) - 2*17 = -16$$

$$L=\begin{bmatrix}1&&&\\-3&1&&\\2&3&1&\\4&3&2&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\&2&-3&2\\&&3&2\\&&&-4\end{bmatrix}\quad y=\begin{bmatrix}-2\\-1\\17\\-16\end{bmatrix}$$

回代（解方程组**Ux=y**），得 $x=(1,2,3,4)^T$

3.3.2 列主元三角分解法

与列主元Gauss消去法相对应的是列主元三角分解法。

对方程组的增广矩阵$\bar{A}=[A,b]$ 经过k-1步分解后，可变成如下形式

$$\bar{A} \to \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

第k步分解，使用公式（3.6)，为了避免用绝对值很小的数u_{kk}作除数，引进量

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} & (j = k, k+1, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n) \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk} & (i = k+1, k+2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$s_i = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} (i = k, k+1, \cdots, n)$$

$$\bar{A} \to \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,k-1} & u_{1k} & \cdots & u_{1j} & \cdots & u_{1n} & y_1 \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,k-1} & u_{2k} & \cdots & u_{2j} & \cdots & u_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{k-1,1} & l_{k-1,2} & \cdots & u_{k-1,k-1} & u_{k-1,k} & \cdots & u_{k-1,j} & \cdots & u_{k-1,n} & y_{k-1} \\ l_{k1} & l_{k2} & \cdots & l_{k,k-1} & a_{kk} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{i,k-1} & a_{ik} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,k-1} & a_{nk} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

$$s_i = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} (i = k, k+1, \cdots, n)$$

于是有 $u_{kk} = s_k$

$$s_i = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \,(i = k, k+1, \cdots, n)$$

若$\left|s_t\right| = \max\limits_{k \le i \le n} \left|s_i\right|$ 则将矩阵的第t行与第k行元素互换，

将（i,j)位置的新元素仍记为l_{ij}或a_{ij}，然后在做第k步分解。

这时

$$u_{kk} = s_k \qquad (s_k\text{即交换前的}s_t),$$

$$l_{ik} = s_i / s_k \qquad (i = k+1, k+2, \cdots, n)$$

$$\text{且}\left|l_{ik}\right| \le 1 \quad (i = k+1, k+2, \cdots, n),$$

例3.5　用列主元三角分解法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=3 \\ 4x_1+7x_2+7x_3=1 \\ -2x_1+4x_2+5x_3=-7 \end{cases}$$

解 对增广矩阵进行变换，有

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{matrix} s_1=2 \\ s_2=4 \\ s_3=-2 \end{matrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1步}} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ s_2=2-7\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \\ s_3=4-7\times(-\frac{1}{2})=\frac{15}{2} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1步}} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} s_2 = 2 - 7 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ s_3 = 4 - 7 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{15}{2} \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 5 & -7 \\ \frac{1}{2} & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第2步}} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第3步}} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{15}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

等价的三角形方程组为

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 1 \\ \frac{15}{2}x_2 + \frac{17}{2}x_3 = -\frac{13}{2} \\ \frac{6}{5}x_3 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

回代求解，得 $x_3 = 1, x_2 = -2, x_1 = 2$

3.4 特殊线性方程组的解法

Gauss消去法
LU分解法

求解一般线性方程组的方法，
不考虑线性方程组本身的特点。

但实用中会遇到一些特殊类型的线性方程组，如稀疏线性方程组，对称线性方程组等。

对于这些方程组，若还用原有的一般方法来求解，势必造成存储和计算的浪费。

有必要构造适合解特殊方程组的解法：如追赶法和改进平方根法。

3.4.1 追赶法

追赶法适于求解**三对角线方程组Ax=d**，即

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

用追赶法求解,追赶法具有计算量少,方法简单,算法稳定等特点。

其中**A**是三对角的对角占优阵，即对给定的i,当$|i-j|>1$时$a_{ij}=0$,且

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad |b_1|>|c_1|>0; \\ &(2)\quad |b_i|\ge|a_i|+|c_i|,(a_ic_i\ne 0,\ \ i=2,\cdots,\ \ n-1); \\ &(3)\quad |\mathrm{b}_\mathrm{n}|>|a_n|>0 \end{aligned}\right\}$$

可以利用矩阵的直接三角分解法来推导解三对角线性方程组的计算公式。

根据系数矩阵A的特点，将A分解为两个三角阵的乘积时，$\boldsymbol{A=LU}$具体为

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & a_i & b_i & c_i & & d_i \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & a_n & b_n & d_n \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法及矩阵相等的定义，有

$$b_1 = q_1, c_1 = r_1, a_2 = p_2 q_1, d_1 = y_1$$

解之得

$$q_1 = b_1, r_1 = c_1, p_2 = a_2 / q_1$$

$$y_1 = d_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ p_2 & 1 & & & & & & \\ & p_3 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & p_{k-1} & 1 & & & \\ & & & & p_k & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_1 & & & & & & y_1 \\ & q_2 & r_2 & & & & & y_2 \\ & & q_3 & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & r_{k-1} & & & y_{i-1} \\ & & & & q_k & r_k & & y_i \\ & & & & & q_{k+1} & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots \quad r_{n-1} & y_{n-1} \\ & & & & & & q_n & y_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \underbrace{a_k}_{\text{K行 K-1列}} & \underbrace{b_k}_{\text{K行 K列}} & \underbrace{c_k}_{\text{K行 K+1列}} & & d_k \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & a_n & b_n & d_n \end{bmatrix}$$

一般地，由

$$b_k = p_k r_{k-1} + q_k, \quad c_k = r_k$$

$$a_k = p_k q_{k-1}, \ d_k = p_k y_{k-1} + y_k$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \text{K行} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ p_2 & 1 & & & & & & \\ & p_3 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \overset{\text{K-1}}{p_{k-1}} & \overset{\text{K}}{1} & & & \\ & & & & p_k & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_1 & & & & & & y_1 \\ & q_2 & r_2 & & & & & y_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \overset{\text{K-1}}{q_{k-1}} & \overset{\text{K}}{r_{k-1}} & & & y_{k-1} \\ & & & & q_k & \overset{\text{K+1}}{r_k} & & y_k \\ & & & & & q_{k+1} & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & r_{n-1} \ y_{n-1} \\ & & & & & & & q_n \ \ y_n \end{bmatrix}$$

$$b_k = p_k r_{k-1} + q_k,\quad c_k = r_k$$

$$a_k = p_k q_{k-1},\ d_k = p_k y_{k-1} + y_k$$

可得

$$p_k = \frac{a_k}{q_{k-1}}, r_k = c_k, q_k = b_k - p_k c_{k-1}$$

$$y_k = d_k - p_k y_{k-1} \qquad (k = 2,3,\cdots,n)$$

最后，分解完毕，只需求解

$$Ux = y \Rightarrow x$$

解三对角线方程组的追赶法

（1）计算$\{p_i\}$, $\{q_i\}$, $\{y_i\}$的递推公式 ⟶ **追**

$$q_1 = b_1, y_1 = d_1$$

$$p_k = \frac{a_k}{q_{k-1}},$$

$$q_k = b_k - p_k c_{k-1}; y_k = d_k - p_k y_{k-1} \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

（2）$Ux = y \Rightarrow x$ ⟶ **赶**

$$x_n = y_n / q_n, x_k = (y_k - c_k x_{k+1}) / q_k$$

$$(k = n-1, n-2, \cdots, 1)$$

3.4.2 改进平方根法

改进平方根法适于求解系数矩阵**A**对称的方程组**A*x*=b**。

若**A**对称，所有顺序主子式均大于零A可分解成

$$A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn}\end{bmatrix}$$

由LU的分解公式

$$a_{1j}=u_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$$

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}\quad(i=2,\cdots,n)$$

又$a_{ij}=a_{ji}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$

则

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}}=\frac{a_{1i}}{a_{11}}=\frac{u_{1i}}{u_{11}}$$

若已求得第1步至第k-1的L和U的元素有如下关系：

$$l_{ij} = \frac{u_{ji}}{u_{jj}} (j = 1, 2, \cdots, k-1; i = j+1, \ldots, n)$$

对于第k步，根据

$$\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} & (j = k, k+1, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n) \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk}) / u_{kk} & (i = k+1, k+2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{ki} = a_{ki} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mi} = a_{ki} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{u_{mk} u_{mi}}{u_{mm}} & (i = k, k+1, \cdots, n+1) \\ l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{u_{mi} u_{mk}}{u_{mm}}) / u_{kk} = \frac{u_{ki}}{u_{kk}} & (i = k+1, k+2, \cdots, n) \end{cases}$$

由此得 $l_{ik}=\dfrac{u_{ki}}{u_{kk}}(k=1,2,\cdots,n-1;i=k+1,k+2,\cdots,n)$

这样计算L的元素可以节省工作量。这种方法称为改进平方跟法或乔累斯基（Cholesky)分解法。

例3.6 用改进的Cholesky分解法解方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+3x_3=15\\2x_1-7x_2+7x_3=9\\3x_1+7x_2-5x_3=2\end{cases}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}2&2&3&15\\2&-7&7&9\\3&7&-5&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第1步}}\begin{bmatrix}2&2&3&15\\1&-7&7&9\\\frac{3}{2}&7&-5&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第2步}}\begin{bmatrix}2&2&3&15\\1&-9&4&-6\\\frac{3}{2}&-\frac{4}{9}&-5&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第3步}}\begin{bmatrix}2&2&3&15\\1&-9&4&-6\\\frac{3}{2}&-\frac{4}{9}&-\frac{139}{18}&-\frac{139}{6}\end{bmatrix}$$

$$l_{21}=\frac{u_{12}}{u_{11}},l_{31}=\frac{u_{13}}{u_{11}} \qquad u_{22}=-7-2*1=-9 \qquad u_{23}=7-3*1=4$$

$$y_2=9-15*1=-6 \qquad l_{32}=\frac{u_{23}}{u_{22}}=-\frac{4}{9}$$

等价的三角形方程组*Ux*=*y*为

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ \qquad -9x_2 + 4x_3 = -6 \\ \qquad\qquad -\frac{139}{18}x_3 = -\frac{139}{6} \end{cases}$$

回代求解，得

$$x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

下列三种变换称为矩阵A的初等行（列）变换，简称**初等变换**：

（1）用一个非零实数乘A的某一行（列）；

（2）互换A的某两行（列）；

（3）把A的某一行（列）的倍数加到另一行（列）上去。

初等矩阵：由单位矩阵I经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

作业:

P227 3, 6, 7

上机作业1:

列主元高斯消去法和列主元三角分解法解线性方程组程序实现p227 第3题。

要求: 给出matlab 程序，程序流程图，以及方程解结果（电子版）