第五讲 轨迹规划

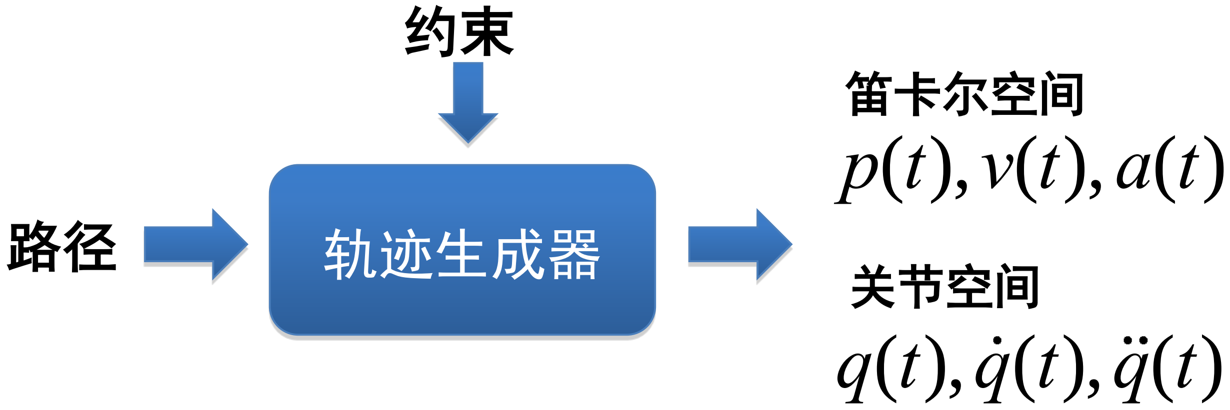
王越

浙江大学 控制科学与工程学院

5.1 基本概念

轨迹规划

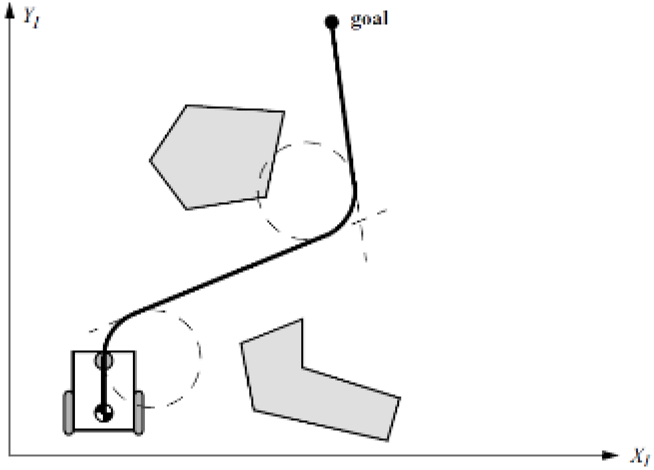
- 目标：给定路径与约束，生成一组控制序列，使机器人从初始位姿移动到目标位姿



建立空间与时间的关系

轨迹规划

- 移动机器人轨迹规划得到质心/参考点在笛卡尔空间中的位置、速度、加速度控制序列

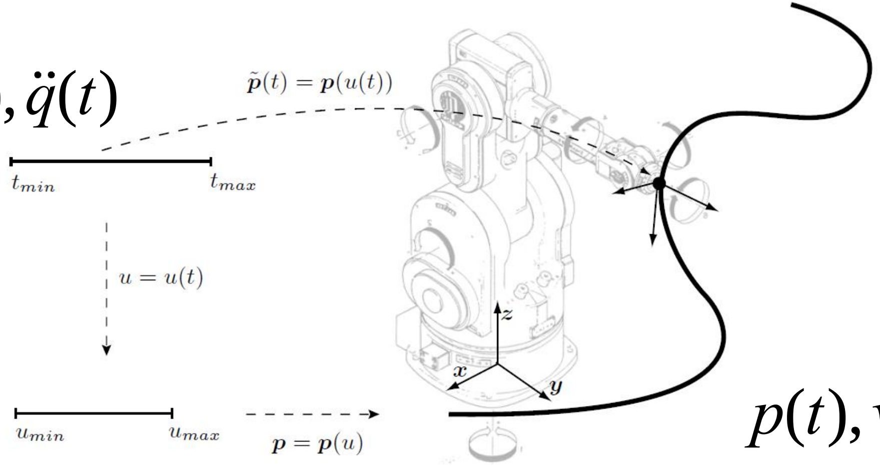


$$p(t), v(t), a(t)$$

轨迹规划

- 关节式机器人轨迹规划
  - 末端轨迹规划：得到末端在笛卡尔空间中的位置、速度、加速度控制序列
  - 关节轨迹规划：得到关节空间中的角度、角速度和角加速度控制序列

$$q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)$$



$$p(t), v(t), a(t)$$

轨迹规划

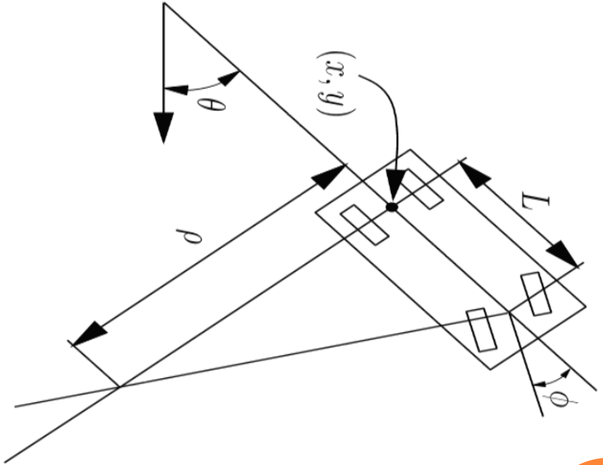
- 需要采用一定的函数形式表示控制量（位置/速度/加速度）的控制律，根据约束或/和最优目标，求取函数参数
- 需考虑约束：
  - 路径约束
  - 运动学约束
  - 边界约束
  - 连续性/光滑性要求
  - 无碰约束

运动学约束

最大速度、最大加速度等

无侧滑约束

最大转弯半径等



边界约束

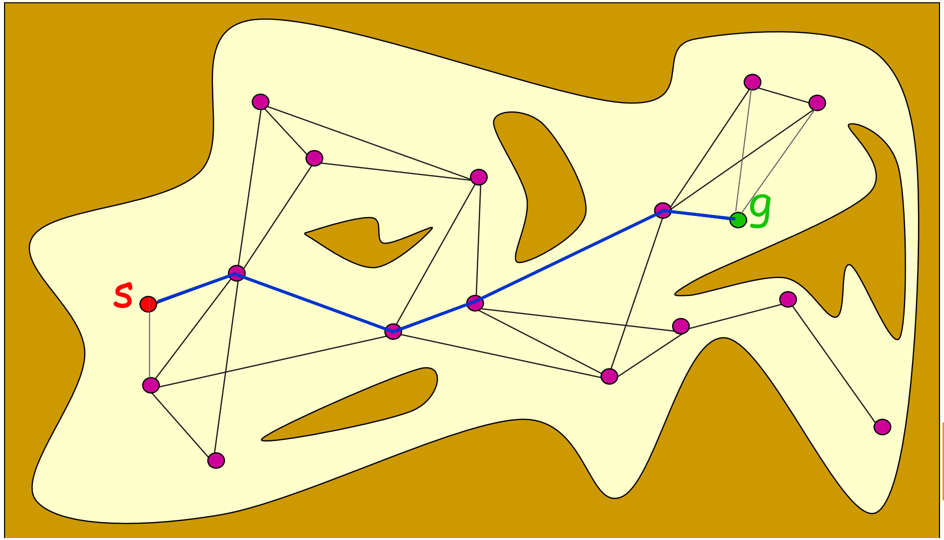
- 初始状态
  - 位置 (给定)
  - 速度 (给定，一般为0)
  - 加速度 (给定，一般为0)
- 终点状态
  - 位置 (给定)
  - 速度 (给定，一般为0)
  - 加速度 (给定，一般为0)

边界约束

- 中间位置
  - 匀速起点位置 (给定)
  - 匀速起点位置处与前面轨迹的路径连续性
  - 匀速起点位置处与前面轨迹的速度连续性
  - 匀速起点位置处与前面轨迹的加速度连续性
  - 减速位置 (给定)
  - 减速位置处与前面轨迹的路径连续性
  - 减速位置处与前面轨迹的速度连续性
  - 减速位置处与前面轨迹的加速度连续性

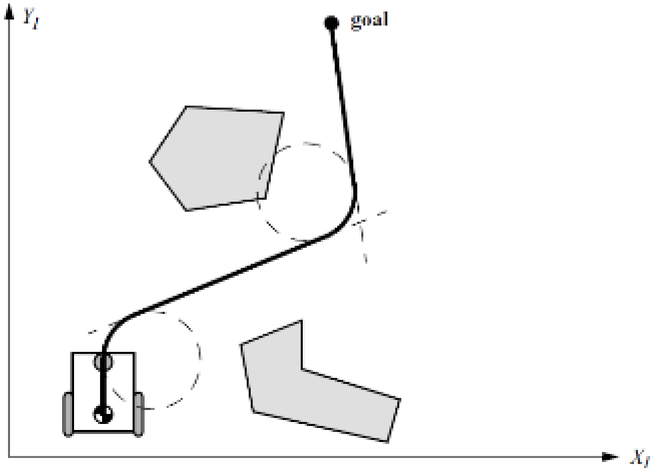
连续性/光滑性要求

- 路径得到的是直线段，如果完全按照直线段执行，对于存在非完整运动学约束的机器人来讲，无法实现流畅运动，移动效率低



连续性/光滑性要求

- 通过轨迹平滑可以减少因为方向变化而花费的启停时间、以及因方向突变而导致的底盘打滑问题

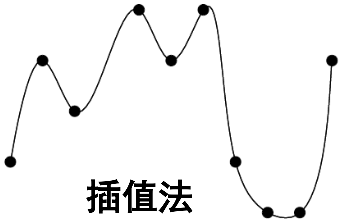


速度连续：一阶平滑

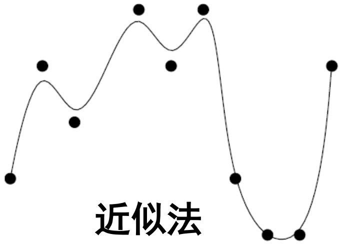
加速度连续、速度平滑：二阶平滑

轨迹的分类

- 轨迹
  - 一维轨迹
    - 点到点
    - 多点
      - 插值法
      - 近似法
  - 多维轨迹
    - 点到点
    - 多点
      - 插值法
      - 近似法



插值法



近似法

5.2 一维轨迹规划

一维轨迹规划

- 轨迹规划是用一定的函数形式表示控制量（位置、速度、加速度）的控制律，根据约束或/和最优目标，求取控制律参数
- 一维轨迹常用函数表示形式
  - 多项式
  - 三角函数
  - 指数函数

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \ldots + n(n-1) a_n t^{n-2}$$

一维多项式轨迹规划示例

$t_0 = 0, t_1 = 10$

$q_0 = q(t_0) = 10, q_1 = q(t_1) = 20$

$v_0 = v(t_0) = 0, v_1 = v(t_1) = 0$

$v(t = 2) = 2, a(t = 8) = 0$

需要几阶多项式表示

(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

一维多项式轨迹规划示例

$$t_0 = 0, t_1 = 10$$

$$q_0 = q(t_0) = 10, q_1 = q(t_1) = 20$$

$$v_0 = v(t_0) = 0, v_1 = v(t_1) = 0$$

$$v(t = 2) = 2, a(t = 8) = 0$$

$$\begin{cases} q(t_0) = a_0 = 10 \\ \dot{q}(t_0) = a_1 = 0 \\ q(t_1) = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + a_5 10^5 \\ \dot{q}(t_1) = a_1 + 20a_2 + \cdots + 5a_5 10^4 \\ \dot{q}(t = 2) = a_1 + 4a_2 + \cdots + 5a_5 2^4 \\ \ddot{q}(t = 8) = 2a_2 + 48a_3 \ldots + 20a_5 8^3 \end{cases}$$

六个约束，要求多项式至少5阶

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_5 t^5$$

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + 5a_5 t^4$$

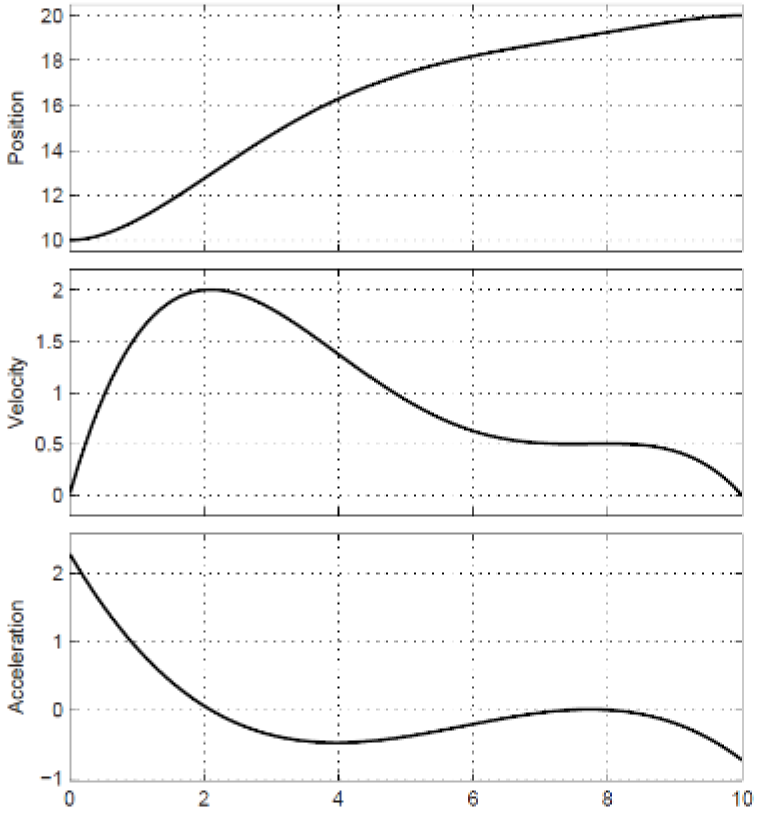
$$\ddot{q}(t) = 2a_2 + 6a_3 t \ldots + 20a_5 t^3$$

$$a_0 = 10.0000, a_1 = 0.0000$$

$$a_2 = 1.1462, a_3 = -0.2806$$

$$a_4 = 0.0267, a_5 = -0.0009$$

一维多项式轨迹规划示例



$$a_0 = 10.0000, a_1 = 0.0000$$
$$a_2 = 1.1462, a_3 = -0.2806$$
$$a_4 = 0.0267, a_5 = -0.0009$$

基本一维轨迹规划

线性轨迹

$$q(t) = a_0 + a_1 t$$

- 只需给定初始时间t_0、终止时间t_1、初始位置q_0和终止位置q_1即可

$$\begin{cases} q(t_0) = q_0 = a_0 \\ q(t_1) = q_1 = a_0 + a_1(t_1 - t_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}$$

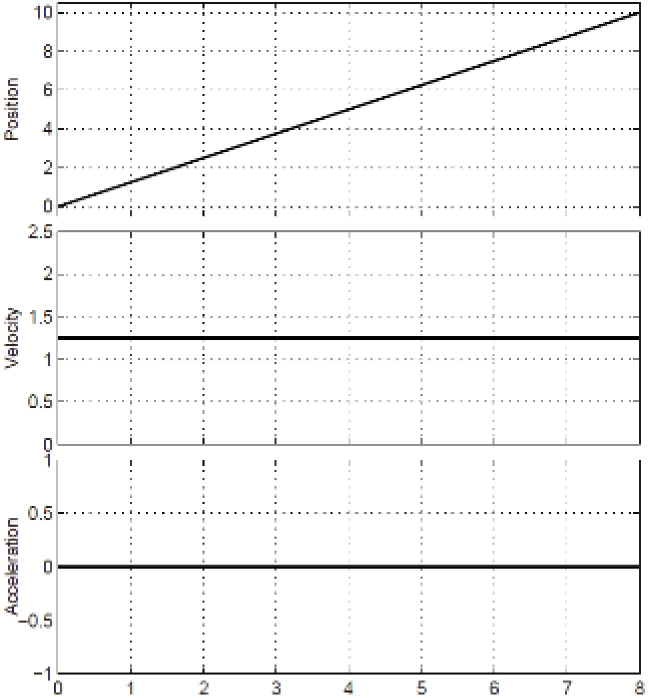
$$T = t_1 - t_0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = \dfrac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{h}{T} \end{cases}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{h}{T}$$ 速度恒定

基本一维轨迹规划

- 线性轨迹示例

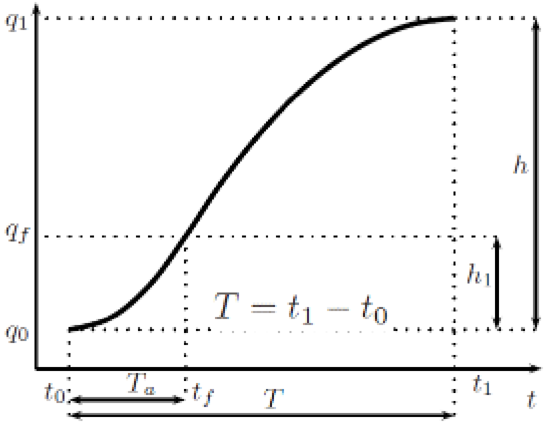


$$t_0 = 0,\ \ t_1 = 8,$$

$$q_0 = 0,\ \ q_1 = 10.$$

基本一维轨迹规划

- 抛物线轨迹：由2个二阶多项式合成



阶段1　　$t \in [t_0, t_\mathrm{f}]$

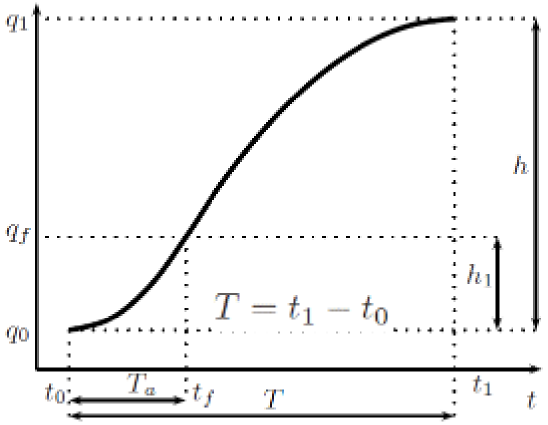
$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2$$

阶段2　　$t \in [t_\mathrm{f}, t_1]$

$$q_b(t) = a_3 + a_4(t - t_0) + a_5(t - t_0)^2$$

加速度恒定，可满足初末位置和初末速度约束

抛物线轨迹



阶段1　$t \in [t_0, t_f]$

$$q_a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2$$

根据条件q_0, q_f和对初始速度v_0的要求

$$\begin{cases} q_a(t_0) = q_0 = a_0 \\ q_a(t_f) = q_f = a_0 + a_1(t_f - t_0) + a_2(t_f - t_0)^2 \\ \dot{q}_a(t_0) = v_0 = a_1 \end{cases}$$

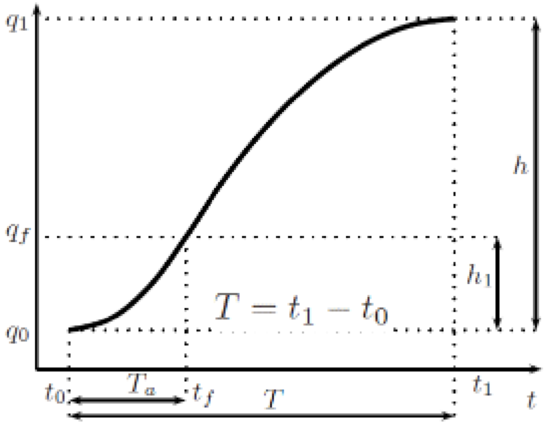
$$a_0 = q_0, a_1 = v_0, a_2 = \frac{2}{T^2}(h - v_0 T),$$

$$T = t_1 - t_0, h = q_1 - q_0$$

如果要求轨迹对称

即$t_f = \dfrac{t_0 + t_1}{2}, q_{t_f} = q_f = \dfrac{q_0 + q_1}{2}$

1. 抛物线轨迹



如果要求轨迹对称

即$t_f = \dfrac{t_0 + t_1}{2}, q_{t_f} = q_f = \dfrac{q_0 + q_1}{2}$

阶段2 $t \in [t_f, t_1]$

$$q_b(t) = a_3 + a_4(t - t_0) + a_5(t - t_0)^2$$

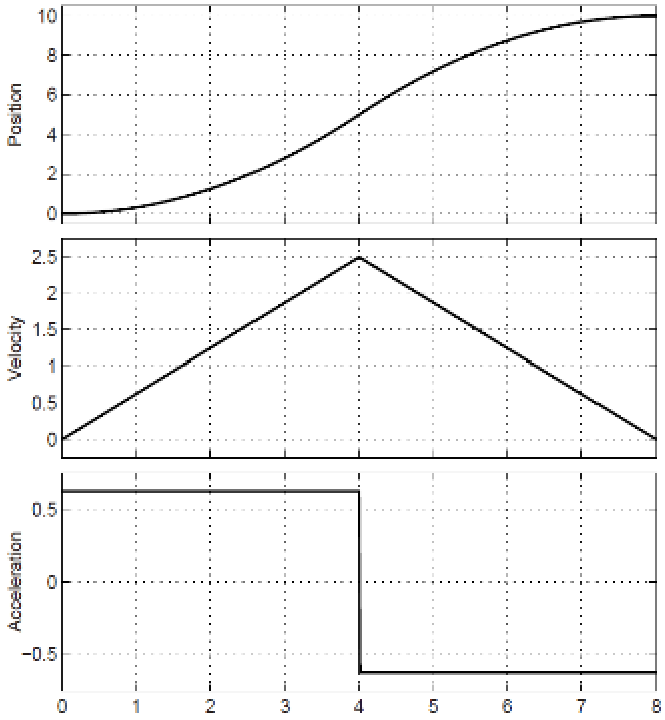
根据条件q_f, q_1和对终止速度v_1的要求

$$\begin{cases} q_b(t_f) = q_f = a_3 \\ q_b(t_1) = q_1 = a_3 + a_4(t_1 - t_f) + a_5(t_1 - t_f)^2 \\ \dot{q}_b(t_1) = v_1 = a_4 + 2a_5(t_1 - t_f) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = q_f = \frac{q_0 + q_1}{2}, a_4 = 2\frac{h}{T} - v_1$$

$$a_5 = \frac{2}{T^2}(v_1 T - h)$$

抛物线轨迹



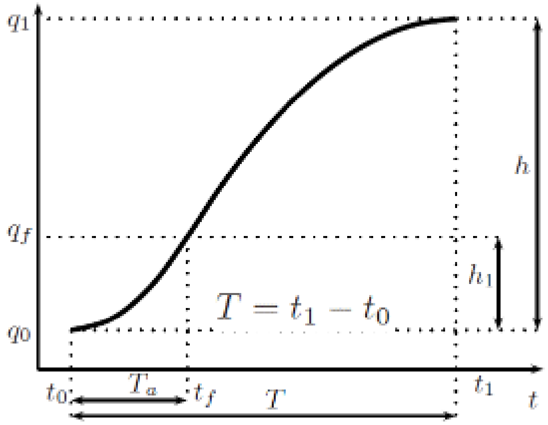
注意：如果$v_0 \neq v_1$则 在 t_f处速度不连续

$t_0 = 0, t_1 = 8,$

$q_0 = 0, q_1 = 10,$

$v_0 = 0, v_1 = 0$

抛物线轨迹



如果要求分段中间点满足位置和速度的连续性要求，需要取消中间位置约束，即仅要求

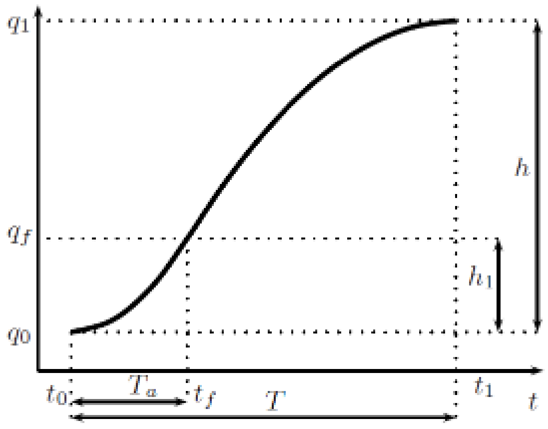
$$t_f = \frac{t_0 + t_1}{2}$$

根据以下方程求解

$$\begin{cases} q_a(t_0) = a_0 = q_0 \\ \dot{q}_a(t_0) = a_1 = v_0 \\ q_b(t_1) = a_3 + a_4 \dfrac{T}{2} + a_5 \left(\dfrac{T}{2}\right)^2 = q_1 \\ \dot{q}_b(t_1) = a_4 + 2a_5 \dfrac{T}{2} = v_1 \\ q_a(t_f) = a_0 + a_1 \dfrac{T}{2} + a_2 \left(\dfrac{T}{2}\right)^2 = a_3 = q_b(t_f) \\ \dot{q}_a(t_f) = a_1 + 2a_2 \dfrac{T}{2} = a_4 = \dot{q}_b(t_f) \end{cases}$$

其中$\frac{T}{2} = (t_f - t_0) = (t_1 - t_f)$

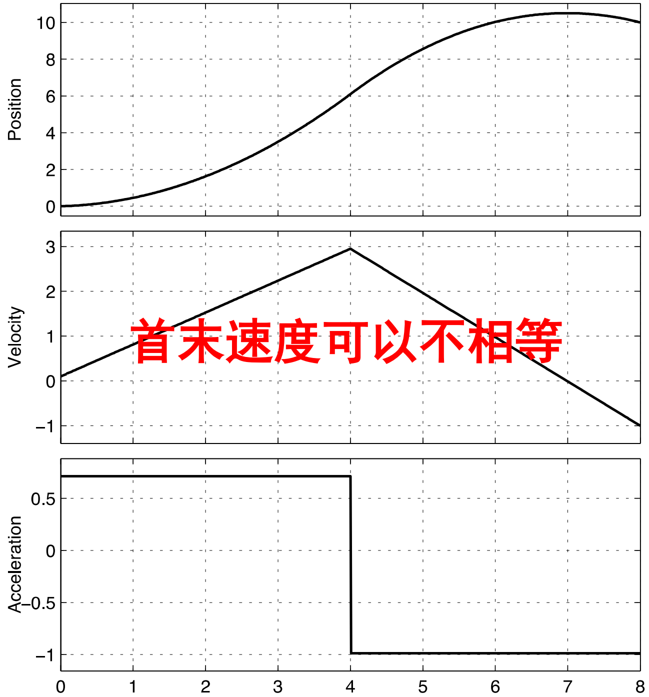
抛物线轨迹



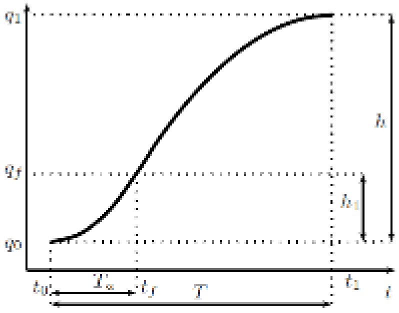
$$t_0 = 0, t_1 = 8,$$

$$q_0 = 0, q_1 = 10,$$

$$v_0 = 0.1, v_1 = -1$$



抛物线轨迹



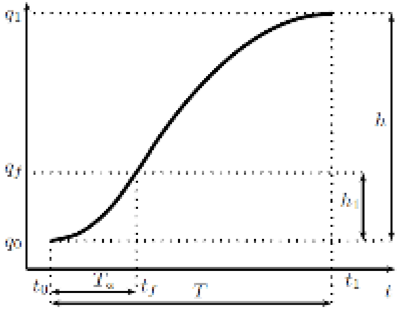
如果取消中间时间约束

$$
\begin{cases}
q_a(t_0) = a_0 = q_0 \\
\dot{q}_a(t_0) = a_1 = v_0 \\
q_b(t_1) = a_3 + a_4(t_1 - t_f) + a_5\left(t_1 - t_f\right)^2 = q_1 \\
\dot{q}_b(t_1) = a_4 + 2a_5(t_1 - t_f) = v_1 \\
q_a\left(t_f\right) = a_0 + a_1(t_1 - t_f) + a_2\left(t_1 - t_f\right)^2 = a_3\left(= q_b\left(t_f\right)\right) \\
\dot{q}_a\left(t_f\right) = a_1 + 2a_2(t_1 - t_f) = a_4\left(= \dot{q}_b\left(t_f\right)\right)
\end{cases}
$$

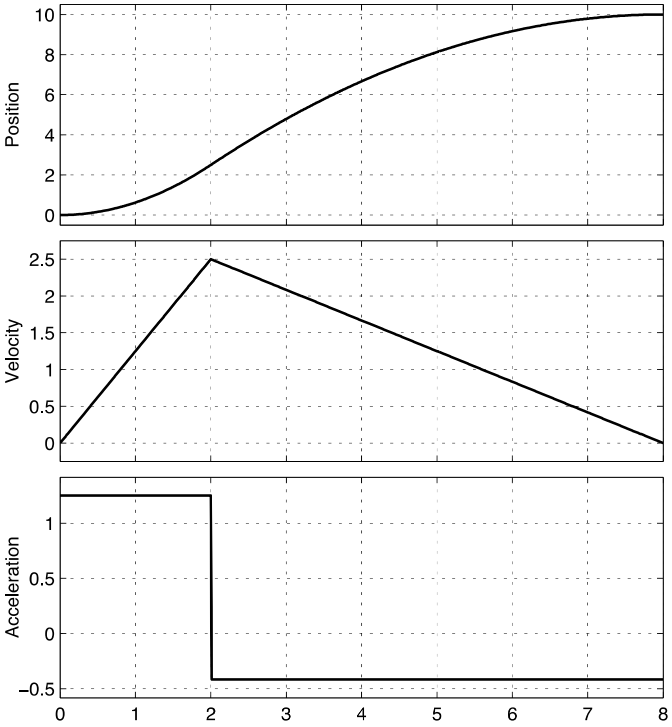
最后参数和t_f的取值有关

可以结合任务约束和/或最大加速度约束考虑

抛物线轨迹



如果没有对t_f 的约束



$t_0 = 0,\ t_1 = 8,$

$q_0 = 0,\ q_1 = 10,$

$v_0 = v_1 = 0$

基本一维轨迹规划

- 三阶多项式：可满足任意的$q_0, q_1, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1$约束

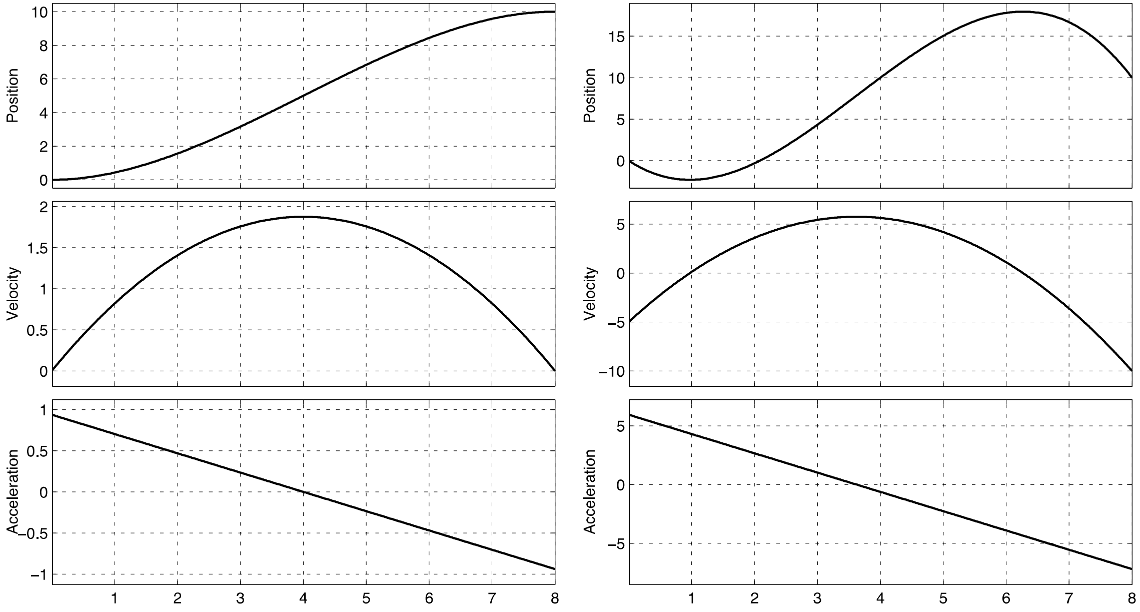
$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3$$

$$\begin{cases} a_0 = q_0 \\ a_1 = v_0 \\ a_2 = \dfrac{3h - (2v_0 + v_1)T}{T^2} \\ a_3 = \dfrac{-2h + (v_0 + v_1)T}{T^3} \end{cases}$$

基本一维轨迹规划

- 三阶多项式 $t_0 = 0, t_1 = 8, q_0 = 0, q_1 = 10$

$v_0 = v_1 = 0$ $\qquad$ $v_0 = -5, v_1 = -10$



(a) (b)

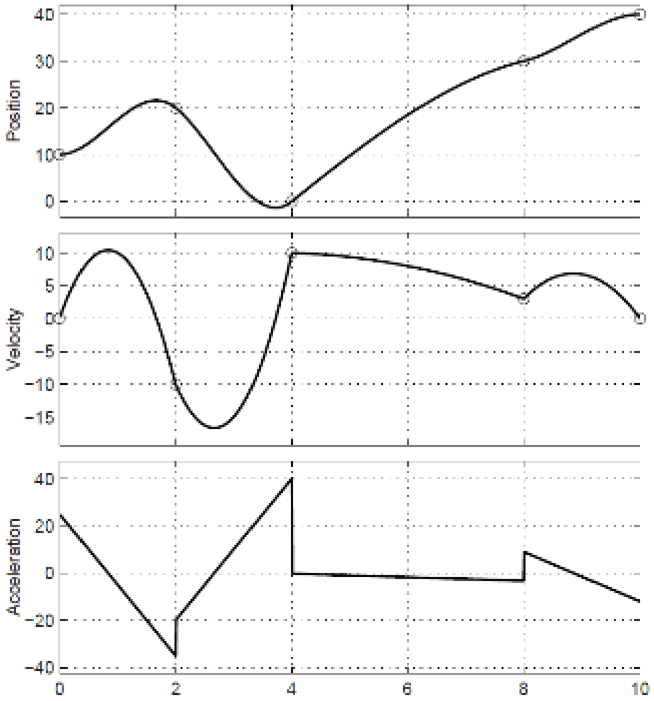
基本一维轨迹规划

- 利用多个三阶多项式可构建过多点的轨迹

$$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 8, t_4 = 10$$

$$q_0 = 10, q_1 = 20,\ q_2 = 0,\ q_3 = 30, q_4 = 40$$

$$v_0 = 0,\ v_1 = -10, v_2 = 10,\ \ v_3 = 3, v_4 = 0$$



基本一维轨迹规划

- 未定义中间点速度时，需采用启发式规则来定义合适的中间速度

$$v_k = \begin{cases} 0 & sign(d_k) \neq sign(d_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(d_k + d_{k+1}) & sign(d_k) = sign(d_{k+1}) \end{cases}$$

$d_k = (q_k - q_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$是$t_{k-1}$和$t_k$时刻之间线段斜率

$sign(\cdot)$是符号函数

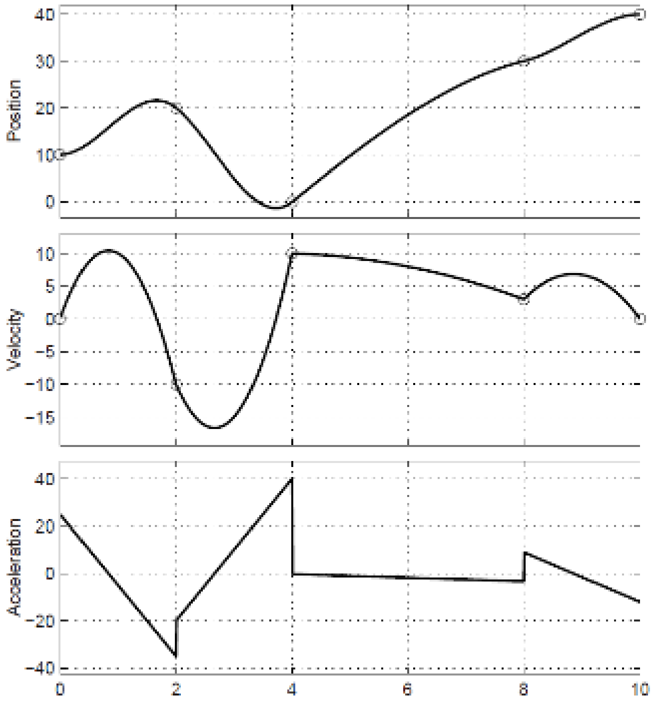
基本一维轨迹规划

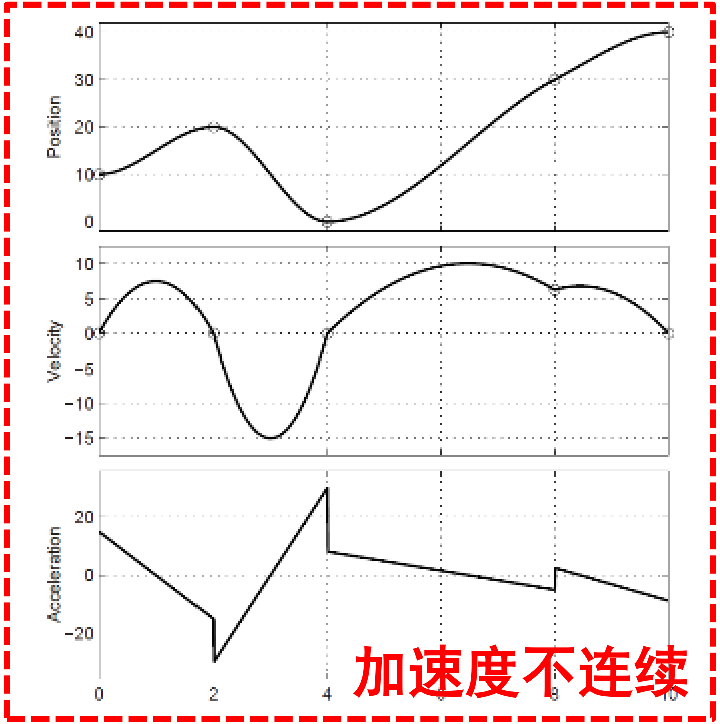
$t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 8, t_4 = 10$

$q_0 = 10, q_1 = 20,\ q_2 = 0,\ q_3 = 30, q_4 = 40$

$v_0 = 0, v_4 = 0$

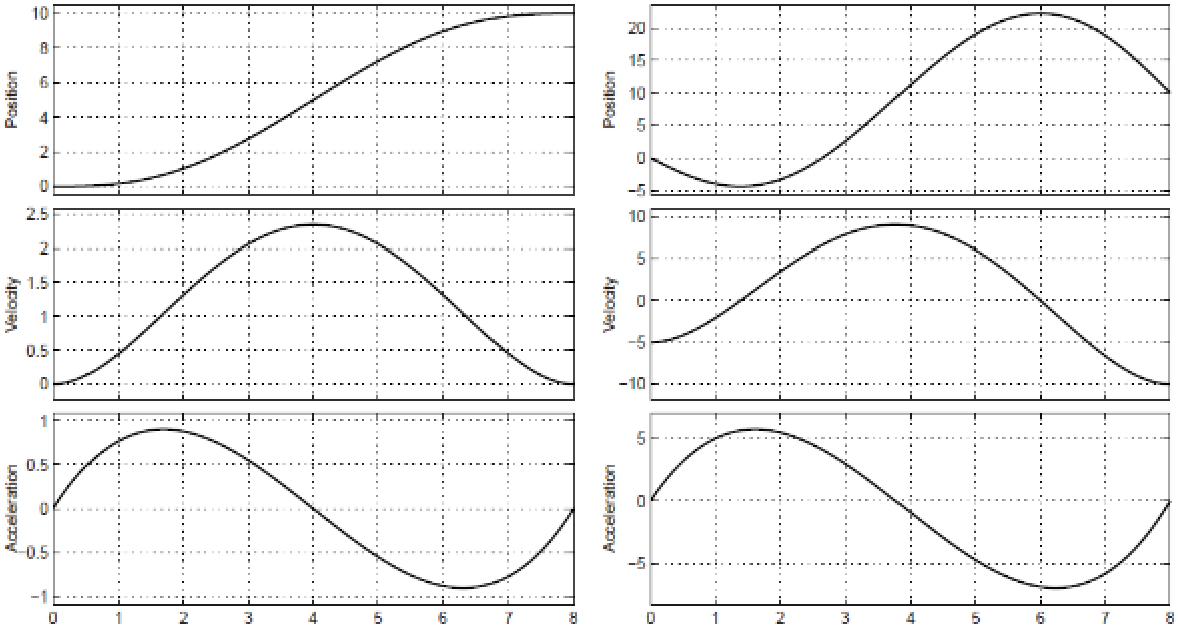
采用启发式函数计算中间速度的轨迹





基本一维轨迹规划

- 五阶多项式：加速度连续

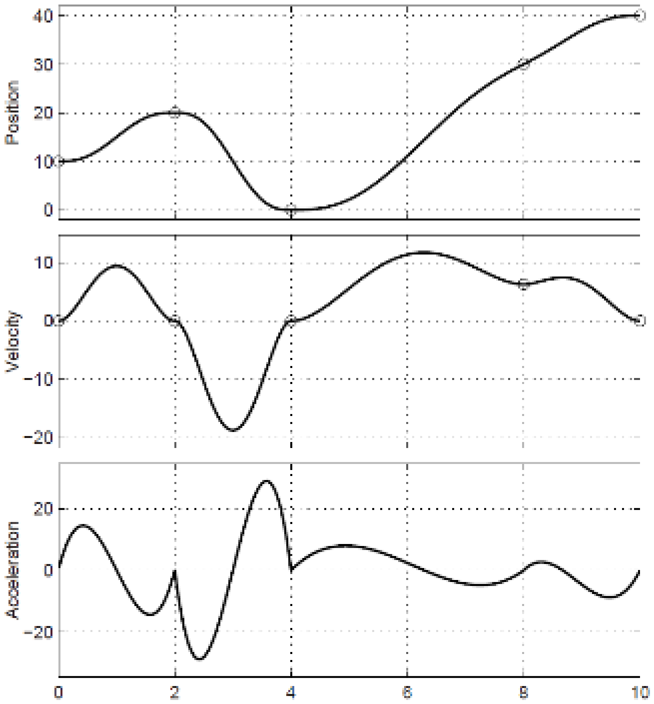


(a) (b)

单点轨迹规划

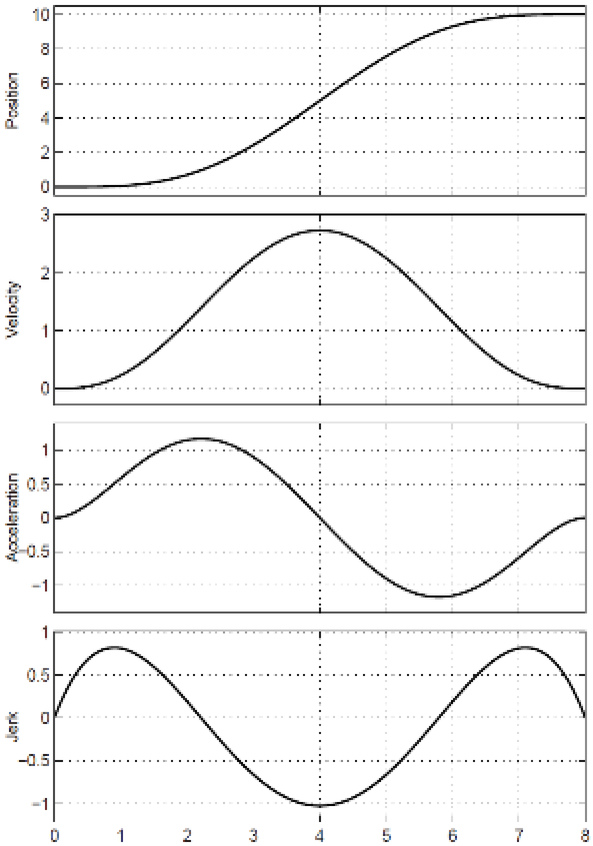
基本一维轨迹规划

- 基于多个五阶多项式实现的多点轨迹规划



基本一维轨迹规划

- 七阶多项式：
  可使加加速度连续



5.3 移动机器人平面轨迹规划

移动机器人平面运动轨迹规划

- 在平面上移动时，机器人有三个状态量(x, y, θ)
- 理论上，应该做三维轨迹规划$(x(t), y(t), \theta(t))$ 完整轨迹
- 实际上，只需要二维轨迹规划

$$\big(x(t), y(t)\big) \text{ 或 } (v(t), w(t))$$

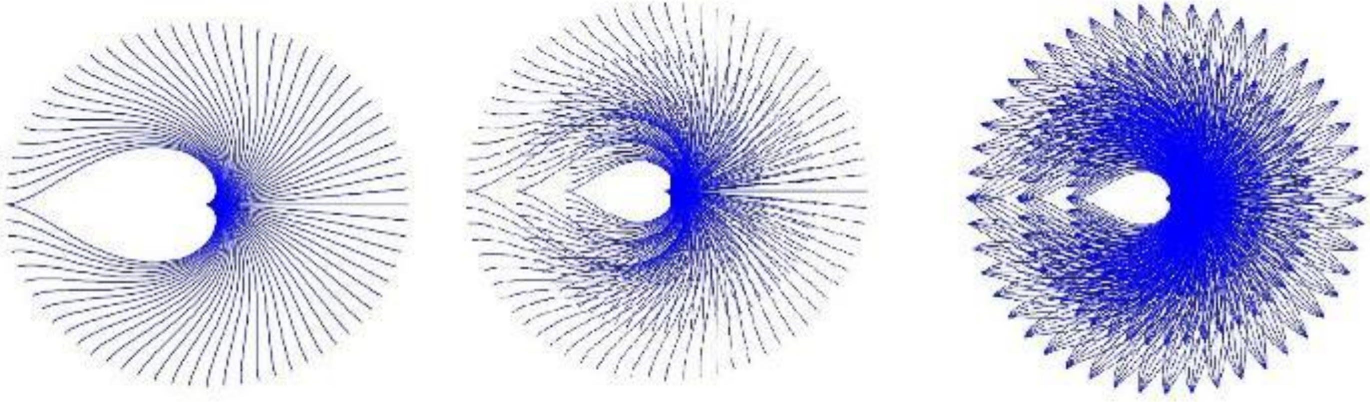
基本轨迹

$$\theta(t) = acttan\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = acttan\frac{y(t+1) - y(t)}{x(t+1) - x(t)}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = w(t) \\ \dot{x}(t) = v(t)cos\theta(t) \\ \dot{y}(t) = v(t)sin\theta(t) \end{cases}$$

实际应用时

通常预先构造初始猜测查找表，或者构建神经网络建立边界约束与控制律参数之间的映射关系



(a)位置和角度　(b)位置、角度和不同的半径　(c)位置、角度和末朝向

根据边界约束要求找到表中最相邻的边界约束条件，以表中值作为初值，迭代计算得到最优控制律参数

END !