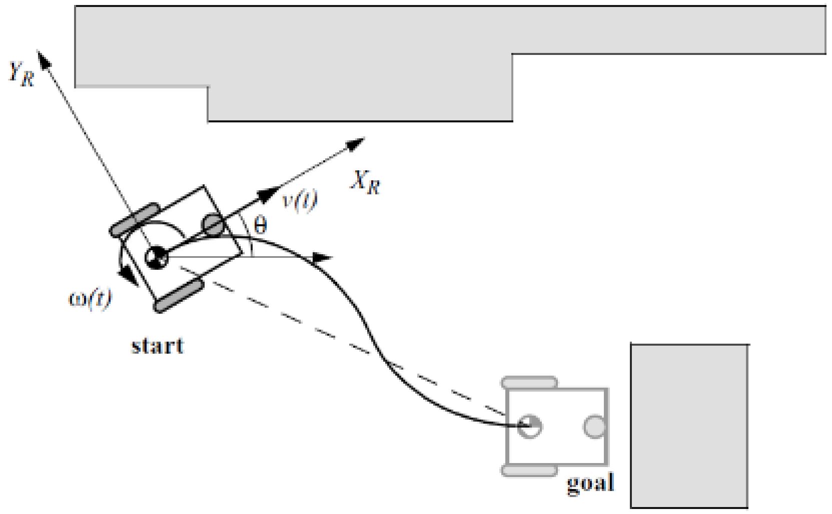
第五讲 轨迹规划

王越

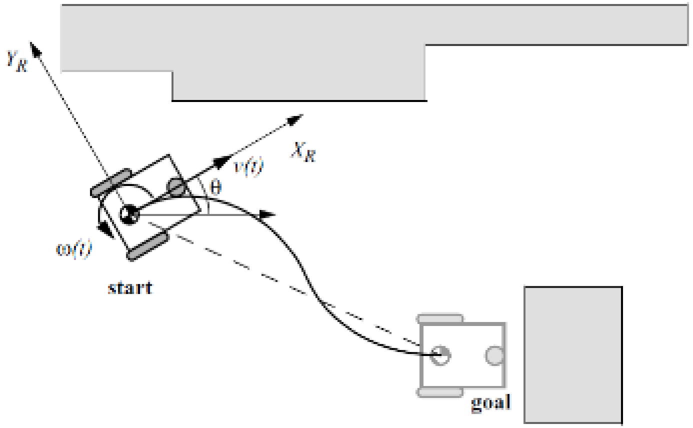
浙江大学 控制科学与工程学院

3. 反馈控制法

- 基本思想：根据当前状态与目标状态之间的差异，来生成减少这种差异的控制律



3. 反馈控制法



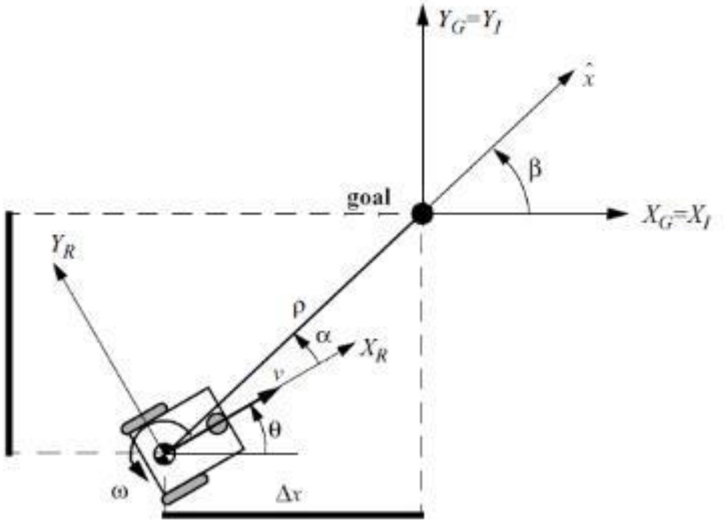
问题描述

- 机器人具有任意的位置和方向，以及任意的目标位置和方向
- 记机器人当前位姿为start = $(x(t), y(t), \theta(t))^T$，目标姿态为goal = $(x_g, y_g, \theta_g)^T$，实际姿态误差向量为e(t) = goal − start
- 控制器设计的任务是寻求一个控制矩阵K，生成机器人速度控制指令$[v(t), w(t)]$，使得误差趋向于0

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \mathrm{K} \cdot \mathrm{e(t)} \qquad \lim_{t \to \infty} \mathrm{e(t)} = 0$$

3. 反馈控制法

- 不失一般性，以目标姿态构建全局坐标系
  - 目标点为坐标系原点
  - 目标方向为坐标系x轴



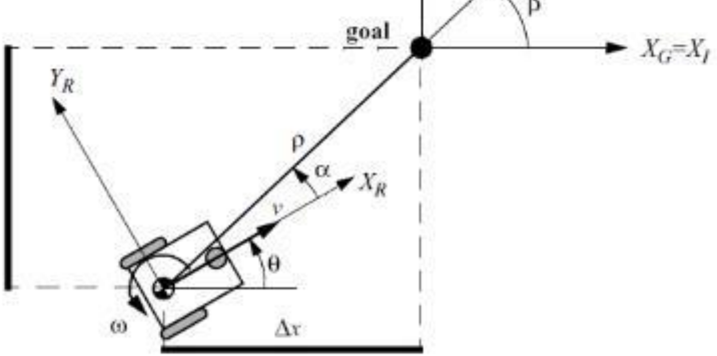
在该坐标系下，机器人的运动模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_I = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

3. 反馈控制法

- 根据缩小与目标位姿之间距离和角度差的思想，将笛卡尔坐标表示转换为极坐标表示
  - 机器人状态表示为(ρ, α, β)

$$\Delta x = 0 - x(t)$$
$$\Delta y = 0 - y(t)$$



r 机器人与坐标系原点连线距离

b 机器人与坐标系原点连线的方向

a 机器人方向与连线夹角

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \beta = arctan2(\Delta y, \Delta x) \quad \alpha = \beta - \theta$$

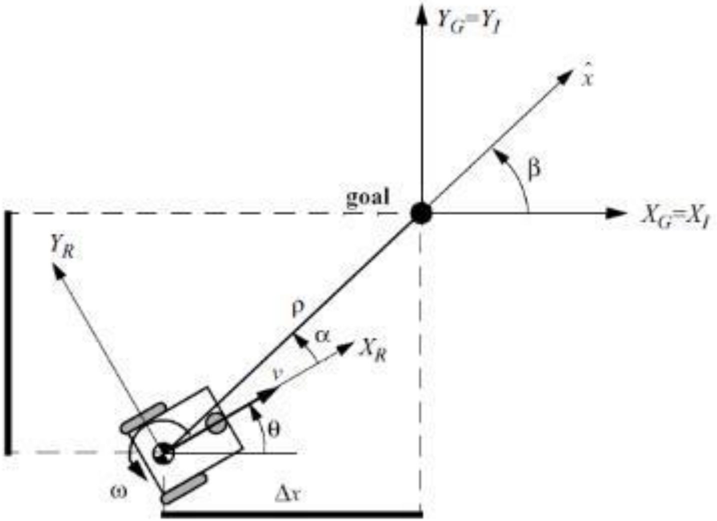
3. 反馈控制法

- 如果 $\alpha \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  机器人运动方向朝向目标位姿

  则系统描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cos\alpha & 0 \\ \frac{sin\alpha}{\rho} & -1 \\ \frac{sin\alpha}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$



3. 反馈控制法

- 控制律
  - 设计线性控制律

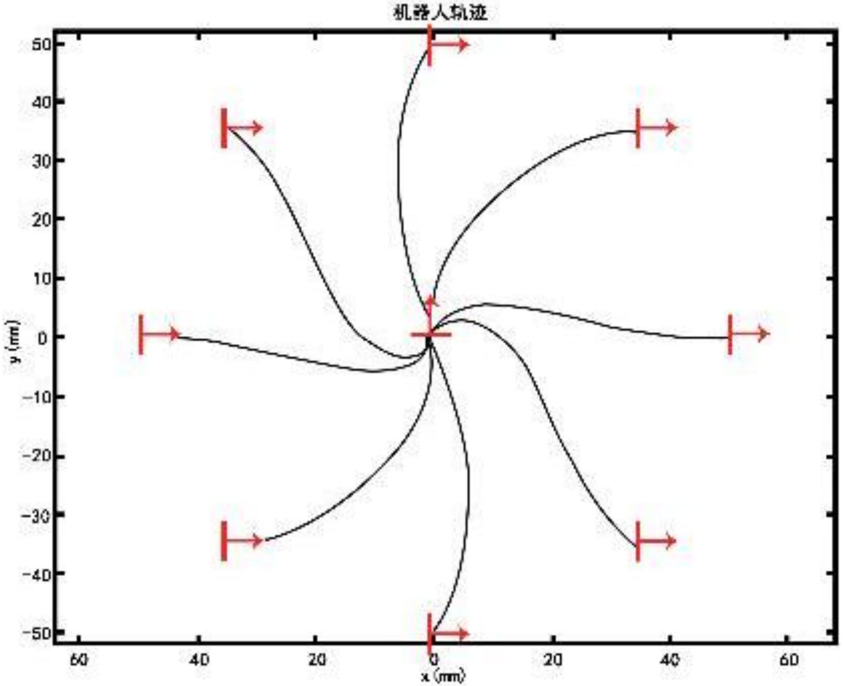
$$\boldsymbol{v} = k_\rho \rho$$

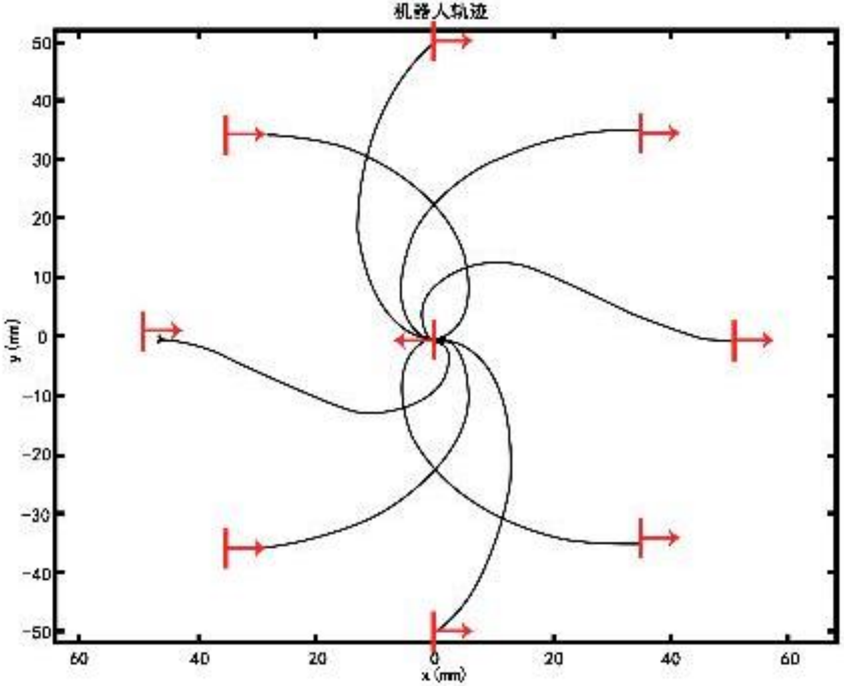
$$w = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cos\alpha & 0 \\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & -1 \\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\rho \rho cos\alpha \\ k_\rho sin\alpha - k_\alpha \alpha - k_\beta \beta \\ k_\rho sin\alpha \end{bmatrix}$$

奇异性消除

3. 反馈控制法





$$k_\rho = 3, k_\alpha = 8, k_\beta = 1.5$$

3. 反馈控制法

$$\boldsymbol{v} = k_\rho \rho$$

$$w = k_\alpha \alpha + k_\beta \beta$$

- 优点：简单，效果不错
- 存在问题：
  - 平移速度、转向速度相互独立，但机器人总能力是有限的，且平移速度和转向速度存在关联

反馈控制法优化

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cos\alpha & 0\\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & -1\\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ w\end{bmatrix}$$

- ρ 和 β 完全描述了机器人的位置
- α 描述了机器人的方向
- 控制量w直接影响状态 α
- ρ 和 β通过 α 决定

A Smooth Control Law for Graceful Motion of Differential Wheeled Mobile Robots in 2D Environment, ICRA2011

反馈控制法优化

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\alpha}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cos\alpha & 0\\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & -1\\ \dfrac{sin\alpha}{\rho} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ w\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-vcos\alpha\\ \dfrac{v}{\rho}sin\alpha\end{bmatrix} \quad （1）$$

$$\dot{\alpha}=\frac{v}{\rho}sin\alpha-w \quad （2）$$

控制律设计思路：

(a) 找到虚拟控制律 α，使得系统 (1) 向原点运动

(b) 找到实际控制律 w，使系统 (2) 动力学快于 (1)，快速稳定到虚拟控制

系统(1)的运动控制律

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-vcos\alpha\\ \dfrac{v}{\rho}sin\alpha\end{bmatrix}$$

- 考虑李雅普诺夫方程 $V=\frac{1}{2}(\rho^2+\beta^2)$
- 设计虚拟控制律为 $\alpha=\arctan(-k_1\beta)$

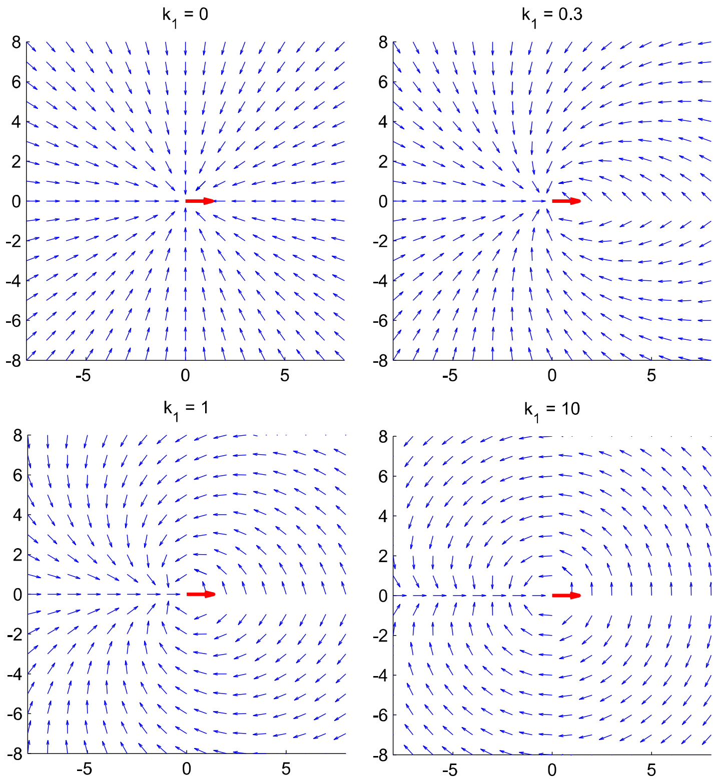
  它可以使系统(1)从任意点移向原点

$$\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\ \dot{\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-v\cos\arctan(-k_1\beta)\\ \dfrac{v}{\rho}\sin\arctan(-k_1\beta)\end{bmatrix}$$

$\dot{V}<0$

进一步选择 $v=k_\rho\rho$ 可以消除奇异点，实现系统渐进稳定

系统(1)的运动控制律 $\alpha = \arctan(-k_1\beta)$



红色为目标点

$k_1 = 0$时控制器成为完全的路径点跟随，快速接近目标

$k_1 \gg 0$时控制器成为姿态跟随，确保到达目标点后与目标方向一致

系统(2) $\dot{\alpha} = \frac{v}{\rho} sin\alpha - w$的运动控制律

- 要快于系统(1)，并且收敛到(1)
- 记实际状态 α 和期望状态 $\arctan(-k_1\beta)$之间的差值为z

$$z \equiv \alpha - \arctan(-k_1\beta)$$

- 控制目标是要使得z快速收敛为0，因此可以设计为具有快速收敛特性的全局指数稳定系统，

$$\varepsilon\dot{z} = -z \quad \Longrightarrow z = e^{-\frac{1}{\varepsilon}t}$$

ε越小，则z越快趋近于0，并且和边界无关

系统(2) $\dot{\alpha}=\frac{v}{\rho}sin\alpha-w$的运动控制律

根据z的定义可得，$\dot{z}=\dot{\alpha}-\frac{d}{dt}\arctan(-k_1\beta)$

代入$\dot{\alpha}=\dot{\beta}-w$

$$\dot{z}=\dot{\beta}-w-\frac{d}{dt}\arctan(-k_1\beta)$$

代入$\dot{\beta}=\frac{v}{\rho}sin\alpha$

$$\dot{z}=\left(1+\frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right)\frac{v}{\rho}sin\alpha-w$$

系统(2) $\dot{\alpha}=\frac{v}{\rho}sin\alpha-w$的运动控制律

$$\dot{z}=\left(1+\frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right)\frac{v}{\rho}sin\alpha-w$$

定义 $w=\frac{v}{\rho}\left[k_2 z+\left(1+\frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right)sin\alpha\right]$

$$\dot{z}=-k_2\frac{v}{\rho}z$$

当$k_2\gg 1$时，就得到了期望的全局指数稳定系统

系统(2) $\dot{\alpha} = \frac{v}{\rho} sin\alpha - w$的运动控制律

$$w = \frac{v}{\rho}\left[k_2 z + \left(1 + \frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right) sin\alpha\right]$$

代入 $z \equiv \alpha - \arctan(-k_1\beta)$

$$w = \frac{v}{\rho}\boxed{\left[k_2(\alpha - \arctan(-k_1\beta)) + \left(1 + \frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right) sin\alpha\right]}$$

与速度无关

系统(2) $\dot{\alpha} = \frac{v}{\rho} sin\alpha - w$的运动控制律

$$\kappa(\rho,\alpha,\beta) = \frac{1}{\rho}\left[k_2(\alpha - \arctan(-k_1\beta)) + \left(1 + \frac{k_1}{1+(k_1\beta)^2}\right) sin\alpha\right]$$

$w = v\kappa(\rho,\alpha,\beta)$　　　**说明旋转速度与平移速度是关联的**

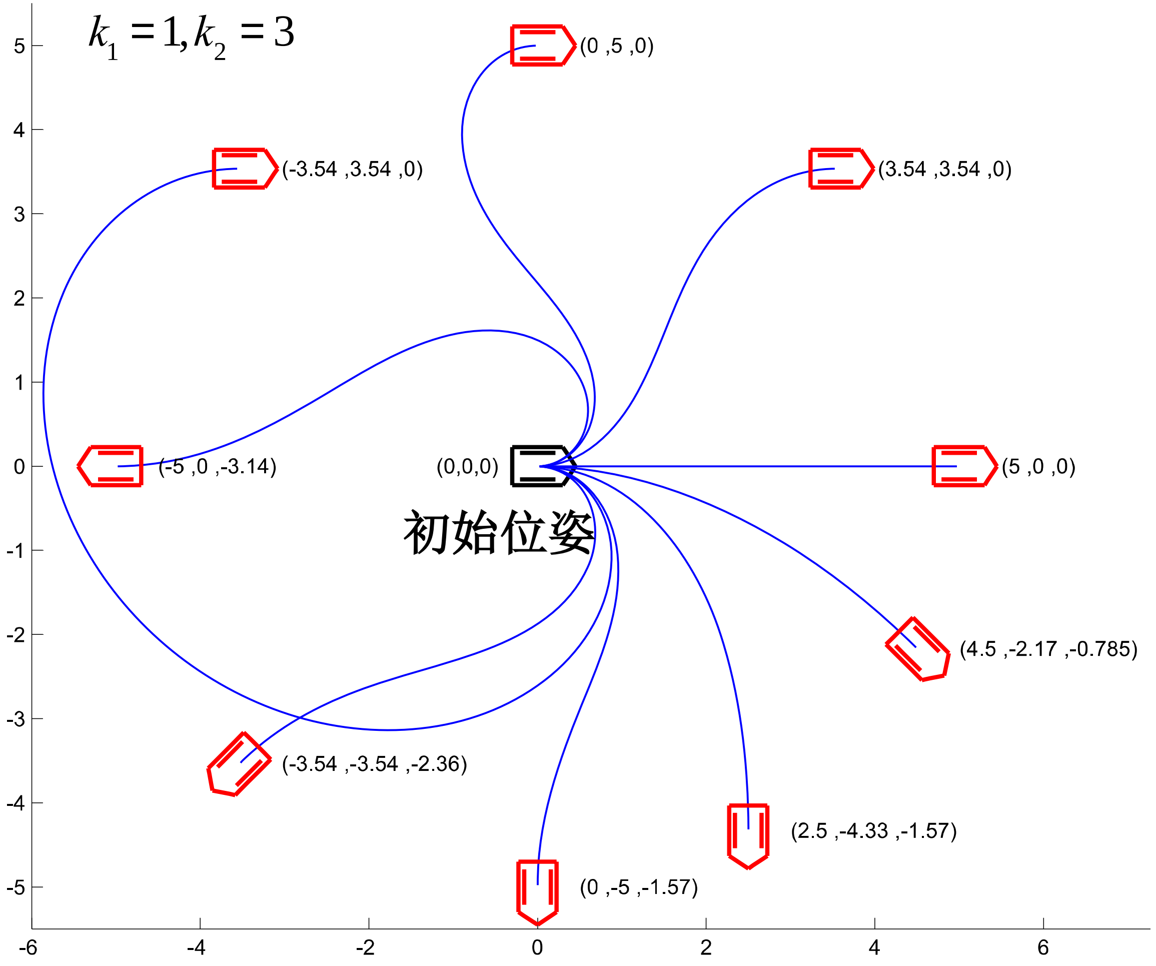
$\kappa(\rho,\alpha,\beta)$**为路径曲率，说明路径形状与平移速度无关**

需要根据曲率调整平移速度

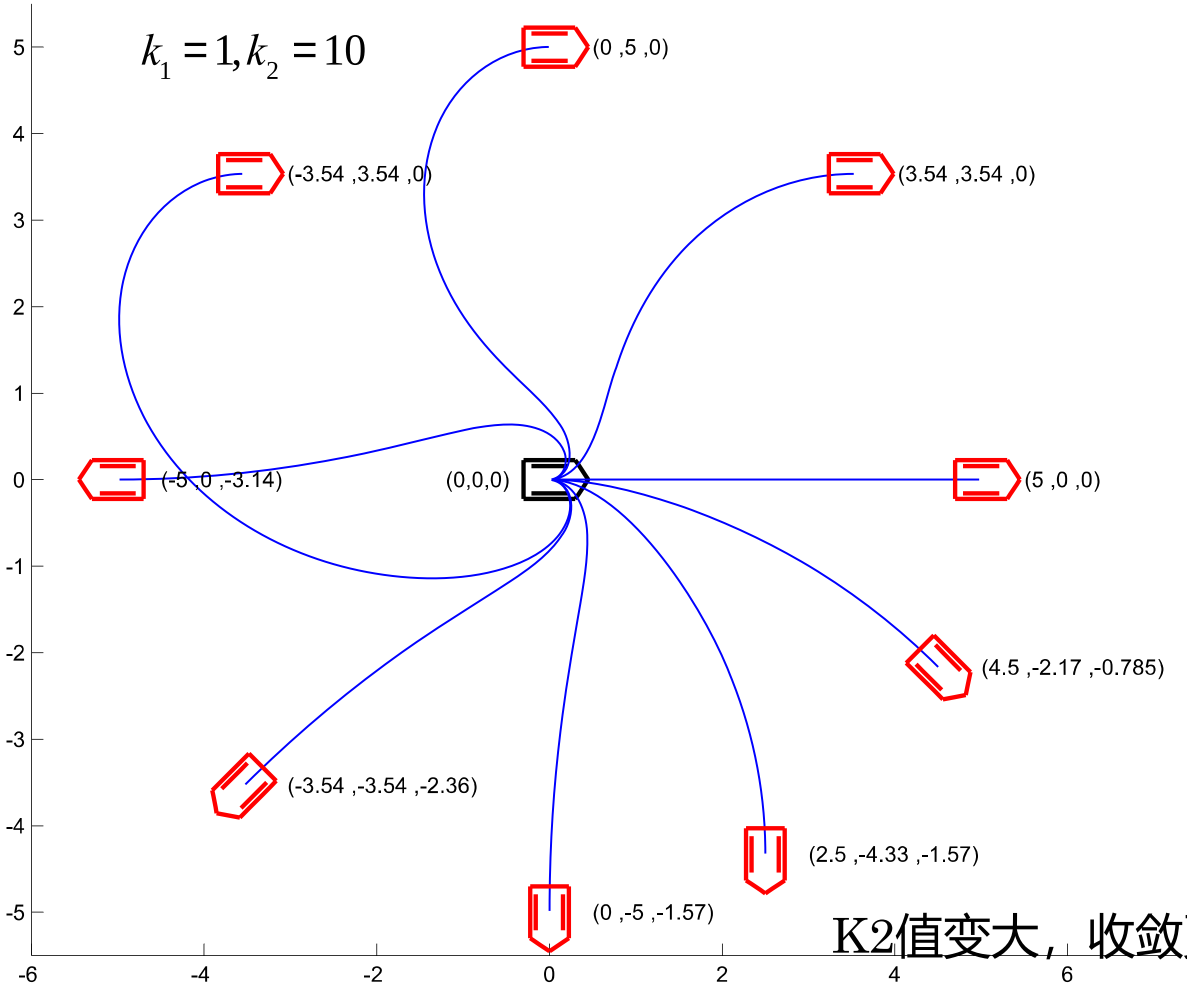
速度选择方法

$$v = \frac{v_{max}}{1 + \mu|\kappa(\rho, \alpha, \beta)|^{\lambda}}, \mu > 0, \lambda > 1$$

- 当$\kappa(\rho, \alpha, \beta)$趋向无穷时，$v$趋向于0
- 当$\kappa(\rho, \alpha, \beta)$趋向于 0时，$v$趋向于$v_{max}$



$k_1 = 1, k_2 = 3$
(0 ,5 ,0)
(-3.54 ,3.54 ,0)
(3.54 ,3.54 ,0)
(-5 ,0 ,-3.14)
(0,0,0)
(5 ,0 ,0)
初始位姿
(4.5 ,-2.17 ,-0.785)
(-3.54 ,-3.54 ,-2.36)
(2.5 ,-4.33 ,-1.57)
(0 ,-5 ,-1.57)


$k_1 = 1, k_2 = 10$
(0 ,5 ,0)
(-3.54 ,3.54 ,0)
(3.54 ,3.54 ,0)
(-5 ,0 ,-3.14)
(0,0,0)
(5 ,0 ,0)
(4.5 ,-2.17 ,-0.785)
(-3.54 ,-3.54 ,-2.36)
(2.5 ,-4.33 ,-1.57)
(0 ,-5 ,-1.57)

K2值变大，收敛更快

反馈控制法

- 优点：
  - 简单，计算较快
  - 参数较少，参数意义明确，与效果直接对应
- 问题
  - 只能在轨迹生成后进行碰撞检测，如果发生碰撞需要调节参数重新规划
  - 不考虑当前速度，容易造成速度不连续

END !