Discrete mathematics **Kiril Kuzmin**
Домашнее задание #6
Подготовка к тесту #1
January 16, 2023

Problem 1. Транспонируйте матрицу $\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Problem 2. Найдите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Problem 3. Найдите ранг матрицы $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}$.

Problem 4. Найдите обратную матрицу $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Problem 5. Решите систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 6. Найдите фундаментальное решение для системы однородных линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem 7. Правда или нет, что:

(a) Ранг матрицы может быть равен 0.

(b) Если у квадратной матрицы два столбца пропорциональны, то ее определитель равен 0.

(c) Ранг матрицы размера $n \times m$ равен $\max\{n, m\}$.

(d) Неоднородная система линейных уравнений всегда имеет решения.

Problem 8. Пусть матрица $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ осуществляет поворот на 50° против часовой стрелки, матрица $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$ растягивает в два раза вдоль каждой из осей координат, а матрица $C = [c_{ij}]_{2\times 2}$ делает зеркальное отражение относительно прямой $y = 0$. Тогда преобразование ABC осуществляет:

(a) поворот, затем растяжение, затем отзеркаливание;

(b) отзеркаливание, затем растяжение, затем поворот;

(c) растяжение, затем поворот, затем отзеркаливание;

(d) растяжение, затем отзеркаливание, затем поворот;

(e) может (a), а может и (b).

Problem 9. Приведите пример матрицы размера 3×3, определитель которой равен 2022.

Problem 10. Мы решаем систему однородных линейных уравнений с 3 переменными. Можно ли утверждать, что некоторые из решений этой системы пробегают все точки некоторой плоскости, если ранг матрицы системы равен

(a) 0?

(b) 1?

(c) 2?

(d) 3?

Problem 11. Если каждый элемент матрицы A размера 10×10 увеличить в 2 раза, то как изменится ее определитель?

Problem 12. Пусть $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$. Чему равна матрица $(2A)^{-1}$?

Problem 13. Система однородных линейных уравнений была такова, что ее можно было решить с помощью формул Крамера. Какова размерность пространства решений этой системы? Что за решение/решения нашел метод Крамера?

Problem 14. К матрице размера $n \times m$ и ранга r приписали нулевую строку, сделав ее размер равным $(n+1) \times m$. Что можно сказать о ранге такой матрицы:

(a) останется равным r;

(b) станет равным 0;

(c) уменьшится на 1;

(d) увеличится на 1;

(e) может как уменьшиться на 1, так и увеличиться на 1.

Ответы

Problem 1. $\begin{bmatrix} 20 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Problem 2. -8.

Problem 3. 1.

Problem 4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Problem 5. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Problem 6. Общее решение: $\begin{bmatrix} 4\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$.

Фундаментальное решение: $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (или любой пропорциональный ему ненулевой вектор).

Problem 7.

(a) Да. У матрицы, состоящей только из нулей, ранг равен 0.

(b) Да. Это одно из свойств определителя.

(c) Нет. На самом деле ранг матрицы размера $n \times m$ меньше либо равен $\min\{n, m\}$.

(d) Нет. Неоднородная система линейных уравнений может и не иметь решений. Это бывает, когда ранг расширенной матрицы больше ранга основной.

Problem 8. **(b)**. Преобразование ABC подразумевает сначале воздействие матрицей C [на некоторый вектор x], затем B, а затем A, так как $ABCx = A\big(B(Cx)\big)$.

Problem 9. Например, $\begin{bmatrix} 2022 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, или $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 337 \end{bmatrix}$, или, скажем, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 33 \\ 0 & 0 & 337 \end{bmatrix}$ – можно привести сколько хочешь простых примеров используя утверждение, что для треугольной и диагональной матрицы определитель – это произведение элементов на главной диагонали.

Problem 10. **(a)** и **(b)**. Размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений равна $m-r$, где m – число переменных, r – ранг матрицы системы. Чтобы можно было утверждать, что некоторые из решений этой системы пробегают все точки некоторой плоскости, надо, чтобы размерности пространства решений была как минимум 2.

Problem 11. Увеличится в 2^{10} раз. Чтобы в этом убедиться, достаточно из кажной строки определителя вынести множитель 2.

Problem 12. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Здесь используется свойство, что $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$.

Problem 13. Размерность пространства решений – 0, метод Крамера нашел нулевое решение (нулевой вектор). Так как однородная система уравнений решилась по методу Крамера, определитель матрицы этой системы не равен нулю. А это означает, что у этой системы есть единственное решение. С другой стороны мы знаем, что у любой однородной системы уравнений есть нулевое решение. Стало быть его и нашел метод Крамера.

Problem 14. **(a)**. Нулевой вектор линейно зависим от любой системы векторов, при его добавлении в систему векторов ранг не может увеличиться. Однако и уменьшиться ранг тоже не может, так как уже имеющиеся в наборе векторы никуда не исчезли.