

Optimización dinámica del despacho de buses: un enfoque adaptativo a la demanda y condiciones operativas de Montería

Martin Del Gordo^a, Samuel Rubio^a, Javier Barrera^a

^a*Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Los Andes, Colombia*

Abstract

Las estrategias de despacho de autobuses son esenciales para los sistemas de transporte público urbano, ya que impactan directamente en el desempeño operacional, la eficiencia en la operación y la optimización de recursos. Este estudio presenta un modelo de optimización basado en redes espacio-temporales para gestionar el despacho de autobuses de manera eficiente, maximizando el desempeño operacional del sistema. El modelo se adapta a las fluctuaciones de la demanda de pasajeros, que se predicen utilizando técnicas de aprendizaje automático en un horizonte temporal discreto. Además, considera las características específicas de los sistemas de transporte público de tamaño medio en Colombia.

Se implementaron estrategias de aceleración computacional para mejorar la viabilidad operativa del modelo, lo que resultó en una mejora significativa en los tiempos de cálculo. Estas estrategias incluyeron ajustes de parámetros del solver y herramientas de optimización automática, lo que permite una respuesta eficiente en entornos dinámicos de planificación.

Este trabajo contribuye al campo del transporte público al ofrecer una herramienta avanzada para la planificación del despacho de autobuses, mejorando la eficiencia y sostenibilidad operativa. Investigaciones futuras explorarán la integración de optimización estocástica y técnicas avanzadas de aprendizaje automático para la predicción de demanda, ampliando la aplicabilidad del modelo a contextos urbanos dinámicos.

Keywords: optimización, transporte público, despacho dinámico, flujo en redes, programación entera mixta

1. Introducción

La eficiencia del transporte público es crucial para la calidad de vida en las ciudades y la sostenibilidad urbana. Un sistema de transporte bien gestionado minimiza los tiempos de espera, mejora la experiencia del usuario y optimiza el uso de los recursos disponibles, reduciendo la congestión vehicular, las emisiones contaminantes y el consumo de espacio urbano. Debido a esto, según el Banco Mundial[1] hoy en día uno de los principales desafíos de los países en desarrollo es garantizar que todos tengan acceso a una movilidad eficiente a partir de la modernización y optimización de las operaciones de sus sistemas de transporte público. Sin embargo, a pesar de los avances en la planificación del transporte público, muchas ciudades y regiones continúan enfrentando desafíos importantes relacionados con la elaboración de rutas, sincronización de horarios y asignación de buses, lo que genera servicios poco confiables e ineficientes[2].

Por lo tanto, un aspecto clave en la gestión óptima del transporte público es el despacho eficiente de autobuses. Tradicionalmente, los modelos de despacho de buses se basan en horarios fijos o en

Email addresses: m.delgordo@uniandes.edu.co (Martin Del Gordo), s.rubioc2@uniandes.edu.co (Samuel Rubio), j.barrerahu@uniandes.edu.co (Javier Barrera)

reglas operativas simples, que no logran capturar adecuadamente las variaciones en la demanda de pasajeros ni las condiciones cambiantes del tráfico. Estas aproximaciones estáticas a menudo resultan en una utilización ineficiente de los recursos. En algunos casos, se observa una sobreoferta de autobuses, con vehículos subutilizados en momentos de baja demanda, mientras que en otros, la falta de buses en horarios pico provoca largos tiempos de espera y congestión de pasajeros.[3] Este desequilibrio resalta la necesidad de desarrollar modelos de despacho más sofisticados y flexibles que se adapten a las condiciones operativas, como los retrasos, el tráfico, la capacidad y cantidad de buses, y la demanda.

En años recientes, el campo de la optimización del despacho de buses ha progresado significativamente gracias a la integración de técnicas avanzadas de modelado matemático y algoritmos de optimización. Entre las metodologías más destacadas se encuentran la programación lineal y entera, así como algoritmos heurísticos y metaheurísticos, tales como los algoritmos genéticos y la optimización por enjambre de partículas. Estos modelos avanzados permiten equilibrar múltiples objetivos, como la minimización de los tiempos de espera de los pasajeros, la reducción de costos operativos, la disminución de las emisiones contaminantes y la mejora de la confiabilidad del servicio.[4] Sin embargo, aunque estos enfoques han demostrado ser efectivos en diversas aplicaciones, su implementación en entornos reales aún enfrenta desafíos debido a la complejidad de las operaciones y la necesidad de considerar factores impredecibles, como el tráfico y la demanda variable [5].

El problema de optimización del despacho de buses puede abordarse desde dos perspectivas clave: la de los usuarios y la de las empresas operadoras. Por un lado, las empresas buscan minimizar costos, maximizar sus utilidades y mantener una alta frecuencia de buses, lo que a menudo lleva a priorizar la eficiencia operativa sobre las necesidades de los usuarios. Por otro lado, los usuarios demandan un servicio de transporte cómodo, accesible, puntual y eficiente. Estas diferencias en las prioridades crean una tensión natural entre los objetivos empresariales y las expectativas de los pasajeros, lo que hace que encontrar una solución que equilibre ambos intereses sea complejo. Diversos autores plantean soluciones basadas en sus respectivos enfoques, tal como se evidencia en [3]. Actualmente, el desafío consiste en desarrollar un sistema que logre una asignación óptima de recursos, capaz de satisfacer la demanda de los usuarios, mejorar su experiencia de transporte y, al mismo tiempo, optimizar las operaciones para las empresas.

Dado los problemas identificados en el sistema de transporte público, este documento se enfoca en la ciudad de Montería, Colombia, la cual enfrenta importantes desafíos de movilidad que han impactado negativamente a los usuarios, las empresas de transporte y el comercio local. Según Fenalco, la situación en Montería es especialmente preocupante debido a una crisis financiera y operativa que viene afectando desde hace algunos años a las empresas del sector.[6]. Las empresas de transporte no han podido ofrecer un servicio eficiente, lo que les ha generado grandes pérdidas y las ha obligado a reducir tanto las rutas como la frecuencia de los buses ofrecidas en sus ofertas, causando un incremento significativo en los tiempos de espera y disminuyendo la calidad del servicio, razones que junto al crecimiento del transporte informal e ilegal se señalan como las principales causas de la desincentivación de las personas a movilizarse por este medio. [7].

Este panorama en Montería refleja problemas estructurales y logísticos similares a los experimentados en otras ciudades de Colombia. Tal como señalan Gibet Camós y Juanita Concha, la implementación de sistemas de transporte masivo, como el MIO en Cali, ha dejado importantes lecciones sobre la consolidación de estos sistemas. La calidad deficiente del servicio, la frecuencia inadecuada y el aumento del transporte informal, junto con la dependencia de los ingresos por tarifas, han impedido la efectividad de estos sistemas [2]. En Montería, las empresas de transporte han experimentado pérdidas significativas, y la mejora del servicio se plantea como una solución necesaria para revertir esta situación [8]. Por lo tanto, ante la clara necesidad de los operadores del transporte urbano de soluciones cada vez mas sofisticadas para realizar la planificación de la operación de sus

flotas, este trabajo pretende atacar esta problemática mediante el desarrollo de un modelo de flujo en redes que permita optimizar la programación y despacho de buses en el sistema de transporte público de Montería. Además, se busca que la toma de decisiones del modelo sea dinámica basándose en factores como la variabilidad en los flujos de usuarios, la capacidad de los vehículos y los tiempos de tránsito. Finalmente se evalúa el desempeño del modelo propuesto evaluando que efectivamente este halla incrementado el nivel de servicio de los usuarios y generado una utilización eficiente de los buses.

2. Estado del Arte

2.1. Clasificación de problemas asociados con la planificación de transporte público

Usualmente, los problemas de medios de transporte público se dividen en cinco diferentes tipos de objetivos. El primer tipo de problema es el diseño de rutas, este se centra en planificar y definir las distintas rutas de transporte público con el objetivo de satisfacer las necesidades de los usuarios y al mismo tiempo las de la empresa. Segundo, la frecuencia de los buses para generar satisfacción en los clientes. Tercero, el horario de cada ruta y la salida de los buses para mantener un sistema estable en el medio de transporte. Cuarto, la programación de los distintos tipos de vehículos en el sistema, y, por último, la programación de los empleados, quienes son responsables de que el sistema funcione. Cada uno de estos objetivos cuenta con distintos supuestos necesarios para llegar a una solución, lo que contribuye a que el sistema de transporte público sea multiobjetivo, dificultando el análisis y las diversas soluciones. [3]

Estos problemas son de gran complejidad y, cada año, con el avance de la tecnología, se obtienen respuestas más rápidas y mejores. Sin embargo, la solución de un sistema de transporte, aunque se aborde desde distintas perspectivas, sigue siendo considerada un problema NP-Hard [9]. Un problema NP-Hard, o problema NP-duro, es aquel cuya complejidad es tal que no se puede reducir el tiempo de obtención de resultados. Estos problemas son tan difíciles de resolver que no existen algoritmos que puedan resolverlos en tiempo polinómico.

El primer tipo de problema abordado en la planificación del transporte público es el diseño de rutas o *Transit Network Design Problem* (TNDP). El objetivo principal de este problema es determinar las rutas óptimas por las cuales los autobuses deben operar, incluyendo la ubicación de las paradas. La solución generalmente se basa en el uso de matrices origen-destino, buscando satisfacer la demanda de la mayor cantidad posible de pasajeros. El primer enfoque sobre este problema fue presentado por Patz en 1925 [10], quien planteó un modelo con el objetivo de minimizar el número de asientos vacíos en los autobuses, considerando la capacidad del vehículo y la demanda en cada sitio. A lo largo del tiempo, varios autores han propuesto diferentes restricciones para mejorar la solución del TNDP. Por ejemplo, Murray [11] sugiere la consideración de características como la cobertura de las rutas, la longitud de estas, la densidad de pasajeros y las ubicaciones de las paradas. En otro estudio, Murray [12] introduce la condición de que el nivel de satisfacción de la demanda debe ser superior al 90 %, teniendo en cuenta las distintas longitudes de las rutas y los tipos de autobuses. Estos estudios destacan la importancia de factores como la longitud de las rutas, la densidad de pasajeros, el número de paradas y la demanda, como elementos clave para la solución del TNDP.

El segundo tipo de problema, conocido como establecimiento de frecuencias o *Transit Network Frequency Setting Problem* (TNFSP), se enfoca en determinar la frecuencia con la que los autobuses deben operar en rutas predefinidas para satisfacer la demanda de pasajeros. Scheele [13] fue uno de los primeros en abordar este problema, proponiendo un modelo cuyo objetivo es minimizar el tiempo que los pasajeros pasan a bordo de los autobuses, mientras se considera la capacidad de los vehículos y la disponibilidad de la flota. Por su parte, Furth [14] se enfoca en maximizar el número de pasajeros transportados y minimizar el tiempo de espera en las paradas, teniendo en cuenta las restricciones

impuestas por el tamaño de la flota y el presupuesto disponible. Evidenciando dos formas diferentes en abordar el problema.

El tercer tipo de problema es el de asignación de horarios o *Transit Network Timetabling Problem* (TNTP). Este problema busca establecer los horarios óptimos de salida de los autobuses desde las terminales, el tiempo total para completar una ruta y las horas estimadas de llegada a cada parada. Guihaire [3] señala que los elementos clave en la solución de este problema incluyen la satisfacción de la demanda, la coordinación de las transferencias entre rutas, el tamaño de la flota y la reutilización de horarios previamente establecidos. Chakroborty [15] presentó uno de los primeros enfoques al respecto, con el objetivo de minimizar el tiempo total de espera de los pasajeros, utilizando restricciones como el tamaño de la flota, la capacidad de los vehículos y el número máximo de transferencias. Otro enfoque relevante fue propuesto por Castelli [16], quien se centra en minimizar el tiempo de transferencia, considerando las frecuencias y rutas previamente establecidas.

El cuarto tipo de problema es el problema de diseño de rutas y establecimiento de frecuencias o *Transit Network Design and Frequency Setting Problem* (TNDFSP), que combina los enfoques de los problemas TNDP y TNFSP. Este problema tiene como objetivo simultáneo diseñar las rutas óptimas y determinar la frecuencia de los autobuses en esas rutas. Uno de los primeros modelos fue desarrollado por Lampkin en 1967 [17], quien se enfocó en maximizar el número de pasajeros transportados directamente y minimizar su tiempo total de viaje, bajo la restricción de la capacidad de los autobuses. En un estudio más reciente, Borndorfer [18] abordó el problema en la ciudad de Postdam, con el objetivo de minimizar el tiempo de viaje de los pasajeros y los costos operativos, respetando la demanda del sistema de transporte.

El último tipo de problema es el problema de asignación de frecuencias y horarios o *Transit Network Scheduling Problem* (TNSP), que combina los enfoques del TNFSP y el TNTP. Este problema tiene como objetivo determinar las frecuencias de los autobuses y, con base en estas, generar los horarios de salida y llegada en las paradas. Eranki [19] aborda este problema buscando minimizar el tiempo de espera de los pasajeros, bajo la restricción de no exceder un tiempo máximo de espera y estableciendo la coordinación de llegadas simultáneas entre diferentes rutas.

De esta forma, se evidencia la complejidad de los distintos problemas y su relación, lo que complica el entendimiento de los sistemas de transporte público. Estos problemas se pueden comprender como se muestra en la Figura.1, propuesta por [3].

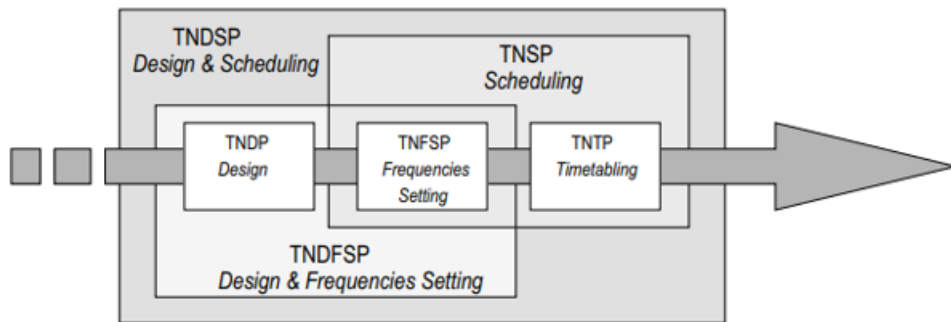


Figura 1: Tipos de problemas en medios de transporte

Con el entendimiento de estos problemas se puede evidenciar el desarrollo y conocimiento del estado del arte. A continuación, se evidencia el estado del arte en los distintos tipos de problemas.

2.1.1. Métodos basados en programación lineal

Uno de los enfoques más utilizados para la optimización del despacho de vehículos en transporte público es la programación lineal. Este enfoque se centra en formular el problema como un conjunto de ecuaciones lineales que representan las restricciones operativas, como la capacidad de los autobuses, los horarios de operación y la demanda de pasajeros. Generalmente suele tener como objetivo minimizar los costos operativos o maximizar la eficiencia del sistema mediante.

Por ejemplo, el artículo [18] aborda el problema de determinar las frecuencias óptimas de autobuses con el objetivo de minimizar los costos operativos y los tiempos de viaje de los pasajeros. Para plantear este problema, los autores emplean matrices origen-destino que modelan los patrones de desplazamiento de los pasajeros entre distintos puntos en un marco temporal. A partir de estas matrices, ajustan las frecuencias de las rutas para satisfacer la demanda de transporte. Los autores proponen dos modelos multiobjetivo, que buscan minimizar una combinación del tiempo total de transporte y los costos operativos. El segundo modelo considera el sistema de transporte como un grafo unidireccional donde se analiza cada ruta de manera individual. Este modelo asume que los pasajeros eligen siempre la ruta más corta y que los autobuses operan dentro de límites de capacidad específicos. Las variables clave del modelo son: la cantidad de pasajeros, la elección de una línea específica y la frecuencia de los autobuses. A través de estas variables, se calcula tanto el costo total del sistema como el tiempo total que los pasajeros pasan en el transporte. Debido a la complejidad del problema, se recurre a técnicas de relajación para obtener soluciones factibles. Una técnica comúnmente empleada consiste en la activación o desactivación de restricciones para generar soluciones iniciales que puedan ser refinadas posteriormente, logrando así una solución óptima.

Existe una gran cantidad de trabajos que abordan el problema de manera similar con ligeras diferencias, como es el caso del modelo propuesto por Borndorfer et al. [18] el cual continua en esta línea del modelado lineal pero con un enfoque hacia la conservación de los flujos dentro del sistema, lo que garantiza la estabilidad del mismo, y la necesidad de no exceder la capacidad de los autobuses ni la demanda esperada, evitando así la sobrecarga del sistema.

Por otro lado, se presentan enfoques con mas tendencia hacia la simulación como el propuesto por Wang et al. [20], el cuál se enfoca en calcular el tiempo de salida y llegada de los autobuses a cada estación, así como la asignación de los pasajeros a los buses y su tiempo de espera. Curiosamente, este modelo no cuenta con la información precisa de la hora de llegada de los pasajeros a las estaciones. Para resolver esto, los autores asumen que el tiempo de espera de cada pasajero sigue una distribución de probabilidad, la cual está indexada por ruta, ya que las expectativas de arribo pueden variar según la línea de bus. Lo anterior permite transformar el modelo a uno que no busca directamente satisfacer la mayor cantidad de demanda posible a diferencia de los anteriores, sino minimizar el tiempo de espera de cada pasajero. Al reducir el tiempo de espera, también se disminuye la probabilidad de que los pasajeros abandonen la estación, lo que optimiza la demanda cumplida. El modelo incluye una restricción de capacidad para cada autobús, considerando factores como la estación donde los pasajeros suben y bajan, lo cuál lo hace algo complejo de adaptar a sistemas como el de Montería donde no existen paraderos u estaciones. Otra desventaja que tiene este modelo es que como parámetro se debe establecer la hora de salida del último bus. Lo anterior resulta conflictivo, pues lo ideal sería que fuera directamente el modelo el que dictaminara este tiempo. Los autores establecen que el modelo que plantean se resuelve como un MIP (Mixed-Integer Programming) usando el optimizador CPLEX. Este optimizador utiliza algoritmos simplex para resolver problemas de optimización de tipo lineal.

2.1.2. Métodos basados en programación no lineal

En el trabajo de Dirk L. van Oudheusden y William Zhu [21] se desarrolla un modelo no lineal para establecer horarios y frecuencias óptimas de autobuses, considerando las limitaciones de la flota

y la capacidad de los depósitos. El objetivo del modelo es reducir los costos operativos reduciendo los viajes en vacío y aumentar el número de pasajeros transportados, incrementando así los ingresos del sistema. A su vez, el modelo busca garantizar un nivel adecuado de servicio, respetando las restricciones de capacidad de los autobuses, el tiempo máximo de espera de los pasajeros y los límites de ocupación. Para ello, los autores introducen varios supuestos clave: el tiempo de trayecto varía durante el día, la demanda de pasajeros es asimétrica y no se considera el tiempo necesario para el desplazamiento entre depósitos y las rutas. Dada la dificultad para resolver este modelo directamente, el modelo se resuelve convirtiéndolo a uno lineal, relajando algunas restricciones para obtener soluciones factibles. Herramientas como TURBO-Simplex 3.0 y dBASE IV 1.0 permitieron resolver estas aproximaciones.

Por otro lado, los trabajos en [22, 23] introducen un enfoque para optimizar la asignación de vehículos en redes de tránsito modular (MTNS). El objetivo principal es maximizar la eficiencia operativa del sistema de transporte público mediante el uso de vehículos modulares, es decir, que pueden ajustar su capacidad en tiempo real acoplando o desacoplando módulos a lo largo de la ruta. Esto permite adaptarse mejor a la demanda de pasajeros y evita los desajustes que ocurren en sistemas tradicionales de capacidad fija, donde los vehículos pueden quedar subutilizados o sobrecargados. El modelo de optimización [22] se formula como un problema de programación no lineal de enteros mixtos (MINLP), cuyo objetivo es minimizar los costos operativos, y con esto la distancia recorrida por los vehículos y el tiempo de espera de los pasajeros. Entre las restricciones del modelo se encuentran la capacidad de los vehículos, la conservación de los vehículos en las estaciones, y la restricción de flujo de pasajeros, que garantiza que cada pasajero complete su viaje, ya sea de forma directa o mediante transbordos. Estas restricciones son de gran relevancia ya que se pueden adaptar a las características del sistema de Montería, por lo que más adelante serán tenidas en cuenta. El principal desafío del modelo radica en su complejidad debido a la interacción de las decisiones sobre la frecuencia de los vehículos y la capacidad modular en cada enlace. Para hacer el problema más manejable computacionalmente, se reformula como un modelo de programación lineal entera mixta (MILP), lo que permite resolverlo usando herramientas como el optimizador Gurobi.

Los resultados de los casos de estudio en China muestran que este sistema modular reduce significativamente tanto los costos operativos como los tiempos de viaje de los pasajeros, en comparación con sistemas de capacidad fija y transporte privado. Aunque el sistema que se abordara no cuenta con vehículos modulares, algunos conceptos del artículo, como la optimización de la frecuencia y la capacidad en función de la demanda, podrían ser adaptados. Ajustar la frecuencia de los autobuses según la demanda real o proyectada podría reducir costos operativos y mejorar la eficiencia del sistema, evitando despachos innecesarios y atendiendo mejor la demanda en momentos crítico.

Otro enfoque de modelo no lineal se desarrolla en [24], el cual introduce un enfoque de programación robusta que optimiza los horarios de autobuses para garantizar la resiliencia del sistema ante incertidumbre en tiempos de viaje y demanda. Este modelo emplea conjuntos de incertidumbre, en lugar de distribuciones de probabilidad para modelar las llegadas y la demanda, lo que permite anticiparse a una mayor variedad de escenarios adversos sin depender de estimaciones precisas de probabilidades. El problema se formula como un modelo min-max, cuyo objetivo es minimizar las peores desviaciones posibles respecto a los horarios planificados, asegurando que los tiempos de viaje no se prolonguen excesivamente y afecten la operación futura. Las restricciones del modelo incluyen tiempos mínimos de descanso para los conductores y límites en los intervalos de despacho, asegurando la viabilidad operativa. Para resolver el modelo, los autores combinan un algoritmo genético con programación secuencial cuadrática, generando soluciones robustas que se validan en escenarios de peor caso. Una de las grandes contribuciones de este trabajo es su capacidad para generar horarios que se desempeñan bien en escenarios de peor caso sin requerir estimaciones precisas de la probabilidad de las perturbaciones. Los autores argumentan que los horarios generados por enfoques que

dependen de distribuciones de probabilidad tienden a fracasar cuando las perturbaciones reales caen fuera de las regiones de alta probabilidad de esas distribuciones, lo que motiva el enfoque robusto basado en incertidumbre presentado en este artículo.

2.1.3. Algoritmos de despacho dinámico

Uno de los enfoques más innovadores para la optimización del despacho de buses es el uso de algoritmos dinámicos, que ajustan los despachos en tiempo real en función de las fluctuaciones en la demanda de pasajeros y las condiciones del tráfico. Este tipo de modelos permite una mayor flexibilidad y capacidad de respuesta ante imprevistos operativos.

En el artículo [25] se presenta un modelo capaz de adaptarse a las condiciones cambiantes del tráfico y la demanda en diferentes franjas horarias. Este modelo se estructura en dos fases: una estática y una dinámica. La primera fase utiliza un algoritmo genérico de despacho estático para establecer una base inicial, la cual los autores aplican un algoritmo basado en estrategia LNS para resolverlo. LNS (por sus siglas en inglés Large Neighbourhood Search) tiene como propósito minimizar la distancia total; es decir, se busca relacionar los componentes que estén más cercanos los unos de los otros y dejar más de lado aquellos lejanos.

La fase dinámica se ejecuta continuamente durante la operación, utiliza un algoritmo de planificación precisa que actualiza constantemente la ruta inicial. En cuanto a la segunda fase, se propone un modelo dinámico que se esté ejecutando continuamente a lo largo de la operación. Para esta se usa un algoritmo de planificación preciso que se aplica sobre la ruta inicial y continuamente la actualiza. El objetivo principal es minimizar el intervalo entre la hora planteada inicialmente (primera fase) y aquella que dictamine el algoritmo dinámico (segunda fase).

La investigación aplica una integración de dos fases que mejora y facilita la implementación de un sistema de despachos dinámico. Es de especial interés este dinamismo, ya que brinda flexibilidad a la hora de responder frente a imprevistos. También permite detectar anomalías en los servicios, lo que a su vez facilita la tarea de reducirlas o, en caso de ser posible, eliminarlas.

En [26] también se plantea un modelo de despacho dinámico. Para este, se hace una planeación de la hora de salida de los buses restantes justo antes del despacho de cada bus. Inicialmente, se programa la secuencia de despachos, pero, antes de que parta el segundo autobús, el modelo se actualiza tomando como referencia la salida del primero. Esta iteración se repite entonces para cada bus con el que se cuenta en cada ruta. La función objetivo del modelo es minimizar el cuadrado de la diferencia entre el momento en el que será programado un viaje y su valor originalmente establecido. Para solucionar el problema, el autor hace uso de aproximaciones del gradiente para aproximar la solución de despachos. Esta solución es considerablemente más rápida que las optimizaciones exactas calculadas con programación cuadrática. Entonces, si bien la solución que se presenta en dicho modelo no es exacta, la brecha es lo suficientemente despreciable en escenarios realistas de operación de autobuses.

De este modelo hay cosas por remarcar que resultan de especial utilidad para este tipo de trabajos. La primera y más importante es el cómo trabaja iterativamente al momento de cada despacho para recalcular y comparar las horas de salida programada para las rutas posteriores. Al momento de programar la salida de buses, existen variables imposibles de predecir con exactitud (como el tráfico) que, si bien no se contempla directamente en este modelo, su solución permite reaccionar a pequeñas variaciones en este para garantizar una operación óptima de la flota de buses.

Por otro lado, [27] presenta un enfoque para optimizar el despacho de autobuses en sistemas de transporte público bajo demanda utilizando un modelo de optimización en tiempo real basado en reservas, con el objetivo de minimizar el costo operativo total. Este trabajo se apoya en investigaciones previas de sistemas de transporte bajo demanda, destacando el trabajo [28] donde se introdujo el concepto de rutas flexibles ajustadas a la demanda, y en [29] donde se demostró la viabilidad de

estos sistemas en áreas de baja densidad de pasajeros.

El modelo plantea la asignación eficiente de vehículos de diferentes capacidades a las demandas de transporte generadas en tiempo real a través de reservas. Utiliza un modelo de correspondencia óptima basado en un grafo bipartito ponderado, donde los nodos representan vehículos y demandas, y las aristas ponderadas reflejan los costos asociados a cada asignación, considerando el desplazamiento de vehículos vacíos y las restricciones de capacidad. Para resolver el problema, los autores emplean el algoritmo de Kuhn-Munkres, que optimiza la asignación de vehículos minimizando el costo operativo total. En comparación con un enfoque heurístico, este algoritmo ofrece una solución viable, reduciendo significativamente los costos operativos de 195.34 CNY a 177.67 CNY por viaje.

Este tipo de modelos es útil para sistemas bajo demanda donde se busca mejorar la eficiencia operativa y reducir costos, y su uso de grafos bipartitos puede ser adaptado para optimizar la asignación de autobuses en función de la demanda.

Por su parte, en el trabajo en [30] se propone un enfoque dinámico para la optimización de las frecuencias y los horarios de autobuses en Seúl. Los autores desarrollan un modelo no lineal que ajusta las frecuencias de los autobuses en función de la demanda fluctuante y las condiciones de tráfico en tiempo real. Entre los factores considerados se incluye: los costos operativos, los tiempos de viaje, la aceleración promedio y la capacidad de los autobuses. Además, se tiene en cuenta el tiempo de espera de los pasajeros, con el objetivo de minimizarlo idealmente a cero. El análisis también aborda los costos asociados al tiempo que los pasajeros permanecen dentro del autobús, destacando que una mayor congestión no solo afecta la comodidad, sino que también incrementa los costos operativos y reduce la demanda del servicio. La optimización de las frecuencias permite minimizar tanto los tiempos de espera como los costos operativos. Sin embargo, los autores subrayan que la frecuencia no puede aumentarse indefinidamente, ya que está limitada por la cantidad de autobuses disponibles en la flota. Una vez que se ha determinado la frecuencia óptima, el modelo permite programar las paradas de los autobuses, considerando además otros factores como los costos de combustible y el tiempo total que los autobuses pasan en operación. Este enfoque es especialmente relevante para la planificación de la demanda continua, ya que permite ajustar las variables y restricciones del sistema de transporte en función de las condiciones reales y cambiantes, ofreciendo una solución más flexible y eficiente.

3. Planteamiento del problema

Actualmente, Montería cuenta con 21 rutas de transporte público, operadas por varias empresas: Metrosinu; Montería Express, Sinumovil; Monteriana Móvil. Cada ruta tiene dos cabeceras, que sirven como puntos de partida para los recorridos en ambos sentidos. El recorrido de una cabecera a la otra se conoce como un sentido de la ruta, por lo que debe ser claro que todas las rutas presentan dos sentidos, no necesariamente paralelos, por lo que su comportamiento en cuanto a demanda y tiempos de recorrido será independiente y único para cada sentido a pesar de ser la misma ruta.

La empresa cuenta con un único tipo de bus con capacidad de 52 pasajeros. Los buses pueden ser asignados desde cualquiera de las dos cabeceras, y cada sentido de la ruta está compuesto por tramos o arcos que marcan el recorrido entre puntos clave de la ciudad. Sin embargo, estos arcos son utilizados únicamente de forma interna por las empresas como guía, ya que el sistema no cuenta con paraderos fijos ni información detallada sobre características o registros específicos en estos subtramos, lo que limita la precisión en la planificación operativa, obligando a trabajar directamente desde los sentidos de cada ruta. Cabe aclarar que los buses no inician su operación desde las cabeceras, sino que todos, al salir de operación, son guardados en un patio común, desde donde son despachados al momento que se requieran en las cabeceras para iniciar sus recorridos,

lo que implica un tiempo de tránsito de patio a cabecera al iniciar o reanudar la operación, y de cabecera a patio al finalizarla.

A cada empresa operadora se le asigna mensualmente una cantidad máxima de vehículos para operar en las rutas, teniendo en cuenta ambos sentidos. Esto significa que no todas las rutas pueden ser cubiertas de manera simultánea, y que existe un límite en la cantidad de buses que pueden circular en cada ruta. Esta restricción obliga a las empresas a gestionar de forma óptima los vehículos disponibles para satisfacer la mayor demanda posible a lo largo del día.

Actualmente, la programación del despacho de buses se realiza mediante un método manual que se basa en los siguientes pasos.

1. **Distribución inicial de buses:** Los buses se asignan equitativamente entre los dos sentidos de cada ruta, salvo que los tiempos de tránsito entre cabeceras difieran significativamente, en cuyo caso se ajusta la proporción de buses en cada sentido. La cantidad de buses utilizados en cada hora la define el operador con base en su experiencia, asegurándose de estar dentro de los límites de vehículos permitidos para la ruta.
2. **Cálculo de intervalos de despacho:** A partir del tiempo de tránsito promedio entre cabeceras, se calcula un intervalo de despacho para cada hora de operación, el cual corresponde a la franja de 5:00 a.m. a 9:00 p.m. Este intervalo se determina dividiendo el tiempo de tránsito por el número de buses disponibles, lo que establece la frecuencia de despacho desde cada cabecera.

La operación actual le ha permitido a la empresa alcanzar un IPK (Índice Pasajero por Kilómetro) promedio de 0.7 pasajeros por kilómetro por ruta. Si bien este enfoque básico permite una operación inicial con cierta regularidad, los intervalos de despacho se desajustan una vez los buses comienzan a circular. Esto ocurre debido a la variabilidad en los tiempos de recorrido de los vehículos entre cabeceras, que dependen de factores como el tráfico y las condiciones específicas de la ruta. Los buses solo están disponibles para ser despachados una vez completan su recorrido, lo que provoca desfases respecto al intervalo planificado inicialmente.

Además de estos problemas operativos, el método de despacho actual no considera un factor clave: la demanda de pasajeros. La cantidad de usuarios varía significativamente según la hora del día, el día de la semana, e incluso factores estacionales o eventos imprevistos que son cotidianos en este tipo de actividad. Al no tomar en cuenta estos factores, el sistema actual puede asignar demasiada capacidad en momentos de baja demanda, o insuficiente capacidad en las horas pico. Esto genera tiempos de espera prolongados y una utilización ineficaz de los recursos, lo que afecta tanto la experiencia de los usuarios como los costos operativos de las empresas.

No obstante, existen importantes limitaciones en los datos históricos que la infraestructura de información de la empresa ha logrado recolectar. Por un lado, se dispone de un registro histórico de ventas (personas que se suben al bus) obtenido a través del sistema de torniquetes de los respectivos vehículos. Sin embargo, estos datos no reflejan la demanda real, ya que no consideran a aquellas personas que, por ejemplo, tuvieron que esperar mucho tiempo y optaron por un medio de transporte alternativo, o situaciones similares en las que, aunque el usuario deseaba utilizar el servicio, finalmente no lo hizo.

Además, los registros de pasajeros presentan un sesgo respecto al sentido de la ruta en la que se generó la demanda. Esto se debe a que los conductores, al completar un trayecto, deben configurar el dispositivo para iniciar el registro en el sentido opuesto de la ruta. No obstante, según información suministrada por la empresa, estos conductores suelen fallar en este proceso. Como resultado, aunque los registros corresponden efectivamente a la ruta informada, el sentido no necesariamente es el correcto, lo que provoca un sesgo en la información de ventas y en los tiempos de recorrido de los

trayectos en los diferentes sentidos. Por lo tanto, dada la naturaleza de los datos y la insuficiencia de información para incorporar estocasticidades, el problema debe plantearse de forma determinista.

Este trabajo aborda el problema desde un enfoque que se ajusta a la realidad operativa de un sistema con múltiples limitaciones, como la falta de registros completos, así como el manejo manual de la planificación y el despacho, algo que la literatura existente ha abordado con suposiciones idealizadas. Esto ofrece una nueva perspectiva respecto a los modelos existentes, que generalmente no contemplan de forma holística los aspectos que componen las operaciones de sistemas de transporte público de regiones diferentes a las grandes metrópolis como lo es Montería.

A continuación, se presentará detalladamente el desarrollo del modelo para la optimización del despacho de buses adaptado a las condiciones específicas del sistema de Montería. En la sección de formulación matemática, se presenta la estructura detallada del modelo de optimización, desde los supuestos, objetivos y restricciones. Finalmente, se discutirán los resultados obtenidos al aplicar el modelo en el caso de estudio de Montería, evaluando su viabilidad y eficacia en mejorar el desempeño operacional del sistema de transporte público en Montería.

4. Formulación matemática

Como se ha venido desarrollando en las secciones anteriores, el problema de optimización de despacho de buses consiste en asignar una flota de buses para satisfacer la demanda de pasajeros en dos sentidos de una ruta durante el horizonte de operación de un sistema de transporte. La demanda se conoce con anticipación mediante previsiones realizadas, y los buses tienen capacidades limitadas y deben cumplir con restricciones de horarios y tiempos de recorrido. Este problema se aborda mediante la teoría de *flujos en redes espacio-temporales*. Este enfoque permite modelar tanto la asignación de rutas como el seguimiento temporal y espacial de cada bus. La red de flujo facilita la incorporación de restricciones de movimiento, capacidad y tiempos, y permite un análisis detallado de cada decisión de despacho.

Dado que el modelo incluye tanto variables continuas como enteras, se utiliza un enfoque de *Programación Lineal Entera Mixta* para el modelamiento. Este método es adecuado para resolver problemas en los que se deben tomar decisiones binarias (como el movimiento de los buses entre ubicaciones) y variables continuas (como la cantidad de pasajeros transportados en cada intervalo). Este enfoque permite asignar eficientemente los buses a rutas y horarios, considerando las respectivas restricciones operativas.

El modelo se desarrolla bajo las siguientes características y supuestos clave, que definen las condiciones operativas del sistema de transporte público analizado.

1. La demanda en cada cabecera es conocida y exacta, representandose de manera discreta, con valores específicos para intervalos de tiempo definidos.
2. La demanda puede surgir en cualquier punto del recorrido y en cualquiera de los dos sentidos de la ruta.
3. Los buses operan entre dos cabeceras(C1 y C2) sin paradas intermedias y en rutas predefinidas.
4. Todos los buses inician y terminan su operación diaria en un patio común(P), desde donde son despachados hacia las cabeceras.
5. Los buses pueden ser despachados desde cualquiera de las dos cabeceras, y pueden permanecer estáticos en estas esperando a ser despachados en sus respectivos recorridos
6. Los tiempos de recorrido entre ubicaciones son constantes y conocidos.
7. Cada ruta tiene un número limitado de buses disponibles durante la operación de igual capacidad.
8. El tiempo de inicio y fin de operación es el mismo para todas las rutas.

9. Los costos operativos y los ingresos por pasajero transportado se consideran constantes a lo largo del horizonte de planificación.

Estos supuestos permiten una modelación representativa de las condiciones del sistema real, estableciendo algunas simplificaciones y suposiciones que garantizan que el modelo se mantenga computacionalmente tratable sin perder precisión en los resultados. Ahora bien, la red de flujo espacio-temporal se construye mediante una representación gráfica que integra las dimensiones de espacio y tiempo. Los componentes principales de esta red son los nodos y arcos, los cuales se desarrollan a continuación:

- **Nodos:** Cada nodo representa una ubicación específica en un intervalo de tiempo determinado. Un nodo está dado por la pareja (l, t) , donde:

1. $l \in L$: Ubicación que puede ser el patio de la empresa P , o las cabeceras de la ruta $C1$ y $C2$.
2. $t \in T$: Intervalo de tiempo en el que se encuentra el bus en la ubicación l .

El conjunto de nodos permite modelar la presencia de cada bus en cada ubicación a lo largo del tiempo, facilitando el seguimiento de sus movimientos y estados operativos.

- **Arcos:** Los arcos representan los posibles movimientos de los buses entre nodos, respetando los tiempos de viaje y las actividades operativas permitidas. Los tipos de arcos incluyen:

1. *Arcos de movimiento:* Desplazamientos de buses entre ubicaciones distintas en intervalos de tiempo específicos. Estos arcos pueden ser de dos subtipos:
 - a) *Movimiento en servicio:* Viajes que atienden demanda de pasajeros, correspondientes a un sentido de servicio específico.
 - b) *Movimiento en vacío:* Viajes sin pasajeros, utilizados para posicionar los buses estratégicamente en el patio o en las cabeceras.
2. *Arcos de permanencia:* Permiten que un bus permanezca en la misma ubicación durante un intervalo de tiempo, es decir, que un bus esté en l en t y también en $t + 1$. Esto es crucial para modelar períodos en los que el bus está esperando en una cabecera o fuera de servicio en el patio.

Cada arco tiene un peso asociado que representa el costo operativo del movimiento o la permanencia.

Como se mencionó anteriormente, el modelo de optimización para el despacho de buses se desarrolla con el objetivo de optimizar la programación del despacho de autobuses de un sistema de transporte no metropolitano típico colombiano, buscando satisfacer la demanda de pasajeros en dos sentidos(trayectos) a lo largo de una ruta fija, con una flota de buses limitada y capacidades de carga específicas. En la siguiente tabla se presentan los conjuntos, parámetros y variables de decisión que definen el modelo. Cada uno de estos elementos es fundamental para representar las características del sistema y las restricciones del problema, permitiendo a su vez la formulación de la función objetivo y las restricciones que aseguran la representación aproximada del sistema para establecer un despacho óptimo de los buses.

Conjuntos	
K	Conjunto de buses disponibles, indexado por k , con $k = 1, 2, \dots, B$.
T	Conjunto de intervalos de tiempo discretos, indexado por t .
L	Conjunto de ubicaciones, con $L = \{P, C1, C2\}$.
S	Conjunto de sentidos de servicio, con $S = \{1, 2\}$.
Parámetros	
B	Número total de buses disponibles.
C	Capacidad máxima de cada bus (en número de pasajeros).
$D_{s,t}$	Demanda de pasajeros en el sentido s durante el intervalo t .
$T_{l,l'}$	Tiempo de viaje en intervalos desde la ubicación l hasta l' . Ejemplo: $T_{C1,C2}$ es el tiempo de viaje de $C1$ a $C2$.
c_{mov}	Costo fijo asociado al movimiento de un bus entre ubicaciones.
c_{bus}	Costo operativo por mantener un bus en servicio en cada intervalo.
c_{ingreso}	Ingreso generado por cada pasajero transportado.
c_{espera}	Costo de permanencia del bus en las cabeceras en cada intervalo de tiempo.
$\delta_{(l,l'),s}$	Parámetro indicador que toma el valor 1 si el movimiento entre l y l' corresponde al sentido s , y 0 en caso contrario.
Variables de decisión	
$x_{k,l,t,l',t'}$	Toma el valor 1 si el bus k se mueve de la ubicación l en el intervalo t hacia l' en el intervalo t' , y 0 en caso contrario.
$L_{k,l,t}$	Toma el valor 1 si el bus k está en la ubicación l en el tiempo t , y 0 en caso contrario.
$z_{k,t}$	Toma el valor 1 si el bus k está en operación (no en el patio) en el tiempo t , y 0 en caso contrario.
$p_{k,s,t}$	Número de pasajeros transportados en el sentido s por el bus k en el intervalo t .
$y_{s,t}$	Demanda no satisfecha en el sentido s en el intervalo t .

Tabla 1: Conjuntos, parámetros y variables de decisión del modelo.

Cabe aclarar que el parámetro $\delta_{(l,l'),s}$ se define como un indicador binario que toma el valor de 1 si el movimiento entre las ubicaciones l y l' corresponde al sentido de servicio s , y 0 en caso contrario. Este parámetro es crucial para asegurar que los pasajeros solo sean transportados cuando los buses se desplazan en el sentido correcto.

$$\delta_{(l,l'),s} = \begin{cases} 1, & \text{si el movimiento de } l \text{ a } l' \text{ corresponde al sentido } s, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Por ejemplo:

- $\delta_{(C1,P),1} = 1$ y $\delta_{(C1,P),2} = 0$.
- $\delta_{(C2,P),1} = 0$ y $\delta_{(C2,P),2} = 1$.
- $\delta_{(C1,C2),1} = 1$ y $\delta_{(C1,C2),2} = 0$.
- $\delta_{(C2,C1),1} = 0$ y $\delta_{(C2,C1),2} = 1$.

Este mapeo garantiza que las variables de decisión relacionadas con el transporte de pasajeros estén alineadas con los movimientos realizados por los buses en cada sentido específico.

Por otro lado, el objetivo del modelo es maximizar el desempeño operacional del sistema mediante la optimización de la operación y el desplazamiento de la flota de buses. Esto se logra aumentando los

ingresos derivados de la atención de la demanda disponible durante el día de operación y, al mismo tiempo, utilizando la flota de manera eficiente para minimizar los costos asociados a mantener los buses en operación. Por lo tanto, la función objetivo se estructura de la siguiente manera:

$$\text{máx } Z = c_{\text{ingreso}} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} p_{k,s,t} - \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} c_{\text{bus}} \cdot z_{k,t} - \sum_{k \in K} \sum_{\substack{l, l' \in L \\ t, t' \in T}} c_{l,l'} \cdot x_{k,l,t,l',t'} \quad (1)$$

Donde:

$$c_{l,l'} = \begin{cases} c_{\text{mov}}, & \text{si } l \neq l', \\ c_{\text{espera}}, & \text{si } l = l' \text{ y } l \neq P, \\ 0, & \text{si } l = l' = P. \end{cases} \quad (2)$$

El primer término representa el ingreso por transportar pasajeros. El modelo debe buscar maximizar la cantidad de pasajeros transportados, lo que incrementa los ingresos totales. En conjunto, la función objetivo equilibra la minimización de costos operativos y de desplazamiento con la maximización de los ingresos por transporte de pasajeros, buscando una asignación eficiente de la flota que satisfaga la demanda de manera rentable. El segundo término representa el costo operativo asociado a mantener los buses en operación durante cada intervalo de tiempo. Se penaliza la utilización continua de los buses, incentivando que los buses permanezcan en el patio cuando no son necesarios, reduciendo así costos innecesarios. El tercer término refleja los costos asociados a los movimientos de los buses entre diferentes ubicaciones. Los costos $c_{l,l'}$ pueden ser costos de viaje en servicio o costos de espera si el bus permanece en la misma ubicación. Esto penaliza los desplazamientos y las permanencias prolongadas, incentivando movimientos eficientes.

En este contexto, restringir el modelo es esencial para garantizar que la asignación y operación de los buses cumplan con las condiciones y limitaciones propias del sistema de transporte. Estas restricciones abordan aspectos críticos como la capacidad de los buses, la satisfacción de la demanda, la consistencia de las ubicaciones y los movimientos, y la lógica operativa que rige la disponibilidad y el uso de cada bus. A continuación, se presentan las restricciones que permiten capturar cada uno de estos elementos, asegurando que la solución obtenida no solo sea óptima en términos de costos, sino también factible y realista en cuanto a su implementación y representación del sistema.

1. Ubicación inicial de los buses:

$$L_{k,P,0} = 1, \quad \forall k \in K \quad (3)$$

Asegura que cada bus comienza en el patio de la empresa (P) al inicio del horizonte de planificación ($t = 0$). Garantiza que todos los buses están inicialmente ubicados en el patio, lo cual es esencial para la coherencia y factibilidad del modelo.

2. Única ubicación en el tiempo:

$$\sum_{l \in L} L_{k,l,t} \leq 1, \quad \forall k \in K, \forall t \in T \quad (4)$$

Impide que un bus esté en más de una ubicación al mismo tiempo. Refleja la realidad física de que un bus no puede estar en dos lugares simultáneamente, asegurando la integridad de la asignación de ubicaciones a los buses.

3. Actualización de la ubicación de los buses:

$$L_{k,l,t+1} = L_{k,l,t} - \sum_{\substack{l' \in L \\ t' = t + T_{l,l'}}} x_{k,l,t,l',t'} + \sum_{\substack{l' \in L \\ t' = t + 1 - T_{l',l}}} x_{k,l',t',l,t+1}, \quad \forall k \in K, \forall l \in L, \forall t \in T \quad (5)$$

Esta restricción asegura que la presencia del bus en cada ubicación se actualice correctamente según sus movimientos, manteniendo la coherencia temporal y espacial del modelo. Cada término representa:

- $L_{k,l,t}$: presencia actual del bus k en la ubicación l en el tiempo t .
- $\sum_{t'=t+T_{l,l'}}^{l' \in L} x_{k,l,t,l',t'}$: número de movimientos saliendo de l en el tiempo t .
- $\sum_{t''=t+1-T_{l',l}}^{l' \in L} x_{k,l',t'',l,t+1}$: número de movimientos llegando a l en el tiempo $t+1$.

4. **Movimiento permitido solo si se está en la ubicación:**

$$x_{k,l,t,l',t'} \leq L_{k,l,t}, \quad \forall k \in K, \forall l, l' \in L, \forall t, t' \in T \quad (6)$$

Garantiza que un bus solo puede moverse desde una ubicación l en un tiempo t si realmente está presente en esa ubicación en ese tiempo. Previene movimientos desde ubicaciones donde el bus no se encuentra, asegurando la factibilidad de las decisiones de movimiento.

5. **Definición de la variable $z_{k,t}$:**

$$z_{k,t} = 1 - L_{k,P,t}, \quad \forall k \in K, \forall t \in T \quad (7)$$

Define $z_{k,t}$ como un indicador binario de si el bus k está en operación (fuera del patio) en el tiempo t . Específicamente:

- Si $L_{k,P,t} = 1$, entonces $z_{k,t} = 0$, indicando que el bus está en el patio y no está en operación.
- Si $L_{k,P,t} = 0$, entonces $z_{k,t} = 1$, indicando que el bus está en una cabecera y en operación.

Esta definición permite incorporar costos operativos por mantener los buses en operación, incentivando que permanezcan en el patio cuando no son necesarios.

6. **Capacidad del bus en cada intervalo:**

$$\sum_{s \in S} p_{k,s,t} \leq C \cdot z_{k,t}, \quad \forall k \in K, \forall t \in T \quad (8)$$

Limita la cantidad total de pasajeros que un bus puede transportar en un intervalo de tiempo t a su capacidad máxima C , siempre y cuando el bus esté en operación ($z_{k,t} = 1$). Si el bus está en el patio ($z_{k,t} = 0$), la restricción implica que no puede transportar pasajeros.

7. **Cobertura de la demanda total:**

$$\sum_{k \in K} p_{k,s,t} + y_{s,t} = D_{s,t}, \quad \forall s \in S, \forall t \in T \quad (9)$$

Asegura que la demanda total de pasajeros en cada sentido s y tiempo t sea contabilizada, ya sea atendida por los buses o registrada como no satisfecha.

8. **Consistencia entre el movimiento del bus y la atención de pasajeros:**

$$p_{k,s,t} \leq C \cdot \sum_{\substack{l,l' \in L \\ t' \in T}} \delta_{(l,l'),s} \cdot x_{k,l,t,l',t'+T_{l,l'}} \cdot \mathbf{1}_{[t' \leq t < t'+T_{l,l'}]}, \quad \forall k \in K, \forall s \in S, \forall t \in T \quad (10)$$

Esta restricción asegura que los pasajeros solo pueden ser transportados si el bus está realizando un movimiento en el sentido correspondiente durante el intervalo de tiempo adecuado. Además, limita el número de pasajeros transportados a la capacidad máxima del bus en esos intervalos. Específicamente:

- $\delta_{(l,l'),s}$: indica si el movimiento de l a l' corresponde al sentido s .
- $x_{k,l,t',l',t'+T_{l,l'}}$: indica si el bus k se mueve de l a l' en el tiempo t' .
- $\mathbf{1}_{[t' \leq t < t'+T_{l,l'}]}$: función indicadora que vale 1 si el intervalo de tiempo t está dentro del período de viaje del bus.

9. No exceder la capacidad acumulada:

$$\sum_{\tau=0}^t p_{k,s,\tau} \leq C \cdot \sum_{\substack{l,l' \in L \\ t' \leq t}} \delta_{(l,l'),s} \cdot x_{k,l,t',l',t'+T_{l,l'}}, \quad \forall k \in K, \forall s \in S, \forall t \in T \quad (11)$$

Asegura que el total de pasajeros transportados por el bus k en el sentido s hasta el tiempo t no exceda la capacidad acumulada del bus en ese sentido, considerando todos los viajes realizados hasta ese momento. Específicamente:

- $\sum_{\tau=0}^t p_{k,s,\tau}$: Total de pasajeros transportados por el bus k en el sentido s hasta el tiempo t .
- $\sum_{\substack{l,l' \in L \\ t' \leq t}} \delta_{(l,l'),s} \cdot x_{k,l,t',l',t'+T_{l,l'}}$: Número total de viajes que el bus k ha realizado en el sentido s hasta el tiempo t .

10. Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} x_{k,l,t,l',t'} &\in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall l, l' \in L, \forall t, t' \in T \\ L_{k,l,t} &\in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall l \in L, \forall t \in T \\ z_{k,t} &\in \{0, 1\}, \quad \forall k \in K, \forall t \in T \\ p_{k,s,t} &\geq 0, \quad \forall k \in K, \forall s \in S, \forall t \in T \\ y_{s,t} &\geq 0, \quad \forall s \in S, \forall t \in T \end{aligned} \quad (12)$$

Para evaluar de manera profunda el desempeño de la operación se establecen unas métricas de desempeño que proporcionan una evaluación integral de la programación de despacho establecida, logrando evidenciar el comportamiento del sistema en cuanto a aspectos críticos como la atención de la demanda, y el uso eficiente de la flota de buses en cada una de las rutas. A continuación, se presentan las métricas utilizadas para evaluar el desempeño de las rutas en el sistema de transporte, junto con sus respectivas fórmulas de cálculo:

- **Pasajeros totales transportados:** número total de pasajeros que fueron transportados por los buses de la ruta. Se obtiene de la suma de todos los pasajeros atendidos durante el día.
- **Viajes totales realizados:** número total de viajes completados por los buses en una ruta específica.
- **Kilómetros recorridos (km):** suma de todas las distancias recorridas por los buses durante el día.
- **Utilización (%):** porcentaje del tiempo que cada bus estuvo en operación (fuera del patio) respecto al tiempo total disponible. Se calcula como:

$$\text{Utilización} = \left(\frac{\text{Tiempo en operación}}{\text{Tiempo total disponible}} \right) \times 100 \quad (13)$$

- **Índice de pasajeros por kilómetro (IPK):** promedio de pasajeros transportados por kilómetro recorrido. Se calcula como:

$$\text{IPK} = \frac{\text{Pasajeros transportados}}{\text{Kilómetros recorridos}} \quad (14)$$

- **Nivel de servicio (%):** porcentaje de la demanda de pasajeros atendida en una ruta. Se calcula como:

$$\text{Nivel de servicio} = \left(\frac{\text{Pasajeros transportados}}{\text{Demanda total}} \right) \times 100 \quad (15)$$

- **Capacidad utilizada (%):** porcentaje promedio de ocupación de los buses durante sus viajes, que indica cuántos pasajeros se transportaron respecto a la capacidad total de los buses. Se calcula como:

$$\text{Capacidad utilizada} = \left(\frac{\text{Pasajeros transportados}}{\text{Capacidad de bus} \times \text{Número de viajes realizados}} \right) \times 100 \quad (16)$$

5. Caso de estudio en el sistema de transporte publico de Montería

5.1. Parámetros de la operación

La demanda de pasajeros ($D_{s,t}$) en cada cabecera y en cada intervalo de tiempo se obtuvo utilizando el modelo de predicción *Prophet*. *Prophet* es un modelo desarrollado por el equipo de Ciencia de Datos Central de Facebook, específicamente diseñado para la predicción de series temporales con efectos estacionales y tendencias cambiantes. Este modelo analiza los datos históricos de ventas registradas por el sistema de torniquetes de los buses, ajustando las estimaciones para considerar posibles abandonos de pasajeros debido a largos tiempos de espera o congestión.

La elección de *Prophet* se justifica por su robustez ante datos faltantes, valores atípicos y cambios en tendencias, características comunes en las bases de datos de los sistemas de transporte público. Además, *Prophet* permite incorporar componentes estacionales y efectos externos de manera modular, lo que es esencial para capturar patrones recurrentes y variaciones específicas del entorno operativo. A pesar de las limitaciones de los datos históricos, como la falta de precisión en la asignación de sentidos de la ruta, *Prophet* proporciona una aproximación de la demanda con una incertidumbre inherente. Esto permite, ante la falta de datos e información completa y utilizando técnicas establecidas y respaldadas por la literatura, emplear este modelo de manera preliminar para establecer demandas para las diferentes rutas en sus respectivos sentidos para fechas determinadas.

En el presente caso de estudio, se trabajará con ocho instancias correspondientes a las rutas: Pradera 27, Panzenu, Santander, Mogambo 22, Tambo Circunvalar, KM 30, Dorado y KM 15. Aunque el modelo *Prophet* demuestra la capacidad de realizar predicciones para todas las rutas disponibles, se decidió focalizarse en estas específicas debido a que representan la mayor proporción del conjunto de datos históricos proporcionados por la empresa, como se ilustra en la Figura 2. Esta focalización permite alcanzar una mayor precisión en las predicciones y facilita el análisis con intervalos de tiempo más pequeños.

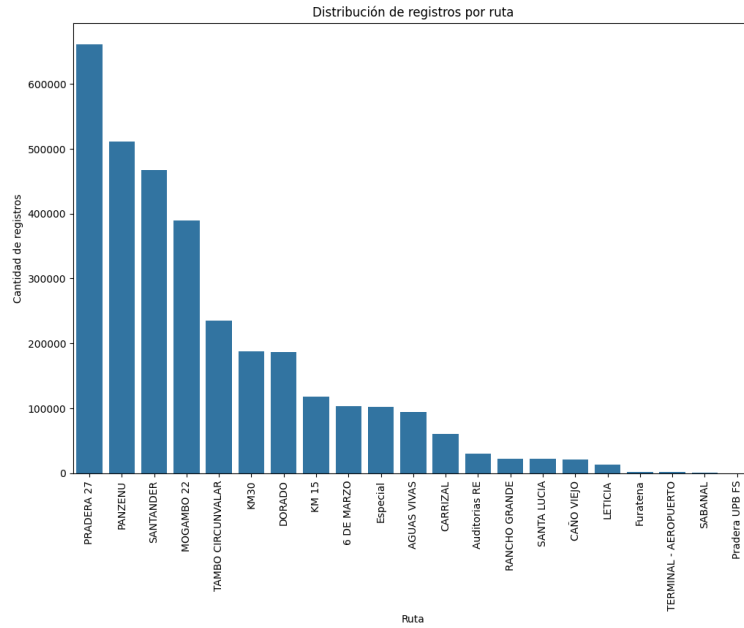


Figura 2: Cantidad de registros de pasajeros suministrados en el histórico por ruta

Para este caso, las predicciones se realizaron en intervalos de 10 minutos, lo que corresponde a un total de 96 intervalos que abarcan desde las 5:00 a.m. hasta las 9:00 p.m., horas que marcan el inicio y fin de la operación diaria, respectivamente. Las simulaciones se enfocaron en el día 8 de abril de 2025, seleccionado estratégicamente debido a sus características temporales, las cuales se encuentran estrechamente relacionadas con la mayor cantidad de datos históricos disponibles.

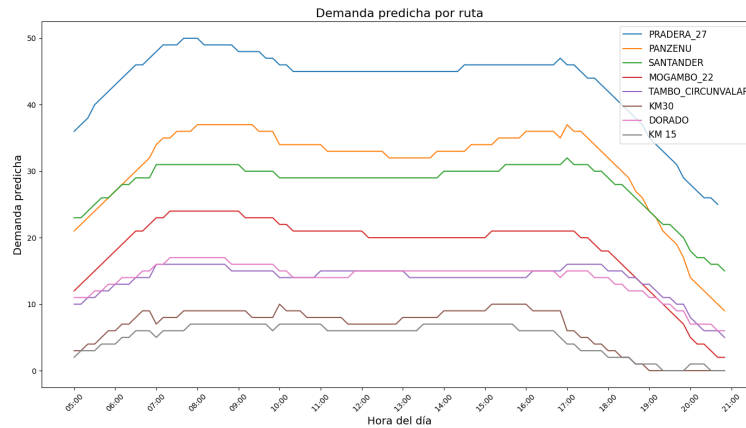


Figura 3: Demanda de pasajeros predicha por el modelo Prophet para cada ruta para el día 08/04/2025

La Figura 3 muestra el comportamiento de la demanda predicha por el modelo Prophet para las distintas rutas analizadas. Se destacan tres rutas principales con las demandas más altas durante el día: Pradera 27, Panzenu y Santander, con promedios de 43, 30 y 28 pasajeros cada diez minutos, respectivamente. Estas rutas presentan un comportamiento consistente, con incrementos rápidos durante las primeras horas del día y una alta estabilidad en la demanda durante los períodos pico. En contraste, rutas como KM30 y KM 15 muestran demandas significativamente más bajas, con promedios de 6 y 5 pasajeros por intervalo de diez minutos, y una variación diaria más estable, lo que podría indicar una menor densidad de pasajeros en estas áreas o menor frecuencia de viajes.

En términos de comportamiento general, todas las rutas presentan un patrón similar a lo largo del día, lo que refleja la dinámica típica de transporte urbano. Desde el inicio de las operaciones, la demanda aumenta de forma progresiva, alcanzando un primer pico importante entre las 7:00 a.m. y las 8:00 a.m., coincidiendo con el horario de mayor actividad laboral y escolar. Después de este periodo, la demanda se estabiliza ligeramente, con variaciones moderadas durante el resto de la mañana y la tarde, lo que sugiere una demanda sostenida por actividades regulares durante el día.

A partir de las 5:00 p.m., la demanda comienza a descender de manera consistente en todas las rutas, reflejando el final de la jornada laboral y escolar, con una disminución notable hasta alcanzar los niveles más bajos al cierre de operaciones, alrededor de las 9:00 p.m. Este descenso es especialmente marcado en las rutas con mayor demanda, mientras que las rutas de baja demanda muestran una transición más gradual.

Además, se han definido las características de cada ruta a partir de la información proporcionada por la empresa y estudios realizados en plataformas de movilidad urbana. Por un lado, según los datos suministrados, se conoce la cantidad de buses habilitados por ruta para el mes de abril de 2024, asumiendo que este número se mantendrá constante para el mismo periodo del año siguiente. Esta suposición simplifica la planificación al evitar la complejidad de incorporar posibles cambios en la flota durante el horizonte de operación considerado. La capacidad máxima de cada bus, establecida en 52 pasajeros sin importar la ruta, es un parámetro fijo proporcionado por la empresa y se asume constante a lo largo del análisis.

Por otro lado, ante la falta de información detallada por parte de la empresa sobre los tiempos de recorrido entre las cabeceras de las distintas rutas, se optó por estimarlos a través de la plataforma de movilidad urbana Moovit. Esta aplicación ofrece datos en tiempo real del transporte público, lo que permite obtener estimaciones actualizadas y confiables de los tiempos de trayecto. Este enfoque es especialmente útil para abordar la carencia de datos precisos, garantizando un modelo de tiempos más realista.

La Tabla 2 resume la cantidad de buses disponibles y los tiempos de recorrido estimados para cada ruta analizada.

Tabla 2: Características de recorridos y buses disponibles de cada ruta

Ruta	Tiempo C1 → C2 (min)	Tiempo C2 → C1 (min)	Cantidad de buses
Dorado	30	30	7
Km 15	24	22	2
Km 30	40	34	1
Mogambo 22	28	29	7
Panzenu	39	36	7
Pradera 27	41	39	8
Santander	49	47	7
Tambo Circunvalar	39	34	5

Adicionalmente, ante el desconocimiento de la ubicación exacta del patio del sistema, se asumieron tiempos constantes y únicos para los trayectos de patio a cabecera y de cabecera a patio de 15 minutos. Estos tiempos de viaje son esenciales para determinar la secuencia y duración de los movimientos de los buses entre las distintas ubicaciones, asegurando que las restricciones de tiempo sean respetadas durante la optimización.

Finalmente, los parámetros de costos e ingresos son fundamentales para la formulación de la función objetivo del modelo, permitiendo equilibrar la minimización de costos operativos con la maximización de ingresos por transporte de pasajeros. Por lo tanto, se establecieron los siguientes

costos de operación e ingresos por pasajero atendido:

- **Costo operativo por mantener un bus en operación (c_{bus}):** Se estableció un costo de \$0,5 por minuto, ya sea que el bus esté en movimiento o en espera. Este costo refleja el gasto asociado al mantenimiento, combustible y otros costos operativos de los buses durante su funcionamiento.
- **Costo fijo por movimiento de un bus entre ubicaciones (c_{mov}):** Se asignó un costo fijo de \$10 por cada movimiento que un bus realiza entre ubicaciones. Este costo penaliza los desplazamientos innecesarios, incentivando movimientos eficientes que minimicen los costos totales de operación.
- **Ingreso por pasajero transportado (c_{ingreso}):** Se consideró un ingreso de \$2 por cada pasajero transportado. Este valor representa el beneficio económico derivado del servicio de transporte proporcionado por los buses.
- **Costo de permanencia en cabeceras (c_{espera}):** Se estableció un costo de \$5 por cada intervalo de 10 minutos que un bus permanece en una cabecera. Este costo refleja el gasto asociado a la espera de los buses en las cabeceras, ya sea por carga de pasajeros o por tiempos muertos operativos.

6. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al implementar el modelo de optimización en el sistema de transporte público de Montería, específicamente para las ocho instancias descritas anteriormente correspondientes al día 8 de abril del año 2025. Se obtuvo una programación óptima de los buses, logrando maximizar el desempeño operacional medido a través de la utilidad operacional. Todos los experimentos se llevaron a cabo en una computadora con sistema operativo Windows 11, procesador Intel(R) Core(TM) i5-12450H de 9^a generación, 2.4 GHz y 8 GB de RAM. Para la implementación del modelo de optimización y predicción, se utilizó el lenguaje de programación Python 3.11.7.

Para implementar el modelo de optimización descrito en la Sección 3.2, se utilizó el optimizador Gurobi versión 11.0.0. La ejecución se configuró con un límite de tiempo de búsqueda de 3600 segundos y un GAP de MIP (Mixed Integer Programming Gap) de 0,5 %. El GAP de MIP representa la diferencia relativa entre el valor de la solución encontrada por el optimizador y el valor de la solución óptima conocida.

$$\text{GAP} = \left(\frac{\text{Valor de la solución actual} - \text{Valor de la mejor solución conocida}}{\text{Valor de la mejor solución conocida}} \right) \times 100 \quad (17)$$

Un GAP más pequeño indica una mayor proximidad de la solución encontrada al valor óptimo, lo que garantiza la calidad de la asignación de recursos. Dado el tamaño y la complejidad del problema, estos parámetros permiten equilibrar la precisión de la solución con el tiempo de cómputo requerido.

En la Tabla 3 se presentan los resultados de la implementación del modelo de Programación Entera Mixta (MIP) para cada una de las rutas incluidas en el estudio.

Tabla 3: Resultados computacionales para cada ruta

Ruta	Utilidad	Gap MIP (%)	Tiempo ejecución (s)	# Variables	# Restricciones
Pradera 27	10811.0	0.49	177.91	10906	14010
Panzenu	8088.0	0.77	3600.09	9574	12290
Santander	6852.0	0.24	31.94	9560	12276
Mogambo 22	5131.0	0.38	821.59	9588	12304
Tambo	3553.0	0.49	141.29	6894	8834
Km 30	605.0	0.08	0.17	1534	1922
Dorado	3632.0	0.00	14.66	9588	12304
Km 15	522.0	0.22	1.25	2878	3654

Los resultados demuestran que, en general, el modelo fue capaz de alcanzar soluciones con un GAP de MIP inferior al 0.5 %, lo que significa que las soluciones alcanzadas son muy cercanas a las óptimas en cada ruta. La única excepción fue la ruta Panzenu, cuyo proceso de optimización se detuvo al alcanzar el límite de tiempo de 3600 segundos, logrando un gap de 0.77 %. Aunque esta brecha es ligeramente superior al umbral establecido, sigue siendo relativamente bajo, indicando que la solución es cercana al óptimo.

Las utilidades obtenidas evidencian una relación directa con la demanda de pasajeros de cada ruta. Las rutas Pradera 27 y Panzenu, que cuentan con las mayores demandas, presentan las utilidades más altas, alcanzando 10811 y 8088, respectivamente. Estas cifras destacan significativamente por encima del resto de las rutas, reflejando su impacto en la rentabilidad del sistema. En rutas de demanda media, como Santander y Mogambo 22, las utilidades disminuyen notablemente, registrándose valores de 6852 y 5131, lo que representa una reducción superior al 30 % en comparación con las rutas de mayor demanda. Este comportamiento resalta la influencia del volumen de pasajeros transportados en la generación de ingresos. Por su parte, las rutas con menor demanda, como Km 30 y Km 15, reportaron las utilidades más bajas, con 605 y 522, respectivamente. Esto refuerza la correlación entre la demanda y la rentabilidad, evidenciando que la baja densidad de pasajeros limita la capacidad de estas rutas para cubrir sus costos operativos y generar excedentes significativos.

El tiempo de ejecución del modelo varió considerablemente entre rutas, reflejando diferencias en la complejidad operativa y la escala de la demanda. La única ruta en alcanzar una solución óptima en un tiempo muy reducido fue Dorado, con un tiempo de 14.66 segundos. Por otro lado, rutas como Pradera 27, Mogambo 22 y Tambo Circunvalar se destacaron por requerir tiempos de ejecución más elevados, alcanzando 177.91, 821.59 y 141.29 segundos, respectivamente, aunque lograron converger antes de llegar al límite de gap establecido. Estas rutas tienen mayores demandas o condiciones de operación más complejas, lo que incrementa la dificultad computacional. En contraste, las rutas de menor demanda, como Km 30 y Km 15, registraron tiempos de ejecución significativamente más bajos, con 0.17 y 1.25 segundos, respectivamente. Este comportamiento es consistente con la menor cantidad de variables y restricciones necesarias para modelar estas rutas. Finalmente, la ruta Panzenu se distingue por haber alcanzado el límite de tiempo establecido de 3600 segundos. Esto sugiere que la complejidad asociada con esta ruta, ya sea por su demanda o configuración operacional, excedió la capacidad computacional asignada para resolverla alcanzando el gap mínimo establecido dentro del tiempo permitido.

El análisis de los resultados computacionales confirma que la demanda de pasajeros y la cantidad de buses son los principales factores que influyen en la utilidad generada por cada ruta. Adicionalmente, los tiempos de ejecución del modelo reflejan la variabilidad en la complejidad computacional, la cual depende tanto de la demanda como de la configuración operativa de cada ruta. La capacidad del modelo para mantener un gap reducido (inferior al 0.5 %) en la mayoría de los casos respalda

la eficacia de la metodología aplicada, a pesar de que el límite de tiempo fue una restricción crítica en rutas como Panzenu. En conjunto, estos resultados computacionales reflejan que, a pesar de la alta dimensionalidad y complejidad de la red de flujo, el modelo es capaz de encontrar una solución eficiente en un tiempo computacional razonable, logrando un equilibrio entre precisión y velocidad de solución, siendo robusto ante diferentes escenarios operativos reflejados en las distintas instancias evaluadas. Sin embargo, este tipo de red, al definir intervalos de tiempo más pequeños, puede multiplicar su complejidad, lo que claramente llevaría a que el modelo tarde bastante tiempo en encontrar una solución. Por lo tanto, evaluar métodos de aceleración podría robustecer el modelo y su aplicabilidad en rutas de sistemas de mayor complejidad.

6.1. Programación de los Buses

Como se ha venido comentando a lo largo de este trabajo, el objetivo final es establecer una programación de despacho de buses óptima durante el día de operación. Las variables de decisión permiten obtener esta programación, evidenciando la actividad de cada bus en una ruta a lo largo de toda la jornada operativa.

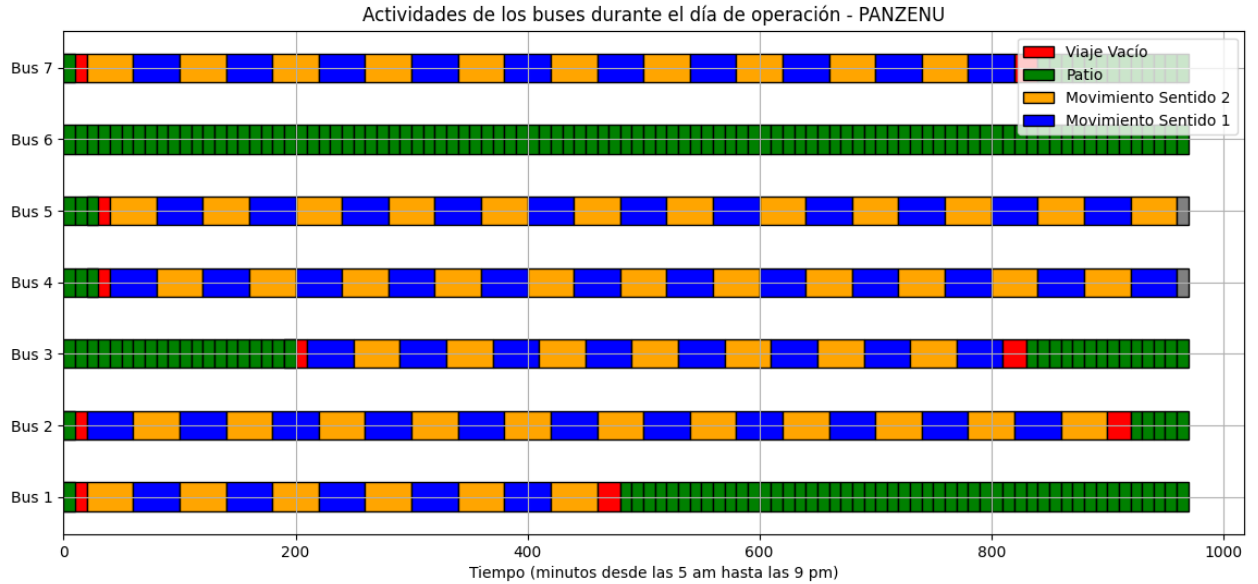


Figura 4: Programación de actividades óptima para los buses durante el día de operación

Un ejemplo de la programación de los despachos establecida por el modelo se presenta en la Figura 4, que ilustra la programación establecida por el modelo para la ruta *Panzenu*. En esta figura se incluye un diagrama de Gantt correspondiente a la operación de los buses, destacando los movimientos en ambos sentidos de la ruta, los tiempos en el patio, las esperas en cabeceras y los viajes en vacío. Se observa que los buses alternan predominantemente entre movimientos en el Sentido 1 y el Sentido 2, lo cual refleja un despacho equilibrado para atender la demanda en ambas direcciones. Este comportamiento es consistente con el supuesto establecido de demandas similares en ambos sentidos de la ruta.

La presencia de segmentos en color rojo, que representan viajes en vacío, es mínima, lo que sugiere que la asignación de buses logra evitar estos trayectos sin pasajeros. Esto resulta en una operación más eficiente, en donde el modelo busca minimizar sus costos operativos en viajes que resultan en gastos por el traslado y uso de los buses, y nada de ingresos al no atender pasajeros. Adicionalmente, el Bus 3 permanece en el patio (color verde) durante toda la operación, lo que indica

que la demanda no fue lo suficientemente alta como para requerir su activación. En este caso, los seis buses ya despachados fueron suficientes para cubrir la operación.

Por otra parte, se observa que los Buses 2, 4, 5 y 7 presentan una alta actividad, estando en operación prácticamente durante toda la jornada y realizando trayectos constantes entre cabeceras para recoger pasajeros. Estos buses no registran tiempos significativos de espera en cabeceras (color gris), lo que podría indicar que el modelo opta por maximizar su utilización. Esto se logra despachándolos de inmediato una vez llegan a la cabecera opuesta, incrementando así los ingresos generados por recoger pasajeros en los diferentes sentidos.

Asimismo, se evidencia que algunos buses activos dejan de operar rápidamente, como es el caso del Bus 1, cuya actividad comienza después de las 5:10 a.m. y finaliza poco después de la 1:00 p.m., sin volver a ser requerido para el resto de la jornada. Este comportamiento refleja un ajuste estratégico del modelo para adaptarse a los periodos de demanda variable, utilizando la flota de manera óptima.

En general, el modelo exhibe una operación balanceada que minimiza los viajes en vacío, gestiona el uso de la flota de manera estratégica y, mediante los tiempos de espera en cabeceras, se ajusta eficientemente a los periodos de baja demanda. Esto evita la utilización innecesaria de buses y contribuye a una operación rentable y eficiente que logra atender de manera efectiva a la demanda de pasajeros.

6.2. Métricas globales del sistema

La Tabla 4 presenta las métricas de desempeño correspondientes a la solución óptima alcanzada por el modelo para cada instancia.

Tabla 4: Métricas globales por ruta

Ruta	Nivel de servicio (%)	Pasajeros transportados	Viajes realizados	Km recorridos	Utilización de la flota (%)	IPK	Capacidad usada bus (%)
Pradera 27	97.49	8033	166	3256	96.91	2.47	92.97
Panzenu	98.55	5844	124	2394	82.53	2.44	89.89
Santander	98.29	5296	110	2142	82.76	2.47	92.38
Mogambo 22	98.38	3518	76	1512	40.26	2.33	88.36
Tambo	98.37	2599	56	1092	56.79	2.38	86.76
Km 30	48.56	605	21	400	96.20	1.51	55.40
Dorado	97.90	2616	64	1302	27.68	2.01	78.61
Km 15	88.68	846	48	924	95.65	0.92	33.89

Los resultados muestran que el nivel de servicio global supera el 97 % en la mayoría de las rutas, destacándose como excepciones *Km 30* y *Km 15*, donde los niveles de servicio alcanzan 48.56 % y 88.68 %, respectivamente. Esto es una evidencia clara de que el modelo busca atender prácticamente la totalidad de la demanda para lograr maximizar los índices de utilidad. En el caso de *Km 30*, este bajo nivel de atención se puede atribuir a la limitada capacidad operativa, dado que la ruta cuenta con un único bus disponible. Esto restringe la posibilidad de atender la totalidad de la demanda, ya que el bus opera alternadamente en ambos sentidos de la ruta, perdiéndose una fracción importante de la demanda en cada intervalo. Mientras tanto, rutas con una mayor disponibilidad de buses consiguen altos niveles de atención de demanda al establecer un despacho eficiente. Por ejemplo, se observa que la ruta *Panzenu* transportó 5844 pasajeros, representando el 98.55 % de la demanda total prevista para esta ruta.

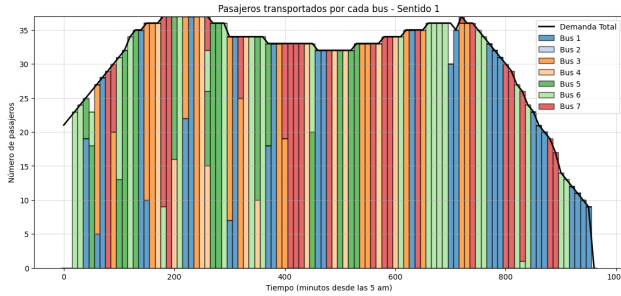


Figura 5: Atención de la demanda en el sentido 1

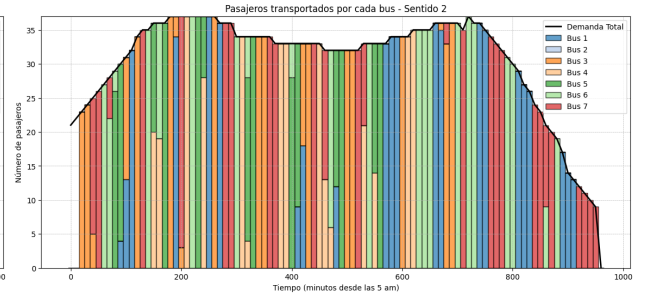


Figura 6: Atención de la demanda en el sentido 2

En las Figuras 5 y 6 se observa de manera más detallada cómo se atendió la demanda de pasajeros en cada uno de los sentidos para la ruta *Panzenu* por la flota de buses disponible, evidenciando que este porcentaje de demanda no atendido se dio en el Sentido 1 alrededor de las 4:40 de la tarde.

En términos de capacidad promedio utilizada por los autobuses, las rutas con mayor demanda, como *Pradera 27*, *Panzenu* y *Santander*, muestran niveles superiores al 89 %, indicando que los autobuses operan con una alta ocupación en la mayoría de los viajes. Por otro lado, rutas como *Dorado* y *Km 30* presentan una capacidad utilizada moderada, con 78.61 % y 55.40 %, respectivamente. Estos porcentajes reflejan una ocupación más baja en comparación con las rutas de mayor demanda. La ruta *Km 15*, en cambio, tiene un nivel de utilización significativamente más bajo, con solo un 33.89 %, lo que sugiere una baja densidad de pasajeros en relación con la capacidad de los vehículos.

En cuanto a los viajes realizados, las rutas con alta demanda, como *Pradera 27* y *Panzenu*, claramente registran un alto número de trayectos, alcanzando 166 y 124 viajes, respectivamente. Estas cifras contrastan con rutas de menor demanda, como *Km 30* y *Km 15*, que realizaron únicamente 21 y 48 viajes. En el caso de *Km 30*, todos los trayectos fueron ejecutados por un único bus, subrayando la limitación operativa debido a la escasez de recursos.

Respecto a la utilización promedio de la flota, se observa que las rutas *Pradera 27*, *Km 30* y *Km 15* destacan con niveles superiores al 95 %, lo que indica que los buses pasan la mayor parte del tiempo operativo transportando pasajeros. En contraste, rutas como *Mogambo 22*, *Tambo Circunvalar* y *Dorado* muestran una utilización más baja, con 40.26 %, 56.79 % y 27.68 %, respectivamente. Esto sugiere que, en estas rutas, los buses experimentan tiempos de espera prolongados en las cabeceras o realizando viajes en vacío.

En general, los resultados destacan la capacidad del sistema para priorizar la atención de rutas con alta demanda, asegurando niveles de servicio elevados y una utilización eficiente de los recursos. Sin embargo, también evidencian limitaciones en rutas con menor demanda o restricciones operativas, como es el caso de *Km 30*. Esto subraya la importancia de equilibrar la asignación de recursos entre las diferentes rutas para maximizar la atención de la demanda y optimizar la utilización de la flota.

7. Métodos de Aceleración

En esta sección se presentan los experimentos computacionales diseñados para evaluar el rendimiento de la solución propuesta. Todos los experimentos se llevaron a cabo utilizando un equipo con las especificaciones previamente definidas. El algoritmo fue desarrollado en Python 3.12.4 y resuelto mediante el solver Gurobi™.

7.1. Selección de Parámetros

La selección de los parámetros se basó en las características del problema, que corresponde a un problema de flujo en redes, teniendo en cuenta lo documentado por Gurobi [31] [32] [33]. Inicialmente,

se utilizaron los parámetros predeterminados proporcionados por Gurobi TM para establecer un modelo base, con un límite de tiempo (*Timelimit*) de 1 hora y una brecha óptima (*Gap*) del 0.5%. Posteriormente, se evaluaron diferentes parámetros que afectan los cortes generados por el solver, aplicándolos de forma individual para evitar posibles interacciones negativas que pudieran afectar el tiempo de solución o la calidad de los resultados.

Los parámetros seleccionados se basaron en lo reportado por [34], que resalta la importancia del uso de cortes para mejorar los tiempos de resolución en problemas de programación entera mixta (MILPs) y el empleo de *MipFocus* para priorizar enfoques óptimos. En este sentido, los parámetros analizados fueron los siguientes: *CliqueCuts*, que mejora el rendimiento en problemas con variables binarias, fue incluido debido a que la mayoría de las variables en el modelo son binarias. *FlowCoverCuts*, diseñado específicamente para modelos basados en flujos, resultó relevante dado que el problema es inherentemente de flujo. *ImpliedCuts*, que reduce el espacio factible del modelo, se aplicó debido a su utilidad exclusiva en problemas MIPs. Por otro lado, *LiftProjectCuts* demostró ser útil en modelos con variables mixtas enteras, como el caso del presente estudio. *NetworkCuts*, un parámetro específico para problemas de redes, resultó particularmente relevante en este contexto, dado que afecta exclusivamente problemas MIPs. Además, *SepMipCuts* se empleó para mejorar la generación de cortes que separan soluciones no enteras durante el proceso de *branch-and-bound*. Finalmente, *MipFocus* permitió priorizar distintos enfoques, como la búsqueda de soluciones factibles de manera rápida, la reducción del *Gap*, o la exploración más exhaustiva de nodos. [31]

Adicionalmente, se utilizó la *TuningAPI* de Gurobi para optimizar el rendimiento del modelo en las distintas rutas. Este procedimiento de ajuste automatizado se realizó siguiendo lo mencionado por [35], logrando identificar configuraciones que mejoraron los resultados específicos para cada ruta.

Cada uno de estos parámetros puede tomar valores de 0, 1 y 2, donde 0 desactiva el parámetro, 1 genera cortes conservadores y 2 produce cortes agresivos. Para garantizar resultados consistentes, cada parámetro fue evaluado de manera independiente. Esto evitó combinaciones que pudieran impactar negativamente el tiempo de solución.

La elección de cada parámetro se realizó considerando las características específicas del problema. *CliqueCuts* fue considerado adecuado por su efectividad en problemas con variables binarias. *FlowCoverCuts* al ser mencionado ser relevante debido a la naturaleza basada en flujos del modelo. *ImpliedCuts* optimiza la solución al reducir el espacio de factibilidad en problemas MIPs. *LiftProjectCuts* es útil para manejar las variables enteras mixtas presentes en el modelo. *NetworkCuts* fue seleccionado debido a sus características mencionadas en Gurobi al ser diseñado específicamente para problemas de redes. *SepMipCuts* mejora la eficacia en la separación de soluciones no enteras. Finalmente, *MipFocus* permitió ajustar el enfoque de solución según los objetivos específicos del modelo.

7.2. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los experimentos realizados, junto con un análisis detallado del impacto de cada parámetro en el *Gap* y el rendimiento del algoritmo en cuanto al tiempo y el proporcionado para cada ruta. Los parámetros presentados en la tabla han sido simplificados mediante iniciales para facilitar su representación. En este contexto, CC corresponde a *CliqueCuts*; FCC representa *FlowCoverCuts*; IC se refiere a *ImpliedCuts*; LPC denota *LiftProjectCuts*; NC indica *NetworkCuts*; SMC hace referencia a *SepMipCuts*; y finalmente, MIPF corresponde a *MipFocus*. Estos resultados permiten identificar las configuraciones óptimas para resolver el problema de manera eficiente. Para el modelo Default se utilizó únicamente un parámetro *MIPGap* del 5% y un *Timelimit* de 1 hora, mientras que los demás parámetros permanecen con su valor predeterminado de -1.

Tabla 5: Gap para diferentes rutas y parámetros

Ruta	Default	MSC,1	MSC,2	IC,1	IC,2	NC,1	NC,2	FCC,1	FCC,2	LPC,1	LPC,2	CC,1	CC,2	MIPF,1	MIPF,2	Tuning*
Pradera 27	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.49	0.49	0.50	0.50	0.50	0.48	0.51	0.47
Panzenu	0.75	0.75	0.74	0.74	0.75	0.74	0.75	0.64	0.71	0.65	0.71	0.75	0.64	0.82	0.65	0.74
Santander	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.39	0.39	0.24
Mogambo	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.47	0.50	0.38	0.47	0.50	0.49	0.50	0.50	0.50
Tambo	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.48	0.44	0.49	0.29	0.49	0.48	0.50	0.36	0.48
KM30	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.00	0.08	0.08	0.08	0.00	0.00
Dorado	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
KM15	0.22	0.22	0.21	0.22	0.21	0.21	0.22	0.22	0.22	0.22	0.36	0.22	0.22	0.50	0.38	0.19
Gap Promedio	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.33	0.34	0.32	0.32	0.35	0.33	0.41	0.35	0.33

El análisis de los resultados del *GAP* obtenido para diferentes configuraciones de parámetros muestra una notable variabilidad tanto entre las rutas como en el impacto de los parámetros utilizados. El *GAP* mide la diferencia relativa entre la solución obtenida y el óptimo conocido, siendo un indicador clave de la calidad de las soluciones en problemas de optimización.

En cuanto a la variabilidad entre rutas, se observa que algunas como *Santander*, *KM30* y *Dorado* presentan valores de *GAP* consistentemente bajos. En el caso de *Santander*, el *GAP* permanece en *0.24 %* en todas las configuraciones, mientras que *Dorado* y *KM30* registran valores de *0.00 %* y *0.08 %*, respectivamente. Estos resultados sugieren que estas rutas son más sencillas de resolver para el solver, independientemente de los parámetros utilizados. Por otro lado, rutas como *Panzenu* destacan por su elevado *GAP*, con un promedio cercano al *0.75 %* en varias configuraciones, lo que refleja una mayor dificultad para encontrar soluciones cercanas al óptimo.

El impacto de los parámetros sobre el *GAP* varía según la ruta y la configuración utilizada. Algunas configuraciones, como *FlowCoverCuts = 2* y *LiftProjectCuts = 1*, demuestran ser efectivas en la mejora de la calidad de las soluciones en rutas específicas. Por ejemplo, en *Mogambo*, el *GAP* disminuye de *0.50 %* a *0.47 %* con *FlowCoverCuts = 2* y a *0.38 %* con *LiftProjectCuts = 1*. De manera similar, en *Tambo Circunvalar*, *FlowCoverCuts = 2* reduce el *GAP* a *0.44 %*. Sin embargo, configuraciones más agresivas como *MIPFocus = 1* y *MIPFocus = 2* tienden a incrementar el *GAP* en varias rutas. Por ejemplo, en *Panzenu*, el *GAP* aumenta hasta *0.82 %* con *MIPFocus = 1*, mientras que en *Tambo Circunvalar* alcanza *0.50 %*, en comparación con valores más bajos logrados con configuraciones menos agresivas. No obstante, en rutas como *Santander*, el *GAP* permanece constante (*0.24 %*) independientemente de los parámetros utilizados, lo que sugiere que las características de estas rutas no son significativamente influenciadas por los ajustes de parámetros.

El método *Tuning* presenta consistentemente los valores más bajos de *GAP* en la mayoría de las rutas. Este método reduce significativamente el *GAP* en casos como *KM15* (*0.19 %*) y *Tambo Circunvalar* (*0.48 %*), mostrando un desempeño destacado. Sin embargo, como se mencionó previamente en el análisis de tiempos, el *Tuning* tiene un costo computacional elevado, ya que requiere aproximadamente *2 horas de ajuste por ruta*. Esto limita su aplicabilidad en escenarios de gran escala o donde los recursos computacionales son restringidos. Con respecto al rendimiento computacional obtenidos con los distintos parámetros se obtuvieron los siguientes valores de tiempo de ejecución.

Tabla 6: Tiempos de ejecución de rutas obtenidos por diferentes parámetros (minutos)

Ruta	Default	MSC,1	MSC,2	IC,1	IC,2	NC,1	NC,2	FCC,1	FCC,2	LPC,1	LPC,2	CC,1	CC,2	MIPF,1	MIPF,2	Tuning*
Pradera 27	2.11	3.11	2.06	2.08	2.54	1.98	2.53	2.01	4.39	1.63	1.63	2.06	2.05	2.99	60.00	2.10
Panzenu	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00
Santander	1.07	0.76	0.55	0.52	0.73	0.55	0.73	0.54	0.50	0.79	0.79	0.55	0.54	0.52	0.86	0.20
Mogambo	17.18	23.19	16.39	15.89	18.93	16.11	17.89	17.13	16.30	16.56	16.56	16.38	16.57	34.51	38.22	16.28
Tambo	2.09	2.26	1.73	1.68	2.02	1.69	1.69	1.74	1.86	2.14	2.14	1.72	1.80	3.93	0.74	0.11
KM30	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00
Dorado	0.44	0.50	0.34	0.26	0.41	0.34	0.31	0.34	0.32	0.33	0.33	0.33	0.31	0.46	0.09	0.01
KM15	0.03	0.04	0.02	0.02	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.00
Total	82.93	89.86	81.10	80.47	84.66	80.71	83.18	81.80	83.40	81.49	81.49	81.06	81.30	102.46	159.93	78.70
GAP de Mejora	0 %	8 %	-2 %	-3 %	2 %	-3 %	0 %	-1 %	1 %	-2 %	-2 %	-2 %	-2 %	24 %	93 %	-5 %

El cálculo del GAP de mejora se realizó en comparación con el modelo Default. Posteriormente, se activaba el parámetro correspondiente, según lo indicado en la tabla.

$$\text{GAP de mejora} = \frac{\text{Alternativa} - \text{Default}}{\text{Default}} \quad (18)$$

El *Default* representa el valor base del modelo y *Alternativa* corresponde al valor obtenido al activar el parámetro indicado.

Los resultados de los experimentos realizados para evaluar los tiempos de ejecución de las diferentes configuraciones de parámetros muestran una notable variabilidad entre las rutas y los métodos aplicados. En primer lugar, se observa que la ruta Panzenu exhibe consistentemente el tiempo máximo permitido de 3600 segundos en todas las configuraciones, alcanzando el límite establecido por el *Timelimit*. Esto sugiere que esta ruta presenta características estructurales que dificultan la resolución del problema en el tiempo establecido, independientemente del método utilizado. En contraste, otras rutas como KM30 y KM15 requieren tiempos significativamente menores, evidenciando la variabilidad del desempeño del algoritmo dependiendo de las características individuales de las rutas.

En términos de mejoras por parámetros específicos, para rutas como Santander, el uso de configuraciones como *ImpliedCut* = 1 y *NetworkCut* = 1 resulta en una mejora notable del tiempo de resolución, alcanzando 0.52 y 0.55 minutos respectivamente. Esto demuestra la efectividad de estos cortes en la estructura del problema particular de esta ruta. En rutas como Mogambo, parámetros como *FlowCoverCuts* = 1 y *LiftProjectCuts* = 1 también presentan mejoras importantes, con tiempos de 17.13 y 16.56 minutos respectivamente. Estos resultados reflejan que ciertos parámetros logran adaptarse mejor a la topología específica de estas rutas.

En cuanto al método de Tuning, este presenta consistentemente los menores tiempos en casi todas las rutas, con reducciones significativas en Santander (0.20 minutos), Dorado (0.01 minutos) y KM30 (0.001 minutos). Sin embargo, en rutas como Pradera 27 y Panzenu, el tiempo sigue siendo alto, alcanzando 2.10 y 60 minutos respectivamente. Esto limita la efectividad universal del método. Además, aunque el método por Tuning sobresale por su capacidad para reducir tiempos de resolución, tiene un costo adicional significativo: el ajuste de los parámetros requiere aproximadamente *2 horas de computación por ruta*. Este costo incrementa considerablemente la necesidad computacional total, lo que debe considerarse cuidadosamente al evaluar su aplicación en problemas a gran escala o en escenarios donde los recursos computacionales son limitados.

Por otro lado, configuraciones agresivas como *MIPFocus* = 2 conducen a tiempos elevados, particularmente en rutas como Mogambo (38.22 minutos) y Tambo Circunvalar (0.74 minutos). Aunque estas configuraciones priorizan ciertas estrategias de exploración durante el proceso de solución, los resultados sugieren que no siempre son efectivas para mejorar los tiempos en este contexto.

En cuanto al porcentaje de mejora respecto al Modelo Base, configuraciones como *ImpliedCut* = 1 (2.96 %), *NetworkCut* = 1 (2.68 %) y *LiftProjectCuts* = 1 (1.74 %) muestran una reducción significativa en el tiempo total de resolución, posicionándose como opciones efectivas y menos costosas en términos de tiempo de ajuste. Por otro lado, configuraciones como *MIPFocus* = 2 muestran un retroceso significativo, con un incremento en el tiempo total del 92.85 %, evidenciando su ineficacia en este contexto.

En términos computacionales, la variabilidad de los tiempos entre rutas y parámetros resalta la importancia de adaptar las configuraciones a las características específicas del problema. En escenarios donde los recursos computacionales son limitados, configuraciones predefinidas como *ImpliedCut* = 1 o *NetworkCut* = 1 pueden ofrecer soluciones adecuadas sin el elevado costo asociado al método de Tuning.

Teniendo en cuenta ambas tablas, que muestran el rendimiento computacional y el GAP asociado

a cada uno de los parámetros, se realizó una combinación de aquellos parámetros que mejoraron tanto el tiempo computacional como el GAP promedio en comparación con el GAP promedio del modelo Default. Los parámetros seleccionados que cumplen ambas condiciones fueron: *MipSepCuts* evaluado en 2, *ImpliedCut* evaluado en 1, *NetworkCut* evaluado en 1, *FlowCoverCut* evaluado en 1, *LiftProjectCut* evaluado en 1 y 2, y por último, *CliqueCuts* evaluado en 1 y 2.

Tabla 7: Combinaciones de cortes y sus valores

Parámetro	Comb 1	Comb 2	Comb 3	Comb 4
MipSepCuts	2	2	2	2
ImpliedCut	1	1	1	1
NetworkCut	1	1	1	1
FlowCoverCut	1	1	1	1
LiftProjectCut	1	1	2	2
CliqueCuts	1	2	1	2

Con estos parámetros, se evaluaron cuatro combinaciones distintas presentadas en la Tabla 7, a las cuales se les asignaron nombres de *Comb* para facilitar su identificación en la tabla. Ahora, se realiza la implementación de estas combinaciones en cada una de las instancias.

Tabla 8: GAP (en porcentaje) para diferentes rutas y combinaciones

Tiempo	Base	Comb 1	Comb 2	Comb 3	Comb 4	Tuning*
Pradera 27	0,5	0,5	0,48	0,5	0,5	0,47
Panzenu	0,75	0,65	0,65	0,7	0,71	0,74
Santander	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24	0,24
Mogambo	0,5	0,38	0,38	0,49	0,49	0,5
Tambo	0,49	0,49	0,48	0,29	0,49	0,48
KM30	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Dorado	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
KM15	0,22	0,22	0,22	0,36	0,36	0,19
GAP Promedio	0,35	0,31	0,31	0,32	0,35	0,33

En la Tabla 8 se presentan los valores del GAP promedio obtenidos para cada una de las combinaciones analizadas. Los resultados destacan que la Combinación 1 ofrece el mejor desempeño, logrando una mejora significativa en el GAP promedio, lo que indica una solución más precisa en comparación con el modelo base. Por su parte, aunque la Combinación 2 alcanza un rendimiento similar en términos de GAP promedio, su desempeño en los tiempos totales es inferior al de la Combinación 1, con una mejora más modesta de 5.67% evidenciada en la tabla 9 donde se analiza el desempeño de las combinaciones en términos del tiempo computacional.

Tabla 9: Tiempos de ejecución de rutas obtenidos por diferentes combinaciones (minutos)

Tiempo	Default	Comb 1	Comb 2	Comb 3	Comb 4	Tuning*
Pradera 27	2.11	2.68	3.15	1.27	1.28	2.10
Panzenu	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00	60.00
Santander	1.07	0.52	0.55	0.74	0.81	0.20
Mogambo	17.18	7.33	11.67	17.07	17.59	16.28
Tambo	2.09	1.75	2.33	2.61	2.49	0.11
KM30	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00
Dorado	0.44	0.29	0.48	0.40	0.41	0.01
KM15	0.03	0.02	0.03	0.03	0.04	0.00
Total	82.93	72.59	78.22	82.13	82.62	78.70
GAP de Mejora	0.00	-12.46 %	-5.67 %	-0.96 %	-0.37 %	-5.09 %

Los resultados obtenidos, presentados en la Tabla 9, demuestran que todas las combinaciones evaluadas generan mejoras significativas en los tiempos de las rutas en comparación con el modelo Default. La mejora más destacada se alcanza con la Combinación 1, que logra una reducción del tiempo total del 12.46 % respecto al modelo base. Además, se observa que esta combinación supera en rendimiento a los resultados obtenidos mediante el ajuste Tuning. Cabe resaltar que, tanto en términos de tiempo computacional como de GAP promedio, la Combinación 1 supera al ajuste por Tuning, consolidándose como la opción más eficiente.

8. Evaluación de sensibilidad del intervalo temporal

En esta sección se evalúa el comportamiento del modelo al reducir el tamaño del intervalo que define la temporalidad de las predicciones y la toma de decisiones. Para este caso, se establece un intervalo un 50 % inferior al establecido en el análisis anterior, es decir, de 5 minutos.

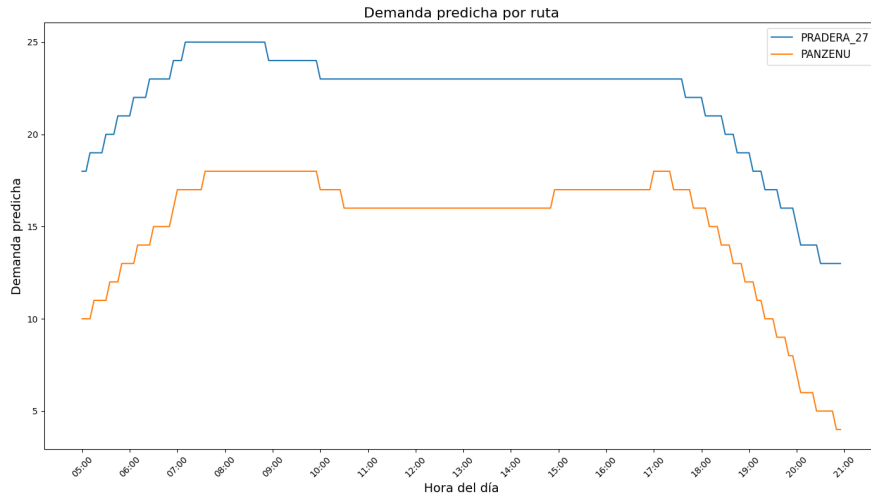


Figura 7: Demanda de pasajeros predicha por el modelo Prophet para cada ruta el día 08/04/2025 en intervalos de 5 minutos

En la Figura 7 se ilustran las predicciones de demanda con este nuevo intervalo. Para este análisis, se seleccionaron únicamente las dos rutas con mayor cantidad de registros históricos, Pradera 27 y

Panzenu, considerando que al establecer un intervalo de mayor precisión se requiere una mayor cantidad de datos para entrenar el modelo de manera efectiva.

Tabla 10: Resultados computacionales para cada ruta

Ruta	Utilidad	Gap MIP (%)	Tiempo de ejecución (s)
Pradera 27	7933	0.59	3600.13
Panzenu	5658	1.15	3600.14

En la Tabla 10 se presentan los resultados obtenidos al ejecutar el modelo con un intervalo temporal de 5 minutos. Se evidencia que el tamaño del problema aumenta significativamente, lo que impide que el modelo alcance el gap establecido como condición de parada. Esto se debe a que el tiempo de ejecución supera el límite de 3600 segundos para ambas instancias, Pradera 27 y Panzenu. Específicamente, para la instancia de Pradera 27, se alcanza un gap de 0.59 %, ligeramente mejor que el gap de 0.77 % obtenido con intervalos de 10 minutos. Sin embargo, para Panzenu, el gap aumenta a 1.15 %, significativamente mayor al 0.77 % anterior. Además, se observa una disminución en las utilidades: Pradera 27 presenta una utilidad de 7933, un 26.62 % inferior a la obtenida con intervalos de 10 minutos, y Panzenu muestra una utilidad de 5658, reduciéndose un 30.04 %.

Respecto al tiempo de ejecución, se evidencia un incremento importante. En la instancia de Pradera 27, el tiempo de ejecución alcanza los 3600.13 segundos, aproximadamente 20 veces mayor que con intervalos de 10 minutos, y sin lograr alcanzar el gap establecido. Este incremento demuestra claramente el aumento en la complejidad computacional al intentar incrementar la precisión y establecer una toma de decisiones en intervalos de tiempo menores y más realistas.

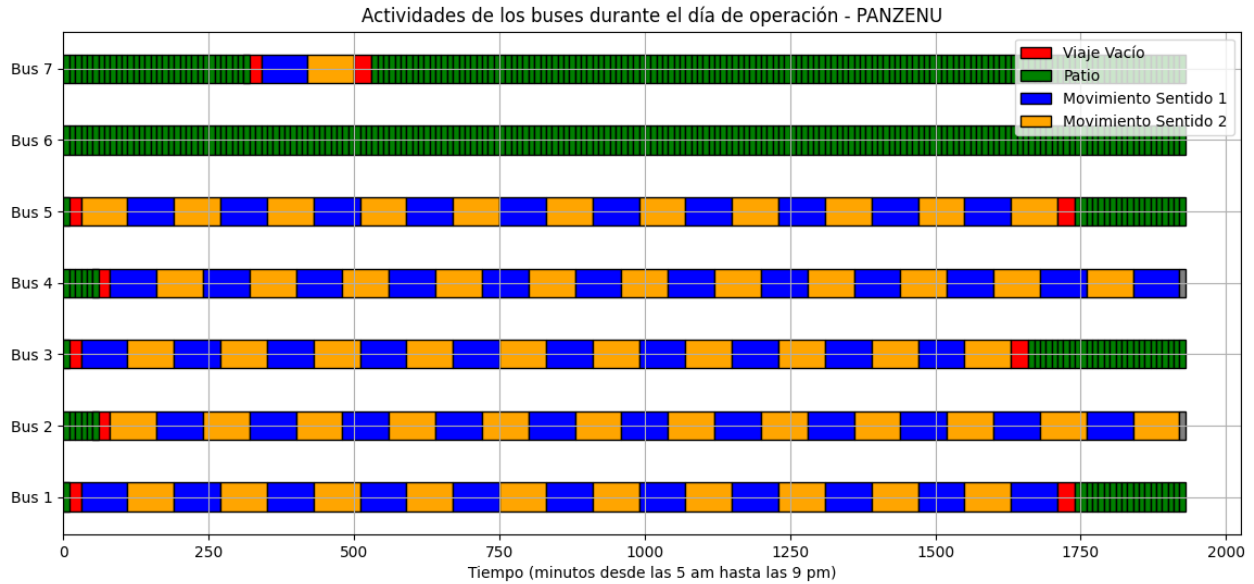


Figura 8: Programación de actividades óptima para los buses durante el día de operación

En la Figura 8 se evidencian las decisiones de despacho para la ruta Panzenu bajo el intervalo de 5 minutos. Al aumentar la precisión de estas decisiones, se logra un efecto operacional donde los recursos se utilizan de manera más eficiente. A diferencia del modelo con intervalos discretos de 10 minutos, donde únicamente el bus 6 no operaba y los otros buses mantenían una operación

constante, en este caso el modelo opta por reducir significativamente el uso del bus 7 sin disminuir la atención a la demanda, manteniendo un nivel de servicio del 98.68 %.

Estos resultados muestran que, al reducir el intervalo de temporalidad discreta de 10 a 5 minutos, el modelo incrementa su precisión en la toma de decisiones. Sin embargo, esta mejora en precisión viene acompañada de un aumento significativo en la complejidad computacional y en los tiempos de ejecución, lo que limita la viabilidad práctica del modelo en intervalos más pequeños. Además, la disminución en las utilidades sugiere que, el análisis establecido con el intervalo de 10 minutos tiende a sobrestimar las utilidades al establecer niveles de demanda mas altos a los obtenidos con una precisión de predicción mayor.

Cabe aclarar que el funcionamiento correcto del modelo depende de la disponibilidad de datos históricos suficientes para entrenar las predicciones de demanda. Idealmente, se desearía poder tomar decisiones en intervalos de tiempo aún más pequeños para lograr una mayor precisión y efectividad, lo cual requeriría soluciones que mitiguen el incremento en la complejidad computacional observada en este análisis de sensibilidad.

Además, es importante considerar que, aunque el intervalo de 5 minutos proporciona una mayor granularidad en la toma de decisiones, la reducción excesiva del intervalo puede llevar a una sobrecomplicación del modelo sin un beneficio proporcional en la mejora del servicio. Por lo tanto, encontrar un equilibrio óptimo entre la precisión temporal y la factibilidad computacional es crucial para la implementación efectiva del modelo en entornos reales.

9. Conclusiones

Este trabajo presenta un modelo de optimización para el despacho de buses basado en una red espacio-temporal, diseñado específicamente para atender la demanda variable y las condiciones operativas del sistema de transporte público de Montería, Colombia. Utilizando un enfoque de Programación Entera Mixta (MIP), el modelo permite la planificación óptima del despacho de buses en rutas fijas, maximizando la eficiencia operativa y la satisfacción de la demanda. Los resultados obtenidos en el caso de estudio indican que el modelo logra altos niveles de servicio, utiliza los buses de manera óptima y reduce significativamente los costos de operación diaria del sistema.

La estructura espacio-temporal del modelo incorpora elementos críticos del sistema, como los movimientos de los buses entre ubicaciones, el posicionamiento estratégico, los costos operativos y la capacidad de carga de los vehículos. Esto permite una asignación de recursos que minimiza los costos operativos, maximiza la utilización de los buses y evita, en la medida de lo posible, los trayectos en vacío. Estas mejoras demuestran una ventaja clara sobre la programación estática y las soluciones heurísticas básicas, donde la asignación de recursos a menudo no se alinea con los patrones de demanda reales y la toma de decisiones se basa en reglas simples. Como resultado, se reducen las ineficiencias operativas y se mejora la experiencia de los usuarios al asegurar una mayor cobertura de la demanda.

Sin embargo, el modelo enfrenta retos inherentes a la complejidad computacional que implica su aplicación en contextos de alta dimensionalidad y con intervalos de tiempo reducidos. Esto es especialmente relevante cuando se busca capturar la dinámica completa de la demanda y la disponibilidad de la flota en tiempo real. Estos desafíos destacan la necesidad de investigar y desarrollar métodos de aceleración que reduzcan los tiempos de cómputo y faciliten la implementación práctica en sistemas de transporte urbano de mayor escala.

Además, aunque el modelo ha demostrado ser eficaz en el caso de estudio, su aplicabilidad en diferentes contextos urbanos requerirá adaptaciones específicas para considerar factores locales como la infraestructura vial, los patrones de tráfico y las variaciones en la demanda a lo largo del tiempo. Futuras investigaciones podrían enfocarse en la integración de datos en tiempo real y en

la incorporación de factores externos, como eventos especiales o cambios estacionales, para mejorar aún más la precisión y la robustez del modelo.

En conclusión, este trabajo contribuye al campo del transporte público al ofrecer una herramienta avanzada para la optimización del despacho de buses, que mejora la eficiencia operativa, reduciendo costos operacionales e incrementando la satisfacción de los usuarios mediante una mejor cobertura de la demanda. Las futuras mejoras y adaptaciones del modelo propuesto pueden ampliar su utilidad y facilitar su adopción en otros sistemas de transporte público, promoviendo así una movilidad más eficiente y sostenible en entornos urbanos de mediana escala.

10. Trabajo futuro

Para optimizar aún más la aplicabilidad y eficiencia del modelo, se identifican diversas líneas de trabajo futuro que podrían generar avances significativos en el sistema de transporte público de Montería. Una de las principales prioridades es la integración de técnicas de aceleración computacional, como la descomposición de Benders, métodos de corte y algoritmos metaheurísticos. Estas estrategias permitirían explorar el espacio de soluciones de manera más rápida, sin comprometer la precisión, lo que resulta crucial para gestionar la alta dimensionalidad y complejidad inherentes a los problemas de despacho de autobuses.

Asimismo, la incorporación de optimización estocástica emerge como una opción clave para abordar la incertidumbre en la demanda y los tiempos de viaje. Al integrar variaciones imprevistas en estos factores, el modelo se volvería más resiliente y adaptable, permitiendo una planificación más robusta frente a fluctuaciones inesperadas en la demanda de pasajeros y en las condiciones operativas del sistema.

En cuanto a la predicción de la demanda, sería valioso explorar el uso de técnicas avanzadas de aprendizaje automático, como redes neuronales recurrentes (RNN) o modelos híbridos de series temporales. Estas metodologías permitirían una captura más precisa de las variaciones de la demanda, causadas por factores estacionales, eventos locales o cambios en los patrones de movilidad, lo que redundaría en pronósticos más confiables y ajustados a la realidad operativa del sistema de transporte.

Por último, resulta pertinente extender el modelo a un entorno multi-ruta para evaluar su rendimiento en sistemas de transporte más complejos. Esta ampliación implicaría ajustes en la estructura del modelo y un mayor requerimiento de capacidad computacional, pero ofrecería una visión más integral del desempeño del sistema urbano, facilitando una coordinación más eficiente entre las diferentes rutas y optimizando el uso de la flota de manera global.

Referencias

- [1] Banco Mundial. *Overview: Transport*. Accedido: 18 de octubre de 2024. 2023. URL: <https://www.bancomundial.org/es/topic/transport/overview>.
- [2] Gibet Camós y Juanita Concha Rivera. *El transporte público en Colombia: estos son sus retos para ser exitoso*. [En línea]. Disponible: <https://blogs.iadb.org/transporte/es/el-transporte-publico-en-colombia-estos-son-sus-retos-para-ser-exitoso/>. Abr. de 2020. URL: <https://blogs.iadb.org/transporte/es/el-transporte-publico-en-colombia-estos-son-sus-retos-para-ser-exitoso/>.
- [3] V. Guihaire y J.-K. Hao. “Transit network design and scheduling: A global review”. En: *Transportation Research Part A: Policy and Practice* 42.10 (2008), págs. 1251-1273.

- [4] Gang Cheng y Yijie He. “Enhancing passenger comfort and operator efficiency through multi-objective bus timetable optimization”. En: *Electronic Research Archive* 32.1 (2024), págs. 565-583. DOI: [10.3934/era.2024028](https://doi.org/10.3934/era.2024028). URL: <https://www.aimspress.com/aimspress-data/era/2024/1/PDF/era-32-01-028.pdf>.
- [5] Hengameh Fakhravar. “Combining heuristics and Exact Algorithms: A Review”. En: *arXiv preprint arXiv:2202.02799* (feb. de 2022). DOI: [10.48550/arXiv.2202.02799](https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.02799). URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.02799>.
- [6] *Crisis del transporte público de Montería también afecta al comercio: Fenalco*. [En línea]. Disponible: <https://larazon.co/monteria/crisis-del-transporte-publico-de-monteria-tambien-afecta-al-comercio-fenalco/>. Ene. de 2024. URL: <https://larazon.co/monteria/crisis-del-transporte-publico-de-monteria-tambien-afecta-al-comercio-fenalco/>.
- [7] Divar Ortiz. *Pese a millonario gasto, sistema estratégico de transporte aún no arranca en Montería*. [En línea]. Disponible: <https://www.wradio.com.co/2023/03/28/pese-a-millonario-gasto-sistema-estrategico-de-transporte-aun-no-arranca-en-monteria/>. Mar. de 2023. URL: <https://www.wradio.com.co/2023/03/28/pese-a-millonario-gasto-sistema-estrategico-de-transporte-aun-no-arranca-en-monteria/>.
- [8] *Transporte público en Montería acumuló pérdidas por 10 mil millones en dos años*. Feb. de 2023. URL: https://larazon.co/monteria/transporte-publico-en-monteria-acumulo-perdidas-por-10-mil-millones-en-dos-anos/#google_vignette.
- [9] T. L. Magnanti y R. T. Wong. “Network design and transportation planning: Models and algorithms”. En: *Transportation Science* 18.1 (1984), págs. 1-55.
- [10] A. Patz. “Die richtige Auswahl von Verkehrslinien bei großen Straßenbahnnetzen”. En: *Verkehrstechnik* 50/51 (1925).
- [11] A. T. Murray. “A coverage model for improving public transit system accessibility and expanding access”. En: *Annals of Operations Research* 123 (2003), págs. 143-156.
- [12] A. T. Murray et al. “Public transportation access”. En: *Transportation Research Part D* 3 (1998), págs. 319-328.
- [13] S. Scheele. “A supply model for public transit services”. En: *Transportation Research Part B* 14 (1980), págs. 133-146.
- [14] P. G. Furth y N. H. M. Wilson. “Setting frequencies on bus routes: Theory and practice”. En: *Transportation Research Record* 818 (1982), págs. 1-7.
- [15] P. Chakroborty, K. Deb y P. S. Subrahmanyam. “Optimal scheduling of urban transit systems using genetic algorithms”. En: *Journal of Transportation Engineering* 121.6 (1995), págs. 544-553.
- [16] L. Castelli, R. Pesenti y W. Ukovich. “Scheduling multimodal transportation systems”. En: *European Journal of Operational Research* 155.3 (2004), págs. 603-615.
- [17] W. Lampkin y P. D. Saalmans. “The design of routes, service frequencies, and schedules for a municipal bus undertaking: A case study”. En: *Operational Research Quarterly* 18.4 (1967), págs. 375-397.
- [18] R. Borndörfer, M. Grötschel y M. E. Pfetsch. *A path-based model for line planning in public transport*. Inf. téc. Report 05-18. ZIB, 2005.
- [19] A. Eranki. “A model to create bus timetables to attain maximum synchronization considering waiting times at transfer stops”. Tesis de mtría. University of South Florida, 2004.

- [20] Y. Wang et al. “A data-driven and optimal bus scheduling model with time-dependent traffic and demand”. En: *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 18.9 (2017), págs. 2443-2452. DOI: [10.1109/tits.2016.2644725](https://doi.org/10.1109/tits.2016.2644725).
- [21] D. L. van Oudheusden y W. Zhu. “Trip frequency scheduling for bus route management in Bangkok”. En: *European Journal of Operational Research* 83.3 (1995), págs. 439-451. DOI: [10.1016/0377-2217\(94\)00362-G](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)00362-G).
- [22] Xuemei Zhou et al. “Optimizing Multi-Vehicle Demand-Responsive Bus Dispatching: A Real-Time Reservation-Based Approach”. En: *Sustainability* 15 (mar. de 2023), pág. 5909. DOI: [10.3390/su15075909](https://doi.org/10.3390/su15075909).
- [23] Z. Chen, X. Li y X. Zhou. “Operational design for shuttle systems with modular vehicles under oversaturated traffic: Discrete modeling method”. En: *Transportation Research Part B: Methodological* 122 (2019), págs. 1-19. DOI: [10.1016/j.trb.2019.01.015](https://doi.org/10.1016/j.trb.2019.01.015).
- [24] K. Gkiotsalitis y F. Alesiani. “Robust timetable optimization for bus lines subject to resource and regulatory constraints”. En: *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* 128 (2019), págs. 30-51. DOI: [10.1016/j.tre.2019.05..](https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.05..)
- [25] D. Guan et al. “Vehicle dispatch and route optimization algorithm for demand-responsive transit”. En: *Processes* 10.12 (2022), pág. 2651. DOI: [10.3390/pr10122651](https://doi.org/10.3390/pr10122651).
- [26] K. Gkiotsalitis. “A model for the periodic optimization of bus dispatching times”. En: *Applied Mathematical Modelling* 82 (2020), págs. 785-801. DOI: [10.1016/j.apm.2020.02.003](https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.02.003).
- [27] X. Zhou et al. “Optimizing Multi-Vehicle Demand-Responsive bus dispatching: a Real-Time Reservation-Based approach”. En: *Sustainability* 15.7 (2023), pág. 5909. DOI: [10.3390/su15075909](https://doi.org/10.3390/su15075909).
- [28] C. F. Daganzo. “Checkpoint dial-a-ride systems”. En: *Transportation Research Part B: Methodological* 18.4-5 (1984), págs. 315-327. DOI: [10.1016/0191-2615\(84\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0191-2615(84)90014-6).
- [29] A. Gorev, O. Popova y A. Solodkij. “Demand-responsive transit systems in areas with low transport demand of “smart city””. En: *Transportation Research Procedia* 50 (2020), págs. 160-166. DOI: [10.1016/j.trpro.2020.10.020](https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.10.020).
- [30] W. Kim et al. “Development of real-time optimal bus scheduling and headway control models”. En: *Transportation Research Record* 2111.1 (2009), págs. 33-41. DOI: [10.3141/2111-05](https://doi.org/10.3141/2111-05).
- [31] LLC Gurobi Optimization. *Parameter Examples*. Accessed: 2024-12-11. 2024. URL: <https://docs.gurobi.com/projects/optimizer/en/current/concepts/parameters/examples.html>.
- [32] LLC Gurobi Optimization. *Parameter Groups*. Accessed: 2024-12-11. 2024. URL: <https://docs.gurobi.com/projects/optimizer/en/current/concepts/parameters/groups.html>.
- [33] LLC Gurobi Optimization. *Lift Project Cuts Parameter*. Accessed: 2024-12-11. 2024. URL: <https://docs.gurobi.com/projects/optimizer/en/current/reference/parameters.html#parameterliftprojectcuts>.
- [34] Calvin Nau, Prashant Sankaran y Katie McConky. “Comparison of Parameter Tuning Strategies for Team Orienteering Problem (TOP) Solved with Gurobi”. En: *IIE Annual Conference. Proceedings*. Institute of Industrial y Systems Engineers (IISE). 2022, págs. 1-6.
- [35] Daniel Cuellar et al. “Modeling and solving the endpoint cutting problem”. En: *International Transactions in Operational Research* 30 (dic. de 2021). DOI: [10.1111/itor.13091](https://doi.org/10.1111/itor.13091).