Общая тема: ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.§ 1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ГРАДИЕНТ

п. 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ

Пусть D — область в пространстве двух, трех и более измерений. Говорят,что в области D задано скалярное поле, если в D задана скалярная функция точки $u(P) = u(x_1, ..., x_n) = u(r)$, называемая функцией поля (r — радиус-вектор точки $P(x_1, ..., x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $a(P) = a(r)$, то говорят, что в области D задано векторное поле, определяемое векторной функцией $a(P) = a(x_1, ..., x_n) = a(r)$.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются линии уровня $u(x, y) = C$ в пространстве двух измерений, поверхности уровня $u(x, y, z) = C$ в пространстве трех измерений и т.д. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. Векторной линией называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для вектора $a = a_x i + a_y j + a_z k$ определяются системой дифф. уравнений:

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

Векторной трубкой называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей с какой-либо векторной линией.

ЗАДАЧИ. Т. 2. стр. 151

Определить вид линий или поверхностей уровня следующих скалярных полей:

№ 1.1. $u = y^2 + x$. Ответ. Линии уровня — параболы $y^2 = C - x$.
Д/З. № 1.2-1.4.

Найти векторные линии следующих полей:
№ 1.9. $a = yi - xj$. Решение:

$$a_x = y, \quad a_y = -x, \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x},$$

$$-\,x\,dx = y\,dy \to x^2 + y^2 = C$$

— семейство окружностей суть векторные линии.

Д/З. № 1.10, 1.12.

п. 2. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Пусть $s = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$ — единичный вектор данного направления s, $r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ — радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Производная скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 по направлению s, обозначаемая через $\partial u/\partial s$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\tau\to 0} \frac{u(r_0 + \tau s) - u(r_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s. Производная $\partial u/\partial s$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{r=r_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r=r_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=r_0} \cos\gamma.$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\operatorname{grad} u$, называется вектор, проекциями которого являются частные производные функции $u(P)$ по соответствующим координатам, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j + \frac{\partial u}{\partial z}\, r.$$

ЗАДАЧИ

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению.

№ 1.21. $u = x^2 + (1/2)\, y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению P_0P_1, где $P_1(6, 2)$. Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y, \quad s = P_0P_1\,(4, 3),$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta = 4 \cdot \frac{4}{5} - 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$

№ 1.25. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $P_0(1, 2, 2)$. Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u$$

$$\operatorname{grad} u\big(yz\cdot i+xz\cdot j+xy\cdot k\big)\,\big|_{P_0}=$$

$$=4i+2j+2k\to 2,1,1\to\sqrt{6},\ \big|\operatorname{grad} u\big|=\frac{\partial u}{\partial n}=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

Д/З № 1.22, 1.23.

§ 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

п. 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ 1-ГО РОДА

Пусть $\smile{AB}$ — дуга кусочно-гладкой кривой, $u(P)$ — заданное на $\overset{\smile}{AB}$ скалярное поле. A_k — произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ и P_k — произвольные точки на частичных дугах $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$, длины которых обозначим через Δs_k.

Криволинейным интегралом 1-го рода от функции $u(P)$ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ называется предел:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds=\lim_{\max_k\ \Delta s_k\to 0}\ \sum_{k=1}^{n}u(P_k)\,\Delta s_k.$$

Здесь ds — дифференциал дуги. Для криволинейного интеграла 1-го рода:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds=\int_{\overset{\smile}{BA}} u(P)\,ds.$$

Приведем формулы для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода через определенный интеграл.

1. Уравнение дуги $\overset{\smile}{AB}$ задано в параметрическом виде: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0\le t\le t_1$.

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds=\int_{t_0}^{t_1} u[\,x(t),y(t),z(t)\,]\,\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

2. Уравнение плоской дуги $\overset{\smile}{AB}$ задается уравнением в декартовых координатах: $y=y(x)$, $a\le x\le b$.

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds=\int_{a}^{b} u[\,x,y(x)\,]\,\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

3. Уравнение плоской дуги $\overset{\smile}{AB}$ задается полярными координатами $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\alpha\le\varphi\le\beta$.

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds=\int_{\alpha}^{\beta} u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,\sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

ЗАДАЧИ

№ 2.2. Найти массу всей кардиоиды $r = a\,(1+\cos\varphi)$, если $\mu(P) = k\,\sqrt{r}$.

Решение. Имеем

$$M = \int_0^{2\pi} k\,\sqrt{r}\,\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi}\,d\varphi.$$

$$r = a\,(1+\cos\varphi), \quad r'_\varphi = -\,a\sin\varphi.$$

$$M = \int_0^{2\pi} k\,\sqrt{a\,(1+\cos\varphi)}\,\sqrt{a^2\,(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= ka\,\sqrt{a}\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)\cdot 2\,(1+\cos\varphi)}\,d\varphi =$$

$$= ka\,\sqrt{2a}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)\,d\varphi = ka\sqrt{2a}\cdot\varphi\,\Big|_0^{2\pi} + ka\,\sqrt{2a}\sin\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\,ka\,\sqrt{2a}.$$

Д/З № 2.1, 2.3.

п. 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ 2-ГО РОДА

Пусть на дуге $\overset{\smile}{AB}$ кусочно-гладкой кривой задано векторное поле $a = a(r) = a_x(x,y,z)i + a_y(x,y,z)j + a_z(x,y,z)k$, A_k — произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, P_k — произвольные точки на дугах $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$, Δr_k — приращение радиуса-вектора $r(P)$ на концах дуги $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$. Тогда криволинейным интегралом 2-го рода (линейным интегралом) по дуге $\overset{\smile}{AB}$ называется предел:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (a, dr) = \int_{\overset{\smile}{AB}} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz = \lim_{\max_k\,|\Delta r_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \big(a(P_k),\,\Delta r_k\big).$$

Здесь (a, dr), $\big(a(P_k),\,\Delta r_k\big)$ — скалярные произведения векторов.

Для параметрического задания уравнения дуги $\overset{\smile}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ имеем

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (a,\,dr) = \int_{t_0}^{t_1} [\,a_x(t)\,x'(t) + a_y(t)\,y'(t) + a_z(t)\,z'(t)\,]\,dt,$$

где t_0, t_1 — значения параметра t, отвечающие точкам A, B. Для криволинейных интегралов 2-го рода:

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} (a, dr) = -\int_{\overset{\smile}{BA}} (a, dr).$$

Линейный интеграл от вектора a, взятый по замкнутому контуру C, называется циркуляцией вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint_C a\cdot dr$. Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки.

Для плоских векторных полей $a = a_x(x, y)i + a_y(x, y)j$ имеет место формула Грина:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C a_x\, dx + a_y\, dy.$$

ЗАДАЧИ

№ 2.14. Вычислить работу силового поля $F = yi - xj$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

Решение. Имеем

$$\int_{\smile{AB}} (a,\, dr) = \int_{\smile{AB}} F_x\, dx + F_y\, dy = \int_{\smile{AB}} y\, dx - x\, dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + \int_{-a}^{a} x \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi ab.$$

Здесь $y = (b/a) \sqrt{a^2 - x^2},\ dy = (b/a)\,(-x)\, dx/\sqrt{a^2 - x^2}$.

Д/З: № 2.18, 2.22.