$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Найдем частные производные второго порядка. Производные вычисляются как производные от произведения.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y}+(x+y)e^{x+y}=(x+y+1)e^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=e^{x+y}+(x+y+1)e^{x+y}=(x+y+2)e^{x+y}.$$

Поскольку переменные x и y входят в аналитическое выражение функции симметрично, то частные производные по переменной y можно получить, заменяя в $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ x на y, а y – на x, т.е. $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(x+y+2)e^{x+y}$.

Смешанную производную найдем дифференцируя $\frac{\partial u}{\partial x}$ по y

$$\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=e^{x+y}+(x+y+1)e^{x+y}=(x+y+2)e^{x+y}.$$

Подставим найденные производные в формулу для d^2u и получим

$$d^2u=(x+y+2)e^{x+y}(dx)^2+2(x+y+2)e^{x+y}dxdy+(x+y+2)e^{x+y}(dy)^2$$

или после вынесения за скобку

$$d^2u=(x+y+2)e^{x+y}\left((dx)^2+2dxdy+(dy)^2\right).$$

Ответ. $d^2u=(x+y+2)e^{x+y}\left((dx)^2+2dxdy+(dy)^2\right)$.

Задание 12. *Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности* $z-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$ *в точке* $M_0(1,1,2)$.

Решение.

Если поверхность задана неявно $F(x,y,z)=0$ [5], то уравнение касательной плоскости, проходящей через точку M_0, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $A=F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $B=F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $C=F'_z(x_0,y_0,z_0)$.

Найдем частные производные от функции $F(x,y,z)$ по каждой переменной, используя правила дифференцирования.

[5] В случае явного задания функции $z=f(x,y)$, переносим z в правую часть равенства и получаем, что $A=f'_x(x_0,y_0)$, $B=f'_y(x_0,y_0)$, $C=-1$.

$$F'_x=-\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{2\left(x^2+y^2\right)},\ A=F'_x(1,1,2)=\tfrac{1}{4},$$

$$F'_y=-\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{x}{2\left(x^2+y^2\right)},\ B=F'_y(1,1,2)=-\tfrac{1}{4},$$

$$F'_z=1,\ C=F'_z(1,1,2)=1.$$

Подставляем в уравнение плоскости $\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{4}(y-1)+(z-2)=0$ и после преобразований получаем $x-y+4z-8=0$.

В качестве направляющего вектора для нормали можно взять вектор $\vec{S}=(1,-1,4)$. Тогда каноническое уравнение прямой проходящей через точку $M_0(1,1,2)$ принимает вид $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$.

Ответ. Касательная плоскость $x-y+4z-8=0$ и нормаль к поверхности $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{4}$.

Задание 13. *Исследовать функцию двух переменных* $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$ *на экстремум.*

Решение.

Запишем необходимое условие экстремума функции двух переменных $z=z(x,y)$

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\ \text{для данной функции}\ \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6x-3x^2=3x(2-x)=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=6y+4=2(3y+2)=0\end{cases}.$$

Решение системы уравнений дает две стационарные точки (точки подозрительные на экстремум) $M_1\left(0,-\frac{2}{3}\right)$, $M_2\left(2,-\frac{2}{3}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка

$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=6-6x$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=0$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=6$ и вычислим их значения в точках M_1 и M_2:

$$A_1=\frac{\partial^2z}{\partial x^2}(M_1)=6;\ B_1=\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}(M_1)=0,\ C_1=\frac{\partial^2z}{\partial y^2}(M_1)=6.$$

$$A_2=\frac{\partial^2z}{\partial x^2}(M_2)=6-6\cdot2=-6;\ B_2=\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}(M_2)=0,\ C_2=\frac{\partial^2z}{\partial y^2}(M_2)=6.$$

Достаточные условия экстремума функции $z = z(x, y)$ в стационарной точке M имеют вид: пусть $\Delta = AC - B^2$, где $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M)$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$. Тогда

1. если $\Delta > 0$, то в точке M экстремум функции, причем, если $A > 0$ (или $C > 0$ при $A = 0$), то функция имеет минимум, а если $A < 0$ (или $C < 0$ при $A = 0$), то функция имеет максимум;
2. если $\Delta < 0$, то в точке M экстремума нет;
3. если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Вычислив значение Δ, получим в точке M_1 $\Delta = 36 > 0$ и поскольку $A_1 = 6 > 0$ имеем минимум, а в точке M_2 $\Delta = -36 < 0$, поэтому экстремума нет.

Ответ. $z(M_1) = z(0; -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$ – минимум функции $z(x, y)$.

Задание 14. *Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $0 \le x \le 3$, $0 \le x + y \le 3$.*

Решение.

Стационарные точки функции определяются из системы
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$$
. Решая систему, находим точку $M(1;1)$, которая находится внутри области (Рисунок 4). Значение функции в этой точке равно $z(M) = -1$.

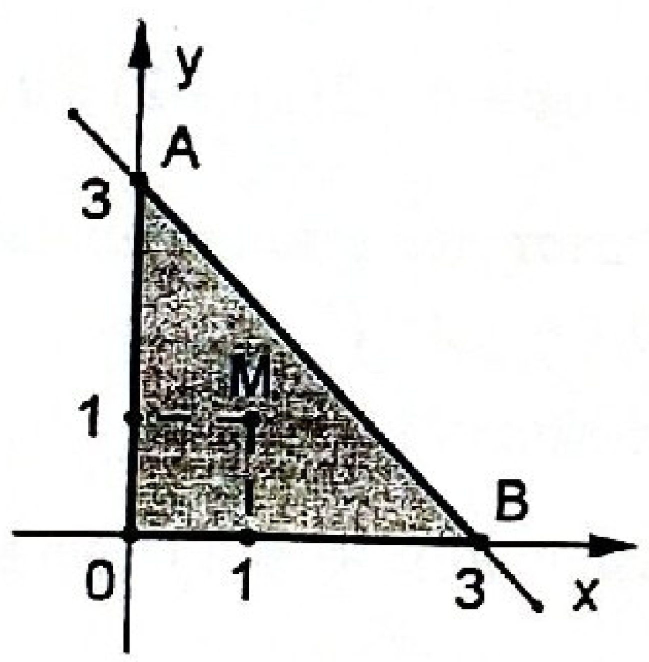

Рисунок 4

Далее исследуем поведение функции на границах области, которая в нашем случае является прямоугольным треугольником.

1. Граница OA имеет уравнение $x = 0$ при этом $y \in [0,3]$. На этой части границы $z = y^2 - y$ – функция одной переменной. Так как $z' = 2y - 1 = 0$ при $y = 0,5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_1(0;0,5)$, а также в граничных точках $M_2(0;0)$ и $M_3(0;3)$. Вычислим значения функции во всех этих точках: $z(M_1) = -0,25$, $z(M_2) = 0$, $z(M_3) = 6$.

2. Граница OB имеет уравнение $y = 0$ при $x \in [0,3]$. На этой части границы $z = x^2 - x$. Так как $z' = 2x - 1 = 0$ при $x = 0,5$, то наименьшее и наибольшее значения функции могут быть в точке $M_4(0,5;0)$, а также в граничных точках $M_2(0;0)$ и $M_5(3;0)$. Вычислим значения функции в точках: $z(M_4) = -0,25$, $z(M_5) = 6$.

3. Граница AB имеет уравнение $y = 3 - x$ при $x \in [0,3]$. На этой части границы $z = x^2 + (3-x)^2 - x(3-x) - x - (3-x)$ или после преобразования $z = 3x^2 - 9x + 6$. Так как $z' = 6x - 9 = 0$ при $x = 1,5$, то наименьшее и наибольшее значения могут быть в точке $M_6(1,5;1,5)$ и в граничных точках $M_3(0;3)$ и $M_5(3;0)$. Вычислим $z(M_6) = -0,75$.

Следовательно, наибольшее значение функции $z_{наиб} = z(0;3) = z(3;0) = 6$, а наименьшее $z_{наим} = z(1;1) = -1$.

Ответ. $z_{наиб} = z(0;3) = z(3;0) = 6$, $z_{наим} = z(1;1) = -1$.

Задание 15. *Исследовать функцию $z = 10 - 5x - 7y$ на экстремум при условии $x^2 + y^2 = 16$.*

Решение.

Будем решать задачу методом Лагранжа. Для этого составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = 10 - 5x - 7y + \lambda(x^2 + y^2 - 16)$.

Найдем стационарные точки этой функции, решив систему
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$
в нашем случае
$$\begin{cases} -5 + 2x\lambda = 0 \\ -7 + 2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$
. Выразив из первого и второго уравнения x и y, подставим их в третье уравнение. Найдем два зна-

чения множителя Лагранжа $\lambda_1=\frac{\sqrt{74}}{8}$ и $\lambda_2=-\frac{\sqrt{74}}{8}$ и соответствующие им стационарные точки $M_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}};\frac{\sqrt{74}}{8}\right)$ и $M_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}};-\frac{\sqrt{74}}{8}\right)$.

Определим наличие условного экстремума в соответствии с достаточными условиями. Составим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$ В нашем случае он имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -5 & -7 \\ -5 & 2\lambda & 0 \\ -7 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}=-98\lambda-50\lambda=-148\lambda.$$

Так как при $\lambda_1=\frac{\sqrt{74}}{8}$ определитель $\Delta=-148\lambda=-148\cdot\frac{\sqrt{74}}{8}=-\frac{37\sqrt{74}}{2}<0$, точка $N_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ является точкой условного минимума. А при $\lambda_2=-\frac{\sqrt{74}}{8}$ определитель $\Delta=-148\lambda=-148\cdot\left(-\frac{\sqrt{74}}{8}\right)=\frac{37\sqrt{74}}{2}>0$, точка $N_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ является точкой условного максимума.

Ответ. $N_1\left(\frac{20}{\sqrt{74}};\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ – точка условного минимума, $N_2\left(-\frac{20}{\sqrt{74}};-\frac{28}{\sqrt{74}}\right)$ –точка условного максимума.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

Задание 10.

Вычислить все частные производные второго порядка для данной функции.

10.1 $u=z\sin(xy)+\frac{xy}{1-z}$

10.2 $u=\frac{xz}{y+2\sqrt{z}}-\ln(xy-z^2)$

10.3 $u=e^{x^2y-z^3}+\frac{1}{5}x^5y^6z^7$

10.4 $u=\sin^2(xy-z)+\frac{z-\sqrt{x}}{2y}$

10.5 $u=x^{y^2}+x^6y^7z^8$

10.6 $u=\cos^2(zxy)+z^{xy}$

10.7 $u=(\cos yx)^z-\frac{z^2}{x-y}$

10.8 $u=2^{xzy}-\sin\left(\frac{\sqrt{x-y}}{z}\right)$

10.9 $u=xe^{zy}-\cos(x+y-z)$

10.10 $u=\cos^2\left(\sqrt{x}-yz\right)-x^{yz}$

10.11 $u=(\sin yz)^{x^2}-\frac{\sqrt{y-x}}{1-z}$

10.12 $u=\frac{1}{2}\sin^2(1-xzy)+\frac{x}{y-3z}$

10.13 $u=\ln\left(xy-z^2\right)+\frac{1}{2}\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$

10.14 $u=\sqrt{x^2-y^3z^4}-4^{xyz}$

10.15 $u=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{y+z}\right)+\sqrt{x^2-yz}$

10.16 $u=3\cos^2(xzy)-\frac{\sqrt{x}}{z-2y}$

10.17 $u=\frac{xy}{y-2z^2}-\sin\left(xy-z^2\right)$

10.18 $u=(\cos z)^{xy}-\frac{2}{5}\frac{\sqrt{y-x}}{z}$

10.19 $u=(\sin x)^{yz}+xy\sqrt{z}$

10.20 $u=z^{y^x}-\sqrt{\sin\left(y\sqrt{x}-z\right)}$

10.21 $u=\ln\left(x+y^2+z\right)+z^4x^5y^3$

10.22 $u=\frac{\operatorname{tg}(xy)}{1-x}-\frac{2z}{\sqrt{x}}$

10.23 $u=x^{yz}+y^{xy}+z^{xy}$

10.24 $u=2x^{\cos x}-\frac{\sqrt{y}-\sqrt[3]{x}}{3z}$

10.25 $u=\cos^2(xyz)-\frac{1}{5}\frac{z}{x-y}$

10.26 $u=x\cos\left(yz^2\right)-\frac{\sqrt{x-2z}}{\sqrt[5]{y}}$

10.27 $u=z^{x^y}+\sqrt{x-\sqrt{y-\sqrt{z}}}$

10.28 $u=z^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\sqrt[3]{1-xy}$

10.29 $u=\sin^2(x+yz)+2^x3^y4^z$

10.30 $u=\frac{x-y^2}{3\sqrt{z}}-\cos^2\left(\frac{x}{y}\right)$

Задание 11.

Вычислить дифференциал второго порядка d^2u для данной функции.

11.1 $u=(x+y)e^{x+y}$

11.2 $u=(y-x)e^{\frac{y}{x}}$

11.3 $u=\frac{y}{x}+x^4\sqrt{y}$

11.4 $u=e^{x-y}\left(x-2y^2\right)$

11.5 $u=(x+2y)e^{x-y}$

11.6 $u=\cos^2(x-2y)$

11.7 $u=\frac{1}{3}\sin^2(xy)$

11.8 $u=e^{x^2+y^2}$

11.9 $u=e^{2x-3y}(x-4y)$

11.10 $u=\frac{x}{x-y}$

11.11 $u=y\ln(x+y)$

11.12 $u=(x-y)e^{x^2+3y}$

11.13 $u=(2x+y)\cos(xy)$

11.14 $u=\frac{y^2}{3x}$

11.15 $u=3xy\sin(x-y)$

11.16 $u=\cos(x-y)x$

11.17 $u=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(x^2-y^2\right)$

11.18 $u=\frac{5x}{y^3}$

11.19 $u=\frac{2x}{y-1}$

11.20 $u=\sin^2(x-2y)$

11.21 $u=(x-y)e^{\frac{x}{y}}$

11.22 $u=e^{x-y}x$

11.23 $u=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^2+y^2\right)$

11.24 $u=(x-2y)\sin(xy)$

11.25 $u=(x+y)e^{\frac{2y}{x}}$

11.26 $u=x^2e^{xy}$

11.27 $u=xy^6-\cos\left(x^4y^3\right)$

11.28 $u=\frac{y}{y-x}$

11.29 $u=\sin^2(3x+y)$

11.30 $u=(y-x)e^{x+7y^2}$

Задание 12.

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к данной поверхности в точке M_0.

12.1 $z-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{8}\right)$

12.2 $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{z}{z}}-y$, $M_0(0;1;1)$

12.3 $z=y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $M_0\left(\frac{3\pi}{4};3;3\right)$

12.4 $x^2+y^2-z^2=-1$, $M_0(2;2;3)$

12.5 $z=\sin x\cdot\cos y$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$

12.6 $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$

12.7 $z=e^x\cdot\cos y$, $M_0(1;\pi;-e)$

12.8 $z^2+4y+x^2=0$, $M_0(0;1;-4)$

12.9 $z=\sqrt[3]{4xz-y^2+4}$, $M_0(1;-2;2)$

12.10 $x^2+y^2+z^2=3$, $M_0(1;1;1)$

12.11 $z=y+\ln\frac{x}{y}$, $M_0(1;1;1)$

12.12 $x^2+y^2+z^2=169$, $M_0(3;4;12)$

12.13 $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{4}\right)$

12.14 $z=x\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{x}$, $M_0\left(1;\frac{\pi}{4};1\right)$

12.15 $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $M_0(1;0;0)$

12.16 $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, $M_0(1;1;1)$

12.17 $x(y+z)(xy-z)=-8$, $M_0(2;1;3)$

12.18 $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$, $M_0(1;2;3)$

12.19 $z=x^2+y^2$, $M_0(1;2;5)$

12.20 $2x^2+y^2-z^2+xy-yz+2zx=2$, $M_0(1;0;0)$

12.21 $\frac{1}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)=1$, $M_0(1;1;1)$

12.22 $x(x-y)+y(x-z)+z(x+y)-2=0$, $M_0(1;0;1)$

12.23 $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$, $M_0(2;2;1)$

12.24 $x^2+y^2+xy-yz+z^2+xz=3$, $M_0(1;1;0)$

12.25 $z-2x+\ln\frac{y}{x}+1=0$, $M_0(1;1;1)$

12.26 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+xz+4yz=6$, $M_0(1;0;1)$

12.27 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, $M_0(0;0;4)$

12.28 $x^2+y^2+z^2-xy=1$, $M_0(1;1;0)$

12.29 $z=1+x^2+y^2$, $M_0(1;1;3)$

12.30 $x^2+y^2-z^2+3xy+3yz-2xz=4$, $M_0(1;1;3)$

Задание 13.

Исследовать данную функцию двух переменных на экстремум.

13.1 $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$, $y>0$, $x>0$

13.2 $z=y^2+x^2-xy+2x-y$

13.3 $z=xy^2(1-x-y)$

13.4 $z=e^{x-2y}(2x+y^2)$

13.5 $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$

13.6 $z=y^2+3x^2+y-x$

13.7 $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

13.8 $z=2x^2-x+(y+1)^2$

13.9 $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

13.10 $z=x^2y(2-x+y)$

13.11 $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

13.12 $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

13.13 $z=x^3+8y^3-6xy+1$

13.14 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

13.15 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

13.16 $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$

13.17 $z=x^3+y^2-3xy$

13.18 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$

13.19 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

13.20 $z=x^2+y^2+(x+y-2)^2$

13.21 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$

13.22 $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$

13.23 $z=3y^2+(2x-1)^2$

13.24 $z=xy\ln(x^2+y^2)$

13.25 $z=e^{x+2y}(x^2-xy+2y^2)$

13.26 $z=y^3-(x-4)^2$

13.27 $z=x^3+y^3-6xy$

13.28 $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$

13.29 $z=y^2x^3(4-y-x)$

13.30 $z=yx^2(1+x+y)$

Задание 14.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в заданной области.

14.1 $z=x^3+y^3-9xy+27$, $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$

14.2 $z=1-x-y$, $x^2+y^2\le 4$

14.3 $z=x^2+3y^2+x-y$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$

14.4 $z=x-x^2+y^2$, $x^2+y^2\le 9$

14.5 $z=x^2+y^2-12x+16y$, $x^2+y^2\le 25$

14.6 $z=5x-3y$, $y\ge x$, $y\ge -x$, $y\le 4$

14.7 $z=x^2+y^2+xy$, $|x|+|y|\le 1$

14.8 $z=2x^2+y^2+y$, $x^2+4y^2\le 4$

14.9 $z=4x^2+y^2-2y$, $|x|\le 1$, $0\le y-x\le 1$, $0\le x+y\le 1$

14.10 $z=\frac{1}{2}x^2-y^2+5x-y$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

14.11 $z=xy-x-y$,
$x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 3$

14.13 $z=3x+4y-2$,
$|x|\le 1,\ 0\le y-x\le 1,\ 0\le x+y\le 1$

14.15 $z=2x^2-y^2$,
$x^2+y^2\le 16$

14.17 $z=y^2-x^2$,
$x^2+y^2\le 9$

14.19 $z=x^2+y^2-3xy$,
$|x|+|y|\le 1$

14.21 $z=x^2-xy+y^2-4x$,
$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2x+3y-12\le 0$

14.23 $z=x^2-y^2$,
$|x|+|y|\le 2$

14.25 $z=x^2+y^2+5xy$,
$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le x+y\le 3$

14.27 $z=2y+x$,
$y\ge x^2,\ y-2x\le 3$

14.29 $z=y^2-2x^2$,
$x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 100$

14.12 $z=4-3x+2y$,
$x^2+y^2\le 9$

14.14 $z=2x^2+4y^2-xy$,
$0\le x\le 1,\ -1\le y\le 0$

14.16 $z=x^2-2x+y^2-2y+2$,
$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 3x+4y\le 12$

14.18 $z=xy$,
$x^2+y^2\le 1$

14.20 $z=x^3+y^3-3xy$,
$0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2$

14.22 $z=x^2+3y^2+x-y$,
$x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1$

14.24 $z=x^2y(4-x-y),\ x\ge 0$,
$y\le 0,\ x+y\le 6$

14.26 $z=xy+x+y$,
$1\le x\le 2,\ 2\le y\le 3$

14.28 $z=x^3+y^3-3xy$,
$0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2$

14.30 $z=x^2+2xy-4x+8y$,
$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$

Задание 15.

Исследовать данную функцию на условный экстремум методом множителей Лагранжа.

15.1 $z=1-x^2-y^2$
при условии $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

15.3 $z=x^2+y^2-xy+1$
при условии $y=x^2-1$

15.5 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
при условии $x+y=2$

15.7 $z=x-y$
при условии $x^2+y^2=1$

15.9 $z=xy^2$
при условии $x+2y=4$

15.11 $z=\dfrac{x-y-4}{\sqrt{2}}$
при условии $x^2+y^2=1$

15.2 $z=x^2+xy+y^2$
при условии $x^2+y^2=1$

15.4 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
при условии $x+y=6$

15.6 $z=xy$
при условии $x^2+y^2=1$

15.8 $z=6-4x-3y$
при условии $x^2+y^2=1$

15.10 $z=x^2+y^2-12x+16y$
при условии $x^2+y^2=25$

15.12 $z=2x+y$
при условии $x^2+y^2=5$

15.13 $z=xy$
при условии $x+y=1$

15.15 $z=x+2y$
при условии $x^2+y^2=5$

15.17 $z=x^2+y^2$
при условии $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$

15.19 $z=xy$
при условии $x^2+y^2=8$

15.21 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$
при условии $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{9}$

15.23 $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$
при условии $x+y+3=0$

15.25 $z=1-4x-8y$
при условии $x^2-8y^2=8$

15.27 $z=xy$
при условии $2x+3y-5=0$

15.29 $z=10-5x-7y$
при условии $x^2+y^2=16$

15.14 $z=1-4x-8y$
при условии $x^2-8y^2=8$

15.16 $z=xy^2$
при условии $x+2y=1$

15.18 $z=x+2y$
при условии $x^2+y^2=1$

15.20 $z=x+y$
при условии $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2}$

15.22 $z=x^2+xy+y^2$
при условии $x^2+y^2=1$

15.24 $z=3+2xy$
при условии $x^2+y^2=1$

15.26 $z=x^2-y^2$
при условии $x^2+y^2=2x$

15.28 $z=x^2y$
при условии $x^2+y^2=1$

15.30 $z=x^2+2xy-10$
при условии $y=x^2-4$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется частной производной функции нескольких аргументов по одному из аргументов?
2. Что такое смешанные частные производные?
3. Что называется полным дифференциалом функции двух аргументов?
4. Можно ли утверждать, что функция двух аргументов, имеющая в данной точке частные производные по обоим аргументам, непрерывна в этой точке?
5. На чем основано применение полного дифференциала в приближенных вычислениях?
6. Что такое локальный максимум (минимум) функции двух переменных?
7. Если $f'_x(x_0,y_0)=0$, то можно ли утверждать, что (x_0,y_0) – точка экстремума для $f(x,y)$?
8. Что такое критическая (стационарная) точка для функции двух переменных?
9. В чем заключается достаточное условие экстремума для функции двух переменных?
10. Что такое условный экстремум функции двух переменных?

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$

$\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$

$\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$

$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ при $x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$

$\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ при $x \to 0$

$(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$ при $x \to 0$, в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$ при $x \to 0$

Правила дифференцирования

$(cy)' = cy'$

$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'$

$(y_1 \cdot y_2)' = y_1' \cdot y_2 + y_1 \cdot y_2'$

$\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)' = \dfrac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y'}{y_2^2}$

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$, в частности $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$