Тема занятия: КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Обращаю внимание всех: начиная с этого занятия, начинаем работать по задачнику: СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ для втузов. Специальные разделы математического анализа. Под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. ТОМ 2.

Теория - лекционный материал, учебники, учебные пособия, ссылки на которые давались ранее, теоретические справки в самом задачнике. Смотрите, изучайте.

Функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy. Область D ограничена кривыми и прямыми: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ или: $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$. Тогда двойной интеграл можно представить в виде повторного:

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

ЗАДАЧИ, начиная со стр. 9, см. также примеры

Вычислить повторные интегралы:

№ 1.3.

$$\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}}\frac{s\,dy}{x^2+y^2}.$$

Решение. Имеем:

$$\int_x^{x\sqrt{3}}\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=x\int_x^{x\sqrt{3}}\frac{dy}{x^2+y^2}=$$

$$=x\cdot\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_x^{x\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

$$\int_0^2\frac{\pi}{12}\,dx=\frac{\pi x}{12}\Big|_0^2=\frac{\pi}{6}.$$

Д/З - номера 1.4, 1.5.

Для указанных ниже областей G записать двойной интеграл $\int\int_G f(x,y)\,dx\,dy$ в виде повторных, взятых в различных порядках:

№ 1.13.

G — область, ограниченная кривыми: $x^2+y^2=2a^2$, $x^2=ay$ $(a>0,\ y>0)$.

Решение. Имеем

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)\,dx + \int_a^{\sqrt{2}a} dy \int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Д/З №1.12.

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

№ 1.18. $\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx$.

Решениее. Имеем

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy.$$

Д/З № 1.19.

Вычислить следующие интегралы:

№ 1.26.$\int\int_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=x$, $x+y=2a$, $x=0, (a>0)$.

Решение. Имеем

$$\int_0^a dx \int_x^{2a-x} (x^2+y^2)\,dy,$$

$$\int_x^{2a-x} (x^2+y^2)\,dy = x^2y\,\Big|_x^{2a-x} + \frac{y^3}{3}\,\Big|_x^{2a-x} = x^2(2a-x)-x^3+\frac{(2a-x)^3}{3}-\frac{x^3}{3} =$$

$$= 4ax^2-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}a^3-4a^2x.$$

$$\int_0^2 \left(4ax^2-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}a^3-4a^2x\right)dx = \frac{4}{3}a^4.$$

Д/З № 1.27.

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Делается замена переменных по формулам:

$$x=\varphi(u,v), \qquad y=\psi(u,v),$$

где $(x, y) \in D$ — декартовы координаты, $(u, v) \in E$ — криволинейные координаты. Введем якобиан (определитель) преобразования координат

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (u,v) \in E.$$

Замена переменных в двойном интеграле осуществляется по формуле

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_E f[\,\varphi(u,v),\ \psi(u,v)\,] \cdot |\,I(u,v)\,|\,du\,dv.$$

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:
№ 1.42.

$$J = \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Имеем $x = r\,\cos\varphi,\ y = r\,\sin\varphi,\ I = r.$

$$J = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi/\sin^2\varphi}^{2a\sin\varphi} f[\,r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,]\,r\,dr.$$

Д/З.№ 1.41.
Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:
№ 1.45.

$$J = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy.$$

Решение. Имеем

$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a e^{r^2}\,r\,dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(e^{r^2}/2\,\Big|_0^a\right) d\varphi = \frac{(e^{a^2}-1)}{2}\,\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{(e^{a^2}-1)\cdot\pi}{4}.$$

Д/З № 1.46.

ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Площадь S плоской области G в декартовых координатах

$$S = \int\int_G dx\,dy.$$

В криволинейных координатах

$$S = \int\int_E |\,I\,|\,du\,dv.$$

В частности, в полярных координатах

$$S = \int\int_E r\,dr\,d\varphi.$$

Пусть гладкая поверхность имеет уравнение: $z = f(x, y)$. Тогда площадь части этой поверхности с проекцией в область G плоскости Oxy равна

$$Q = \int\int_G \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy.$$

Объем V цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G выражается интегралом

$$V = \int\int_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

где $f(x, y) \geq 0$ в G.

№ 1.60. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4,\ x + y = 5$.

Решение. Имеем точки пересечения $y = 4/x,\ y = 5 - x:\ x_1 = 1,\ x_2 = 4$. Поэтому

$$S = \int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} dy = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx =$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_1^4 = (1/2)(15 - 16\ln 2).$$

Д/З № 1.59, 1.82.