1. Множества и операции над ними

Терминология и обозначения

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – множество, состоящее из n элементов $a_1, a_2, ..., a_n$.

$\{x \mid P(x)\}$ – множество, состоящее из таких элементов x, которые обладают свойством P.

$x \in A$ – элемент x ***принадлежит*** множеству A.

$x \notin A$ – элемент x ***не принадлежит*** множеству A.

$\varnothing$ – ***пустое множество*** (не содержащее ни одного элемента).

U – ***универсальное множество*** (***универс***), т. е. множество всех элементов.

$A \subseteq B$ – множество A является ***подмножеством*** множества B (A ***включено*** в B, A ***содержится*** в B), это означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B.

$A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$ и $A \neq B$, т.е. A является ***собственным подмножеством*** B.

$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$ — ***множество всех подмножеств*** A.

$\overline{A} = U - A$ — ***дополнение*** множества A.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ – ***объединение*** множеств A и B.

$A \cap B = AB = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ – ***пересечение*** множеств A и B.

$A - B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ – ***разность*** множеств A и B.

$A \otimes B = (A - B) \cup (B - A)$ – ***симметрическая разность*** множеств A и B.

Некоторые свойства операций над множествами

1. $A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup U = U$; $\quad A \cap U = A$.
3. $A \cup A = A$; $\quad AA = A$.
4. $A \cup \overline{A} = U$; $\quad A\overline{A} = \varnothing$.
5. $\overline{\overline{A}} = A$.
6. ***Коммутативные законы***:
   $A \cup B = B \cup A$; $\quad AB = BA$.
7. ***Ассоциативные законы***:
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad A(BC) = (AB)C$.
8. ***Дистрибутивные законы***:
   $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$; $\quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

9. ***Законы де Моргана***:

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

10. ***Законы поглощения***:

$A \cup AB = A$; $A(A \cup B) = A$.

11. $A \cup \overline{A}B = A \cup B$; $A(\overline{A} \cup B) = AB$.

12. $A - B = A\overline{B}$.

13. $A \otimes B = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

Операцию пересечения считаем более сильной, чем другие. Это означает, что при отсутствии скобок она выполняется первой. Например, формула $(AB \cup C) \otimes CD$ эквивалентна $((A \cap B) \cup C) \otimes (C \cap D)$.

1.1. Какие из следующих утверждений верны:

1) $b \subset \{a,b\}$;
2) $b \in \{a,b\}$;
3) $\{b\} \subset \{a,b\}$;
4) $\{b\} \in \{a,b\}$;
5) $b \subset \{a,\{b\}\}$;
6) $b \in \{a,\{b\}\}$;
7) $\{b\} \subset \{a,\{b\}\}$;
8) $\{b\} \in \{a,\{b\}\}$;
9) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
10) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$;
11) $\varnothing \in \varnothing$;
12) $\varnothing \subseteq \varnothing$?

1.2. Сколько элементов в каждом из множеств:

1) $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$;
2) $\{1,\{1\},2,\{1,\{2,3\}\},\varnothing\}$;
3) $\varnothing$;
4) $\{\varnothing\}$;
5) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;
6) $\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$?

1.3. Известно, что $A \subseteq B$ и $a \in A$. Какие из следующих утверждений верны:

1) $a \notin B$;
2) $a \in B$;
3) $A \in B$;
4) $a \in A \cup B$;
5) $a \in A \cap B$;
6) $a \in A - B$;
7) $a \in A \otimes B$;
8) $a \subseteq A$;
9) $\{a\} \subseteq A$;
10) $\{a\} \subseteq B$?

1.4. Известно, что $B \subseteq A \subseteq C$, $a \in A$ и $a \notin B$. Какие из следующих утверждений верны:

1) $a \notin C$;

2) $a \in C$;

3) $a \in A \cap B$;

4) $a \in A \cup B$;

5) $a \in A - B$;

6) $a \in B - A$;

7) $a \in A \otimes B$;

8) $\{a\} \subseteq A \cap C$;

9) $a \in A \cup C$;

10) $\{a\} \subseteq A - C$;

11) $\{a\} \subseteq A \otimes C$;

12) $a \in (A \cap B) \cup C$;

13) $\{a\} \subseteq A \cap (B \cup C)$;

14) $\{a\} \subseteq B \cup (C - A)$;

15) $\{a\} \subseteq A \cap (B - C)$;

16) $\{a\} \subseteq B \otimes (A - C)$?

1.5. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x \mid 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \mid x - \text{четно}\}$, $C = \{x \mid x \ge 4\}$, $D = \{1,2,4\}$. Найти множества $A \cup B$, CD, $B \otimes C$, $\overline{A}\,\overline{(BD)}$, $(A - B) \cup (C - D)$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$, $2^A \cap 2^B$, $2^D - 2^B$.

1.6. Дан универс $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его подмножества $A = \{x \mid x - \text{четно}\}$, $B = \{x \mid x - \text{кратно четырем}\}$, $C = \{x \mid x - \text{простое}\}$, $D = \{1,3,5\}$. Найти множества $A \cup B$, CD, $A \otimes B$, $A(B \cup C \cup D)$, $C \otimes D$, $(A - B) \cup (C - D)$, $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $(C - A) \otimes D$, $2^A \cap 2^B$, $2^D - 2^C$.

1.7. Пусть M_2, M_3, M_5 обозначают подмножества универса N, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5. С помощью операций над множествами выразить через них множества всех чисел:

1) делящихся на 6;
2) делящихся на 30;
3) взаимно простых с 30;
4) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

Используя теоретико-множественную символику, записать утверждения:

1) 45 делится на 15;
2) 42 делится на 6, но не делится на 10;
3) каждое число из множества {8, 9, 10} делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, но не делится на 6.

1.8. Для каждого $i = 1,2,\ldots,n$ даны множества

$A_i = \{(i, j) \mid j = 1,2,\ldots,n\}$ и $B_i = \{(j, i) \mid j = 1,2,\ldots,n\}$.

Выразить через них с помощью операций $\cap$, $\cup$, $-$ множества:

1) $\{(i,j)\,|\,1\le i\le k, 1\le j\le k, k\le n\}$;
2) $\{(i,i)\,|\,i=1,2,\ldots,n\}$;
3) $\{(i,j)\,|\,1\le i\le j\le n\}$.

1.9. Выяснить, обладают ли операции $-$, $\otimes$ свойствами коммутативности и ассоциативности.

1.10. Выяснить, какие из следующих дистрибутивных законов справедливы для любых множеств A,B,C:

1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$;
2) $A-(B\cap C)=(A-B)\cap(A-C)$;
3) $A\otimes(B\cup C)=(A\otimes B)\cup(A\otimes C)$;
4) $A\otimes BC=(A\otimes B)(A\otimes C)$;
5) $A-(B\otimes C)=(A-B)\otimes(A-C)$;
6) $A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$;
7) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$;
8) $A(B-C)=AB-AC$;
9) $A\cup(B\otimes C)=(A\cup B)\otimes(A\cup C)$;
10) $A(B\otimes C)=AB\otimes AC$;
11) $A\otimes(B-C)=(A\otimes B)-(A\otimes C)$?

1.11. Доказать тождества:

1) $A\cup AB=A$;
2) $A(A\cup B)=A$;
3) $A\cup\overline{A}B=A\cup B$;
4) $A(\overline{A}\cup B)=AB$;
5) $A-(A-B)=AB$;
6) $A-AB=A-B$;
7) $A(B-A)=\varnothing$;
8) $A\cup(B-A)=A\cup B$;
9) $AB\cup A\overline{B}=A$;
10) $A\otimes B=A\overline{B}\cup\overline{A}B$;
11) $A\otimes(A\otimes B)=B$;
12) $A-B=A\otimes AB$;
13) $A\cup B=(A\otimes B)\cup AB$;
14) $\overline{A\otimes B}=\overline{A}\otimes B=A\otimes B\otimes U$;
15) $\overline{A\otimes B}=AB\cup\overline{A}\,\overline{B}$;
16) $A\otimes\overline{B}=\overline{A}\otimes B=AB\cup(\overline{A\cup B})$;
17) $A\cup\overline{A}B=A\otimes\overline{A}B=B\otimes A\overline{B}$;
18) $A-(B\cup C)=(A-B)(A-C)$;
19) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)=A-(B\cup C)$;
20) $A-(B-C)=(A-B)\cup AC=(A-B)\cup(A-\overline{C})$;
21) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$;

22) $A \cup B \cup C = (A-B) \cup (B-C) \cup (C-A) \cup ABC$;

23) $A - BC = (A-B) \cup (A-C) = ABC \otimes A$;

24) $A(B-C) = AB - C = ABC \otimes AB$;

25) $(AB \otimes A) \otimes (BC \otimes C) = (AB \otimes BC) \otimes (A \otimes C)$;

26) $(A \cup B) \otimes (B \cup C) = (A \otimes C) - B = (AB \otimes BC) \otimes (A \otimes C)$.

1.12. Выразить:

1) $\cup$ через $\otimes$, $\cap$;
2) $\cap$ через $\otimes$, $\cup$;
3) $\cup$ и $\cap$ через $\otimes$, $-$.

1.13. Доказать, что $A \subseteq B$ равносильно $A\overline{B} = \varnothing$.

1.14. Доказать, что $A = B$ равносильно $A \otimes B = \varnothing$.

1.15. Упростить систему условий:

1) $\begin{cases} A \subseteq B\,C \cup \overline{B}; \\ ABC \subseteq D; \\ AD \subseteq \overline{B\,C}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \overline{A} = B\,\overline{C}; \\ \overline{C} \subseteq D; \\ AD = \overline{B}\,C\,D; \\ B = CD. \end{cases}$

3) $\begin{cases} C \subseteq A \cup B; \\ A \cup D \subseteq B \cup C; \\ \overline{B} \subseteq D \subseteq \overline{C}; \\ BC \subseteq \overline{D}. \end{cases}$

1.16. Выяснить, равносильны ли следующие системы условий:

1) $\begin{cases} X \subseteq Z \subseteq \overline{W}, \\ Y \subseteq W, \\ X \cup Y = Z \cup W \end{cases}$ и $\begin{cases} X = Z, \\ Y = W. \end{cases}$

2) $\begin{cases} C \otimes D \subseteq A, \\ B \cup D \subseteq A \cup C, \\ A - D \subseteq C - B \end{cases}$ и $\begin{cases} \overline{A} \subseteq CD, \\ B - C \subseteq \overline{A}, \\ A \subseteq C \cup D. \end{cases}$

3) $\begin{cases} A \subseteq C \otimes B, \\ C \subseteq B \otimes D, \\ AC \subseteq B - D \end{cases}$ и $\begin{cases} B \subseteq \overline{CD}, \\ C - D \subseteq B, \\ AC \subseteq D, \\ A - B \subseteq BC. \end{cases}$

1.17. Решить уравнение:

1) $AX = B$;
2) $A \cup X = B$;
3) $A \otimes X = B$;
4) $A - X = B$;
5) $A \cup X = BX$;
6) $A \otimes X = BX$;
7) $A - X = X - B$;
8) $(A \cup X) \cup B = X \cup B$;
9) $AX = (X \cup B) - A$;
10) $\overline{XA} = (X - B) \cup A$;
11) $(A \cup X)\overline{B} = X - B$;
12) $(A - X) \cup B = B \otimes X$;
13) $(X - A) \cup B = \overline{AX}$;
14) $(X \otimes A) - B = BX$;
15) $AX \otimes B = B - X$;
16) $A - X = BX - A$;
17) $A \cap \overline{XB} = (X - A)B$;
18) $\overline{A \cup X} = \overline{BX}$;
19) $X - A = B \cup (X - A)$;
20) $(A \cup X) - B = B - XA$;
21) $XA = B(X \cup A)$;
22) $(A \otimes X)X = X - B$;
23) $AX \cup \overline{A} = (X - B)B$;
24) $(A \cup X)B = \overline{A} \cup BX$;
25) $A \otimes (X \cup B) = BX$;
26) $BX = (A - X)X$;
27) $AX \otimes B = X - A$;
28) $(X \cup B) - A = A \cup X$;
29) $AX \cup B = A - X$;
30) $X \cup A = (B - X) \otimes A$.

1.18. Найти множество X, удовлетворяющее системе уравнений, где A, B, C – данные множества, $B \subseteq A \subseteq C$:

1) $\begin{cases} A - X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$; 2) $\begin{cases} AX = B \\ A \cup X = C \end{cases}$.

1.19. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} (A \cup X)(B \cup X) = C \cup X \\ BX \cup C = \overline{AX} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} A \otimes B \otimes X = X \otimes C \\ AX \otimes B = AX \otimes C \end{cases}$;

3) $\begin{cases} AX = B \\ B\overline{X} = C \\ CX = A \cup B \end{cases}$;

4) $\begin{cases} A - X = \overline{B} \\ A \cup X = \overline{C} \end{cases}$;

5) $\begin{cases} AX \cup B\overline{X} = C \\ BX \cup A\overline{X} = C \end{cases}$;

6) $\begin{cases} A \cup X = BX \\ AX = C \cup X \end{cases}$.