Тема занятия: ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах.

Пусть область интегрирования T ограничена сверху и снизу поверхностями $z = \varphi_2(x, y) \geq z = \varphi_1(x, y)$ и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью Oxy является область G. Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\int\int\int_T f(x,t,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_G dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Если считать плоскую область криволинейной трапецией, то тогда тройной интеграл можно написать в виде повторного

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \ =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

ЗАДАЧИ

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\int\int\int_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ для указанных областей T :

№ 2.1. Область T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x + 3y + 4z = 12,\ z = 0,\ y = 0,\ x = 0$.

Решение. Имеем уравнение наклонной плоскости в отрезках

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Поэтому получим

$$\int\int\int_T dx\,dy\,dz = \int_0^6 dx \int_0^{4-(2/3)x} dy \int_0^{3-x/2-(3/4)y} f(x,y,z)\,dz.$$

Д/З: № 2.2, 2.3.

Вычислить интегралы:

№ 2.4.

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$$

Решение: Имеем

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

$$J_2 = \int_0^x J_1\,dy = \frac{x^2\cdot y}{2}\Bigg|_0^x + \frac{y^3}{6}\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{2x^3}{3}.$$

$$J_3 = \int_0^1 J_2\,dx = \frac{x^4}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Д/З № 2.5, 2.6.

2. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть в тройном интеграле $\int\int\int_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ производится взаимно однозначная замена переменных по формулам:

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w), \qquad z = z(u,v,w),$$

причем область T пространства $Oxyz$ отображается на область T_1 пространства O_1uvw и якобиан

$$I = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда справедлива формула

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_{T_1} f[\,x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\,]\cdot|\,I\,|\,du\,dv\,dw.$$

Из криволинейных координат чаще всего встречаются 1) цилиндрические координаты: r, φ, z; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $I = r$; 2) сферические координаты: r, φ, θ; $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$; $I = r^2\cos\theta$.

ЗАДАЧИ

№ 2.8. Вычислить интеграл

$$\int_0^{a/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\, dz,$$

перейдя к цилиндрическим координатам.

Решение. Имеем

$$J_1 = \int_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}\, dz = \int_0^{r^2\cos 2\varphi/a} r\cdot r\, dz = r^2\cdot z \Big|_0^{r^2\cos 2\varphi/a} = \frac{r^4\cos 2\varphi}{a}.$$

$$J_2 = \int_0^a \frac{r^4\cos 2\varphi}{a}\, dr = \frac{r^5}{5}\cdot\frac{\cos 2\varphi}{a}\Big|_0^a = \frac{a^4\cos 2\varphi}{5}.$$

$$J_3 = \int_0^{\pi/4} \frac{a^4\cos 2\varphi\, d\varphi}{5} = \frac{a^4}{10}\cdot\sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^4}{10}.$$

Д/З. № 2.10.

3. Приложения тройных интегралов.

Объем V пространственной области T равен

$$V = \int\int\int_T dx\, dy\, dz.$$

Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x,y,z)$, занимающего область T, равна

$$M = \int\int\int_T \gamma(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Формулы для статических моментов тела относительно координатных плотностей, координаты центра масс тела и моменты инерции тела относительно осей координат можно найти в задачнике под редакцией Ефимова, Демидовича, т. 2, на стр. 30.

№ 2.12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2+y^2,\ z = 2\,(x^2+y^2),\ y = x,\ y^2 = x$.

Решение. Имеем

$$V = \int\int\int_T dx\, dy\, dz = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \int_{x^2+y^2}^{2\,(x^2+y^2)} dz,$$

$$J_1 = z \Big|_{x^2+y^2}^{2\,(x^2+y^2)} = x^2+y^2,$$

$$J_2 = \int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy = x^2 y \Big|_x^{\sqrt{x}} + y^3/3 \Big|_x^{\sqrt{x}} = x^{5/2} + x^{3/2}/3 - 4x^3/3,$$

$$J_3 = \int_0^1 J_2\, dx = 3/35.$$

Д/З. № 2.18.