Тема занятия: СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

п. 1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле $a = a(r)$ называется потенциальным, если вектор поля a является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P):\ a(r) = \operatorname{grad} u(P)$. Функцию $u(P)$ в этом случае называют потенциалом векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $a(r)$ является равенство нулю вихря (ротора) этого поля: $\operatorname{rot} a \equiv 0$.

ЗАДАЧИ, стр. 173. Найти потенциалы следующих полей.

№ 4.1.

$$a = (3x^2y - y^3)i + (x^2 - 3xy^2)j.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем: т.к. смешанные производные

$$(a_y)'_x = (a_x)'_y = 3x^2 - 3y^2,$$

то имеем потенциальность: $\operatorname{rot} a = 0$. За путь интегрирования принимаем ломаную OAP :

$$u(P) = \int_{OAP} (a, dr) + C = \int_O^A (a, dr) + \int_A^P (a, dr) + C,$$

где C — произвольная постоянная, $A = A(x, 0),\ P = P(x, y)$. Имеем:

$$(a, dr) = (3x^2y - y^3)\, dx + (x^3 - 3xy^2)\, dy.$$

1) на $OA:\ y = 0,\ dy = 0,\ x \in [\,0, A\,]:$

$$\int_0^A (a, dr) = \int_0^x (a, dr) = 0.$$

2) на $AP: \ x = x, \ dx = 0, \ y \in [\,0, p\,]:$

$$\int_A^P (a, dr) = \int_0^y (x^3 - 3xy^2)\, dy = x^3 y - xy^3.$$

Таким образом,

$$u(P) = u(x, y) = x^3 y - xy^3 + C.$$

№ 4.3.

$$a = (yz - xy)i + (xz - x^2/2 + yz^2)j + (xy + y^2 z)k.$$

РЕШЕНИЕ. Так как смешанные парные производные равны

$$(a_z)'_y = (a_y)'_z = x + 2yz, \qquad (a_x)'_z = (a_z)'_x = y,$$

$$(a_y)'_x = (a_x)'_y = z - x,$$

т.е. $\operatorname{rot} a = 0$, то поле вектора a потенциально. Имеем в качестве пути интегрирования ломаную в 3-х мерном евклидовом пространстве $OABP$:

$$u(P) = u(x, y, z) = \int_{OABP} (a, dr) + C \ =$$

$$= \int_)^A (a, dr) + \int_A^B (a, dr) + \int_B^P (a, dr) + C.$$

Далее,

$$(a, dr) = (yz - xy)\, dx + (xz - x^2 + yz^2)\, dy + (xy + y^2 z)\, dz.$$

Имеем:
1) на $OA: \ y = z = 0, \ dy = dz = 0, \ x \in [\,0, x\,]:$

$$\int_O^A (a, dr) = \int_0^x (a, dr) = 0.$$

2) на $AB: \ x = x, \ dx = 0, \ z = 0, \ dz = 0, \ y \in [\,0, y\,],$

$$\int_A^B (a, dr) = \int_0^y (-\, x^2/2)\, dy = (-\, x^2/2)\, y.$$

3) на $BP:\ x=x,\ y=y,\ dx=dy=0,\ z\in[\,0,z\,]$,

$$\int_B^P (a,dr)=\int_0^z (xy+y^2z)\,dz=xyz+y^2z^2/2.$$

Таким образом, получим итог:

$$u(P)=u(x,y,z)=-\,x^2y/2+xyz+y^2z^2/2+C.$$

Д/З. № 4.4.

$$a=(1/z-y/x^2)i+(1/x-z/y^2)j+(1/y-x/z^2)k.$$

п. 2. СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ПОЛЕ

Векторное поле $a=a(r)$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div} a\equiv 0$. Для трехмерного поля это условие записывается так:

$$\operatorname{div} a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\equiv 0.$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса–Остроградского поток вектора поля через любую замкнутую поверхность (без особых точек) равен нулю.

ЗАДАЧИ, т.2, стр. 175.

№ 4.11. Проверить соленоидальность поля:

$$a=(x^2y+y^3)i+(x^3-xy^2)j.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$(a_x)'_x=2xy,\qquad (a_y)'_y=-\,2xy.$$

Отсюда $\operatorname{div} a=0$.

Д/З. № 4.12. Проверить соленоидальность поля:

$$a=xy^2i+x^2yj-(x^2+y^2)zk.$$

п. 3. ЛАПЛАСОВО (ГАРМОНИЧЕСКОЕ) ПОЛЕ

Векторное поле a называется лапласовым (или гармоническим), если оно одновременно является и потенциальным и соленоидальным, т.е. если

$$\operatorname{rot} a \equiv 0, \qquad \operatorname{div} a \equiv 0.$$

ЗАДАЧИ, стр. 176.

№ 4.16. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u = \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, лапласово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$a = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j \ =$$

$$= \ \frac{\partial \ln r}{\partial x}\, i + \frac{\partial \ln r}{\partial y}\, j = \frac{xi}{x^2} + \frac{yj}{x^2 + y^2}.$$

Имеем далее

$$(a_y)'_x = \frac{-\,2xy}{(x^2+y^2)^2} = (a_x)'_y, \qquad \operatorname{rot} a = 0.$$

Кроме того,

$$(a_x)'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (a_y)'_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \operatorname{div} a = 0.$$

Что и требовалось доказать.

№ 4.18, а). Является ли гармонической следующая функция:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

РЕШЕНИЕ. Надо проверить, что

$$\operatorname{rot} a = 0, \qquad \operatorname{div} a = 0,$$

где $a = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad}(1/r)$.

Имеем

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}\, i + \frac{\partial u}{\partial y}\, j = -\,\frac{xi}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{yj}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

$$(a_y)'_x = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad (a_x)'_y = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \qquad \operatorname{rot} a = 0.$$

$$(a_x)'_x = \frac{-\,(x^2+y^2)^2 + 3x^2}{(x^2+y^2)^{7/2}},\ (a_y)'_y = \frac{-\,(x^2+y^2)^2 + 3y^2}{(x^2+y^2)^{7/2}}, \qquad \operatorname{div} a \neq 0.$$

Вывод: заданная функция не является гармонической.

Д/З. № 4. 18, в). Является ли гармонической функция: $u = Ax + By + C$?