Тема занятия: СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

п. 1. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

Дивергенцией векторного поля $a = a(r)$, обозначаемой через $\operatorname{div} a$, является скалярная величина, характеризующая мощность потока векторного поля. В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция поля выражается формулой:

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО. Поток векторного поля $a(r)$ через замкнутую поверхность Σ, лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля, т.е.

$$\int\int_{\Sigma} (a, n)\, d\sigma = \int\int\int_V \operatorname{div} dv.$$

ЗАДАЧИ, т. 2, стр. 166.

Используя теорему Гаусса-Остроградского, решить задачи:

№ 3.2. Найти поток вектора $a = x^3 i + y^3 j - z^3 k$ через всю поверхность куба $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$ в направлении внешней нормали.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$Q = \int\int_{\Sigma} (a, n)\, d\sigma = \int\int\int_V \operatorname{div} dv, \qquad \operatorname{div} a = 3x^2 + 3y^2 - 3z^2.$$

$$Q = \int\int\int_V (3x^2 + 3y^2 - 3z^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (3x^2 + 3y^2 - 3z^2)\, dz.$$

$$J_1 = \int_0^a (3x^2 + 3y^2 - 3z^2)\, dz = 3x^2 a + 3y^2 a - a^3.$$

$$J_2 = \int_0^a (3x^2 a + 3y^2 a - a^3)\, dy = 3a^2 x^2, \quad J_3 = \int_0^a 3a^2 x^2\, dx = a^5.$$

№ 3.3. Найти поток вектора $ar/|\, r\, |$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$a = \frac{r}{|\, r\, |} = \frac{xi}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{yj}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{xi}{R} + \frac{yj}{R} + \frac{zk}{R}, \qquad \operatorname{div} a = \frac{3}{R}.$$

$$Q = \int\int\int_V \frac{3}{R}\, dv = \frac{3}{R} \int\int\int_V dv = \frac{3}{R} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^2.$$

Д/З. № 3.7. Найти с помощью теоремы Гаусса-Остроградского поток вектора $a = x^2 yi + xy^2 j + xyzk$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

п. 2. ВИХРЬ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА СТОКСА

Вихрем (ротором) векторного поля $a = a(r)$, обозначаемым $\operatorname{rot} a$, является вектор, который в каждой точке дифференцируемости поля в трехмерном пространстве декартовых координат через вектор $a = a_x i + a_y j + a_z k$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial a_z}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) k.$$

ТЕОРЕМА СТОКСА. Циркуляция дифференцируемого векторного поля a по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot} a$ через поверхность C, ограниченную этим контуром L:

$$\oint_L (a,\, dr) = \int\int_C (\operatorname{rot} a,\, d\sigma),$$

или в координатной форме

$$\oint_L (a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz) =$$

$$= \int\int_C \left\{ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} d\sigma.$$

При этом единичный вектор нормали n к поверхности C направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к n направлении.

ЗАДАЧИ, стр. 169

№ 3.13. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $a = z^2 i + x^2 j + y^2 k$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта k.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\operatorname{rot} a = 2yi + 2zj + 2xk.$$

Далее см. Пример на стр. 167: За поверхность C, ограниченную контуром L, примем круг, образованный сечением сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ плоскостью $x+y+z = R$. Центр круга $O_1\left(R/3, R/3, R/3\right)$, его радиус $R_1 = R\sqrt{2/3}$. Единичный вектор нормали $n = (1/\sqrt{3})\,(i + j + k)$.

В нашем случае

$$(\operatorname{rot} a, n) = \frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

$$\oint_L (a, dr) = \int\int_C (\operatorname{rot} a, n)\, d\sigma = \frac{2R}{\sqrt{3}} \int\int_C d\sigma = \frac{2R}{\sqrt{3}}\,\pi R_1^2 = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

№ 3.14. Найти циркуляцию вектора $a = z^3 i + x^3 j + y^3 k$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $x + y = 0$ в положительном направлении относительно орта i с помощью теоремы Стокса.

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\operatorname{rot} a = 3y^2 i + 3z^2 j + 3x^2 k.$$

Параболоид

$$\frac{x^2}{(R/\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

вытянут вдоль оси Oy.

Плоскость $x + y = 0$ имеет единичную нормаль $n = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$(\operatorname{rot} a, n) = \frac{3y^2}{\sqrt{2}} + \frac{3z^2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,(y^2 + z^2).$$

Система уравнений $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ и $y = -x$ в пересечении дает кривую L (она находится в плоскости $x + y = 0$) с уравнением $y^2 + z^2 = R^2$ в проекции на плоскость Oyz. Поэтому имеем для циркуляции

$$\oint_L (a,\, dr) = \int\!\!\int_C (\operatorname{rot} a, n)\, d\sigma \ =$$

$$= \ \int\!\!\int_C \frac{3}{\sqrt{2}} (y^2 + z^2)\, d\sigma = \frac{3R^2}{\sqrt{2}} \ \int\!\!\int_C d\sigma.$$

$\int\!\int_C d\sigma =$ площади поверхности C, ограниченной кривой L. Поверхность C в плоскости $x + y = 0$ представляет собой эллипс с малой осью R и большой осью $\sqrt{2}\, R$. Следовательно,

$$\int\!\!\int_C d\sigma = \pi R \cdot \sqrt{2}\, R = \sqrt{2}\pi R^2.$$

Значит, циркуляция равна:

$$\oint_L (a, dr) = \frac{3R^2}{\sqrt{2}}\, \sqrt{2}\pi R^2 = 3\pi R^4.$$

Д/З. № 3/15. Найти циркуляцию вектора $a = y^2 i + xyj + (x^2 + y^2)k$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2 + y^2 = Rz$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида с помощью теоремы Стокса.