Тема занятия: ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ (НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-ГО РОДА)

Определение. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < b,\ f(b) = \infty$. Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma \to 0} \int_a^{b-\gamma} f(x)\,dx \tag{1}$$

называется несобственным интегралом 2-го рода.

Если предел в (1) конечный, то интеграл слева в (1) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся. Эталоном для сравнения служат интегралы:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \qquad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

— они сходятся при $\alpha < 1$, расходятся при $\alpha \ge 1$.

ЗАДАЧИ

Требуется вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

Стр. 358 по задачнику под ред. Ефимова, Демидовича.

№ 5.17.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4} = \text{решение} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2\,(1+x^2)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\,x^{-1}\,\Big|_0^1 - \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \infty$$

— интеграл расходится.

№ 5.18.

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}} = \text{решение} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx^2}{(x^2-1)^{4/5}} \ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-1)^{-4/5}\,d\,(x^2-1) + \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2-1)^{-4/5}\,d\,(x^2-1) \ =$$

$$= \ \frac{1}{2}\Big[\,(x^2-1)^{1/5}\cdot 5\,\Big|_0^1 + (x^2-1)^{1/5}\cdot 5\,\Big|_1^2\,\Big] \ =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5+5\cdot 3^{1/5}\right) = \frac{5}{2}\left(1+3^{1/5}\right)/$$

№ 5.19.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \text{решение} = \int_1^e \frac{d\ln}{\ln^3 x} =$$

$$= \ -\frac{1}{2\ln^2 x}\Bigg|_1^e = -\frac{1}{2}+\infty$$

— интеграл расходится.

№ 5.21.

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \text{решение} =$$

$$= \text{замена}: \ x = \frac{1}{t}, \qquad dx = -\frac{dt}{t^2},$$

$$x = \frac{1}{3} \to t = 3; \quad x = \frac{2}{3} \to t = \frac{3}{2}.\text{Имеем}$$

$$= -\int_3^{3/2} \frac{dt}{t^2\,\frac{1}{t}\,\sqrt{\frac{9}{t^2}-1}} = \int_{3/2}^3 \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}\sqrt{9-t^2}} =$$

$$= \int_{3/2}^3 \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}\Bigg|_{3/2}^3 =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Исследовать на сходимость интегралы (стр. 359):

№ 5.26.

$$\int_0^1 \frac{\cos\,\frac{1}{x}\,dx}{x^{1/3}}$$

Решение:

$$\left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{1/3}}\right| \le \frac{1}{(x-0)^{1/3}}$$

$\alpha = 1/3 < 1$, поэтому исходный интеграл сходится.

№ 5.28.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$

Решение:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x - x} \sim \frac{1}{x - \frac{x^3}{3} + \ldots - x} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\left(-\frac{x}{x}+0\right)^3}$$

— интеграл расходится, т.к. $\alpha = 3 > 1$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Стр. 359.

№ 5.20. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$,

№ 5.22. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

№ 5.27. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x\,(1-x)}}$.