Тема занятия: ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО и 2-ГО РОДА

1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ 1-ГО РОДА

Пусть C — кусочно-гладкая поверхность, $u(P)$ — заданное на C скалярное поле, $C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольное разбиение поверхности C на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$. Пусть P_k, $k = \overline{1, n}$ — произвольные точки на частичных поверхностях C_k. Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $u(P)$ по поверхности C называется следующий предел частичных сумм:

$$\int\int_C u(P)\, ds = \int\int_C u(x, y, z)\, ds = \lim_{\max_k \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} u(P_k)\, \Delta s_k.$$

Здесь ds — дифференциал площади поверхности.

Если $u(P)$ непрерывна на C, то написанный интеграл существует. Вычисление этого интеграл сводится к вычислению двойного интеграла. Пусть уравнение поверхности C имеет вид: $z = f(x, y)$ и пусть поверхность C проектируется на плоскость Oxy в область D. Тогда вычисление поверхностного интеграла производится по формуле

$$\int\int_C u(x, y, z)\, ds = \int\int_D u(x, y, z)\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Вместо плоскости Oxy поверхность C можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz.

ЗАДАЧИ, стр. 158.

№ 2.9. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k\,|\,z\,|$.

Решение. Имеем

$$M = \int\int_C \gamma(P)\, ds = \int\int_D \gamma(x, y,\, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy \ =$$

$$= \; 8\left(\int_0^{a\sqrt{2}/2} dx \int_0^x \frac{k\,|\,x^2-y^2\,|}{2a}\cdot\sqrt{1+(x/a)^2+y/a)^2}\,dy\, + \right.$$

$$\left. + \int_{a\sqrt{2}/2}^{a} dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{k\,|\,x^2-y^2\,|}{2a} cdot \sqrt{1+(x/a)^2+(y/a)^2}\,dy\right) \; =$$

$$= 8\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^a \frac{ka^2}{2a}\,\cos 2\varphi\,\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{a}\,r\,dr.$$

$$J_1 = \int_0^a (a^2+r^2)^{1/2}\,\frac{d\,(r^2+a^2)}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{3}\,2\,\Big|_0^a \; = \frac{1}{3}\,\big[\,a^3\,(2\sqrt{2}-1)\,\big].$$

$$J = J_2 = \frac{8ka^3}{2\cdot 3}\,(2\sqrt{2}-1)\,\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{2a^3k}{3}\,(2\sqrt{2}-1).$$

№ 2.10. Определить момент инерции однородной боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le a)$ относительно оси Oz.

Решение. Имеем

$$I_z = \int\int_C (x^2+y^2)\,ds = \int\int_D (x^2+y^2)\,\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy \;\; =$$

$$= \;\int\int_D (x^2+y^2)\,\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy \;\; =$$

$$= \; 4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\,\sqrt{2}\,dy = 4\,\sqrt{2}\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dy \;\; =$$

$$= \; 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^a r^2\cdot r\,dr.$$

$$J_1 = \int_0^a r^3\,dr = r^4/4 = a^4/4, \qquad J = \frac{4\sqrt{2}a^4}{4}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{a^4\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Д/З. № 2.11. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2=x^2+y^2+a^2$ $(a\le z\le a\sqrt{2})$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точке $(e=kz)$.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ 2-ГО РОДА

Пусть C — кусочно-гладкая ориентированная поверхность, $a=a_x(x,y,z)i+a_y(x,y,z)j+a_z(x,y,z)k$ —- векторное поле. Разобьем поверхность C на частичные поверхности $C_1, C_2, ..., C_n$, площади которых обозначим через $\Delta s_k, k = \overline{1,n}$. Поверхностным интегралом 2-го рода по поверхности C называется следующий предел последовательности интегральных сумм:

$$\int\int_C (a, ds) = \int\int_C a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{\max_k\ \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (a(P_k),\ \Delta s_k).$$

Если поле $a(P)$ непрерывно на C, то этот интеграл существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также потоком векторного поля $a(P)$ через поверхность C. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность C. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\int\int_C (a, ds) = \int\int_C (a, n)\,ds = \int\int_C (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,ds,$$

где $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности C или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\int\int_C (a, ds) = \int\int_{D_1} a_x[\,x(y,z), y, z\,]\,dy\,dz +$$

$$+ \int\int_{D_2} a_y[\,x, y(x,z), z\,]\,dx\,dz + \int\int_{D_3} a_z[\,x, y, z(x,y)\,]\,dx\,dy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции C соответственно на плоскости Oyz, Oxz, Oxy.

ЗАДАЧИ, стр. 164.

№ 2.26. Найти поток вектора $a = x^2 i + y^2 j + zk$ через всю поверхность тела $(H/R)\sqrt{x^2+y^2} \le z \le H$ в направлении внешней нормали.

Решение. Имеем для общего потока вектора:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3, \qquad Q_1 = Q_2 = \int\int_{D_1} x^2\,dy\,dz, \quad x^2 = \frac{R^2}{H^2}\,z^2 - y^2,$$

$$Q_1 = 2\int_0^R dy \int_0^H (x^2)/2\,dz = \int_0^R dy \int_0^H \left(\frac{R^2}{H^2}\,z^2 - y^2\right) dz.$$

$$J_1 = \frac{R^2}{H^2}\,\frac{z^3}{3}\Big|_0^H - y^2 z\,\big|_0^H = \frac{R^2 H}{3} - y^2 Y.$$

$$Q_1 = \int_0^R \left(\frac{R^2 Y}{3} - y^2 H \right) dy = \frac{R^2 H}{3} \cdot R - \frac{HR^3}{3} = 0.$$

Для потока Q_3 в проекции на круг в плоскости Oxy :

$$Q_3 = \int\int_{D_3} z\,dx\,dy = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{H}{R} \sqrt{x^2+y^2}\,dy \ =$$

$$= \frac{4H}{R} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r \cdot r\,dr = \frac{4H}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{R^3}{3}\,d\varphi = \frac{2\pi H R^2}{3}, Q = Q_3.$$

№ 2.27. Найти поток вектора $a = 2xi - yj$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq H$, в направлении внешней нормали.

Решениею Имеем для общего потока вектора:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

где Q_3, Q_4 — потоки через верхний и нижний круг цилиндра. Так как они направлены в разные стороны, то $Q_3 + Q_4 = 0$.

$Q_1 = -2Q_2$ — потоки через боковые прямоугольные части цилиндра. Имеем

$$Q_1 = \int\int_{D_1} a_x\,dy\,dz = \int\int_{D_1} 2x\,dy\,dz = \int_0^R dy \int_0^H 2x\,dz \ =$$

$$= \ 2H \int_0^R x\,dy = 2H \int_0^R \sqrt{R^2-y^2}\,dy \ =$$

$$= \ 2H \int_0^{\pi/2} R\cos t \cdot R\cos t\,dt = 2HR^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \ =$$

$$= \ HR^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{HR^2}{2} \cdot \sin 2t \,\Big|_0^{\pi/2} = HR^2 \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{HR^2\pi}{2} - \frac{HR^2\pi}{4} = \frac{HR^2\pi}{4}.$$

Д/З. № 2.28. Найти поток вектора $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ через часть поверхности параболоида $(H/R^2)\,(x^2+y^2) = z$, $z \leq H$, в направлении внутренней нормали.