СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. ЕФИМОВА, Б. П. ДЕМИДОВИЧА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

51
С23

22.16
С 23
УДК 517

Коллектив авторов:

В. А. БОЛГОВ, Б. П. ДЕМИДОВИЧ, В. А. ЕФИМЕНКО,
А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, С. М. КОГАН,
Г. Л. ЛУНЦ, Е. Ф. ПОРШНЕВА, А. С. ПОСПЕЛОВ,
С. В. ФРОЛОВ, Р. Я. ШОСТАК, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 368 с.

Сборник вместе с другим учебным пособием тех же авторов «Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа» составлен в соответствии с новой программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов (объемом 510 часов).

Он содержит задачи по интегральному исчислению функций нескольких переменных, дифференциальным уравнениям, векторному анализу, основам теории функций комплексной переменной, рядам и их применениям, включая ряды Фурье, и операционному исчислению. Краткие теоретические введения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.

Для студентов второго и более старших курсов инженерно-технических специальностей вузов.

Рис. 49, табл. 5.

БИБЛИОТЕКА
Карагандинского
политехнического
института

С $\frac{20203-124}{053(02)-81}$ 19-81. 1702050000

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1981

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава 8. **Кратные интегралы** 9

§ 1. Двойной интеграл 9
1. Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах (9). 2. Замена переменных в двойном интеграле (15). 3. Приложения двойных интегралов (19).

§ 2. Тройной интеграл 26
1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах (26). 2. Замена переменных в тройном интеграле (27). 3. Приложения тройных интегралов (30).

§ 3. Несобственные кратные интегралы 33
1. Интеграл по бесконечной области (33). 2. Интеграл от разрывной функции (34).

§ 4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра 36
1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (36). 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра (39).

ОТВЕТЫ 44

Глава 9. **Дифференциальные уравнения** 50

§ 1. Уравнения 1-го порядка 50
1. Основные понятия (50). 2. Графический метод построения интегральных кривых (метод изоклин) (52). 3. Уравнения с разделяющимися переменными (53). 4. Однородные уравнения (55). 5. Линейные уравнения (57). 6. Уравнение Бернулли (60). 7. Уравнения в полных дифференциалах (61). 8. Теорема существования и единственности решения. Особые решения (63). 9. Уравнения, не разрешенные относительно производной (64). 10. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка (67). 11. Геометрические и физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений 1-го порядка (69).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков 74
1. Основные понятия. Теорема Коши (74). 2. Уравнения, допускающие понижение порядка (76). 3. Линейные однородные уравнения (83). 4. Линейные неоднородные уравнения (87). 5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (90). 6. Линейные неодно-

родные уравнения с постоянными коэффициентами (92). 7. Дифференциальные уравнения Эйлера (96). 8. Краевые задачи в случае линейных дифференциальных уравнений (97). 9. Задачи физического характера (99).

§ 3. Системы дифференциальных уравнений 101
1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n-го порядка (101). 2. Методы интегрирования нормальных систем (104). 3. Физический смысл нормальной системы (107). 4. Линейные однородные системы (108). 5. Линейные неоднородные системы (113).

§ 4. Элементы теории устойчивости 117
1. Основные понятия (117). 2. Простейшие типы точек покоя (120). 3. Метод функций Ляпунова (122). 4. Устойчивость по первому приближению (123).

§ 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений 125
1. Задача Коши (125). 2. Краевая задача для линейного уравнения (133).

ОТВЕТЫ 134

Глава 10. **Векторный анализ** 151

§ 1. Скалярные и векторные поля. Градиент 151
1. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей (151). 2. Производная по направлению и градиент скалярного поля (152).

§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы 154
1. Криволинейный интеграл 1-го рода (154). 2. Поверхностный интеграл 1-го рода (155). 3. Криволинейный интеграл 2-го рода (158). 4. Поверхностный интеграл 2-го рода (161).

§ 3. Соотношения между различными характеристиками скалярных и векторных полей 165
1. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса — Остроградского (165). 2. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса (166). 3. Оператор Гамильтона и его применение (169). 4. Дифференциальные операции 2-го порядка (171).

§ 4. Специальные виды векторных полей 171
1. Потенциальное векторное поле (171). 2. Соленоидальное поле (174). 3. Лапласово (или гармоническое) поле (175).

§ 5. Применение криволинейных координат в векторном анализе 177
1. Криволинейные координаты. Основные соотношения (177). 2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах (179). 3. Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля (180).

ОТВЕТЫ 181

Глава 11. **Основные понятия теории функций комплексной переменной** 186

§ 1. Элементарные функции . . . . . .
1. Понятие функции комплексной переменной (186). 2. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Элементарные функции (188).

§ 2. Аналитические функции. Условие Коши — Римана . . . 191
1. Производная. Аналитичность функции (191). 2. Свойства аналитических функций (194).
§ 3. Конформные отображения 196
1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной (196). 2. Конформные отображения. Линейная и дробно-линейная функции (197). 3. Степенная функция (202). 4. Функция Жуковского (204). 5. Показательная функция (206). 6. Тригонометрические и гиперболические функции (208).
§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной 208
1. Интеграл по кривой и его вычисление (208). 2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши (210).
ОТВЕТЫ 214

Глава 12. **Ряды и их применение** 223
§ 1. Числовые ряды 223
1. Сходимость ряда. Критерий Коши (223). 2. Абсолютная и условная сходимость. Признаки абсолютной сходимости (226). 3. Признаки условной сходимости (232).
§ 2. Функциональные ряды 235
1. Область сходимости функционального ряда (235). 2. Равномерная сходимость (237). 3. Свойства равномерно сходящихся рядов (240).
§ 3. Степенные ряды 241
1. Область сходимости и свойства степенных рядов (241). 2. Разложение функций в ряд Тейлора (244). 3. Теорема единственности. Аналитическое продолжение (250).
§ 4. Применение степенных рядов 252
1. Вычисление значений функций (252). 2. Интегрирование функций (254). 3. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости (256). 4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов (259). 5. Уравнение и функции Бесселя (263).
§ 5. Ряды Лорана 264
1. Ряды Лорана. Теорема Лорана (264). 2. Характер изолированных особых точек (268).
§ 6. Вычеты и их применение 270
1. Вычет функции и его вычисление (270). 2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов (272). 3. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов (274). 4. Принцип аргумента (277).
§ 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье 278
1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье (278). 2. Двойные ряды Фурье (281). 3. Интеграл Фурье (283). 4. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье (286). 5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (288).
ОТВЕТЫ 290

Глава 13. **Операционное исчисление** 319
§ 1. Преобразование Лапласа 319
1. Определение и свойства преобразования Лапласа (319). 2. Расширение класса оригиналов (327).

§ 2. Формула обращения. Теоремы разложения 328
§ 3. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений 332
1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами (332). 2. Расчет электрических контуров (337). 3. Интегрирование линейных уравнений в частных производных (339).
§ 4. Импульсные функции 341
1. Импульсная функция 1-го порядка $\delta(t)$ (341). 2. Импульсная функция 2-го порядка $\delta_1(t)$ (342). 3. Изображения импульсных функций и их применение (343).
§ 5. Приложения операционного исчисления к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, вычислению несобственных интегралов и суммированию рядов 344
1. Решение линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (344). 2. Вычисление несобственных интегралов (345). 3. Суммирование рядов (349).
§ 6. Дискретное преобразование Лапласа и его применение 350
1. Z-преобразование и дискретное преобразование Лапласа (350). 2. Решение разностных уравнений (356).
ОТВЕТЫ 360

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть «Сборника задач по математике для втузов» содержит такие математические разделы, как интегральное исчисление функций многих переменных, векторный анализ, дифференциальные уравнения, основные понятия теории функций комплексной переменной, числовые и функциональные ряды и их применение, операционное исчисление. Предлагаемый в задачнике материал содержит соответствующие разделы программы по курсу высшей математики, утвержденной Минвузом СССР в мае 1979 г.

Как и в первой части, каждый параграф начинается с краткого теоретического введения. Задачам, предлагаемым для самостоятельного решения, предшествуют подробно разобранные примеры. Ко всем вычислительным задачам даны ответы; для задач, отмеченных одной или двумя звездочками, приведены соответственно указания к решению или решения.

Особенностью настоящего сборника является включение в него задач, требующих в процессе решения использования ЭВМ; эти задачи приводятся в соответствующих разделах. Далее, теория общих функциональных и степенных рядов излагается с использованием теории функций комплексной переменной. Такой подход, на наш взгляд, позволяет лучше понять свойства степенных рядов, представление функций степенными рядами. Для тех втузов, в которых изложение теории рядов ведется отдельно в действительной и комплексной областях, в соответствующих пунктах § 2 гл. 12 приводятся сначала задачи на ряды с функциями действительной переменной, а в задачах § 3 переменную z можно считать действительной, т. е. положить $z=x$.

Как и в первой части, начало решений разобранных примеров отмечается знаком ◀, конец решения — знаком ▶, начало указаний к задачам — знаком •.

Хотя работа по составлению сборника была распределена между авторами по главам, тем не менее каждый член авторского коллектива несет полную ответственность за весь сборник в целом.

Коллектив авторов пользуется возможностью еще раз выразить благодарность заведующим кафедрами математики МИФИ, МИСиС и МЭИ, профессорам А. И. Прилепко, Б. А. Треногину и С. И. Похожаеву, а также сотрудникам этих кафедр, принявшим участие в обсуждении рукописи сборника и сделавшим ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению его содержания.

О всех замечаниях и пожеланиях по поводу содержания и подбора задач авторы просят сообщить по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, Главная редакция физико-математической литературы.

Глава 8

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойной интеграл

1. Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. Пусть функция $f(x, y) = f(P)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области G плоскости Oxy, $\sigma_n = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n\}$ — некоторое разбиение области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, площади которых также обозначим через $\Delta\sigma_k$, а диаметры — через d_k. Зафиксируем точки $P_k \in \Delta\sigma_k$, $k = 1, \ldots, n$. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

называется интегральной суммой для функции $f(P)$ по области G. Если существует предел последовательности интегральных сумм S_n при $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} d_k \longrightarrow 0$ (при этом $n \longrightarrow \infty$) и если этот предел не зависит ни от способа разбиения области G на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, ни от выбора точек $P_k \in \Delta\sigma_k$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается через $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Для двойного интеграла справедливы свойства линейности и аддитивности (см. задачу 1.1).

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим способом. Пусть область G (рис. 79) ограничена кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a, b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x. Заметим при этом, что если кривая $\varphi_1(x)$ (или кривая $\varphi_2(x)$) в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ задается различными аналитическими выражениями,

например

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi_1^{(1)}x & \text{при } a\leqslant x\leqslant c,\\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{при } c<x\leqslant b,\end{cases}$$

то интеграл справа записывается в виде суммы двух интегралов

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy=\int_a^c dx\int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy+\int_c^b dx\int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy.$$

Аналогично, если область G ограничена кривыми $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $y=c$, $y=d$, причем всюду на $[c,\ d]$ функции $\psi_1(y)$ и

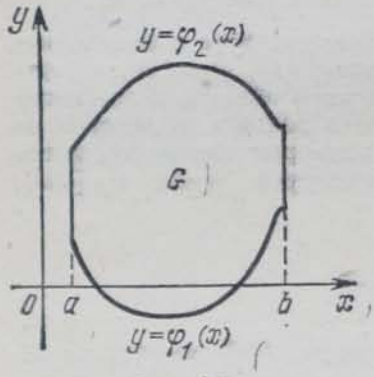


Рис. 79.

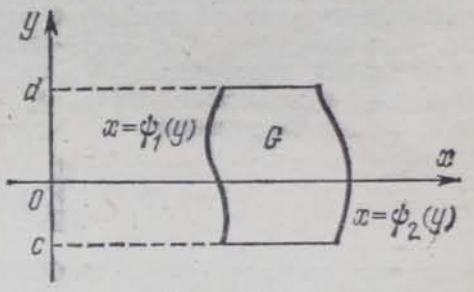


Рис. 80.

$\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)$ (рис. 80), то

$$\iint\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx. \qquad (2)$$

Двойной интеграл, представленный в виде (1) или (2), называется также повторным интегралом.

Пример 1. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, если область интегрирования G ограничена линиями $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$.

◀ Форма области G (рис. 81) позволяет применить формулу (1) при $\varphi_1(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi_2(x)=x$, $a=1$, $b=2$:

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy=\int_1^2 x^2\,dx\int_{1/x}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\Big|_{1/x}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=2\frac{1}{4}.$$

Если же для вычисления данного интеграла применить формулу (2), то следует положить

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{при } \dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \\ y & \text{при } 1 < y \leqslant 2, \end{cases} \qquad \psi_2(x) = 2,$$

$c = \dfrac{1}{2}$, $d = 2$. Тогда

$$I = \iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dy}{y^2} \int\limits_{1/y}^{2} x^2\, dx + \int\limits_{1}^{2} \frac{dy}{y^2} \int\limits_{y}^{2} x^2\, dx.$$

Очевидно, что первый способ вычисления в данном примере целесообразнее второго. ▶

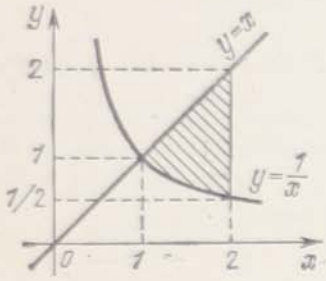


Рис. 81.

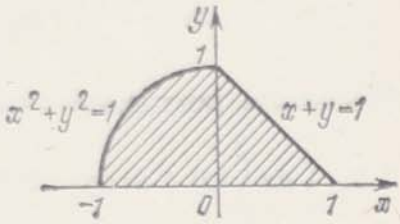


Рис. 82.

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx.$$

◀ Строим область интегрирования G по пределам интегрирования: $\psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2}$, $\psi_2(y) = 1-y$, $y=0$, $y=1$ (рис. 82). Сверху область G ограничена кривой

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

а снизу — прямой $y=0$. Поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x, y)\, dy. \ ▶$$

1.1. Пользуясь определением двойного интеграла доказать следующие его свойства:

а) линейность:

$$\iint\limits_G (f(x, y) \pm g(x, y))\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \pm \iint\limits_G g(x, y)\, dx\, dy$$

и

$$\iint\limits_G \lambda f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy \quad (\lambda \in \mathbb{R});$$

б) аддитивность: если $G = G_1 + G_2$, то

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Вычислить повторные интегралы:

1.2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x^2 + y)\, dy$. **1.3.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} \frac{x\, dy}{x^2 + y^2}$.

1.4. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}$.

1.5. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r\, dr$. **1.6.** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3\, dr$.

Для данных повторных интегралов написать уравнения кривых, ограничивающих области интегрирования, и построить эти области:

1.7. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x+3} f(x, y)\, dy$. **1.8.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x, y)\, dy$.

1.9. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx$. **1.10.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

Для указанных ниже областей G записать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$$

в виде повторных, взятых в различных порядках:

1.11. G — прямоугольник с вершинами $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 4)$.

1.12. G — параллелограмм, ограниченный прямыми $y=x$, $y=x-3$, $y=2$, $y=4$.

1.13. G — область, ограниченная кривыми $x^2+y^2=2a^2$, $x^2=ay$ $(a>0,\ y>0)$.

1.14. G — область, ограниченная кривыми $y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(a>0,\ y>0)$.

1.15. G — область, ограниченная кривыми $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(a>0,\ y>0)$.

1.16. По какой переменной взят внешний интеграл в повторном интеграле

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx$$

и какова область интегрирования?

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

1.17. $\displaystyle\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.18. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y)\, dx.$ **1.19.** $\displaystyle\int_{0}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy.$

1.20. $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{y^2/9}^{y} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{3} dy \int_{y^2/9}^{1} f(x, y)\, dx.$

1.21. $\displaystyle\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy + \int_{2}^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y)\, dy.$

1.22. $\displaystyle\int_{0}^{a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **1.23.** $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y^2/2} f(x, y)\, dx.$

1.24. $\displaystyle\int_{3}^{7} dx \int_{9/x}^{3} f(x, y)\, dy + \int_{7}^{9} dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y)\, dy.$

1.25. Показать, что

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx,$$

и, пользуясь этой формулой, доказать формулу Дирихле

$$\int_0^t dx \int_0^x f(y)\,dy = \int_0^t (t-y) f(y)\,dy.$$

Вычислить следующие интегралы:

1.26. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=x$, $x+y=2a$, $x=0$.

1.27. $\iint\limits_G \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, где G — трапеция с вершинами $A(1,\ 1)$, $B(5,\ 1)$, $C(10,\ 2)$, $D(2,\ 2)$.

1.28. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x+y=2$, $x^2+y^2=2y$.

1.29. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, где G — треугольник с вершинами $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 1)$, $B(0,\ 1)$.

1.30. $\iint\limits_G (x+2y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

1.31. $\iint\limits_G (4-y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2=4y$, $y=1$, $x=0$ $(x>0)$.

1.32. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область G ограничена кривыми $y=x\operatorname{tg} x$, $y=x$.

1.33. $\iint\limits_G \sqrt{a^2+x^2}\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y^2-x^2=a^2$, $x=a$, $x=0$, $y=0$ $(y>0)$.

1.34. $\iint\limits_G e^{x+y}\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $y=e^x$, $x=0$, $y=2$.

1.35*. $\iint\limits_G x^2y\,dx\,dy$, где область G ограничена осью Ox и дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$.

1.36. $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, где область G ограничена осью Ox и аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

1.37. $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, где область G ограничена осями координат и дугой астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant \pi/2)$.

1.38*. Найти среднее значение функции $f(x, y)=\cos^2 x\cos^2 y$ в области $G=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2\}$.

1.39*. Оценить величину интеграла

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 3}\frac{dx\,dy}{9+\sin^2 x+\sin^2(x+y)}.$$

1.40. Найти среднее значение функции $f(x, y)=3x+2y$ в треугольнике с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

2. Замена переменных в двойном интеграле. Пусть функции

$$x=\varphi(u, v)\quad \text{и}\quad y=\psi(u, v) \tag{3}$$

осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области Γ плоскости O_1uv на область G плоскости Oxy. Это означает, что в области G существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u=\eta(x, y)$ и $v=\chi(x, y)$ и в области Γ отличен от нуля якобиан преобразования, т. е.

$$I(u, v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0\qquad (u, v)\in\Gamma. \tag{4}$$

Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области Γ и в то же время как к р и в о л и н е й н ы е координаты точек области G.

Если в двойном интеграле

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

произвести замену переменных по формулам (3), то областью интегрирования полученного интеграла будет уже область Γ, которая при надлежащем выборе функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ может оказаться значительно проще области G, и имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_\Gamma f(\varphi(u, v), \psi(u, v))\,|I(u, v))|\,du\,dv. \tag{5}$$

Для вычисления интеграла по области Γ применяются изложенные в п. 1 методы сведения двойного интеграла к повторным.

П р и м е р 3. Вычислить $\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy$, если область G ограничена кривыми $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$.

◀ Перейдем к новым переменным u и v по формулам $y^2=ux$, $xy=v$. Тогда

$$x=u^{-1/3}v^{2/3}, \qquad y=u^{1/3}v^{1/3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3},$$

$$I(u, v)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3u},$$

$$|I(u, v)|=\frac{1}{3u} \quad \text{при} \quad u>0.$$

Уравнения линий принимают вид

$$u=a,\ u=b,\ v=p,\ v=q.$$

Область G плоскости Oxy преобразуется в прямоугольник Γ

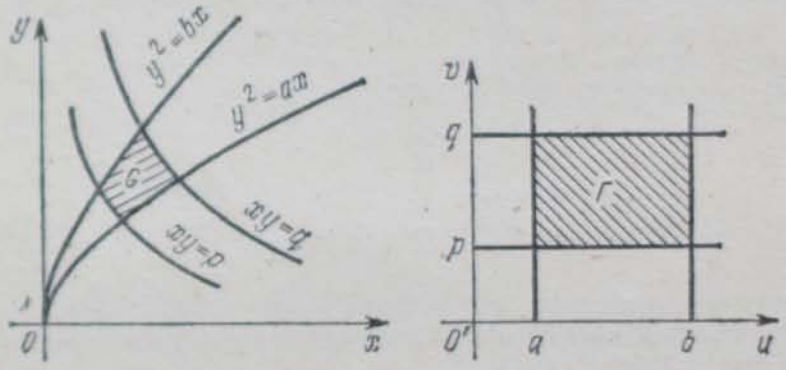


Рис. 83.

плоскости $O'uv$ (рис. 83). Применяя формулу (5), получаем

$$\iint\limits_G \sqrt{xy}\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint\limits_\Gamma \sqrt{v}\,\frac{du\,dv}{u}=\frac{1}{3}\int\limits_a^b \frac{du}{u}\int\limits_p^q \sqrt{v}\,dv=$$

$$=\frac{1}{3}\ln u\Big|_a^b\cdot\frac{2}{3}v^{3/2}\Big|_p^q=\frac{2}{9}\left(q^{3/2}-p^{3/2}\right)\ln\frac{b}{a}. \ ▶$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются полярные координаты

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

для которых

$$I(r, \varphi)=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r$$

и формула (5) записывается в виде

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (6)$$

Пример 4. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

◀ Положим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и применим формулу (6). Так как $x^2+y^2=r^2$, то

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ преобразуется к виду $r=2a\cos\varphi$. Поэтому областью Γ является область, ограниченная снизу осью $r=0$, сверху косинусоидой $r=2a\cos\varphi$, причем $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Следовательно,

$$\iint\limits_\Gamma r^3\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= 4a^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4. \ ▶$$

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

1.41. $\displaystyle\int\limits_0^{3a/4} dx \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy.$

1.42. $\displaystyle\int\limits_0^{a} dx \int\limits_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **1.43.** $\displaystyle\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$

1.44. $\displaystyle\iint\limits_G f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$, где область G ограничена линиями $x^2+y^2=\sqrt{6}x$, $(x^2+y^2)^2=9(x^2-y^2)$, $y=0$ $(y\geqslant 0,\ x\leqslant\sqrt{6})$.

Перейдя к полярным координатам, вычислить следующие интегралы:

1.45. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy$. **1.46.** $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

1.47. $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$, где область G — кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

1.48. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где область G — часть круга радиуса a с центром в точке $O(0, 0)$, лежащая в первой четверти.

1.49. $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=2ax$, $y=0$ $(y>0)$.

1.50. $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область G ограничена кривыми $x^2=ay$, $x^2+y^2=2a^2$, $y=0$ $(x>0,\ a>0)$.

1.51. $\iint\limits_G x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где область G ограничена лепестком лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

Перейти к новым переменным u и v и расставить пределы интегрирования в следующих интегралах:

1.52. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где область G определена неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant a$. Положить $u=x+y$, $ay=uv$.

1.53. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$. Положить $x^2=uy$, $y^2=vx$.

1.54. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{1-x}^{3-x} f(x, y)\,dy$. Положить $u=x+y$, $v=x-y$.

1.55. $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, где область G ограничена кривыми $xy=p$, $xy=q$, $y=ax$, $y=bx$ $(0<p<q,\ 0<a<b)$. Положить $u=xy$, $y=vx$.

Вычислить следующие двойные интегралы:

1.56. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{c^2-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ $(c>1)$, где область G ограни-

чена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (перейти к *обобщенным полярным координатам* r и φ по формулам $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$).

1.57. $\iint\limits_G e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, где область G задана неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$ (произвести замену переменных $x=u(1-v)$, $y=uv$).

1.58. $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, где область G ограничена линиями $y=ax^3$, $y=bx^3$, $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$ (выбрать надлежащую замену переменных).

3. Приложения двойных интегралов. Геометрические приложения. *Площадь* S плоской области G выражается, в зависимости от рассматриваемой системы координат, следующими интегралами:

$$S=\iint\limits_G dx\,dy \qquad (7)$$

в декартовых прямоугольных координатах,

$$S=\iint\limits_\Gamma |I|\,du\,dv \qquad (8)$$

в криволинейных координатах. Здесь

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0 \quad \text{в области } \Gamma.$$

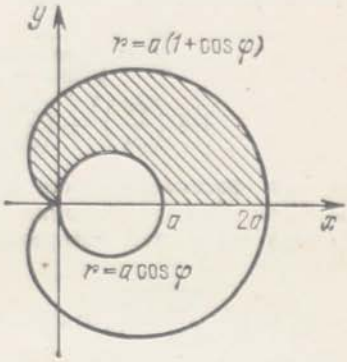


Рис. 84.

В частности, в полярных координатах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ имеем

$$S=\iint\limits_\Gamma r\,dr\,d\varphi. \qquad (9)$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=a(1+\cos\varphi)$ и $r=a\cos\varphi$ $(a>0)$.

◀ В плоскости Oxy фигура показана на рис. 84. Вычислим по формуле (9) площадь верхней части и удвоим:

$$S=2\iint\limits_\Gamma r\,dr\,d\varphi=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}r\,dr+2\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)}r\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(r^2\Big|_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(r^2\Big|_0^{a(1+\cos\varphi)}\right)d\varphi=$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (1+2\cos\varphi)\, d\varphi + a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^2 (\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{\pi/2} + a^2 \left(\frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{4}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Если гладкая поверхность имеет уравнение $z = f(x, y)$, то *площадь* части этой *поверхности*, проектирующейся в область G плоскости Oxy, равна

$$Q = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \tag{10}$$

(функция $z = f(x, y)$ однозначна в области G).

Пример 6. Найти площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, заключенной между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$ $(a > 0)$.

◀ Верхняя половина заданного параболоида описывается уравнением $z = \sqrt{2ax - y^2}$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$$

Так как рассматриваемая поверхность симметрична и относительно плоскости Oyz, то искомая площадь вычисляется как учетверенная площадь части этой поверхности, лежащей в первом октанте:

$$Q = 4\iint_G \sqrt{\frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}}\, dx\, dy = 4\int_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, dx \int_0^{\sqrt{ax}} \frac{dy}{\sqrt{2ax - y^2}} =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{2ax + a^2} \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{2ax}}\Big|_0^{\sqrt{ax}}\right) dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{2ax + a^2}\, \frac{\pi}{4}\, dx = \frac{\pi}{3a}(2ax + a^2)^{3/2}\Big|_0^a =$$

$$= \frac{\pi}{3a}(3\sqrt{3}\, a^3 - a^3) = \frac{\pi a^2}{3}(3\sqrt{3} - 1). \blacktriangleright$$

Объем V *цилиндра*, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G, выражается интегралом

$$V = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy \tag{11}$$

(функция $f(x, y) \geqslant 0$ однозначна в области G).

Пример 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=4$, $z=0$.

◀ Данное тело является цилиндроидом, ограниченным сверху плоскостью $x+z=4$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков прямыми цилиндрами $y=\sqrt{x}$ и $y=2\sqrt{x}$ (рис. 85, *а*). Область интегрирования показана на рис. 85, *б*.

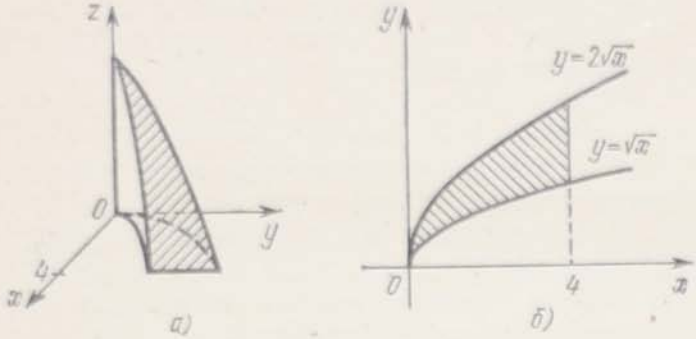


Рис. 85.

Имеем: $z=4-x$,

$$V=\iint\limits_G (4-x)\,dx\,dy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)\,dy=\int\limits_0^4 (4-x)\,(2\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx=$$

$$=\int\limits_0^4 (4-x)\sqrt{x}\,dx=\left(4\cdot\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{2x^{5/2}}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{128}{15}.\ ▶$$

1.59. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4ax+4a^2$ и $x+y=2a$ $(a>0)$.

1.60. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy=4$ и $x+y=5$.

1.61. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $x=2y$, $x=0$ $(a>0)$.

1.62*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $y=x$, $y=0$ $(0<a<b)$.

1.63. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=a(1-\cos\varphi)$ и $r=a$ (вне кардиоиды).

1.64*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ и $x^2+y^2=2ax$.

1.65*. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $(x+y)^4=ax^2y$, лежащей в первой четверти $(a>0)$.

1.66*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{c^2}$.

1.67*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=ax$, $y^2=bx$, $my^2=x^3$, $ny^2=x^3$ $(0<a<b,\ 0<m<n)$.

1.68*. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=px$, $y^2=qx$, $y=ax$, $y=bx$ $(0<p<q,\ 0<a<b)$.

1.69. Найти площадь части плоскости $x+y+z=a$, вырезаемой цилиндром $y^2=ax$ и плоскостью $x=a$.

1.70. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+z^2=a^2$, вырезаемой цилиндром $y^2=a(a-x)$.

1.71. Найти площадь части поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, вырезаемой цилиндром $y^2=2px$ $(p>0)$.

1.72. Найти полную поверхность тела, ограниченного цилиндрами $x^2=ay$, $z^2=ay$ и плоскостью $y=2a$ $(a>0)$.

1.73. Найти площадь части поверхности конуса $x^2+z^2=y^2$, вырезаемой плоскостями $x=0$, $x+y=2a$, $y=0$.

1.74. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2ax$, вырезаемой цилиндром $z^2=2a(2a-x)$.

1.75. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=2a^2$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

1.76. Найти площадь части поверхности параболоида $z=x^2-y^2$, заключенной между параболоидами $z=3x^2+y^2-2$ и $z=3x^2+y^2-4$.

1.77. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит трехлепестковая роза $r=a\sin 3\varphi$.

1.78. Найти площадь части винтовой поверхности $z=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

1.79. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной между плоскостями $z=\frac{\sqrt{3}}{3}y$ и $z=y$ $(z\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

1.80. Найти площадь части поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$, вырезаемой цилиндром с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которого служит кардиоида $r=a(1+\cos\varphi)$.

1.81. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, вырезаемой из нее цилиндром $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Найти объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

1.82. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0)$.

1.83*. $z^2-x^2=a^2$, $z^2-y^2=a^2$, $z=a\sqrt{2}$ $(a>0)$.

1.84. $y=x^2$, $z=y$, $z+y=2$.

1.85. $x^2-y^2=2az$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ (внутри цилиндра; $a>0$).

1.86. $x^2+y^2-2z^2=-a^2$, $2(x^2+y^2)-z^2=a^2$ $(a>0)$.

1.87. $z=ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

1.88. $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2-2z^2=-a^2$ $(a>0)$.

1.89. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

1.90*. $z=xy$, $xy=1$, $xy=2$, $y^2=x$, $y^2=3x$.

1.91*. $z=x^2+y^2$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$, $(x>0,\ y>0)$.

Механические приложения. Если пластинка занимает область G плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma=\gamma(x, y)$, то *масса* M пластинки и ее *статические моменты* M_x и M_y относительно осей Ox и Oy выражаются двойными интегралами

$$M=\iint\limits_G \gamma(x, y)\,dx\,dy,$$
$$M_x=\iint\limits_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad (12)$$
$$M_y=\iint\limits_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Координаты *центра масс* $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пластинки определяются следующим образом:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_G x\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}, \quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_G y\gamma(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_G \gamma(x, y)\,dx\,dy}. \qquad (13)$$

Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$I_x=\iint\limits_G y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy,$$
$$I_y=\iint\limits_G x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad (14)$$

а момент инерции пластинки относительно начала координат (*полярный* момент инерции) равен

$$I_O=\iint\limits_G (x^2+y^2)\,\gamma(x, y)\,dx\,dy=I_x+I_y. \qquad (15)$$

Если пластинка однородна, то в формулах (12)—(15) следует положить $\gamma(x, y) = 1$.

Пример 8. Найти координаты центра масс однородной пластинки, ограниченной кривыми $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

◀ Линии пересекаются в точках $M_1(-2a, 4a)$, $M_2(a, a)$ (рис. 86). Поэтому можно записать:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2;$$

$$M_x = \iint\limits_G y\,dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2a}^{a} \left((2a-x)^2 - \frac{x^4}{a^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{(2a-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{36}{5}a^3;$$

$$M_y = \iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\,dx \int\limits_{x^2/a}^{2a-x} dy = \int\limits_{-2a}^{a} x\,(2a - x - x^2/a)\,dx =$$

$$= \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = -\frac{9}{4}a^3.$$

Подставляя найденные значения в формулы (13), имеем

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = -\frac{a}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{8}{5}a. \ ▶$$

1.92. Найти массу круглой пластинки радиуса R, если плотность ее пропорциональна квадрату расстояния точки от центра и равна δ на краю пластинки.

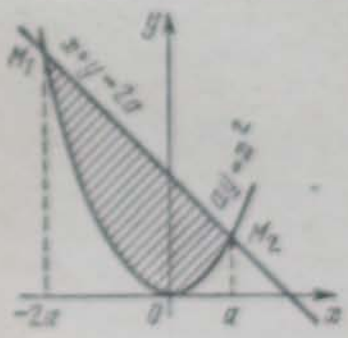


Рис. 86.

1.93. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и полярной осью.

1.94. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax$, $y = x$.

1.95. Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, если плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета OA.

1.96. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A(\pi/2,\ 1)$ синусоиды.

1.97. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $xy=a^2$, $y^2=8ax$, $x=2a$ $(a>0)$.

1.98. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1$, $x+2y=2$, $y=0$, относительно осей Ox и Oy.

1.99. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной петлей кривой $r=a\sin 2\varphi$, лежащей в первой четверти.

1.100. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\cos\varphi)$, относительно осей Ox, Oy и относительно полюса.

1.101. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, относительно осей Ox, Oy и относительно начала координат.

1.102*. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2=ax$, $y=a$, $x=0$:

а) относительно начала координат,

б) относительно прямой $x=-a$.

1.103. Найти моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=a$, $x=a$, $y=a$, относительно осей Ox, Oy и относительно начала координат, если плотность пропорциональна ординате точки.

1.104. Найти момент инерции однородной фигуры, ограниченной лемнискатой $r^2=a^2\cos 2\varphi$, относительно полюса.

1.105. Найти моменты инерции однородного кругового сектора радиуса a с углом α при вершине (совпадающей с началом координат) относительно осей Ox и Oy.

1.106*. Тонкая пластинка имеет форму кругового кольца с радиусами R_1 и R_2 $(R_1<R_2)$. Удельная теплоемкость пластинки меняется по закону $c=|xy|$, плотность постоянна и равна γ. Найти количество тепла Q, полученного пластинкой при ее нагревании от температуры t_1 до температуры t_2.

1.107*. На тонкой пластинке, имеющей форму параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h, распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma=2x+y$. Найти полный заряд E пластинки.

§ 2. Тройной интеграл

1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. *Тройным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по ограниченной замкнутой пространственной области T называется предел последовательности соответствующих трехмерных интегральных сумм при стремлении к нулю наибольшего из диаметров d_k элементарных областей Δv_k, если этот предел не зависит ни от способа разбиения области T на элементарные подобласти Δv_k, ни от выбора промежуточных точек:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta v_k, \qquad (1)$$

где $(x_k, y_k, z_k) \in \Delta v_k$. Через Δv_k обозначается как элементарная область, так и ее объем. Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов. Если, например, область интегрирования T ограничена снизу поверхностью $z=\varphi_1(x, y)$, сверху поверхностью $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y))$ и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью Oxy является область G, то тройной интеграл (1) вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (2)$$

Записывая двойной интеграл по области G через один из повторных, получаем

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$.

◀ Имеем:

$$\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{1-x-y} \right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_{y=0}^{1-x}\right)dx=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_{x=0}^{1}\right)=\frac{1}{24}.\ \blacktriangleright$$

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_T f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$ для указанных областей T:

2.1. Область T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x+3y+4z=12$, $z=0$, $y=0$, $x=0$.

2.2. Область T — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2.3. Область T ограничена поверхностями $y^2+2z^2=4x$, $x=2$.

Вычислить интегралы:

2.4. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz.$

2.5. $\iiint\limits_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, где T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2.6. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{2x} dy\int\limits_0^{\sqrt{xy}} z\,dz.$

2.7. $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

2. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_T f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

производится замена переменных по формулам $x=x(u,\ v,\ w)$, $y=y(u,\ v,\ w)$, $z=z(u,\ v,\ w)$, причем функции $x(u,\ v,w)$, $y(u,v,w)$, $z=(u,\ v,w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области T пространства $Oxyz$ на область T_1 пространства O_1uvw и якобиан

преобразования не обращается в нуль в области T_1:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |I|\, du\, dv\, dw. \quad (4)$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются *цилиндрические* координаты r, φ, z (рис. 87): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

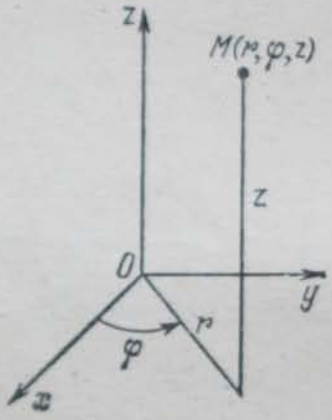


Рис. 87.

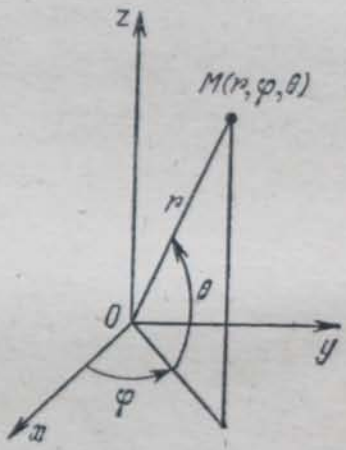


Рис. 88.

$z = z$, якобиан которых $I = r$, и *сферические* r (длина радиус-вектора), φ (долгота), θ (широта) (рис. 88): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, якобиан которых $I = r^2\cos\theta$. Формула (4) принимает соответственно вид

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz \quad (5)$$

или

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{T_1} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\, r^2\cos\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta. \quad (6)$$

Пример 2. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область T задана неравенствами $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}$, $0\leqslant z\leqslant a$ (рис. 89).

◀ Так как уравнение $y=\sqrt{2x-x^2}$ в цилиндрической системе координат принимает вид $r=2\cos\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$, то по формуле (5)

$$\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,z\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{T_1} r^2 z\,dr\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr\int\limits_0^a z\,dz=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{8}{9}a^2.\ ▶$$

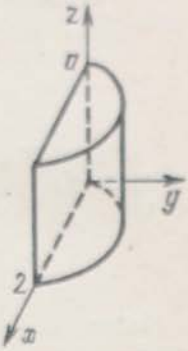


Рис. 89.

Пример 3. Перейдя к сферическим координатам, вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T есть полушар $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $z\geqslant 0$.

◀ Для области T_1 пределы изменения сферических координат суть: $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, $0\leqslant r\leqslant R$. Имеем по формуле (6):

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{T_1} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta\int\limits_0^R r^4\,dr=\frac{4}{15}\pi R^5.\ ▶$$

Вычислить интегралы:

2.8. $\displaystyle\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\int\limits_0^{(x^2-y^2)/a}\sqrt{x^2+y^2}\,dz$, перейдя к цилиндрическим координатам.

2.9*. $\displaystyle\iiint\limits_T\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, перейдя к сферическим координатам, если T — внутренность шарового сектора с центром в начале координат, радиусом a и углом при вершине 2α $(0<\alpha<\pi)$.

2.10. $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\int\limits_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^{h}\frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, перейдя к цилиндрическим координатам.

2.11. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, перейдя к сферическим координатам.

3. **Приложения тройных интегралов.** *Объем* V пространственной области T равен

$$V = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x, y, z)$, занимающего область T:

$$M = \iiint\limits_T \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_T y\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра масс тела:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Моменты инерции тела относительно осей координат:

$$I_x = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_T (z^2+x^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_T (x^2+y^2)\,\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Если тело однородно, то в приведенных выше формулах следует положить $\gamma(x, y, z) = 1$.

Пример 4. Найти координаты центра масс полушара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию точки от центра.

◀ Имеем $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и вследствие симметрии $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Вычисления проведем в сферических координатах:

$$M_{xy} = k\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\iiint\limits_{T_1} r^4 \sin\theta\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^4\,dr = \frac{1}{5}k\pi R^5,$$

$$M = k\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = k\iiint\limits_{T_1} r^3\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}k\pi R^4; \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2}{5}R.$$

Таким образом, $C\left(0,\ 0,\ \frac{2}{5}R\right)$. ▶

2.12. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = 2(x^2+y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

2.13*. При каком значении a объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2 = az$, $x^2+y^2 = ax$, $z = 0$, равен данному числу V?

2.14*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2axyz$ $(a > 0)$.

2.15*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

2.16*. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ и параболоидом $x^2+y^2 = 3az$ (внутри параболоида).

2.17*. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z$ $(a > 0)$.

2.18. Найти массу и среднюю плотность тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2-z^2 = a^2$, $z = 0$, $z = a > 0$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z и в плоскости $z = a$ равна γ_0.

2.19. Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно плоскости основания, и в центре основания равна γ_0.

2.20. Найти массу и среднюю плотность тела, ограниченного поверхностями $x^2-y^2 = az$, $x^2+y^2 = a^2$, $z = 0$

($z > 0$), если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате z, а наибольшее значение плотности γ_0.

2.21. Найти массу и среднюю плотность сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от начала координат, а наибольшее значение плотности γ_0.

2.22. Найти массу и среднюю плотность сегмента параболоида вращения с радиусом основания R и высотой H, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна корню квадратному из расстояния от точки до плоскости основания сегмента и в вершине сегмента равна γ_0.

2.23. Найти массу и среднюю плотность шара радиуса R, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до одного из диаметров шара и на окружности большого круга, лежащего в плоскости, перпендикулярной к этому диаметру, равна γ_0.

2.24. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{h}{a^2}(y^2-x^2)$, $z=0$, $y=a$, $y=0$ ($a>0$, $h>0$).

2.25. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y=\frac{b}{a^2}x^2$, $z=\frac{h}{b}(b-y)$, $z=0$ ($a>0$, $b>0$, $h>0$).

2.26. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)$, $z=H$.

2.27. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z=H$ ($H>0$, $R>0$).

2.28. Найти координаты центра масс полушара $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $z\geqslant 0$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

2.29. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотности γ, ограниченного поверхностями $y=\frac{b}{a^2}x^2$, $z=0$, $z=\frac{h}{b}(b-y)$.

2.30. Найти момент инерции однородного сегмента параболоида вращения плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси вращения.

2.31. Найти момент инерции шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию точки от центра шара, а на поверхности шара равна γ_0.

2.32.** Найти ньютонов потенциал U однородного тела плотности γ, ограниченного эллипсоидом вращения $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, в его центре $(b>a)$.

2.33.** Найти силу притяжения, оказываемого однородным конусом плотности γ, высоты H и радиуса основания R на материальную точку, расположенную в его вершине и содержащую единицу массы.

2.34. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотности γ, ограниченного поверхностями $z=\frac{h}{a^2}(y^2-x^2)$, $z=0$, $y=\pm a$.

2.35. Найти момент инерции однородного кругового конуса плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси.

§ 3. Несобственные кратные интегралы

1. Интеграл по бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в бесконечной области G, то, по определению,

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{D\to G}\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy, \qquad (1)$$

где D — конечная область, целиком лежащая в области G, причем $D\longrightarrow G$ означает, что область D расширяется произвольным образом так, чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области G (*исчерпывающее расширение*). Если существует конечный предел (1), не зависящий от выбора подобласти D и способа расширения $D\longrightarrow G$, то *несобственный интеграл* $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл по бесконечной области.

Если $f(x, y)\geqslant 0$, то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел (1) существовал хотя бы для одного исчерпывающего расширения области G.

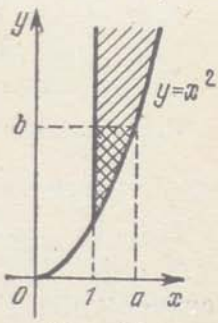


Рис. 90.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2},$$

где G — область, определяемая неравенствами $x\geqslant 1$, $y\geqslant x^2$.

◀ Подобласть D (рис. 90) зададим неравенствами $1 \leqslant x \leqslant a$, $x^2 \leqslant y \leqslant b$, где $a \to +\infty$, $b \to +\infty$. Тогда:

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{D\to G} \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_1^a dx \int\limits_{x^2}^b \frac{dy}{x^4+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_1^a \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{x^2}^b \right) dx =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \int\limits_1^a \frac{1}{x^2} \left(\lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \int\limits_1^a \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \frac{\pi}{4}. \ ▶$$

Вычислить несобственные интегралы:

3.1. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^5y^3}$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 1$, $xy \geqslant 1$.

3.2. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2+y^2 \geqslant 1$ (внешность круга).

3.3. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, где T — область, определяемая неравенством $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1$ (внешность шара).

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)}\,dz$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

3.5. $\iint\limits_G \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.6. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2+y^2 \geqslant 1$ (внешность круга).

2. Интеграл от разрывной функции. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G всюду, за исключением точки $P_0(x_0, y_0)$ (или линии L). Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy,$$

где G_ε — область, получаемая из G путем удаления ε-окрестности точки P_0 (соответственно ε-окрестности линии L), то этот предел называется *несобственным интегралом от функции* $f(x, y)$ *по области* G и обозначается через $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$, т. е.

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Интеграл (2) в этом случае называется *сходящимся*. Если же $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{G_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy$ не существует или равен ∞, то $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ называется *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл от разрывной функции.

Пример 2. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \quad \alpha > 0, \text{ где } G \text{ — круг } x^2+y^2 \leqslant 1.$$

◀ Начало координат является точкой разрыва функции $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

Удалим из G ε-окрестность начала координат. Тогда область G_ε есть кольцо между окружностями радиусов ε и 1. Перейдем к полярным координатам (Γ — полярный образ области G):

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint\limits_\Gamma \frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2\alpha}} = \iint\limits_\Gamma r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} r^{1-2\alpha}\,dr\,d\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 r^{1-2\alpha}\,dr =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}\right|_\varepsilon^1 = \pi \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1-\varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{при } \alpha < 1, \\ -\infty & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ имеем:

$$\iint\limits_\Gamma \frac{dr\,d\varphi}{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \left.\ln r\right|_\varepsilon^1 = +\infty.$$

Таким образом, при $\alpha < 1$ интеграл сходится и равен $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$. ▶

Вычислить несобственные интегралы:

3.7. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{xy}}$, где G — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

3.8. $\iint\limits_G \dfrac{dx\,dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}$, где G — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3.9. $\iint\limits_G \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, где G — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

3.10*. $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}$, где G — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

3.11. $\iiint\limits_T \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, где T — шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

§ 4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то интеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

называется *интегралом, зависящим от параметра*, и является непрерывной в промежутке $[A, B]$ функцией.

Интеграл более общего вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \tag{2}$$

также называется интегралом, зависящим от параметра, и является непрерывной функцией аргумента y в промежутке $[A, B]$, если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны при $y \in [A, B]$ и их значения содержатся в промежутке $[a, b]$.

Пример 1. Вычислить предел

$$\lim_{y \to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

◀ Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра y:

$$F(y) = \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Так как пределы интегрирования, а также подынтегральная функция непрерывны при любых значениях своих аргументов, то $F(y)$ —

непрерывная функция. Поэтому

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{-(1+y)}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}F(y)=F(0)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $A\leqslant y\leqslant B$, то для интеграла (1) справедлива *формула дифференцирования под знаком интеграла* (формула Лейбница):

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x, y)\,dx=\int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx. \qquad (3)$$

Если в (2) при тех же условиях на f и f'_y пределы интегрирования $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ дифференцируемы при $y\in(A, B)$, то верна формула:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx=$$

$$=f(\psi(y), y)\,\psi'(y)-f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y)+\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx. \qquad (4)$$

Пример 2. Найти $F'(y)$, если

$$F(y)=\int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

$\blacktriangleleft$ Так как подынтегральная функция $e^{y\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна в области определения вместе со своей частной производной по y, равной $\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}$, а пределы интегрирования являются также дифференцируемыми функциями, то можно воспользоваться формулой (4):

$$F'(y)=-e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}\sin y-e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y+$$

$$+\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx=-(e^{y|\sin y|}\sin y+e^{y|\cos y|}\cos y)+$$

$$+\int\limits_{\sin y}^{\cos y}\sqrt{1-x^2}\,e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx. \blacktriangleright$$

Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $A\leqslant y\leqslant B$, то для интеграла (1) справедлива формула *интегрирования по параметру y под знаком интеграла*:

$$\int\limits_A^B F(y)\,dy=\int\limits_A^B dy\int\limits_a^b f(x, y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_A^B f(x, y)\,dy. \qquad (5)$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \qquad (b > a > 0).$$

◀ Заметим, что

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\,dy.$$

Тогда искомый интеграл принимает вид

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy.$$

Подынтегральная функция $f(x, y) = x^y$ непрерывна в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a \leqslant y \leqslant b$, поэтому можно воспользоваться формулой (5):

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln\frac{b+1}{a+1}. \ ▶$$

Вычислить следующие пределы:

4.1. $\lim\limits_{y\to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy\,dx$. **4.2.** $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2}\,dx$.

4.3. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^{x_0} (f(x+h) - f(x))\,dx$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ и $f(0) = 0$.

Продифференцировать функции:

4.4. $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\,dx$. **4.5.** $F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\sin xy}{x}\,dx$.

4.6. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2}\,dx$. **4.7.** $F(y) = \int_0^y (x - y)\sin xy\,dx$.

4.8. Найти F''_{xy}, если

$$F(x, y) = \int_{x/y}^{xy} (x - yt) f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — дифференцируемая функция.

4.9. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая и $F(x)$ — дифференцируемая функции. Доказать, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x-at) + f(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(y)\,dy$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4.10*. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \qquad (0 < k < 1)$$

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

и выразить их через функции $E(k)$ и $F(k)$.

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интегралы:

4.11. $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x^2-1)\,dx.$

4.12. $\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\ln x}(x-1)\,dx.$

4.13. Доказать формулы:

а) $\int_0^k F(x)\,x\,dx = E(k) - (1-k^2)\,F(k),$

б) $\int_0^k E(x)\,x\,dx = \frac{1}{3}((1+k^2)\,E(k) - (1-k^2)\,F(k)),$

где $E(k)$ и $F(k)$ — полные эллиптические интегралы (см. задачу 4.10).

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, т. е.

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \qquad (6)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, называется равномерно сходящимся в промежутке $[y_1, y_2]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B = B(\varepsilon)$, что при всяком $b \geqslant B(\varepsilon)$

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| \leqslant \varepsilon$$

при любом $y \in [y_1, y_2]$.

Если интеграл (6) сходится равномерно в промежутке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой непрерывную функцию y в этом промежутке.

Аналогично определяется равномерная сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, зависящего от параметра.

При исследовании равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра, часто используется следующее утверждение:

Критерий Вейерштрасса. *Для равномерной сходимости интеграла* (6) *достаточно, чтобы существовала такая функция* $F(x)$, *не зависящая от параметра* y, *что*:

а) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$, *если* $a \leqslant x < +\infty$,

б) $\int_a^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$.

Функция $F(x)$ называется *мажорантой* для $f(x, y)$.

Пример 4. Доказать равномерную сходимость следующего интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

◀ Заметим, что

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Полагая $B(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, находим (для любого $b > B$):

$$\left| \int_b^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \left| \int_b^A \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right| = \left| \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_b^A \right) \right| =$$

$$= \left| \lim_{A \to +\infty} \frac{A}{A^2 + y^2} - \frac{b}{b^2 + y^2} \right| = \frac{b}{b^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{b} < \frac{1}{B} = \varepsilon,$$

что и доказывает, согласно определению, равномерную сходимость указанного интеграла по параметру y на всей оси. ▶

Пример 5. Установить равномерную сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x\, dx, \qquad 0 < y_0 \leqslant y < +\infty.$$

◀ Покажем, что функцию $F(x)=e^{-xy_0}$ можно взять в качестве мажоранты. Действительно, если $y > y_0$, то

$$|e^{-xy}\cos x| \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-xy_0}.$$

Кроме того,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx = -\frac{1}{y_0}\,e^{-xy_0}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Следовательно, на основании критерия Вейерштрасса указанный интеграл равномерно сходится. ▶

Для несобственных интегралов с бесконечным пределом, зависящих от параметра, при выполнении следующих условий:

а) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x, y)$ в области $a \leqslant x < +\infty$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

б) $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при любом $y \in [y_1, y_2]$,

в) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ сходится равномерно в промежутке $[y_1, y_2]$,

справедлива *формула дифференцирования по параметру* (формула Лейбница):

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx, \tag{7}$$

аналогичная соотношению (3).

При выполнении соответствующих условий формула Лейбница остается верной и для интеграла от разрывной функции, зависящего от параметра.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

◀ Пусть

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Заметим, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx\,dx$ равномерно сходится при $\alpha > 0$ и равен $\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}$ (проверьте!). Исходный интеграл сходится при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, а подынтегральная функция непрерывна вместе со своей частной производной по α, равной $-e^{-\alpha x}\cos mx$.

Следовательно, условия а), б), в) выполнены, и можно воспользоваться соотношением (7). Тогда

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos mx\, dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}.$$

Отсюда

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + m^2) + C(\beta).$$

Для нахождения $C(\beta)$ полагаем в последнем равенстве $\alpha = \beta$. Имеем $0 = -\frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2) + C(\beta)$. Отсюда

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2)$$

и

$$F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\ln(\beta^2 + m^2) - \ln(\alpha^2 + m^2)) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2}. \blacktriangleright$$

4.14. На языке «ε-δ» сформулировать утверждение: интеграл $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ сходится неравномерно на отрезке $[y_1, y_2]$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

4.15. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x\, dx \quad (0 < \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty).$

4.16. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} \quad (1 < \alpha < +\infty).$

4.17. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2}\, dx \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$

4.18. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\, dx \quad (-\infty < \alpha < +\infty).$

4.19. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + 1} \quad (0 \leqslant \alpha < +\infty).$

4.20. $\int_0^2 \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right).$

4.21. $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^\alpha} \quad (0<\alpha<2).$

4.22. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$

4.23. Доказать, что функция

$$u(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xf(t)}{x^2+(y-t)^2}dt$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

4.24. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

4.25. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0,\ m\neq 0).$

4.26. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha\geqslant 0).$

4.27. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx \quad (\alpha>-1).$

4.28*. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma x^2}\cos\delta x\,dx \quad (\gamma>0).$

4.29. $\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty).$

4.30. $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha|\leqslant 1).$

4.31. $\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha|\leqslant 1).$

1.2. $\frac{8}{3}$. 1.3. $\frac{\pi}{6}$. 1.4. $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$. 1.5. $\frac{a^2}{4}(\pi+4)$. 1.6. $3\pi/2$. 1.7. $y=x$, $y=x+3$, $x=1$, $x=2$. 1.8. $y=x^2$, $y=2-x^2$, $x=\pm 1$. 1.9. $x+y=2$, $x=\sqrt{4-y^2}$, $y=0$, $y=2$. 1.10. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x^2}$, $x=0$, $x=1$.

1.11. $$\int_1^5 dx\int_2^4 f(x,y)\,dy=\int_2^4 dy\int_1^5 f(x,y)\,dx.$$ 1.12. $$\int_2^4 dx\int_2^x f(x,y)\,dy+\int_4^5 dx\int_2^4 f(x,y)\,dy+\int_5^7 dx\int_{x-3}^4 f(x,y)\,dy=\int_2^4 dy\int_y^{y+3} f(x,y)\,dx.$$

1.13. $$\int_{-a}^{a} dx\int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x,y)\,dx+\int_a^{a\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$ 1.14. $$\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax}} f(x,y)\,dy+\int_a^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_{y^2/a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$ 1.15. $$\int_0^a dx\int_{\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_a^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_0^{a/2} dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{(a-\sqrt{a^2-4y^2})/2} f(x,y)\,dx+\int_0^{a/2} dy\int_{(a+\sqrt{a^2-4y^2})/2}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{a/2}^{a} dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx.$$ 1.16. По переменной x; область интегрирования ограничена линиями $y=-\sqrt{x}$, $y=x^3$, $x=1$, $x=2$. 1.17. $$\int_{-7}^{1} dy\int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

1.18. $$\int_{-1}^{0} dx\int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy.$$

1.19. $$\int_0^2 dy\int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^2 dy\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx.$$ 1.20. $$\int_0^1 dx\int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

этой системы запишется в виде

$$X^*(q)=\frac{e^{4q}+\sqrt{2}e^{3q}+e^{2q}}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1},$$

$$Y^*(q)=\frac{e^{4q}-e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{4q}+1}=\frac{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}.$$

Применяя формулу опережения, имеем:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}=\sqrt{2}\,\frac{e^{q}\cdot e^{q}\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^{q}\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteq\sqrt{2}\sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}=\frac{e^{q}\left(e^{q}-\cos\frac{\pi}{4}\right)-e^{q}\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^{q}\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteq$$

$$\doteq\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$x_n=\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4},\quad y_n=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.\ \blacktriangleright$$

Решить следующие линейные разностные уравнения:

6.16. $x_{n+2}-3x_{n+1}-10x_n=0;\quad x_0=3,\ x_1=-1.$

6.17. $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0;\quad x_0=1,\quad x_1=-1.$

6.18. $x_{n+2}-\sqrt{3}\,x_{n+1}+x_n=0;\quad x_0=\frac{1}{2},\quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

6.19. $x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=0;$ начальные условия произвольные.

6.20. $x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n=2^n;\quad x_0=x_1=0,\quad x_2=1.$

6.21. $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=2\cdot 4^n;$ начальные условия произвольные.

Решить системы линейных разностных уравнений:

6.22.

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n+y_n&=3^n,\\ y_{n+1}+2x_n&=-3^n;\end{aligned}\qquad x_0=3,\quad y_0=0.$$

6.23.

$$\begin{aligned}5x_{n+1}-12x_n-y_n&=0;\\ 5y_{n+1}-6x_n-13y_n&=0;\end{aligned}$$

начальные условия произвольные.

1.50. $\frac{a}{2}(2-\ln 2)$. 1.51. $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$. 1.52. $\frac{1}{a}\int\limits_0^a dv\int\limits_0^a f\left(\frac{u(a-v)}{a}, \frac{uv}{a}\right)u\,du$.

1.53. $\frac{1}{3}\int\limits_a^b du\int\limits_p^q f\left(\sqrt[3]{u^2v}, \sqrt[3]{uv^2}\right)dv$. 1.54. $\frac{1}{2}\int\limits_1^3 du\int\limits_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)dv$. 1.55. $\frac{1}{2}\int\limits_p^q du\int\limits_a^b f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v}$.

1.56. $2\pi ab\left(c-\sqrt{c^2-1}\right)$. 1.57. $(e-1)/2$. 1.58. $\frac{5}{48}\left(a^{-6/5}-b^{-6/5}\right)\left(q^{6/5}-p^{6/5}\right)$. 1.59. $\frac{64}{3}a^2$. 1.60. $\frac{1}{2}(15-16\ln 2)$. 1.61. $a^2(\pi-1)$. 1.62. $\frac{1}{4}(b^2-a^2)(\pi+2)$. • Перейти к полярным координатам. 1.63. $\frac{1}{4}a^2(8-\pi)$. 1.64. $(\pi-1)a^2$. • Перейти к полярным координатам. 1.65. $a^2/210$. • Сделать замену переменных: $x=r\cos^2\varphi$, $y=r\sin^2\varphi$ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. 1.66. $\frac{\pi a^3 b}{2c^2}$. • Перейти к обобщенным полярным координатам. 1.67. $\frac{8}{15}\left(b^{5/4}-a^{5/4}\right)\left(n^{3/4}-m^{3/4}\right)$. • Сделать замену переменных: $y^2=ux$, $vy^2=x^3$. 1.68. $\frac{(q^2-p^2)(b^3-a^3)}{6a^3b^3}$. • Сделать замену переменных: $y^2=ux$, $y=vx$. 1.69. $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$. 1.70. $8\sqrt{2}a^2$. 1.71. $2\sqrt{2}\pi p^2$. 1.72. $\frac{76}{3}a^2$. 1.73. $\frac{8}{3}\sqrt{2}a^2$. 1.74. $16a^2$. 1.75. $4\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$. 1.76. $\frac{\pi}{6}\left(27-5\sqrt{5}\right)$. 1.77. $2a^2(\pi-2)$. 1.78. $\pi a^2\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. 1.79. $\pi/6$. 1.80. $3\sqrt{2}\pi a^2$. 1.81. $2a^2\left(\pi+4-4\sqrt{2}\right)$. 1.82. $\frac{16}{3}ab^2$. 1.83. $\frac{4}{3}a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$. • Интегрировать в плоскости Oyz. 1.84. $16/15$. 1.85. $a^3/2$. 1.86. $\frac{2}{3}\pi a^3\left(3-\sqrt{2}\right)$. 1.87. $\pi abc\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 1.88. $\frac{2}{3}\pi a^3\left(2-\sqrt{2}\right)$. 1.89. $\frac{2}{3}\pi abc\left(2-\sqrt{2}\right)$. 1.90. $\frac{1}{2}\ln 3$. • Сделать замену переменных $u=xy$, $y^2=vx$. 1.91. $9/8$. • Сделать замену переменных $u=xy$, $v=y/x$. 1.92. $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$. 1.93. $M_x=\frac{4}{3}a^3$, $M_y=\frac{5}{8}\pi a^3$. 1.94. $\bar{x}=\frac{2}{5}a$, $\bar{y}=\frac{a}{2}$. 1.95. $\frac{a^2b}{6}$. 1.96. $M_x=\frac{\pi}{24}$, $M_y=1-\frac{\pi^2}{12}$. 1.97. $\bar{x}=\frac{141a}{20(7-3\ln 2)}$, $\bar{y}=\frac{81a}{8(7-3\ln 2)}$. 1.98. $I_x=1/12$, $I_y=7/12$. 1.99. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{128a}{105\pi}$.

1.100. $I_x=\frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y=\frac{49}{32}\pi a^4$, $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$. **1.101.** $I_x=\frac{\pi ab^3}{4}$, $I_y=\frac{\pi a^3 b}{4}$, $I_0=\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **1.102.** а) $\frac{26}{105}a^6$; б) $\frac{61}{105}a^6$. ● $I_{x=-a}=\iint\limits_G (x+a)^2\,dx\,dy$.

1.103. $I_x=\frac{ka^5}{5}$, $I_y=\frac{3}{20}ka^5$, $I_0=\frac{7}{20}ka^5$, где k — коэффициент пропорциональности. **1.104.** $\pi a^4/8$. **1.105.** $I_x=\frac{2\alpha-\sin 2\alpha}{16}a^4$, $I_y=\frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{16}a^4$. **1.106.** $\frac{1}{2}\gamma(t_2-t_1)(R_2^4-R_1^4)$. ● $Q=\gamma(t_2-t_1)\times\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$. **1.107.** $\frac{4ah^2}{5}$. ● $E=\iint\limits_G (2x+y)\,dx\,dy$.

2.1. $$\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy\int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

2.2. $$\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

2.3. $$\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy\int\limits_{-\sqrt{(4x-y^2)/2}}^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

2.4. 1/6. **2.5.** $a^4/8$. **2.6.** 81/4. **2.7.** 1/96. **2.8.** $a^4/8$. **2.9.** $2\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. ● За ось Oz принять ось сектора. **2.10.** $\frac{4}{3}\pi ah$. **2.11.** $\frac{8}{5}\pi R^{5/2}$. **2.12.** $\frac{3}{35}$. **2.13.** $\sqrt[3]{\frac{32V}{3\pi}}$. ● Перейти к цилиндрическим координатам. **2.14.** $a^3/45$. ● Перейти к сферическим координатам. **2.15.** $\pi^2abc/4$. ● Перейти к обобщенным сферическим координатам по формулам: $x=ar\cos\varphi\cos\theta$, $y=br\sin\varphi\cos\theta$, $z=cr\sin\theta$. При этом $I=abcr^2\cos\theta$ $\left(r\geqslant 0,\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

2.16. $\frac{19}{6}\pi a^3$. ● Перейти к цилиндрическим координатам. **2.17.** $\pi a^3/3$. ● Перейти к сферическим координатам. **2.18.** $M=\frac{3}{4}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{ср}=\frac{9}{16}\gamma_0$. **2.19.** $M=\frac{1}{5}\pi\gamma_0 R^2H$, $\gamma_{ср}=\frac{3}{5}\gamma_0$. **2.20.** $M=\frac{1}{24}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{ср}=\frac{1}{12}\pi\gamma_0$. **2.21.** $M=\frac{31}{5}\pi\gamma_0 a^3$, $\gamma_{ср}=\frac{93}{140}\gamma_0$. **2.22.** $M=\frac{4}{3}\pi\gamma_0 R^2H$, $\gamma_{ср}=\frac{8}{3}\gamma_0$.

2.23. $M=\pi^2\gamma_0R^3$, $\gamma_{ср}=\frac{3}{4}\pi\gamma_0$. **2.24.** $\left(0,\ \frac{4}{5}a,\ \frac{4}{15}h\right)$. **2.25.** $\left(0,\ \frac{3}{7}b,\ \frac{2}{7}h\right)$. **2.26.** $\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3}H\right)$. **2.27.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}H\right)$. **2.28.** $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}R\right)$. **2.29.** $\frac{8}{21}\gamma abh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}\right)$. **2.30.** $\frac{1}{6}\pi\gamma HR^4$. **2.31.** $\frac{2}{3}\pi\gamma_0R^5$. **2.32.** $\frac{2\pi\gamma a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ◀ *Ньютоновым потенциалом* тела T в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ называется интеграл $U=\iiint\limits_T\gamma(x,\ y,\ z)\frac{dx\,dy\,dz}{r}$, где $\gamma(x,\ y,\ z)$ — плотность тела, $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$. Имеем: $U=\gamma\iiint\limits_T\frac{dx\,dy\,dz}{r}=$ $=\gamma\iiint\limits_T\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$U=\gamma\iiint\limits_{T_1}\frac{r\,dr\,d\varphi\,dz}{\sqrt{r^2+z^2}}=2\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b dz\int\limits_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{2\pi\gamma a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\times$$

$\times\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. ▶ **2.33.** $\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}(\sqrt{H^2+R^2}-H)$, где k — постоянная закона тяготения. ◀ Приняв вершину конуса за начало координат, а его ось — за ось Oz, получим уравнение конуса в виде $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$. Вследствие симметрии результирующая сила притяжения будет направлена вдоль оси Oz и выразится интегралом $F_z=k\gamma\iiint\limits_T\frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3}=k\gamma\iiint\limits_T\frac{z\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Перейдем к цилиндрическим координатам: $F_z=k\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r\,dr\int\limits_{\frac{H}{R}r}^H\frac{z\,dz}{(r^2+z^2)^{3/2}}=$

$=\frac{2\pi\gamma kH}{\sqrt{H^2+R^2}}(\sqrt{H^2+R^2}-H)$. ▶ **2.34.** $\frac{8}{15}\gamma ha^4$. **2.35.** $\frac{1}{10}\gamma\pi HR^4$.

3.1. 1/4. **3.2.** $\pi/2$. **3.3.** 4π. **3.4.** 1. **3.5.** Расходится. **3.6.** Сходится при $\alpha>1$. **3.7.** 4. **3.8.** $\frac{3}{2}\pi$. **3.9.** $\pi/2$. **3.10.** Сходится при $\alpha<1$. ● Изолировать прямую $y=x$ узкой полоской и положить $\iint\limits_G\frac{dx\,dy}{(x-y)^\alpha}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^1dx\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{dy}{(x-y)^\alpha}$. **3.11.** Сходится при $\alpha>1$.

4.1. 15/4. **4.2.** 3/7. **4.3.** $f(x_0)$. **4.4.** $\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$.

4.5. $\frac{2y+1}{y^2+y}\sin y(1+y)-\frac{2y-1}{y^2-y}\sin y(y-1)$. **4.6.** $2ye^{-y^3}-e^{-y^2}-$ $-\int\limits_y^{y^2} x^2e^{-yx^3}\,dx$. **4.7.** $\int\limits_0^y (x(x-y)\cos xy-\sin xy)\,dx$. **4.8.** $x(2-3y^2)\times$ $\times f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **4.10.** $E'=\frac{1}{k}(E-F)$, $F'=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$. • При вычислении F' показать, что $\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}\,d\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi$, для чего использовать следующее тождество: $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}=\frac{1}{1-k^2}\times$ $\times(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}-\frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}(\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2})$.

4.11. $\operatorname{arctg}\frac{2}{9}$. **4.12.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.14.** $F(y)$ сходится неравномерно на $[y_1, y_2]$, если этот интеграл сходится при любом $y\in[y_1, y_2]$, но существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого $B>a$ найдется $y=y(B)\in[y_1, y_2]$, для которого $\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x, y)\,dx\right|\geqslant\varepsilon$. **4.15.** Сходится равномерно. **4.16.** Сходится неравномерно. **4.17.** Сходится равномерно. **4.18.** Сходится равномерно. **4.19.** Сходится неравномерно. **4.20.** Сходится равномерно. **4.21.** Сходится неравномерно. **4.22.** Сходится равномерно. **4.24.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

4.25. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$. **4.26.** $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **4.27.** $\ln(1+\alpha)$.

4.28. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\,e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}}$. • Продифференцировать интеграл по параметру γ и решить уравнение $\frac{\partial F}{\partial\delta}=-\frac{\delta}{2\gamma}F$.

4.29. $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$. **4.30.** $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$.

4.31. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$.

Глава 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения 1-го порядка

1. Основные понятия. Функциональное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением 1-го порядка.*

Решением (частным решением) уравнения (1) или (2) на интервале (a, b) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение вместе со своей производной $\varphi'(x)$, обращает его в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом (частным интегралом)* дифференциального уравнения. На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения (1) или (2) называется такая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Пример 1. Проверить подстановкой, что функция $\frac{\sin x}{x}$ есть решение дифференциального уравнения $xy' + y = \cos x$.

◀ Имеем $y = \frac{\sin x}{x}$, $y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$. Умножив y и y' соответственно на 1 и x и сложив полученные выражения, получим $xy + y' \equiv \cos x$. ▶

Пример 2. Показать, что функция $y = Cx^3$ есть общее решение дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. (Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(1, 1)$.)

◀ Найдя $y' = 3Cx^2$ и подставив выражения y и y' в дифференциальное уравнение, при любом значении C получим тождество $3Cx^3 - 3Cx^3 \equiv 0$. Это означает, что функция $y = Cx^3$ есть общее решение дифференциального уравнения. Положив $x = 1$, $y = 1$, найдем значение параметра $C = 1$, и, таким образом, получим искомое част-

вое решение $y=x^3$. Иначе говоря, интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1, 1)$, является кубическая парабола $y=x^3$. ▶

Пусть задано уравнение

$$\Phi(x, y, C)=0,$$

определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от значений параметра C. Если составить систему двух уравнений

$$\Phi(x, y, C)=0, \quad \Phi'_x(x, y, C)=0,$$

то, исключая из этой системы параметр C, получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых.

Пример 3. Найти дифференциальное уравнение семейства окружностей $x^2+y^2=2ax$.

◀ Имеем систему уравнений

$$x^2+y^2=2ax,$$
$$2x+2yy'=2a.$$

Исключаем параметр a. Из второго уравнения находим $a=x+yy'$ и, подставляя это выражение в первое уравнение, получаем $x^2+y^2=2x(x+yy')$, т. е. $y^2-x^2=2xyy'$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. ▶

Показать, что заданные выражения определяют общие решения или общие интегралы соответствующих дифференциальных уравнений:

1.1. $y=x(C-\ln|x|), \quad (x-y)\,dx+x\,dy=0.$

1.2. $y=x\left(\int\limits_0^x \frac{1}{x}e^x\,dx+C\right), \quad xy'-y=xe^x.$

1.3. $2x+y-1=Ce^{2y-x}, \quad (2x+y+1)\,dx-$
$-(4x+2y-3)\,dy=0.$

В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведенному начальному условию.

1.4. $y(\ln|x^2-1|+C)=1, \quad y(0)=1.$

1.5. $y(1-Cx)=1, \quad y(1)=0{,}5.$

1.6. $y=2+C\cos x, \quad y(0)=-1.$

1.7. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки экстремума интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

1.8. Написать уравнение, которому удовлетворяют все точки перегиба интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, в частности дифференциальных уравнений:

а) $y'=y+x^3$; б) $y'=e^y-x$.

Составить дифференциальные уравнения семейств кривых:

1.9. Парабол $y = x^2 + 2ax$.

1.10. Гипербол $y = a/x$.

1.11. Цепных линий $y = a \operatorname{ch} x$.

1.12. Гипербол $x^2 - y^2 = 2ax$.

1.13. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой нормали, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

1.14. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания $M(x, y)$ в отношении $|AM| : |MB| = 2:1$, где A — точка пересечения касательной с осью Oy, B — с осью Ox.

1.15. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и переменной ординатой, пропорциональна четвертой степени этой ординаты.

2. Графический метод построения интегральных кривых (метод изоклин). Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ в плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy определяет *поле направлений* равенством $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Изоклиной уравнения (поля направлений) называется всякая кривая, определяемая уравнением

$$f(x, y) = k$$

при фиксированном k.

Для приближенного (графического) решения уравнения $y' = f(x, y)$ построим на плоскости изоклины для нескольких значений k. Пусть $M_0(x_0\ y_0)$ — некоторая начальная точка. Изоклина L_0, проходящая через эту точку, соответствует значению k, равному $k_0 = f(x_0, y_0)$. Проведем отрезок M_0M_1 с угловым коэффициентом k_0 до пересечения в точке M_1 с ближайшей изоклиной L_1 (тем самым мы заменим дугу интегральной кривой отрезком ее касательной). Далее, из точки $M_1(x_1, y_1)$ проведем новый отрезок M_1M_2 с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$ до пересечения в точке M_2 со следующей изоклиной L_2 и т. д.

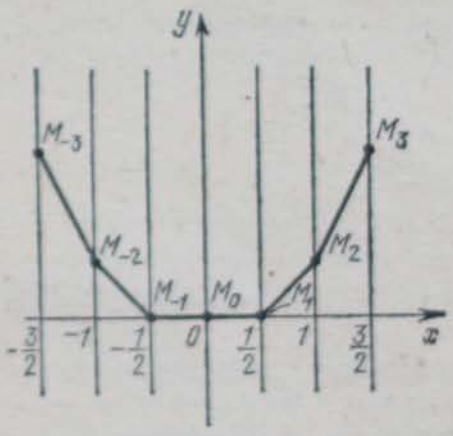


Рис. 91.

В результате такого построения мы получим ломаную, являющуюся приближенным изображением интегральной кривой, проходящей через начальную точку M_0. Чем гуще взята сеть

изоклин, тем более точно можно получить интегральную кривую.

Изменяя положение начальной точки M_0, аналогично можно построить приближенно и другие интегральные кривые.

Пример 4. Методом изоклин построить интегральную кривую уравнения $y'=2x$, проходящую через начало координат.

◀ Изоклины данного уравнения — параллельные прямые $2x=k$. Полагая $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, получаем изоклины $x=0$, $x=\pm 1/2$, $x=\pm 1$, $x=\pm 3/2$ и т. д. Построим их (рис. 91).

Отправляясь из начала координат влево и вправо, строим ломаную ... $M_{-3}M_{-2}M_{-1}M_0M_1M_2M_3\ldots$, звенья которой имеют угловые коэффициенты соответственно ..., $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Эта ломаная и есть приближенное изображение интегральной кривой.

Рекомендуем читателю построить график соответствующего частного решения $y=x^2$ и сравнить его с построенной ломаной. ▶

Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых следующих дифференциальных уравнений:

1.16. $y'=x+y$. **1.17.** $y'=1+y$.

1.18. $y'=-\frac{y}{x}$. **1.19.** $y'=y-x^2$.

1.20. $y'=\frac{y}{x+y}$. **1.21.** $y'=\frac{y-3x}{x+3y}$.

3. Уравнения с разделяющимися переменными. Пусть в уравнении

$$y'=f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ может быть разложена на множители $f_1(x)$ и $f_2(y)$, каждый из которых зависит только от одной переменной, или в уравнении

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0,$$

коэффициенты при dx и dy представляются в виде $M(x, y)=M_1(x)\,M_2(y)$, $N(x, y)=N_1(x)\,N_2(y)$. Путем деления соответственно на $f_2(y)$ и на $N_1(x)\,M_2(y)$ эти уравнения приводятся соответственно к виду

$$f_1(x)\,dx=\frac{1}{f_2(y)}\,dy,$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx=-\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy.$$

Интегрируя левые части этих уравнений по x, а правые по y, приходим в каждом из них к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}.$$

◀ Разделяем переменные:

$$(3y^2+1)\,dy=2x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\int (3y^2+1)\,dy = \int 2x\,dx + C,$$

или

$$y^3+y-x^2=C$$

(общий интеграл уравнения). ▶

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y'=f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т. е. если $f_2(y_0)=0$, то функция $y(x)=y_0$ является решением уравнения (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей этого уравнения на $f_2(y)$ (при разделении переменных) решение $y(x)=y_0$ может быть потеряно.

Аналогично, при интегрировании уравнения $M_1(x)M_2(y)\,dx+$ $+N_1(x)N_2(y)\,dy=0$ могут быть потеряны интегральные кривые $x(y)=x_0$ и $y(x)=y_0$, где x_0 — действительный корень функции $N_1(x)$, y_0 — действительный корень функции $M_2(y)$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, надо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые частные решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то их следует включить в состав интеграла.

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}=y\operatorname{tg}x.$$

◀ Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y}=\operatorname{tg}x\,dx.$$

Интегрируем:

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+C_1,$$

или

$$\ln|y\cos x|=C_1.$$

Для удобства потенцирования полученного равенства представим параметр C_1 в логарифмической форме, положив $C_1=\ln|C_2|$, $C_2\neq 0$ (при этом C_1 принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$). Тогда

$$\ln|y\cos x|=\ln|C_2|$$

и, потенцируя, получаем общий интеграл в виде $y\cos x=C_2$, откуда

$$y=C_2\sec x. \qquad (3)$$

Заметим теперь, что исходное дифференциальное уравнение имеет, очевидно, еще решение $y=0$, которое не входит в запись (3), так как $C_2\neq 0$. Введем новый параметр C, принимающий, в отличие от C_2, также и нулевое значение. Тогда решение $y=0$ войдет в состав общего решения

$$y=C\sec x. ▶$$

С помощью подстановки $u(x)=ax+by(x)+d$ к уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и дифференциальные урав-

нения вида

$$y' = f(ax + by + d), \qquad b \neq 0.$$

Решить дифференциальные уравнения:

1.22. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$. **1.23.** $y' = e^{x+y}$.

1.24. $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$.

1.25. $(1 + y^2)\, x\, dx + (1 + x^2)\, dy = 0$.

1.26. $xy\, dx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$.

1.27. $ye^{2x}\, dx - (1 + e^{2x})\, dy = 0$.

1.28. $2e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 + e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

1.29. $(1 + y)(e^x\, dx - e^{2y}\, dy) - (1 + y^2)\, dy = 0$.

1.30. $y' = \cos(x + y)$. **1.31.** $y' = \frac{1}{2x + y}$.

1.32. $y' = (4x + y + 1)^2$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1.33. $(1 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$; $y(1) = 0$.

1.34. $(xy^2 + x)\, dy + (x^2 y - y)\, dx = 0$; $y(1) = 1$.

1.35. $y' \operatorname{tg} x = y$; $y(\pi/2) = 1$.

4. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

или к виду

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — *однородные функции* одного порядка, т. е. существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ и $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ тождественно относительно x, y и $t \neq 0$.

С помощью подстановки $y/x = u(x)$ однородные уравнения (4) и (5) преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 7. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$$

◀ Положим $\frac{y}{x} = u$, или $y = ux$. Тогда $y' = u + x\frac{du}{dx}$, что после подстановки в исходное уравнение дает уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{du}{dx} = \cos u.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{\cos u}=\frac{dx}{x}$$

и интегрируем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=Cx.$$

Получаем общее решение:

$$u=2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}.$$

Возвращаясь к функции y, находим:

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx-\frac{\pi}{2}\right).$$

При делении на $\cos u$ были потеряны решения $y=x\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Добавляя их к полученному семейству решений, находим общий интеграл в виде

$$y=x\left(2\operatorname{arctg} Cx+\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \qquad k\in\mathbb{Z}. \blacktriangleright$$

Дифференциальные уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{6}$$

в случае $\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородным уравнениям с помощью замены переменных

$$x=u+m, \quad y=v+n,$$

где m и n находятся из системы уравнений

$$a_1m+b_1n+c_1=0,$$
$$a_2m+b_2n+c_2=0.$$

Поскольку здесь $dx=du$, $dy=dv$, то уравнение (6) преобразуется к виду (4) относительно функции $v(u)$:

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1m+b_1n+c_1}{a_2u+b_2v+a_2m+b_2n+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)=$$
$$=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{v}{u}}{a_2+b_2\frac{v}{u}}\right)=\varphi\left(\frac{v}{u}\right).$$

Если в уравнении (6) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$ и, следовательно, $a_2x+b_2y=\lambda(a_1x+b_1y)$, то оно примет вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_2y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=\varphi(a_1x+b_1y).$$

Подстановкой $u(x)=a_1x+b_1y(x)$ это уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными.

Решить дифференциальные уравнения:

1.36. $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$. **1.37.** $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$.

1.38. $y'=(x-y)/(x+y)$.

1.39. $(x^2+xy)\,y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

1.40. $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.

1.41. $(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0$.

1.42. $(y+2)\,dx-(2x+y-4)\,dy=0$.

1.43. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

1.44. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$; $y(1)=1$.

1.45. $(\sqrt{xy}-x)\,dy+y\,dx=0$; $y(1)=1$.

1.46. $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0$; $y(1)=0$.

5. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т. е. имеет вид

$$y'=P(x)\,y+Q(x). \tag{7}$$

При $Q(x)\equiv 0$ уравнение (7) принимает вид

$$y'=P(x)\,y$$

и называется *линейным однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение имеет вид

$$y=Ce^{\int P(x)\,dx}, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная, а $\int P(x)\,dx$ — одна из первообразных функции $P(x)$.

Интегрирование *линейного неоднородного* уравнения (7) можно провести одним из следующих методов.

а) Метод вариации постоянной. Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$y=C(x)\,e^{\int P(x)\,dx}, \tag{9}$$

который получается из (8), если заменить постоянную C на функцию $C(x)$. Подставляя выражение (9) в уравнение (7), получим для

неизвестной функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными:

$$C'(x)=Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Его общее решение:

$$C(x)=\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx+C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx$ — одна из первообразных. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в формулу (9), находим общее решение уравнения (7):

$$y=e^{\int P(x)\,dx}\left(C+\int Q(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right). \qquad (10)$$

б) Метод подстановки. Положим $y(x)=u(x)\,v(x)$. Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$v\left(\frac{du}{dx}-P(x)\,u\right)+\left(\frac{dv}{dx}u-Q(x)\right)=0. \qquad (11)$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы первая скобка в левой части уравнения (11) обратилась в нуль. Для этого интегрируем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}-P(x)\,u=0$$

и выбираем какое-либо частное его решение $u=u_1(x)$. Подставляя функцию $u_1(x)$ вместо u в левую часть уравнения (11), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}u_1(x)-Q(x)=0.$$

Находим общее решение этого уравнения:

$$v=v(x,\,C).$$

Перемножая найденные функции $u_1(x)$ и $v(x,\,C)$, получаем общее решение уравнения (7):

$$y=u_1(x)\,v(x,\,C).$$

Пример 8. Решить методом вариации постоянной уравнение

$$y'=y\operatorname{ctg}x+\sin x.$$

◀ Рассмотрим сначала соответствующее однородное линейное уравнение

$$y'=y\operatorname{ctg}x.$$

Его общее решение $y=C\sin x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения ищем в виде $y=C(x)\sin x$. Подставляем y и $y'=C'(x)\sin x+C(x)\cos x$ в данное уравнение:

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x=\operatorname{ctg}x\cdot C(x)\sin x+\sin x,$$

откуда $C'(x)=1$, и тогда $C(x)=x+C$. Следовательно, общее решение уравнения есть

$$y=(x+C)\sin x. \blacktriangleright$$

Пример 9. Решить методом подстановки уравнение, линейное относительно x и $\frac{dx}{dy}$:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x}{y}+\frac{3}{y^2}.$$

◀ Положим $x=uv$ и приведем уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dy}-\frac{2u}{y}\right)+\left(\frac{dv}{dy}u-\frac{3}{y^2}\right)=0. \qquad (12)$$

Найдем функцию $u_1(y)$, решая уравнение

$$\frac{du}{dy}-\frac{2u}{y}=0$$

и выбирая из его общего решения $u=y^2+C$ одно частное решение, например $u_1(y)=y^2$. Подставляя $u_1(y)$ в уравнение (12), получим:

$$\frac{dv}{dy}y^2-\frac{3}{y^2}=0, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dy}=\frac{3}{y^4}.$$

Общее решение этого уравнения:

$$v(y, C)=C-\frac{1}{y^3}.$$

Перемножая $u_1(y)$ и $v(y, C)$, получаем общее решение данного уравнения:

$$x=Cy^2-\frac{1}{y}. \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения:

1.47. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

1.48. $(1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2$.

1.49. $y'+2y=e^{3x}$. **1.50.** $y'+\frac{y}{x}=2\ln x+1$.

1.51. $y'=\frac{2y}{x+1}+e^x(x+1)^2$. **1.52*.** $y'=\frac{y}{x+y^3}$.

1.53. $(1+y^2)\,dx=(\operatorname{arctg} y-x)\,dy$.

1.54*. $y'+\operatorname{tg} y=\frac{x}{\cos y}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1.55. $y'+y\operatorname{tg} x=1/\cos x$; $y(0)=0$.

1.56. $y'=2y+e^x-x$; $y(0)=1/4$.

1.57. $y'=y/(2y\ln y+y-x)$; $y(1)=1$.

6. Уравнение Бернулли. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y' = P(x)\,y + Q(x)\,y^m, \tag{13}$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m=0$ уравнение (13) является линейным, а при $m=1$ — уравнением с разделяющимися переменными).

Так же, как и линейное, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y=uv$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки $z=y^{1-m}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}.$$

◀ Полагая $y=uv$, приводим уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right) + \left(\frac{dv}{dx}u - \frac{x^2}{uv}\right) = 0. \tag{14}$$

Из общего решения $u=Cx$ уравнения

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

выбираем в качестве функции u одно частное решение, например

$$u_1 = x.$$

Подставляя u_1 в уравнение (14), получаем новое уравнение $\frac{dv}{dx}x - \frac{x^2}{xv} = 0$, или $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$. Его общее решение $v = \sqrt{2x+C}$.

Перемножая u_1 и v, получаем общее решение исходного уравнения $y = x\sqrt{2x+C}$. ▶

Пример 11. Решить уравнение Бернулли относительно $x = x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x}.$$

◀ Положим $x=uv$ и приведем уравнение к виду

$$v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y}\right) + \left(\frac{dv}{dy}u + \frac{1}{2uv}\right) = 0.$$

Рассмотрев уравнение

$$\frac{du}{dy} - \frac{u}{2y} = 0,$$

возьмем его частное решение $u_1 = \sqrt{y}$. Тогда мы придем к уравнению

$$\frac{dv}{dy}\sqrt{y} + \frac{1}{2v\sqrt{y}} = 0,$$

общее решение которого

$$v^2 = \ln\frac{C}{y}.$$

Перемножая $u_1^2 = y$ и v^2, получим общий интеграл исходного уравнения

$$x^2 = y \ln \frac{C}{y}. \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения:

1.58. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

1.59. $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$.

1.60*. $y' = \frac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

1.61. $3dy = (1 - 3y^3)\, y \sin x\, dx; \quad y(\pi/2) = 1$.

1.62. $y\,dx + \left(x - \frac{1}{2} x^3 y\right) dy = 0; \quad y(1/2) = 1$.

7. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{15}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т. е.

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для того чтобы уравнение (15) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{16}$$

Если уравнение (15) есть уравнение в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде

$$dU(x, y) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$U(x, y) = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Функция $U(x, y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y, имеем

$$U(x, y) = \int P(x, y)\, dx + \varphi(y). \tag{17}$$

Затем из равенства

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x, y)$$

находим функцию $\varphi(y)$, подставив которую в (17), получим функцию $U(x, y)$.

Очевидно, что искомая функция $U(x, y)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Для записи общего интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

Замечание. Более простой метод отыскания функции $U(x, y)$ состоит в вычислении так называемого криволинейного интеграла 2-го рода

$$U(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

где точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ и путь интегрирования лежат в области непрерывности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частных производных, причем $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка.

Пример 12. Решить уравнение

$$\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)\,dy=0,$$

предварительно убедившись, что это есть уравнение в полных дифференциалах.

◀ Проверим условие (16):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^3+\ln x)=\frac{1}{x}.$$

Условие (16) выполнено, следовательно, заданное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $U(x, y)$. Интегрируя по x при постоянном y равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)=\frac{y}{x},$$

получим

$$U(x, y)=\int\frac{y}{x}\,dx+\varphi(y)=y\ln x+\varphi(y). \tag{18}$$

Заметим, что при вычислении первообразной мы здесь пишем $\ln x$, а не $\ln|x|$, так как исходное уравнение содержит $\ln x$ и, следовательно, имеет смысл лишь при $x>0$.

Подставляя (18) в равенство

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x, y)=y^3+\ln x,$$

имеем

$$\ln x+\varphi'(y)=y^3+\ln x,$$

откуда

$$\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C_1. \tag{19}$$

Положив, например, $C_1=0$, находим из (18) и (19)

$$U(x, y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4.$$

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C. \blacktriangleright$$

Решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что они являются уравнениями в полных дифференциалах:

1.63. $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$

1.64. $(10xy-8y+1)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy=0.$

1.65. $(2x+e^{x/y})\,dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{x/y}\,dy=0.$

1.66. $2x\cos^2 y\,dx+(2y-x^2\sin 2y)\,dy=0.$

8. Теорема существования и единственности решения. Особые решения. *Задачей Коши* для дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ называется задача об отыскании частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коши. *Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Oxy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки $(x_0, y_0)\in D$ в некотором интервале $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ существует и притом единственное решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.*

Геометрически это означает, что через каждую точку M области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения $y'=f(x, y)$.

Точки области D, в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Решение (интегральная кривая) уравнения $y'=f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением (особой интегральной кривой)* этого уравнения. Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C (включая и $C=\pm\infty$).

Огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим решением $y=\varphi(x, C)$ или общим интегралом $\Phi(x, y, C)=0$, является особой интегральной кривой. Она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы двух уравнений

$$\begin{aligned} y&=\varphi(x, C),\\ 0&=\varphi'_C(x, C)\end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned}&\Phi(x, y, C)=0,\\ &\Phi'_C(x, y, C)=0.\end{aligned}$$

Найденную таким путем функцию следует подставить в данное дифференциальное уравнение и убедиться, что она является его решением.

Пример 13. Найти область, в которой уравнение

$$y' = x\sqrt{1-y^2}$$

имеет единственное решение.

◀ Здесь $f(x, y) = x\sqrt{1-y^2}$ — функция, непрерывная при $|y| \leqslant 1$; частная производная $f'_y(x, y) = -\dfrac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ ограничена при $|y| \leqslant a < 1$. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение в любой полосе $-a \leqslant y \leqslant a$ (при $0 < a < 1$). ▶

Пример 14. Найти особые решения уравнения

$$y' = \sqrt{1-y^2},$$

зная его общее решение $y = \sin(x+C)$, $|x+C| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

◀ Составим систему уравнений

$$\begin{aligned} y &= \sin(x+C), \\ 0 &= \cos(x+C), \end{aligned} \qquad |x+C| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Исключая C, найдем две функции $y = \pm 1$, которые, очевидно, являются решениями данного уравнения и не получаются из общего решения ни при каких значениях C. Следовательно, $y = \pm 1$ — особые решения. ▶

Найти области существования и единственности решения для дифференциальных уравнений:

1.67. $y' = x^2 - y^2$. **1.68.** $y' = \dfrac{y}{y-x}$.

1.69. $y' = 1 + \operatorname{tg} y$. **1.70.** $y' = x^2 + \sqrt{x-y^2}$.

Найти особые решения следующих дифференциальных уравнений, зная общие решения (там, где это указано).

1.71. $y' = \dfrac{2\sqrt{y}}{x}$.

1.72. $y' = 4x\sqrt{y-1}$; $y = (x^2+C)^2 + 1$.

1.73. $xy'^2 + 2xy' - y = 0$; $(y-C)^2 = 4Cx$.

1.74. $y = y'^2 - xy' + \dfrac{x^2}{2}$; $y = \dfrac{x^2}{2} + Cx + C^2$.

9. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Пусть дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ разрешимо либо относительно искомой функции, т. е. имеет вид

$$y = f(x, y'), \tag{20}$$

либо относительно аргумента, т. е. записывается в виде

$$x = f(y, y'). \tag{21}$$

Тогда оно интегрируется путем введения параметра $p = y'$. Уравнения (20) и (21) переходят в алгебраические уравнения, дифференцируя которые соответственно по x или по y, получим системы урав-

нений

$$y=f(x, p), \qquad \text{или} \qquad x=f(y, p),$$
$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} \qquad \frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Из этих систем находится соответственно общее решение уравнений (20) или (21) в явном или параметрическом виде.

Пример 15. Решить уравнение

$$y=y'^2+xy'-x.$$

◀ Введем параметр $p=y'$. Тогда

$$y=p^2+x(p-1). \tag{22}$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p=2p\frac{dp}{dx}+p-1+x\frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{2p+x}.$$

Запишем последнее уравнение в форме

$$\frac{dx}{dp}=x+2p.$$

Это линейное уравнение, его общее решение:

$$x=Ce^p-2(p+1). \tag{23}$$

Подставляя выражение (23) в формулу (22), получим

$$y=Ce^p(p-1)-p^2+2. \tag{24}$$

Система соотношений (23) и (24) определяет общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x=Ce^p-2(p+1), \quad y=Ce^p(p-1)-p^2+2. \ ▶$$

Пример 16. Решить уравнение

$$x=y'^2+\frac{y}{y'}.$$

◀ Полагая $p=y'$, имеем

$$x=p^2+\frac{y}{p}.$$

Дифференцируем это равенство по y:

$$\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}+\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

или

$$\frac{dp}{dy}\left(2p-\frac{y}{p^2}\right)=0.$$

Отсюда

$$p_1=C \quad \text{и} \quad p_2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y}.$$

Подставляя поочередно оба результата в выражение для x, найдем общее решение

$$y=Cx-C^3$$

и решение

$$y=\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},$$

которое, как легко убедиться, является особым. ▶

Решить дифференциальные уравнения:

1.75. $y=y'^2+4y'^3$. **1.76.** $y=y'\sqrt{1+y'^2}$.

1.77. $y=(y'-1)e^{y'}$. **1.78.** $y=\frac{y'^2}{2}+2xy'+x^2$.

1.79. $x=y'^3-y'+2$. **1.80.** $x=y'\cos y'$.

1.81. $x=2y'-\ln y'$. **1.82.** $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$.

Частным случаем уравнений вида (20) является так называемое *уравнение Лагранжа*

$$y=xf(y')+\varphi(y'). \tag{25}$$

которое при $f(y')\equiv y'$ называют *уравнением Клеро*. Введением параметра $p=y'$ уравнение (25) приводится к виду

$$y=xf(p)+\varphi(p)$$

в случае общего уравнения Лагранжа и к виду

$$y=xp+\varphi(p)$$

в случае уравнения Клеро.

Уравнение Лагранжа имеет особые решения

$$y=xf(p_0)+\varphi(p_0),$$

где p_0 — любой из корней уравнения $f(p)=p$.

Уравнение Клеро имеет общее решение

$$y=Cx+\varphi(C) \tag{26}$$

и особое решение

$$x=-\varphi'(p),\quad y=-\varphi'(p)\,p+\varphi(p), \tag{27}$$

являющееся огибающей семейства интегральных кривых (26).

Таким образом, можно сформулировать следующее **практическое правило**. Заменив в уравнении Клеро символ y' символом C, мы сразу получаем общее решение (26). Дифференцируя его по C и исключая C из системы двух уравнений (общего решения и результата дифференцирования), получаем особое решение (27).

Пример 17. Решить уравнение Лагранжа

$$y=xy'^2+y'.$$

◀ Полагая $y'=p$, найдем

$$y=xp^2+p.$$

Дифференцируя это равенство по x, получим

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{2p}{p-p^2} + \frac{1}{p-p^2}.$$

Это линейное уравнение имеет общее решение

$$x = \frac{1}{(1-p)^2}(C + \ln|p| - p),$$

подставляя которое в формулу для y получаем общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$x = \frac{C + \ln|p| - p}{(1-p)^2}, \quad y = \frac{(C + \ln|p| - p)\,p^2}{(1-p)^2} + p.$$

Кроме того, уравнение имеет особые решения $y=0$ и $y=x+1$, соответствующие корням $p_1=0$ и $p_2=1$ уравнения $p^2=p$. ▶

Пример 18. Решить уравнение

$$y = xy' - y'^4.$$

◀ Данное уравнение имеет вид (25) при $f(y') = y'$, т. е. является уравнением Клеро. Следуя практическому правилу, получаем общее решение

$$y = Cx - C^4.$$

Исключая, далее, параметр C из системы уравнений

$$y = Cx - C^4,$$
$$0 = x - 4C^3,$$

получим особое решение

$$y = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}x^{4/3}. \ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения:

1.83. $y = x\frac{1+y'^2}{2y'}$. **1.84.** $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}$.

1.85. $y = xy'^2 + y'^3$. **1.86.** $y = \frac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$.

1.87. $y = xy' - \frac{1}{y'}$. **1.88.** $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$.

1.89. $y = xy' - e^{y'}$. **1.90.** $y = xy' + \cos y'$.

10. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определить типы дифференциальных уравнений и указать в общем виде методы их решения:

1.91. $\sin x^3 = e^{\frac{y'-x^2}{y}}$. **1.92.** $\sqrt{x^2-y^2} = \frac{2x^2}{y-3x+xy'}$.

1.93. $1+x+(1+x^2)(e^x-e^{2y}y')=0$.

1.94. $2y'(1-x^2)-xy-2xy^2+2x^3y^2=0$.

1.95. $y\,dx+(2x-y^2)\,dy=0$.

1.96. $\left(\frac{x}{y}-x+y^2\right)dx+\left(2xy+y-\frac{x^2}{2y^2}\right)dy=0$.

1.97. $y\,dx+(x-2\sqrt{xy})\,dy=0$.

1.98. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0$.

1.99. $y'=\sin(y-x)$. **1.100.** $x=\arccos\frac{y'-a^x}{y}$.

1.101. $\sqrt{y}=\frac{y'-ye^{x^2\sin x}}{x^2+2x-1}$.

Решить дифференциальные уравнения:

1.102. $y'+xy=x^3$. **1.103.** $(x-y)\,dy-y\,dx=0$.

1.104. $(x\cos 2y+1)\,dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.

1.105. $y'=y\operatorname{tg}x-y^2\cos x$. **1.106.** $y'=\frac{1-2x}{y^2}$.

1.107. $2y\,dx+(y^2-6x)\,dy=0$.

1.108. $(xye^{x/y}+y^2)\,dx=x^2e^{x/y}\,dy$.

1.109. $(xy^2+x)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

1.110. $(2x^3-xy^2)\,dx+(2y^3-x^2y)\,dy=0$.

1.111. $xy'+y=y^2\ln x$.

1.112. $3x+y-2+y'(x-1)=0$.

1.113. $y'=\frac{x+y}{x-y}$. **1.114.** $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$.

1.115. $(2x+\ln y)\,dx+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)dy=0$.

1.116. $y=xy'-\ln y'$. **1.117.** $y'=\frac{1}{xy+x^2y^3}$.

1.118. $\left(x-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}\,dy=0$.

1.119*. $(1+y^2)\,dx=(\sqrt{1+y^2}\cos y-xy)\,dy$.

1.120. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=0$.

1.121. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}$. **1.122.** $y=y'^2+2xy'+\frac{x^2}{2}$.

1.123*. $(x-2y^3)\,dx+3y^2(2x-y^3)\,dy=0$.

11. Геометрические и физические задачи, приводящие к решению дифференциальных уравнений 1-го порядка. В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а также следующие общие формулы для определения длин отрезков касательной t, нормали n, подкасательной s_t и поднормали s_n (рис. 92):

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|, \quad n=|y\sqrt{1+y'^2}|,$$

$$s_t=\left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad s_n=|yy'|.$$

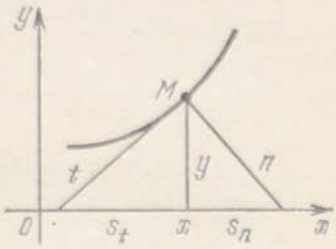


Рис. 92.

Пример 19. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M(x, y)$ подкасательная s_t в k раз меньше поднормали s_n.

◀ Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной s_t и поднормали s_n, мы сразу получаем дифференциальное уравнение

$$|yy'|=k\left|\frac{y}{y'}\right|,$$

или

$$(y')^2=k.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0)=0$, получим искомые уравнения

$$y=\pm\sqrt{k}\cdot x$$

(две прямые). ▶

Пример 20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1), если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, в два раза больше произведения координат точки $M(x, y)$ кривой ($x>0$, $y>0$).

◀ Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t)\,dt=2xy(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y=2(y+xy')$, или

$$y'=-\frac{y}{2x}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1)=1$, найдем уравнение искомой кривой:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x}}. \ ▶$$

1.124. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(\sqrt{2}, 0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

1.125. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 2), если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

1.126. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1/2, —1), если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

1.127. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

1.128. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

1.129. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0, 2), если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

1.130. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1/2), если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна отношению абсциссы x концевой точки к ординате.

1.131. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0, 3), если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания (ограничиться рассмотрением случая $\frac{y}{y'} > 0$).

1.132. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 0), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

1.133. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

1.134. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = 2$, $\varphi = 0$, если угол α между ее касательной и радиус-вектором точки касания есть постоянная величина: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

1.135. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 1), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

1.136. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3, 1), если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

1.137. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox лежит на параболе $2y^2=x$.

1.138. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 0), если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна 3/2.

1.139. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0, 1), если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

1.140. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1, 2), если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

1.141. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r=\pi$, $\varphi=\pi/2$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и переменным полярным радиусом в шесть раз меньше куба полярного радиуса.

Ортогональными траекториями для однопараметрического семейства S_1 линий $y=\Phi(x, a)$ называется другое семейство S_2 линий, которые пересекают линии первого семейства под прямым углом.

Пример 21. Найти ортогональные траектории семейства кубических парабол $y=ax^3$.

◀ Найдем дифференциальное уравнение данного семейства, исключая a из системы уравнений

$$y=ax^3,$$
$$y'=3ax^2.$$

Получим

$$y'=\frac{3y}{x}.$$

Дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий есть

$$y'=-\frac{x}{3y}.$$

Его общий интеграл

$$x^2+3y^2=C^2$$

является уравнением семейства ортогональных траекторий (эллипсов). ▶

Найти ортогональные траектории данных семейств кривых (a — параметр):

1.142. $ay^2 = x^3$. **1.143.** $y = ax^2$.

1.144. $x^2 - 2y^2 = a^2$. **1.145.** $y = ae^{2x}$.

При составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка в физических задачах часто применяется *метод дифференциалов*, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. Такая замена не отражается на результатах, так как дело сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Другим метотодом составления дифференциальных уравнений является использование физического смысла производной как скорости протекания процесса.

Пример 22. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M литров воды и вытекает N литров раствора ($M \geqslant N$), причем концентрация сохраняется равномерной путем перемешивания. Найти количество вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

◀ Обозначим через $x(t)$ количество вещества в резервуаре через t минут после начала процесса и через $(x+\Delta x)$ — в момент времени $(t+\Delta t)$. Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т. е. раствор «обедняется»).

Пусть $V(t)$ — объем смеси в момент t:

$$V(t) = B + Mt - Nt.$$

Концентрация вещества в момент времени t равняется, очевидно, x/V. За бесконечно малый отрезок времени $[t, t+\Delta t]$ количество вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx, для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N\Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)t}\Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt, получаем дифференциальное уравнение:

$$dx = -\frac{Nx}{B+(M-N)t}dt.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными и считая $M > N$, найдем общее решение:

$$x(t) = \frac{C}{(B+(M-N)t)^{\frac{N}{M-N}}}.$$

Используя начальное условие $x = A$ при $t = 0$, найдем частное решение:

$$x(t) = A\left(\frac{B}{B+(M-N)t}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Полагая $t=T$, получим ответ:

$$x(T)=A\left(\frac{B}{B+(M-N)T}\right)^{\frac{N}{M-N}}.$$

Случай $M=N$ требует отдельного рассмотрения (см. задачу 1.154). ▶

1.146. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды (закон Ньютона). Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусам.

1.147. Через сколько времени температура тела, нагретого до 100 °С, понизится до 25 °С, если температура помещения равна 20 °С и за первые 10 мин тело охладилось до 60 °С?

1.148*. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об/с, по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об/с. Через сколько времени он будет иметь угловую скорость 1 об/с?

1.149. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

1.150*. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение свободного падения (принять $g=10$ м/с²). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R=1$ м и высотой $H=1{,}5$ м через отверстие в дне диаметром $2r=0{,}05$ м?

1.151*. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока, найти, какая часть его дойдет до глубины 12 м.

1.152. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки — 1,5 м/с, скорость ее

через 4 секунды — 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

1.153*. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 20$ см и вылетает, имея скорость 100 м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

1.154. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин, и смесь вытекает из него с той же скоростью. Концентрация принимается равномерной. Сколько соли останется в баке через час?

1.155. Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Если количество первого есть 31,4 г по истечении одного часа и 9,7 г по истечении трех часов, то определить: а) сколько вещества было в начале процесса; б) через сколько времени после начала процесса останется лишь 1% первоначального количества?

1.156*. В помещении цеха вместимостью 10 800 м³ воздух содержит 0,12% углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04% углекислоты в количестве 1500 м³/мин. Предполагая, что концентрация углекислоты во всех частях помещения в каждый момент времени одна и та же, найти содержание углекислоты через 10 мин после начала работы вентиляторов.

1.157. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением u удовлетворяет уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u.$$

Найти силу тока i в момент времени t, если $u = E\sin\omega t$ и $i = 0$ при $t = 0$ (L, R, E, ω — постоянные).

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Основные понятия. Теорема Коши. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Общим решением уравнения (1) или (2) называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которая при любых значениях параметров $C_1, \ldots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения.

Уравнение

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{3}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (2) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4}$$

Если известно общее решение $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ уравнения (2), то для решения задачи Коши постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ определяются из системы уравнений (если она разрешима)

$$\begin{gathered} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{gathered}$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. *Если дифференциальное уравнение (2) таково, что функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$ существует такой интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям* (4).

Пример 1. Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ является общим решением дифференциального уравнения $yy'' = y'^2$.

◀ Имеем:

$$y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}, \quad y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}.$$

Подставив выражения y, y' и y'' в данное уравнение, получим тождество

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} \equiv (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Следовательно, функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ есть общее решение данного уравнения. ▶

Пример 2. Найти область существования и единственности решения уравнения

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

◀ Функция $f(x, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{y'}}{x}$ непрерывна при $x \neq 0$, $y' \geqslant 0$; частная производная $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2x\sqrt{y'}}$ непрерывна при $x \neq 0$, $y' > 0$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $x \neq 0$, $y' > 0$. ▶

Найти область существования и единственности решения уравнений:

2.1. $y''=x+\sqrt{x^2-y'}$. **2.2.** $y''=y'\ln y'$.

Показать, что данные функции являются общими решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

2.3. $y=\ln\frac{1}{x+C_1}+C_2$; $y''=y'^2$.

2.4. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$; $xy'''=2$.

Показать, что данные соотношения являются общими интегралами соответствующих дифференциальных уравнений:

2.5. $e^y\sin^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $y''=e^y$.

2.6. $C_1y=\sin(C_1x+C_2)$; $yy''+1=y'^2$.

Показать, что данные функции являются частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

2.7. $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$; $1+y'^2=2yy''$.

2.8. $y=e^x$; $y^2+y'^2=2yy''$.

Путем исключения параметров вывести дифференциальные уравнения семейств следующих линий:

2.9. Прямых на плоскости, не параллельных оси Oy.

2.10. Окружностей постоянного радиуса R.

2.11. Синусоид $y=A\sin(x+\alpha)$, где A и α — параметры.

2.12. Парабол с осью, параллельной оси Oy.

2. Уравнения, допускающие понижение порядка. Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

а) Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$. Общее решение получается путем n-кратного интегрирования $y=\int dx\int dx\ldots\int f(x)dx+P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)=C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$, или по формуле

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}f(t)(x-t)^{n-1}dt+P_{n-1}(x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''=\frac{1}{\cos^2 x}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

◀ Интегрируя первый раз, получаем $y'=\operatorname{tg}x+C_1$. Повторное интегрирование дает $y=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2$. Это и есть общее решение. Подставив теперь в полученное общее решение и в выражение

для первой производной $x=\frac{\pi}{4}$ и соответственно $y=\frac{\ln 2}{2}$ и $y'=1$, получим систему двух уравнений с неизвестными C_1 и C_2. Решив эту систему, найдем значения параметров $C_1=0$ и $C_2=0$, соответствующие искомому частному решению, которое следовательно, имеет вид $y=-\ln|\cos x|$. ▶

б) Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0$, т. е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. С помощью замены $y^{(k)}=p(x)$ порядок уравнения понижается на k единиц: $F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)})=0$. Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x)=\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$. Тогда искомая функция $y(x)$ получается путем k-кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $x^4y'''+2x^3y''=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=\frac{1}{2}$, $y'(1)=\frac{1}{2}$, $y''(1)=-1$.

◀ Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y''=p$, тогда $y'''=\frac{dp}{dx}$, и уравнение принимает вид $x^4\frac{dp}{dx}+2x^3p=1$, или $\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=\frac{1}{x^4}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение $p=-\frac{1}{x^3}+\frac{C_1}{x^2}$. Используя начальное условие $y''(1)=p(1)=-1$, получаем $C_1=0$. Следовательно, $y''=-\frac{1}{x^3}$, откуда $y'=\frac{1}{2x^2}+C_2$. Начальное условие $y'(1)=1/2$ позволяет определить $C_2=0$. Интегрируя еще раз, получаем $y=-\frac{1}{2x}+C_3$, а из условия $y(1)=1/2$ следует, что $C_3=1$. Итак, искомое частное решение есть $y=1-\frac{1}{2x}$ (равносторонняя гипербола). ▶

в) Уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, не содержащие явно независимой переменной. Подстановкой $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$ и т. д. порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $y'y'''-3y''^2=0$.

◀ Положим $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$ $y'''=p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$p\left(p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2}\right)-3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом следует учесть теряемое решение $p=0$, или $y=c$), получим

$$p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0.$$

Положив здесь $\frac{dp}{dy}=z$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz\frac{dz}{dp}-2z^2=0.$$

Сократив на z (при этом следует учесть еще одно решение $z=\frac{dp}{dy}=0$, т. е. $p=C_1$ и $y=C_1x+C_2$), получим $\frac{dz}{z}-\frac{2dp}{p}=0$, откуда $\ln|z|-\ln p^2=$ $=\ln|C_1|$, или $z=\frac{dp}{dy}=C_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$-\frac{1}{p}=C_1y+C_2, \quad \text{или} \quad -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2.$$

Окончательно получим $x=\overline{C}_1y^2+\overline{C}_2y+C_3$, где $\overline{C}_1=-\frac{C_1}{2}$, $\overline{C}_2=-C_2$, т. е. семейство парабол. Заметим, что в общее решение входят потерянные ранее частные решения. ▶

г) Уравнения вида $\frac{d}{dx}G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=0$, т. е. такие уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Интегрируя по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения.

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$$

◀ Левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $(1+x^2)y'$, а правая — от функции $\frac{x^4}{4}$, т. е. уравнение можно переписать так: $((1+x^2)y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$. Отсюда интегрированием получаем $(1+x^2)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{4}$, или

$$dy=\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}dx.$$

Следовательно,

$$y=\int\frac{x^4+C_1}{4(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{4}(x^2-1)+\frac{C_1+1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

и, окончательно,

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\overline{C}_1\operatorname{arctg}x+C_2,$$

где $\overline{C}_1=\frac{C_1+1}{4}$. Это и есть общее решение. ▶

д) Уравнение $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, однородное относительно функции и ее производных, т. е. $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)})=t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$, $t\neq 0$. Подстановкой $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$, ... порядок уравнения понижается на единицу.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

◀ Положим $y'=yz$, $y''=y(z^2+z')$. Тогда уравнение принимает вид

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z=0.$$

Сокращая на y^2 (при этом получается решение $y=0$), получаем $xz'-z=0$, или $\frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0$, откуда $z=C_1x$. Так как $z=\frac{y'}{y}$, то приходим к уравнению $y'=C_1xy$, или $\frac{dy}{y}=C_1x\,dx$, откуда $\ln y=\frac{C_1x^2}{2}+$ $+\ln|C_2|$, или $y=C_2e^{\overline{C}_1x^2}$, где $\overline{C}_1=C_1/2$. Это и есть общее решение, которое содержит и потерянное частное решение $y=0$. ▶

В некоторых случаях найти решение в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удается получить решение в параметрической форме.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''(1+2\ln y')=1$.

◀ Положим $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$. Тогда уравнение примет вид $\frac{dp}{dx}(1+2\ln p)=1$, или $dx=(1+2\ln p)\,dp$, откуда $x=-p+2p\ln p+$ $+C_1$. Так как $dy=p\,dx$, то находим $dy=p(1+2\ln p)\,dp$, откуда $y=p^2\ln p+C_2$, и получаем общее решение в параметрическом виде:

$$x=p(-1+2\ln p)+C_1,\quad y=p^2\ln p+C_2.\ ▶$$

Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка:

2.13. $y''=\frac{1}{1+x^2}$. **2.14.** $y''=x+\sin x$.

2.15. $y''+2xy'^2=0$. **2.16.** $xy''-y'-x\sin\frac{y'}{x}=0$.

2.17. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$. **2.18.** $x^3y''+x^2y'-1=0$.

2.19. $(1-x^2)y''+xy'-2=0$. **2.20.** $(1+e^x)y''+y'=0$.

2.21. $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x$. **2.22.** $x^2y'''=y''^2$.

2.23. $y'''=y''^2$. **2.24.** $(2y+y')y''=y'^2$.

2.25. $y''=1/\sqrt{y}$. **2.26.** $y^3y''+1=0$.

2.27. $yy''+y-y'^2=0$. **2.28.** $yy''-2yy'\ln y-y'^2=0$.

2.29. $y''\operatorname{tg}y=2y'^2$. **2.30.** $(y-1)y''=2y'^2$.

2.31. $xy'''+y''-x-1=0$. **2.32.** $yy''+y'^2=x$.

2.33. $y''=\frac{y-xy'}{x^2}$. **2.34.** $\frac{y''^2-y'y'''}{y'^2}=\frac{1}{x^2}$.

2.35*. $x^2yy''=(y-xy')^2$.

2.36. $xy'(yy''-y'^2)-yy'^2=x^4y^3$.

2.37. $xyy''+xy'^2=2yy'$. **2.38.** $2yy''-3y'^2=4y^2$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2.39. $y''=xe^x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

2.40. $y'''=\frac{\ln x}{x^2}, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=1, \quad y''(1)=2.$

2.41. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}, \quad y(2)=0, \quad y'(2)=4.$

2.42. $(1+x^2)y''+y'^2+1=0, \quad y(0)=y'(0)=1.$

2.43. $y''=e^{2y}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

2.44. $y''\cos y+y'^2\sin y-y'=0, y(-1)=\pi/6, y'(-1)=2.$

2.45. $y''/y'=2yy'/(1+y^2), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

2.46. $yy''-y'^2=y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

2.47. $yy''=2xy'^2, \quad y(2)=2, \quad y'(2)=0{,}5.$

2.48. $2yy''+y^2-y'^2=0, \quad y(0)=y'(0)=1.$

2.49. Найти интегральную кривую уравнения $yy'y''=y'^3+y''^2$, касающуюся в начале координат прямой $x+y=0$.

2.50. Найти интегральную кривую уравнения $yy''+y'^2-1=0$, проходящую через точку $M_0(0, 1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x+y=1$.

Найти общие решения дифференциальных уравнений в параметрической форме:

2.51. $(x+2y')y''=1.$ **2.52.** $y''^2-2y'y''+3=0.$

2.53. $(2+y')e^{y'}y''=1.$ **2.54.** $(3y-2y')y''-y'^2=0.$

2.55. Найти уравнение кривой, касающейся оси абсцисс в начале координат, если ее кривизна в любой точке равна $\cos x \ \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

2.56. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке равен длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

2.57*. Найти уравнения кривых, у которых радиус кривизны в любой точке вдвое больше длины отрезка нормали, заключенного между этой точкой и осью абсцисс, если известно, что кривая:

а) вогнута вверх; б) вогнута вниз.

2.58. Найти форму гибкой однородной нерастяжимой нити с закрепленными концами, находящуюся в равновесии под действием ее веса, если вес единицы длины

нити равен q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \text{const}$). Расположить нить так, чтобы вершина кривой совпадала с точкой $(a, 0)$, где $a = H/q$.

2.59. Гибкая тяжелая однородная нерастяжимая нить в положении равновесия подвергается натяжению, пропорциональному переменной площади ее поперечного сечения. Найти форму нити, полагая ее плоской, если вес единицы объема нити равен q (горизонтальная проекция силы натяжения нити $H = \text{const}$). Расположить нить так, чтобы кривая проходила через начало координат и имела в ней горизонтальную касательную.

2.60. Тело массы m движется прямолинейно под действием постоянной силы P. Найти скорость движения тела и пройденный им путь как функции времени, если в начальный момент они оба равны нулю, а сопротивление среды пропорционально квадрату скорости.

2.61*. Мяч массы 400 г падает с высоты 16,7 м без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча и равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Вычислить время падения и скорость мяча в конце падения. Принять $g = 10$ м/с^2.

2.62. Тело массы m поднимается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Полагая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости тела (с коэффициентом пропорциональности k^2), найти высоту подъема тела и скорость, с которой оно вернется в исходное положение, а также время подъема и спуска тела.

2.63*. Мяч массы 400 г брошен вверх со скоростью 20 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости мяча (с коэффициентом пропорциональности k^2), причем оно равно 0,0048 Н при скорости 1 м/с. Принять $g = 10$ м/с^2.

2.64. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния от точки до неподвижного центра. В начальный момент точка находится в покое и отстоит от центра на расстоянии x_0.

2.65. Материальная точка массы m движется прямолинейно к неподвижному центру, притягивающему ее с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния от центра (коэффициент пропорциональности равен mk^2). Найти закон движения, если оно начинается с состояния покоя, когда точка отстоит от центра на расстоянии x_0.

Определить время, по истечении которого точка достигнет центра.

2.66. Ракета движется вертикально вверх под действием силы отдачи от истечения газов. Масса ракеты изменяется в зависимости от времени по закону $m = m_0\varphi(t)$, где $m_0 = \text{const}$ (закон сгорания топлива). Относительная скорость истечения газов постоянна и равна u_0. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. Найти высоту подъема ракеты как функцию времени, если сопротивление воздуха не учитывается. Рассмотреть также частный случай, когда $m = m_0(1 - \alpha t)$, и вычислить для этого случая, на какую высоту поднимется ракета через 10 с, 30 с и 50 с при $u_0 = 2000$ м/с и $\alpha = 0{,}01$ с$^{-1}$. Положить $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.67. Определить, через сколько времени упадет на Землю тело, притягиваемое Землей по закону Ньютона (с ускорением, обратно пропорциональным квадрату расстояния между ними), если в начальный момент скорость тела равна нулю, а расстояние его от центра Земли равно H. Сопротивлением атмосферы пренебречь. Ускорение свободного падения на поверхности Земли постоянно и равно g.

2.68*. Тело, находящееся от центра Земли на расстоянии $x_Л = 60{,}27\ R_З$ (что соответствует расстоянию от Луны до Земли), падает на Землю из состояния покоя под действием силы тяжести с ускорением, обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, определить, через сколько времени оно упадет на Землю. Принять $R_З = 6{,}377 \cdot 10^6$ м, $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.69. Определить скорость, с которой метеор ударяется о Землю, если он падает с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и если при его движении к Земле ускорение принимается обратно пропорциональным квадрату его расстояния от центра Земли. Принять радиус Земли $R_З = 6377$ км, ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.70. По оси Oy в положительном направлении движется с постоянной скоростью v точка A (цель). На плоскости Oxy движется точка M (преследователь) с постоянной скоростью u ($u > v$) так, что вектор скорости всегда направлен в точку A. Найти траекторию точки M (кривую погони), если в начальный момент времени $t = 0$

точка A находилась в начале координат, а точка M — на оси Ox на расстоянии $a > 0$ от цели.

2.71*. Балка длины l, лежащая концами на двух опорах, находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб, выбрав начало координат в середине ненагруженной балки.

2.72*. Балка длины l, заделанная правым концом в стену, изгибается силой P, приложенной к левому концу, и равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q. Найти уравнение изогнутой оси балки и ее максимальный прогиб.

2.73*. Балка длины l с заделанным левым концом изгибается под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности q. Какова должна быть приложенная к правому концу балки действующая вверх сила P, чтобы прогиб в правом конце балки был равен нулю?

3. Линейные однородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением n-го порядка. Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (5), то подстановка $y(x) = y_1(x)\, z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому, полагая $z'(x) = u(x)$, получим линейное однородное уравнение порядка $n-1$ относительно функции $u(x)$.

Пример 9. Найти общее решение уравнения

$$(x^2+1)\, y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

убедившись в том, что функция $y_1(x) = x$ есть одно из его частных решений.

◀ Так как $y_1'(x) = 1$, а $y_1''(x) = 0$, то, подставив выражения $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ в заданное уравнение, убеждаемся в том, что функция $y_1(x) = x$ действительно является его частным решением. Положим $y = xz$, найдем $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ и подставим выражения y, y' и y'' в уравнение. Получим

$$(x^2+1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0,$$

или

$$x(x^2+1)\, z'' + 2z' = 0.$$

Теперь, полагая $z' = u$, $z'' = u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно u:

$$x(x^2+1)\, u' + 2u = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$u = C_1 \frac{x^2+1}{x^2},$$

откуда, учитывая $u=z'$, получаем уравнение первого порядка относительно z:

$$dz=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $z=C_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2$, а так как $y=xz$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения

$$y=C_1(x^2-1)+C_2x. \blacktriangleright$$

Изложенный выше метод обобщается на случай, когда известно k частных линейно независимых решений уравнения (5). В этом случае путем надлежащих подстановок порядок уравнения может быть понижен на k единиц.

2.74. Доказать теорему: если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y''+p(x)y'+$ $+q(x)y=0$, то функция $y_2(x)=y_1(x)\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}$ тоже является решением этого уравнения, а функция $y=y_1(x)\left(C_1+C_2\int e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}\right)$ есть его общее решение.

2.75. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+5y=0$, если функция e^x есть его частное решение.

2.76. Найти общее решение уравнения $y''-2y'-3y=0$, если функция e^{-x} есть его частное решение.

2.77. Найти общее решение уравнения $xy''+2y'+xy=0$, если функция $\frac{\sin x}{x}$ есть его частное решение.

2.78. Найти общее решение уравнения $(1-x^2)y''-$ $-2xy'+2y=0$, если функция x есть его частное решение.

2.79. Найти общее решение уравнения $x^3y'''+5x^2y''+$ $+2xy'-2y=0$, если известны два его частных решения $y_1=x$ и $y_2=1/x$.

Определителем Вронского (вронскианом) системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале. Если же хотя бы в одной точке $x_0\in(a, b)$ имеем $W(x_0)\neq 0$,

то система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независима на (a, b).

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (5) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Вронскиан фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены (см. задачу 2.98). Если известна фундаментальная система решений уравнения (5), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 10. Дана система функций x, $\cos x$, $\sin x$. Найти вронскиан системы $W(x)$ и убедиться в том, что на некотором интервале система линейно независима. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений, и записать общее решение уравнения.

◀ Составим вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}.$$

Так как $W(x) = x$, то система линейно независима на всей оси Ox и, следовательно, образует фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения 3-го порядка, общим решением которого является функция $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Для составления дифференциального уравнения найдем производные y', y'', y''' и исключим произвольные постоянные из выражений для y, y', y'', y'''. Имеем:

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \\ y' &= C_1 - C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ y'' &= -C_2 \cos x - C_3 \sin x, \\ y''' &= C_2 \sin x - C_3 \cos x. \end{aligned}$$

Легко видеть, что, умножив первое и третье равенство на -1, а второе и четвертое — на x и сложив все четыре равенства, получим

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0. \qquad (6)$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение.

Его можно было получить и другим путем, если учесть, что решение y искомого уравнения вместе с функциями x, $\cos x$, $\sin x$ образует линейно зависимую систему и поэтому вронскиан системы функций y, x, $\cos x$, $\sin x$ равен нулю:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \sin x \\ y' & 1 & -\sin x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\sin x \\ y''' & 0 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим то же самое уравнение (6) (проверить!).

Заметим, что в этом примере вронскиан $W(x)=x$ обращается в нуль при $x=0$, что, казалось бы, противоречит указанному выше утверждению о том, что вронскиан фундаментальной системы решений нигде не равен нулю. Дело, однако, состоит в том, что это утверждение справедливо лишь для уравнений вида (5) с непрерывными коэффициентами $a_1(x), \ldots, a_n(x)$. Уравнение же (6), записанное в форме (5), имеет вид

$$y''' - \frac{1}{x} y'' + y' - \frac{1}{x} y = 0, \tag{7}$$

т. е. имеет смысл лишь при $x \neq 0$. Система функций x, $\cos x$, $\sin x$ является фундаментальной системой решений уравнения (7) на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, где вронскиан $W(x)=x$ всюду отличен от нуля — в полном соответствии с упомянутым выше общим утверждением! ▶

Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

2.80. x, $\ln x$. **2.81.** $\sin 2x$, $\sin x \cos x$.

2.82. e^{-x}, xe^{-x}. **2.83.** x, $2x$, x^2.

2.84. e^x, xe^x, x^2e^x. **2.85.** $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

2.86. $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$. **2.87.** e^x, e^{x+1}.

2.88. x, 0, e^x. **2.89.** 1, $\sin x$, $\cos 2x$.

Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, составить это уравнение:

2.90. 1, e^{-x}. **2.91.** $e^{2x}\cos x$, $e^{2x}\sin x$.

2.92. x^3, x^4. **2.93.** 1, x, e^x.

2.94. 1, $\sin x$, $\cos x$. **2.95.** $2x$, $x-2$, e^x+1.

2.96. e^{3x}, e^{5x}. **2.97.** e^{2x}, $\sin x$, $\cos x$.

2.98.** Доказать, что если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n с непрерывными в некотором интервале (a, b) коэффициентами и вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю при $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \equiv 0$ при $a < x < b$.

2.99*. Дана система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, причем на некотором интервале вронскиан $W(x)$ этой системы отличен от нуля. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений.

2.100. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения e^x, $\cos x$, $\sin x$, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=3$, $y'(0)=4$, $y''(0)=-1$.

2.101. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения e^x, e^{2x}, e^{3x}, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=6$, $y'(0)=14$, $y''(0)=36$.

4. Линейные неоднородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)\,y=f(x), \qquad (8)$$

в котором $f(x)\not\equiv 0$, называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением n-го порядка.

Общее решение уравнения (8) определяется формулой

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x), \qquad (9)$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (5), а $\tilde{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (8).

Пример 11. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение $xy''-y'+xy'-y=2x^3$.

Известно, что функция x^3 есть его частное решение. Требуется найти общее решение этого уравнения.

◀ Согласно формуле (9) общее решение неоднородного уравнения составляется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В нашем случае $y_0(x)=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x$ (см. пример 10), а $\tilde{y}(x)=x^3$. Следовательно, искомое общее решение есть $y=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x+x^3$. ▶

Если известно общее решение $y_0(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ соответствующего уравнению (8) однородного уравнения (5), то для определения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (8) можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Именно, будем искать частное решение неоднородного уравнения (8) в виде $\tilde{y}(x)=C_1(x)\,y_1(x)+\ldots+C_n(x)\,y_n(x)$, где от функций $C_1(x),\ldots,C_n(x)$ дополнительно потребуем, чтобы они удовлетворяли условиям $\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)}\dfrac{dC_\nu(x)}{dx}=0$ для всех $k=0,1,\ldots,n-2$ (где $y_\nu^{(0)}=y_\nu$). Тогда для функций $C_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}&=0,\\ y_1'\frac{dC_1}{dx}+y_2'\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n'\frac{dC_n}{dx}&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}&=f(x). \end{aligned} \qquad (10)$$

Определитель этой системы есть отличный от нуля вронскиан фундаментальной системы решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, поэтому система имеет единственное решение относительно $\dfrac{dC_\nu}{dx}$, $\nu=1,2,\ldots,n$.

Пример 12. Зная, что функции $y_1(x)=\frac{\cos x}{x}$ и $y_2(x)=\frac{\sin x}{x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $xy''+2y'+xy=0$ (см. задачу 2.77), найти общее решение уравнения

$$xy''+2y'+xy=x. \tag{11}$$

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения записывается в виде $y_0(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$. Считая C_1 и C_2 функциями x, для определения частного решения уравнения (11) составим систему вида (10):

$$C_1'(x)\frac{\cos x}{x}+C_2'(x)\frac{\sin x}{x}=0,$$

$$C_1'(x)\left(\frac{\cos x}{x}\right)'+C_2'(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=1$$

(уравнение (11) следует привести к виду (8), т. е. разделить все его члены на x). Подставляя значение $C_2'(x)=-\frac{\cos x}{\sin x}C_1'(x)$ во второе уравнение, получаем

$$C_1'(x)\left(\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}-\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)=1.$$

Отсюда имеем $C_1'=-x\sin x$, $C_2'=x\cos x$.

После интегрирования получаем

$$C_1(x)=x\cos x-\sin x+\overline{C}_1,$$
$$C_2(x)=x\sin x+\cos x+\overline{C}_2$$

и искомое частное решение

$$\tilde{y}(x)=(x\cos x-\sin x)\frac{\cos x}{x}+(x\sin x+\cos x)\frac{\sin x}{x}=1.$$

Следовательно, общее решения уравнения (11) имеет вид

$$y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}+1. \ ▶$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения (8) есть сумма нескольких функций

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_r(x)$$

и $\tilde{y}_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ — некоторые частные решения уравнений

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots, r)$$

соответственно, то сумма

$$\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)+\ldots+\tilde{y}_r(x)$$

есть некоторое частное решение уравнения (8) (принцип суперпозиции решений).

Пример 13. Проверив, что функция $\tilde{y}_1 = -\frac{1}{4}e^x$ является частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$, а функция $\tilde{y}_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}.$$

◀ Согласно принципу суперпозиции частным решением последнего уравнения является функция $\tilde{y} = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения есть функция $y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$ (см. задачу 2.76). По формуле (9) общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}. \ ▶$$

2.102. Используя решение задачи 2.92, написать общее решение уравнения $x^2y'' - 6xy' + 12y = 3x$, предварительно убедившись в том, что функция $x/2$ есть одно из решений этого уравнения.

2.103. Используя решение задачи 2.97, написать общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' - 2y = 10e^{3x}$, предварительно убедившись в том, что функция e^{3x} есть одно из решений этого уравнения.

2.104. Проверив, что функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

2.105. Проверив, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = x\cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = 0$, найти общее решение уравнения $\operatorname{ctg} x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$.

2.106. Проверив, что функция $\tilde{y}_1(x) = 5x + 6$ является частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x$, а функция $\tilde{y}_2(x) = -e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (см. задачу 2.75).

2.107. Проверив, что функция $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}e^x$ является частным решением уравнения $y''' + y' = e^x$, а функция $\tilde{y}_2(x) = -\sin 2x$ — частным решением уравнения $y''' + y' = 6\cos 2x$, найти общее решение уравнения $y''' + y' = e^x + 6\cos 2x$ (см. задачу 2.94).

5. **Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.** Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad (12)$$

где a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \qquad (13)$$

полученное заменой производных $y^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ искомой функции степенями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12). Каждому действительному корню λ уравнения (13) кратности r соответствуют r линейно независимых решений уравнения (12):

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda=\alpha\pm i\beta$ кратности s соответствуют s пар линейно независимых решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \ldots, r_k$ и l пар комплексно сопряженных корней $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_1-i\beta_1, \ldots, \alpha_l+i\beta_l, \alpha_l-i\beta_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ $(r_1+\ldots+r_k+2s_1+\ldots+2s_l=n)$, то общее решение уравнения (12) запишется в виде

$$y(x)=P_1(x)e^{\lambda_1x}+\ldots+P_k(x)e^{\lambda_kx}+(Q_1(x)\cos\beta_1x+$$
$$+R_1(x)\sin\beta_1x)e^{\alpha_1x}+\ldots+(Q_l(x)\cos\beta_lx+R_l(x)\sin\beta_lx)e^{\alpha_lx}, \qquad (14)$$

где $P_\nu(x)$ — произвольный многочлен степени $r_\nu-1$, $\nu=1, \ldots, k$, а $Q_\mu(x)$ и $R_\mu(x)$ — произвольные многочлены степени $s_\mu-1$, $\mu=1, \ldots, l$.

Пример 14. Найти общее решение уравнения

$$y''+3y'+2y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-3$. Запишем фундаментальную систему решений $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{-3x}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. ▶

Пример 15. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Следовательно, функции $y_1=e^{-x}\cos 2x$, $y_2=e^{-x}\sin 2x$ составляют фундаментальную систему решений, а общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Пример 16. Найти частное решение уравнения

$$y'''-3y''+3y'-y=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ имеет единственный корень $\lambda=1$ кратности $r=3$. Поэтому фундаментальная система решений имеет вид $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$. Следовательно,

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^x$$

— общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y'=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^x+(C_2+2C_3x)\,e^x,$$
$$y''=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^x+2\,(C_2+2C_3x)\,e^x+2C_3e^x$$

и используем начальные условия. Получаем: $C_1=1$, $C_1+C_2=2$, $C_1+2C_2+2C_3=3$, откуда $C_2=1$, $C_3=0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y=(1+x)\,e^x. \ ▶$$

Пример 17. Найти общее решение уравнения

$$4y^{IV}+4y''+y=0.$$

◀ Характеристическое уравнение $4\lambda^4+4\lambda^2+1=0$, или $(2\lambda^2+1)^2=0$, имеет два комплексно сопряженных корня $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$ кратности 2. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$, $x\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. Отсюда получаем общее решение:

$$y=(C_1+C_2x)\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+(C_3+C_4x)\sin\frac{x}{\sqrt{2}}. \ ▶$$

2.108. Известно частное решение $y_1=e^{kx}$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет дискриминант, равный нулю. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=y'(0)=1$.

По данным корням характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами составить дифференциальное уравнение и написать его общее решение.

2.109. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$. **2.110.** $\lambda_1=\lambda_2=1$.

2.111. $\lambda_{1,2}=3\pm2i$. **2.112.** $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$.

2.113. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=4$.

2.114. Показать, что общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha^2x=0$$

может быть представлено в виде $x=A\sin(\alpha t+\varphi)$ или $x=A\cos(\alpha t+\varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

2.115. $y''-2y'-2y=0$. **2.116.** $y''+6y'+13y=0$.

2.117. $y''-6y'+9y=0$. **2.118.** $3y''-2y'-8y=0$.

2.119. $4y''-8y'+5y=0$. **2.120.** $4y''+4y'+y=0$.

2.121. $y'''-5y''+17y'-13y=0$.

2.122. $y^{IV}+4y''+3y=0$.

2.123. $y^{IV}+2y'''+y''=0$. **2.124.** $y^{IV}-y''=0$.

2.125. $y^{IV}+2y''+y=0$. **2.126.** $y^{IV}-8y''+16y=0$.

2.127. $y^{V}+8y'''+16y'=0$. **2.128.** $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$.

2.129. $y^{VI}-2y^{V}+3y^{IV}-4y'''+3y''-2y'+y=0$.

2.130. $y^{VI}+2y^{V}+y^{IV}=0$.

Найти частные решения уравнений по данным начальным условиям:

2.131. $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=y'(0)=1$.

2.132. $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.

2.133. $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

2.134*. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-y=0$, касающуюся в точке $O(0, 0)$ прямой $y=x$.

2.135. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''-4y'+3y=0$, касающуюся в точке $M_0(0, 2)$ прямой $2x-2y+9=0$.

6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (15)$$

где a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — действительные постоянные, а $f(x)\not\equiv 0$.

Согласно формуле (9) общее решение уравнения (15) записывается в виде $y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ — любое частное решение уравнения (15). Общее решение $y_0(x)$ дается формулой (14). Для отыскания $\tilde{y}(x)$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (см. п. 4).

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (15) имеет вид $f_1(x)=(d_0x^m+\ldots+d_m)e^{\lambda x}$ или $f_2(x)=((b_0x^{m_1}+\ldots+b_{m_1})\times\cos\beta x+(c_0x^{m_2}+\ldots+c_{m_2})\sin\beta x)e^{\alpha x}$, частное решение $\tilde{y}(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Именно, если λ или $\alpha\pm i\beta$ не совпадают ни с одним из действительных или соответственно комплексных корней характеристического уравнения (13), то $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x)=(D_0x^m+D_1x^{m-1}+\ldots+D_m)e^{\lambda x} \qquad (16)$$

для $f(x)=f_1(x)$ или в виде

$$\tilde{y}(x)=\left(\left(B_0x^{\tilde{m}}+\ldots+B_{\tilde{m}}\right)\cos\beta x+\left(C_0x^{\tilde{m}}+\ldots+C_{\tilde{m}}\right)\sin\beta x\right)e^{\alpha x} \tag{17}$$

для $f(x)=f_2(x)$. Здесь D_ν, B_ν и C_ν — неопределенные коэффициенты, $\tilde{m}=\max(m_1, m_2)$.

Если же λ или $\alpha\pm i\beta$ совпадают с некоторым корнем уравнения (13) кратности r, то выражения в правой части (16) или (17) следует домножить на x^r, т. е. искать решение соответственно в виде

$$\tilde{y}(x)=x^r(D_0x^m+\ldots+D_m)e^{\lambda x} \tag{18}$$

для $f(x)=f_1(x)$ или

$$\tilde{y}(x)=x^r\left(\left(B_0x^{\tilde{m}}+\ldots+B_{\tilde{m}}\right)\cos\beta x+\left(C_0x^{\tilde{m}}+\ldots+C_{\tilde{m}}\right)\sin\beta x\right)e^{\alpha x} \tag{19}$$

для $f(x)=f_2(x)$.

Пример 18. Найти общее решение уравнения

$$y'''+y'=\operatorname{tg}x.$$

◀ Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$, так как $y_1=1$, $y_2=\cos x$, $y_3=\sin x$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариации постоянных. Система (10) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}&C_1'+C_2'\cos x+C_3'\sin x=0,\\&-C_2'\sin x+C_3'\cos x=0,\\&-C_2'\cos x-C_3'\sin x=\operatorname{tg}x.\end{aligned}$$

Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего на $\cos x$ и сложив, получим $C_2'=-\sin x$. Тогда из второго уравнения следует $C_3'=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Сложив обе части первого и третьего уравнений, найдем $C_1'=\operatorname{tg}x$. Интегрирование дает:

$$C_1=-\ln|\cos x|,\quad C_2=\cos x,\quad C_3=\sin x-\ln\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|.$$

Следовательно, искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x-\ln|\cos x|-\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right|.\ ▶$$

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}.$$

◀ Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $\lambda^2-3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, а общее решение однородного уравнения есть $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Так как $\lambda=3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=(D_0x^2+D_1x+D_2)\,e^{3x}$. Найдя производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим (после сокращения на e^{3x})

$$2D_0x^2+(6D_0+2D_1)\,x+(2D_0+3D_1+2D_2)=x^2+x.$$

Сравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получим систему уравнений для определения неизвестных D_0, D_1, D_2:

$$2D_0=1,$$
$$6D_0+2D_1=1,$$
$$2D_0+3D_1+2D_2=0,$$

откуда $D_0=1/2$, $D_1=-1$, $D_2=1$.

Итак, $\tilde{y}=\left(\frac{1}{2}x^2-x+1\right)e^{3x}=\frac{1}{2}(x^2-2x+2)\,e^{3x}$, и, следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y=y_0+\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2-2x+2)\,e^{3x}. \blacktriangleright$$

Пример 20. Найти частное решение уравнения

$$y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x),$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi)=y'(\pi)=2\pi$.

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=0\pm 2i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=x(B\cos 2x+C\sin 2x)$, так как $0\pm 2i$ — корни характеристического уравнения кратности 1. Найдя $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, получим

$$-4B\sin 2x+4C\cos 2x=4\sin 2x+4\cos 2x,$$

откуда $B=-1$, $C=1$ и, следовательно,

$$\tilde{y}=x(\sin 2x-\cos 2x).$$

Общее же решение будет $y=y_0+\tilde{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x(\sin 2x-\cos 2x)$.

Для нахождения C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями, предварительно продифференцировав общее решение:

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+x(2\cos 2x+2\sin 2x)+(\sin 2x-\cos 2x).$$

Имеем: $2\pi=C_1-\pi\Rightarrow C_1=3\pi$, $2\pi=2C_2+2\pi-1\Rightarrow C_2=1/2$. Искомым частным решением является функция

$$y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+x(\sin 2x-\cos 2x). \blacktriangleright$$

Пример 21. Найти общее решение уравнения

$$y''-4y'+4y=xe^{2x}.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+4=0$ имеет двукратный корень $\lambda=2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

Частное решение данного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=x^2(D_0x+D_1)e^{2x}$, так как показатель экспоненты в правой части уравнения совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения. Методом неопределенных коэффициентов (т. е. найдя $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, подставив $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, сократив на e^{2x} и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях x) находим $D_0=1/6$, $D_1=0$. Следовательно, $\tilde{y}=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$, а общее решение принимает вид

$$y=y_0+\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{6}x^3\right)e^{2x}. \blacktriangleright$$

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие уравнения:

2.136. $y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$. **2.137.** $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 x}$.

2.138. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.139. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$.

Для каждого из данных неоднородных дифференциальных уравнений написать вид его частного решения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить):

2.140. $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$.

2.141. $y''+16y=\sin(4x+\alpha)$ $(\alpha=\text{const})$.

2.142. $y''-4y'=2\cos^2 4x$.

2.143. $y^{\text{IV}}+4y''+4y=x\sin 2x$.

2.144. $y''-4y'=xe^{4x}$. **2.145.** $y''-7y'=(x-1)^2$.

2.146. $y''+2y'+5y=e^x((x+1)\cos 2x+3\sin 2x)$.

2.147. $y''-4y'+13y=e^{2x}(x^2\cos 3x-x\sin 3x)$.

Найти общие решения следующих уравнений:

2.148. $y''-y=e^{-x}$. **2.149.** $y''-y=\operatorname{ch} x$.

2.150. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.

2.151. $y''-5y'+6y=13\sin 3x$.

2.152. $y''-2my'+m^2y=\sin nx$ $(m\neq n)$.

2.153. $y''-2my'+m^2y=\sin mx$.

2.154. $y''+y=4x\cos x$. **2.155.** $y''+4y=\cos^2 x$.

2.156. $4y''-y=x^3-24x$.

2.157. $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$.

2.158. $y''-3y'=e^{3x}-18x$. **2.159.** $y'''+y''=6x+e^{-x}$.

2.160. $y'''-3y''+3y'-y=e^{x}$. **2.161.** $y^{\mathrm{IV}}+y''=x^2+x$.

2.162. $y^{\mathrm{IV}}-y=xe^{x}+\cos x$. **2.163.** $y^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}=xe^{x}-1$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

2.164. $y''-2y'=2e^{x}$; $y(1)=-1$, $y'(1)=0$.

2.165. $y'''-y'=-2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

2.166. $y''+4y=x$; $y(0)=1$, $y(\pi/4)=\pi/2$.

2.167. $y''+y=4e^{x}$; $y(0)=4$, $y'(0)=-3$.

2.168. $y^{\mathrm{IV}}-y=8e^{x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=4$, $y'''(0)=6$.

2.169. $y^{\mathrm{IV}}-y=8e^{x}$; $y(0)=-1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$, $y'''(0)=0$.

2.170. $y''-2y'+2y=4e^{x}\cos x$; $y(\pi)=\pi e^{\pi}$, $y'(\pi)=e^{\pi}$.

7. Дифференциальные уравнения Эйлера. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x),\quad x\neq 0,$$

где a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ постоянные, есть частный случай линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и называется *уравнением Эйлера*. Введем новую независимую переменную t с помощью подстановки $x=e^t$ (если $x>0$) или подстановки $x=-e^t$ (если $x<0$). Пусть для определенности $x>0$. Тогда $y'_x=e^{-t}y'_t$, $y''_{xx}=e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)$, $y'''_{xxx}=e^{-3t}(y'''_{ttt}-3y''_{tt}+2y'_t)$ и т. д., и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=f(x),$$

где a, b, a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $ax+b=e^t$ (в области $ax+b>0$).

Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0$$

можно (при $x>0$) искать в виде $y=x^{\lambda}$.

Подставляя выражения для y', y'', $\ldots$, $y^{(n)}$ в однородное уравнение Эйлера, находим характеристическое уравнение для определения показателя степени λ. При этом, если λ — действительный корень характеристического уравнения кратности r, то ему соответствуют r линейно независимых решений

$$x^{\lambda},\ x^{\lambda}\ln x,\ x^{\lambda}(\ln x)^2,\ \ldots,\ x^{\lambda}(\ln x)^{r-1},$$

а если $\alpha\pm i\beta$ — пара комплексных корней кратности s, то ей соот-

ветствуют s пар линейно независимых решений

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x),\quad x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x),\quad \ldots,\quad x^\alpha (\ln x)^{s-1} \cos(\beta \ln x),$$
$$x^\alpha \sin(\beta \ln x),\quad x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x),\quad \ldots,\quad x^\alpha (\ln x)^{s-1} \sin(\beta \ln x).$$

Пример 22. Найти общее решение неоднородного уравнения Эйлера $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.

◀ Положим $x=e^t$, считая $x>0$. Тогда $y'_x=e^{-t}y'_t$, $y''_{xx}=e^{-2t}\times\times(y''_{tt}-y'_t)$, и наше уравнение примет вид

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t)-3e^t\cdot e^{-t}y'_t+5y=3e^{2t},$$

или

$$y''_{tt}-4y'_t+5y=3e^{2t}.$$

Общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения есть $y_0=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, а частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y}=Ae^{2t}$. Тогда $\tilde{y}'=2Ae^{2t}$, $\tilde{y}''=4Ae^{2t}$, и, подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в неоднородное уравнение, приходим к тождеству $Ae^{2t}\equiv 3e^{2t}$, откуда $A=3$. Следовательно, $\tilde{y}=3e^{2t}$, и общее решение неоднородного уравнения есть $y=y_0+\tilde{y}=e^{2t}(C_1\cos t+\\+C_2\sin t+3)$. Возвращаясь к первоначальной независимой переменной x, получим окончательно

$$y=x^2(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+3).$$

Если учитывать случай $x<0$, то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая:

$$y=x^2(C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|+3).\ ▶$$

Пример 23. Найти общее решение однородного уравнения Эйлера

$$(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0.$$

◀ Положим $y=(x+2)^\lambda$. Тогда имеем $y'=\lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y''=\\=\lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. Подставляем выражения y, y', y'' в заданное уравнение, получим характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda-3=0$, корни которого $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-3$. Следовательно, общее решение есть функция

$$y=C_1(x+2)+\frac{C_2}{(x+2)^3}.\ ▶$$

Найти общие решения уравнений Эйлера:

2.171. $x^2y''+xy'+y=0$. **2.172.** $x^2y''+xy'+4y=10x$.

2.173. $x^2y''-6y=12\ln x$.

2.174. $x^2y'''-3xy''+3y'=0$.

2.175. $x^2y'''-2y'=0$.

2.176. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$.

8. Краевые задачи в случае линейных дифференциальных уравнений. Во многих физических задачах приходится искать решение дифференциальных уравнений не по заданным начальным условиям,

а по их значениям на концах интервала. Такие задачи получили название *краевых (граничных)* задач. Общий вид краевых условий для интервала (a, b) в случае уравнений 2-го порядка таков:

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = A, \quad \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \tag{20}$$

где α_0, α_1, β_0, β_1 — одновременно не равные нулю заданные постоянные. Краевые условия называются *однородными*, если из того, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют этим условиям, следует, что и их линейная комбинация $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также удовлетворяет этим условиям. Краевые условия (20) при $A = B = 0$, очевидно, однородны.

Краевые задачи не всегда разрешимы. При решении краевой задачи сначала находится общее решение данного дифференциального уравнения, и из граничных условий получается система для определения значений постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, при которых из общего решения получается решение данной краевой задачи.

Пример 24. Найти решение уравнения $y'' + y = 1$, удовлетворяющее условиям $y'(0) = y'(\pi) = 0$.

◀ Исходное уравнение имеет общее решение вида

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1.$$

Из граничных условий получаем: $y'(0) = C_2 = 0$ и $y'(\pi) = -C_2 = 0$, так что функция $y(x) = C_1 \cos x + 1$ удовлетворяет граничным условиям при любых C_1. ▶

Пример 25. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = e^x,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) + y(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y'(0) + y'(\pi/2) = 1.$$

◀ Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $y_0 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} = Ae^x$. Подставив $\tilde{y}' = Ae^x$ и $\tilde{y}'' = Ae^x$ в данное уравнение, получим $Ae^x = e^x$, откуда $A = 1$. Итак, $\tilde{y} = e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1).$$

Найдя

$$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1) + e^x (-C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

используем краевые условия. Получим систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$(C_1 + 1) + e^{\pi/2} (C_2 + 1) = e^{\pi/2},$$
$$(C_1 + C_2 + 1) + e^{\pi/2} (-C_1 + C_2 + 1) = 1.$$

Решив эту систему, находим

$$C_1 = \frac{e^{\pi} - 1 - e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}}, \quad C_2 = \frac{1 - 2e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}},$$

т. е. искомым частным решением является функция

$$y=e^x\left(\frac{e^\pi-1-e^{\pi/2}}{1+e^\pi}\cos x+\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^\pi}\sin x+1\right). \blacktriangleright$$

Найти решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

2.177. $y''-y=0;\ y(0)=0,\ y(2\pi)=1.$

2.178. $y''-y=0;\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

2.179. $y''+y=0;\ y'(0)=0,\ y'(1)=1.$

2.180. $y''+y=0;\ y'(0)=0,\ y'(\pi)=1.$

2.181. $yy''+y'^2+1=0;\ y(0)=1,\ y(1)=2.$

2.182. $y''+y=1;\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=0.$

2.183. $yy'+y'^2+yy''=0,\ y(0)=1,\ y(-1)=0.$

2.184. $x^2y''-2xy'+2y=x^2,\ y(0)+2y'(0)=1,$ $y(1)-y'(1)=0.$

9. Задачи физического характера.

2.185*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы притяжения к неподвижному центру, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности mk^2). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $2mh>0$). В начальный момент расстояние от точки до центра равно a, а скорость направлена по прямой, соединяющей точку с центром, и равна v_0. Найти закон движения точки при условии, что $h<k$.

2.186*. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональной расстоянию от точки до центра (коэффициент пропорциональности $k>0$). Сила сопротивления среды пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности $\lambda>0$). В начальный момент точка находится на расстоянии a от центра, скорость равна v_0 и направлена по прямой, соединяющей точку с центром. Найти закон движения точки.

2.187*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω около перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шарика относительно трубки, если:

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения, начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0.

2.188. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω около перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней с трением, величина которого $R = 2m\mu\omega\frac{dr}{dt}$, где μ — коэффициент трения скольжения. Найти закон движения шарика, если в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения и начальная скорость его равна нулю.

2.189*. Тяжелая однородная цепь переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной 8 м, а с другой стороны — часть длиной 10 м. За какое время T цепь соскользнет с гвоздя?

2.190*. Груз массой 4 кг подвешен на пружине и увеличивает ее длину на 1 см. Найти закон движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y = 2\sin 30t$ (см) и в начальный момент груз находился в покое (сопротивлением среды пренебречь).

2.191*. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\sin\omega t$, индуктивности L, сопротивления R и емкости C, причем $R^2C - 4L < 0$, $\omega \neq \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

2.192.** Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\sin\omega t$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (случай резонанса). Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

2.193. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока с э. д. с. $e(t) = E\cos(\omega t + \psi)$, индуктивности L и емкости C, причем $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Найти ток i в цепи как функцию времени t, если $i|_{t=0} = \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

§ 3. Системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n-го порядка. Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, разрешена относительно старших производных этих функций $y_1^{(p_1)}(x), \ldots, y_k^{(p_k)}(x)$, т. е. имеет вид

$$\begin{aligned}
y_1^{(p_1)}(x) &= f_1\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),\\
y_2^{(p_2)}(x) &= f_2\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right), \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(p_k)}(x) &= f_k\left(x, y_1, \ldots, y_1^{(p_1-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\right),
\end{aligned}$$

то она называется *канонической*, причем число $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ называется *порядком* системы. Каноническая система (1) при $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 1$, т. е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\
y_2'(x) &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n'(x) &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n),
\end{aligned}$$

называется *нормальной* системой.

Решением системы (2) на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ называется совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (2) в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Интегралом нормальной системы (2) называется функция $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

Равенство

$$\Psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

где $\Psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — интеграл нормальной системы, а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

можно свести к нормальной системе (2). Обратно, системы (1) или (2) в большинстве случаев сводятся к дифференциальному уравнению n-го порядка, решая которое можно найти и решение исходной системы.

Пример 1. Привести каноническую систему дифференциальных уравнений

$$y_1'' = 2y_1 - 3y_2,$$
$$y_2'' = y_1 - 2y_2$$

к нормальному виду.

◀ Положим $\frac{dy_1}{dx} = y_3$ и $\frac{dy_2}{dx} = y_4$. Тогда данную систему можно записать в виде

$$y_1' = y_3,$$
$$y_2' = y_4,$$
$$y_3' = 2y_1 - 3y_2,$$
$$y_4' = y_1 - 2y_2,$$

которая и является нормальной системой 4-го порядка. ▶

Пример 2. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y''_{xx} + k^2 y = 0$.

◀ Положим $y'_x = z$, тогда $y''_{xx} = z'_x$, и уравнение приводится к нормальной системе уравнений

$$y'_x = z,$$
$$z'_x = -k^2 y. \ ▶$$

Пример 3. Свести систему уравнений

$$\begin{aligned} y'_x &= y - z, \\ z'_x &= -4y + z \end{aligned} \tag{3}$$

к уравнению 2-го порядка и найти решение системы.

◀ Найдем $z(x)$ из первого уравнения: $z = y - y'_x$. Отсюда имеем $z'_x = y'_x - y''_{xx}$. Подставив значения z и z' во второе уравнение системы, получим уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$, общим решением которого является функция

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Отсюда, используя равенство $z = y - y'_x$, найдем

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{3x} = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

Таким образом, при любых постоянных C_1 и C_2 система функций

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z &= 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \end{aligned} \tag{4}$$

является решением исходной системы (3). ▶

Задача Коши для системы (2) ставится следующим образом: найти решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^0, \tag{5}$$

где $y_1^0, \ldots, y_n^0$ — заданные числа.

Теорема Коши. *Пусть правые части $f_1, f_2, \ldots, f_n$ нормальной системы (2) определены в $(n+1)$-мерной области D изменения переменных $x, y_1, \ldots, y_n$. Если в некоторой окрестности Δ точки $M_0(x_0, \overset{0}{y_1}, \ldots, \overset{0}{y_n}) \in D$ функции f_ν непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_\nu}{\partial y_j}$ по переменным $y_1, \ldots, y_n$, то существует интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения переменной x, в котором существует и притом единственное решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям (5).*

Общим решением системы (2) называется совокупность функций

$$y_\nu(x, C_1, \ldots, C_n), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, \ldots, C_n$ обращают уравнения системы (2) в тождества, и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функций (6) можно получить решение любой задачи Коши.

Пример 4. Показать, что определенная равенствами (4) система функций является общим решением системы (3) (см. пример 3). ◀ В качестве области D для (3) можно взять область $-\infty < x, y, z < +\infty$; при этом для любых x_0, y_0 и z_0 из этой области выполнены условия теоремы Коши. Подставив значения x_0, y_0, z_0 в систему (4), получим систему для определения C_1 и C_2:

$$y_0 = C_1 e^{-x_0} + C_2 e^{3x_0},$$
$$z_0 = 2C_1 e^{-x_0} - 2C_2 e^{3x_0}.$$

Определитель этой системы $\Delta = 2e^{2x_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4e^{2x_0}$ отличен от нуля при любом x_0. Следовательно, при любых y_0 и z_0 числа C_1 и C_2 определяются однозначно, т. е. из системы функций (4) можно получить любое решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (3). ▶

Путем исключения параметров a и b найти систему дифференциальных уравнений, определяющих семейства линий в пространстве:

3.1. $\begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} ax + z = b, \\ y^2 + z^2 = b^2. \end{cases}$

Дифференциальные уравнения или системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений (x — независимая переменная):

3.3. $y''' - xyy' + y'^3 = 0$. 3.4. $y^{IV} - y^2 = 0$.

3.5. $y'' = y' + z'$, $z'' = z' + u'$, $u'' = u' + y'$.

3.6. $z'' + z - 2y = 0$, $y''' + z - y = x$.

3.7. $y'' - z - u = 0$, $z' + uz = x^2$, $u''' = -xy$.

Проверить, что функции $y(x)$ и $z(x)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений:

3.8. $\begin{aligned} y' &= -1/z, \\ z' &= 1/y; \end{aligned}$ $\quad y = e^{-x/2}, \; z = 2e^{x/2}.$

3.9. $\begin{aligned} y' &= 1 - 2\frac{y}{x}, \\ z' &= y + z + \frac{2y}{x} - 1; \end{aligned}$ $\quad y = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}, \; z = e^x - \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}.$

Проверить, что функции $\Psi(x, y, z)$ являются интегралами данных нормальных систем:

3.10. $\Psi(x, y, z) = x + y - z;$ $\quad \begin{aligned} y' &= \frac{z}{y-z}, \\ z' &= \frac{y}{z-y}. \end{aligned}$

3.11. $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;$ $\quad \begin{aligned} y' &= \frac{3x-4z}{2z-3y}, \\ z' &= \frac{4y-2x}{2z-3y}. \end{aligned}$

3.12. $\Psi(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{1}{z};$ $\quad \begin{aligned} y' &= y/z, \\ z' &= z/y. \end{aligned}$

2. Методы интегрирования нормальных систем. Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является метод исключения неизвестных, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Поясним это на примерах (см. также пример 3).

Пример 5. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$y'_x = -z, \quad z'_x = \frac{z^2}{y}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $z(1) = -\frac{1}{2}$.

◀ Продифференцируем обе части первого уравнения по x, получим $y''_{xx} = -z'_x$. Так как из второго уравнения следует, что $z'_x = \frac{z^2}{y}$, то $y''_{xx} = -\frac{z^2}{y}$, но из первого уравнения $z^2 = (y'_x)^2$, поэтому система двух уравнений первого порядка свелась к одному уравнению второго порядка $y''_{xx} = -\frac{(y'_x)^2}{y}$, т. е. к уравнению $yy''_{xx} + (y'_x)^2 = 0$.

Левая часть полученного уравнения есть $(yy'_x)'_x$, поэтому $yy'_x=\frac{1}{2}C_1$, откуда $y\,dy=\frac{1}{2}C_1\,dx$ и $\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}C_1x+\frac{1}{2}C_2$, т. е. $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$. Из первого уравнения системы имеем: $z=-y'_x$, т.е. $z=\mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1x+C_2}}$. Система функций $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}$, $z=\mp\frac{C_1}{2\sqrt{C_1x+C_2}}$ образует общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения используем начальные условия $y(1)=1$, $z(1)=-\frac{1}{2}$. Имеем: $1=\sqrt{C_1+C_2}$, $-\frac{1}{2}=-\frac{C_1}{2\sqrt{C_1+C_2}}$, откуда $C_1=1$, $C_2=0$.

Итак, пара функций $y=\sqrt{x}$, $z=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и есть искомое частное решение системы. ▶

Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению.

Пример 6. Показать, что систему уравнений

$$y'=xy,\quad z'+y'=z+xy$$

нельзя свести к одному уравнению.

◀ Действительно, подставив во второе уравнение вместо y' его значение xy, получим два не связанных между собой дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит только одну функцию,

$$y'=xy,\quad z'=z;$$

из этих уравнений находим $y=C_1e^{x^2/2}$ и $z=C_2e^x$. ▶

Другим методом интегрирования систем дифференциальных уравнений является метод выделения интегрируемых комбинаций, т. е. получения из системы (2) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов системы (2), то их совокупность дает общий интеграл этой системы.

Пример 7. Найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений

$$y'_x=\frac{z+e^y}{z+e^x},\quad z'_x=\frac{z^2-e^{x+y}}{z+e^x}.$$

◀ Умножим обе части второго уравнения системы на e^{-x} и сложим их с соответствующими частями первого уравнения и с тождеством $-e^{-x}z\equiv-e^{-x}z$, получим $(e^{-x}z)'_x+y'_x=0$, откуда

$$e^{-x}z+y=C_1=\Psi_1(x,\ y,\ z).$$

Это первый интеграл системы.

Теперь умножим обе части второго уравнения на e^{-y} и сложим с равенствами $-e^{-y}zy'=-e^{-y}z\frac{z+e^y}{z+e^x}$ и $(x)'_x=1$, получим

$(e^{-y}z)'_x + x'_x = 0$, откуда

$$e^{-y}z + x = C_2 = \Psi_2(x, y, z).$$

Это тоже первый интеграл системы. Так как якобиан системы Ψ_1, Ψ_2 отличен от нуля (проверьте!), то оба первых интеграла независимы между собой, поэтому их совокупность неявно определяет общее решение заданной системы уравнений.

Для выделения интегрируемых комбинаций из системы (2) последнюю удобнее записать в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{7}$$

и использовать следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \ldots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеет место соотношение

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n} = \gamma. \tag{8}$$

Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель в (8) был полным дифференциалом знаменателя или же знаменатель был равен нулю.

В соотношении (7) независимая переменная и искомые функции равноправны.

Пример 8. Найти общее решение системы уравнений

$$y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \quad z' = \frac{nx - my}{ly - nz}.$$

◀ Запишем систему в симметрической форме:

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

и воспользуемся соотношением (8). Выбираем $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$ и $\alpha_3 = l$, тогда имеем

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

т. е. $d(mx + ny + lz) = 0$, откуда

$$mx + ny + lz = C_1. \tag{9}$$

Аналогичным образом, выбирая $\alpha_1 = 2x$, $\alpha_2 = 2y$ и $\alpha_3 = 2z$, приходим к равенству $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) образуют два первых интеграла системы, неявно определяющих общее решение. ▶

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений:

3.13. $x'_t = \frac{1}{y}$, $y'_t = \frac{1}{x}$. 3.14. $\frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}$.

3.15. $y'_x = \frac{z}{(z-y)^2}$, $z'_x = \frac{y}{(z-y)^2}$.

3.16. $x'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $y'_t = \frac{x-y}{z-t}$, $z'_t = x-y+1$.

3.17. $y'_x = \frac{2xy}{x^2-y^2-z^2}$, $z'_x = \frac{2xz}{x^2-y^2-z^2}$.

3.18. $\frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy-2t^2}$.

3.19. $\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$.

3.20. $x'_t = \frac{y^2}{x}$, $y'_t = \frac{x^2}{y}$.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, а также частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

3.21. $y'_x = \frac{z-1}{z}$, $z'_x = \frac{1}{y-x}$; $y(0) = -1$, $z(0) = 1$.

3.22. $y'_x = \frac{x}{yz}$, $z'_x = \frac{x}{y^2}$; $y(0) = z(0) = 1$.

3.23*. Для системы дифференциальных уравнений $x'_t = \frac{x^2-t}{y}$, $y'_t = -x$ и функций

а) $\varphi_1 = t^2 + 2xy$; б) $\varphi_2 = x^2 - ty$

проверить, являются ли соотношения $\varphi_i = C$ $(i = 1, 2)$ первыми интегралами этой системы.

3. Физический смысл нормальной системы. Для простоты ограничимся рассмотрением системы двух дифференциальных уравнений, причем в качестве независимой переменной будем считать время t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(t, x, y), \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ этой системы есть некоторая кривая в плоскости Oxy с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат. Плоскость Oxy называется *фазовой плоскостью*, а кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — *фазовой траекторией* системы (11). Сама система (11) называется *динамической системой*. Динамическая система называется *автономной* (*стационарной*), если в правые части уравнений этой системы время t не входит явным образом.

Динамическая система определяет поле скоростей движущейся в плоскости точки в любой момент времени t. Решение динамической системы $x = x(t)$, $y = y(t)$ — это уравнения движения точки: они определяют положение движущейся точки в любой момент времени t. Начальные условия задают положение точки в начальный

момент: $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. Уравнения движения определяют также и траекторию движения, будучи уравнениями этой кривой в параметрической форме.

Пример 9. Найти фазовую траекторию автономной динамической системы

$$\dot{x}=\frac{x^2}{y}, \quad \dot{y}=x,$$

проходящую через точку M_0 (2, 3).

◀ Продифференцируем второе уравнение по t и подставим выражение $x'_t=y''_{tt}$ и $x=y'_t$ в первое уравнение. Получим $y''_{tt}=\frac{(y'_t)^2}{y}$, или $yy''_{tt}-y'^2_t=0$, т. е. одно уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией y.

Разделим обе части последнего уравнения на y^2 и перепишем его так: $\left(\frac{y'_t}{y}\right)'=0$. Отсюда следует, что $\frac{y'_t}{y}=C_1$, или $\frac{dy}{y}=C_1dt$, откуда $y=C_2e^{C_1t}$.

Найдем $y'_t=C_1C_2e^{C_1t}$ и подставим во второе уравнение системы; получим $x=C_1C_2e^{C_1t}$. Итак, система функций $x=C_1C_2e^{C_1t}$, $y=C_2e^{C_1t}$ есть общее решение нашей системы дифференциальных уравнений.

Исключая из общего решения время t $(C_2e^{C_1t}=y)$, получим, что фазовыми траекториями системы являются прямые $x=C_1y$, причем через заданную точку $M_0(2, 3)$ проходит прямая $y=\frac{3}{2}x$. ▶

Для указанных систем найти фазовые траектории, проходящие через заданные точки M_0:

3.24. $\dot{x}=1-x^2-y^2$, $\dot{y}=2x$; $M_0(1, 2)$.

3.25. $\dot{x}=1-x^2-y^2$, $\dot{y}=2xy$; $M_0(2, 1)$.

3.26. $\dot{x}=2x$, $\dot{y}=x+2y$; $M_0(1, 1)$.

3.27. $\dot{x}=y-x$, $\dot{y}=y-2x$; $M_0(1, 1)$.

4. Линейные однородные системы. Нормальная линейная однородная система n-го порядка имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\ldots+a_{1n}(t)x_n,\\
\dot{x}_2&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\ldots+a_{2n}(t)x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n&=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\ldots+a_{nn}(t)x_n,
\end{aligned} \tag{12}$$

или, в матричной форме,

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t), \tag{13}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}, \quad X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}.$$

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i, j=1, \ldots, n$, система (12) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Фундаментальной системой решений системы (12) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $X_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t))^{\top}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Если $X_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$,—фундаментальная система решений системы (12), то общее решение имеет вид $X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k(t)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$—произвольные постоянные.

Интегрирование системы (12) обычно проводится методом исключения (см. пример 3).

Решить системы линейных дифференциальных уравнений:

3.28. $y'_x = -\frac{y}{x} + xz, \quad z'_x = -\frac{2y}{x^3} + \frac{z}{x}$.

3.29. $xy'_x = -y + zx, \quad x^2 z'_x = -2y + zx$.

3.30. $\dot{x} = -\frac{y}{t}, \ \dot{y} = -\frac{x}{t}$.

3.31. $\dot{x} = -\frac{2}{t}x, \quad \dot{y} = y + \frac{t+2}{t}x$.

В частном случае систем с постоянными коэффициентами, когда матрица $A(t)$ в правой части (13) не зависит от t, для отыскания фундаментальной системы решений $X_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$, могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{14}$$

находятся различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и для всякого корня λ (с учетом его кратности) определяется соответствующее ему частное решение $X^{(\lambda)}(t)$. Общее решение системы имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=1}^{s} C_k X^{(\lambda_k)}(t). \tag{15}$$

При этом возможны следующие случаи:

а) λ—действительный корень кратности 1. Тогда

$$X^{(\lambda)}(t) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} y_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ y_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $Y^{(\lambda)}$—собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ (т. е. $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}$, $Y^{(\lambda)} \neq O$),

Пример 10. Найти частное решение однородной системы

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2,$$
$$\dot{x}_3 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

удовлетворяющее условиям $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = -6$, $x_3(0) = 24$.

◀ Характеристическое уравнение (14) для этой системы имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Собственные векторы, например, таковы:

$$Y^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$X^{(\lambda_1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t, \quad X^{(\lambda_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad X^{(\lambda_3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Отсюда общее решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Для нахождения частного решения константы C_1, C_2, C_3 определяем из следующей системы:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 24 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1 + C_3 \\ -9C_1 + C_3 \\ 7C_1 + C_2 + 5C_3 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Окончательно для искомого частного решения получаем

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} e^{5t}. \ ▶$$

б) λ — комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения (14) является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $X^{(\lambda)}(t)$ и $X^{(\bar{\lambda})}(t)$ вида (15) следует взять действительные частные решения $X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ и $X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.

Пример 11. Найти общее решение системы

$$\dot{x}_1(t) = x_1 + x_2,$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_1 + 3x_2.$$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения собственного вектора, соответствующего корню $\lambda = 2+i$, получаем систему

$$\begin{aligned} (-1-i)\, y_1^{(\lambda)} + \qquad y_2^{(\lambda)} &= 0, \\ -2y_1^{(\lambda)} + (1-i)\, y_2^{(\lambda)} &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $y_1^{(\lambda)} = 1$, находим $y_2^{(\lambda)} = 1+i$, т. е.

$$Y^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}.$$

Отсюда пара действительных частных решений имеет следующий вид:

$$X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t}\right) = \begin{pmatrix} e^{2t}\sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Окончательно получаем общее решение

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix} e^{2t}. \ ▶$$

в) λ — корень кратности $r \geqslant 2$. Соответствующее этому корню решение системы (13) ищется в виде вектора

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \ldots + \alpha_1^{(r)} t^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \ldots + \alpha_2^{(r)} t^{r-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)} t + \ldots + \alpha_n^{(r)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \tag{16}$$

коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$, определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t в результате подстановки вектора (16) в исходную систему (13).

Пример 12. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1 + 6x_2. \end{aligned}$$

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 4$ кратности $r = 2$. Поэтому ищем решение системы в виде

$$X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Подставляем это выражение в исходную систему и сокращаем на e^{4t}:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 - 4\beta_2 \\ 4\beta_1 + 6\beta_2 \end{pmatrix} t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 &= 0, \\ -2\beta_2 - 4\beta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha_1 = C_1$ и $\beta_1 = C_2$, имеем $\beta_2 = -2C_2$ и $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X(t) = X^{(\lambda)}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -(2C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix} e^{4t}. \ ▶$$

Решить следующие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Там, где даны начальные условия, кроме общего решения, найти соответствующее частное решение:

3.32. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x + 3y.$

3.33. $\dot{x} = x + 3y, \quad \dot{y} = -x + 5y, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$

3.34. $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 7y, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

3.35. $\dot{x} = 2x - 5y, \quad \dot{y} = 5x - 6y.$

3.36. $\dot{x} = x - 4y, \quad \dot{y} = x - 3y.$

3.37. $\dot{x} = -x + 2y, \quad \dot{y} = -2x - 5y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

3.38. $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = x, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1.$

3.39. $\dot{x} = y + z, \quad \dot{y} = z + x, \quad \dot{z} = x + y,$
$x(0) = y(0) = 2, \quad z(0) = -1.$

3.40. $\dot{x} = x - 2y - z, \quad \dot{y} = -x + y + z, \quad \dot{z} = x - z.$

3.41. $\dot{x} = 5x + 2y - 3z, \quad \dot{y} = 4x + 5y - 4z,$
$\dot{z} = 6x + 4y - 4z.$

5. Линейные неоднородные системы. Нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t),\\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t),
\end{aligned} \tag{17}$$

где по крайней мере одна из функций $f_k(t)$ не равна тождественно нулю. В матричной форме система (17) имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) + F(t), \tag{18}$$

где $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))^{\mathrm{T}}$. Интегрирование системы (17) можно проводить методом исключения (см. пример 3), однако иногда предпочтительнее найти предварительно решение $X_0(t)$ соответствующей (18) однородной системы

$$\dot{X}(t) = A(t)\,X(t) \tag{19}$$

и какое-либо частное решение $\tilde{X}(t)$ системы (18). Тогда общее решение системы (18) имеет вид

$$X(t) = X_0(t) + \tilde{X}(t). \tag{20}$$

Если известна фундаментальная система $X_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, решений однородной системы (19), то общее решение $X(t)$ можно найти методом вариации произвольных постоянных. Именно, полагая

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\,X_k(t), \tag{21}$$

определяем функции $C_k(t)$ подстановкой (21) в систему (18). Учитывая при этом равенства

$$\dot{X}_k(t) - A(t)\,X_k(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

приходим к системе уравнений относительно $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{C}_k(t)\,X_k(t) = F(t). \tag{22}$$

Из этой системы находим $\dot{C}_k(t) = \varphi_k(t)$ и, интегрируя, получаем функции $C_k(t)$ с точностью до произвольных постоянных. Подставляя их в (21), получаем искомое общее решение неоднородной системы (18).

Пример 13. Зная фундаментальную систему решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

однородной системы

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 6x_1 + x_2,\\
\dot{x}_2 &= 5x_1 + 2x_2,
\end{aligned}$$

найти общее решение неоднородной системы

$$\dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t,$$
$$\dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1.$$

◀ Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Для величин $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$ составим систему вида (22)

$$\dot{C}_1(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + \dot{C}_2(t)\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}.$$

Найдя

$$\dot{C}_1(t) = \frac{5t+1}{6}e^{-7t}, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1-t}{6}e^{-t}$$

и проинтегрировав, получим

$$C_1(t) = -\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1, \quad C_2(t) = \frac{1}{6}te^{-t} + C_2.$$

Таким образом, общее решение системы запишется в виде

$$X(t) = \left(-\left(\frac{5}{42}t + \frac{2}{49}\right)e^{-7t} + C_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + \left(\frac{1}{6}te^{-t} + C_2\right)\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} =$$
$$= C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t} + C_2\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t} + \begin{pmatrix}-\frac{2}{7}t - \frac{2}{49}\\ \frac{5}{7}t - \frac{2}{49}\end{pmatrix}. \ ▶$$

Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ системы (17) постоянны, т. е. $a_{ij}(t) = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, а функции $f_i(t)$ имеют вид произведений

$$(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)\,e^{\alpha t}, \tag{23}$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены, то частное решение $\tilde{X}(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, записав $\tilde{X}(t)$ в виде, аналогичном (23), с учетом совпадения или несовпадения чисел $\alpha \pm i\beta$ с корнями характеристического уравнения.

Следует иметь в виду, что если k — наибольшая степень многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ в (23) и $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень кратности r характеристического уравнения, то частное решение $\tilde{X}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Re} t^{r-1}\begin{pmatrix}\gamma_{10}t^{k+1} + \gamma_{11}t^{k} + \ldots + \gamma_{1,k+1}\\ \gamma_{20}t^{k+1} + \gamma_{21}t^{k} + \ldots + \gamma_{2,k+1}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{n0}t^{k+1} + \gamma_{n1}t^{k} + \ldots + \gamma_{n,k+1}\end{pmatrix}e^{\lambda t}.$$

Пример 14. Найти частное решение системы

$$\dot{x}_1 = -x_2 + t^2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + e^t.$$

◀ Так как характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, ищем частное решение системы в виде суммы много-

члена второй степени и функции вида De^t:

$$x_1 = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t, \quad x_2 = A_2t^2 + B_2t + C_2 + D_2e^t.$$

Подставляя эти функции в заданную систему, получим равенства

$$2A_1t + B_1 + D_1e^t = -A_2t^2 - B_2t - C_2 - D_2e^t + t^2,$$
$$2A_2t + B_2 + D_2e^t = A_1t^2 + B_1t + C_1 + D_1e^t + e^t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и при e^t, получим систему

$$2A_1 = -B_2, \quad B_1 = -C_2, \quad D_1 = -D_2, \quad 1 - A_2 = 0,$$
$$2A_2 = B_1, \quad B_2 = C_1, \quad D_2 = D_1 + 1, \quad A_1 = 0.$$

Отсюда $A_1 = B_2 = C_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_1 = 2$, $C_2 = -2$, $D_2 = 1/2$, $D_1 = -1/2$, и искомое частное решение имеет вид

$$x_1 = 2t - \frac{1}{2}e^t,$$
$$x_2 = t^2 - 2 + \frac{1}{2}e^t. \blacktriangleright$$

Пример 15. Найти общее решение системы

$$\dot{X}(t) = AX(t) + F(t),$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix} e^{3t}$.

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = (\lambda - 3)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Общее решение однородной системы ищем в виде $X_0(t) = \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} e^{3t}$, подставив которое в однородную систему и сокращая на e^{3t} имеем

$$3\begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha t + \beta \\ \gamma t + \delta \end{pmatrix}.$$

Получаем систему

$$3(\alpha t + \beta) + \beta = 2(\alpha t + \beta) - (\gamma t + \delta),$$
$$3(\gamma t + \delta) + \delta = \alpha t + \beta + 4(\gamma t + \delta),$$

из которой следует два независимых соотношения $\alpha = -\gamma$ и $\beta + \alpha = -\delta$. Полагая $\alpha = C_1$ и $\beta = C_2$, имеем $\gamma = -C_1$ и $\delta = -C_1 - C_2$, т. е.

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} C_1t + C_2 \\ -C_1t - (C_1 + C_2) \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Так как $F(t)$ содержит множитель e^{3t}, причем $\lambda = 3$ — корень характеристического уравнения кратности 2, то ищем частное решение

в виде

$$\tilde{X}(t)=t\begin{pmatrix}A_1t^2+B_1t+D_1\\A_2t^2+B_2t+D_2\end{pmatrix}e^{3t}=\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}e^{3t}$$

$\left(\text{а не в виде } t^2\begin{pmatrix}A_1t+B_1\\A_2t+B_2\end{pmatrix}e^{3t}\right)$.

Подставив $\tilde{X}(t)$ в заданную систему и сократив на e^{3t}, получаем матричное равенство

$$3\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3A_1t^2+2B_1t+D_1\\3A_2t^2+2B_2t+D_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1t^3+B_1t^2+D_1t\\A_2t^3+B_2t^2+D_2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t+1\\2t\end{pmatrix},$$

которое можно записать в виде равенств

$$A_1t^3+B_1t^2+D_1t+3A_1t^2+2B_1t+D_1=-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+t+1,$$
$$-A_2t^3-B_2t^2-D_2t+3A_2t^2+2B_2t+D_2=A_1t^3+B_1t^2+D_1t+2t.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_1+A_2&=0,\qquad & A_1+A_2&=0,\\B_1+3A_1+B_2&=0,\qquad & B_1+B_2-3A_2&=0,\\D_1+2B_1+D_2&=1,\qquad & D_1+D_2-2B_2&=-2,\\D_1&=1,\qquad & D_2&=0.\end{aligned}$$

Находим $D_1=1$, $D_2=0$, $B_1=0$, $B_2=3/2$, $A_1=-1/2$, $A_2=1/2$. Следовательно,

$$\tilde{X}(t)=t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}t^2+1\\\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t\end{pmatrix}e^{3t},$$

и искомое общее решение запишется в виде

$$X(t)=X_0(t)+\tilde{X}(t)=\begin{pmatrix}C_1t+C_2-\frac{1}{2}t^3+t\\-C_1t-(C_1+C_2)+\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2\end{pmatrix}e^{3t}. \blacktriangleright$$

Найти решения следующих систем уравнений:

3.42. $\dot{x}=3x-2y+t,\quad \dot{y}=3x-4y.$

3.43. $\dot{x}=x-y,\quad \dot{y}=x+y+e^t.$

3.44. $\dot{x}=5x-3y+te^{3t},\quad \dot{y}=3x-y+e^{3t}.$

3.45. $\dot{x}=x+y-\cos t,\quad \dot{y}=-2x-y+\sin t+\cos t.$

3.46. $\dot{x}=y+\operatorname{tg}^2 t-1,\quad \dot{y}=-x+\operatorname{tg} t.$

3.47*. $\ddot{x}=2x+3y,\quad \ddot{y}=4x-2y.$

3.48*. Вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества A. Найти законы изменения количеств x и y веществ P и Q в зависимости от времени t, если через час после начала процесса разложения $x=\frac{a}{8}$, $y=\frac{3a}{8}$, где a — первоначальное количество вещества A.

3.49*. Материальная точка массы m притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к отрезку OA. Найти траекторию движения.

§ 4. Элементы теории устойчивости

1. Основные понятия. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями в точке t_0. Решение $X_0(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^{\top}$ системы (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всякого решения $X(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\top}$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t_0)-\varphi_i(t_0)|<\delta(\varepsilon), \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

для всех $t>t_0$ справедливы неравенства

$$|x_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Если же при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $X(t)$ неравенства (3) не выполняются, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым*.

Если решение $X_0(t)$ не только устойчиво, но, кроме того, при условии (2) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\infty} |x_i(t)-\varphi_i(t)|=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым*.

Пример 1. Исследовать на устойчивость решение дифференциального уравнения $\dot{x}=ax$ $(a\in\mathbb{R})$, определяемое начальным условием $x_0(t_0)=C_0$.

◀ Если $a\neq 0$, то решение имеет вид

$$x_0(t)=C_0e^{a(t-t_0)}.$$

Пусть $x(t)=Ce^{a(t-t_0)}$ — произвольное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $|C-C_0|<\delta=\varepsilon$. Тогда при $a<0$ получаем

$$|x(t)-x_0(t)|=\left|Ce^{-|a|(t-t_0)}-C_0e^{-|a|(t-t_0)}\right|=$$
$$=e^{-|a|(t-t_0)}|C-C_0|<\varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|\lim_{t\to\infty}e^{-|a|(t-t_0)}=0,$$

т. е. решение асимптотически устойчиво.

При $a>0$

$$|x(t)-x_0(t)|=e^{|a|(t-t_0)}|C-C_0|$$

может быть сколь угодно большим числом при достаточно больших t. Значит, при $a>0$ решение неустойчиво.

Если $a=0$, то решение имеет вид $x_0(t)=C_0$.

Для всякого решения $x(t)=C$ с условием $|C-C_0|<\delta=\varepsilon$ имеем

$$|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|<\varepsilon.$$

Но

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-x_0(t)|=|C-C_0|\neq 0,$$

а потому решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво. ▶

Исследование на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения — *точки покоя* некоторой системы, аналогичной системе (1).

Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений:

4.1. $\dot{x}=t(x-1)$, $x(0)=1$. **4.2.** $\dot{x}=t-1$, $x(0)=-1$.

4.3. $\dot{x}=x+y$, $\dot{y}=x-y$; $x(0)=y(0)=0$.

4.4. $\dot{x}=-2x-3y$, $\dot{y}=x+y$; $x(0)=y(0)=0$.

4.5. $\dot{x}=\alpha x-y$, $\dot{y}=\alpha y-z$, $\dot{z}=\alpha z-x$;
$x(0)=y(0)=z(0)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

4.6*. Написать систему дифференциальных уравнений, исследование на устойчивость точки покоя которой равносильно исследованию на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (1).

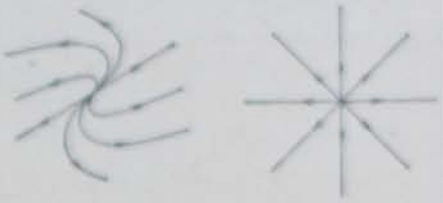
4.7. Сформулировать определения устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости для точки покоя системы дифференциальных уравнений.

4.8. Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

Таблица 4.1

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	*Устойчивый узел*	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	*Неустойчивый узел*	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	*Седло*	Неустойчива
Комплексные $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$	*Устойчивый фокус*	Асимптотически устойчива
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	*Неустойчивый фокус*	Неустойчива
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	*Центр*	Устойчива

Таблица 4.1 (продолжение)

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительный, кратности 2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$\lambda<0$	*Устойчивый узел*	Асимптотически устойчива
	$\lambda>0$	*Неустойчивый узел* 	Неустойчива

2. Простейшие типы точек покоя. Для исследования на устойчивость точки покоя системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a_{11}x+a_{12}y,\\ \dot{y}&=a_{21}x+a_{22}y,\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0, \tag{4}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\Delta=0$$

и найти его корни λ_1 и λ_2. В таблице 4.1 приведена классификация точек покоя системы (4) в зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.

Пример 2. Определить характер и исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-2x+\alpha y,\\ \dot{y}&=x+y\end{aligned}$$

в зависимости от параметра α.

◀ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & \alpha\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-(\alpha+2)=0$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9+4\alpha}$.

Исследуя поведение корней λ_1, λ_2 в зависимости от параметра α и используя данные таблицы 4.1, получаем:

если $\alpha < -9/4$ (корни комплексные, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$) — устойчивый фокус;

если $\alpha = -9/4$ (корни действительные и равные) — устойчивый узел;

если $-9/4 < \alpha < -2$ (корни действительные и отрицательные) — устойчивый узел;

если $-2 < \alpha$ (корни действительные и разных знаков) — седло, точка покоя неустойчива. ▶

Определить характер точек покоя следующих систем:

4.9. $\dot{x} = x + 2y, \quad \dot{y} = -3x + y.$

4.10. $\dot{x} = -2x + \frac{1}{3}y, \quad \dot{y} = -2x + \frac{1}{2}y.$

4.11. $\dot{x} = -x + 3y, \quad \dot{y} = -x + 2y.$

4.12. $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x - 2y.$

4.13. $\dot{x} = -6x - 5y, \quad \dot{y} = -2x - 5y.$

4.14. $\dot{x} = -x + 2y, \quad \dot{y} = -2x - 5y.$

Определить, при каких значениях параметра α точка покоя системы устойчива.

4.15. $\dot{x} = \alpha x - y, \quad \dot{y} = x + 2y.$

4.16. $\dot{x} = -3x + \alpha y, \quad \dot{y} = -\alpha x + y.$

4.17*. Исследовать на устойчивость уравнение упругих колебаний

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = 0$$

с учетом трения и сопротивления среды (при $\alpha > 0$).

4.18*. Пусть задана система n линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что если все корни характеристического уравнения этой системы имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Если же хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то точка покоя неустойчива.

Используя результат задачи 4.18, исследовать на устойчивость точку покоя каждой из следующих систем:

4.19. $\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = 3x + 2y, \quad \dot{z} = -x - y - z.$

4.20. $\dot{x} = -2x - y, \quad \dot{y} = x - 2y, \quad \dot{z} = x + 3y - z.$

3. Метод функций Ляпунова. Этот метод в применении к автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5}$$

где $f_i(0, \ldots, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, состоит в непосредственном исследовании устойчивости ее точки покоя при помощи подходящим образом подобранной *функции Ляпунова* $V(x_1, \ldots, x_n)$.

Верны следующие теоремы Ляпунова:

Теорема 1 (об устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, причем $V = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$;

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$,

то точка покоя системы (5) *устойчива.*

Теорема 2 (об асимптотической устойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат следующим условиям:*

а) $V(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *причем* $V = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$, *причем* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (5) *асимптотически устойчива.*

Теорема 3 (о неустойчивости). *Если существует дифференцируемая функция $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат условиям:*

а) $V(0, \ldots, 0) = 0$ *и сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых* $V(x_1, \ldots, x_n) > 0$;

б) $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, *причем* $\dfrac{dV}{dt} = 0$ *лишь при* $x_1 = \ldots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (5) *неустойчива.*

Пример 3. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -2y^3 - x. \end{aligned}$$

◀ В качестве функции Ляпунова возьмем $V = x^2 + y^2$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4),$$

и функция V вместе с $\dfrac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива. ▶

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = x(2 + \cos x),$$
$$\dot{y} = -y.$$

◀ Возьмем функцию $V(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда $\frac{dV}{dt} = 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} + y^2\right) > 0$ всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, вдоль прямой $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3, и точка покоя неустойчива. ▶

Общего метода построения функций Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде: $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, подбирая надлежащим образом постоянные $a > 0$ и $b > 0$.

Пример 5. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3,$$
$$\dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2.$$

◀ Функцию Ляпунова будем искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда имеем:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{y}{3} - 2x^2y^2\right) =$$
$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + (xy + 2x^2y^3)(3a - 2b).$$

Полагая $b = \frac{3}{2}a$, получим, что $\frac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leqslant 0$ при всяком $a > 0$. Из теоремы 2 вытекает, что точка покоя системы асимптотически устойчива. ▶

Исследовать на устойчивость точки покоя следующих систем:

4.21. $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

4.22. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

4.23. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4y$.

4.24. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

4.25. $\dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3$.

4.26. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2y$.

4. Устойчивость по первому приближению. Предположим, что правые части системы (5), т. е. функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

дифференцируемы в начале координат достаточное число раз. Разложим их по формуле Тейлора в окрестности начала координат:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$, а F_i — члены второго порядка малости относительно $x_1, \ldots, x_n$. Тогда исходная система (5) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + F_1(x_1 \ldots x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + F_n(x_1 \ldots x_n).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

называемую системой уравнений *первого приближения* для системы (5).

Справедливо следующее утверждение: если все корни характеристического уравнения системы (6) имеют отрицательные действительные части, то точка покоя системы (6), а также исходной системы (5) асимптотически устойчива; если хотя бы один из корней характеристического уравнения системы (6) имеет положительную действительную часть, то точка покоя системы (6) (и системы (5)) неустойчива.

Говорят, что в этих случаях возможно исследование системы (5) на *устойчивость по первому приближению*. В остальных случаях такое исследование, вообще говоря, невозможно, так как начинает сказываться влияние членов 2-го порядка малости.

Пример 6. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\dot{x} = 2x + 8\sin y,$$
$$\dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

◀ Разлагая функции $\sin y$, $\cos y$, e^x по формуле Тейлора и выделяя члены 1-го порядка малости, можем переписать исходную систему в виде

$$\dot{x} = 2x + 8y + F_1(x, y),$$
$$\dot{y} = -x - 3y + F_2(x, y),$$

где F_1, F_2 — члены 2-го порядка малости относительно x и y. Соответствующая система уравнений первого приближения вида (6) запишется следующим образом:

$$\dot{x} = 2x + 8y,$$
$$\dot{y} = -x - 3y.$$

Корни ее характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, точка покоя этой, а также исходной систем устойчива. ▶

Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя следующих систем дифференциальных уравнений:

4.27. $\dot{x}=\frac{1}{4}(e^x-1)-9y, \quad \dot{y}=\frac{1}{5}x-\sin y.$

4.28. $\dot{x}=5x+y\cos y, \quad \dot{y}=3x+2y-y^3e^y.$

4.29. $\dot{x}=7x+2\sin y, \quad \dot{y}=e^x-3y-1.$

4.30. $\dot{x}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin 2y, \quad \dot{y}=-y-2x.$

4.31. $\dot{x}=\ln(4y+e^{-3x}), \quad \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}.$

4.32. $\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x, \quad \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y.$

4.33. Показать, что исследование на устойчивость по первому приближению точки покоя системы

$$\dot{x}=-4y-x^3, \quad \dot{y}=3x-y^3$$

невозможно. Провести исследование методом функций Ляпунова.

§ 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Задача Коши. Задача нахождения частного решения $y=y(x)$ $(y(x_0)=y_0)$ дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, называемая задачей Коши, может быть приближенно решена численными методами.

Метод Эйлера. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ находят по формуле

$$y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k, y_k), \tag{1}$$

где $y_k=y(x_k)$, $x_{k+1}=x_k+h$ $(x_n=X)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, и $h=\frac{X-x_0}{n}$ (шаг). По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^2<\varepsilon$.

Метод Эйлера с итерациями. Для вычисления значений функции $y=y(x)$ применяют формулу

$$y_{k+1}^{(m)}=y_k+\frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k)+f\left(x_k, y_{k+1}^{(m-1)}\right)\right), \tag{2}$$

$$k=0, 1, \ldots, n-1, \qquad m=1, 2, \ldots, M,$$

где $y_{k+1}^{(0)}=y_{k+1}$ вычисляют по формуле (1). При каждом значении k вычисления продолжаются до выполнения неравенства

$$\left| y_{k+1}^{(m)}-y_{k+1}^{(m-1)} \right| < \varepsilon, \qquad (3)$$

где ε — заданная предельная абсолютная погрешность. После этого полагают $y_{k+1}=y_{k+1}^{(m)}$ и переходят к нахождению следующего значения y_{k+2} искомой функции. Если неравенство (3) не достигается, то уменьшают шаг h и выполняют все вычисления сначала. По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^3<\varepsilon$. Апостериорная оценка точности выполняется при помощи правила Рунге—Ромберга (см. ниже).

Пример 1. Решить методом Эйлера с итерациями задачу Коши на отрезке [0, 1] для уравнения $y'=2x-y$ с начальным условием $y=-1$ при $x=0$. Шаг выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство $h^3<0{,}01$.

◀ Исходя из неравенства $h^3<0{,}01$, выберем шаг вычислений $h=0{,}2$. Тогда $n=\frac{1-0}{0{,}2}=5$. Проводя вычисления с одним запасным знаком, находим по формуле (1) значение

$$y_1^{(0)}=-1+0{,}2\,(2\cdot 0-(-1))=-0{,}800.$$

Ведем итерационную обработку y_1 по формуле (2):

$$y_1^{(1)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0-(-1)+2\cdot 0{,}2-(-0{,}800))=-0{,}780,$$

$$y_1^{(2)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0-(-1)+2\cdot 0{,}2-(-0{,}780))=-0{,}782,$$

$$y_1^{(3)}=-1+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0-(-1)+2\cdot 0{,}2-(-0{,}782))=-0{,}782.$$

Получаем $y_1=-0{,}782$.

Вычисляем по формуле (1) значение $y_2^{(0)}$:

$$y_2^{(0)}=-0{,}782+0{,}2\,(2\cdot 0{,}2-(-0{,}782))=-0{,}546.$$

Проводим итерационную обработку:

$$y_2^{(1)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot 0{,}4-(-0{,}546))=-0{,}529,$$

$$y_2^{(2)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot 0{,}4-(-0{,}529))=-0{,}531,$$

$$y_2^{(3)}=-0{,}782+\frac{0{,}2}{2}\,(2\cdot 0{,}2-(-0{,}782)+2\cdot 0{,}4-(-0{,}531))=-0{,}531.$$

Получаем $y_2=-0{,}531$.

Аналогично вычисляя, находим $y_3=-0{,}253$, $y_4=0{,}047$, $y_5=0{,}366$. Округляя до сотых, получаем $y_0=-1{,}00$, $y_1=-0{,}78$, $y_2=-0{,}53$, $y_3=-0{,}25$, $y_4=0{,}05$, $y_5=0{,}37$. Найденные значения y_k совпадают с точностью до 0,01 со значениями частного решения $y=e^{-x}+2x-2$ в соответствующих точках отрезка [0, 1]. ▶

Метод Рунге—Кутта. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ последовательно находят по формулам

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k, \qquad k=0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где

$$\Delta y_k=\frac{1}{6}\left(q_1^{(k)}+2q_2^{(k)}+2q_3^{(k)}+q_4^{(k)}\right),$$

$$q_1^{(k)}=h\cdot f(x_k, y_k), \quad q_2^{(k)}=h\cdot f\left(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{q_1^{(k)}}{2}\right),$$

$$q_3^{(k)}=h\cdot f\left(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{q_2^{(k)}}{2}\right), \quad q_4^{(k)}=h\cdot f\left(x_{k+1}, y_k+q_3^{(k)}\right),$$

$$x_{k+1}=x_k+h \quad (x_n=X), \qquad h=\frac{X-x_0}{n}.$$

По заданной предельной абсолютной погрешности ε начальный шаг вычислений h устанавливают с помощью неравенства $h^4<\varepsilon$. Апостериорная оценка точности выполняется по правилу Рунге—Ромберга.

Правило Рунге—Ромберга. Пусть $y_k^{(h)}$ и $y_k^{(2h)}$ — значения искомой функции, полученные одним из указанных выше методов при шагах вычисления h и $2h$ соответственно, а ε — заданная абсолютная предельная погрешность. Тогда считается, что достигнута заданная точность вычислений, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{2^s-1}\cdot\left|y_{2k}^{(h)}-y_k^{(2h)}\right|<\varepsilon \tag{5}$$

при всех k и при $s=2, 3, 4$ соответственно для методов Эйлера, Эйлера с итерациями и Рунге—Кутта. Решением задачи является функция $\{y_k^{(h)}\}$.

Применяя указанное правило, последовательно вычисляют значения искомой функции с шагом $2h$ и с шагом h и сравнивают полученные результаты по формуле (5). Вычисления заканчивают, когда неравенство (5) выполняется при всех k.

Пример 2. Решить методом Рунге—Кутта с точностью до 0,001 задачу Коши на отрезке $[0, 0{,}6]$ для уравнения $y'=x+y$ с начальным условием $y=1$ при $x=0$.

◀ Исходя из неравенства $H^4<0{,}001$, выбираем начальный шаг вычислений $H=0{,}15$. Тогда $n=4$. Проводя вычисления с одним запасным знаком, находим y_1 по формулам (4):

$$y_1=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}\left(q_1^{(0)}+2q_2^{(0)}+2q_3^{(0)}+q_4^{(0)}\right),$$

где $q_1^{(0)}=0{,}1500$, $q_2^{(0)}=0{,}1725$, $q_3^{(0)}=0{,}1742$, $q_4^{(0)}=0{,}1986$. Имеем:

$$y_1=1+\frac{1}{6}(0{,}1500+2\cdot 0{,}1725+2\cdot 0{,}1742+0{,}1986)=1{,}1737.$$

Далее,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}\left(q_1^{(1)}+2q_2^{(1)}+2q_3^{(1)}+q_4^{(1)}\right),$$

где $q_1^{(1)}=0{,}1986$, $q_2^{(1)}=0{,}2247$, $q_3^{(1)}=0{,}2267$, $q_4^{(1)}=0{,}2551$. Следовательно,

$$y_2=1{,}1737+\frac{1}{6}(0{,}1986+2\cdot 0{,}2247+2\cdot 0{,}2267+0{,}2551)=1{,}3998.$$

Аналогично вычисляем $y_3=1{,}6867$ и $y_4=2{,}0443$.

Уменьшим шаг в два раза, т. е. выберем $h=0{,}075$, теперь $n=8$. Находим $y_1^{(h)}$ по формулам (4):

$$y_1^{(h)}=1+\Delta y_0=1+\frac{1}{6}(\bar{q}_1^{(0)}+2\bar{q}_2^{(0)}+2\bar{q}_3^{(0)}+\bar{q}_4^{(0)})=$$

$$=1+\frac{1}{6}(0{,}075+2\cdot 0{,}0806+2\cdot 0{,}0808+0{,}0867)=1{,}0808.$$

Аналогично находим остальные значения $y_k^{(h)}$.

Результаты вычислений помещаем в таблицу:

$y_k^{(2h)}$	$y_k^{(h)}$	$y_k^{(2h)}-y_k^{(h)}$
$y_0^{(2h)}=1$	$y_0^{(h)}=1$	0
	$y_1^{(h)}=1{,}0808$	
$y_1^{(2h)}=1{,}1737$	$y_2^{(h)}=1{,}1737$	0
	$y_3^{(h)}=1{,}2796$	
$y_2^{(2h)}=1{,}3998$	$y_4^{(h)}=1{,}3997$	0,0001
	$y_5^{(h)}=1{,}5350$	
$y_3^{(2h)}=1{,}6867$	$y_6^{(h)}=1{,}6866$	0,0001
	$y_7^{(h)}=1{,}8559$	
$y_4^{(2h)}=2{,}0443$	$y_8^{(h)}=2{,}0442$	0,0001

Очевидно, что левая часть неравенства (5) в данном случае не превосходит 0,00002. Поэтому $y_k^{(h)}$ с точностью до 0,00002 представляют искомую функцию, т. е. все найденные знаки верные. ▶

Метод Милна. Значения искомой функции $y=y(x)$ на отрезке $[x_0, X]$ последовательно находят по двум формулам:

$$\bar{y}_k=y_{k-4}+\frac{4h}{3}(2\cdot f(x_{k-3}, y_{k-3})-f(x_{k-2}, y_{k-2})+$$
$$+2\cdot f(x_{k-1}, y_{k-1})), \qquad (6)$$

$$y_k=y_{k-2}+\frac{h}{3}(f(x_{k-2}, y_{k-2})+4f(x_{k-1}, y_{k-1})+f(x_k, \bar{y}_k)),$$

$$k=4, 5, \ldots, n, \quad h=\frac{X-x_0}{n}, \quad x_k=x_{k-1}+h.$$

Первые четыре значения y_0, y_1, y_2, y_3 должны быть заданы, для чего y_1, y_2, y_3 предварительно находят каким-либо другим методом. Предельная абсолютная погрешность ε значения y_k приближенного решения определяется равенством

$$\varepsilon = \frac{1}{29} |\tilde{y}_k - y_k|. \tag{7}$$

Пример 3. Используя полученные в примере 2 методом Рунге—Кутта значения y_1, y_2, y_3, найти методом Милна значение y_4.

◀ Имеем $y_0 = 1{,}0000$; $y_1 = 1{,}0808$, $y_2 = 1{,}1737$, $y_3 = 1{,}2796$ и $h = 0{,}075$. Вычисляя $\tilde{y}_4$ и y_4 по формулам (6), получаем:

$$\tilde{y}_4 = 1 + \frac{4 \cdot 0{,}075}{3} (2\,(0{,}075 + 1{,}0808) - (0{,}15 + 1{,}1737) + 2\,(0{,}225 + 1{,}2796)) = 1{,}3997,$$

$$y_4 = 1{,}1737 + \frac{0{,}075}{3} ((0{,}15 + 1{,}1737) + 4\,(0{,}225 + 1{,}2796) + (0{,}3 + 1{,}3997)) = 1{,}3997.$$

Поскольку $\tilde{y}_4 - y_4 = 0$, из формулы (7) заключаем, что в значении y_4 все знаки верные. ▶

В задачах 5.1—5.19 требуется найти с точностью до 0,0001 решение дифференциального уравнения 1-го порядка с указанными начальными условиями на заданном отрезке:

а) методом Эйлера с итерациями,
б) методом Рунге—Кутта,
в) методом Милна.

5.1. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.2. $y' - 2y = 3e^x$, $y(0{,}3) = 1{,}415$, $[0{,}3,\ 0{,}6]$.

5.3. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $[0,\ 0{,}3]$.

5.4. $y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1$, $[1,\ 2]$.

5.5. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}27$, $[0,\ 1]$.

5.6. $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0{,}5$, $[0,\ 1]$.

5.7. $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0{,}1$, $[0,\ 1]$.

5.8. $y' = (2y - x)/y$, $y(1) = 2$, $[1,\ 2]$.

5.9. $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$, $y(0) = 0$, $[0,\ 1]$.

5.10. $y' + y = x^3$, $y(1) = -1$, $[1,\ 2]$.

5.11. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, $[0,\ 0{,}1]$.

5.12. $y' = 2xy + x^2$, $y(0) = 0$, $[0,\ 0{,}5]$.

5.13. $y' = x + \sin\frac{y}{3}$, $y(0) = 1$, $[0,\ 2]$.

5.14. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $[0,\ 0{,}4]$.

5.15. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $[0, 0{,}1]$.

5.16. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0{,}5$, $[0, 0{,}5]$.

5.17. $y' = xy^2 - y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.18. $y' = y^2 \cdot e^x - 2y$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$.

5.19. $y' = \frac{1}{y^2 - x}$, $y(1) = 0$, $[1, 2]$.

В задачах 5.20—5.22 составить на фортране подпрограммы решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ указанными методами.

5.20. Метод Эйлера с итерациями. Параметры: F, X0, Y0, H, N, Y, где F — имя подпрограммы-функции для вычисления значений функции $f(x, y)$, X0 — начальное значение аргумента, Y0 — начальное значение функции, H — шаг вычислений, N — число значений искомой функции $y = y(x)$, Y — массив размера N значений функции $y = y(x)$.

5.21. Метод Рунге—Кутта. Параметры: F, X0, Y0, H, N, Y, EPS, где H — начальный шаг вычислений, EPS — заданная предельная абсолютная погрешность, входной параметр; остальные параметры, как в задаче 5.20.

5.22. Метод Милна. Параметры: F, X0, H, N, Y, EPS, где EPS — полученная при вычислениях предельная абсолютная погрешность, выходной параметр, N — число значений искомой функции, включая начальное. Остальные параметры, как в задаче 5.20. Первые четыре элемента массива Y должны быть определены перед обращением к подпрограмме.

В задачах 5.23—5.25 составить на фортране программу решения одной из задач 5.1—5.19, используя для этого одну из указанных подпрограмм.

5.23. Подпрограмма, полученная в задаче 5.20.

5.24. Подпрограмма, полученная в задаче 5.21.

5.25. Подпрограмма, полученная в задаче 5.22.

Рассмотренные выше методы могут быть использованы при решении задачи Коши для нормальной системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка и для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пример 4. Методом Эйлера с итерациями решить задачу Коши на отрезке [3, 4] с точностью до 0,01 для уравнения

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1$$

при начальных условиях $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$.

◀ Исходя из неравенства $h^3 < 0{,}01$, выберем шаг вычислений $h = 0{,}2$. Тогда $n = \frac{4-3}{0{,}2} = 5$.

Приводим уравнение 2-го порядка к системе двух уравнений 1-го порядка, введя новую функцию $p = y'$:

$$p' = -\frac{p}{x} + \frac{y^2}{x} + 1 = f(x, y, p),$$

$$y' = p = \varphi(x, y, p).$$

Начальные условия для данной системы: $y = 6$, $p = 3$ при $x = 3$.

Сохраняя один запасной знак, вычислим значения функций $p = p(x)$ и $y = y(x)$ в точках $x_1 = 3{,}2$, $x_2 = 3{,}4$, $x_3 = 3{,}6$, $x_4 = 3{,}8$, $x_5 = 4$ по формулам (1) и (2).

При $x_1 = 3{,}2$ имеем:

$$p_1^{(0)} = p_0 + h \cdot f(x_0, y_0, p_0) = 3 + 0{,}2\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(0)} = y_0 + h \cdot \varphi(x_0, y_0, p_0) = y_0 + h \cdot p_0 = 6 + 0{,}2 \cdot 3 = 6{,}600,$$

$$p_1^{(1)} = p_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0, p_0) + f(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= 3 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3}{3} + \frac{6}{3^2} + 1\right) + \left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}600}{3{,}2^2} + 1\right)\right) = 3{,}133,$$

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_0, y_0, p_0) + \varphi(x_1, y_1^{(0)}, p_1^{(0)})\right) =$$

$$= y_0 + \frac{h}{2}(p_0 + p_1^{(0)}) = 6 + 0{,}1\,(3 + 3{,}133) = 6{,}613.$$

Получаем значения $p_1 = 3{,}133$ и $y_1 = 6{,}613$.

При $x_2 = 3{,}4$ имеем:

$$p_2^{(0)} = p_1 + h \cdot f(x_1, y_1, p_1) = 3{,}133 + 0{,}2\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(0)} = y_1 + h \cdot \varphi(x_1, y_1, p_1) = y_1 + h \cdot p_1 = 6{,}613 + 0{,}2 \cdot 3{,}133 = 7{,}240,$$

$$p_2^{(1)} = p_1 + \frac{h}{2}\left(f(x_1, y_1, p_1) + f(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= 3{,}133 + 0{,}1\left(\left(-\frac{3{,}133}{3{,}2} + \frac{6{,}613}{3{,}2^2} + 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{3{,}266}{3{,}4} + \frac{7{,}240}{3{,}4^2} + 1\right)\right) = 3{,}266,$$

$$y_2^{(1)} = y_1 + \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1, y_1, p_1) + \varphi(x_2, y_2^{(0)}, p_2^{(0)})\right) =$$

$$= y_1 + \frac{h}{2}(p_1 + p_1^{(0)}) = 6{,}613 + 0{,}1\,(3{,}133 + 3{,}266) = 7{,}253.$$

Отсюда получаем значения $p_2 = 3{,}266$ и $y_2 = 7{,}253$.

Проведя аналогичные вычисления при $x_2=3{,}6$, $x_4=3{,}8$ и $x_5=4$, находим

$$p_3=3{,}399 \qquad y_3=7{,}920,$$
$$p_4=3{,}532, \qquad y_4=8{,}613,$$
$$p_5=3{,}665, \qquad y_5=9{,}333.$$

Округляя до сотых, получаем ответ: $y_0=6{,}00$, $y_1=6{,}61$, $y_2=7{,}25$, $y_3=7{,}92$, $y_4=8{,}61$, $y_5=9{,}33$. ▶

В задачах 5.26—5.31 требуется найти решение системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка или решение дифференциального уравнения 2-го порядка с точностью до 0,001 при указанных начальных условиях на данном отрезке:

5.26. $y'=\frac{z}{x}$, $z'=\frac{2z^2}{x(y-1)}+\frac{z}{x}$, $y(1)=0$, $z(1)=\frac{1}{3}$, $[1,\ 2]$.

5.27. $y'=(z-y)x$, $z'=(z+y)x$, $y(0)=1$, $z(0)=1$, $[0,\ 1]$.

5.28. $y'=\cos(y+2z)+2$, $z'=\frac{2}{x+2y^2}+x+1$, $y(0)=-1$, $z(0)=0{,}05$, $[0,\ 0{,}3]$.

5.29. $y'=e^{-(y^2+z^2)}+2x$, $z'=2y^2+z$, $y(0)=0{,}5$, $z(0)=1$, $[0,\ 0{,}3]$.

5.30. $y''-y=e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0{,}5$, $[0,\ 1]$.

5.31. $y''-2y'=x^2-1$, $y(1)=-\frac{1}{6}$, $y'(1)=-\frac{3}{4}$, $[1,\ 2]$.

5.32. Составить на фортране подпрограмму решения методом Рунге—Кутта системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y'=f(x,\ y,\ z),$$
$$z'=\varphi(x,\ y,\ z)$$

с начальными условиями $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$ на отрезке $[x_0,\ X]$. Параметры F, FI, X0 Y0, H, N, Y, Z, EPS, где F и FI — имена подпрограмм-функций для вычисления значений функций $f(x,\ y,\ z)$ и $\varphi(x,\ y,\ z)$, X0 — начальное значение аргумента $x=x_0$, Y0 — начальное значение функции, H — начальный шаг вычислений, N — число значений искомых функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$, Y и Z — массивы размера N значений функций $y=y(x)$ и $z=z(x)$, EPS — заданная предельная абсолютная погрешность.

5.33. Используя подпрограмму, полученную при решении задачи 5.32, составить на фортране программу решения одной из задач 5.26—5.31.

2. Краевая задача для линейного уравнения. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x),$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — некоторые непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, состоит в нахождении его решения $y = y(x)$, удовлетворяющего граничным условиям

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

где α_0, α_1, β_0, β_1, A, B — постоянные и $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Эта задача может быть решена численно методом конечных разностей, применяя который значения функции $y = y(x)$ находят из системы линейных уравнений $(n+1)$-го порядка вида:

$$\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p(x_k)\,\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + q(x_k)\,y_k = f(x_k), \qquad (8)$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right).$$
$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$$

с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, \ldots y_n$.

Пример 5. Решить краевую задачу для дифференциального уравнения

$$y'' + x^2 y + 2 = 0$$

с граничными условиями $y(-1) = 0$, $y(1) = 0$ на отрезке $[-1, 1]$ методом конечных разностей, разбив этот отрезок на четыре равные части.

◀ Имеем: $n = 4$, $h = 0{,}5$, $y_0 = 0$, $y_4 = 0$. Следовательно, требуется вычислить три значения $y_1 = y(-0{,}5)$, $y_2 = y(0)$, $y_3 = y(0{,}5)$. Составляем систему (8), полагая поочередно $k = 0, 1, 2$:

$k = 0$:

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + x_1^2 y_1 + 2 = 0, \text{ или } 4(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{1}{4}\,y_1 = -2;$$

$k = 1$:

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + x_2^2 y_2 + 2 = 0, \text{ или } 4(y_3 - 2y_2 + y_1) = -2;$$

$k = 2$:

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + x_3^2 y_3 + 2 = 0, \text{ или } 4(y_4 - 2y_3 + y_2) + \frac{1}{4}\,y_3 = -2.$$

Добавляя граничные условия, получаем следующую систему пяти уравнений относительно пяти неизвестных y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{aligned} 16y_0-31y_1+16y_2 \qquad\qquad &= -8, \\ 2y_1-4y_2+2y_3 \qquad &= -1, \\ 16y_2-31y_3+16y_4 &= -8, \\ y_0 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\ y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим $y_0=0$, $y_1=0{,}8$, $y_2=1{,}05$, $y_3=0{,}8$, $y_4=0$. ▶

В задачах 5.34—5.39 требуется найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка с указанными граничными условиями методом конечных разностей, разбив заданный отрезок на n равных частей.

5.34. $x^2y''-xy'=3x^3$; $y(1)=2$, $y(2)=9$, $[1,\ 2]$, $n=4$.

5.35. $x^2y''+xy'-y=x^2$; $y(1)=1{,}333$, $y'(3)=3$, $[1,\ 3]$, $n=7$.

5.36. $y''+xy'+y=2x$; $y(0)=1$, $y(1)=0$, $[0,\ 1]$, $n=10$.

5.37. $y''+y\operatorname{ch}x=0$; $y(0)=0$, $y(2{,}2)=1$, $[0,\ 2{,}2]$, $n=11$.

5.38. $y''+(x-1)y'+3{,}125y=4x$, $y(0)=1$, $y(1)=1{,}368$, $[0,\ 1]$, $n=10$.

5.39. $x^2y''-2y=0$, $y(1)-2y'(1)=0$, $y(2)=4{,}5$, $[1,\ 2]$, $n=5$.

5.40. Используя подпрограмму решения линейной системы алгебраических уравнений, полученную в задаче 5.16 гл. 4, составить на фортране программу решения одной из задач 5.34—5.39.

ОТВЕТЫ

1.4. $y(\ln|1-x^2|+1)=1$. **1.5.** $y(1+x)=1$. **1.6.** $y=2-3\cos x$. **1.7.** $f(x,y)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ — max, $\frac{\partial f}{\partial x}>0$ — min. **1.8.** $\frac{\partial f}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$; а) $y+x^3+3x^2=0$; б) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})-\ln 2$. **1.9.** $x^2+y=xy'$. **1.10.** $xy'+y=0$. **1.11.** $y'=y\operatorname{th}x$. **1.12.** $2xyy'=x^2+y^2$. **1.13.** $yy'=x$. **1.14.** $xy'+2y=0$. **1.15.** $y'=\frac{1}{4ky^2}$. **1.22.** $\operatorname{arctg}y-\arcsin x=C$; $x=\pm 1$. **1.23.** $e^x+e^{-y}=C$. **1.24.** $y\sin y+\cos y-x\cos x+\sin x=C$. **1.25.** $\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=C$. **1.26.** $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x=\pm 1$. **1.27.** $y=C\sqrt{1+e^{2x}}$. **1.28.** $(1+e^x)^2\operatorname{tg}y=C$. **1.29.** $e^x-\frac{1}{2}e^{2y}-2\ln|1+y|-\frac{(y-1)^2}{2}=C$,

$y=-1$. 1.30. $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}-x=C$. 1.31. $4x+2y+1=Ce^{2y}$.

1.32. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}(4x+y+1)-x=C$. 1.33. $x^2-y^2=1$.

1.34. $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$. 1.35. $y=\sin x$. 1.36. $y=\pm x\sqrt{2\ln|x|+C}$.

1.37. $y=2x\operatorname{arctg}Cx$. 1.38. $x^2-2xy-y^2=C$. 1.39. $\arcsin\frac{y}{x}-$ $-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2}-\ln|x|=C$. 1.40. $xe^{y/x}=C$. 1.41. x^2-xy+ $+y^2+x-y=C$. 1.42. $x+y-1=C(y+2)^2$. 1.43. $x+2y+$ $+3\ln|x+y-2|=C$. 1.44. $y=xe^{1-x}$. 1.45. $\ln|y|+2\sqrt{\frac{x}{y}}=2$.

1.46. $y=\frac{1}{2}(x^2-1)$. 1.47. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. 1.48. $y=(x+C)(1+x^2)$.

1.49. $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$. 1.50. $y=x\ln x+\frac{C}{x}$. 1.51. $y=(x+1)^2(e^x+C)$.

1.52. $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$. • Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^3}{y}$; оно линейно относительно x и $\frac{dx}{dy}$. 1.53. $x=\operatorname{arctg}y-1+Ce^{-\operatorname{arctg}y}$.

1.54. $\sin y=Ce^{-x}+x-1$. • Положить $\sin y=z$. 1.55. $y=\sin x$.

1.56. $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. 1.57. $x=y\ln y+\frac{1}{y}$. 1.58. $y=$ $=e^{-2x^2}\left(C+\frac{1}{2}x^2\right)^2$. 1.59. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+C}}$. 1.60. $x^2=Ce^{\sin y}-$ $-2(\sin y+1)$. • Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+\sin 2y}{2x}$.

1.61. $y^3=1/(3-2e^{\cos x})$. 1.62. $x^2=1/(y+3y^2)$. 1.63. $x^2+xy+y^2=C$.
1.64. $5x^2y-8xy+x+3y=C$. 1.65. $x^2+ye^{x/y}=C$. 1.66. $x^2\cos^2 y+y^2=C$.

1.67. Вся плоскость Oxy. 1.68. $y\neq x$. 1.69. $y\neq\frac{2n+1}{2}\pi$. 1.70. $x>y^2$.

1.71. $y=0$. 1.72. $y=1$. 1.73. $y=-x$. 1.74. $y=x^2/4$. 1.75. $x=2p+$ $+6p^2+C$, $y=p^2+4p^3$; $y=0$ (особое решение). 1.76. $x=2\sqrt{p^2+1}-$ $-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln p+C$, $y=p\sqrt{1+p^2}$; $y=0$ (особое решение).

1.77. $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$. 1.78. $y=Cx+\frac{1}{2}(C^2-x^2)$, $y=-x^2$ (особое решение). 1.79. $x=p^3-p+2$, $y=\frac{3}{4}p^4-\frac{p^2}{2}+C$. 1.80. $x=$ $=p\cos p$, $y=p^2\cos p-p\sin p-\cos p+C$. 1.81. $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. 1.82. $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$ (особое решение).

1.83. $y=\frac{1}{2}Cx^2+\frac{1}{2C}$, $y=\pm x$ (особые решения). 1.84. $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2}{p^3}$,

$y=\frac{2C}{p}-\frac{3}{p^2}$. **1.85.** $x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-p)^2}$, $y=-\frac{1}{2}p^2+\frac{Cp^2}{(1-p)^2}$; $y=0$, $y=x+1$ (особые решения). **1.86.** $x=Cp-\ln p-2$, $y=\frac{1}{2}Cp^2-p$. **1.87.** $y=Cx-\frac{1}{C}$, $y^2=-4x$ (особое решение). **1.88.** $y=Cx+C+\sqrt{C}$, $y=-\frac{1}{4(x+1)}$ (особое решение). **1.89.** $y=Cx-e^C$, $y=x(\ln x-1)$ (особое решение). **1.90.** $y=Cx+\cos C$, $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ (особое решение). **1.91.** Линейное; $y=uv$. **1.92.** Однородное; $y=ux$. **1.93.** С разделяющимися переменными. **1.94.** Уравнение Бернулли; $y=uv$. **1.95.** Линейное относительно x; $x=uv$. **1.96.** Уравнение в полных дифференциалах. **1.97.** Однородное; $x=uy$. **1.98.** Уравнение Бернулли относительно x; $x=uv$. **1.99.** Приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными; $u=y-x$. **1.100.** Линейное; $y=uv$. **1.101.** Уравнение Бернулли; $y=uv$. **1.102.** $y=x^2-2+Ce^{-x^2/2}$. **1.103.** $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$, $y=0$ (особое решение). **1.104.** $\frac{1}{2}x^2\cos 2y+x=C$. **1.105.** $y=\frac{1}{(x+C)\cos x}$. **1.106.** $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$. **1.107.** $x=\frac{1}{2}y^2+Cy^3$. **1.108.** $\ln|x|+e^{x/y}=C$, $x=0$ (особое решение). **1.109.** $1+y^2=C(1-x^2)$. **1.110.** $x^4-x^2y^2+y^4=C$. **1.111.** $y=1/(1+\ln x+Cx)$. **1.112.** $(3x+2y-1)(x-1)=C$. **1.113.** $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C$. **1.114.** $2y\cos x+\cos 2x=C$. **1.115.** $x^2+x\ln y-\cos y=C$. **1.116.** $y=Cx-\ln C$, $y=1+\ln x$ (особое решение). **1.117.** $x=1/(Ce^{-y^2/2}+2-y^2)$. **1.118.** $\ln|x|-\cos\frac{y}{x}=C$. **1.119.** $x\sqrt{1+y^2}-\sin y=C$. • Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}x=\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$. **1.120.** $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$. **1.121.** $y=\left(\frac{C+\ln|\sin x|}{x}-\operatorname{ctg}x\right)^2$. **1.122.** $y=C^2+Cx-\frac{x^2}{4}$, $y=-\frac{x^2}{2}$ (особое решение). **1.123.** $(x+y^3)^3=C(y^3-x)$. • Положить $y=z^{1/3}$. **1.124.** $y=\pm\ln|x^2-1|$. **1.125.** 1) $y^2=4x$, 2) $xy^2=4$. **1.126.** $y=\pm\frac{x}{x-1}$. **1.127.** $(x+C)^2+y^2=a^2$. **1.128.** $y^2=\pm 2a(x+C)$. **1.129.** $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$. **1.130.** $y^2=x^2/(x^2+3)$. **1.131.** $y^2=6x+9$. **1.132.** 1) $y^2=4(x-1)$, 2) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$. **1.133.** $y^2=\frac{2}{3}x$. **1.134.** $r=2e^{\varphi/a}$. **1.135.** $x^2+y^2=2y$. **1.136.** $x=y(3\mp\ln y)$. **1.137.** $y^2=2x+1-e^{2x}$. **1.138.** $y=\frac{1}{x}-x^2$. **1.139.** $x=\pm\left(\frac{1}{y}-y\right)$. **1.140.** $y=x\sqrt{5x^2-1}$. **1.141.** $r=\varphi+\frac{\pi}{2}$. **1.142.** $2x^2+3y^2=C^2$. **1.143.** $x^2+2y^2=C^2$. **1.144.** $y=C/x^2$. **1.145.** $x+y^2=C$. **1.146.** $T=a+(T_0-a)e^{-kt}$. **1.147.** Через 40 мин. **1.148.** $\omega=5\cdot(3/5)^{t/120}$ (об/с), через 6 мин 18 с. • Уравнение имеет

вид $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$. **1.149.** Через 1575 лет. **1.150.** За 6 мин 5 с. ● Уравнение имеет вид $wv(h)\,dt=-S(h)\,dh$, где w — площадь отверстия, $v(h)$ — скорость истечения воды, h — уровень жидкости, $S(h)$ — площадь поперечного сечения сосуда, t — время. **1.151.** 0,0878. ● Уравнение имеет вид $dQ=-kQdh$. **1.152.** ≈ 50 с; ≈ 15 м. **1.153.** $t\approx 0{,}0011$ с. ● Уравнение имеет вид $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. **1.154.** 0,5кг. **1.155.** а) 56,5 г; б) 7,84 ч. **1.156.** 0,06%. ● Уравнение имеет вид $(0{,}01x-0{,}0004)\,1500\,dt=-10800\cdot 0{,}01\,dx$, где x — содержание углекислоты (в %) в воздухе в момент времени t. **1.157.** $i=$

$$=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

2.1. $y'<x^2$. **2.2.** $y'>0$. **2.9.** $y''=0$. **2.10.** $\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=R^2$. **2.11.** $y''+y=0$. **2.12.** $y'''=0$. **2.13.** $y=(C_1+\operatorname{arctg}x)\,x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$. **2.14.** $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$. **2.15.** $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{x}{C_1}+C_2$, $y=$ $=\frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{x-C_1}{x+C_1}\right|+C_2$, $y=C-\frac{1}{x}$. **2.16.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-$ $-C_1x+C_2$. $2y=k\pi x^2+C$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **2.17.** $y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\left(x-\frac{1}{C_1}\right)+C_2$, $y=\frac{ex^2}{2}+C$. **2.18.** $y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+$ $+C_2$. **2.19.** $y=C_1(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)+x^2+C_2$, $y=$ $=C_1(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x^2+C_2$. **2.20.** $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. **2.21.** $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)\,x^2+C_2x+C_3$. **2.22.** $2y=C_1x^2-2C_1^2(x+C_1)\times$ $\times\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$. **2.23.** $y=C_3-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x$, $y=$ $=C_1x+C_2$. **2.24.** $x=2C_1p-\ln|p|+C_2$, $y=C_1p^2-p$; $y=Ce^{-x}$; $y=C$. **2.25.** $x=\pm\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$. **2.26.** $\frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2+1}=$ $=C_2\pm x$. **2.27.** $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$, $C_1^2y-1=\sin(C_1x+C_2)$, $2y=(x+C)^2$, $y=0$. **2.28.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\frac{\ln y-C_1}{\ln y+C_1}\right|=$ $=2C_1x+C_2$, $(C-x)\ln y=1$, $y=C$. **2.29.** $\operatorname{ctg}y=C_2+C_1x$. **2.30.** $y=1+\frac{1}{C_1x+C_2}$. **2.31.** $y=\frac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. **2.32.** $y^2=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. **2.33.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$. **2.34.** $y=C_2\times$ $\times\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$. **2.35.** $y=C_2xe^{-C_1/x}$. ● Уравнение однородно относительно y, y', y''. **2.36.** $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{3/2}}$. **2.37.** $y^2=C_1x^3+C_2$. **2.38.** $y=\frac{C_2}{\cos^2(x+C_1)}$. **2.39.** $y=(x-2)e^x+x+3$. **2.40.** $y=-\frac{x}{2}\ln^2x+$

$+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$. **2.41.** $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. **2.42.** $y=2\ln|x+1|-$ $-x+1$. **2.43.** $y=-\ln|x-1|$. **2.44.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|=2(x+1)$. **2.45.** $y=\operatorname{tg}x$, $-\pi/2<x<\pi/2$. **2.46.** $y=e^{x^2/2}$. **2.47.** $(3-x)y^5=$ $=8(x+2)$. **2.48.** $y=1+\sin x$. **2.49.** $y=1-e^x$, $y=-1+e^{-x}$. **2.50.** $y=1-x$. **2.51.** $x=C_1e^p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **2.52.** $x=\frac{\ln|t|}{2}+\frac{3}{4t^2}+C_1$, $y=\frac{t}{4}+\frac{3}{4t^3}+C_2$. **2.53.** $x=(p+1)e^p+C_1$, $y=p^2e^p+C_2$. **2.54.** $x=3C_1p^2+\ln|p|+C_2$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **2.55.** $y=\pm\ln\cos x$. **2.56.** а) $y=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$ при $y''>0$; б) $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$ при $y''<0$. **2.57.** а) $4(C_1y-1)=C_1^3(x+C_2)^2$ при $y''>0$; б) $x=\frac{C_1}{2}(t-\sin t)+C_2$, $y=\frac{C_1}{2}(1-\cos t)$ при $y''<0$. • $\int\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}\,dy$ вычислить с помощью подстановки $y=C_1\sin^2\frac{t}{2}$. **2.58.** $y=\frac{H}{q}\operatorname{ch}\left(\frac{q}{H}x\right)$. **2.59.** $e^{y/a}=\frac{1}{\cos x/a}$, где $a=\frac{k}{q}$. **2.60.** $v=\sqrt{\frac{p}{k}}\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$, $x=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{kp}}{m}t\right)$. **2.61.** 1,89 с, 16,6 м/с. • Использовать ответы к задаче 2.60, положив $P=mg$. **2.62.** Время подъема $T_п=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{g}}\operatorname{arctg}\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}$; высота подъема $h_{max}=\frac{m}{2k^2}\ln\left(1+\frac{k^2v_0^2}{mg}\right)$; скорость спуска $V_{сп}=v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+k^2v_0^2}}$; время спуска $T_{сп}=\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{m}{g}}\ln\frac{\sqrt{mg}+kV_{сп}}{\sqrt{mg}-kV_{сп}}$. **2.63.** 1,75 с; 16,3 м/с. • Использовать ответы к задаче 2.62. **2.64.** $x=$ $=\sqrt{x_0^2+\frac{k}{mx_0^2}t^2}$. **2.65.** $x=\sqrt{x_0^2-\frac{k^2}{x_0^2}t^2}$, $T=\frac{x_0^2}{k}$. **2.66.** $x=$ $=-\frac{gt^2}{2}+u_0\int\limits_0^t\ln\frac{\varphi(0)}{\varphi(t)}\,dt$; $x=-\frac{gt^2}{2}+\frac{u_0}{\alpha}((1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t)$, $x(10)=0{,}54$ км, $x(30)=5{,}65$ км, $x(50)=18{,}44$ км. **2.67.** $\sqrt{\frac{H}{2gR^2}}\left(\sqrt{R(H-R)}+\frac{H}{2}\arcsin\left(1-\frac{2R}{H}\right)+\frac{\pi H}{4}\right)$. **2.68.** ≈ 116 ч. • Использовать ответ к задаче 2.67. **2.69.** $\approx 11{,}18$ км/с. **2.70.** $y=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{1+k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}-\frac{1}{1-k}\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k}\right)+\frac{ka}{1-k^2}$, где $k=\frac{v}{u}<1$. **2.71.** $EIy=\frac{q}{4}\left(\frac{l^2x^2}{4}-\frac{x^4}{6}-\frac{5l^4}{96}\right)$, $EIy_{max}=-\frac{5l^4q}{384}$.

• $EIy'' = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)$, где E — модуль упругости (модуль Юнга), I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. 2.72. $EIy = \left(\frac{Pl^2}{2} + \frac{ql^3}{6}\right)x - \frac{Px^3}{6} - \frac{qx^4}{24} - \frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}$, $EIy_{max} = -\frac{Pl^3}{3} - \frac{ql^4}{8}$. • $EIy'' = -Px - \frac{qx^2}{2}$, где E — модуль упругости (модуль Юнга), I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. 2.73. $P = \frac{3}{8}ql$. • $EIy'' = P(l-x) - \frac{q(l-x)^2}{2}$, $EIy = \frac{P(l-x)^3}{6} - \frac{q(l-x)^4}{24} + \left(\frac{Pl^2}{2} - \frac{ql^3}{6}\right)x - \frac{Pl^3}{6} + \frac{ql^4}{24}$, где E — модуль упругости (модуль Юнга), I — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Ox. 2.75. $y = C_1e^{3x} + C_2e^x$. 2.76. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$. 2.77. $y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}$. 2.78. $y = C_1\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 1\right) + C_2x$. 2.79. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}$. 2.80. Линейно независима. 2.81. Линейно зависима. 2.82. Линейно независима. 2.83. Линейно зависима. 2.84. Линейно независима. 2.85. Линейно независима. 2.86. Линейно независима. 2.87. Линейно зависима. 2.88. Линейно зависима. 2.89. Линейно независима. 2.90. $y'' + y' = 0$. 2.91. $y'' - 4y' + 5y = 0$. 2.92. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. 2.93. $y''' - y'' = 0$. 2.94. $y''' + y' = 0$. 2.95. $y''' - y'' = 0$. 2.96. $y'' - 8y' + 15y = 0$. 2.97. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$. 2.98. ◀ Из равенства $W(x_0) = 0$ следует, что однородная система линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} &\alpha_1y_1(x_0) + \alpha_2y_2(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n(x_0) = 0, \\ &\alpha_1y_1'(x_0) + \alpha_2y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

имеет такое решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$, что не все α_i^* равны нулю. Функция $y(x) = \alpha_1^*y_1(x) + \alpha_2^*y_2(x) + \ldots + \alpha_n^*y_n(x)$ является решением данного линейного однородного уравнения и, как это следует из равенств (*), удовлетворяет начальным условиям $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Но таким же начальным условиям удовлетворяет и функция $y \equiv 0$, тоже являющаяся решением данного уравнения (функция $y \equiv 0$ есть решение любого линейного однородного дифференциального уравнения). Отсюда на основании теоремы Коши о существовании и единственности решения заключаем, что $\alpha_1^*y_1(x) + \ldots + \alpha_n^*y_n(x) \equiv 0$ на (a, b), т. е. система функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависима на (a, b). Но тогда вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю всюду на (a, b), что и требовалось доказать. ▶

2.99. $\begin{vmatrix} y & y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y' & y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$. • Всякое решение y не-

комого уравнения вместе с функциями $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образует линейно зависимую систему. **2.100.** $y=e^x+2\cos x+3\sin x$. **2.101.** $y=e^x+2e^{2x}+3e^{3x}$. **2.102.** $y=C_1x^3+C_2x^4+\frac{1}{2}x$. **2.103.** $y=C_1e^{2x}+C_2\sin x+C_3\cos x+e^{3x}$. **2.104.** $y=C_1e^x+C_2x-x^2-1$. **2.105.** $y=C_1\cos x+C_2x\cos x-\sin x\cos x$. **2.106.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^x+5x+6-e^{2x}$. **2.107.** $y=C_1+C_2\sin x+C_3\cos x+\frac{1}{2}e^x-\sin 2x$. **2.108.** $y=e^{kx}(1+(1-k)x)$. **2.109.** $y''-y'-6y=0$, $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}$. **2.110.** $y''-2y'+y=0$, $y=(C_1+C_2x)e^x$. **2.111.** $y''-6y'+13y=0$, $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{3x}$. **2.112.** $y'''-6y''+12y'-8y=0$, $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{2x}$. **2.113.** $y'''-8y''+16y'=0$, $y=C_1+(C_2+C_3x)e^{4x}$. **2.115.** $y=C_1e^{(1-\sqrt{3})x}+C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$. **2.116.** $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **2.117.** $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$. **2.118.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. **2.119.** $y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$. **2.120.** $y=e^{-x/2}(C_1+C_2x)$. **2.121.** $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$. **2.122.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$. **2.123.** $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. **2.124.** $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}$. **2.125.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x)$. **2.126.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+(C_3+C_4x)e^{-2x}$. **2.127.** $y=C_1+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+x(C_4\cos 2x+C_5\sin 2x)$. **2.128.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$. **2.129.** $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)\cos x+(C_5+C_6x)\sin x$. **2.130.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$. **2.131.** $y=e^x$. **2.132.** $y=(7-3x)e^{x-2}$. **2.133.** $y=2+e^{-x}$. **2.134.** $y=\operatorname{sh} x$. ● Начальные условия: $y(0)=0$, $y'(0)=1$. **2.135.** $y=\frac{5}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}$. **2.136.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$. **2.137.** $y=(C_1-\ln|\sin x|)\cos 2x+\left(C_2-x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sin 2x$. **2.138.** $y=\left(C_1+C_2x+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)e^x$. **2.139.** $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$. **2.140.** $(Ax^3+Bx^2)e^{4x}$. **2.141.** $x(A\cos 4x+B\sin 4x)$. **2.142.** $Ax+B\cos 8x+C\sin 8x$. **2.143.** $(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x$. **2.144.** $(Ax^2+Bx)e^{4x}$. **2.145.** Ax^3+Bx^2+Cx. **2.146.** $e^x((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)$. **2.147.** $xe^{2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+Ex+F)\sin 3x)$. **2.148.** $y=C_1e^x+\left(C_2-\frac{x}{2}\right)e^{-x}$. **2.149.** $y=C_1\operatorname{ch} x+C_2\operatorname{sh} x+\frac{x\operatorname{sh} x}{2}$. **2.150.** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$. **2.151.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{6}(5\cos 3x-\sin 3x)$. **2.152.** $y=(C_1+C_2x)e^{mx}+\frac{(m^2-n^2)\sin nx+2mn\cos nx}{(m^2+n^2)^2}$. **2.153.** $y=(C_1+C_2x)e^{mx}+\frac{1}{2m^2}\cos mx$. **2.154.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$

$+x(x\sin x+\cos x)$. **2.155.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}(1+x\sin 2x)$. **2.156.** $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x/2}-x^3$. **2.157.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{-x}+$ $+xe^{-2x}$. **2.158.** $y=C_1+C_2e^{3x}+\frac{x}{3}e^{3x}+2x+3x^2$. **2.159.** $y=C_1+$ $+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$. **2.160.** $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^3}{6}\right)e^x$.

2.161. $$y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x^2}{12}(x^2+2x-12).$$

2.162. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{x}{8}(x-3)e^x-\frac{x}{4}\sin x$.

2.163. $$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\frac{x^4}{24}+\left(\frac{x^2}{2}-4x+C_5\right)e^x.$$

2.164. $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$. **2.165.** $y=e^x-e^{-x}+x^2$. **2.166.** $y=\frac{x}{4}+$ $+\cos 2x+\frac{7}{16}\pi\sin 2x$. **2.167.** $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$. **2.168.** $y=2xe^x$. **2.169.** $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}-3e^x+2xe^x$. **2.170.** $y=$ $=e^x((2x-\pi-1)\sin x-\pi\cos x)$. **2.171.** $y=C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|$. **2.172.** $y=C_1\cos(2\ln|x|)+C_2\sin(2\ln|x|)+2x$. **2.173.** $y=C_1x^3+$ $+\frac{C_2}{x^2}-2\ln x+\frac{1}{3}$. **2.174.** $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$. **2.175.** $y=C_1+$ $+C_2\ln|x|+C_3x^3$. **2.176.** $y=(2x+1)(C_1+C_2\ln|2x+1|)$. **2.177.** $y=\frac{1}{\operatorname{sh}2\pi}\cdot\operatorname{sh}x$. **2.178.** $y=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}$. **2.179.** $y=-\frac{\cos x}{\sin 1}$ (единственное решение). **2.180.** Нет решений. **2.181.** $(x-2)^2+y^2=5$. **2.182.** $y=1-\sin x-\cos x$. **2.183.** $y=\sqrt{\frac{e-e^{-x}}{e-1}}$. **2.184.** $y=\frac{x}{2}-$ $-x^2+x^2\ln x$. **2.185.** $x=e^{-ht}\left(a\cos\beta t+\frac{ah+v_0}{\beta}\sin\beta t\right)$, где $\beta=$ $=\sqrt{k^2-h^2}$. ● Уравнение имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=0$. **2.186.** $x=$ $=e^{-\alpha t}\left(a\operatorname{ch}\beta t+\frac{\alpha a+v_0}{\beta}\operatorname{sh}\beta t\right)$, где $\alpha=\frac{\lambda}{2m}$, $\beta=\sqrt{\alpha^2+\frac{k}{m}}$. ● Уравнение имеет вид $m\frac{d^2x}{dt^2}=kx-\lambda\frac{dx}{dt}$. **2.187.** а) $r=a\operatorname{ch}\omega t$; б) $r=\frac{v_0}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$. ● Уравнение имеет вид $\frac{d^2r}{dt^2}=\omega^2r$. **2.188.** $r=$ $=ae^{-\mu\omega t}\left(\operatorname{ch}\omega\sqrt{1+\mu^2}t+\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\operatorname{sh}\omega\sqrt{1+\mu^2}t\right)$. **2.189.** $T=$ $=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})\approx 3$ с. ● Уравнение имеет вид $\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{g}{9}s=$ $=\frac{g}{9}$, где s — путь, пройденный за время t концом опускающейся

части цепи. **2.190.** $x=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t}{g-900}$ (см). ● Если x отсчитывать от положения покоя груза, то $4\frac{d^2x}{dt^2}=4g-k(x_0+x-y-e)$, где x_0 — расстояние точки покоя груза от начальной точки подвеса пружины, l — длина пружины в состоянии покоя, поэтому $k(x_0-l)=4g$ и, следовательно, $4\frac{d^2x}{dt^2}=-k(x-y)$, где $k=4g$, $g=981$ см/с^2.

2.191. $i=e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2+R^2}\left(\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t-\right.$
$\left.-\frac{R}{2}\left(\omega+\frac{1}{LC\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t\right)+\frac{E}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}\times$
$\times\left(\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+R\sin\omega t\right)$. ● Дифференциальное уравнение цепи: $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}$. **2.192.** $i=\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ◀ Имеем $\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$. Дифференциальное уравнение цепи: $L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=$ $=E\omega\cos\omega t$. Общее решение соответствующего однородного уравнения: $i_0=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. Частное решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $\bar{i}=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$. Тогда $\frac{d\bar{i}}{dt}=t(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)+A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=$ $=t(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t)+(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t)$. Подставляя в уравнение выражения $\bar{i}$ и $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}$ и учитывая, что $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$, получим тождество $L(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t)=E\omega\cos\omega t$, откуда $A=0$, $B=\frac{E}{2L}$. Следовательно, $\bar{i}=\frac{E}{2L}t\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$. Общее решение: $i=C_1\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+C_2\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. Вычисляя $\frac{di}{dt}=$ $=-\frac{C_1}{\sqrt{LC}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{C_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+\frac{E}{2L\sqrt{LC}}t\cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t+$ $+\frac{E}{2L}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$ и используя начальные условия, найдем $C_1=C_2=0$. Искомое частное решение: $i=\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t$. ▶ **2.193.** $i=$ $=-\frac{E}{2\omega L}\cos\psi\sin\omega t+\frac{E}{2L}t\cos(\omega t+\psi)$.

3.1. $x^2+y^2=z^2-2z(y-xy')$. $x+yy'=zz'-z'(y-xy')$. 3.2. $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. 3.3. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{xyz-z^3}$. 3.4. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{y^2}$. 3.5. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{du}{t}=\frac{dv}{v+w}=\frac{dw}{w+t}=\frac{dt}{t+v}$. 3.6. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{2y-z}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{x+y-1}$. 3.7. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{t}=\frac{dz}{x^2-uz}=\frac{dt}{z+u}=\frac{du}{v}=\frac{dv}{w}=\frac{dw}{-xy}$. 3.13. $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$. 3.14. $x^2=t^2+C_1$, $y^2=t^2+C_2$. 3.15. $y^2=\frac{(C_1+C_2-x)^2}{2(C_2-x)}$, $z^2=\frac{(C_1-C_2+x)^2}{2(C_2-x)}$. 3.16. $x=\ln|C_3(C_1t+C_2)|$, $y=\ln|C_3(C_1t+C_2)|-C_1$, $z=(C_1+1)t+C_2$. 3.17. $x^2+y^2+z^2=C_1y$, $z=C_2y$. 3.18. $x=C_1t$, $y=C_2e^t+\frac{2}{C_1}$. 3.19. $z-2y=C_1$, $2\sqrt{z-x-y}+y=C_2$. 3.20. $x^2=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y^2=C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. 3.21. $y=x+\frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$ $z=C_2e^{C_1x}$; $y=x-e^x$, $z=e^{-x}$. 3.22. $z=C_1y$, $y^3=\frac{3x^2}{2C_1}+C_2$; $z=y$, $y^3=\frac{3}{2}x^2+1$. 3.23. а) Да; б) нет. ● Соотношение $\varphi(t, x, y)=C$ является первым интегралом системы $x'_t=f_1(t, x, y)$, $y'_t=f_2(t, x, y)$ тогда и только тогда, когда $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+f_1(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f_2(t, x, y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$. 3.24. $2e^{2-y}=x^2+(y-1)^2$. 3.25. $2y^3+3y(x^2-1)-8=0$. 3.26. $y=x(1+\ln\sqrt{|x|})$. 3.27. $(y-x)^2+x^2=1$. 3.28. $y=C_1x^{1+\sqrt{2}}+C_2x^{1-\sqrt{2}}$, $z=x^{\sqrt{2}-1}C_1(2+\sqrt{2})+x^{-\sqrt{2}-1}C_2(2-\sqrt{2})$. 3.29. $y=C_1+C_2x$, $z=2C_2+\frac{C_1}{x}$. 3.30. $x=C_1t+\frac{C_2}{t}$, $y=-C_1t+\frac{C_2}{t}$. 3.31. $x=\frac{C_2}{t^2}$, $y=C_1e^t-\frac{C_2}{t^2}$. 3.32. $x=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $y=C_1e^t+2C_2e^{2t}$. 3.33. $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$; $x=3e^{2t}$, $y=e^{2t}$. 3.34. $x=e^{5t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$, $y=e^{5t}((C_1-C_2)\sin 2t-(C_1+C_2)\cos 2t)$; $x=e^{5t}(\cos 2t-\sin 2t)$, $y=2e^{5t}\sin 2t$. 3.35. $x=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$, $y=\frac{1}{5}e^{-2t}((4C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+4C_2)\sin 3t)$. 3.36. $x=(2C_1t+2C_2+1)e^{-t}$, $y=(C_1t+C_2)e^{-t}$. 3.37. $x=(C_1t+C_2)e^{-3t}$, $y=(-C_1t+\frac{C_1}{2}-C_2)e^{-3t}$; $x=2te^{-3t}$, $y=(1-2t)e^{-3t}$. 3.38. $x=C_1e^t+e^{-t/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $y=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_3\sqrt{3}-C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_2\sqrt{3}+C_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, $z=C_1e^t+\frac{1}{2}e^{-t/2}\left((C_2\sqrt{3}-C_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$;

$x=y=z=e^t$. **3.39.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1e^{2t}-(C_2+C_3)e^{-t}$; $x=e^{2t}+e^{-t}$, $y=e^{2t}+e^{-t}$, $z=e^{2t}-2e^{-t}$. **3.40.** $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. **3.41.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+2C_3e^{3t}$, $z=2C_1e^t+C_2e^{2t}+2C_3e^{3t}$. **3.42.** $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{18}$, $y=C_1e^{2t}+3C_2e^{-3t}-\frac{t}{2}-\frac{1}{12}$. **3.43.** $x=(C_1\cos t+C_2\sin t-1)e^t$, $y=(C_1\sin t-C_2\cos t)e^t$. **3.44.** $x=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-3e^t\right)$, $y=\left(C_1-\frac{C_2}{3}+C_2t+\frac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$. **3.45.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t$, $y=(C_2-C_1)\cos t-(C_1+C_2)\sin t+t(\cos t+\sin t)$. **3.46.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg} t$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2$. **3.47.** $x=3(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t$, $y=2(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})-2(C_3\cos 2t+C_4\sin 2t)$. ● Искать решение системы в виде $x=Ae^{kt}$, $y=Be^{kt}$. **3.48.** $x=a(1-2^{-t})/4$, $y=3a(1-2^{-t})/4$. ● Система дифференциальных уравнений: $\dot{x}=k_1(a-x-y)$, $\dot{y}=k_2(a-x-y)$. **3.49.** $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$. ● Дифференциальные уравнения движения: $m\ddot{x}=-k^2x$, $m\ddot{y}=-k^2y$.

4.1. Неустойчиво. **4.2.** Устойчиво. **4.3.** Неустойчиво. **4.4.** Асимптотически устойчиво. **4.5.** Асимптотически устойчиво, если $\alpha<-1/2$; устойчиво, если $\alpha=-1/2$, и неустойчиво при $\alpha>-1/2$. **4.6.** $\dot{z}_i=-\dot{\varphi}_i+f_i(t, z_1+\varphi_1(t), \ldots, z_n+\varphi_n(t))=F_i(t, z_1, \ldots, z_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$. ● Преобразовать систему (1) к новым переменным, полагая $z_i=x_i-\varphi_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. **4.7.** Точка покоя $x_i\equiv 0$ ($i=1, 2, \ldots, n$) системы дифференциальных уравнений устойчива, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из неравенства $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t_0)<\delta^2(\varepsilon)$ следует $\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)<\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$. Если, кроме того, выполнено соотношение $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(t)=0$, то точка покоя системы асимптотически устойчива. Точка покоя неустойчива, если найдутся $\varepsilon>0$ и номер i такие, что при любом $\delta>0$ из неравенства $|x_i(t_0)|<\delta$ следует $|x_i(t)|>\varepsilon$ для некоторого $t>t_0$. **4.9.** Неустойчивый фокус. **4.10.** Седло. **4.11.** Неустойчивый фокус. **4.12.** Устойчивый узел. **4.13.** Устойчивый узел. **4.14.** Устойчивый узел. **4.15.** Ни при каких α. **4.16.** $|\alpha|\geqslant 2$. **4.17.** $\alpha<0$, $|\alpha|\geqslant|\beta|$ — случай большого «отрицательного трения», точка покоя — неустойчивый узел; $\alpha<0$, $|\alpha|<|\beta|$ — случай «отрицательного трения», точка покоя — неустойчивый фокус; $\alpha=0$, точка покоя устойчива — центр; $\alpha>0$, $|\alpha|<|\beta|$, точка покоя — устойчивый фокус; $\alpha>0$, $|\alpha|\geqslant|\beta|$, сопротивление среды велико, точка покоя — устойчивый узел. ● Заменить уравнение эквивалентной нормальной системой $\dot{x}=y$, $\dot{y}=$

$= -2\alpha y - \beta^2 x$. **4.18.** • Использовать запись частного решения однородной системы при различных значениях характеристического корня. **4.19.** Неустойчива. **4.20.** Устойчива. **4.21.** $V = x^2 + y^2$; устойчива. **4.22.** $V = x^2 + y^2$; неустойчива. **4.23.** $V = x^4 + y^4$; устойчива. **4.24.** $V = x^2 + y^2$; неустойчива. **4.25.** $V = 2x^2 + y^2$; устойчива. **4.26.** $V = y^2 - \frac{1}{2}x^2$; неустойчива. **4.27.** Устойчива. **4.28.** Неустойчива. **4.29.** Неустойчива. **4.30.** Устойчива. **4.31.** Устойчива. **4.32.** Неустойчива. **4.33.** $V = 3x^2 + 4y^2$; асимптотически устойчива.

5.1 [1]). $y(1) = 1{,}3280$. **5.2.** $y(0{,}6) = 4{,}4828$. **5.3.** $y(0{,}3) = 0{,}0451$. **5.4.** $y(2) = -0{,}8407$. **5.5.** $y(1) = 0{,}7899$. **5.6.** $y(1) = 0{,}3305$. **5.7.** $y(1) = 0{,}3635$. **5.8.** $y(2) = 3{,}4547$. **5.9.** $y(1) = 3{,}7190$. **5.10.** $y(2) = 2{,}3683$. **5.11.** $y(0{,}1) = 0{,}1057$. **5.12.** $y(0{,}5) = 0{,}0461$. **5.13.** $y(2) = 4{,}2489$. **5.14.** $y(0{,}4) = 0{,}4647$. **5.15.** $y(0{,}1) = 0{,}1098$. **5.16.** $y(0{,}5) = 0{,}6842$. **5.17.** $y(1) = 0{,}4388$. **5.18.** $y(1) = 0{,}3679$. **5.19.** $y(2) = -0{,}7895$.

5.20.

```
      SUBROUTINE EULER(F,X0,Y0,H,N,Y)
      DIMENSION Y(N)
      H3=H**3
      X=X0-H
      U=Y0
      K=0
    3 X=X+H
      FUNC=F(X,Y)
      Y1=U+H*FUNC
    1 Y2=U+(FUNC+F(X,Y1))*H/2.
      IF(ABS(Y2-Y1).LT.H3) GO TO 2
      Y1=Y2
      GO TO 1
    2 K=K+1
      Y(K)=Y2
      U=Y2
      IF(K.LT.N) GO TO 3
      RETURN
      END
```

5.21.

```
      SUBROUTINE RK(F,X0,Y0,H,N,Y,EPS)
      DIMENSION Y(N)
      M=1
      DO 1 I=1,N
```

---

[1]) В ответах к задачам 5.1 — 5.19, а также 5.26 — 5.31 приведены значения искомого решения в конце заданного отрезка.

```
1 Y(I)=0
2 X=X0
  U=Y0
  DO 4 J=1,N
  DO 3 K=1,M
  Q1=F(X,U)*H
  Q2=F(X+H/2.,U+Q1/2.)*H
  Q3=F(X+H/2.,U+Q2/2.)*H
  Q4=F(X+H,U+Q3)*H
  DY=(Q1+2*Q2+2*Q3+Q4)/6.
  U=U+DY
3 X=X+H
  A=ABS((U-Y(J))/15.)
  Y(J)=U
  IF(A.GT.EPS) KIND=1
4 CONTINUE
  IF(KIND.EQ.1) GO TO 5
  RETURN
5 H=H/2.
  M=M*2.
  KIND=0
  GO TO 2
  END
```

5.22.

```
  SUBROUTINE MILN(F,X0,H,N,Y,EPS)
  DIMENSION
  N1=N-4
  EPS=0.
  X=X0
  F1=F(X+H,Y(2))
  F2=F(X+2.*H,Y(3))
  F3=F(X+3.*H,Y(4))
  DO 1 K=1,N1
  YW=Y(K)+(2.*F1-F2+2.*F3)*4*H/3.
  Y(K+4)=Y(K+2)+(F2+4.*F3+F(X+4.*H,YW)*H/3.
  A=ABS(YW-Y(K+4))/29.
  EPS=AMAX1(A,EPS)
  F1=F2
  F2=F3
  F3=F(K+4)
1 X=X+H
  RETURN
  END
```

5.23. В задание для ЭВМ входит три программных единицы:

а) подпрограмма

```
SUBROUTINE EULER(F,X0,Y0,H,N,Y)
```

б) подпрограмма-функция (к задаче 5.12.)

```
FUNCTION F(X,Y)
F=2.*X*Y+X*X
RETURN
END
```

в) основная программа

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y(20),A(40)
CALL EULER(F,0.,0.,0.025,20,Y)
CALL EULER(F,0.,0.,0.0125,40,A)
B=0
DO 1 K=1,20
C=ABS(Y(K)-A(2*K-1))/7.
1 B=AMAX1(B,C)
WRITE (3,2) A,B
2 FORMAT (5(1H ,8F12.6),' ПОГРЕШНОСТЬ = ',F10.8)
STOP
END
```

5.24. Задание для ЭВМ к задаче 5.18:

а) подпрограмма

```
SUBROUTINE RK(F,X0,Y0,H,N,Y,EPS)
```

б) подпрограмма-функция

```
FUNCTION F(X,Y)
F=Y*Y*EXP(X)-2.*Y
RETURN
END
```

в) основная программа

```
EXTERNAL F
DIMENSION Y(10)
CALL RK(F,0.,1.,0.1,10,Y,1E-4)
WRITE (3,1) Y
1 FORMAT (1H ,5F15.6)
STOP
END
```

5.25. Задание для ЭВМ к задаче 5.19:

а) подпрограмма

```
SUBROUTINE MILN(F,X0,H,N,Y,EPS)
```

б) подпрограмма-функция

```
      FUNCTION F (X,Y)
      F=1./(Y*Y-X)
      RETURN
      END
```

в) основная программа

```
      EXTERNAL F
      DIMENSION Y(21)
      DATA Y(1)/0.63212/,Y(2)/0.652562/,Y(3)/0.677129/,Y(4)/0.705863/
      CALL MILN(F,1.,0.05,21,Y,EPS)
      WRITE (3,1) Y,EPS
    1 FORMAT (3(1H ,7F12.6),' ПОГРЕШНОСТЬ = ',F8.6)
      STOP
      END
```

5.26. $y(2)=0{,}25$, $z(2)=0{,}375$. **5.27.** $y(1)=1{,}261$, $z(1)=2{,}346$. **5.28.** $y(0{,}3)=1{,}505$, $z(0{,}3)=0{,}577$. **5.29.** $y(0{,}3)=0{,}638$, $z(0{,}3)=1{,}568$. **5.30.** $y(1)=1{,}359$. **5.31.** $y(2)=-1{,}833$.

5.32.

```
      SUBROUTINE RKD(F,F1,X0,Y0,Z0,H,N,Y,Z,EPS)
      DIMENSION Y(N),Z(N)
      M=1
      DO 1 I=1,N
      Y(I)=0.
    1 Z(I)=0.
    2 X=X0
      U=Y0
      V=Z0
      DO 4 J=1,N
      DO 3 K=1,M
      Q1Y=F(X,U,V)*H
      Q1Z=F1(X,U,V)*H
      Q2Y=F(X+H/2.,U+Q1Y/2.,V+Q1Z/2.)*H
      Q2Z=F1(X+H/2.,U+Q1Y/2.,V+Q1Z/2.)*H
      Q3Y=F(X+H/2.,U+Q2Y/2.,V+Q2Z/2.)*H
      Q3Z=F1(X+H/2.,U+Q2Y/2.,V+Q2Z/2.)*H
      Q4Y=F(X+H,U+Q3Y,V+Q3Z)*H
      Q4Z=F1(X+H,U+Q3Y,V+Q3Z)*H
      DY=(Q1Y+2*Q2Y+2*Q3Y+Q4Y)/6.
      DZ=(Q1Z+2*Q2Z+2*Q3Z+Q4Z)/6.
      U=U+DY
      V=V+DZ
```

```
3 X=X+H
  A=ABS((U-Y(J))/15.)
  B=ABS((V-Z(J))/15.)
  Y(J)=U
  Z(J)=V
  IF(A.GT.EPS.OR.B.GT.EPS) KIND=1
4 CONTINUE
  IF(KIND.EQ.1) GO TO 5
  RETURN
5 H=H/2.
  M=M*2
  KIND=0
  GO TO 2
  END
```

5.33. Задание для ЭВМ к задаче 5.29:

а) подпрограмма

```
SUBROUTINE RKD(F,FI,X0,Y0,Z0,H,N,Y,Z,EPS)
```

б) подпрограмма-функция

```
FUNCTION F(X,Y,Z)
F=EXP(-1.*(Y**2+Z**2))+2.*X
RETURN
END
```

в) подпрограмма-функция

```
FUNCTION FI(X,Y,Z)
FI=2.*Y**2+Z
RETURN
END
```

г) основная программа

```
EXTERNAL F,FI
DIMENSION Y(20),Z(20)
CALL RKD(F,FI,0.,0.5,1.,0.1,20,Y,Z,1E-4)
WRITE (3,1) Y,Z
1 FORMAT (1H ,10F10.4)
STOP
END
```

5.34. $y_1=2{,}953$, $y_2=4{,}375$, $y_3=6{,}359$. **5.35.** $y_1=1{,}926$, $y_2=2{,}593$, $y_3=3{,}333$, $y_4=4{,}148$, $y_5=5{,}037$, $y_6=6$. **5.36.** $y_1=0{,}874$, $y_2=0{,}743$, $y_3=0{,}611$, $y_4=0{,}482$, $y_5=0{,}362$, $y_6=0{,}253$, $y_7=0{,}161$, $y_8=0{,}087$, $y_9=0{,}033$. **5.37.** $y_1=2{,}019$, $y_2=3{,}956$, $y_3=5{,}720$, $y_4=7{,}212$, $y_5=8{,}316$, $y_6=8{,}908$, $y_7=8{,}855$, $y_8=8{,}044$, $y_9=6{,}413$, $y_{10}=3{,}998$. **5.38** $y_1=1{,}17$, $y_2=1{,}31$, $y_3=1{,}42$, $y_4=1{,}50$, $y_5=1{,}64$,

$y_6=1{,}66$, $y_7=1{,}63$, $y_8=1{,}58$, $y_9=1{,}49$. **5.39** $y_0=2$, $y_1=2{,}273$, $y_2=2{,}674$, $y_3=3{,}185$, $y_4=3{,}796$.

5.40. Задание для ЭВМ к задаче 5.38:

а) подпрограмма

```
SUBROUTINE EXCLUS(A,B,N)
```

б) основная программа

```
  DIMENSION A(11,11),B(11)
  READ (1,1) A,B
1 FORMAT (9F8.4)
  CALL EXCLUS(A,B,11)
  WRITE (3,2) B
2 FORMAT (' ',9F8.3)
  STOP
  END
```

Глава 10

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Скалярные и векторные поля. Градиент

1. Геометрические характеристики скалярных и векторных полей. Пусть D — область в пространстве двух, трех или n измерений. Говорят, что в области D задано *скалярное поле*, если в D задана скалярная функция точки $u(P)=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(\boldsymbol{r})$, называемая функцией поля ($\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Если каждой точке $P \in D$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, то говорят, что в области D задано *векторное поле*, определяемое векторной функцией $\boldsymbol{a}(P)=\boldsymbol{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются *линии уровня* $u(x, y)=C$ в пространстве двух измерений, *поверхности уровня*, или *эквипотенциальные поверхности*, $u(x, y, z)=C$ в пространстве трех измерений и *гиперповерхности уровня* $u(x_1, \ldots, x_n)=C$ в пространстве $n>3$ измерений. Простейшими геометрическими характеристиками векторных полей являются векторные линии и векторные трубки. *Векторной линией* называется линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление соответствующего ей вектора поля. Векторные линии для вектора $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)}=\frac{dy}{a_y(x, y, z)}=\frac{dz}{a_z(x, y, z)}$$

(аналогично для плоских и многомерных полей). *Векторной трубкой* называется поверхность, образованная векторными линиями, проходящими через точки некоторой лежащей в поле замкнутой кривой, не совпадающей (даже частично) с какой-либо векторной линией.

Определить вид линий или поверхностей (гиперповерхностей) уровня следующих скалярных полей:

1.1. $u=y^2+x$. 1.2. $u=xy$.

1.3. $u=y/x$. 1.4. $u=x+y+z$.

1.5. $u=x^2+y^2-z^2$. 1.6. $u=x^2+y^2-z$.

1.7. $u=x_1+x_2+x_3+x_4$. 1.8. $u=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

Найти векторные линии следующих полей:

1.9. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$. 1.10. $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}$.

1.11. $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. 1.12. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

1.13. $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{c}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

1.14. $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{i}}{x}+\frac{\boldsymbol{j}}{y}+\frac{\boldsymbol{k}}{z}$.

1.15. $\boldsymbol{a}=(y-z)\,\boldsymbol{i}+(z-x)\,\boldsymbol{j}+(x-y)\,\boldsymbol{k}$.

1.16. $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_4\boldsymbol{e}_4$.

1.17. Определить вид векторных трубок:

а) в задаче 1.12; б) в задаче 1.15.

2. Производная по направлению и градиент скалярного поля. Пусть $\boldsymbol{s}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$ — единичный вектор данного направления s, $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$. *Производная* скалярного поля $u(P)$ в точке P_0 *по направлению* s, обозначаемая через $\frac{\partial u}{\partial s}$, определяется соотношением

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\lim_{\tau\to 0}\frac{u(\boldsymbol{r}_0+\tau\boldsymbol{s})-u(\boldsymbol{r}_0)}{\tau}$$

и характеризует скорость изменения функции $u(P)$ в направлении s. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ вычисляется по формуле

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{r=r_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{r=r_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{r=r_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{r=r_0}\cos\gamma. \qquad (1)$$

Градиентом скалярного поля $u(P)$, обозначаемым символом $\operatorname{grad} u$, называется вектор, проекциями которого являются частные производные функции $u(P)$ по соответствующим координатам, т. е.

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (2)$$

Аналогично определяется производная по направлению и градиент для n-мерных скалярных полей.

Исходя из выражения производной по направлению (1) и определения градиента (2), доказать следующие свойства градиента:

1.18. Производная поля по направлению s равна скалярному произведению градиента поля на единичный вектор данного направления, т. е. равна проекции градиента на данное направление

$$\frac{\partial u}{\partial s}=(\operatorname{grad} u,\ \boldsymbol{s})=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi,$$

где φ — угол между градиентом и вектором $\boldsymbol{s}$.

1.19. Направление градиента есть направление наибыстрейшего возрастания функции поля.

1.20. В каждой точке поля градиент направлен по нормали к соответствующей поверхности уровня в сто-

рону возрастания потенциала поля, т. е.

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial n},$$

где n — нормаль к поверхности уровня, направленная в сторону возрастания функции поля.

Найти производные от следующих полей в заданных точках по заданному направлению:

1.21. $u = x^2 + \frac{1}{2} y^2$ в точке $P_0(2, -1)$ по направлению P_0P_1, где $P_1(6, 2)$.

1.22. $u = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 + z$ в точке $P_0(2, 1, 1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

1.23. $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$ в точке $P_0(1, 3, 2, -1)$ по направлению вектора $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_4$.

1.24. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.

1.25. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $P_0(1, 2, -2)$.

1.26. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $P_0(1, 1, -1)$, направленный в сторону возрастания поля.

1.27. Найти стационарные точки поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$.

1.28. Убедиться в ортогональности линий уровня полей:

а) $u = x^2 - y^2, \quad v = xy$;

б) $u = 2x^2 + y^2, \quad v = \frac{y^2}{x}$.

1.29. Убедиться в ортогональности поверхностей уровня следующих полей:

а) $u = x^2 + y^2 - z^2, \ v = xz + yz$;

б) $u = x^2 + y^2 - 2z^2, \ v = xyz$;

в) $u = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \quad v = x_1x_3 + x_2x_4, \quad w = x_1x_4 - x_2x_3$.

1.30. Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания для следующих полей:

а) плоского поля $u = x^2 - y^2$;

б) трехмерного поля $u = xyz$;

в) трехмерного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Криволинейные и поверхностные интегралы

1. Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $\overset{\smile}{AB}$ — дуга кусочно гладкой кривой, $u(P)$ — заданное на $\overset{\smile}{AB}$ скалярное поле, $A_0=A$, $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$ — произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ и P_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) — произвольные точки на частичных дугах $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$, длины которых обозначим через Δs_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta s_\nu$ при $\max\limits_{\nu} \Delta s_\nu \to 0$ (и $n \to \infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ точками A_ν, ни от выбора точек P_ν в частичных дугах $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $u(P)$ по кривой $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(x, y, z)\,ds$$

(ds — дифференциал дуги), т. е.

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds = \lim_{\max\limits_{\nu} \Delta s_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta s_\nu. \qquad (1)$$

Если функция $u(P)$ непрерывна на $\overset{\smile}{AB}$, то интеграл (1) существует.

Физически интеграл (1) можно рассматривать как массу кривой $\overset{\smile}{AB}$. Вычисление интеграла (1) сводится к вычислению определенного интеграла. Например, если уравнение дуги $\overset{\smile}{AB}$ задано в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} u(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от того, в каком направлении проходится дуга AB, иными словами,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} u(P)\,ds = \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} u(P)\,ds.$$

Пример 1. Определить массу M первого витка винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht$, если плотность $\mu(P)$ в каждой ее точке пропорциональна длине радиус-вектора этой точки.

◀ Так как $\mu=kr=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, то в точках винтовой линии $\mu=k\sqrt{a^2+h^2t^2}$. Первому витку отвечает изменение параметра t от 0 до 2π и

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{a^2+h^2}\,dt.$$

Отсюда

$$M=\int_0^{2\pi} k\sqrt{a^2+h^2}\sqrt{a^2+h^2t^2}\,dt=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{a^2+h^2t^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\left(ht+\sqrt{a^2+h^2t^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=k\sqrt{a^2+h^2}\left(\pi\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}+\frac{a^2}{2h}\ln\frac{2\pi h+\sqrt{a^2+4\pi^2h^2}}{a}\right). \blacktriangleright$$

2.1. Найти массу всей астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, если $\mu(P)=|xy|$.

2.2. Найти массу всей кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$, если $\mu(P)=k\sqrt{r}$.

2.3. Найти массу всей лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если $\mu(P)=kr$.

2.4. Вычислить $\int\limits_{\smile AB}\frac{y}{+3z}\,ds$, если $\smile AB$ — дуга линии $x=t$, $y=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{t^3}{3}$, $A(0, 0, 0)$ и $B\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

2.5. Найти массу дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t$, $y=ae^t\sin t$, $z=ae^t$, если $\mu=ke^t$, от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, 0, a)$.

2.6. Найти, с какой силой масса M, равномерно распределенная вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=c$, притягивает точечную массу m, помещенную в начале координат.

2.7. Найти массу четверти окружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки (коэффициент пропорциональности α).

2.8. Найти массу полуокружности $x^2+y^2=r^2$, расположенной в верхней полуплоскости, если плотность ее в каждой точке пропорциональна кубу ординаты этой точки (коэффициент пропорциональности β).

2. Поверхностный интеграл 1-го рода. Пусть G — кусочно гладкая поверхность, $u(P)$ — заданное на G скалярное поле, $G_1, G_2, \ldots, G_n$ — произвольное разбиение поверхности G на частичные поверхности, площади которых равны $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$, и пусть P_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные точки на частичных поверхностях G_ν. Если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\Delta\sigma_\nu$ при $\max\limits_{\nu}\Delta\sigma_\nu\to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от

выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом I-го рода* от функции $u(P)$ по поверхности G и обозначается через

$$\iint\limits_G u(P)\,d\sigma = \iint\limits_G u(x, y, z)\,d\sigma$$

($d\sigma$ — дифференциал площади поверхности), т. е.

$$\iint\limits_G u(P)\,d\sigma = \lim_{\max\limits_\nu \Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} u(P_\nu)\,\Delta\sigma_\nu. \qquad (2)$$

Если $u(P)$ непрерывна на G, то интеграл (2) существует. Вычисление интеграла (2) сводится к вычислению обычного двойного интеграла. Допустим, что прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G лишь в одной точке, т. е. уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$, и пусть G проектируется на плоскость Oxy в область D. Элемент $d\sigma_1$ площади D выражается в виде $d\sigma_1 = d\sigma \cos\gamma$, где γ — острый угол, который нормаль к поверхности G составляет с осью Oz:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_G u(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_D u(x, y, z)\,\frac{d\sigma_1}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_D u(x, y, z)\,\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Если прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G в двух или более точках, то G разбивается на части, каждая из которых пересекается с прямой, параллельной оси Oz, лишь в одной точке. Интегрирование следует выполнять по каждой из полученных частей.

Вместо плоскости Oxy поверхность G можно проектировать на плоскости Oxz или Oyz.

Для двусторонних поверхностей поверхностный интеграл I-го рода не зависит от того, по какой стороне поверхности он берется. Физический смысл поверхностного интеграла I-го рода зависит от физического характера данного скалярного поля: он может определять массу, распределенную по данной поверхности, электрический заряд и т. д.

Пример 2. Определить статический момент относительно плоскости Oxy и положение центра масс однородной полусферы G: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(z \geq 0)$.

◀ Имеем

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\,d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

где D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $z=0$. Так как на полусфере $x\,dx+y\,dy+$ $+z\,dz=0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

откуда

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

и

$$M_{xy}=\iint\limits_G z\,d\sigma=\iint\limits_D R\,dx\,dy=R\iint\limits_D dx\,dy=R\cdot\pi R^2=\pi R^3.$$

Определим теперь координаты центра масс полусферы. В силу симметрии

$$x_0=y_0=0.$$

Далее, так как площадь Q поверхности полусферы G есть $2\pi R^2$, то

$$z_0=\frac{M_{xy}}{Q}=\frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 3. На всей поверхности конуса с высотой h и радиусом основания a распределены электрические заряды. В каждой точке поверхности плотность заряда пропорциональна аппликате этой точки ($\varepsilon=kz$). Вершина конуса — в начале координат, его ось направлена по оси Oz. Определить суммарный заряд всей поверхности конуса. ◀ Суммарный заряд основания конуса равен произведению его площади πa^2 на плотность точечного заряда, т. е. kh. Таким образом, $E_{\text{осн}}=k\pi a^2h$. Заряд боковой поверхности G определяется интегралом

$$E_{\text{бок. пов}}=\iint\limits_G kz\,d\sigma.$$

Уравнение поверхности конуса $z^2=\frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant h$. Дифференцируя, находим $z\,dz=\frac{h^2}{a^2}(x\,dx+y\,dy)$, откуда $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{h^2}{a^2}\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=\frac{h^2}{a^2}\frac{y}{z}$ и, следовательно,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{h^4}{a^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{z^2}}=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}.$$

Поэтому

$$E_{\text{бок. пов}}=k\iint\limits_G z\,d\sigma=\frac{kh}{a}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dx\,dy,$$

где D — круг $x^2+y^2\leqslant a^2$, $z=0$. Переходя к полярным координатам,

получаем:

$$E_{\text{бок. пов}}=\frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\iint\limits_D r^2\,dr\,d\varphi=\frac{kh\sqrt{a^2+h^2}}{a^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^2\,dr=$$

$$=\frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}.$$

Находим весь заряд:

$$E=E_{\text{осн}}+E_{\text{бок. пов}}=k\pi a^2h+\frac{2}{3}k\pi ah\sqrt{a^2+h^2}=$$

$$=\frac{k\pi ah}{3}(3a+2\sqrt{a^2+h^2}).\ \blacktriangleright$$

2.9. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az=x^2-y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$.

2.10. Определить момент инерции однородной боковой поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant a)$ относительно оси Oz.

2.11. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2=x^2+y^2+a^2$ $(a\leqslant z\leqslant a\sqrt{2})$, если плотность заряда в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки $(e=kz)$.

2.12. Определить массу, распределенную по поверхности куба $x=\pm a$, $y=\pm a$, $z=\pm a$, если поверхностная плотность в точке $P(x, y, z)$ равна $k\sqrt[3]{|xyz|}$ $(k=\text{const})$.

2.13. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az=x^2+y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2$, если плотность заряда в каждой точке равна $k\sqrt{z}$ $(k=\text{const})$.

3. Криволинейный интеграл 2-го рода. Пусть на дуге $\overset{\smile}{AB}$ кусочно гладкой кривой задано векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$, и пусть $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$ — произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, P_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные точки на дугах $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$, а $\Delta\boldsymbol{r}_\nu$ — приращение радиус-вектора $\boldsymbol{r}(P)$ на концах дуги $\overset{\smile}{A_{\nu-1}A_\nu}$. Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\boldsymbol{r}_\nu)$ при $\max\limits_\nu|\Delta\boldsymbol{r}_\nu|\to 0$ (и $n\to\infty$), который не зависит ни от способа разбиения дуги $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги, ни от выбора точек P_ν в этих частичных дугах, то этот предел называется

криволинейным интегралом 2-го рода по дуге $\overset{\smile}{AB}$ и обозначается через

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

т. е.

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \lim_{\max\limits_{\nu}|\Delta \boldsymbol{r}_\nu| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} (\boldsymbol{a}(P_\nu),\ \Delta \boldsymbol{r}_\nu). \tag{3}$$

Здесь $(\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})$ и $(\boldsymbol{a}(P_\nu),\ \Delta \boldsymbol{r}_\nu)$ — скалярные произведения векторов. Если вектор-функция $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывна на $\overset{\smile}{AB}$, то интеграл (3) существует.

Интеграл (3) называют также *линейным интегралом* вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Аналогично определяются линейные интегралы в плоских и многомерных векторных полях. Если даны параметрические уравнения дуги $\overset{\smile}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a_x(x(t),\ y(t),\ z(t))\, x'(t) + a_y(x(t),\ y(t),\ z(t))\, y'(t) + \\ + a_z(x(t),\ y(t),\ z(t))\, z'(t))\, dt. \tag{4}$$

Здесь t_0 и t_1 — значения параметра t, отвечающие точкам A и B. В отличие от криволинейных интегралов 1-го рода, линейные интегралы (3) зависят от направления, по которому совершается интегрирование вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}).$$

Простейший физический смысл линейного интеграла — работа силового поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении в нем материальной точки по кривой $\overset{\smile}{AB}$ из точки A в точку B.

Пример 4. Найти работу силового поля $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль первого витка конической винтовой линии $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ из точки $A(0, 0, 0)$ в точку $B(a, 0, a)$.

◀ Так как $dx = ae^t(\cos t - \sin t)\, dt$, $dy = ae^t(\sin t + \cos t)\, dt$, $dz = ae^t\, dt$ и

$$(\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = x\, dx + y\, dy + z\, dz = a^2 e^{2t}((\cos t - \sin t)\cos t + \\ + (\sin t + \cos t)\sin t + 1)\, dt = 2a^2 e^{2t}\, dt,$$

то, учитывая, что $t = -\infty$ в точке A и $t = 0$ в точке B, имеем

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = 2a^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t}\, dt = a^2. \ ▶$$

Замечание. Этот пример можно решить проще, если учесть, что в данном случае $(\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r},\ d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\, d(r^2)$, причем $r = |\boldsymbol{r}| = 0$ в

точке A и $r=a\sqrt{2}$ в точке B. Имеем:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\boldsymbol{F}, d\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{a\sqrt{2}} d(r^2) = \frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{a\sqrt{2}} = a^2.$$

Линейный интеграл вектора $\boldsymbol{a}$, взятый по замкнутому контуру C, называется *циркуляцией* вектора поля по данному контуру и обозначается символом $\oint\limits_C \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{r}$. Направление обхода контура указывается заранее, причем положительным считается обход против часовой стрелки, а отрицательным — по часовой стрелке.

Для плоских векторных полей $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\,\boldsymbol{j}$ имеет место следующее утверждение:

Если векторная функция $\boldsymbol{a} = a_x(x, y)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y)\,\boldsymbol{j}$ непрерывна вместе с производными $\frac{\partial a_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial a_y}{\partial x}$ в замкнутой области $\overline{G} = G + C$, то

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint\limits_G a_x dx + a_y dy$$

(формула Грина).

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint\limits_C (x+y)\, dx - (x-y)\, dy,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 = r^2$.

◀ Применяя формулу Грина, можем записать:

$$\oint\limits_C (x+y)\, dx - (x-y)\, dy = \iint\limits_{K_C} (-1-1)\, dx\, dy = -2\pi r^2,$$

так как $\iint\limits_{K_C} dx\, dy$ есть площадь круга K_C: $x^2 + y^2 \leqslant r^2$. ▶

2.14. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

2.15. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{OB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$, $O(0, 0)$, $B(1, 1)$, по следующим путям:

а) отрезок прямой OB; б) дуга параболы $x^2 = y$; в) дуга параболы $y^2 = x$; г) ломаная OAB, где $A(1, 0)$; д) ломаная OCB, где $C(0, 1)$.

2.16. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ вдоль окружности $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ в отрицательном направлении.

2.17. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\breve{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, уравнение дуги $\breve{OA}$: $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2.18. Вычислить линейный интеграл $\int\limits_{\breve{OA}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$, если $\boldsymbol{a} = -yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $\breve{OA}$ — первый виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2.19.** Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ по окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

2.20. Вычислить циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, $y = x$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$.

2.21. Вычислить работу силового поля $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a, a, 0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

2.22. $\oint\limits_C (x^2 - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$, где C — контур, образованный полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox.

2.23. $\oint\limits_C (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, где C — контур, образованный синусоидой $y = \sin x$ и отрезком оси Ox при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2.24. $\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} x^2y\,dx - xy^2\,dy$.

2.25. $\oint\limits_C (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, где C — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4. Поверхностный интеграл 2-го рода. Гладкая поверхность G в трехмерном пространстве называется *двусторонней*, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности G и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор определенной стороны поверхности, т. е. выбор направления нормали к поверхности, называется *ориентацией* поверхности.

Пусть G — кусочно гладкая ориентированная поверхность и $\boldsymbol{a}=a_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+a_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+a_z(x, y, z)\boldsymbol{k}$ — векторное поле. Разобьем поверхность G на частичные поверхности $G_1, G_2, \ldots, G_n$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, а площади частичных поверхностей G_ν, снабженных единичными нормалями $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$ в точках $P_\nu \in G_\nu$, — через $\Delta\sigma_\nu$ (т. е. считаем каждую такую площадь вектором длины $\Delta\sigma_\nu$ и направления $\boldsymbol{n}_\nu(P_\nu)$). Тогда, если существует предел последовательности интегральных сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\sigma_\nu)$ при $\max\limits_{\nu}\Delta\sigma_\nu \to 0$ (и $n \to \infty$), который не зависит ни от способа разбиения поверхности G на частичные поверхности, ни от выбора точек P_ν на этих частичных поверхностях, то этот предел называется *поверхностным интегралом 2-го рода* по поверхности G и обозначается через

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G a_x\,dy\,dz + a_y\,dx\,dz + a_z\,dx\,dy, \tag{5}$$

т. е.

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{\max\limits_{\nu}\Delta\sigma_\nu \to 0} \sum_{\nu=1}^{n}(\boldsymbol{a}(P_\nu), \Delta\sigma_\nu).$$

Если поле $\boldsymbol{a}(P)$ непрерывно на G, то интеграл (5) существует.

Поверхностный интеграл 2-го рода называют также *потоком* векторного поля $\boldsymbol{a}(P)$ через поверхность G. Его можно интерпретировать как количество жидкости или газа, протекающего за единицу времени в заданном направлении через поверхность G. Переход к другой стороне поверхности меняет направление нормали к поверхности, а потому и знак поверхностного интеграла 2-го рода.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла 1-го рода

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_G (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,d\sigma, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — единичная нормаль к поверхности, или к вычислению суммы трех двойных интегралов

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{\sigma}) = \iint\limits_{D_1} a_x(x(y, z), y, z)\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} a_y(x, y(x, z), z)\,dx\,dz + \iint\limits_{D_3} a_z(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

где D_1, D_2 и D_3 — проекции G соответственно на плоскости Oyz, Oxz и Oxy, а $x(y, z)$, $y(x, z)$ и $z(x, y)$ — выражения, полученные из уравнения поверхности G разрешением относительно соответствующих координат.

Пример 6. Найти поток вектора $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.

◀ Имеем в силу (6)

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_G (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то все три направляющих косинуса неотрицательны. Поэтому

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} x\, dy\, dz + \iint\limits_{D_2} y\, dx\, dz + \iint\limits_{D_3} z\, dx\, dy =$$

$$= 3v = 3\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi abc}{2}$$

(каждый из интегралов по D_1, D_2 и D_3 определяет объем одной восьмой части эллипсоида). ▶

Пример 7. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3R^2$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2-R^2}$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем:

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\, d\sigma = \iint\limits_G (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint\limits_G x^2\cos\alpha\, d\sigma - \iint\limits_G y^2\cos\beta\, d\sigma + \iint\limits_G z^2\cos\gamma\, d\sigma.$$

Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2+y^2+z^2=3R^2$, с боков — частью поверхности гиперболоида $x^2+y^2-z^2=R^2$, снизу кругом $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $z=0$ (рис. 93). На плоскости Oyz и Oxz поверхность G проектируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей, первые два интеграла в записи потока равны нулю:

$$\iint\limits_G x^2\cos\alpha\, d\sigma = \iint\limits_G y^2\cos\beta\, d\sigma = 0.$$

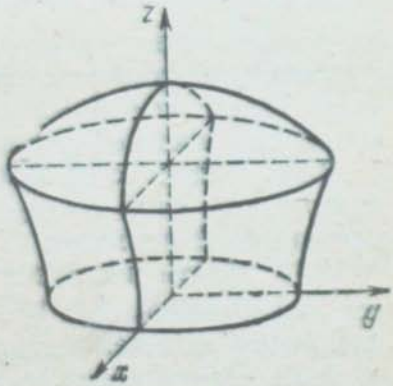


Рис. 93.

На плоскость Oxy сферический сегмент проектируется в круг (область D_3') $x^2+y^2 \leqslant 2R^2$, часть поверхности гиперболоида — в кольцо (область D_3'') $R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг (область D_3''') $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Но для сегмента сферы $\cos\gamma > 0$, для

гиперболоида $\cos\gamma < 0$, а на нижнем основании $z=0$. Поэтому

$$\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \iint\limits_G z^2\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy -$$

$$- \iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\,dx\,dy.$$

Для вычисления интегралов перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_{D_3'} (3R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} (3R^2 - r^2)\,r\,dr = 4\pi R^4,$$

$$\iint\limits_{D_3''} (x^2 + y^2 - R^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_R^{R\sqrt{2}} (r^2 - R^2)\,r\,dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Таким образом, окончательно находим: $\iint\limits_G (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma = \frac{7}{2}\pi R^4$. ▶

2.26. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant H$ в направлении внешней нормали.

2.27. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ через часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant H$, в направлении внешней нормали.

2.28. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $\frac{H}{R^2}(x^2+y^2) = z$, $z \leqslant H$, в направлении внутренней нормали.

2.29. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, в направлении внешней нормали.

2.30. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $x = \pm a$, $y = \pm a$, $z = \pm a$ в направлении внешней нормали.

2.31. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = 2x^2\boldsymbol{i} + 3y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ в направлении внешней нормали.

2.32. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, вырезаемую плоскостями $x = R$, $z = 0$, $x = 0$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

2.33. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ через часть поверхности параболоида $z=\frac{H}{R^2}(x^2-y^2)$, вырезаемую цилиндром $x^2+y^2=R^2$, ориентированной в соответствии с направлением орта $\boldsymbol{k}$.

§ 3. Соотношения между различными характеристиками скалярных и векторных полей

1. Дивергенция векторного поля и теорема Гаусса — Остроградского. *Дивергенцией* (или расхождением) векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемой через $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнутую поверхность Σ_P к величине v_P объема тела, ограниченного этой поверхностью, при $v_P\longrightarrow 0$, т. е. при условии, что поверхность стягивается в точку P:

$$(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P=\lim_{v_P\to 0}\frac{\oiint\limits_{\Sigma_P}(\boldsymbol{a},\,d\sigma)}{v_P}. \qquad (1)$$

Дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока векторного поля, «исходящего» из точки P, т. е. мощность источника (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P>0$) или стока (при $(\operatorname{div}\boldsymbol{a})_P<0$), находящегося в точке P.

В трехмерном евклидовом пространстве дивергенция поля выражается следующим образом:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса—Остроградского. *Поток векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через замкнутую поверхность Σ, лежащую в этом поле, в направлении ее внешней нормали, равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции этого векторного поля*, т. е.

$$\oiint\limits_{\Sigma}(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{n})\,d\sigma=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dv.$$

Пример 1. Используя теорему Гаусса—Остроградского, найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+R^2z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R^2}(x^2+y^2)\leqslant z\leqslant H$ в направлении внешней нормали.

◀ Имеем $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=3(x^2+y^2)+R^2$. Поэтому

$$\oiint\limits_{G}(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{n})\,d\sigma=\iiint\limits_{v}(3(x^2+y^2)+R^2)\,dv.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим

координатам. Уравнение поверхности примет вид $z=\frac{H}{R^2}r^2$,

$$\iiint\limits_{v}(3(x^2+y^2)+R^2)\,dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}(3r^2+R^2)\,r\,dr\int\limits_{\frac{Hr^2}{R^2}}^{H}dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{R}(3r^2+R^2)\left(H-\frac{Hr^2}{R^2}\right)r\,dr=\frac{2\pi H}{R^2}\int\limits_0^{R}(R^4+2R^2r^2-3r^4)\,r\,dr=$$

$$=\pi HR^4. \blacktriangleright$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского решить следующие задачи:

3.1. Доказать, что поток радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

3.2. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}-z^3\boldsymbol{k}$ через всю поверхность куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ в направлении внешней нормали.

3.3. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r$ через всю поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в направлении внешней нормали.

3.4*. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}$, направленный в отрицательную сторону оси Ox, через поверхность части параболоида $y^2+z^2=Rx$, отсекаемой плоскостью $x=R$.

3.5. Распространить понятие потока и дивергенции на случай плоского (двумерного) поля и сформулировать теорему Гаусса—Остроградского для этого случая.

3.6*. Используя решение предыдущей задачи, преобразовать циркуляцию вектора по замкнутому контуру L в плоском поле в двойной интеграл по площади, ограниченной этим контуром.

3.7. Найти с помощью теоремы Гаусса—Остроградского поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ в направлении внешней нормали.

3.8. Найти поток вектора $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}-xy^2\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)z\boldsymbol{k}$ через всю поверхность тела $x^2+y^2\leqslant R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$ в направлении внешней нормали.

2. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса. *Вихрем* векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, обозначаемым $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, называется вектор, который в каждой точке P дифференцируемости поля определяется следующим

образом:

$$(\text{пр}_s \operatorname{rot} \boldsymbol{a})_P = \lim_{\sigma_P \to 0} \frac{\oint\limits_{l_P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})}{\sigma_P}.$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор произвольного направления, l_P — малый замкнутый контур, окружающий точку P, лежащий в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{s}$ и обходимый в положительном по отношению к вектору $\boldsymbol{s}$ направлении, σ_P — площадь области, ограниченной контуром l_P; предел ищется при условии, что контур l_P стягивается в точку P. В трехмерном пространстве $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ через декартовы прямоугольные координаты вектора $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ выражается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Теорема Стокса. *Циркуляция дифференцируемого векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *по произвольному кусочно гладкому замкнутому контуру* L *равна потоку вектора* $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ *через поверхность* G, *ограниченную этим контуром* L:

$$\oint\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint\limits_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, d\sigma), \tag{2}$$

или в координатной форме

$$\oint\limits_L (a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz) =$$

$$= \iint\limits_G \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma.$$

При этом единичный вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к поверхности G направлен в такую сторону, чтобы обход контура L происходил в положительном по отношению к $\boldsymbol{n}$ направлении.

Пример 2. Проверить ответ задачи 2.19 настоящей главы при помощи теоремы Стокса.

◀ Так как $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, то $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем сам круг, образованный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ плоскостью $x + y + z = R$. Центр круга $O'\left(\frac{R}{3}, \frac{R}{3}, \frac{R}{3}\right)$; его радиус $R_1 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$. Единичный вектор нормали $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

Так как $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то находим

$$\oint\limits_L (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \iint\limits_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, d\sigma = \sqrt{3}\iint\limits_G d\sigma = \sqrt{3}\pi R_1^2 = \frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}. \ ▶$$

Пример 3. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-2z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ вдоль эллипса, образованного сечением гиперболоида $2x^2-y^2+z^2=R^2$ плоскостью $y=x$, в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$. Ответ проверить при помощи теоремы Стокса.

◀ Параметрические уравнения заданного эллипса $x=R\cos t$, $y=R\cos t$, $z=R\sin t$. Для обхода в заданном направлении параметр t надо изменять от 0 до 2π. Следовательно,

$$\oint_L (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r})=\oint_L y\,dx-2z\,dy+x\,dz=$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}(-\sin t\cos t+2\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=3\pi R^2.$$

Применим теорему Стокса. Имеем $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. За поверхность G, ограниченную контуром L, примем часть секущей плоскости, лежащей внутри эллипса. Единичный вектор нормали, направленный в нужную сторону, имеет вид $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$. Поэтому $(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})=\frac{3}{\sqrt{2}}$ и

$$\iint_G(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma=\frac{3}{\sqrt{2}}\iint_G d\sigma=\frac{3}{\sqrt{2}}\pi ab.$$

Но так как эллипс имеет полуоси $a=R\sqrt{2}$ и $b=R$, то

$$\iint_G(\operatorname{rot}\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,d\sigma=3\pi R^2.\ ▶$$

3.9*. Жидкая среда вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$ вокруг оси, проходящей через начало координат. Найти вихрь поля скоростей этой среды.

3.10. Вывести формулу Грина (см. ответ к задаче 3.6), применяя теорему Стокса к двумерному векторному полю $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$.

3.11. Пользуясь формулой Грина, убедиться в том, что площадь Q плоской области D, ограниченной кусочно гладким контуром L, можно найти при помощи любого из трех следующих интегралов:

$$Q=\oint_L x\,dy,\quad Q=-\oint_L y\,dx,\quad Q=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx.$$

3.12. Используя последнюю формулу предыдущей задачи, найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а)* петлей Декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$;

б) эволютой эллипса $x=\frac{a^2}{c}\cos^3 t$, $y=\frac{b^2}{c}\sin^3 t$ (a и b — полуоси эллипса, $c=\sqrt{a^2-b^2}$).

3.13. При помощи теоремы Стокса найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=z^2\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+y^2\boldsymbol{k}$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плоскостью $x+y+z=R$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{k}$.

3.14. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=z^3\boldsymbol{i}+x^3\boldsymbol{j}+y^3\boldsymbol{k}$ по сечению гиперболоида $2x^2-y^2+z^2=R^2$ плоскостью $x+y=0$ в положительном направлении относительно орта $\boldsymbol{i}$. Проверить при помощи теоремы Стокса.

3.15. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ по контуру, вырезаемому в первом октанте из параболоида $x^2+y^2=Rz$ плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=R$ в положительном направлении относительно внешней нормали параболоида. Проверить при помощи теоремы Стокса.

3. Оператор Гамильтона и его применение. Все операции векторного анализа можно выразить при помощи оператора Гамильтона — символического вектора ∇ (читается — набла), определяемого равенством

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя известные операции умножения вектора на скаляр, скалярного и векторного произведения двух векторов, находим:

$$\operatorname{grad} u=\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}=\nabla u;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=(\boldsymbol{s},\ \operatorname{grad} u)=(\boldsymbol{s},\ \nabla u)=(\boldsymbol{s},\ \nabla)\,u;$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=(\nabla,\ \boldsymbol{a});$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=[\nabla,\ \boldsymbol{a}].$$

По аналогии с производной по направлению от скалярной функции $\frac{\partial u}{\partial s}$ вводится понятие производной по направлению единичного

вектора $\boldsymbol{s}$ от векторной функции $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Именно,

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial s}=(\boldsymbol{s}, \nabla)\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_x)+\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_y)+\boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{s}, \operatorname{grad} a_z)=$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial s}\,\boldsymbol{i}+\frac{\partial a_y}{\partial s}\,\boldsymbol{j}+\frac{\partial a_z}{\partial s}\,\boldsymbol{k}.$$

Производные по направлению произвольного (не единичного) вектора $\boldsymbol{c}$ отличаются от производных по направлению единичного вектора только тем, что в них входит дополнительный скалярный множитель $|\boldsymbol{c}|$:

$$(\boldsymbol{c}, \nabla)\,u=(\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} u),$$

$$(\boldsymbol{c}, \nabla)\,\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_x)\,\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_y)\,\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{c}, \operatorname{grad} a_z)\,\boldsymbol{k}.$$

С помощью оператора Гамильтона удобно выполнять дифференциальные операции векторного анализа над сложными выражениями (произведение двух или более скалярных функций, произведение скалярной функции на вектор, скалярное и векторное произведения векторов и т. п.). Следует лишь помнить, что это оператор дифференцирования, и не забывать правило дифференцирования произведения.

Пример 4. Найти градиент произведения двух скалярных функций u и v.

◀ Имеем

$$\operatorname{grad}(uv)=\nabla\,(uv)=\nabla\,(\overset{\downarrow}{u}v)+\nabla\,(u\overset{\downarrow}{v})$$

(стрелка указывает функцию, на которую «действует» оператор). Но

$$\nabla\,(\overset{\downarrow}{u}v)=v\,\nabla u=v\operatorname{grad} u,$$

$$\nabla\,(u\overset{\downarrow}{v})=u\,\nabla v=u\operatorname{grad} v.$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad} uv=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v. \ ▶$$

Пример 5. Найти $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

◀ Так как по известной формуле векторной алгебры $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$, то, учитывая соотношение $[\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]]=0$, имеем:

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]=[\nabla, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]]=[\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{c}]]+[\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}]]=(\nabla, \boldsymbol{c})\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}-(\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}})\,\boldsymbol{c}.$$

Но $(\nabla, \boldsymbol{c})\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{c}, \nabla)\,\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}$, а это есть производная вектора $\boldsymbol{a}$ по направлению вектора $\boldsymbol{c}$. Далее,

$$(\nabla, \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\,(\nabla, \boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a}.$$

Таким образом, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{c}, \nabla)\,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. ▶

Выполнить следующие дифференциальные операции (здесь и дальше в задачах этого параграфа $\boldsymbol{c}$ — постоянный, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — переменные векторы):

3.16. Найти $\operatorname{div}(\boldsymbol{c}u)$ и $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}u)$.

3.17**. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

3.18. Найти $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ и $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

3.19*. Найти $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{u})$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)$ и $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

4. Дифференциальные операции 2-го порядка. Можно образовать пять дифференциальных операций 2-го порядка:

1) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\nabla, \nabla) u = \nabla^2 u = \Delta u$ (лапласиан функции);
2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla] u$;
3) $\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a})$;
4) $\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}])$;
5) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]]$.

Кроме того, операцию ∇^2 можно применять и к векторным полям, т. е. рассматривать операцию $\nabla^2 \boldsymbol{a}$.

Вторая и четвертая операции приводят к нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla] u \equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]) \equiv 0.$$

Это следует из векторного смысла оператора ∇: в первом случае формально мы имеем векторное произведение двух коллинеарных векторов, а во втором — смешанное произведение компланарных векторов.

3.20. Получить выражения для

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla^2 u,$$
$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla, \boldsymbol{a}),$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = [\nabla[\nabla, \boldsymbol{a}]],$$
$$\nabla^2 \boldsymbol{a} = \nabla^2 a_x \boldsymbol{i} + \nabla^2 a_y \boldsymbol{j} + \nabla^2 a_z \boldsymbol{k}$$

через производные скалярного или векторного полей.

3.21. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = x^3 \boldsymbol{i} + y^3 \boldsymbol{j} + z^3 \boldsymbol{k}$.

3.22. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = xy^2 \boldsymbol{i} + yz^2 \boldsymbol{j} + zx^2 \boldsymbol{k}$.

3.23. Найти $\nabla^2 \boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = (y^2 + z^2) x\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2) y\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2) z\boldsymbol{k}$.

3.24. Найти $\operatorname{div}\operatorname{grad}(uv)$.

3.25. Найти $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})$ и $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный, $\boldsymbol{a}$ — переменный вектор).

3.26. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})$.

§ 4. Специальные виды векторных полей

1. Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *потенциальным*, если вектор поля $\boldsymbol{a}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(P)$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} u(P). \tag{1}$$

Функцию $u(P)$ в этом случае называют *потенциалом* векторного поля. Необходимым и достаточным условием потенциальности дважды дифференцируемого в односвязной области поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ является

равенство нулю вихря этого поля:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0. \tag{2}$$

Пример 1. Проверить, что вихрь трехмерного векторного поля $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u$ тождественно равен нулю (функцию $u(P)$ предполагаем дважды дифференцируемой).

◀ Так как $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$, то, учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\boldsymbol{i} +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{k} = 0. \ ▶$$

В п. 4 предыдущего параграфа это равенство было получено с использованием свойств символического вектора набла.

Потенциальное поле обладает следующими свойствами.

1. В области непрерывности потенциала поля линейный интеграл от вектора поля, взятый между двумя точками поля, не зависит от пути интегрирования и равен разности значений потенциала поля в конце и начале пути интегрирования

$$\int_A^B (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B (\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = \int_A^B du = u(B) - u(A) \tag{3}$$

(использована легко проверяемая формула $(\operatorname{grad} u, d\boldsymbol{r}) = du$).

2. Циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области непрерывности поля, равна нулю.

3. Если поле $\boldsymbol{a}$ потенциально, то потенциал поля $u(P)$ в произвольной точке P может быть вычислен по формуле (3):

$$u(P) = \int_A^P (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C, \tag{4}$$

причем $C = u(A)$, что легко получается подстановкой в (4) вместо переменной точки P фиксированной точки A.

Для вычисления интеграла (4) можно выбрать любой путь — проще всего в качестве такого пути выбрать ломаную со звеньями, параллельными осям координат, соединяющую точки A и P. За точку A удобно принимать начало координат (если оно лежит в области непрерывности поля).

Пример 2. Найти потенциал поля $\boldsymbol{a} = 2xy\boldsymbol{i} + (x^2 - 2yz)\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$.

◀ Убедимся, что поле потенциально:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z} = -2y, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0.$$

За путь интегрирования примем ломаную $OABP$, где $O(0, 0, 0)$, $A(X, 0, 0)$, $B(X, Y, 0)$, $P(X, Y, Z)$. Находим:

$$u(X, Y, Z) = \int\limits_{OABP} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C = \int\limits_{O}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + \int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) + C,$$

$$(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 2xy\,dx + (x^2 - 2yz)\,dy - y^2\,dz.$$

Так как на OA имеем $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $0 \leqslant x \leqslant X$, то

$$\int\limits_{O}^{A} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = 0.$$

Аналогично на AB имеем $x = X$, $dx = 0$, $z = 0$, $dz = 0$, $0 \leqslant y \leqslant Y$, поэтому

$$\int\limits_{A}^{B} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{0}^{Y} X^2\,dy = X^2 Y.$$

На BP имеем $x = X$, $y = Y$, $dx = dy = 0$, $0 \leqslant z \leqslant Z$, значит,

$$\int\limits_{B}^{P} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{0}^{Z} Y^2\,dz = -Y^2 Z.$$

Таким образом, $u(X, Y, Z) = X^2 Y - Y^2 Z + C$. Возвращаясь к переменным x, y, z, получаем

$$u(P) = x^2 y - y^2 z + C. \blacktriangleright$$

Замечание. Изложенный метод отыскания потенциала поля применяется при решении таких эквивалентных рассмотренной задач математического анализа, как восстановление функции двух, трех и n переменных по их полным дифференциалам, а также при интегрировании дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

Найти потенциалы следующих плоских и трехмерных полей:

4.1. $\boldsymbol{a} = (3x^2 y - y^3)\,\boldsymbol{i} + (x^3 - 3xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.2. $\boldsymbol{a} = \dfrac{\sin 2x \cos 2y \cdot \boldsymbol{i} + \cos 2x \sin 2y \cdot \boldsymbol{j}}{\sqrt{\cos^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y}}$.

4.3. $\boldsymbol{a} = (yz - xy)\,\boldsymbol{i} + \left(xz - \dfrac{x^2}{2} + yz^2\right)\boldsymbol{j} + (xy + y^2 z)\,\boldsymbol{k}$.

4.4*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\boldsymbol{k}$.

4.5*. $\boldsymbol{a} = \left(\dfrac{z}{y^2} - \dfrac{y}{z^2} - \dfrac{2yz}{x^3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{z}{x^2} - \dfrac{x}{z^2} - \dfrac{2xz}{y^3}\right)\boldsymbol{j} +$
$+ \left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2xy}{z^3}\right)\boldsymbol{k}$.

4.6.** Доказать, что во всюду непрерывном потенциальном векторном поле векторные линии не могут быть замкнутыми.

Если в плоском потенциальном поле есть точки, в которых поле теряет свойство непрерывности (так называемые *особые* точки), то циркуляция по замкнутому контуру, окружающему такую точку, может быть отлична от нуля. В этом случае циркуляция по контуру, обходящему данную особую точку один раз в положительном направлении, не зависит от формы контура и называется *циклической постоянной* относительно данной особой точки.

Аналогичными свойствами обладают трехмерные поля с особыми линиями, вдоль которых поле теряет свойство непрерывности.

4.7. Убедиться в потенциальности поля $\boldsymbol{a}=\frac{x\boldsymbol{j}-y\boldsymbol{i}}{x^2+y^2}$. Определить его особую точку и ее циклическую постоянную.

4.8*. Доказать сформулированное выше свойство о том, что циркуляция по замкнутому контуру, окружающему особую точку, не зависит от формы контура.

4.9*. Воспользовавшись формулой (4) для определения потенциала поля, убедиться в том, что потенциал плоского поля, имеющего особые точки, будет многозначной функцией.

2. Соленоидальное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *соленоидальным*, если дивергенция этого поля равна нулю: $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$.

Для трехмерного поля это условие можно переписать в виде

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=0. \qquad (5)$$

В таком поле в силу теоремы Гаусса—Остроградского равен нулю поток вектора поля через любую замкнутую поверхность. Исключение может быть только в случае наличия в таком поле особых точек (в которых вектор поля не определен и дивергенция поля, если ее определять в такой точке при помощи формулы (1) § 3, отлична от нуля). В этом случае поток через замкнутую поверхность может быть отличен от нуля, но будет иметь одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, окружающих данную группу особых точек.

Пример 3. Доказать, что для любого дважды дифференцируемого трехмерного векторного поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ поле вихрей соленоидально.

◀ Имеем

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Учитывая равенство смешанных производных 2-го порядка, получаем

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0. \ ▶$$

В п. 4 предыдущего параграфа это соотношение доказано с помощью оператора набла.

4.10. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек, равен нулю.

Проверить соленоидальность следующих полей:

4.11. $\boldsymbol{a}=(x^2y+y^3)\,\boldsymbol{i}+(x^3-xy^2)\,\boldsymbol{j}$.

4.12. $\boldsymbol{a}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}-(x^2+y^2)\,z\boldsymbol{k}$.

4.13. $\boldsymbol{a}=\frac{x}{yz}\,\boldsymbol{i}+\frac{y}{xz}\,\boldsymbol{j}-\frac{(x+y)\ln z}{xy}\,\boldsymbol{k}$.

4.14. $\boldsymbol{a}=\frac{x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{(x^2-y^2)\,z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

4.15*. Доказать, что в соленоидальном поле поток вектора поля через поперечное сечение любой векторной трубки (определенный в одном и том же направлении) сохраняет постоянное значение.

3. Лапласово (или гармоническое) поле. Векторное поле называется *лапласовым* (или *гармоническим*), если оно одновременно и потенциальное и соленоидальное, т. е. если

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{a}=0. \tag{6}$$

Пример 4. Доказать, что потенциал u двумерного или трехмерного лапласова поля является *гармонической функцией* двух или трех переменных $\left(\text{т. е. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\right)$.

◀ Действительно, имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

для двух переменных,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

для трех переменных. ▶

Пример 5. Показать, что потенциал поля сил тяготения, возникающего в пространстве, окружающем некоторую точечную массу, равен k/r (k — константа) и что поле сил тяготения лапласово.

◀ Поместим начало координат в центре притяжения. Тогда

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\frac{k}{r}=k\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-k\,\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Но это — вектор силы притяжения. Действительно, он направлен к центру притяжения, поскольку $-\boldsymbol{r}/r$ — единичный вектор радиус-вектора точки $P(\boldsymbol{r})$, направленный к началу координат, а его модуль равен k/r^2, т. е. обратно пропорционален квадрату расстояния от центра притяжения. Покажем, что $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=-k\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$. Имеем:

$$a_x=-\frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}=-k\,\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=-k\,\frac{y^2+z^2-2x^2}{r^5}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial a_y}{\partial y}=-k\frac{x^2+z^2-2y^2}{r^5},\quad \frac{\partial a_z}{\partial z}=-k\frac{x^2+y^2-2z^2}{r^5},$$

и потому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=-\frac{k}{r^5}((y^2+z^2-2x^2)+(x^2+z^2-2y^2)+$$
$$+(x^2+y^2-2z^2))=0.$$

Итак, поле сил тяготения лапласово. ▶

4.16. Доказать, что плоское векторное поле, потенциалом которого служит функция $u=\ln r$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, лапласово.

4.17*. Для гармонических в области G функций u и w доказать следующие формулы Грина:

а) $$\oiint\limits_S u\frac{\partial w}{\partial n}\,d\sigma=\iiint\limits_G(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}w)\,dv$$

(первая формула Грина),

б) $$\oiint\limits_S\left(u\frac{\partial w}{\partial n}-w\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma=0$$

(вторая формула Грина),

в) $$\oiint\limits_S\frac{\partial(uw)}{\partial n}\,d\sigma=2\iiint\limits_G(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}w)\,dv$$

(третья формула Грина).

4.18. Являются ли гармоническими следующие функции:

а) $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

б) $u=r-x=\sqrt{x^2+y^2}-x$;

в) $u=Ax+By+C$;

г) $u=Ax^2+2Bxy+Cy^2$;

д) $u=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$;

е) $u=Ax+By+Cz+D$;

ж) $u=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$;

з) $u=a_{111}x^3+a_{222}y^3+a_{333}z^3+3a_{112}x^2y+3a_{113}x^2z+$
$+3a_{122}xy^2+3a_{223}y^2z+3a_{133}xz^2+3a_{233}yz^2+6a_{123}xyz$.

§ 5. Применение криволинейных координат в векторном анализе

1. Криволинейные координаты. Основные соотношения. В пространстве задана система координат, если каждой точке P поставлена в соответствие тройка чисел q_1, q_2, q_3, причем различным тройкам чисел отвечают различные точки пространства. Числа q_1, q_2, q_3 называются *координатами* (или *криволинейными координатами*) точки $P = P(q_1, q_2, q_3)$. Наиболее употребительными являются следующие системы координат:

1) Декартова прямоугольная система координат. Здесь $q_1 = x$ — абсцисса точки P, $q_2 = y$ — ордината и $q_3 = z$ — аппликата.

2) Цилиндрическая система координат. Здесь за q_1 принимается расстояние r от точки P до оси z, $q_1 = r$ $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \varphi$ — угол, составленный проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, а $q_3 = z$ — аппликата точки P.

При этом цилиндрические координаты связаны с декартовыми прямоугольными координатами при помощи формул

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

3) Сферическая система координат. Здесь $q_1 = r$ — длина радиус-вектора точки P $(0 \leqslant r < \infty)$, $q_2 = \theta$ — угол между положительным направлением оси Oz и радиус-вектором OP точки P $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ [1], $q_3 = \varphi$ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиус-вектора OP на плоскость Oxy $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Имеют место формулы:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta$$

и, обратно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Линия, вдоль которой изменяется только одна координата q_i, называется *координатной q_i-линией*, а единичный касательный вектор к этой линии, направленный в сторону возрастания q_i, — *единичным координатным ортом* $\boldsymbol{e}_{q_i}$ в точке $P(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. Аналогично определяются q_2- и q_3-линии и единичные орты $\boldsymbol{e}_{q_2}, \boldsymbol{e}_{q_3}$.

Если векторы $\boldsymbol{e}_{q_1}, \boldsymbol{e}_{q_2}, \boldsymbol{e}_{q_3}$ попарно ортогональны в любой точке пространства, то соответствующая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 называется *ортогональной*.

---

[1]) Иногда за координату q_2 сферической системы принимают угол между радиус-вектором OP и плоскостью Oxy (см. § 2 гл. 8).

Пусть $P(q_1, q_2, q_3)$ — произвольная точка пространства, $P_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3)$ — точка, лежащая на q_1-линии точки P, и $|\widetilde{PP_1}|$ — длина дуги $\widetilde{PP_1}$. Тогда число

$$L_1 = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{|\widetilde{PP_1}|}{\Delta q_1}$$

называется *коэффициентом Ламе* координаты q_1 в точке P. Аналогично определяются коэффициенты Ламе L_2 и L_3 координат q_2 и q_3.

Если точка $P(x, y, z)$ имеет криволинейные координаты $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$, $q_3 = q_3(x, y, z)$, то дифференциалы радиус-векторов $d\boldsymbol{r}_{q_\nu}$ координатных линий и дифференциалы их дуг ds_{q_ν} определяются с помощью равенств

$$d\boldsymbol{r}_{q_\nu} = \boldsymbol{i}\frac{\partial x}{\partial q_\nu} dq_\nu + \boldsymbol{j}\frac{\partial y}{\partial q_\nu} dq_\nu + \boldsymbol{k}\frac{\partial z}{\partial q_\nu} dq_\nu = L_\nu \boldsymbol{e}_{q_\nu} dq_\nu,$$

$$ds_{q_\nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\nu}\right)^2} dq_\nu = L_\nu dq_\nu,$$

($\nu = 1, 2, 3$), где L_ν — коэффициенты Ламе.

Множество точек $P(q_1, q_2, q_3)$, для которых одна из координат постоянна, называется *координатной поверхностью*.

Дифференциалы площадей координатных поверхностей определяются по формулам

$$d\sigma_{q_1} = L_2 L_3\, dq_2\, dq_3, \quad d\sigma_{q_2} = L_1 L_3\, dq_1\, dq_3, \quad d\sigma_{q_3} = L_1 L_2\, dq_1\, dq_2,$$

а дифференциал объема

$$dv = L_1 L_2 L_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

Найти вид координатных линий и координатных поверхностей и построить их в произвольной точке для следующих случаев:

5.1. Для декартовой прямоугольной системы координат.

5.2. Для цилиндрической системы координат.

5.3. Для сферической системы координат.

Вычислить коэффициенты Ламе:

5.4. В декартовой прямоугольной системе координат.

5.5. В цилиндрической системе координат.

5.6. В сферической системе координат.

Найти дифференциалы дуг координатных линий, дифференциалы площадей координатных поверхностей и дифференциал объема:

5.7. В декартовой прямоугольной системе координат.

5.8. В цилиндрической системе координат.

5.9. В сферической системе координат.

2. Дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных координатах. Указанные операции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{grad} u=\frac{1}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_{q_1}+\frac{1}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_{q_2}+\frac{1}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2L_3a_{q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(L_1L_3a_q)+\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1L_2a_{q_3})\right),$$

(здесь $\boldsymbol{a}=a_{q_1}\boldsymbol{e}_{q_1}+a_{q_2}\boldsymbol{e}_{q_2}+a_{q_3}\boldsymbol{e}_{q_3}$),

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(L_3a_{q_3})-\frac{\partial}{\partial q_3}(L_2a_{q_2})\right)\boldsymbol{e}_{q_1}+\frac{1}{L_1L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_3}(L_1a_{q_1})-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_1}(L_3a_{q_3})\right)\boldsymbol{e}_{q_2}+\frac{1}{L_1L_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(L_2a_{q_2})-\frac{\partial}{\partial q_2}(L_1a_{q_1})\right)\boldsymbol{e}_{q_3},$$

$$\Delta u=\nabla^2u=\frac{1}{L_1L_2L_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{L_2L_3}{L_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{L_1L_3}{L_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{L_1L_2}{L_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right).$$

Для цилиндрических координат r, φ и z найти выражения:

5.10. $\operatorname{grad} u$. **5.11.** Δu. **5.12.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. **5.13.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

Для сферических координат r, θ, φ найти выражения:

5.14. $\operatorname{grad} u$. **5.15.** Δu. **5.16.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. **5.17.** $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

Пример 1. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a}=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

◀ Так как в данном случае $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=\boldsymbol{r}$, то

$$\boldsymbol{a}=\frac{r\boldsymbol{e}_r-z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

По формулам, полученным при решении задач 5.12 и 5.13, находим:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_r)}{\partial r}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{1}{r}\left(\frac{2r(r^2+z^2)-r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}-r\frac{(r^2+z^2)-z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{2z^2}{(r^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi+$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z=-\frac{2rz}{(r^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\varphi.\ ▶$$

5.18. Вывести формулы:

а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\nu=\dfrac{1}{L_1L_2L_3}\dfrac{\partial(L_jL_k)}{\partial q_\nu}$; б) $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\nu=\dfrac{1}{L_\nu}[\operatorname{grad}L_\nu,\ \boldsymbol{e}_\nu]$.

5.19. Используя формулы, выведенные при решении задачи 5.18, найти $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ для единичных координатных векторов цилиндрической системы координат:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$; в) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_z$.

5.20. Задача, аналогичная 5.19, для сферической системы координат:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r$; б) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\theta$; в) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_\varphi$.

5.21. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\varphi)$; в) $u = f(z)$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

5.22. Найти все гармонические функции вида:

а) $u = f(r)$; б) $u = f(\theta)$; в) $u = f(\varphi)$

(r, θ, φ — сферические координаты).

5.23. Перейти к сферическим координатам в выражении скалярного поля $u = \dfrac{2xy(z^2 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ и найти u, $\operatorname{grad} u$ и $\nabla^2 u$.

5.24. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении скалярного поля $u = \dfrac{2xyz + (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и найти u, $\operatorname{grad} u$ и $\nabla^2 u$.

5.25. Перейти к сферическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

5.26. Перейти к цилиндрическим координатам в выражении векторного поля $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - z\sqrt{x^2 + y^2}\,\boldsymbol{k}$ и найти $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$.

3. Центральные, осевые и осесимметрические скалярные поля. Скалярное поле называется *центральным*, если функция поля $u = u(P)$ зависит только от расстояния точки P поля от некоторой постоянной точки — его центра. Если начало координат поместить в центр поля, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться сферическими координатами. Поверхностями уровня такого поля будут сферы с центром в центре поля, и потому эти поля часто называют *сферическими*.

Скалярное поле называют *осевым*, если функция поля $u(P)$ зависит только от расстояния точки поля P от некоторой оси. Если принять эту ось за ось Oz и обозначить расстояние от точки P до нее через r, то функция u примет вид

$$u = u(r) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

При исследовании таких полей целесообразно пользоваться цилиндрическими координатами. Поверхностями уровня таких полей явля-

ются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью поля. Эти поля называют также *цилиндрическими*.

Если функция $u(P)$ скалярного поля принимает одни и те же значения в соответствующих точках всех полуплоскостей, проходящих через одну и ту же прямую (ось поля), то такое поле называют *осесимметрическим*. Поверхности уровня такого поля — поверхности вращения, оси которых совпадают с осью поля. Если ось поля принять за ось Oz, то при исследовании таких полей целесообразно пользоваться либо сферическими, либо цилиндрическими координатами. Функцию $u=u(P)$ можно в этом случае представить либо в виде

$$u=u(r, \theta)$$

(в сферических координатах), либо в виде

$$u=u(r, z)$$

(в цилиндрических координатах).

Найти градиенты и лапласианы следующих полей:

5.27. $u=f(r), \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5.28. $u=f(r), \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.29. $u=F(r, \theta)$ (r, θ — сферические координаты).

5.30. $u=F(r, z)$ (r, z — цилиндрические координаты).

Замечание. Градиенты центральных, осевых и осесимметрических полей образуют векторные поля того же характера — центральные, осевые и осесимметрические.

ОТВЕТЫ

1.1. Линии уровня — параболы $y^2=C-x$. **1.2.** Линии уровня — гиперболы $xy=C$ (при $C=0$ — совокупность координатных осей). **1.3.** Линии уровня — прямые $y=Cx$. **1.4.** Поверхности уровня — параллельные плоскости $x+y+z=C$. **1.5.** Поверхности уровня — однополостные и двуполостные гиперболоиды $x^2+y^2-z^2=\pm C^2$ (при $C=0$ — конус $x^2+y^2-z^2=0$). **1.6.** Поверхности уровня — параболоиды вращения $x^2+y^2=z+C$. **1.7.** Гиперповерхности уровня — 4-мерные параллельные плоскости $x_1+x_2+x_3+x_4=C$. **1.8.** Гиперповерхности уровня — 4-мерные сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=C^2$. **1.9.** Окружности $x^2+y^2=C^2$. **1.10.** Гиперболы $xy=C$ (при $C=0$ — совокупность координатных осей). **1.11.** Параболы $y^2=2(x+C)$. **1.12.** Прямые $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$. **1.13.** Окружности, являющиеся сечениями сфер $x^2+y^2+z^2=C_1^2$ плоскостями $c_x x+c_y y+c_z z=C_2$, перпендикулярными к вектору $\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$. **1.14.** Линии пересечения гиперболических цилиндров $y^2-x^2=C_1$ с такими же цилиндрами $z^2-x^2=C_2$. **1.15.** Окружности, являющиеся линиями пересечения сфер $x^2+y^2+z^2=C_1^2$ с плоскостями $x+y+z=C_2$. **1.16.** Прямые 4-мерного пространства, перпендикулярные к оси Ox_3 и ее пересекающие: $\frac{x_1}{l_1}=\frac{x_2}{l_2}=\frac{x_4}{l_4}$; $x_3=C$. **1.17.** а) Конические поверхности

с вершинами в начале координат, направляющими которых служат заданные замкнутые кривые; б) тороидальные поверхности, образованные окружностями с центрами на прямой $x=y=z$, лежащими в плоскостях $x+y+z=C$, сечениями которых служат заданные замкнутые кривые. **1.21.** 13/5. **1.22.** $4/\sqrt{5}$. **1.23.** 14/3. **1.24.** $\cos\varphi = -4/\sqrt{41}$. **1.25.** $\frac{\partial u}{\partial n}=2\sqrt{6}$, $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$. **1.26.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\times(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$. **1.27.** $P(3, 3, -3)$. **1.30.** а) $xy=C$; б) $\begin{cases} x^2-y^2=C_1, \\ x^2-z^2=C_2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=C_1x, \\ z=C_2/x. \end{cases}$

2.1. $\frac{9}{64}k\pi a^3$. **2.2.** $2k\pi a\sqrt{2a}$. **2.3.** $k\pi a^2$. **2.4.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.5.** $\frac{ka\sqrt{3}}{2}$. **2.6.** $F=-\frac{Mmc}{(a^2+c^2)^{3/2}}$. **2.7.** αr^2. **2.8.** $\frac{4}{3}\beta r^4$. **2.9.** $\frac{8ka^3}{15}(\sqrt{2}+1)$. **2.10.** $\frac{\pi a^4\sqrt{2}}{2}$. **2.11.** $\frac{k\pi a^3}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **2.12.** $\frac{27}{2}ka^3$. **2.13.** $\frac{\pi k}{4}a^2\sqrt{a}\times(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))$. **2.14.** πab. **2.15.** а) 2/3; б) 0,7; в) 0,7; г) 1, д) 1. **2.16.** $2\pi R^3$. **2.17.** 91/60. **2.18.** $2\pi^2a^2h$. **2.19.** $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. ◀ $z=R-x-y$, $x^2+y^2+(R-x-y)^2=R^2$, или $x^2+xy+y^2=R(x+y)$. Положим $y=tx$. Тогда имеем: $x=\frac{R(1+t)}{1+t+t^2}$, $y=\frac{R(t+t^2)}{1+t+t^2}=R-\frac{R}{1+t+t^2}$, $z=-\frac{Rt}{1+t+t^2}$. Значению $t=0$ соответствует точка $A(R, 0, 0)$, значениям $t=\pm\infty$ — точка $B(0, R, 0)$, значению $t=-1$ — точка $C(0, 0, R)$. Обходу в положительном направлении относительно оси Oz соответствует обход $BCAB$, т. е. изменение t от $-\infty$ через -1 и 0 до $+\infty$. Далее, $dx=-\frac{R(t^2+2t)}{(1+t+t^2)^2}dt$, $dy=\frac{R(2t+1)}{(1+t+t^2)^2}dt$, $dz=\frac{R(t^2-1)}{(1+t+t^2)^2}dt$. Получаем $z\,dx+x\,dy+y\,dz=\frac{R^2(1+2t+3t^2+2t^3+t^4)}{(1+t+t^2)^3}dt=\frac{R^2\,dt}{1+t+t^2}$, откуда $\oint\limits_C(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})=$

$$=R^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^2}=R^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2R^2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$=\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. ▶ **2.20.** $2\pi a^2$. **2.21.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{7}{3}\right)a^3$. **2.22.** $2r^3$. **2.23.** -4π. **2.24.** 0. **2.25.** $-1/3$. **2.26.** $\frac{\pi R^2H}{3}$. **2.27.** $\frac{\pi R^2H}{4}$. **2.28.** $\frac{\pi R^2H^2}{3}$. **2.29.** $\frac{\pi R^4}{8}$. **2.30.** 0. **2.31.** πR^4. **2.32.** $-\frac{R^2H}{3}$. **2.33.** 0.

— 3.2. a^5. 3.3. $4\pi R^2$. 3.4. $-\pi R^3$. ● Замкнуть поверхность, добавив основание параболического сегмента, и вычесть соответствующую ему часть потока. 3.5. Если $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$, то поток вектора $\boldsymbol{a}$ через дугу $\overset{\frown}{AB}$ определится формулой $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,ds=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}a_x\,dx-a_y\,dy$. Теорема Гаусса—Остроградского для плоского поля: $\oint\limits_L(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,ds=$ $=\oint\limits_L a_x\,dy-a_y\,dx=\iint\limits_Q\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)dx\,dy$. 3.6. $\oint\limits_L a_x\,dx+a_y\,dy=$ $=\iint\limits_Q\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dx\,dy$ (формула Грина). ● Положить в предыдущей формуле (задача 3.5) $a_x=a_y$, $a_y=-a_x$. 3.7. $\frac{R^5}{3}$. 3.8. $\frac{\pi R^4 H}{2}$. 3.9. $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$. ● Скорость $\boldsymbol{v}$ точки $P(\boldsymbol{r})$, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, проходящей через начало координат, равна $[\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{r}]$. 3.12. а) a^2. ● Перейти к параметрической форме, положив $y=tx$; петле соответствует изменение t от 0 до $+\infty$. б) $\frac{3}{8}\pi\frac{a^2b^2}{c^2}$. 3.13. $\frac{4}{3}\pi R^3$. 3.14. $\frac{3}{2}\pi R^4$. 3.15. $\frac{R^3}{3}$. 3.16. $\operatorname{div}(c\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{c},\ \operatorname{grad}\boldsymbol{u})$, $\operatorname{div}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\operatorname{grad}\boldsymbol{u})$. 3.17. $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=[\boldsymbol{c},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{a}$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=[\boldsymbol{b},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{b}]+(\boldsymbol{b},\ \nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\ \nabla)\boldsymbol{b}$. ▶ Найдем предварительно $[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]$. Имеем: $[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\ [\nabla,\ \boldsymbol{a}]]=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\nabla-$ $-(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{a}=\nabla(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})-(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{a}$. Отсюда $\nabla(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=[\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{a}$; далее, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}},\ \boldsymbol{b})+\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{a})$ и используем предыдущий результат. ▶ 3.18. $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{c},\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-$ $-(\boldsymbol{a},\operatorname{rot}\boldsymbol{b})$. 3.19. $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{u})=[\operatorname{grad}u,\ \boldsymbol{c}]$, $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}u)=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}u,\ \boldsymbol{a}]$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\ \nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\ \nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$. ● См. решение примера 5. 3.20. $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=$ $=\nabla(\nabla,\ \boldsymbol{a})=\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(\operatorname{div}\boldsymbol{a})}{\partial z}\boldsymbol{k}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=$ $=[\nabla,\ [\nabla,\ \boldsymbol{a}]]=\nabla(\nabla,\ \boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\nabla^2\boldsymbol{a}$, $\nabla^2\boldsymbol{a}=\nabla^2a_x\boldsymbol{i}+$ $+\nabla^2a_y\boldsymbol{j}+\nabla^2a_z\boldsymbol{k}$. 3.21. $6\boldsymbol{r}=6(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. 3.22. 0. 3.23. $4\boldsymbol{r}=$ $=4(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$. 3.24. $u\operatorname{div}\operatorname{grad}v+2(\operatorname{grad}u,\ \operatorname{grad}v)+v\operatorname{div}\operatorname{grad}u$. 3.25. $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c},\ \nabla)\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+$ $+\operatorname{div}\boldsymbol{a}\operatorname{grad}u+[\operatorname{grad}u,\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\operatorname{grad}u,\ \nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a},\ \nabla)\operatorname{grad}u$. 3.26. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{c},\ \nabla)\operatorname{grad}u-\boldsymbol{c}\nabla^2u$.

4.1. x^3y-xy^3+C. 4.2. $2\sqrt{\cos^2x\sin^2y+\sin^2x\cos^2y}+C$. 4.3. $xyz-\frac{x^2y}{2}+\frac{y^2z^2}{2}+C$. 4.4. $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+C$. ● За начальную точку A принять точку (1, 1, 1) или любую другую точку, не лежащую на осях координат. 4.5. $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}-\frac{xy}{z^2}+C$. ● См. указа-

ние к предыдущей задаче. **4.6.** ◀ Если бы во всюду непрерывном потенциальном поле могли существовать замкнутые векторные линии, то циркуляция по такой линии не могла бы быть равной нулю, так как произведение $(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r})$ вдоль всей линии сохраняло бы постоянный знак, и поэтому $\oint (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}) \neq 0$. ▶ **4.7.** Особая точка $O(0, 0)$, циклическая постоянная равна 2π. **4.8.** ● Взять два произвольных замкнутых контура, обходящих данную особую точку: AMA и BNB. Соединить точки M и N отрезком прямой и к сложному контуру $AMNBNMA$ применить формулу Грина. **4.9.** ● Использовать при определении потенциала пути, обходящие по нескольку раз и в различных направлениях особые точки. **4.15.** ● Применить теорему Гаусса—Остроградского и учесть, что на боковой поверхности трубки $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$. **4.17.** ● Применить теорему Гаусса—Остроградского и учесть, что для гармонических функций $\nabla^2 u = 0$. **4.18.** а) Нет; б) нет; в) да; г) только при $A + C = 0$; д) только, если $A + C = B + D = 0$; е) да; ж) только при $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$; з) только если $a_{111} + a_{132} + a_{133} = a_{112} + a_{222} + a_{233} = a_{113} + a_{223} + a_{333} = 0$.

5.1. Линии x: $\frac{x}{1} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}$; линии y: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - z_0}{0}$; линии z: $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z}{1}$. **5.2.** Линии r: $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (лучи, исходящие из точек оси Oz, лежащие в горизонтальных плоскостях); линии φ: $r = r_0$, $z = z_0$ (окружности с центрами на оси Oz радиуса r_0, лежащие в плоскостях $z = z_0$); линии z: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (прямые, параллельные оси Oz). **5.3.** Линии r: $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ (лучи, исходящие из начала координат), линии θ: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ (полуокружности радиуса r_0 с центром в начале координат, лежащие в полуплоскостях $\varphi = \varphi_0$, проходящих через ось Oz, т. е. меридианы). Линии φ: $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ (окружности радиуса $r_0 \sin\theta_0$ с центром на оси Oz, лежащие в горизонтальных плоскостях, т. е. параллели). **5.4.** $L_x = L_y = L_z = 1$. **5.5.** $L_r = L_z = 1$, $L_\varphi = r$. **5.6.** $L_r = 1$, $L_\theta = r$, $L_\varphi = r \sin\theta$. **5.7.** $ds_x = dx$, $ds_y = dy$, $ds_z = dz$; $d\sigma_x = dy\,dz$, $d\sigma_y = dx\,dz$, $d\sigma_z = dx\,dy$; $dv = dx\,dy\,dz$. **5.8.** $ds_r = dr$, $ds_\varphi = r\,d\varphi$, $ds_z = dz$; $d\sigma_r = r\,d\varphi\,dz$, $d\sigma_\varphi = dr\,dz$, $d\sigma_z = r\,dr\,d\varphi$; $dv = r\,dr\,d\varphi\,dz$. **5.9.** $ds_r = dr$, $ds_\theta = r\,d\theta$, $ds_\varphi = r \sin\theta\,d\varphi$; $d\sigma_r = r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, $d\sigma_\theta = r \sin\theta\,dr\,d\varphi$, $d\sigma_\varphi = r\,dr\,d\theta$; $dv = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$. **5.10.** $\frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{e}_z$.

5.11. $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$. **5.12.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$. **5.13.** $\left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right) \boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right) \boldsymbol{e}_z$. **5.14.** $\frac{\partial u}{\partial r} \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_\varphi$.

5.15. $\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)$.

5.16. $\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right)$.

5.17. $\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right)\boldsymbol{e}_\theta+$
$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta)-\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$. **5.19.** а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_r=\frac{1}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{0}$;
б) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\boldsymbol{e}_z}{r}$; в) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_z=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$.
5.20. а) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_r=\frac{2}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{0}$; б) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\theta=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r}$;
в) $\operatorname{div}\boldsymbol{e}_\varphi=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta$. **5.21.** а) $u=C_1\ln r+C_2$;
б) $u=C_1\varphi+C_2$; в) $u=C_1z+C_2$. **5.22.** а) $u=\frac{C_1}{r}+C_2$;
б) $u=C_1\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_2$; в) $u=C_1\varphi+C_2$. **5.23.** $u=r^2\sin 2\varphi\cos 2\theta$,
$\operatorname{grad}u=2r\left(\sin 2\varphi\cos 2\theta\boldsymbol{e}_r-\sin 2\varphi\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\cos 2\varphi\cos 2\theta}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$,
$\nabla^2u=2\sin 2\varphi\,(1-2\operatorname{ctg}^2\theta)$. **5.24.** $u=rz\sin 2\varphi+r\cos 2\varphi$, $\operatorname{grad}u=$
$=(z\sin 2\varphi+\cos 2\varphi)\,\boldsymbol{e}_r+2\,(z\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)\,\boldsymbol{e}_\varphi+r\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_z$, $\nabla^2u=$
$=-\frac{3u}{r^2}$. **5.25.** $\boldsymbol{a}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\,(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)$.
5.26. $\boldsymbol{a}=rz\,(\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{e}_z)$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=2z-r$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=(r+z)\,\boldsymbol{e}_\varphi$. **5.27.** $\operatorname{grad}u=$
$=f'(r)\,\boldsymbol{e}_r=f'(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\nabla^2u=f''(r)+\frac{2f'(r)}{r}$. **5.28.** $\operatorname{grad}u=f'(r)\,\boldsymbol{e}_r=$
$=f'(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\nabla^2u=f''(r)+\frac{f'(r)}{r}$. **5.29.** $\operatorname{grad}u=\frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta$,
$\nabla^2u=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}$. **5.30.** $\operatorname{grad}u=\frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$,
$\nabla^2u=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}$.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Элементарные функции

1. Понятие функции комплексной переменной. Множество точек E расширенной комплексной плоскости называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству. Связное открытое множество точек комплексной плоскости называется *областью* и обозначается через D, G и т. п. Область D называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством; в противном случае область D называется *многосвязной*. Например, круг $|z-z_0|<R$ является односвязной областью, а кольцо $0\leqslant r<|z-z_0|<R$ — многосвязной (двусвязной).

Если каждому комплексному числу $z=x+iy$, принадлежащему области D, по некоторому правилу поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел $w=u+iv$, то говорят, что на множестве D определена функция и символически записывают

$$w=f(z)=u+iv=u(x, y)+iv(x, y),$$

где

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(z).$$

Один из наиболее употребляемых способов задания функции — задание с помощью формулы — может приводить как к однозначным, так и многозначным функциям. Так, функция $w=z^2$ является однозначной в расширенной комплексной плоскости, так как каждому z соответствует одно значение $w=z^2$, а функция $w=\sqrt{z}$, в силу определения корня из комплексного числа, двузначна во всех точках, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$, в которых она однозначна — такие точки принято называть *точками ветвления*. Функция $w=\operatorname{Arg} z$ также многозначна и определена во всех точках, кроме $z=0$ и $z=\infty$.

Геометрически заданную на D однозначную функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение области D плоскости (z) на некоторое множество G плоскости (w), являющееся совокупностью значений $f(z)$, соответствующих всем $z\in D$.

Пример 1. Исследовать отображение, осуществляемое линейной функцией $w=az+b$.

◀ Это отображение можно рассматривать как композицию трёх простейших отображений. Действительно, положим

$$w_1=|a|z,$$
$$w_2=e^{i\arg a}w_1,$$
$$w_3=w_2+b.$$

Тогда нетрудно видеть, что $w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$. Из геометрического смысла произведения и суммы комплексных чисел ясно, что отображение w_1 есть отображение растяжения (сжатия при $0 < |a| < 1$), отображение w_2 представляет собой поворот всей плоскости (w_1) относительно начала на угол $\varphi = \arg a$ и, наконец, отображение w_3 есть параллельный перенос плоскости w_2 на вектор, изображающий комплексное число b. ▶

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной* в области D, если любым различным значениям $z_1 \neq z_2$, взятым из области D, соответствуют различные значения функции $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Пример 2. Найти область однолистности функции $w = z^2$.

◀ Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Найдем условие, при котором $z_1^2 = z_2^2$, хотя $z_1 \neq z_2$. Имеем $\rho_1^2 e^{i2\varphi_1} = \rho_2^2 e^{i2\varphi_2}$. Отсюда заключаем, что $\rho_1 = \rho_2$, а $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2k\pi$ $(k = 0, 1)$. Так как $z_1 \neq z_2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$. Таким образом, область однолистности функции $w = z^2$ не должна содержать внутри себя точек, модули которых совпадают, а аргументы отличаются на π, т. е. областью однолистности является любая полуплоскость, например $\operatorname{Re} z > 0$ или $\operatorname{Im} z > 0$. ▶

Описать области, заданные следующими соотношениями, и установить, являются ли они односвязными:

1.1. $|z - z_0| < R$. **1.2.** $1 < |z - i| < 2$.

1.3. $2 < |z - i| < \infty$. **1.4.** $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$.

1.5. $|z - z_0| > R$. **1.6.** $0 < |z + i| < 2$.

1.7. $\operatorname{Im}(iz) < 1$. **1.8.** $\operatorname{Re}\frac{1}{z} > \frac{1}{4}$.

Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1.9*. $\operatorname{Im}\frac{z+1}{z-i} = 0$. **1.10.** $|z - i| + |z + i| < 4$.

1.11. $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i} = 0$. **1.12.** $|z - 5| - |z + 5| < 6$.

1.13. $\arg\frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$. **1.14*.** $\arg\frac{i - z}{z + i} = 0$.

Записать с помощью неравенств следующие открытые множества точек комплексной плоскости:

1.15. Первый квадрант.

1.16. Левая полуплоскость.

1.17. Полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньшее трех.

1.18. Внутренность эллипса с фокусами в точках $1 + i$, $3 + i$ и большой полуосью, равной 3.

1.19. Внутренность угла с вершиной в точке z_0 раствора $\pi/4$, симметричного относительно луча, параллельного положительной мнимой полуоси.

Найти $\operatorname{Arg} f(z)$, если $z = re^{i\varphi}$:

1.20. $f(z) = z^2$. **1.21.** $f(z) = z^3$.

1.22. $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$. **1.23.** $f(z) = \sqrt{z-8}$.

1.24. $f(z) = \sqrt{z^2-4}$. **1.25.** $f(z) = \sqrt{\dfrac{z-2}{z+1}}$.

Найти области однолистности следующих функций:

1.26. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. **1.27.** $f(z) = e^z$.

1.28. $f(z) = e^{1/z}$. **1.29*.** $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1.30. Для отображений, задаваемых функциями:

а) $w = z^2$, б)** $w = \dfrac{1}{z}$,

найти образы линий $x = C$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ и образ области $|z| < r$, $\operatorname{Im} z > 0$.

2. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Элементарные функции. Число $A \neq \infty$ называется *пределом* функции $f(z)$ при $z \to z_0$ и обозначается $A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Говорим, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, если для любого $R > 0$ найдется $\delta = \delta(R) > 0$ такое, что для всех $z \neq z_0$ таких, что $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z)| > R.$$

Следует иметь в виду, что для данной функции $f(z)$ существование предела по любому фиксированному пути $(z \to z_0)$ еще не гарантирует существования предела $f(z)$ при $z \to z_0$.

Пример 3. Пусть $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. Показать, что $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ не существует.

◀ Для предела при $r \to 0$ по любому лучу $re^{i\varphi}$ имеем

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi,$$

т. е. эти пределы различны для различных направлений — они заполняют сплошь отрезок $[-1, 1]$, и, следовательно,

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right)$$

не существует. ▶

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в этой точке и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется *непрерывной* в этой области.

Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* в области D, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек z_1 и z_2 из области D таких, что $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Приведем некоторые элементарные функции комплексной переменной:

а) Линейная функция

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0.$$

б) Степенная функция

$$w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

в) Корень целой степени n

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

г) Дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

д) Общая рациональная функция

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

е) Функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

ж) Показательная функция

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

з) Тригонометрические функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

и) Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

к) Логарифмическая функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi).$$

Выражение $\ln|z| + i \arg z$ называется *главным значением* логарифмической функции и обозначается через $\ln z$. Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i.$$

л) Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$ и обратные гиперболические функции $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ (см. пример 6 и задачи 1.42—1.46).

Отображения, осуществляемые некоторыми элементарными функциями, и простейшие свойства этих функций будут рассмотрены позднее (в § 3); здесь ограничимся только вычислением конкретных значений этих функций.

Пример 4. Вычислить $\sin i$.

◀ Имеем:

$$\sin i = \frac{e^{ii} - e^{-ii}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = i\,\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = i \operatorname{sh} 1. \blacktriangleright$$

Пример 5. Вычислить $\operatorname{ch}(2-3i)$.

◀ Имеем:

$$\operatorname{ch}(2-3i) = \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2}(\cos 3 - i \sin 3) + e^{-2}(\cos 3 + i \sin 3)\right) =$$

$$= \cos 3 \operatorname{ch} 2 - i \sin 3 \operatorname{sh} 2. \blacktriangleright$$

Пример 6. Найти аналитическое выражение для функции $\operatorname{Arccos} z$ при любом комплексном z. Вычислить $\operatorname{Arccos} 2$.

◀ Так как равенство $w = \operatorname{Arccos} z$ равносильно равенству $\cos w = z$, то можем записать, что $z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$. Отсюда находим

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

Решая это квадратное относительно e^{iw} уравнение, получаем

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

(здесь рассматриваются оба значения корня). Из этого равенства находим

$$iw = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

т. е.

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = -i \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi. \blacktriangleright$$

1.31. Используя логическую символику, записать данное выше определение непрерывности функции в области.

1.32. Используя данное выше определение функции e^z, доказать, что e^z имеет чисто мнимый период $2\pi i$, т. е. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Доказать тождества:

1.33. $\sin iz = i \operatorname{sh} z$. **1.34.** $\cos iz = \operatorname{ch} z$.

1.35. $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$.

Вычислить значения функций в указанных точках:

1.36. $\cos(1+i)$. **1.37.** $\operatorname{ch} i$. **1.38.** $\operatorname{sh}(-2+i)$.

1.39. $\operatorname{Ln}(-1)$. **1.40.** $\ln i$. **1.41.** $\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Получить аналитические выражения для указанных ниже функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0 (см. пример 6):

1.42. $w=\operatorname{Arcsin} z$, $z_0=i$.

1.43. $w=\operatorname{Arctg} z$, $z_0=i/3$.

1.44. $w=\operatorname{Arsh} z$, $z_0=i$.

1.45. $w=\operatorname{Arch} z$, $z_0=-1$.

1.46. $w=\operatorname{Arth} z$, $z_0=1-i$.

Выше степенная функция определялась для $n \in \mathbb{N}$. С помощью логарифмической функции можно ввести и общую степенную функцию. Именно, если u и v — два комплексных числа, $u \neq 0$, то полагаем

$$u^v = e^{v \operatorname{Ln} u},$$

причем для определенности будем считать, что $\operatorname{Ln} u = \ln u$ для действительных $u > 0$.

Найти все значения степеней:

1.47. 2^i. **1.48.** $(-1)^i$. **1.49.** $(1+i)^i$.

1.50. $(-1)^{1/\sqrt{2}}$. **1.51.** $(3-4i)^{1+i}$. **1.52.** $(-3+4i)^{1+i}$.

Как доопределить данные функции в точке $z=0$, чтобы они стали непрерывными в этой точке:

1.53. $f(z)=\frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$. **1.54.** $f(z)=\frac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$.

1.55. $f(z)=e^{-1/|z|}$. **1.56.** $f(z)=z/|z|$.

1.57. Доказать, что функция $f(z)=e^{-1/z}$ непрерывна в полукруге $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \pi/2$, но не является равномерно непрерывной в этом полукруге, а в любом секторе $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant \alpha<\pi/2$ она равномерно непрерывна.

§ 2. Аналитические функции. Условие Коши — Римана

1. Производная. Аналитичность функции. Если в точке $z \in D$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \quad z+\Delta z \in D,$$

то он называется *производной* функции $f(z)$ в точке z и обозначается через $f'(z)$ или $\frac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z \in D$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D и имеющая в этой области непрерывную производную $f'(z)$, называется *аналитической в области* D. Будем также говорить, что $f(z)$ *аналитическая в точке* $z_0 \in D$, если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0.

Условие непрерывности производной $f'(z)$, входящее в определение аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, может быть заменено более слабым условием дифференцируемости в каждой точке $(x, y) \in D$ функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была аналитической в области D, необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющих условиям Коши—Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \tag{1}$$

или, в полярных координатах,

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial \varphi}. \tag{2}$$

При выполнении условий (1) или (2) производная $f'(z)$ может быть записана соответственно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

или

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right). \tag{4}$$

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функций действительной переменной.

Пример 1. Доказать, что функция $f(z) = e^{2z}$ аналитична и найти $f'(z)$.

◀ Имеем

$$e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y),$$

т. е.

$$u(x, y) = e^{2x}\cos 2y, \quad v(x, y) = e^{2x}\sin 2y.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y.$$

Следовательно, условия (1) выполняются во всей плоскости, и по первой из формул (3)

$$(e^{2z})' = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) = 2e^{2z}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Показать, что функция $w = z^3$ аналитична во всей комплексной плоскости (кроме $z = \infty$).

◀ Действительно, имеем $z = re^{i\varphi}$ и

$$w = z^3 = r^3 e^{i3\varphi} = r^3\cos 3\varphi + ir^3\sin 3\varphi,$$

причем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2\cos 3\varphi, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2\sin 3\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -3r^3\sin 3\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 3r^3\cos 3\varphi,$$

т. е. при любом конечном $z = re^{i\varphi}$ выполнены условия (2). Применяя первую из формул (4), имеем

$$f'(z) = (z^3)' = \frac{r}{z}(3r^2\cos 3\varphi + i3r^2\sin 3\varphi) = 3z^2. \blacktriangleright$$

Пример 3. Показать, что логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ аналитична во всех конечных точках, кроме $z = 0$, причем

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

◀ Так как

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),$$

то имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

т. е. выполнены условия (2), и по первой из формул (4) находим

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{r}{z}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{z}. \blacktriangleright$$

Аналитические функции находят применение при описании различных процессов.

Пример 4. Рассмотрим плоское безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости. Пусть $v_x(x, y)$ и $v_y(x, y)$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$ течения вдоль осей x и y, и пусть

$$v(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y) \tag{5}$$

— комплексная скорость течения. Показать, что $v(z)$ — аналитическая функция.

◀ Из несжимаемости жидкости следует, что дивергенция вектора скорости тождественно равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Далее, течение является безвихревым тогда и только тогда, когда ротор его вектора скорости равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{7}$$

Но равенства (6) и (7) являются условиями Коши—Римана для функции (5), т. е. комплексная скорость $v(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной $z=x+iy$.

Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

2.1*. $w=\bar{z}$. **2.2*.** $w=\operatorname{Re} z$. **2.3.** $w=z\operatorname{Im} z$.

2.4. $w=z\operatorname{Re} z$. **2.5**.** $w=|z|$. **2.6.** $w=|z-1|^2$.

2.7*. Предполагая выполненными условия Коши—Римана (1) в декартовых прямоугольных координатах, доказать справедливость условий Коши—Римана (2) в полярных координатах и справедливость формул (4) вычисления производной в полярных координатах.

Проверить выполнение условий Коши—Римана (1) или (2) и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

2.8. $f(z)=e^{3z}$. **2.9.** $f(z)=\operatorname{sh} z$.

2.10. $f(z)=z^n$, $n\in\mathbb{N}$. **2.11.** $f(z)=\cos z$.

2.12. $f(z)=\ln(z^2)$. **2.13.** $f(z)=\sin\frac{z}{3}$.

2.14*. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D. Доказать, что если одна из функций

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(z),\quad v(x, y)=\operatorname{Im} f(z),$$
$$r(x, y)=|f(z)|,\quad \theta(x, y)=\arg f(z)$$

сохраняет в области постоянное значение, то и $f(z)\equiv$ $\equiv\text{const}$ в D.

2. Свойства аналитических функций. Ряд свойств, характерных для дифференцируемых функций действительной переменной, сохраняется и для аналитических функций.

2.15. Доказать, что если $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические в области D функции, то функции $f(z)\pm g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ также аналитичны в области D, а частное $f(z)/g(z)$ — аналитическая функция во всех точках области D, в которых $g(z)\neq 0$. При этом имеют место формулы

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z),$$
$$(f(z)\,g(z))'=f'(z)\,g(z)+f(z)\,g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\,g(z)-f(z)\,g'(z)}{g^2(z)}.$$

2.16. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция с областью значений $G=\{f(z)\,|\,z\in D\}$, и пусть функция $\varphi(w)$ аналитична в области G. Доказать, что $F(z)=\varphi(f(z))$ — аналитическая в области D функция.

Используя утверждение задачи 2.15, найти области аналитичности функций и их производные:

2.17. $f(z)=\operatorname{tg} z$. **2.18.** $f(z)=z\cdot e^{-z}$.

2.19. $f(z)=\dfrac{z\cdot\cos z}{1+z^2}$. **2.20.** $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

2.21. $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z}$. **2.22.** $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$.

2.23. $f(z)=\operatorname{cth} z$. **2.24.** $f(z)=\dfrac{\cos z}{\cos z-\sin z}$.

2.25. Доказать, что действительная и мнимая части аналитической в области D функции $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. их лапласианы равны нулю:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

2.26. Получить выражение лапласиана Δu в полярных координатах $(u=u(r,\ \varphi))$.

Заметим, что заданием действительной или мнимой части аналитическая в области D функция определяется с точностью до произвольной (комплексной) постоянной. Например, если $u(x,\ y)$ — действительная часть аналитической в области D функции $f(z)$, то

$$v(x,\ y)=\operatorname{Im} f(z)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} -u'_y\,dx+u'_x\,dy,$$

где $(x_0,\ y_0)$ — фиксированная точка в области D и путь интегрирования также лежит в области D.

Пример 5. Проверить, что функция $u=x^2-y^2-5x+y+2$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и найти $f(z)$.

◀ Так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

во всей плоскости, то $u(x,\ y)$ — гармоническая функция, а тогда

$$v(x,\ y)=\int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)}(2y-1)\,dx+(2x-5)\,dy=\int\limits_{x_0}^{x}(2y_0-1)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}(2x-5)\,dy=$$
$$=(2y_0-1)(x-x_0)+(2x-5)(y-y_0)=2xy-x-5y+5y_0+x_0-2x_0y_0,$$

т. е.

$$v(x,\ y)=2xy-x-5y+C$$

$$f(z)=x^2-y^2-5x+y+2+i(2xy-x-5y+C)=$$
$$=(x^2-2ixy-y^2)-5(x+iy)+(-xi+y)+2+Ci=$$
$$=z^2-5z-iz+2+Ci. \blacktriangleright$$

Пример 6. Показать, что функция вида

$$u(x, y)=a(x^2+y^2)+bx+cy+d, \quad a\neq 0,$$

не является действительной (или мнимой) частью никакой аналитической функции.

◀ Действительно, это следует из соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4a\neq 0. \blacktriangleright$$

Проверить гармоничность приведенных ниже функций в указанных областях и найти, когда это возможно, аналитическую функцию по данной ее действительной или мнимой части:

2.27. $u(x, y)=x^3-3xy^2, \ 0\leqslant|z|<\infty.$

2.28. $v(x, y)=2e^x\sin y, \ 0\leqslant|z|<\infty.$

2.29. $u(x, y)=2xy+3, \ 0\leqslant|z|<\infty.$

2.30. $v(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \ 0<|z|<\infty.$

2.31. $u(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}-2y, \ 0<|z|<\infty.$

2.32. $u(x, y)=x^2-y^2+xy, \ 0\leqslant|z|<\infty.$

2.33. $v(x, y)=xy, \ 0\leqslant|z|<\infty.$

§ 3. Конформные отображения

1. **Геометрический смысл модуля и аргумента производной.** Пусть $w=f(z)$ — аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $k=|f'(z_0)|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ (точнее, при $k>1$ имеет место растяжение, а при $k<1$ — сжатие). Аргумент производной $\varphi=\arg f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой L, проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу L' этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\varphi>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi<0$, то по часовой.

Таким образом, геометрический смысл модуля и аргумента производной состоит в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию $f'(z_0)\neq 0$, $k=|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия бесконечно малого линейного элемента в точке z_0, а $\varphi=\arg f'(z_0)$ — угол поворота этого элемента.

Пример 1. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке $z_0=1-i$ при отображении $w=z^2-z$.

◀ Так как $w'=2z-1$ и $w'|_{z=1-i}=1-2i$, то

$$k=|1-2i|=\sqrt{5}$$

и

$$\varphi=\arg(1-2i)=-\operatorname{arctg} 2. \blacktriangleright$$

Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений $w=f(z)$ в указанных точках:

3.1. $w=z^2$, $z_0=\sqrt{2}(1+i)$. 3.2. $w=z^2$, $z_0=i$.

3.3. $w=z^3$, $z_0=1+i$. 3.4. $w=z^3$, $z_0=1$.

3.5. $w=\sin z$, $z_0=0$. 3.6. $w=ie^{2z}$, $z_0=2\pi i$.

Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:

3.7. $w=1/z$. 3.8. $w=e^{z-1}$.

3.9. $w=\ln(z+1)$. 3.10. $w=z^2+2z$.

Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях коэффициент растяжения $k=1$:

3.11. $w=(z-1)^2$. 3.12. $w=z^2-iz$.

3.13. $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$. 3.14. $w=-z^3$.

Найти множества всех тех точек z_0, в которых при следующих отображениях угол поворота $\varphi=0$:

3.15. $w=-\dfrac{i}{z}$. 3.16*. $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

3.17. $w=z^2+iz$. 3.18. $w=z^2-2z$.

2. Конформные отображения. Линейная и дробно-линейная функции. Взаимно однозначное отображение области D плоскости (z) на область G плоскости (w) называется *конформным*, если в каждой точке области D оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Критерий конформности отображения. *Для того чтобы отображение области D, задаваемое функцией $w=f(z)$, было конформным, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной и аналитической в области D функцией, причем $f'(z)\neq 0$ всюду в D.*

В дальнейшем образ области D при отображении функцией $w=f(z)$ обозначается через E либо через $f(D)$.

Пример 2. Показать, что отображение, осуществляемое функцией $w=z^3$, конформно в области

$$D=\left\{z \mid 1<|z|<2,\ 0<\arg z<\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

◀ Необходимо проверить, что заданная функция является аналитической, однолистной в D и что всюду в D $f'(z)\neq 0$. Аналитичность функции $w=z^3$ показана выше (см. пример 2 § 2), соотношение

$w' = 3z^2 \neq 0$ для любого $z \in D$ очевидно. Однолистность следует из того, что область D содержится в угле с вершиной в начале координат и величиной $\frac{2\pi}{3}$ (см. задачу 1.26.). ▶

Выяснить, какие из заданных функций $w = f(z)$ определяют конформные отображения указанных областей D:

3.19. $w = (z+i)^2, D = \left\{z \mid 1 < |z+i| < 3, 0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi\right\}$.

3.20. $w = |z|^2$, $D = \{z \mid |z| < 1\}$.

3.21. $w = e^z$, $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$.

3.22. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $D = \left\{z \mid \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$.

3.23. $w = (z-1)^3$, $D = \{z \mid |z-1| < 1\}$.

Отображение, осуществляемое линейной функцией $w = az + b$, рассмотрено выше (см. пример 1 § 1). Оно представляет собой композицию растяжения ($w_1 = |a|z$), поворота ($w_2 = e^{i \arg a} w_1$) и параллельного переноса ($w_3 = w_2 + b$). Обратная к линейной функции также есть линейная функция $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$. Так как $w' = a \neq 0$, то отображение w конформно во всей расширенной плоскости, причем имеет две неподвижные точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ (при $a \neq 1$) и $z_2 = \infty$.

Пример 3. Выяснить, существует ли линейная функция, отображающая треугольник с вершинами 0, 1, i в плоскости (z) на треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$ в плоскости (w).

◀ Заметим, что треугольник с вершинами 0, 1, i подобен треугольнику с вершинами 0, 2, $1+i$, причем вершина в точке $z_1 = 0$ соответствует вершине в точке $w_1 = 1+i$, вершина в точке $z_2 = 1$ — вершине в точке $w_2 = 0$ и вершина в точке $z_3 = i$ — вершине в точке $w_3 = 2$. Выполним последовательно преобразования:

а) $w_1 = e^{\frac{5\pi i}{4}} z$ — поворот около начала координат на угол $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ против часовой стрелки;

б) $w_2 = \sqrt{2} w_1$ — гомотетия с коэффициентом $k = \sqrt{2}$;

в) $w_3 = w_2 + (1+i)$ — параллельный перенос на вектор, изображающий комплексное число $1+i$.

В результате треугольник с вершинами 0, 1, i отображается на треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$, а осуществляющая это отображение целая линейная функция имеет вид

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}} z + (1+i) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z + 1 + i = (1+i)(1-z). \ ▶$$

3.24. Доказать, что отображение, осуществляемое целой линейной функцией, имеет две неподвижные точки (совпадающие, если $a=1$).

Для указанных ниже отображений найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота φ и коэффициент гомотетии k:

3.25. $w=2z+1$. **3.26.** $w=iz+4$.

3.27. $w=e^{i\frac{\pi}{4}}z-e^{-i\frac{\pi}{4}}$. **3.28.** $w=az+b$.

Дробно-линейная функция

$$w=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0,\ c\neq 0,$$

осуществляет конформное отображение расширенной плоскости (z) на расширенную плоскость (w). При этом под углом между кривыми в точке $z=\infty$ понимается угол в точке $z^*=0$ между образами этих кривых, полученных путем отображения $z^*=\frac{1}{z}$. Простейшей дробно-линейной функцией (отличной от линейной) является функция $w=\frac{1}{z}$, которая может быть представлена в виде композиции инверсии относительно единичной окружности $w_1=\frac{1}{\bar{z}}$ и комплексного сопряжения $w_2=\bar{w}_1$. Простейшая дробно-линейная функция отображает окружности плоскости (z) в окружности плоскости (w) (прямая линия считается окружностью бесконечного радиуса). Так как общая дробно-линейная функция представляется в виде композиции линейной функции $w_1=cz+d$, простейшей дробно-линейной $w_2=\frac{1}{w_1}$ и снова линейной $w_3=\frac{bc-ad}{c}w_2+\frac{a}{c}$, то она также отображает окружность в окружность.

Дробно-линейная функция вполне определяется заданием отображения трех точек $z_1\longrightarrow w_1$, $z_2\longrightarrow w_2$ и $z_3\longrightarrow w_3$:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}. \qquad (1)$$

Замечание. Если одна из точек z_1, z_2 или z_3 либо w_1, w_2 или w_3 является бесконечно удаленной, то в формуле (1) все разности, содержащие эту точку, следует заменить единицами.

Пример 4. Найти образ окружности $x^2+y^2=2x$ при отображении $w=\frac{1}{z}$.

◀ Полагая $z=x+iy$, имеем $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$. Подставив эти значения в уравнение окружности, находим

$$x^2+y^2-2x=z\cdot\bar{z}-(z+\bar{z})=0,$$

и после замены $z=\frac{1}{w}$ имеем

$$\frac{1}{w\overline{w}}-\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}=0,$$

т. е. $w+\overline{w}=1$. Если $w=u+iv$, то $w+\overline{w}=2u$. Таким образом, окружность $x^2+y^2-2x=0$ преобразуется в прямую $u=1/2$, параллельную мнимой оси. ▶

Пример 5. Найти дробно-линейное отображение, переводящее точки -1, i, $i+1$ в точки 0, $2i$, $1-i$.

◀ Используя формулу (1), имеем

$$\frac{w-0}{w-2i}\cdot\frac{1-i-2i}{1-i-0}=\frac{z+1}{z-i}\cdot\frac{i+1-i}{i+1+1},$$

откуда

$$\frac{w}{w-2i}=\frac{1}{5}\,\frac{z+1}{z-i}$$

и

$$w=-\frac{2i\,(z+1)}{4z-5i-1}.\ ▶$$

Найти образы следующих линий при отображении $w=\frac{1}{z}$:

3.29. Окружности $x^2+y^2=y/3$.

3.30. Прямой $y=-x/2$. **3.31.** Прямой $y=x-1$.

3.32. Окружности $x^2+y^2+2x-2y+1=0$.

3.33. Доказать, что проходящая через начало координат окружность $A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy=0$ преобразуется функцией $w=\frac{1}{z}$ в прямую, а любая прямая $Bx+Cy+D=0$ — в окружность, проходящую через начало координат.

Найти дробно-линейное преобразование по заданным условиям:

3.34. Точки i, 1, $1+i$ переходят в точки 0, ∞, 1.

3.35. Точки 1 и i неподвижны, а точка 0 переходит в ∞.

3.36. Точки $\frac{1}{2}$ и 2 неподвижны, а $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ переходит в ∞.

3.37. Доказать, что дробно-линейное преобразование $w=\frac{az+b}{cz+d}$ имеет две неподвижные точки. При каком условии эти точки совпадают? Когда бесконечно удаленная точка является неподвижной?

Точки z_1 и z_2 называются симметричными относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче, выходящем из центра этой окружности, по разные стороны от нее и так, что произведение расстояний от этих точек до центра равно квадрату радиуса.

Точки M и N, симметричные относительно прямой или окружности в плоскости (z), отображаются дробно-линейной функцией в точки M' и N', симметричные относительно образа этой прямой или окружности в плоскости (w).

3.38. Найти точки, симметричные с точкой $1+i$ относительно окружностей:

а) $|z|=1$; б)* $|z-i|=2$.

3.39. Для отображения $w=\frac{z-i}{z+i}$ найти образ точки, симметричной точке $1-i$ относительно:

а) прямой $y=x$; б) окружности $|z-1|=3$.

Пример 6. Найти отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ такое, чтобы точка $z=\alpha$ $(|\alpha|<1)$ отображалась в центр круга $w=0$.

◀ Запишем дробно-линейное отображение в виде

$$w=g\frac{z-z_0}{z-z_1}.$$

Так как точка $z=\alpha$ переходит в точку $w=0$, то $z_0=\alpha$, а так как симметричной с точкой $w=0$ является точка $w=\infty$, то z_1 является симметричной с точкой $z=\alpha$ относительно окружности $|z|=1$, т. е. $z_1=\frac{1}{\bar{\alpha}}$. Поэтому

$$w=g\bar{\alpha}\frac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}.$$

Далее, точки окружности $|z|=1$ переходят в точки окружности $|w|=1$, а поэтому при $z=e^{i\varphi}$ имеем

$$1=|g\bar{\alpha}|\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{\bar{\alpha}e^{i\varphi}-1}\right|.$$

Но

$$\left|\frac{e^{i\varphi}-\alpha}{e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1}\right|^2=\frac{(e^{i\varphi}-\alpha)(e^{-i\varphi}-\bar{\alpha})}{(e^{i\varphi}\bar{\alpha}-1)(e^{-i\varphi}\alpha-1)}=\frac{1+|\alpha|^2-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}{|\alpha|^2+1-e^{i\varphi}\bar{\alpha}-e^{-i\varphi}\alpha}=1.$$

Следовательно, $|g\bar{\alpha}|=1$, т. е. $g\bar{\alpha}=e^{i\theta}$, и искомое отображение имеет вид

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\bar{z}\alpha-1}. \quad ▶ \qquad (2)$$

Для отображения (2) единичного круга на себя найти параметры α и θ по заданным условиям:

3.40. $w(1/2)=0$, $\arg w'(1/2)=0$.

3.41. $w(0)=0$, $\arg w'(0)=\pi/2$.

3.42. $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\pi/2$.

3.43. Доказать, что функция

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\quad \operatorname{Im}\alpha>0, \tag{3}$$

осуществляет отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

Определить параметры α и θ в формуле (3) по заданным условиям:

3.44. $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\pi/2$.

3.45. $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=\pi$.

3.46. $w(z_0)=0$, $\arg w'(z_0)=\pi/2$.

Найти образ E области D при заданном дробно-линейном отображении:

3.47. $D=\{z\,|\,\operatorname{Re}z>0,\ \operatorname{Im}z>0\}$; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

3.48*. $D=\left\{z\,|\,0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w=\dfrac{z}{z-1}$.

3.49*. $D=\left\{z\,|\,1\leqslant|z|\leqslant 2,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}$; $w=1+\dfrac{1}{z}$.

3.50. $D=\{z\,|\,|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0\}$; $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$.

3.51. $D=\{z\,|\,0<\operatorname{Re}z<1\}$; $w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

3.52. D — двуугольник (круговая луночка), заключенный между окружностями $|z-1|=1$, $|z-i|=1$; $w=-\dfrac{z}{z-1-i}$.

3.53.** Найти область D в плоскости (z), которая при отображении $w=\dfrac{z}{1-z}$ преобразуется во внутренность круга $|w|<r$ плоскости (w).

3. Степенная функция. Отображение, осуществляемое степенной функцией $w=z^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$), является конформным в расширенной комплексной плоскости всюду, кроме точки $z=0$ ($w'|_{z=0}=nz^{n-1}|_{z=0}=0$.) Угол $D=\left\{z\,\middle|\,\dfrac{2k\pi}{n}<\arg z<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$ при любом $k=0, 1, \ldots, n-1$ отображается степенной функцией взаимно однозначно на всю плоскость (w) с разрезом по положительной части действительной оси (причем лучу $\arg z=\dfrac{2k\pi}{n}$ соответствует верхний,

а лучу $\arg z = \frac{2(k+1)\pi}{n}$ — нижний край разреза). Обратная функция $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, является, как известно, многозначной. Ее однозначная ветвь (выделяемая заданием образа одной из точек) отображает плоскость (z) с разрезом по неотрицательной части действительной оси на соответствующий сектор

$$E = \left\{ w \,\middle|\, \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\},$$

k — фиксировано.

Пример 7. Найти отображение внутренности двуугольника с вершинами z_1 и z_2, образованного окружностями C_1 и C_2, на единичный круг.

◀ Преобразование $w_1 = -\frac{z - z_1}{z - z_2}$ отображает точку $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ в точку $w_1 = 1$, точку $z = z_1$ — в нуль, а точку $z = z_2$ — в бесконечность. Таким образом, отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2, отображается на положительную действительную полуось. Дуги окружностей, образующие двуугольник, отображаются в лучи $\arg w_1 = \alpha\pi$ и $\arg w_1 = -\beta\pi$. Следовательно, область D отображается на сектор $E_1 = \{w_1 \mid -\beta\pi < \arg w_1 < \alpha\pi\}$ (ср. с задачей 3.52). Повернем этот сектор на угол $\beta\pi$, т. е. произведем преобразование $w_2 = e^{i\beta\pi} w_1$, и возведем полученную функцию в степень $\frac{1}{\beta + \alpha}$:

$$w_3 = (w_2)^{\frac{1}{\beta + \alpha}}.$$

Сектор отобразится в верхнюю полуплоскость. Функция

$$w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w_3^0}}$$

осуществляет отображение полуплоскости на единичный круг. Величины w_3^0 и θ определяются дополнительным заданием отображения точки z_0 в точку $w = 0$ и условием $\arg w'(z_0) = \gamma$. Окончательно, $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 94). ▶

Найти функцию, отображающую заданную область D плоскости (z) на верхнюю полуплоскость (в ответах указана одна из функций, осуществляющих указанное отображение, причем если функция многозначна, то имеется в виду одна из ее однозначных ветвей):

3.54. $D = \{z \mid |z| < 1,\ |z - 1| < 1\}$.

3.55. $D = \left\{ z \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$.

3.56. $D = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.57. $D = \{z \mid |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.58. $D=\{z \mid |z|<2,\ \ 0<\arg z<\pi/4\}$.

3.59. $D=\{z \mid |z|>2,\ \ 0<\arg z<3\pi/2\}$.

3.60. $D=\{z \mid |z|<2,\ \operatorname{Im} z>1\}$.

3.61. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z+i|<1\}$.

3.62. $D=\{z \mid |z|<1,\ |z+i|>1\}$.

3.63. $D=\{z \mid |z|>1,\ |z+i|<1\}$.

3.64. D — плоскость (z), разрезанная по отрезку $[-i,\ i]$.

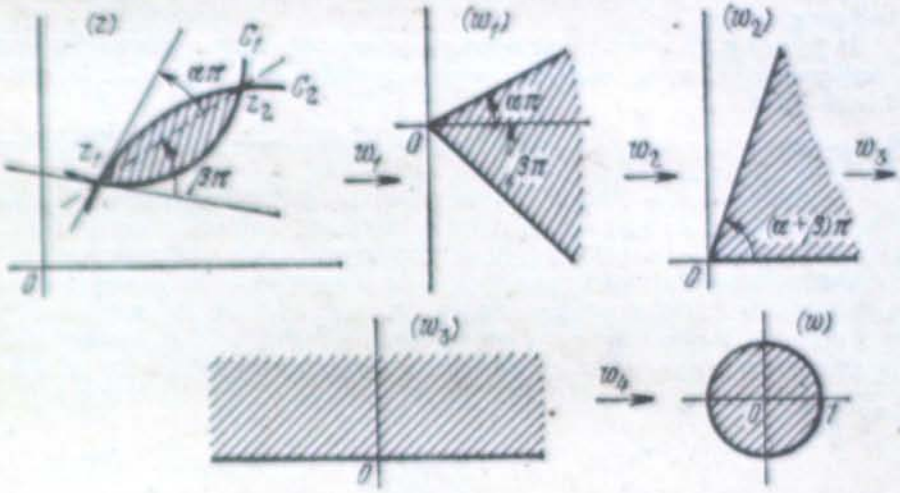


Рис. 94.

3.65. D — плоскость (z), разрезанная по отрезку, соединяющему точки $1+i$ и $2+2i$.

3.66. D — плоскость с разрезом по лучам $(-\infty,\ -R]$ и $[R,\ +\infty)$, $R>0$.

3.67. D — полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по отрезку, соединяющему точки 0 и $ih\,(h>0)$.

4. Функция Жуковского. Имеем $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w'=\frac{1}{2}\,\frac{z^2-1}{z^2}$. Следовательно, функция Жуковского[1]) конформна в расширенной

[1]) Конформное отображение, осуществляемое функцией $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, было использовано впервые Н. Е. Жуковским в качестве метода получения одного класса аэродинамических профилей, названных профилями Жуковского. Профили Жуковского отображаются на круг, для которого можно легко решить задачу обтекания, а это дает возможность исследовать обтекание крыла самолета.

плоскости всюду, за исключением точек $z_{1,2}=\pm 1$ и $z_3=0$. Она осуществляет отображение как внешности, так и внутренности единичного круга плоскости (z) на плоскость (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. Полная плоскость (z) отображается на двулистную риманову поверхность, склеенную крест-накрест по разрезам $[-1, 1]$.

Обратная функция

$$z=w+\sqrt{w^2-1}$$

двузначна, причем каждая ветвь осуществляет отображение плоскости (w) с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внутренность или на внешность единичного круга в плоскости (z).

Пример 8. Найти образ полярной сетки $\rho=\text{const}$ и $\varphi=\text{const}$ при преобразовании плоскости (z) с помощью функции Жуковского.

◀ Полагая $z=\rho e^{i\varphi}$, имеем

$$w=u+iv=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi}+\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi+i\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$u=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi,$$

и для $\rho\neq 1$ имеем

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)^2}=1 \tag{4}$$

и

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1. \tag{5}$$

Из этих равенств заключаем, что окружности $|z|=\rho\neq 1$ отображаются в эллипсы плоскости (w) с полуосями $a=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ и $b=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$ при $\rho>1$ или $b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)$ при $\rho<1$. Лучи $\varphi=\text{const}$ в плоскости (z) преобразуются в плоскости (w) в гиперболы с полуосями $a=|\cos\varphi|$ и $b=|\sin\varphi|$.

Заметим, что фокусные расстояния $c=\sqrt{a^2-b^2}$ эллипсов (4) и $c_1=\sqrt{a^2+b^2}$ гипербол (5) равны 1, т. е. (4) и (5) — семейства софокусных эллипсов и гипербол. ▶

Пример 9. Найти отображение плоскости (z) с разрезами по отрезку, соединяющему точки 0 и $4i$, и по отрезку, соединяющему точки $2i$ и $2+2i$, на внутренность единичного круга $|w|<1$.

◀ Искомое отображение w находим в виде композиции пяти отображений. Функция $w_1=z-2i$ переводит точку $z=2i$ в начало координат, а функция $w_2=e^{i\frac{\pi}{2}}w_1$ осуществляет поворот плоскости (w_1) на угол $\pi/2$. Точка $z=4i$ переходит в результате этих отображений

в точку $w_2=-2$, точка $z=2i$ — в точку $w_2=0$, точка $z=2+2i$ — в точку $w_2=2i$, а точка $z=0$ — в точку $w_2=2$. Далее, в результате отображений $w_3=w_2^2$ и $w_4=w_3/4$ разрез отображается в отрезок $[-1, 1]$ плоскости (w_4), и, наконец,

$$w_5=w_4+\sqrt{w_4^2-1},$$

отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внутренность единичного круга, причем выбирается та ветвь этой функции, которая при $w_4=\infty$ обращается в нуль. Итак, $w=w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$ (рис. 95). ▶

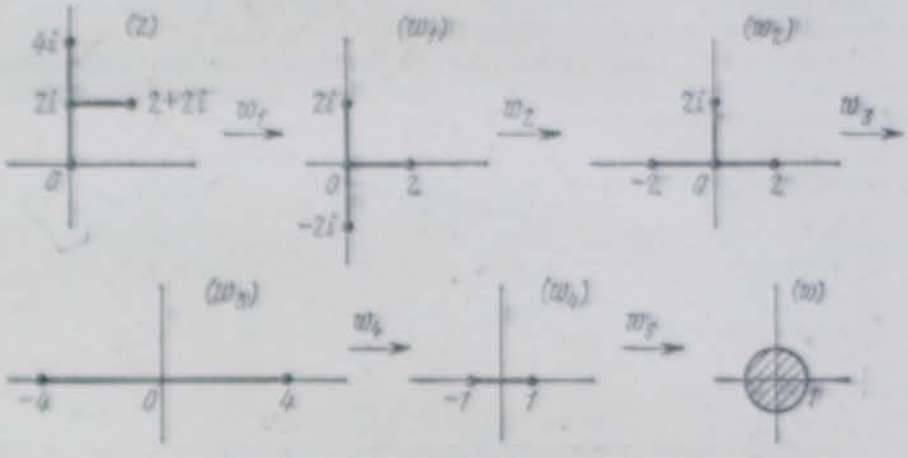


Рис. 95.

В задачах 3.68—3.70 найти образы заданных областей при отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

3.68. Внутренности круга $|z|<R$ при $R<1$ и внешности круга $|z|>R$ при $R>1$.

3.69. Внутренности круга $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[1/2, 1]$.

3.70. Внутренности круга $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[-1/2, 1]$.

3.71*. Найти отображение круга $|z|<1$ с разрезом по отрезку $[1/3, 1]$ на круг $|w|<1$.

3.72*. Найти отображение области $D=\{z \mid \operatorname{Im} z>0, |z|>R\}$ (верхняя полуплоскость с выкинутым полукругом) на верхнюю полуплоскость.

3.73*. Отобразить внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ на внешность единичного круга.

5. Показательная функция. Функция $w=e^z$ однолистна в любой полосе шириной менее 2π, параллельной действительной оси. Она отображает полосу $-\infty<x<+\infty$, $-\pi<y<\pi$ в полную плоскость

(w) с разрезом по действительной отрицательной полуоси. Вся плоскость (z) отображается на бесконечнолистную риманову поверхность. Обратная функция $z = \operatorname{Ln} w = \ln w + 2\pi n i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, однозначна на этой римановой поверхности, а ее главное значение $\ln w = \ln|w| + i \arg w$ определяет конформное отображение всей плоскости (w) с разрезом $(-\infty, 0]$ на полосу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ шириной 2π, параллельную действительной оси.

Пример 10. Найти отображение полосы шириной H, $0 < \operatorname{Re} z < H$, параллельной мнимой оси, на единичный круг плоскости (w).

◀ Искомое решение получим, например, с помощью композиции отображений:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} z, \quad w_2 = \frac{\pi}{H} w_1, \quad w_3 = e^{w_2},$$

$$w_4 = e^{i\theta} \frac{w_3 - w_3^0}{w_3 - \overline{w_3^0}}.$$

При последовательном выполнении этих отображений заданная полоса преобразуется в области, показанные на рис. 96. ▶

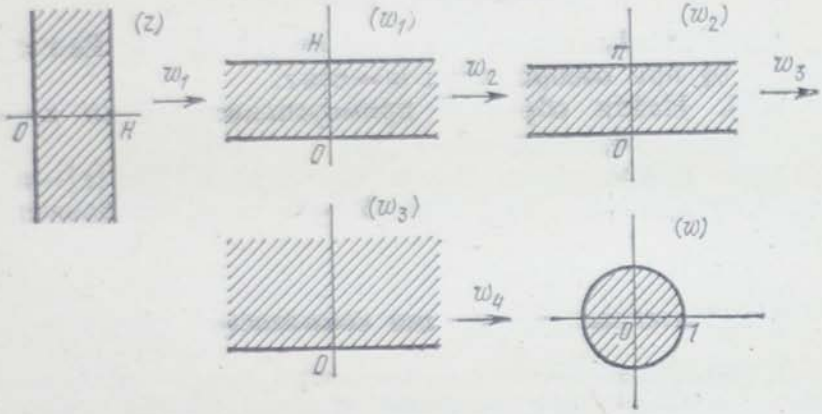


Рис. 96.

Найти образ E области D при отображении $w = e^z$:

3.74. $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$.

3.75. $D = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$.

3.76. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

3.77. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$.

3.78. $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

3.79. Найти образы прямых $x = C$ и $y = C$ при отображении $w = e^z$.

Найти образы следующих областей при отображении $w = \ln z$, $w(i) = \frac{\pi i}{2}$:

3.80. $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.81. $\{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

3.82. $\{z \mid |z| < 1,\ z \notin [0,\ 1]\}$.

3.83. $\{z \mid z \notin [-\infty,\ -1] \cup [0,\ \infty]\}$.

6. Тригонометрические и гиперболические функции. Функция $w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ однолистна в полуполосе $-\pi < x \leqslant \pi$, $y > 0$ и отображает эту полуполосу на плоскость (w) с разрезом $(-\infty,\ 1]$. Риманова поверхность этой функции более сложная, чем у предыдущих, так как склеивание листов происходит отдельно по лучу $(-\infty,\ -1)$ и по отрезку $[-1,\ 1]$

Функция $w = \sin z$ сводится к предыдущей с помощью соотношения $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$. К $\sin z$ и $\cos z$ сводятся и гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz.$$

3.84**. Найти образ E полуполосы $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

3.85. Найти образ E прямоугольной сетки $x = C$, $y = C$ при отображении $w = \operatorname{ch} z$.

3.86. Найти образ E прямоугольника $D = \{z \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi,\ -h < \operatorname{Im} z < h,\ h > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

§ 4. Интеграл от функции комплексной переменной

1. Интеграл по кривой и его вычисление. Если l — направленная кусочно гладкая кривая в плоскости (z) и для всех $z \in l$ определена функция $f(z)$, то при условии существования предела в правой части полагают по определению:

$$\int_l f(z)\, dz = \lim_{\max |\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta z_k. \tag{1}$$

Здесь $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $z_k \in l$, $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, точки $\xi_k \in l$ выбраны на участках l между точками z_k и z_{k+1}. Если $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$, то интеграл представляется в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода:

$$\int_l f(z)\, dz = \int_l u(x,\ y)\, dx - v(x,\ y)\, dy + i \int_l v(x,\ y)\, dx + u(x,\ y)\, dy. \tag{2}$$

Если функция $f(z)$ непрерывна на l, то интеграл (1) существует.

Пример 1. Пользуясь определением (1) вычислить $\int\limits_l \operatorname{Re} z\,dz$, где l — радиус-вектор точки $1+i$.

◀ Разбиваем радиус-вектор точки $1+i$ на n равных частей, т. е. полагаем

$$z_k=\frac{k}{n}+i\frac{k}{n},\quad \Delta z_k=\frac{1}{n}(1+i),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

и пусть $\xi_k=z_k$. Тогда интегральная сумма запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z_k\,\Delta z_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\frac{1+i}{n}=\frac{1+i}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1+i}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_l \operatorname{Re} z\,dz=\lim_{n\to\infty}\frac{(i+1)\ (n+1)}{2n}=\frac{1+i}{2}.\ ▶$$

Пример 2. Используя представление интеграла в форме (2) и правила вычисления криволинейных интегралов 2-го рода, вычислить интеграл

$$\int\limits_l |z|\,\bar{z}\,dz,$$

где l — верхняя полуокружность $|z|=1$ с обходом против часовой стрелки.

◀ Имеем

$$\int\limits_l |z|\,\bar{z}\,dz=\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}\,(x\,dx+y\,dy)+i\int\limits_l \sqrt{x^2+y^2}\,(-y\,dx+x\,dy).$$

Переходя к параметрическому уравнению кривой $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, и учитывая, что $\sqrt{x^2+y^2}=|z|=1$ в точках кривой, получаем

$$\int\limits_l |z|\,\bar{z}\,dz=\int\limits_0^{\pi}(-\cos t\sin t+\sin t\ \cos t)\,dt+$$

$$+i\int\limits_0^{\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\pi i.\ ▶$$

4.1. Непосредственным суммированием вычислить интеграл $\int\limits_l z\,dz$, где l — радиус-вектор точки $2-i$.

4.2. Доказать, что при изменении направления пути интегрирования интеграл изменит знак, т. е.

$$\int\limits_{l+} f(z)\,dz=-\int\limits_{l-} f(z)\,dz.$$

4.3. Доказать, что если a_1 и a_2 — постоянные, то

$$\int_l (a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z))\, dz = a_1 \int_l f_1(z)\, dz + a_2 \int_l f_2(z)\, dz.$$

4.4. Доказать, что если кривая интегрирования l является объединением кривых l_1 и l_2, то

$$\int_l f(z)\, dz = \int_{l_1} f(z)\, dz + \int_{l_2} f(z)\, dz.$$

4.5*. Доказать, что имеет место оценка

$$\left|\int_l f(z)\, dz\right| \leqslant \int_l \left|f(z)\right| ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

Вычислить интегралы по заданным контурам:

4.6*. $\int_l (z-z_0)^n\, dz$, n — целое число, $l = \{z \,|\, |z-z_0| = R\}$.

4.7. $\int_l (z-z_0)^n\, dz$, n — целое число, $l = \{z \,|\, |z-z_0| = R,$ $\operatorname{Im}(z-z_0) > 0\}$.

4.8. $\int_l \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, $\quad l = \left\{z \,\middle|\, |z| = 1,\ \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, ограниченной контуром Γ, и γ — замкнутый контур в D, то

$$\oint_\gamma f(\eta)\, d\eta = 0. \qquad (3)$$

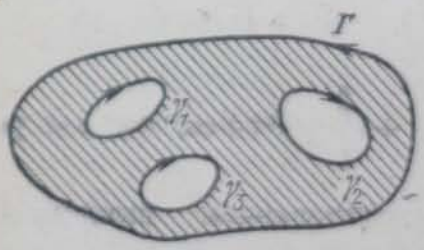


Рис. 97.

Если, дополнительно, функция $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, то

$$\oint_\Gamma f(\eta)\, d\eta = 0$$

(теорема Коши).

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной контуром Γ и внутренними по отношению к нему контурами $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma^+ + \gamma_1^- + \ldots + \gamma_k^-$, где знаки в верхних индексах означают на-

правления обходов (рис. 97), то

$$\oint\limits_{\Gamma^+ + \sum\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu^-} f(\eta)\, d\eta = 0 \tag{4}$$

(теорема Коши для многосвязной области).

Если функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области D и такова, что для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$

$$\oint\limits_{\gamma} f(\eta)\, d\eta = 0,$$

то при фиксированном $z_0 \in D$ функция

$$\Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)\, d\eta$$

является аналитической в области D функцией, для которой $\Phi'(z) = f(z)$.

Функция $\Phi(z)$ называется первообразной или неопределенным интегралом от $f(z)$, причем если $F(z)$ — одна из первообразных для $f(z)$, то

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta = F(z_2) - F(z_1).$$

Если $f(z)$ аналитична в области D, $z_0 \in D$ и $\gamma \subset D$ — контур, охватывающий точку z_0, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\, d\eta. \tag{5}$$

При этом функция $f(z)$ имеет всюду в D производные любого порядка, для которых справедливы формулы

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{k+1}}\, d\eta, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пример 3. Доказать, что если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная в выпуклой области D функция, то для любых двух точек z_1 и z_2 из этой области имеет место оценка

$$\left| \int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)\, d\eta \right| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)|\, |z_2 - z_1|.$$

◀ Из выпуклости области следует, что если $z_1 \in D$, $z_2 \in D$, то и отрезок, соединяющий эти точки, также принадлежит области D. Из теоремы Коши следует, что в качестве пути интегрирования

можем взять именно этот отрезок, а потому, применяя оценку задачи 4.5, имеем

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\eta)\,d\eta\right| \leqslant \max_{z\in D}|f(z)|\left|\int_{z_1}^{z_2} ds\right| = |z_2-z_1|\max_{z\in D}|f(z)|. \blacktriangleright$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_0^z \frac{d\eta}{1+\eta^2} = F(z)-F(0),$$

если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2}=\pm i$.

◀ Так как подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ является аналитической всюду, кроме точек $z_{1,2}=\pm i$, то интеграл $F(z)$ имеет смысл во всех точках, кроме $z=\pm i$, и при условии, что путь интегрирования не проходит через эти точки. Следовательно, если путь интегрирования не охватывает ни одну из точек $z_{1,2}=\pm i$, то в качестве одной из первообразных для функции $\frac{1}{z^2+1}$ можно взять однозначную функцию $F(z)=\operatorname{arctg} z$, и, учитывая, что $\operatorname{arctg} 0=0$, имеем

$$\operatorname{arctg} z=\int_{\infty 0}^{z} \frac{d\eta}{1+\eta^2}. \blacktriangleright$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I=\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\,dz.$$

◀ Запишем интеграл в виде

$$I=\oint_{|z-i|=1} \frac{\frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i}\,dz$$

и, используя формулу Коши (5), находим

$$I=2\pi i\left.\frac{\sin\frac{iz\pi}{2}}{z+i}\right|_{z=i}=2\pi i\,\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2i}=-\pi. \blacktriangleright$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I=\oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

◀ Так как внутри контура интегрирования знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_1=0$ и $z_2=1$, то рас-

смотрим многосвязную область D, ограниченную окружностью $\Gamma=\{z\,|\,|z-2|=3\}$ и внутренними контурами $\gamma_1=\{z\,|\,|z|=\rho\}$ и $\gamma_2=\{z\,|\,|z-1|=\rho\}$ $(0<\rho<1/2)$. Тогда в этой области D функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$ является аналитической, и по формуле (4) можем записать:

$$\oint\limits_{\Gamma+} f(z)\,dz+\oint\limits_{\gamma_1^-} f(z)\,dz+\oint\limits_{\gamma_2^-} f(z)\,dz=0,$$

откуда следует, что

$$I=\oint\limits_{\Gamma+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz=\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz+\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz.$$

Применяя теперь соответственно формулы (6) и (5), находим

$$\oint\limits_{\gamma_1^+}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=0}=\pi i\,\frac{e^z(z^2-4z+5)}{(z-1)^3}\Bigg|_{z=0}=-5\pi i$$

и

$$\oint\limits_{\gamma_2^+}\frac{e^z/z^3}{z-1}\,dz=2\pi i\,\frac{e^z}{z^3}\Bigg|_{z=1}=2\pi e i.$$

Таким образом, $I=\pi i\,(2e-5)$. ▶

Вычислить интегралы (обход контуров — против часовой стрелки):

4.9. а) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2}{z-2i}\,dz$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}\,dz$.

4.10. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=1}\frac{\sin z}{(z+i)^3}\,dz$. **4.11.** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{dz}{z^2+2z}$.

4.12. $\displaystyle\oint\limits_{C}\frac{dz}{(z-1)^3\,(z+1)^3}$, где:

а) $C=\{z\,|\,|z-1|=1\}$; б) $C=\{z\,|\,|z+1|=1\}$;
в) $C=\{z\,|\,|z|=R;\ R\neq 1\}$.

4.13. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$.

4.14. Доказать теорему о среднем: если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0|<R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z-z_0|\leqslant R$, то значение функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на

окружности, т. е.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi R}\oint_{|\eta-z_0|=R} f(\eta)\,ds,$$

где ds — дифференциал дуги.

4.15*. Известно, что если $f(z)\neq\text{const}$ — аналитическая в области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}=D+L$ функция, то $\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ достигается только на границе области (принцип максимума модуля). Доказать, что если, кроме того, $\forall z\in\overline{D}\,(f(z)\neq 0)$, то и $\min\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|$ достигается также на границе.

4.16. Используя формулу (6) для $f'(z)$, доказать теорему Лиувилля: если $f(z)$ — аналитическая и ограниченная во всей плоскости (z) функция, то $f(z)\equiv\text{const}$.

ОТВЕТЫ

1.1. Внутренность круга с центром в точке z_0 радиуса R; односвязна. **1.2.** Кольцо между окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $z_0=i$; двусвязна. **1.3.** Внешность круга радиуса 2 с центром в точке $z_0=i$ с выколотой бесконечно удаленной точкой; двусвязна. **1.4.** Горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y=-1/2$ и $y=0$; односвязна. **1.5.** Внешность круга радиуса R с центром в точке z_0; односвязна. Бесконечно удаленная точка $z=\infty$ является внутренней точкой этой области. **1.6.** Внутренность круга с выколотым центром $z_0=-i$ радиуса 2; двусвязна. **1.7.** Полуплоскость, лежащая левее прямой $x=1$. **1.8.** Внутренность круга радиуса 2 с центром в точке (2, 0); односвязна. **1.9.** Прямая $x-y+1=0$. • Записать $\frac{z+1}{z-i}$ в виде $\frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{(z-i)(\bar{z}+i)}=\frac{(z+1)(\bar{z}+i)}{|z-i|^2}$. **1.10.** Внутренность эллипса $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. **1.11.** Окружность $|z|=2$. **1.12.** Часть плоскости, лежащая справа от левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. **1.13.** Прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, с вырезанным отрезком, соединяющим эти точки. **1.14.** Внутренность отрезка, соединяющего точки $-i$ и i. • Воспользоваться равенством $\arg(-z)=\pi+\arg z$. **1.15.** $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$. **1.16.** $\operatorname{Re} z<0$. **1.17.** $|\operatorname{Re} z|<3$. **1.18.** $|z-(1+i)|+|z-(3+i)|<6$. **1.19.** $\frac{3\pi}{8}<\arg(z-z_0)<\frac{5\pi}{8}$. **1.20.** $2\varphi+4k\pi$, $k=0,\pm 1,\ldots$ **1.21.** $3\varphi+6k\pi$, $k=0,\pm 1,\ldots$ **1.22.** $\frac{1}{3}\psi+\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,\pm 1,\ldots$, где $\operatorname{tg}\psi=\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}$, $\sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{1+r^2+2r\cos\varphi}}$. **1.23.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0,\pm 1,\ldots$, где $\operatorname{tg}\psi=$

$=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi-8}$, $\sin\psi=\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{64+r^2-16r\cos\varphi}}$. **1.24.** $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, где $\operatorname{tg}\psi=\frac{r^2\sin 2\varphi}{r^2\cos 2\varphi-4}$, $\sin\psi=\frac{r^2\sin 2\varphi}{\sqrt{r^4+16-8r^2\cos 2\varphi}}$.

1.25. $\frac{1}{2}\psi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, где $\operatorname{tg}\psi=\frac{3r\sin\varphi}{r^2-2-r\cos\varphi}$, $\sin\psi=\frac{3r\sin\varphi}{\sqrt{9r^2\sin^2\varphi+(r^2-2-r\cos\varphi)^2}}$. **1.26.** Любая область, лежащая внутри угла с вершиной в начале координат и раствора не более π/n. **1.27.** Любая область, лежащая в полосе, параллельной действительной оси и шириной не более 2π. **1.28.** Любая область, лежащая в полосе, параллельной мнимой оси и шириной не более $2\pi/3$. **1.29.** Любая область, лежащая либо внутри единичного круга ($|z|<1$), либо вне его ($|z|>1$). • Равенство $z_1+\frac{1}{z_1}=z_2+\frac{1}{z_2}$ при $z_1\neq z_2$ возможно только в случае, когда $z_2=\frac{1}{z_1}$. **1.30.** а) Прямая $x=C$ отображается в параболу $v^2=4C^2(C^2-u)$; окружность $|z|=R$ — в окружность $|w|=R^2$, проходимую дважды; луч $\arg z=\alpha$ — в луч $\arg w=2\alpha$; полукруг $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$ — в круг $|w|<r^2$ с разрезом по отрезку положительной действительной оси. б) ◀ Точки, лежащие на прямой $x=C$, записываются в виде $z=C+iy$, а потому $w=\frac{1}{C+iy}=\frac{C}{C^2+y^2}-i\frac{y}{C^2+y^2}$. Отсюда $u=\frac{C}{C^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{C^2+y^2}$, $u^2+v^2=\frac{1}{C^2+y^2}=\frac{u}{C}$. Следовательно, образом прямой $x=C$ является окружность $u^2+v^2-\frac{u}{C}=0$. Образом окружности $|z|=R$ является окружность $|w|=\frac{1}{R}$. Луч $\arg z=\alpha$, т. е. луч $(0, \infty\cdot e^{i\alpha})$ отобразится в идущий из бесконечности луч $(0, \infty\cdot e^{-i\alpha})$. Полукруг $|z|<r$, $\operatorname{Im} z>0$, отобразится в нижнюю полуплоскость с вырезанным полукругом $|w|\leqslant\frac{1}{r}$, $\operatorname{Im} w<0$. ▶ **1.31.** $f(z)$ непрерывна в D, если $\forall\varepsilon>0\ \forall z\in D\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon, z)>0\ ((|\Delta z|<\delta\wedge z+\Delta z\in D)\Rightarrow|f(z+\Delta z)-f(z)|<\varepsilon)$. **1.36.** $\operatorname{ch} 1\cos 1-i\operatorname{sh} 1\sin 1$. **1.37.** $\cos 1$. **1.38.** $-\operatorname{sh} 2\cos 1+i\operatorname{ch} 2\sin 1$. **1.39.** $(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.40.** $\frac{\pi}{2}i$. **1.41.** $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.42.** $\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$, $\operatorname{Arcsin} i=2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.43.** $\operatorname{Arctg} z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3}=k\pi+\frac{i}{2}\ln 2$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.44.** $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{Arsh} i=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.45.** $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$, $\operatorname{Arch}(-1)=(2k+1)\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.46.** $\operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Arth}(1-i)=$

$= \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{i}{2}\operatorname{arctg} 2 + \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$. **1.47.** $e^{2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.48.** $e^{(2k+1)\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.49.** $e^{\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi}\left(\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.50.** $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.51.** $5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi}\times$ $\times\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

1.52. $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) + \right.$ $\left. + i\sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.53.** $f(0)=0$. **1.54.** $f(0)=0$. **1.55.** $f(0)=0$. **1.56.** $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ не существует.

2.1. Не дифференцируема ни в одной точке. ● $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ не существует. **2.2.** Не дифференцируема ни в одной точке. ● При $\Delta y = k\Delta x$ имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{1+ik}$, т. е. предел не существует. **2.3.** Дифференцируема только в точке $z=0$. **2.4.** Дифференцируема только в точке $z=0$. **2.5.** Не дифференцируема ни в одной точке. ◀ В точке $z=0$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$ — не существует. Если же $z\neq 0$, то, обозначая $|z|=r$, $\Delta z = \Delta\rho e^{i\varphi}$, имеем

$$\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z} = \frac{r\left(\sqrt{1+\frac{2\Delta\rho}{r^2}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho e^{i\varphi}}.$$

Отсюда найдем $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\frac{r\left(\sqrt{1+2\frac{\Delta\rho}{r^2}x + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{\Delta\rho} = \frac{x}{r}$ при $\varphi=0$ и $\lim\limits_{i\Delta\rho\to 0}\frac{r\left(\sqrt{1+2\frac{\Delta\rho}{r}y + \left(\frac{\Delta\rho}{r}\right)^2} - 1\right)}{i\Delta\rho} = -\frac{iy}{r}$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|-|z|}{\Delta z}$ не существует. ▶ **2.6.** Дифференцируема только в точке $z=1$. **2.7.** ● Использовать правила дифференцирования сложной функции двух переменных $u(x, y) = u(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$, $v(x,\ y) = v(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ и условия (1): $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi$ и $\frac{\partial v}{\partial\varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\sin\varphi +$ $+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi}$. Аналогично проверяется второе из равенств (2). Для получения равенств (4) следует выразить $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$

через производные по r и φ, производные $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ получить из равенств $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и подставить найденные выражения в (3). **2.8.** $(e^{3z})'=3e^{3z}$. **2.9.** $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$. **2.10.** $(z^n)'=nz^{n-1}$ (кроме точки $z=0$ при отрицательных n). **2.11.** $(\cos z)'=-\sin z$. **2.12.** $(\ln(z^2))'=2/z$. **2.13.** $\left(\sin\frac{z}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}$. **2.14.** • Воспользоваться условиями Коши — Римана. **2.17.** Вся плоскость, кроме точек $z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $(\operatorname{tg} z)'=\frac{1}{\cos^2 z}$. **2.18.** Вся плоскость; $f'(z)=e^{-z}(1-z)$. **2.19.** Вся плоскость, кроме точек $z_{1,2}=\pm i$; $f'(z)=\frac{(1-z^2)\cos z-z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}$. **2.20.** Вся плоскость, кроме точек $z_\nu=2\pi\nu i$, $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$. **2.21.** Вся плоскость, кроме точек $z_\nu=\frac{\pi}{2}\nu$, $\nu\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\cos 2z$. **2.22.** Вся плоскость, кроме точки $z=0$; $f'(z)=\frac{e^z(z-1)}{z^2}$. **2.23.** Вся плоскость, кроме точек $z_k=\pi ki$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$. **2.24.** Вся плоскость, кроме точек $z_k=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $f'(z)=\frac{1}{1-\sin 2z}$. **2.26.** $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$. **2.27.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x,y)=3x^2y-y^3+C$, $f(z)=(x+iy)^3+Ci=z^3+Ci$. **2.28.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x,y)=2e^x\cos y+C$, $f(z)=2e^x(\cos y+i\sin y)+C=2e^z+C$. **2.29.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x,y)=-x^2+y^2+C$, $f(z)=-i(x^2-y^2+2ixy)+3+Ci=-iz^2+3+Ci$. **2.30.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C=$ $=\ln|z|+i\arg z+C=\ln z+C$. **2.31.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+$ $+2x+C$, $f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}-2y+2ix+Ci=\frac{1}{z}+2iz+Ci$. **2.32.** $\Delta u\equiv 0$, $v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+2xy+C$, $f(z)=z^2-\frac{i}{2}z^2+Ci=\frac{2-i}{2}z^2+Ci$. **2.33.** $\Delta v\equiv 0$, $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2-y^2)+C$, $f(z)=\frac{1}{2}z^2+C$.

3.1. $k=4$, $\varphi=\pi/4$. **3.2.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.3.** $k=6$, $\varphi=\pi/2$. **3.4.** $k=3$, $\varphi=0$. **3.5.** $k=1$, $\varphi=0$, **3.6.** $k=2$, $\varphi=\pi/2$. **3.7.** Сжимается область $|z|>1$, а растягивается область $|z|<1$. **3.8.** Сжимается полуплоскость $\operatorname{Re} z<1$, а растягивается полуплоскость $\operatorname{Re} z>1$. **3.9.** Сжимается область $|z+1|>1$, а растягивается область $|z+1|<1$. **3.10.** Сжимается внутренность круга $|z+1|<$

$< 1/2$, а растягивается внешность этого круга. **3.11.** $|z-1|=1/2$. **3.12.** $\left|z-\frac{i}{2}\right|=1/2$. **3.13.** $|z+i|=\sqrt{2}$. **3.14.** $|z|=1/\sqrt{3}$. **3.15.** $\{z \mid \operatorname{Im}(1-i)z=0\}$, т. е. прямая $y=x$. **3.16.** $\{z \mid \operatorname{Im}(1+i)\times\times(i+z)=0\}$, т. е. прямая $x+y+1=0$. • Использовать равенство $\arg\frac{-i}{(i+z)^2}=\frac{3\pi}{2}-2\arg(i+z)=0$ и соотношение $-\frac{3\pi}{4}=\arg(-1-i)$. **3.17.** Луч $0<x<+\infty$, $y=-1/2$. **3.18.** Луч $1<x<+\infty$, $y=0$. **3.19.** Отображение конформно. **3.20.** Отображение не конформно. **3.21.** Отображение конформно. **3.22.** Отображение конформно. **3.23.** Отображение не конформно. **3.25.** $z_0=-1$, $\alpha=0$, $k=2$. **3.26.** $z_0=2(1+i)$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $k=1$. **3.27.** $z_0=-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $k=1$. **3.28.** При $a\neq 1$ $z_0=\frac{b}{1-a}$, $\alpha=\arg a$, $k=|a|$. **3.29.** Прямая $v=-3$. **3.30.** Прямая $u-2v=0$. **3.31.** Окружность $u^2+v^2-u-v=0$. **3.32.** Окружность $u^2+v^2+2u+2v+1=0$. **3.34.** $w=i\frac{z-i}{z-1}$. **3.35.** $w=\frac{(i+1)z-i}{z}$. **3.36.** $w=\frac{(5-3i)z-4}{4z-5-3i}$. **3.37.** $z_{1,2}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$, $z_1=z_2$ при $(a-d)^2+4bc=0$. Бесконечно удаленная точка является неподвижной только при $c=0$, т. е. для линейной функции. **3.38.** а) $\frac{1}{2}(1+i)$; б) $4+i$. • Точка $1+i$ и центр круга i лежат на прямой $y=1$. **3.39.** а) $w|_{z=-1+i}=\frac{1+2i}{5}$; б) $w|_{z=1-9i}=\frac{81-2i}{65}$. **3.40.** $\alpha=\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$. **3.41.** $\alpha=0$, $\theta=-\frac{\pi}{2}$. **3.42.** $\alpha=z_0$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. **3.44.** $\alpha=i$, $\theta=0$. **3.45.** $\alpha=2i$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$. **3.46.** $\alpha=z_0$, $\theta=\pi$. **3.47.** $E=\{w \mid |w|<1,\ \operatorname{Im} w<0\}$ (нижняя полуокружность). **3.48.** $E=\left\{w \,\middle|\, \left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{Im} w<0\right\}$ (рис. 98). • Луч

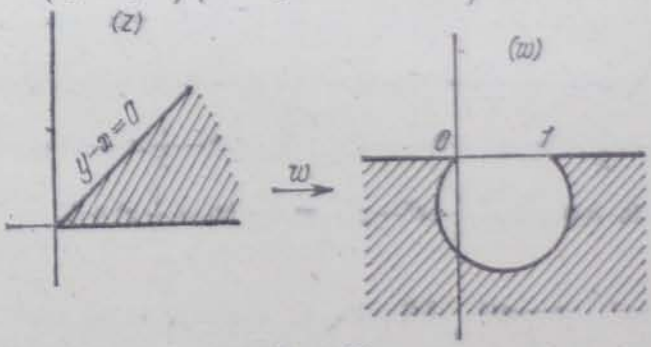


Рис. 98.

$0<x<+\infty$ преобразуется во внешность отрезка $0\leqslant u\leqslant 1$, причем точки верхней полуплоскости (z) отображаются в точки нижней

полуплоскости (w). Прямая $y-x=0$ отображается в окружность $w\bar{w}-\frac{1+i}{2}w+\frac{1-i}{2}\bar{w}=0$, т. е. в окружность $\left|w-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке $w_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. **3.49.** $E=\left\{w\left|\frac{1}{2}\leqslant|w-1|\leqslant 1,\ -\frac{\pi}{4}<\arg(w-1)\leqslant 0\right.\right\}$. ● Окружность $|z|=1$ отображается в окружность $|w-1|=1$, окружность $|z|=2$ — в окружность $|w-1|=\frac{1}{2}$, отрезок $1\leqslant x\leqslant 2$ — в отрезок $\frac{3}{2}\leqslant u\leqslant 2$, а прямая $y=x$ — в прямую $u+v=1$ (рис. 99). **3.50.** $E=\{w\,|\,\operatorname{Im}w>0,\ \operatorname{Re}w>0\}$.

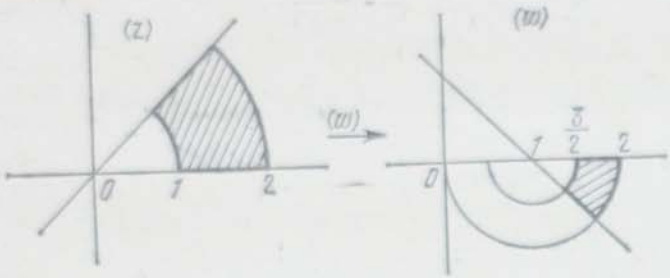


Рис. 99.

3.51. $E=\left\{w\left|\left|w-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\ \left|w-\frac{3}{4}\right|>\frac{1}{4}\right.\right\}$. **3.52.** $E=\left\{w\left|-\frac{\pi}{4}<\arg w<\frac{\pi}{4}\right.\right\}$.

3.53.
$$D=\begin{cases} z\,|\ \left|z+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right|<\dfrac{r}{1-r^2} & \text{при } r<1,\\ z\,|\ \operatorname{Re}z<\dfrac{1}{2} & \text{при } r=1,\\ z\,|\ \left|z-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right|>\dfrac{r}{r^2-1} & \text{при } r>1.\end{cases}$$

◀ Поскольку $|w|<r$, то из соотношения $w(1-z)=z$ получаем $|z|<r|1-z|$. Возводя обе части этого неравенства в квадрат, запишем полученное неравенство в виде $zz<r^2(1-z)(1-\bar{z})$, откуда получаем

$$(r^2-1)z\bar{z}-r^2(z+\bar{z})+r^2>0. \qquad (*)$$

Если $r<1$, то из $(*)$ имеем

$$z\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})<\frac{r^2}{1-r^2}. \qquad (**)$$

Но $z\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}(z+\bar{z})=\left(z+\frac{r^2}{1-r^2}\right)\left(\bar{z}+\frac{r^2}{1-r^2}\right)-\frac{r^4}{(1-r^2)^2}$.

Далее, так как $\frac{r^4}{(1-r^2)^2}+\frac{r^2}{1-r^2}=\frac{r^2}{(1-r^2)^2}$, то из $(**)$ получаем

$\left|z+\frac{r^2}{1-r^2}\right|^2<\left(\frac{r}{1-r^2}\right)^2$, т. е. $D=\left\{z\,\middle|\,\left|z+\frac{r^2}{1-r^2}\right|<\frac{r}{1-r^2}\right\}$ (внутренность круга). Аналогично в случае $r>1$ найдем $z\bar{z}-\frac{r^2}{r^2-1}(z+\bar{z})>-\frac{r^2}{r^2-1}$, т. е. $\left|z-\frac{r^2}{r^2-1}\right|^2>\frac{r^4}{(r^2-1)^2}-\frac{r^2}{r^2-1}=\frac{r^2}{(r^2-1)^2}$. Следовательно, $D=\left\{z\,\middle|\,\left|z-\frac{r^2}{r^2-1}\right|>\frac{r}{r^2-1}\right\}$ (внешность круга). Наконец, если $r=1$, то из (*) получаем $z+\bar{z}<1$, т. е. $D=\left\{z\,\middle|\,\operatorname{Re} z<\frac{1}{2}\right\}$ (полуплоскость). ▶

3.54. $w=-\frac{(z-z_1)^3}{(z-z_2)^3}$, $z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.55.** $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\cdot z^{\frac{4}{3}}$. **3.56.** $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. **3.57.** $w=-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$. **3.58.** $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$. **3.59.** $w=-\left(\frac{z^{2/3}+\sqrt[3]{4}}{z^{2/3}-\sqrt[3]{4}}\right)^2$. **3.60.** $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. **3.61.** $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}$. **3.62.** $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^3$. **3.63.** $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$. **3.64.** $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. **3.65.** $w=\sqrt{\frac{z-1-i}{2+2i-z}}$. **3.66.** $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. **3.67.** $w=\sqrt{z^2+h^2}$. **3.68.** Как внутренность круга $|z|<R$ при $R<1$, так и внешность круга $|z|>R$ при $R>1$ отобразятся на внешность эллипса $\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$. **3.69.** Плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 5/4]$. **3.70.** Плоскость с разрезом по лучам $(-\infty, -5/4]$, $[1, +\infty)$. **3.71.** Один из ответов: $w=\frac{3}{8}\times\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{4}\right)^2-1}$ (причем выбирается та ветвь, которая точку $z=0$ переводит во внутренность круга $|w|<1$). • $w_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $w_2=\frac{3w_1-1}{3}$, $w_3=\frac{3}{4}w_2$, $w_4=w_3+\sqrt{w_3^2-1}$, $w=w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1$. **3.72.** $w=\frac{1}{2R}\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$. • Произвести преобразование подобия $w_1=\frac{z}{R}$ и для отображения $w_2=\frac{1}{2}\times\left(w_1+\frac{1}{w_1}\right)$ проследить за преобразованием границы области. **3.73.** $w=\frac{1}{a+b}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. • Производя

преобразование подобия $w_1=\frac{z}{c}$ и определяя R из условий $\frac{1}{2}\times$ $\times\left(R+\frac{1}{R}\right)=\frac{a}{c}$, $\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)=\frac{b}{a}$, находим $w_2=w_1+\sqrt{w_1^2-1}$ и $w_3=\frac{1}{R}w_2$. **3.74.** $E=\{w\mid \operatorname{Im} w<0\}$. **3.75.** $E=\{w\mid \operatorname{Re} w>0\}$. **3.76.** $E=\{w\mid |w|>1, w\notin[1,+\infty]\}$. **3.77.** $E=\left\{w\mid |w|>1,\ 0<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\}$. **3.78.** $E=\{w\mid 1<|w|<e,\ \operatorname{Im} w>0\}$. **3.79.** Если $w=\rho e^{i\psi}$, то прямая $x=C$ отображается в бесконечное число раз проходимую окружность $\rho=e^C$, а прямая $y=C$ — в луч $\psi=C$. **3.80.** $E=\{w\mid 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.81.** $E=\{w\mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<\operatorname{Im} w<\pi\}$. **3.82.** $E=\{w\mid \operatorname{Re} w<0,\ 0<\operatorname{Im} w<2\pi\}$. **3.83.** $E=\{w\mid 0<\operatorname{Im} w<2\pi,\ w\neq u+i\pi$ для $u>0\}$. **3.84.** $E=\{w\mid \operatorname{Im} w<0\}$. ◀ Представить $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ в виде композиции отображений $w_1=iz$, $w_2=e^{w_1}$, $w_3=\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)$ (рис. 100). ▶ **3.85.** Прямые $x=C$ преобразуются

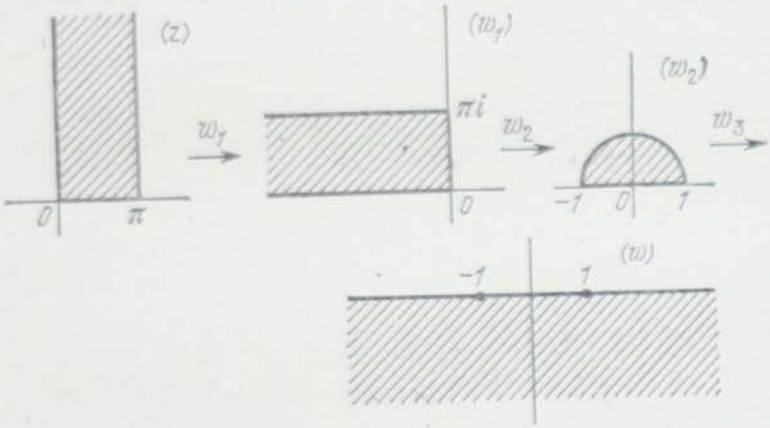


Рис. 100.

в эллипсы $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$, где $a^2=\frac{1}{4}(e^C+e^{-C})^2=(\operatorname{ch} C)^2$, $b^2=\frac{1}{4}\times$ $\times(e^C-e^{-C})^2=(\operatorname{sh} C)^2$, а прямые $y=C$ — в гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2 C}-$ $-\frac{v^2}{\sin^2 C}=1$. **3.86.** Так как область D содержит точки с симметричными мнимыми частями, то область значений E будет двузначной: каждый из прямоугольников $D_1=\{z\mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ -h<\operatorname{Im} z<0\}$ и $D_2=\{z\mid -\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ 0<\operatorname{Im} z<h\}$ отобразится

на нижнюю половину внутренности эллипса $\frac{u^2}{\frac{1}{4}(e^h+e^{-h})^2}+$

$+\frac{v^2}{\frac{1}{4}(e^h-e^{-h})^2}=1,\ v<0.$

4.1. $\frac{(2-i)^2}{2}$. **4.5.** • Оценить интегральную сумму (1) и, учитывая, что $|\Delta z_k|\leqslant\Delta s_k$, перейти к пределу при $\max\Delta s_k\to 0$. **4.6.** $\oint\limits_{|z-z_0|=R}(z-z_0)^n\,dz=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq-1,\\ 2\pi i & \text{при } n=-1.\end{cases}$ • Произвести замену переменной $z-z_0=Re^{i\theta}$. **4.7.** $\int\limits_{\substack{|z-z_0|=R\\ 0\leqslant\arg(z-z_0)<\pi}}(z-z_0)^n\,dz=$

$=\begin{cases}\pi i \text{ при } n=-1,\\ 0 \text{ при } n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq-1,\\ -\frac{2R^{2k+1}}{2k+1} \text{ при } n=2k,\end{cases}$ **4.8.** $-\frac{1+i}{3}$. **4.9.** а) 0; б) $-8\pi i$. **4.10.** $-\pi\,\mathrm{sh}\,1$. **4.11.** 0. **4.12.** а) $\frac{3\pi i}{8}$; б) $-\frac{3\pi i}{8}$; в) 0. **4.13.** 0. **4.15.** • Рассмотреть функцию $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

Глава 12

РЯДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. Числовые ряды

1. Сходимость ряда. Критерий Коши. Выражение

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

где $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — заданная числовая действительная или комплексная последовательность, называется *числовым рядом*. Конечные суммы

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ \ldots,\ S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\ \ldots \tag{2}$$

называются *частичными суммами* ряда (1).

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм (2) $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда* (1).

Критерий Коши. *Для того чтобы числовой ряд* (1) *был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало* $N=N(\varepsilon)$ *такое, что для всех* $n>N$ *и* $p=1, 2, \ldots$ *выполнялось неравенство*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

Необходимый признак сходимости. *Если ряд* (1) *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

Пример 1. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

◀ Так как дробь $\frac{1}{x(x+1)}$ представима в виде

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1},$$

то частичную сумму ряда можно записать следующим образом:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 1. ▶

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ и в случае сходимости найти его сумму.

◀ Имеем

$$S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Если $q=1$, то $S_n=n$, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$, и, следовательно, ряд расходится. Пусть теперь $q\neq 1$, тогда

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$

Положим $q=re^{i\varphi}$, тогда $q^n=r^ne^{in\varphi}$. При $0<r<1$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} r^ne^{in\varphi}=0,$$

т. е. $\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}=0$, откуда $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-q}$. Если же $r>1$, то $r^n\longrightarrow\infty$ и, следовательно, конечного предела $\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}$, а значит, и предела последовательности частичных сумм не существует. Наконец, при $r=1$ и $\varphi\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} e^{in\varphi}=\lim_{n\to\infty}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

$\left(\text{а потому и предел } \lim_{n\to\infty} S_n\right)$ также не существует.

Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, называемый бесконечной геометрической прогрессией, сходится при $|q|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$ и расходится при $|q|\geqslant 1$. ▶

Пример 3. Доказать, что гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится, хотя его члены стремятся к нулю при $n\longrightarrow\infty$.

◀ Рассмотрим разность частичных сумм с номерами $2n$ и n. Имеем

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Заменяя каждое слагаемое меньшей величиной $1/2n$, получаем

$$S_{2n}-S_n > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Это неравенство означает, что при $p=n$ для гармонического ряда не выполняется критерий Коши и, следовательно, ряд расходится. ▶

Показать, что следующие ряды сходятся, и найти их суммы:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1.3*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{3^n}$. **1.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$.

Используя критерий Коши или необходимый признак сходимости ряда, установить расходимость следующих рядов:

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. **1.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. **1.8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{10}}$.

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$. **1.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+in}$.

1.11. Доказать, что если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится.

1.12. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы соответственно u и v, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$, причем его сумма равна $u+v$. Привести пример, когда обратное утверждение не имеет места.

1.13. Доказать, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость этого ряда (но влияет на сумму!).

2. Абсолютная и условная сходимость. Признаки абсолютной сходимости. Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей членов этого ряда, т. е. сходится ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|. \qquad (3)$$

Если ряд (1) сходится, а ряд (3) расходится, то ряд (1) называется *условно сходящимся*.

Признак сравнения рядов. *Если члены ряда* (1) *для всех* $n>N_0$ $(N_0\geqslant 1)$ *удовлетворяют условию* $|u_n|\leqslant b_n$, *причем знакоположительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то ряд* (1) *сходится абсолютно. Если же для* $n>N_1$ *члены ряда* (1) *действительны и удовлетворяют условию* $0<c_n\leqslant|u_n|$, *причем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *расходится, то и ряд* (1) *расходится.*

Пример 4. Зная, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится (см. пример 1), установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

◀ Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

то, учитывая неравенства

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}, \qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

по признаку сравнения убеждаемся в сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. ▶

На практике более эффективным оказывается следующий

Предельный признак сравнения. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится абсолютно и существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{v_n}\right|=q<+\infty$, *то ряд* (1) *также сходится абсолютно. Если же члены рядов* u_n *и* v_n *положительны и*

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}<+\infty,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}. \tag{4}$$

◀ Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 4) и так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0,$$

то ряд (4) также сходится. ▶

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}. \tag{5}$$

◀ Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3},$$

а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. пример 3), то и ряд (5) расходится. ▶

Признак Даламбера. *Если члены ряда* (1) *таковы, что существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l,$$

то при $0 \leqslant l < 1$ *ряд* (1) *сходится абсолютно, при* $l > 1$ — *расходится, а при* $l = 1$ *требуется дополнительное исследование.*

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}, \tag{6}$$

◀ Имеем $u_n = \frac{n^3}{2^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{n_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3\, 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} < 1.$$

Таким образом, ряд (6) сходится. ▶

Признак Коши. *Пусть* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} = l$. *Тогда, если* $0 \leqslant l < 1$, *то ряд* (1) *сходится абсолютно, если* $l > 1$ — *ряд* (1) *расходится, а при* $l = 1$ *требуется дополнительное исследование.*

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

◀ Имеем $u_n=\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$, поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится. ▶

При использовании признака Коши бывает полезна следующая *формула Стирлинга*:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}},\qquad 0<\theta<1.$$

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}.$$

◀ Имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n\sqrt{2\pi n}}{n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\right)^{1/n}=$$

$$=\frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}=\frac{2}{e}<1,$$

т. е. ряд сходится. ▶

Интегральный признак Коши. *Пусть функция $f(x)$ положительна и монотонна при $x\geqslant 1$, и пусть для всех $n\in\mathbb{N}$ имеет место равенство $f(n)=|u_n|$. Тогда числовой ряд (3) сходится (т.е. ряд (1) сходится абсолютно) или расходится одновременно с несобственным интегралом*

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx,\quad a\geqslant 1.$$

Пример 10. Выяснить, при каких значениях параметра p сходится *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

◀ Так как функция $f(x)=\frac{1}{x^p}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши, то исследование сходимости ряда Дирихле

сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Но

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^p} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{b \to +\infty} \ln b = +\infty & \text{при } p = 1, \\ \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty & \text{при } 0 < p < 1, \\ \lim\limits_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)\, b^{p-1}} \right) = \frac{1}{p-1} & \text{при } p > 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что ряд Дирихле сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. ▶

1.14. Доказать, что всякий абсолютно сходящийся ряд является рядом сходящимся.

1.15. Доказать, что члены сходящегося ряда можно группировать, не меняя их порядка, произвольным образом.

1.16. Доказать, что члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять произвольным образом; при этом сумма ряда не изменится.

Используя признак сравнения или предельный признак сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$. **1.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

1.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3-1}$. **1.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

1.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$. **1.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость следующие ряды:

1.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$. **1.24.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.25. $\frac{3}{1} + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 4} + \ldots + \frac{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{1 \cdot 4 \ldots (3n-2)} + \ldots$

1.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$. 1.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{3^n}$.

Используя признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

1.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. 1.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.30. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_{2k-1}=\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$, $u_{2k}=\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k/2}$.

1.31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$.

Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

1.32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. 1.33. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

1.34. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. 1.35. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$.

Исследовать на сходимость ряды:

1.36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. 1.37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

1.38. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. 1.39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.

1.40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$. 1.41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.42. $100+\frac{100\cdot 103}{1\cdot 5}+\frac{100\cdot 103\cdot 106}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots$

$$\ldots+\frac{100\cdot 103\ldots(97+3n)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$$

1.43. $1+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\frac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$

1.44. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\ldots+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(4n-2)!!}+\ldots$

1.45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 1.46. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n^2}$.

1.47. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. 1.48. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$.

1.49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. 1.50*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

1.51. $2+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

1.52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$. 1.53. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

1.54. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$. 1.55. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$.

1.56. $\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 4}{100\cdot 102}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{100\cdot 102\cdot 104}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{100\cdot 102\ldots(98+2n)}+\ldots$$

1.57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$. 1.58. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})}$.

1.59. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$. 1.60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)(2\sqrt{n}-1)}$.

1.61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$. 1.62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n n}{2^n}$.

1.63. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n \cdot n}{2^n}$. 1.64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

1.65. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^\alpha}$ при различных действительных значениях p и α.

1.66. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^\alpha (\ln \ln n)^\beta}$ при различных действительных значениях p, α и β.

1.67. Убедиться в том, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, тогда как признак Коши показывает, что этот ряд сходится.

3. Признаки условной сходимости. Признак Лейбница. *Пусть члены a_n знакочередующегося ряда*

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots, \tag{7}$$

действительны, монотонно убывают, т. е.

$$a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots, \tag{8}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0. \tag{9}$$

Тогда ряд (7) сходится, причем для его суммы S имеет место оценка $S<a_1$.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

◀ Так как $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то выполнены условия (8) и (9), и данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится условно. ▶

Признак Абеля—Дирихле. *Пусть члены последовательности (b_n) монотонно убывают: $b_1>b_2>\ldots>b_n>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, а частичные суммы $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n=1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности, т. е.*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|\leqslant M \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ сходится.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

◀ Очевидно, что в точках $x=m\pi$ все члены ряда равны нулю, т. е. при $x=m\pi$ ряд сходится и его сумма равна нулю. Пусть теперь

$x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Подсчитаем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Отсюда заключаем, что для любых $n=1, 2, \ldots$ и $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Далее, последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, при $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ выполнены условия признака Абеля—Дирихле, и потому ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ сходится. Следовательно, ряд сходится при любом x. ▶

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

1.68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$. **1.69.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

1.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$. **1.71.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

1.72. $\frac{1}{3} - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7} - \ldots$

$$\ldots + (-1)^{n+1} \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)} + \ldots$$

1.73. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. **1.74.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$.

1.75. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^3}$.

1.76. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$.

1.77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$. 1.78*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n}$.

1.79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

Убедиться в том, что к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с указанными ниже членами ($k\in\mathbb{N}$) нельзя применить признак Лейбница. Исследовать эти ряды на сходимость другими способами.

1.80*. $u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}$.

1.81. $u_{2k-1}=\frac{1}{3k+2}$, $u_{2k}=-\frac{1}{3k-1}$.

1.82. $u_{2k-1}=\frac{1}{3^k}$, $u_{2k}=-\frac{1}{2^k}$.

1.83. $u_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}$, $u_{2k}=-\frac{1}{k^2}$.

1.84*. Доказать, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

Произведением по Коши рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, члены которого получены по формулам

$$c_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Исследовать на сходимость произведение по Коши следующих рядов:

1.85**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

1.86*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$.

1.87*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

1.88*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

1.89. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то произведение по Коши сходится.

Пусть $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ — частичные суммы сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, а $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ — остаток этого ряда. Проверить справедливость соотношений (называемых *преобразованиями Абеля*):

1.90. $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) S_k - v_1 S_0 + v_n S_n$.

1.91. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+1}^{n-1} (v_k - v_{k+1})(S_k - S_m) + v_n (S_n - S_m)$.

1.92. $\sum_{k=m+1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m+2}^{n} (v_k - v_{k-1}) R_{k-1} + v_{m+1} R_m - v_n R_n$.

1.93. Доказать, что для остатка R_n знакочередующегося ряда (7), удовлетворяющего условиям признака Лейбница, справедливо неравенство $|R_n| < a_{n+1}$.

§ 2. Функциональные ряды

1. Область сходимости функционального ряда. Пусть функции $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, определены в области D. Выражение

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

называется *функциональным рядом*. Если для $z_0 \in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ сходится, то говорим, что функциональный ряд (1)

сходится в точке z_0. Если в каждой точке $z \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходятся, то ряд (1) называется *сходящимся в области* D_1.

Критерий Коши. *Для того чтобы функциональный ряд* (1) *был сходящимся в области* D_1, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $z \in D_1$ *существовало* $N = N(\varepsilon, z)$ *такое, что*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

для всех $n > N(\varepsilon, z)$ *и* $p \in \mathbb{N}$.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда (1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Именно, если

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = l(z),$$

или

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = l(z),$$

то для определения области абсолютной сходимости ряда (1) следует решить функциональное неравенство $l(z) < 1$, а для определения области расходимости — функциональное неравенство $l(z) > 1$. При этом для изучения поведения ряда в граничных точках получаемой области, т. е. в точках, описываемых уравнением $l(z) = 1$, требуется дополнительное исследование.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x > -2.$$

◀ Так как $|f_n(x)| = \dfrac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}$ и $x > -2$, то, применяя признак Коши, имеем

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n \sqrt{(x+2)^n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3(x+2)^{1/2} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3\sqrt{x+2}}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}} < 1$, т. е. при $x > -\dfrac{17}{9}$.

При $x = -\dfrac{17}{9}$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости ряда — полуинтервал $[-17/9, +\infty)$. ▶

Найти области сходимости рядов ($x \in \mathbb{R}$). Исследовать ряды на абсолютную сходимость.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$. **2.3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(x+3)^n}$. 2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^x$.

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n2^n x^n}\right)$. 2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$.

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. 2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$. 2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$, $z \in \mathbb{C}$.

◀ Применяя признак Даламбера, можем записать неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\,(z-i)^n}{(z-i)^{n+1}\,n} \right| = \frac{1}{|z-i|} < 1,$$

откуда заключаем, что ряд сходится абсолютно вне круга радиуса 1 с центром в точке i, т. е. при $|z-i| > 1$. На окружности $|z-i| = 1$ ряд, очевидно, расходится. ▶

Найти области абсолютной сходимости указанных ниже рядов ($z \in \mathbb{C}$):

2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-2)^n}$. 2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(z+1)^n}$.

2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{(z-3i)^{2n}}$. 2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nz}$.

2.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-nz^2}$. 2.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{nz}$.

2.17*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-z}$. 2.18*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$.

2.19*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{1-2z}\right)^n$. 2.20*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$.

2. **Равномерная сходимость.** Сходящийся в области D_1 функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что для остатка ряда (1)

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ и $z \in D_1$ имеет место оценка

$$|R_n(z)| < \varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости. *Для того чтобы функциональный ряд* (I) *был равномерно сходящимся в области* D_1, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для всех* $n > N(\varepsilon)$ *и* $z \in D_1$ *выполнялось неравенство*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^n - z^{n+1}),$$

сумму ряда и показать, что во всей области сходимости ряд сходится неравномерно.

◀ Так как частичные суммы ряда имеют вид

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (z^k - z^{k+1}) = 1 - z^{n+1},$$

то можем заключить, что $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(z)$ существует только при $|z| < 1$ и в точке $z = 1$, т. е. областью сходимости ряда является область

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1 \text{ и } z = 1\},$$

причем сумма ряда равна

$$S(z) = \lim_{n \to \infty} S_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |z| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad z = 1. \end{cases}$$

Остаток ряда $R_n(z) = S(z) - S_n(z)$ имеет вид

$$R_n(z) = \begin{cases} z^{n+1} & \text{при} \quad |z| < 1, \\ 0 & \text{при} \quad z = 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $N(\varepsilon_0)$ такие, что для любого $n > N(\varepsilon_0)$ найдется z_n такое, что $|z_n| < 1$, но $|R_n(z_n)| > \varepsilon_0$. Так, например, выбирая $\varepsilon_0 = 1/4$ и $z_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{n+1}}} e^{i\varphi_n}$, φ_n — произвольно, имеем $|R_n(z_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$. Это означает, что во всей области сходимости D_1 равномерной сходимости нет. Заметим, однако, что в любой области $D_r = \{z \mid |z| \leqslant r < 1\}$ ряд будет сходиться равномерно, так как для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ такое, что для всех $z \in D_r$ и $n > N(\varepsilon)$ имеем $|R_n(z)| = |z|^{n+1} \leqslant r^{n+1} < \varepsilon$. ▶

Признак Вейерштрасса. *Пусть функциональный ряд* (I) *сходится в области* D_1, *и пусть существует сходящийся знако-*

положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *такой, что для всех* $z \in D_1$ *и для* $n > N_0$ *члены ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$|f_n(z)| \leqslant a_n.$$

Тогда ряд (1) *сходится абсолютно и равномерно в области* D_1.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим* для ряда (1).

Пример 4. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ и показать, что в этой области ряд сходится равномерно.

◀ Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{z^{n+1} n^2}{(n+1)^2 z^n} \right| = |z|.$$

Следовательно, в круге $|z| < 1$ ряд сходится. На границе круга, т. е. при $|z| = 1$, получаем сходящийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Значит, исходный ряд сходится в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$. Но так как для всех $|z| \leqslant 1$

$$|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

то ряд сходится абсолютно и равномерно. ▶

Найти область сходимости и область равномерной сходимости указанных рядов ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$):

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$. **2.22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$. **2.24.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$. **2.26.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. **2.28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+2)^n}$.

2.29*. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится абсолютно во всех точках, но не равномерно ни в каком

промежутке, внутри или на границе которого находится точка $x=0$.

2.30. Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси, тогда как ряд из абсолютных величин членов данного ряда (ряд задачи 2.29) на всей числовой оси сходится неравномерно.

2.31. Используя принцип максимума модуля аналитической функции, доказать, что если члены ряда (1) являются аналитическими в области D функциями и непрерывными в замкнутой области $\overline{D}=D+\Gamma$ и если ряд (1) сходится равномерно на Γ, то он сходится равномерно в замкнутой области $\overline{D}$ (вторая теорема Вейерштрасса).

2.32. Найти область сходимости и область равномерной сходимости, а также сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n+1}}\right).$$

3. Свойства равномерно сходящихся рядов. Сформулируем ряд свойств в виде задач.

2.33. Доказать, что если члены равномерно сходящегося в области D_1 функционального ряда (1) умножить на одну и ту же ограниченную в области D_1 функцию $\varphi(z)$, то равномерная сходимость ряда не нарушится.

2.34. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его сумма $f(z)$ непрерывна в области D_1.

2.35. Доказать, что если функции $f_n(z)$ непрерывны в области D_1 и ряд (1) равномерно сходится в этой области, то его можно почленно интегрировать по любой кривой l, целиком лежащей в области D_1, т. е. имеет место равенство

$$\int_l\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta)\right)d\eta=\sum_{n=1}^{\infty}\int_l f_n(\eta)\,d\eta.$$

2.36*. Доказать, что если на отрезке $[a, b]$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

сходится, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ равномерно сходится, то исходный ряд можно почленно дифференцировать, т. е. имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

Для равномерно сходящихся рядов из аналитических функций имеет место

Теорема Вейерштрасса. *Если члены функционального ряда (1), т. е. функции $f_n(z)$, являются аналитическими в области D функциями и в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$ ряд (1) сходится равномерно, то:*

а) сумма ряда (1), т. е. функция $f(z)$, является аналитической в области D;

б) ряд (1) можно почленно дифференцировать любое число раз, т. е. справедливы равенства

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad z \in D; \tag{2}$$

в) в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_1 \subset D$ полученные в результате дифференцирования ряды (2) сходятся равномерно.

2.37. Используя утверждение задач 2.34, 2.35 и теорему Морера (теорема, обратная теореме Коши), доказать утверждение а) теоремы Вейерштрасса.

2.38. Воспользовавшись формулой Коши для производной и утверждением задачи 2.35, доказать утверждение б) теоремы Вейерштрасса.

§ 3. Степенные ряды

1. Область сходимости и свойства степенных рядов. Ряд

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{1}$$

называется *степенным* по степеням $(z - z_0)$. В частности, ряд

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2}$$

является степенным по степеням z. С помощью замены $z - z_0 = Z$ ряд (1) сводится к ряду (2).

Теорема Абеля. *Если степенной ряд (2) сходится в точке $z = z_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех z таких, что $|z| < |z_1|$, причем сходимость будет равномерной в любом замкнутом круге $|z| \leqslant r < |z_1|$. Если же ряд (2) расходится в точке $z = z_2$, то он расходится и для всех z таких, что $|z| > |z_2|$.*

Из теоремы Абеля следует, что областью сходимости степенного ряда является круг с центром в начале координат (с центром в точке z_0), радиус которого может быть определен применением либо признака Даламбера, либо признака Коши, т. е. из условий

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = |z| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < 1.$$

Отсюда для вычисления радиуса R круга сходимости получаем соотношения

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{(z+2)^2}{1\cdot 3} + \frac{(z+2)^4}{4\cdot 3^2} + \ldots + \frac{(z+2)^{2n}}{n^2 3^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}.$$

◀ Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(z+2)^{2(n+1)}}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2)^{2(n+1)} n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\, 3^{n+1} (z+2)^{2n}}\right| = \frac{|z+2|^2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|z+2|^2}{3}.$$

Отсюда заключаем, что ряд сходится в круге $|z+2| < \sqrt{3}$. Далее, на границе круга, т. е. при $|z+2| = \sqrt{3}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z+2)^{2n}}{n^2\cdot 3^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

а это означает, что ряд абсолютно сходится в замкнутом круге $|z+2| \leq \sqrt{3}$, причем сходимость в этом замкнутом круге равномерная. ▶

3.1. Сформулировать теорему Абеля для ряда (1).

3.2*. Установить, что степенной ряд (1) обладает следующими свойствами:

а) в круге сходимости $|z-z_0| < R$ сумма степенного ряда $f(z)$ является функцией аналитической;

б) в круге сходимости $|z-z_0| < R$ степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, причем продифференцированные ряды имеют тот же самый круг сходимости $|z-z_0| < R$;

в) ряд (1) можно почленно интегрировать по любой кривой, лежащей в круге сходимости, причем интеграл зависит только от начала и конца кривой интегрирования, а ряд, полученный из ряда (1) в результате интегрирования от z_0 до z, имеет тот же круг сходимости $|z-z_0|<R$.

3.3*. Пусть степенной ряд (1) сходится в круге $|z-z_0|<R$, $R>0$, и $f(z)$ — сумма этого ряда. Показать, что значения производных $f^{(n)}(z)$ в точке z_0 можно выразить через коэффициенты ряда (1) по формулам

$$f^{(n)}(z_0)=n!c_n, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Найти области абсолютной сходимости и области равномерной сходимости следующих рядов ($z\in\mathbb{C}$). Заменяя в этих рядах z на $x\in\mathbb{R}$, исследовать их на абсолютную и равномерную сходимость.

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$. **3.5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n\cdot 2^n\sqrt{2n+1}}$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+2)^{2n}}{n}$. **3.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(z-2)^{2n}}{n}$. **3.9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-3)^{2n}}{(2n+1)3^n}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^n$. **3.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nz^n}{3n-2}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)z^n}{n!}$. **3.13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1}2^n(z-1)^n$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(z-i)^n$. **3.15.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n^n}$. **3.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+1)(z-1)^n$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-3)^n}{(2n+1)4^n}$. **3.19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2z^n}{n!}$.

3.20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n2^n\cdot\ln n}$. **3.21.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$.

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}(z-1)^n$. 3.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n(z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$. 3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}$.

3.26. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(z-3)^{2n}}{n2^n\ln^2 n}$. 3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n-1}(z+3)^n$.

3.28. $\sum_{n=1}^{\infty}n!z^{n!}$. 3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(z-5)^n}{(3n+1)^{3n}}$.

3.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{n!\,2^n}$. 3.31. $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}z^{n^2}$.

3.32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^{n^n}}{n^n}$.

2. **Разложение функций в ряд Тейлора.** Имеет место следующая

Теорема Тейлора. *Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0|<R$, однозначно представима в этом круге своим рядом Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам [1]

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\qquad n=0,1,\ldots$$

Следствие. Если функция $f(z)$ аналитична в области D и $z_0\in D$, то в круге $|z-z_0|<R(z_0,D)$, где $R(z_0,D)$ — наименьшее расстояние от точки z_0 до границы области D или до ближайшей точки z', в которой $f(z)$ не аналитична, $f(z)$ может быть представлена в виде степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0)(z-z_0)^n, \tag{3}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|\eta-z_0|=r\\ r<R(z_0,D)}}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta,\qquad n=0,1,\ldots$$

---

[1]) Здесь и далее для записи криволинейных интегралов по замкнутому контуру (контурных интегралов) мы используем обычный знак интеграла.

Если $z_0=0$, то ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*.

Пример 2. Разложить функцию $f(z)=\operatorname{sh} z$ в ряд по степеням z (т. е. в ряд Маклорена).

◀ Так как $\operatorname{sh} z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ является аналитической во всей плоскости, то по теореме Тейлора ее ряд Маклорена будет сходиться к ней во всей плоскости. Имеем

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n+1)}=\operatorname{ch} z, \qquad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

а

$$(\operatorname{sh} z)^{(2n)}=\operatorname{sh} z, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, $c_{2n}=\dfrac{f^{2n}(0)}{(2n)!}=0$, а $c_{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=\dfrac{1}{(2n+1)!}$, и искомое разложение имеет вид

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}. \ ▶$$

Замечание. Если рассматривать ряд Тейлора функции $f(x)$ действительной переменной, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

то для справедливости равенства (3) (при $z=x$ и $z_0=x_0$) необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ стремился к нулю при $n\longrightarrow\infty$. Остаточный член может быть записан, например, в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)), \quad \text{где} \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

или в форме Коши

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),$$

или в какой-либо другой форме.

Пример 3. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию e^x.

◀ Функция $f(x)=e^x$ бесконечно дифференцируема и $(e^x)^{(n)}=e^x$. Следовательно, $f^{(n)}(0)=1$. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

На любом конечном отрезке $x\in[-a,\ a]$, $a>0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\leqslant e^a\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

а потому для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \blacktriangleright$$

При решении многих задач рекомендуется пользоваться следующими разложениями элементарных функций:

а) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

б) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$

$z \in \mathbb{C}.$

в) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$

$z \in \mathbb{C}.$

г) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n},$

$|z| < 1.$

д) $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

е) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,$$

$|z| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$

(в случае, когда $\alpha = m \in \mathbb{N}$ функция $(1+z)^m$ раскладывается по биному Ньютона в многочлен, причем разложение имеет место во всей плоскости).

ж) при $\alpha = -1$ из е) получаем бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $-z$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Пример 4. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $\ln(2-5z)$.

◀ Преобразуем аргумент нашей функции, выделяя с некоторым коэффициентом выражение $(z+3)$. Имеем:

$$\ln(2-5z)=\ln(2-5(z+3)+15)=\ln 17\left(1-\frac{5}{17}(z+3)\right)=$$
$$=\ln 17+\ln\left(1-\frac{5(z+3)}{17}\right).$$

Воспользуемся разложением г) для $\ln(1+u)$, полагая $u=-\frac{5}{17}(z+3)$. Так как разложение г) имеет место при $|u|<1$, то наше разложение будет иметь место при $\frac{5}{17}|z+3|<1$. Таким образом,

$$\ln(2-5z)=\ln 17+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(-\frac{5}{17}(z+3)\right)^n\frac{1}{n}=$$
$$=\ln 17-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n\frac{(z+3)^n}{n},\quad |z+3|<\frac{17}{5}.$$

Заметим, что на действительной оси в точке $x=2/5$ ряд расходится (гармонический ряд), а в точке $x=-32/5$ по признаку Лейбница сходится. Следовательно, $[-32/5,\ 2/5)$ — промежуток сходимости на действительной оси. ▶

Часто для разложения функций в ряд удобно пользоваться дифференцированием или интегрированием известных разложений, а при разложении рациональной дроби разложить ее на простейшие.

Пример 5. Получить разложение г) для функции $f(z)=\ln(1+z)$.

◀ Имеем

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta},$$

где путь интегрирования не охватывает точку $z=-1$. Заметим, что функция $\frac{1}{1+\eta}$ при $|\eta|<1$ является суммой геометрической прогрессии со знаменателем $(-\eta)$, т. е.

$$\frac{1}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\eta)^n,$$

причем, если $|\eta|\leqslant|z|<1$, то ряд сходится равномерно и его можно почленно интегрировать. Поэтому для z таких, что $|z|<1$, имеем:

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{d\eta}{1+\eta}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^z(-\eta)^n\,d\eta=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.\ ▶$$

Пример 6. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z)=\frac{z^2-2z+19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

◀ Разложим $f(z)$ на элементарные дроби. Имеем

$$f(z)=\frac{1}{2z+5}+\frac{2}{(z-3)^2}.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2z+5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{2z}{5}}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2z}{5}\right)^n,\quad |z|<\frac{5}{2},$$

и

$$\frac{2}{z-3}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n,\quad |z|<3.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{2}{z-3}\right)'=-\frac{2}{(z-3)^2},$$

и учитывая утверждение б) задачи 3.2, получим

$$\frac{2}{(z-3)^2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{3^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)z^n}{3^{n+1}},\ |z|<3.$$

Складывая ряды для $\frac{1}{2z+5}$ и $\frac{2}{(z-3)^2}$, имеем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right)z^n,\quad |z|<\frac{5}{2}.\ ▶$$

Пример 7. Разложить в ряд по степеням x ($x\in\mathbb{R}$) функцию

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,du.$$

◀ Зная разложение функции $\sin u=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$ (см. разложение в)), имеем

$$\frac{\sin u}{u}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k+1)!},\quad u\in\mathbb{R},$$

в потому, используя свойство в) задачи 3.2, получаем

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{u^{2k}}{(2k+1)!}\,du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!\,(2k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Используя теорему Тейлора (формулу Тейлора с остаточным членом в какой-либо форме для функций действительной переменной), разложить в ряд по степеням z следующие функции, проверив тем самым справедливость соответствующих соотношений из а)—е):

3.33. e^z. **3.34.** $\cos z$. **3.35.** $\sin z$. **3.36.** $(1+z)^\alpha$.

3.37. 2^z. **3.38.** $\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$. **3.39.** $\cos^2 z$.

Написать первые три ненулевых члена разложения в ряд по степеням z следующих функций:

3.40*. $\operatorname{tg} z$. **3.41.** $\frac{1}{\cos z}$. **3.42.** $\operatorname{th} z$. **3.43.** $e^z \cos z$.

Используя разложения основных элементарных функций а)—ж), а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов [1]):

3.44. e^{-z^2}. **3.45.** $\sin^2 z$. **3.46.** $\frac{z}{4+z^2}$. **3.47.** $\frac{z}{3+4z}$.

3.48. $\sqrt[3]{27-z}$. **3.49.** $\frac{1}{\sqrt{9+z^2}}$. **3.50*.** $\frac{3z+1}{(z-2)^2}$.

3.51. $\frac{3}{1+z-2z^2}$. **3.52.** $(1-z)\,e^{-2z}$. **3.53.** $\operatorname{ch} z$.

3.54. $\sin 2z + 2z\cos 2z$. **3.55.** $\sin 2z \cos 2z$.

3.56. $\ln(1+z-2z^2)$. **3.57.** $\ln(z^2+3z+2)$.

3.58. $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$. **3.59.** $\operatorname{arctg} z$. **3.60.** $\arcsin z$.

3.61. $\int_0^z e^{-\eta^2/2}\,d\eta$. **3.62.** $\int_0^z \frac{\sin\eta^2}{\eta}\,d\eta$.

3.63*. $\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$. **3.64*.** $\frac{z\sin z - 1 + \cos z}{z^2}$.

Разложить функции в ряд по степеням $(z-z_0)$ и определить области сходимости полученных рядов:

---

[1]) См. также задачи 4.31—4.36.

3.65. z^3-2z^2-5z-2, $z_0=-4$. **3.66.** $\frac{1}{1-z}$, $z_0=2$.

3.67. $\frac{1}{1-z}$, $z_0=3i$. **3.68.** $\frac{1}{z^2-6z+5}$, $z_0=3$.

3.69. $\frac{1}{z^2+3z+2}$, $z_0=-4$. **3.70.** $\sqrt[3]{z}$, $z_0=1$.

3.71*. $\frac{1}{z^2}$, $z_0=2$. **3.72.** e^{z^2-4z+1}, $z_0=2$.

3.73. ze^{2z-z^2}, $z_0=1$. **3.74.** $\sin(z^2+4z)$, $z_0=-2$.

3.75*. $\ln(5z+3)$, $z_0=1$.

3.76. $\ln(z^2+6z+12)$, $z_0=-3$.

Найти области сходимости указанных рядов и их суммы:

3.77. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n$. **3.78.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^n$.

3.79. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n+1}$. **3.80.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-2n-2}z^{2n}$, $a\neq 0$.

3.81. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}$.

3. Теорема единственности. Аналитическое продолжение. Сформулируем теорему единственности:

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и на множестве различных точек $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющем предельную точку $a\in D$, выполняются равенства $f(z_n)=g(z_n)$, $n\in\mathbb{N}$, то

$$f(z)=g(z) \quad \textit{всюду на } D.$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, а функция $g(z)$ аналитична в области D_1 такой, что пересечение $D\cap D_1=D_2$ содержит последовательность различных точек $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, имеющую по крайней мере одну предельную точку $a\in D_2$. Пусть, кроме того, $f(z)=g(z)$ для $z\in D_2$. Тогда функция

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{для } z\in D, \\ g(z) & \text{для } z\in D_1\setminus D_2 \end{cases}$$

называется *аналитическим продолжением* функции $f(z)$ с области D на область $D_1\setminus D_2$.

Пример 8. Доказать, что если функция $f(z)$ непрерывна в области D, содержащей точку $z=0$, и если $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ для $n=n_0+1, n_0+2, \ldots$, то $f(z)$ не аналитична в области D ($n_0\geqslant 1$ — целое).

◀ Так как $f(z)$ непрерывна в D, то на отрезке действительной оси она также непрерывна, а в соседних точках $x=\frac{1}{n}$ и $x=\frac{1}{n+1}$,

$n > n_0$, она принимает значения разных знаков. Поэтому существуют точки $x_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, в которых $f(x_n) = 0$, причем $x_n \to 0$. Следовательно, в точках $x_n \in D$ функция $f(z)$ совпадает с аналитической функцией $g(z) \equiv 0$, а так как $f(z) \not\equiv 0$, то $f(z)$ не может быть аналитической функцией. ▶

Пример 9. Доказать, что функция

$$g(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} + \ldots + \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} + \ldots$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z) = 1 + 2z + 2^2z^2 + \ldots + 2^nz^n + \ldots$$

◀ Определим область сходимости рядов для $g(z)$ и $f(z)$. Имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{|1-z|^{n+1}}} = \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|2^nz^n|} = 2|z| < 1,$$

т. е. ряд для $g(z)$ сходится в области $D_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1/2\}$ (см. задачу (2.20)), а ряд для $f(z)$ — в области $D_2 = \{z \mid |z| < 1/2\}$.

Определим суммы этих рядов в указанных областях:

$$g(z) = \frac{1}{1-z}\left(1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{(1-z)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-\frac{z}{1-z}} = \frac{1}{1-2z}$$

и

$$f(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Так как $D_2 \subset D_1$ и в области D_2 справедливо тождество $f(z) = g(z)$, то функция $g(z)$ является аналитическим продолжением функции $f(z)$ с области D_2 на область D_1. ▶

3.82. Доказать, что при любом $a \neq 0$ и $|a| \neq 1$ функциональное уравнение $f(z) = f(az)$ не имеет решения, аналитического в точке $z = 0$ и ее окрестности, отличного от $f(z) \equiv \text{const}$.

3.83*. Доказать теорему единственности в том случае, когда $\forall z \in D\,(g(z) = 0)$, т. е. доказать следующую теорему: если аналитическая в области D функция $f(z)$ обращается в нуль в точках $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, лежащих в области D и таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a \in D$, то $\forall z \in D\,(f(z) = 0)$.

3.84. Будет ли аналитической в точке $z = 0$ и ее окрестности функция $f(z)$, если она при всех целых $n > n_0$ удовлетворяет соотношению $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$?

3.85. Найти аналитические в окрестности точки $z=0$ функции $f(z)$, удовлетворяющие условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

3.86. Показать, что функция

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

3.87. Показать, что функция

$$g(z)=\ln(2+2i)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1-2i)^n}{n(2+2i)^n}$$

является аналитическим продолжением функции

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}.$$

Найти аналитическое выражение этих функций в общей части областей сходимости рядов.

§ 4. Применение степенных рядов

1. Вычисление значений функций. Разложения а)—ж) из § 3 позволяют получать значения соответствующих функций в заданных точках с любой точностью.

Пример 1. Найти число e с точностью до 0,00001.

◀ Подставив $x=1$ в разложение функции e^x, имеем

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Оценим остаток

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ldots k} < \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$$

Следовательно, равенство $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ имеет предельную абсолютную погрешность, равную $\frac{1}{n!n}$. Найдем n, для которого $\frac{1}{n!n} < 0{,}00001$ или $n!n > 100000$. Получаем $n \geqslant 8$. Вычисляя $2 + \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{k!}$ и округляя, находим ответ с требуемой точностью $e = 2{,}71828$. ▶

4.1. Определить, сколько нужно взять членов в разложении функции $\ln(1+x)$, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,0001.

4.2. Определить, сколько нужно взять членов ряда в разложении функции $\cos x$, чтобы вычислить $\cos 10°$ с точностью до 0,0001.

4.3. С какой предельной абсолютной погрешностью можно вычислить

$$\sqrt[5]{36} = (32+4)^{1/5} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/5},$$

взяв три члена биноминального ряда?

4.4. При каких x многочлен $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ дает значение функции $\sin x$ с точностью до 0,0001?

4.5. Какова предельная абсолютная погрешность равенства

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^3}$$

при вычислении $\sqrt{5}$?

Используя соответствующие разложения, вычислить указанные значения функций с точностью до 0,0001:

4.6. $\sqrt{e}$. **4.7.** $\frac{1}{e}$. **4.8.** $\sin\frac{\pi}{5}$. **4.9.** $\sin 12°$.

4.10. $\cos 1$. **4.11*.** $\sin 1000$. **4.12*.** $\sqrt[3]{520}$.

4.13*. $\sqrt{15}$. **4.14*.** $\sqrt[4]{700}$. **4.15*.** $\ln 2$.

4.16. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.17. $I_0(0{,}5)$, где $I_0(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.

4.18. $\operatorname{sh} 1$. **4.19.** $\operatorname{ch} 1$.

В задачах 4.20—4.29, используя разложения в степенные ряды, требуется составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления значений указанных функций с заданной предельной абсолютной погрешностью. Использовать параметры X, EPS, где X — аргумент, EPS — предельная абсолютная погрешность. Имена подпрограмм выбрать не совпадающими с именами соответствующих стандартных подпрограмм-функций.

4.20*. $y=\sin x$. **4.21.** $y=\cos x$. **4.22*.** $y=e^x$.

4.23*. $y=(1+x)^\alpha$. **4.24.** $y=\ln(1+x)$.

4.25*. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. **4.26.** $y=\operatorname{arctg} x$.

4.27. $y=I_0(x)$ (см. задачу 4.17).

4.28. $y=\operatorname{sh} x$. **4.29.** $y=\operatorname{ch} x$.

4.30. Составить на фортране программу решения одной из задач 4.6—4.19, применяя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 4.20—4.29. В программе предусмотреть сравнение результатов, вычисленных с помощью составленной подпрограммы-функции и с помощью стандартной подпрограммы-функции, входящей в библиотеку обязательных подпрограмм.

2. Интегрирование функций. Разлагая подынтегральную функцию $f(t)$ в степенной ряд, можно, используя теорему об интегрировании степенных рядов, представить интеграл $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ в виде степенного ряда и подсчитать величину этого интеграла с заданной точностью при любом значении x из интервала сходимости полученного ряда.

Пример 2. Разложить функцию $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ в степенной ряд по степеням x.

◀ Используя разложение $e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, получим

$$e^{-t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}$$

на всей числовой оси. Применяя почленное интегрирование, находим

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}.\ \blacktriangleright$$

Разложить указанные функции в степенные ряды по степеням x:

4.31. $\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt$. **4.32.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

4.33. $\int_0^x \cos t^2\,dt$. **4.34.** $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

4.35. $\int_0^x I_0(t)\,t\,dt$ (см. задачу 4.17). **4.36.** $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Вычислить интегралы с точностью до 0,0001:

4.37. $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$. **4.38.** $\int_0^{0,2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

4.39. $\int_0^{0,5} e^{-t^2}\,dt$. **4.40.** $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

4.41. $\int_0^{0,8} \frac{dx}{1+x^6}$. **4.42.** $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

В задачах 4.43—4.47, используя разложения в степенные ряды, составить на фортране подпрограмму-функцию для вычисления указанных интегралов с заданной предельной абсолютной погрешностью. Параметры: X, EPS, где X — верхний предел интегрирования, EPS — предельная абсолютная погрешность.

4.43. $\mathrm{Si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. **4.44.** $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

4.45. $\int_0^x (1+t^s)^\alpha\,dt$ $(s>0,\ \alpha\neq 0)$. **4.46.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

4.47. $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$.

4.48. Используя подпрограммы-функции, полученные при решении задач 4.43—4.47, составить на фортране программу решения одной из задач 4.37—4.42.

3. Нахождение сумм числовых рядов. Убыстрение сходимости. При нахождении суммы числового ряда вычисляют его частичную сумму, для которой величина остатка ряда не превосходит заданной абсолютной погрешности. Используя известные разложения в степенные ряды, сумму числового ряда в некоторых случаях можно выразить в виде значения функции в определенной точке.

Доказать указанные равенства:

4.49. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+n}$.

4.50*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)} = \frac{1}{2(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$.

4.51*. $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)\ldots(\alpha+k+p)} =$

$$= \frac{1}{p(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+p-1)} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

4.52*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$.

4.53*. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Найти суммы рядов, не вычисляя частичных сумм:

4.54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. **4.55.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2}$. **4.56.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

4.57. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,3^{2n+1}}$. **4.58.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$.

4.59. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n \cdot (2n)!}$. **4.60.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

При нахождении суммы числового ряда требуется брать большое число членов, если остаток этого ряда медленно стремится к нулю. Такой ряд следует преобразовать в ряд, остаток которого стремится к нулю быстрее. Данное преобразование называется *убыстрением сходимости* ряда. Одним из методов убыстрения сходимости является *метод Куммера*. Неизвестная сумма A сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

вычисляется по формуле

$$A = qB + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k), \tag{2}$$

где B — известная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ такого, что существует предел

$$q = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} \neq 0.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - qb_k) \tag{3}$$

сходится быстрее, чем исходный ряд (1), т. е. остаток ряда (3) есть бесконечно малая более высокого порядка, чем остаток ряда (1).

Пример 3. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ с точностью до 0,001.

◀ Выясним, сколько членов данного ряда нужно взять для достижения требуемой точности. Оценивая остаток (см. задачу 4.49), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} < 0{,}001,$$

откуда следует, что $n > 1000$, т. е. для достижения указанной точности требуется взять 1001 член исходного ряда.

Улучшим сходимость ряда. Положив в формуле (2)

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad b_k = \frac{1}{k(k+1)}, \quad q = 1, \quad a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

находим (см. задачу 4.49 при $\alpha = 0$ и $n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}. \tag{4}$$

Применим формулу (2) для преобразования ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$, положив теперь $a_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$, $b_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $q = 1$ и $a_k - qb_k = \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)}$. Тогда, учитывая (4), имеем (см. задачу

4.50 при $\alpha=0$ и $n=1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}(k+1)(k+2)}=$$

$$=1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}(k+1)(k+2)}.$$

Вычисление суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ свелось к вычислению суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}(k+1)(k+2)}.$$

Оценивая остаток

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)(k+2)}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{3n(n+1)(n+2)},$$

получаем $\frac{1}{3n^3}<0{,}001\cdot 2$, откуда $n^3>\frac{1}{3}\cdot 2000\approx 666{,}7$, или $n\geqslant 9$, т. е. требуемая точность достигается при $n=9$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}=1+\frac{1}{4}+2\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}(k+1)(k+2)}=$$

$$=1+0{,}25+2\cdot 0{,}1975=1{,}645.$$

Применив преобразование (2) еще раз к ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}(k+1)(k+2)}$, можно было бы еще более улучшить сходимость. ▶

В задачах 4.61—4.65, применяя преобразование Куммера, найти суммы указанных рядов с точностью до 0,0001, взяв для этого не более 10 членов получившегося ряда. Использовать соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\zeta(p)\quad\text{и}\quad\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p)\quad(p>1).$$

Значения дзета-функции $\zeta(p)$ взять из таблицы

p	$\zeta(p)$
2	1,6449340668
3	1,2020569032
4	1,0823232337
5	1,0369277551
6	1,0173430620
7	1,0083492774
8	1,0040773562

4.61*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. **4.62*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n}$.

4.63*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$. **4.64*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(5n+3)}$.

4.65*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n+2}$.

4.66. Составить на фортране программу решения одной из задач 4.61—4.65.

4. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Степенные ряды широко применяются при решении дифференциальных уравнений. Для целого ряда дифференциальных уравнений показано, что решение $y(x)$ представимо в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \qquad (5)$$

коэффициенты которого можно определить с учетом заданного уравнения различными способами.

а) Пусть требуется найти решение уравнения $y''=f(x, y, y')$, удовлетворяющее условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, причем функция $f(x, y, y')$ в точке (x_0, y_0, y_1) имеет частные производные любого порядка. Тогда коэффициенты $y^{(k)}(x_0)$ ряда (5) определяются путем последовательного дифференцирования исходного уравнения и подстановки в него x_0 и найденных уже значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ...

Пример 5. Найти решение уравнения $y''=x^2y$, удовлетворяющее условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

◀ Имеем $y(0)=0$, $y'(0)=1$, и из заданного уравнения находим $y''(0)=0$. Далее, дифференцируя уравнение, имеем

$$y''' = x^2y' + 2xy,$$
$$y^{\mathrm{IV}} = x^2y'' + 4xy' + 2y,$$

$$y^{\mathrm{V}} = x^2y''' + 6xy'' + 6y',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k+2)} = x^2y^{(k)} + 2kxy^{(k-1)} + k(k-1)\,y^{(k-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и при $x=0$ получаем отсюда

$$y^{(k+2)}(0) = k(k-1)\,y^{(k-2)}(0), \qquad k=2,\ 3,\ \ldots$$

Так как $y(0)=y''(0)=y'''(0)=0$ и $y'(0)=1$, то

$$y^{(4n)}(0) = y^{(4n+2)}(0) = y^{(4n+3)}(0) = 0$$

и

$$y^{(4n+5)}(0) = (4n+2)(4n+3)\,y^{(4n+1)}(0) = \\ = 2\cdot3\cdot6\cdot7\ldots(4n+2)(4n+3), \quad n\in\mathbf{N}.$$

Следовательно,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\ldots(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}\,x^{4n+1}.$$

По признаку Даламбера полученный ряд сходится для любых $x\in\mathbf{R}$, т. е. определяемая этим рядом функция $y(x)$ является решением заданного уравнения при любых x. ▶

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

4.67. $y''=x^2y, \quad y(0)=y'(0)=1.$

4.68. $y''=-x^2y'-2xy+1, \quad y(0)=y'(0)=0.$

Найти первые 5 членов разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд:

4.69. $y'=2\cos x-xy^2; \quad y(0)=1.$

4.70. $y''=-2xy, \quad y(0)=y'(0)=1.$

4.71. $y''=y\cos x+x, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

б) Если исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, причем коэффициент при старшей производной в точке x_0 отличен от нуля, то решение следует искать в виде ряда (5) с неопределенными коэффициентами a_k, $k=0,\ 1,\ \ldots$ Законность такого метода вытекает из утверждения, доказываемого в аналитической теории дифференциальных уравнений, которое мы приведем для уравнения 2-го порядка.

Теорема 1. *Если в дифференциальном уравнении*

$$p_0(x)\,y''+p_1(x)\,y'+p_2(x)\,y=f(x) \tag{6}$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ *и* $f(x)$ *аналитичны в окрестности точки* x_0 *и* $p_0(x_0)\neq0$, *то существует решение уравнения* (6), *представимое в виде степенного ряда* $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

Пример 6. Найти решение (в виде степенного ряда) уравнения

$$y'' - xy' + y = 1,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

◀ Ищем решение в виде ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, в котором в силу условий $y(0) = y'(0) = 0$ имеем $a_0 = a_1 = 0$. Следовательно, $y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$. Подставив это выражение в уравнение, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

Отсюда находим, что $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$, т. е. $a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}$, и

$$(k+1)(k+2) a_{k+2} = (k-1) a_k \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Так как $a_1 = 0$, то $a_{2m+1} = 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$, а для $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, получаем рекуррентную формулу

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1) a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

из которой выводим равенства

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

причем полученный ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$. ▶

Используя степенные ряды, проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

4.72. $y'' + xy' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

4.73. $y'' - xy' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

4.74. $y'' + xy' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

в) Если коэффициент при старшей производной в линейном уравнении в точке x_0 обращается в нуль, то следует воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. *Если в дифференциальном уравнении*

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \tag{7}$$

функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичны в окрестности точки x_0, причем точка x_0 является нулем порядка s функции $p_0(x)$, нулем порядка не ниже $s-1$ функции $p_1(x)$ и нулем порядка не ниже $s-2$

функции $p_2(x)$, то решение уравнения (7) в окрестности точки x_0 существует и представляется в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

где $a_0\neq 0$ и $r\in R$.

Пример 7. Найти решение (в виде обобщенного степенного ряда) уравнения

$$xy''+y'+xy=0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

◀ Коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям теоремы 2, поэтому ищем решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r},\quad a_0\neq 0.$$

Имеем

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_kx^{k+r-1},$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_kx^{k+r-2}.$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_kx^{k+r-1}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r+1}=0,$$

т. е.

$$r^2a_0x^{r-1}+(r+1)^2a_1x^r+\sum_{k=2}^{\infty}((k+r)^2a_k+a_{k-2})\,x^{k+r-1}=0.$$

Отсюда следуют равенства

$$r^2a_0=0,\quad (r+1)^2a_1=0,\quad (k+r)^2a_k+a_{k-2}=0.$$

По условию $a_0\neq 0$. Следовательно, $r=0$, а тогда

$$a_1=0 \text{ и } k^2a_k=-a_{k-2},\qquad k=3,\ 4,\ \ldots$$

Из этих равенств заключаем, что $a_{2m+1}=0$ для всех $m=0,\ 1,\ \ldots$ Учитывая начальное условие $y(0)=1$, заключаем, что $a_0=1$, и имеем рекуррентную формулу

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2},$$

из которой получаем

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{((2m)!!)^2}=(-1)^m\frac{1}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Следовательно, искомое решение запишется в виде

$$y(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2},\quad x\in\mathbb{R}.\ \blacktriangleright$$

Найти общее решение дифференциального уравнения в виде обобщенного степенного ряда:

4.75*. $xy''+2y'+xy=0$. **4.76.** $4xy''+2y'+y=0$.

5. **Уравнение и функции Бесселя.** Частным случаем уравнения (6), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы 2, является уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0. \tag{8}$$

Его решениями являются цилиндрические функции Бесселя первого рода порядка ν

$$I_\nu(x)=a_0^{(\nu)}x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)} \tag{9}$$

и для нецелых ν

$$I_{-\nu}(x)=a_0^{(\nu)}x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,(1-\nu)(2-\nu)\ldots(k-\nu)}. \tag{10}$$

Если же ν — целое число, $\nu=n$, то вторым частным решением уравнения Бесселя (8) является функция Неймана (или Вебера), определяемая из соотношения

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{I_\nu(x)\cos\nu\pi-I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$

являющаяся цилиндрической функцией второго рода порядка n. Постоянная $a_0^{(\nu)}$ в формулах (9) и (10) берется обычно следующая:

$$a_0^{(\nu)}=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \tag{11}$$

где $\Gamma(\nu)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\nu-1}\,dx$ — гамма-функция Эйлера.

4.77. Используя представление (9) для $I_\nu(x)$, доказать следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx}(x^\nu I_\nu(x))=x^\nu I_{\nu-1}(x), \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{I_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{13}$$

4.78. Исходя из соотношений (12) и (13), вывести соотношения

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=2I'_\nu(x).$$

4.79*. Используя представление (9) и значение $a_0^{(\nu)}$ из (11), выразить $I_{-1/2}(x)$ и $I_{1/2}(x)$ через элементарные функции.

4.80. Доказать, что если $I_\nu(x)$ — решение уравнения (8), то $I_\nu(\alpha x)$ является решением уравнения

$$x^2y''+xy'+(\alpha^2x^2-\nu^2)\,y=0. \qquad (14)$$

Записать общее решение уравнения (14).

Используя результат задачи 4.80, найти общие решения уравнений:

4.81. $xy''+y'+4xy=0.$

4.82. $9x^2y''+9xy'+(36x^2-1)\,y=0.$

4.83. $x^2y''+xy'+(3x^2-4)\,y=0.$

4.84. $x^2y''+xy'+\left(9x^2-\frac{1}{25}\right)y=0.$

§ 5. Ряды Лорана

1. Ряды Лорана. Теорема Лорана. *Рядом Лорана* называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n; \qquad (1)$$

при этом ряд

$$f_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$$

называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

— *правильной частью*. Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r<R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

то областью сходимости ряда (1) является кольцо $K=\{z\,|\,0\leqslant r<|z-z_0|<R\}$. В этом кольце K сумма ряда $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$ является функцией аналитической, причем коэффициенты ряда c_n

связаны с функцией $f(z)$ посредством формул

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta-z_0|=r'}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}\,d\eta,\qquad n=0,\ \pm 1,\ \ldots, \tag{2}$$

где $r<r'<R$.

Пример 1. Найти область сходимости и сумму ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}.$$

◀ Применяя признак Коши к каждому из этих слагаемых, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n|z-1|^{n+1}}}=\frac{1}{2|z-1|}<1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n|z-1|^{n-1}}{3^n}}=\frac{|z-1|}{3}<1.$$

Отсюда заключаем, что областью сходимости исходного ряда является кольцо

$$K=\left\{z\,\middle|\,\frac{1}{2}<|z-1|<3\right\}.$$

Замечая, что слагаемые являются производными от рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2^n(z-1)^n}\quad\text{и}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n},$$

можем записать, что в кольце K

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}=$$

$$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-1)^n}\right)'+\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}\right)'=$$

$$=-\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2(z-1)}}\right)'+\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}\right)'=$$

$$=-2\left(\frac{z-1}{2z-3}\right)'+\left(\frac{3}{4-z}\right)'=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2}.$$

Таким образом, суммой данного ряда является функция

$$f(z)=\frac{3}{(4-z)^2}+\frac{2}{(2z-3)^2},\quad \frac{1}{2}<|z-1|<3.\ ▶$$

Теорема Лорана. *Если функция $f(z)$ аналитична в кольце $0\leqslant r<|z-z_0|<R$, то в этом кольце она единственным образом*

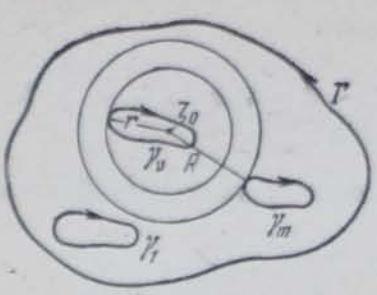


Рис. 101.

представима в виде ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам (2).

Следствие. Пусть $f(z)$ аналитична в многосвязной области D, ограниченной контуром Г и внутренними контурами $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \ldots, \gamma_m^-$ (рис. 101). Если точка z_0 лежит внутри (или на границе) одного из внутренних контуров γ_ν и величина $r=\max\limits_{\eta\in\gamma_\nu}|z_0-\eta|$ меньше расстояния R от z_0 до остальной части границы области D или до точки, в которой $f(z)$ не аналитична, т. е.

$$0\leqslant r=\max_{\eta\in\gamma_\nu}|z_0-\eta|<R=\min_{\eta\in\Gamma+\gamma_1+\ldots+\gamma_{\nu-1}+\gamma_{\nu+1}+\ldots+\gamma_m}|z_0-\eta|,$$

то в кольце $r<|z-z_0|<R$ функция $f(z)$ может быть представлена ее рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n, \quad r<|z-z_0|<R,$$

коэффициенты которого $c_n(z_0)$ определяются по формулам (2).

Рядом Лорана для функции $f(z)$ *в окрестности точки* $z=\infty$ называется ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \left(\text{или } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\right), \tag{3}$$

сходящийся в некотором кольце $r<|z|<\infty$ (соответственно $r<|z-a|<\infty$), при этом главной частью ряда Лорана является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n\right)$, а правильной — ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{0} c_n (z-a)^n\right)$.

Пример 2. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$.

◀ Так как аналитичность функции нарушается в точках $z=0$ и $z=1$, то областью сходимости ряда Лорана будет кольцо $0<|z|<1$. Замечая, что при $n\leqslant -2$ функция $\dfrac{1}{z^{n+2}(1-z)}$ аналитична в круге $|z|\leqslant\rho<1$, можем записать, что

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{1}{z^{n+2}(1-z)}\,dz=0 \quad \text{для } n=-2,\ -3,\ \ldots$$

Далее, применяя формулу Коши для функции $\varphi(z)=\frac{1}{1-z}$ и ее производных, для $n\geqslant -1$ можем записать

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{\varphi(z)}{z^{n+2}}dz=\frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n+1)!}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+2}}\Big|_{z=0}=1.$$

Таким образом, для $0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \tag{4}$$

т. е. главная часть содержит один член, а правильная — бесконечное число членов. ▶

Вычисление контурных интегралов (2), как правило, достаточно затруднительно. Поэтому для разложения функций в ряды Лорана используются искусственные приемы. Так, в примере 2 функцию $f(z)$ можно было бы представить в виде суммы дробей, т. е.

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z},$$

причем первое слагаемое является уже разложением в ряд Лорана по степеням z, а второе слагаемое есть сумма геометрической прогрессии со знаменателем z, т. е. имеем разложение (4).

Найти области сходимости и суммы следующих рядов:

5.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n}$. **5.2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n2^n}{(z+i)^{n+1}}$.

5.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n+3}}{n!}$. **5.4.** $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2}(n+1)\,i^{n+2}(z-i)^n$.

Найти все разложения указанных функций в ряды Лорана по степеням $z-z_0$ и установить области сходимости полученных разложений:

5.5. $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. **5.6.*** $\frac{1}{z(z-1)}$, $z_0=\infty$.

5.7*. $\frac{z}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$. **5.8*.** $\frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=\infty$.

5.9. $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=0$. **5.10.** $\frac{\cos z}{z^3}$, $z_0=\infty$.

5.11. $\sin\frac{1}{z-2}$, $z_0=2$. **5.12.** $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

5.13. $z^2e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=\infty$. **5.14.** $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $z_0=2$.

5.15. Найти три первых члена разложения функции $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=\infty$. Какова область сходимости этого ряда?

2. Характер изолированных особых точек. Точка z_0 называется *правильной* точкой для аналитической в области D функции $f(z)$, если существует степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n$ с радиусом сходимости $r(z_0)>0$, такой, что в общей части круга сходимости $|z-z_0|<r(z_0)$ и области D сумма этого ряда $\varphi_{z_0}(z)$ совпадает с $f(z)$. Точки, не являющиеся правильными, называются *особыми*.

Точка z_0 называется *изолированной* особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $0<|z-z_0|<R$, а z_0 — особая точка.

Аналогично точка $z_0=\infty$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $r<|z|<\infty$ и $z=\infty$ — особая точка.

Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

устранимой особой точкой, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a\neq\infty;$$

полюсом порядка $m\geqslant 1$, если для функции $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ точка z_0 является нулем порядка m, т. е. $g(z)$ имеет вид $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$ (очевидно, что если z_0 — полюс, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$);

существенно особой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Исследование характера бесконечно удаленной особой точки удобнее проводить путем замены $z=\frac{1}{\eta}$, с помощью которой бесконечно удаленная точка $z=\infty$ переходит в точку $\eta=0$.

Пример 3. Найти все особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}}+1}$ и определить их характер.

◀ Особыми точками являются точка $z=0$ и точки, в которых знаменатель обращается в нуль.

Имеем $e^{\frac{1}{z}}+1=0$ или $e^{\frac{1}{z}}=-1=e^{2\pi m i+\pi i}$, т. е. $e^{\frac{1}{z}}+1=0$, если $\frac{1}{z_m}=(2m+1)\pi i$, $m\in\mathbb{Z}$, причем эти точки являются нулями 1-го порядка. Следовательно, в точках $z_m=\frac{1}{(2m+1)\pi i}$, $m\in\mathbb{Z}$, функция $f(z)$ имеет полюсы 1-го порядка. Точка $z=0$ не является изолированной особой точкой, так как она является пределом полюсов, ибо $\lim\limits_{m\to\infty} z_m=0$. ▶

5.16*. Доказать, что отсутствие в разложении (1) главной части, т. е. равенство нулю всех коэффициентов c_n с отрицательными номерами ($n=-1, -2, \ldots$), является необходимым и достаточным условием того, что точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

5.17*. Доказать, что наличие в главной части разложения (1) не более $m \geqslant 1$ членов, причем $c_{-m} \neq 0$, а $c_{-n}=0$ для $n \geqslant m+1$, есть необходимое и достаточное условие того, что точка z_0 является полюсом порядка m для функции $f(z)$.

5.18*. Доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то существует последовательность точек (z_n), $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

5.19*. Опираясь на результат задачи 5.18, доказать, что если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа $A \neq \infty$ существует последовательность точек $(z_n(A))$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(A) = z_0$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n(A)) = A$.

5.20. Установить области сходимости правильной и главной частей разложения Лорана (3) в окрестности бесконечно удаленной точки.

Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

5.21. $\frac{1}{(z^2+i)^3}$. **5.22.** $\frac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$. **5.23.** $\frac{1}{\sin z}$.

5.24. $\operatorname{tg}^2 z$. **5.25.** $e^{\frac{1}{z-3i}}$. **5.26.** $\cos\frac{1}{z+2i}$.

5.27. $\operatorname{tg}\frac{1}{z-1}$. **5.28.** $\frac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$. **5.29.** $\frac{1-\cos z}{z^2}$.

5.30. $\frac{\sin z}{z^5}$. **5.31.** $\frac{1}{e^z-3}$.

Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной особой точки (устранимую особую точку считать правильной):

5.32. $\frac{z^2}{5-2z^2}$. **5.33.** $\frac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$. **5.34.** $\frac{z}{1-3z^4}$.

5.35. $1-z+2z^2$. **5.36.** e^{-z}. **5.37.** $\cos z$.

5.38. $e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$. **5.39.** $e^{\frac{1}{z^2}}$. **5.40.** $e^{\frac{1}{3-2z}}$.

5.41. $e^{-2z}+3z^3-z+8$.

§ 6. Вычеты и их применение

1. Вычет функции и его вычисление. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, за исключением может быть самой точки z_0, то *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки z_0, обозначаемым $\operatorname{res}[f(z);\ z_0]$ или $\text{выч}[f(z);\ z_0]$, называется число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\eta)\,d\eta$, где C — некоторый простой замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(z)$ и содержащий внутри себя только одну особую точку z_0. В качестве C удобно брать окружность $|\eta - z_0| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ.

Вычет функции совпадает с коэффициентом c_{-1} разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$, т. е.

$$\text{выч}[f(z);\ z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta - z_0| = \rho} f(\eta)\,d\eta.$$

Если $z_0 = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ \infty] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-} f(\eta)\,d\eta,$$

где $C_R^- = \{\eta \mid |\eta| = R\}$, R достаточно велико и обход контура — по часовой стрелке. Заметим, что если

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad r < |z| < \infty,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta| = \rho > r} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}}\,d\eta, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

то

$$\text{выч}[f(z);\ \infty] = -c_{-1}.$$

Если z_0 — полюс 1-го порядка функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

причем, если $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то

$$\text{выч}[f(z),\ z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если z_0 — полюс порядка $m \geqslant 2$ функции $f(z)$, то

$$\text{выч}[f(z);\ z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}.$$

Пример 1. Найти выч $\left[\frac{e^{iz}}{z^2 + 9};\ 3i\right]$.

◀ Так как точка $z_0=3i$ является полюсом 1-го порядка, то

$$\text{выч}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+9};\ 3i\right]=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z+3i)(z-3i)}=\frac{e^{i\cdot 3i}}{6i}=-\frac{i}{6e^3}.\ ▶$$

Пример 2. Найти выч $\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]$.

◀ Точка $z_0=1$ является полюсом 3-го порядка, поэтому

$$\text{выч}\left[\frac{\cos 2z}{(z-1)^3};\ 1\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(-2^2\cos 2z)=-2\cos 2.\ ▶$$

Пример 3. Найти выч $\left[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2\right]$.

◀ Точка $z_0=2$ является существенно особой, поэтому для нахождения вычета найдем коэффициент c_{-1} разложения $e^{\frac{3}{z-2}}$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$. Так как

$$e^{\frac{3}{z-2}}=1+\frac{3}{z-2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{3}{z-2}\right)^2+\ldots,\quad 0<|z-2|<\infty,$$

то $c_{-1}=3$. Следовательно,

$$\text{выч}\left[e^{\frac{3}{z-2}};\ 2\right]=3.\ ▶$$

Найти вычеты указанных ниже функций относительно каждого из ее полюсов, отличных от ∞:

6.1. $\frac{z^2+1}{z-2}$. 6.2. $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 6.3. $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

6.4. $\frac{\sin 2z}{(z+1)^4}$. 6.5. $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$. 6.6. $\operatorname{tg} z$.

6.7. $\operatorname{ctg}^2 z$. 6.8. $\frac{\cos^3 z}{z^3}$. 6.9. $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

6.10. $\frac{1}{z(1-z^2)}$. 6.11. $\frac{1}{z^2-z^5}$. 6.12. $\frac{\cos 4z}{(z-2)^6}$.

Найти вычеты функций относительно точки $z_0=0$:

6.13. $e^{\frac{1}{z}}$. 6.14. $\cos\frac{1}{z}$. 6.15. $\sin\frac{1}{z}$.

Найти вычеты функций относительно точки $z_0=\infty$:

6.16. $\sin\frac{1}{z}$. 6.17. $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$. 6.18*. $\frac{\sin z}{z^2+9}$.

6.19. $\frac{z^4+z}{z^6-1}$. 6.20. $z\cos^2\frac{\pi}{z}$. 6.21. $\frac{z^2}{z-1}\sin\frac{1}{z}$.

2. Теоремы о вычетах и их применение к вычислению контурных интегралов.

Первая теорема о вычетах. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, лежащих в этой области, то для любого простого замкнутого контура $C \subset D$, охватывающего точки $z_1, z_2, \ldots, z_N$,*

$$\int_{C+} f(\eta)\, d\eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{выч}\,[f(z);\ z_k].$$

Вторая теорема о вычетах. *Если $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}$ и $z_N = \infty$, то*

$$\sum_{k=1}^{N} \text{выч}\,[f(z);\ z_k] = 0.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{C+} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz$, где $C = \{z \mid |z| = 3\}$.

◀ Так как внутри контура C находятся две особые точки подынтегральной функции — полюсы 1-го порядка $z_{1,2} = \pm 2i$, то, применяя первую теорему о вычетах, можем записать

$$\int\limits_{C} \frac{e^z}{z^2+4}\, dz = 2\pi i \left(\text{выч}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ 2i\right] + \text{выч}\left[\frac{e^z}{z^2+4};\ -2i\right]\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=2i} + \frac{e^z}{2z}\bigg|_{z=-2i}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{2i}}{4i} - \frac{e^{-2i}}{4i}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^{2i} - e^{-2i}\right) = \pi i \sin 2 = \pi \operatorname{sh} 2i. \ ▶$$

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10}+1}.$$

◀ Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^{10}+1}$ имеет десять особых точек $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}$, $k = 0, 1, \ldots, 9$, являющихся простыми полюсами, лежащими на единичной окружности. Так как разложение функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10}\left(1+\frac{1}{z^{10}}\right)} = \frac{1}{z^{10}}\left(1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^{10}} - \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z^{30}} - \ldots, \quad 1 < |z| < \infty,$$

то $-c_{-1} = \text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right] = 0$. Поэтому, применяя вторую теорему

о вычетах, можем записать, что

$$\sum_{k=0}^{9} \text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = -\text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ \infty\right] = 0.$$

Таким образом,

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{9} \text{выч}\left[\frac{1}{z^{10}+1};\ e^{\frac{(2k+1)\pi i}{10}}\right] = 0. \blacktriangleright$$

Используя теоремы о вычетах, вычислить следующие интегралы:

6.22. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{z^4+1}$, где $C = \{z \,|\, |z-1| = 1\}$.

6.23. $\int\limits_{C-} \frac{dz}{z^4+1}$, где $C = \{z \,|\, |z-1| = 1\}$.

6.24. $\int\limits_{C+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, где $C = \{z \,|\, |z-2| = 2\}$.

6.25. $\int\limits_{C+} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, где $C = \left\{z \,\middle|\, |z-2| = \frac{1}{2}\right\}$.

6.26. $\int\limits_{C-} \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)}$, где $C = \left\{z \,\middle|\, |z-2| = \frac{1}{2}\right\}$.

6.27. $\int\limits_{C+} \frac{e^z\,dz}{z^2(z^2+9)}$, где $C = \{z \,|\, |z| = 1\}$.

6.28*. $\int\limits_{C+} \frac{\sin z}{z^2+9}\,dz$, где $C = \{z \,|\, |z| = 4\}$.

6.29. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$, где $C = \{z \,|\, |z| = 1\}$, n — натуральное число и $0 \leqslant |a| < 1 < |b|$.

6.30*. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^n}$, где $C = \{z \,|\, |z| = 1\}$, n — натуральное число и $0 \leqslant |a| < |b| < 1$.

6.31. $\int\limits_{C+} \sin\frac{1}{z}\,dz$, где $C = \{z \,|\, |z| = r > 0\}$.

6.32. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где $C = \{z \,|\, |z| = R < 1\}$.

6.33. $\int\limits_{C+} \frac{dz}{(z-1)^3(z^2+1)}$, где $C=\{z \mid |z|=R>1\}$.

6.34. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, где $C=\{z \mid |z|=2\}$.

6.35. $\int\limits_{C+} \frac{z+1}{e^z+1}\,dz$, где $C=\{z \mid |z|=4\}$.

3. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов.

а) Интегралы вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — символ рациональной функции, с помощью замены $z=e^{ix}$ приводятся к контурным интегралам от рациональных относительно z функций.

Пример 6. Вычислить интеграл Пуассона

$$I(p)=\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2}, \quad |p|\neq 1.$$

◀ Производя замену $z=e^{ix}$, $dz=ie^{ix}\,dx=iz\,dx$, $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=$ $=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$, получаем

$$I(p)=\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1-p\frac{z^2+1}{z}+p^2\right)}=-i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{-pz^2+p^2z+z-p}=$$

$$=i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}.$$

Так как при любом p, $|p|\neq 1$, внутри круга $|z|<1$ находится только один корень знаменателя подынтегральной функции, то при $|p|<1$ имеем:

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\,\text{выч}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ p\right]=\frac{2\pi}{1-p^2},$$

а если $|p|>1$, то

$$I(p)=\frac{2\pi i^2}{p}\,\text{выч}\left[\frac{1}{(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)};\ \frac{1}{p}\right]=\frac{2\pi}{p^2-1}.$$

Таким образом,

$$I(p)=\begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} & \text{при } |p|<1, \\ \frac{2\pi}{p^2-1} & \text{при } |p|>1. \end{cases}$$ ▶

б) Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на $(-\infty, +\infty)$, аналитическая в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$, лежащих в конечной части верхней полуплоскости, и удовлетворяющая для достаточно больших $|z|$ условию

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad M > 0, \quad \delta > 0.$$

В этом случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{выч}\,[f(z);\ z_k]. \tag{1}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

◀ В верхней полуплоскости функция $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$ имеет один полюс 2-го порядка в точке $z_0 = 3i$, и $|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^4}$ для достаточно больших $|z|$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} = 2\pi i\ \text{выч}\left[\frac{1}{(z^2+9)^2};\ 3i\right] =$$

$$= 2\pi i \frac{d}{dz}\left((z-3i)^2 \frac{1}{(z^2+9)^2}\right)\Big|_{z=3i} = 2\pi i\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)\Big|_{z=3i} =$$

$$= -\frac{4\pi i}{(z+3i)^3}\Big|_{z=3i} = -\frac{4\pi i}{(6i)^3} = \frac{\pi}{54}. \ ▶$$

Замечание. Формула (1) справедлива и в том случае, когда функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = e^{i\alpha z}F(z)$, где $\alpha > 0$, а функция $F(z)$ аналитична на действительной оси, в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_N$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10}\,dx$.

◀ Подынтегральная функция является мнимой частью функции $\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}$, значения которой совпадают со значениями на действительной оси функции $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+10}e^{iz}$. Функция $F(z) = \frac{z}{z^2-2z+10}$ имеет в верхней полуплоскости полюс 1-го порядка в точке $z_0 = 1+3i$ и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, т. е. выполнены сформулированные

в замечании условия, а потому можем записать:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = 2\pi i \text{ выч}\left[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10};\ 1+3i\right] =$$

$$= 2\pi i\,\frac{(1+3i)\,e^{i(1+3i)}}{2(1+3i-1)} = \frac{\pi}{3}(1+3i)\,e^{-3+i} =$$

$$= \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1 + i(3\cos 1 + \sin 1)).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

Заметим, что одновременно мы вычислили интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3\sin 1). \blacktriangleright$$

Используя один из рассмотренных выше методов, вычислить определенные интегралы.

6.36. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}, \quad a > 1.$

6.37. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}, \quad a > b > 0.$

6.38. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$ **6.39.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

6.40. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0.$

6.41. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a > 0.$

6.42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx.$ **6.43.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+x+1}\,dx.$

6.44. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$

6.45. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx$. **6.46.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

4. Принцип аргумента. Пусть функция $f(z)$ в области D, ограниченной простым замкнутым контуром C, имеет конечное число N нулей и конечное число P полюсов, где каждый нуль и каждый полюс считаются столько раз, какова их кратность, причем на контуре C не имеет ни нулей, ни полюсов. Тогда разность $\omega = N - P$ равна числу оборотов радиус-вектора $w = f(z)$ при обходе точкой z контура C.

Если $f(z)$ — аналитическая в D функция, то $P = 0$ и $\omega = N$.

Пример 9. Найти число нулей многочлена $p(z) = z^3 - 3z + 1$, лежащих в правой полуплоскости.

◀ Рассмотрим контур C, состоящий из полуокружности C_R радиуса R, лежащей в правой полуплоскости, и отрезка мнимой оси $[-iR, iR]$, и для достаточно большого R применим к этому контуру принцип аргумента.

Так как

$$p(z) = z^3\left(1 - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right), \tag{2}$$

то очевидно, что при обходе точкой z контура C_R против часовой стрелки $\arg z$ получает приращение π, а потому $\arg(z^3)$ получит приращение 3π $\left(C_R\right.$ отображается в кривую $w = R^3 e^{i\psi}$, $\left.-\frac{3\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$. Так как второй сомножитель в (2) для достаточно больших R близок к 1, то и приращение аргумента этого множителя мало. Пусть теперь $z = it$, т. е. точка z движется по мнимой оси от точки iR до точки $-iR$. Тогда

$$p(it) = u + iv = 1 - i(t^3 + 3t), \quad \text{т. е.} \quad u = 1, \quad v = -t^3 - 3t.$$

Это означает, что при изменении t от R до $-R$ при $R \to +\infty$ $\arg p(it)$ изменяется на π $\left(\text{от } -\frac{\pi}{2} \text{ до } +\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, общее приращение $\arg p(z)$ при обходе контура равно 4π, а это означает, что $N = 2$, т. е. в правой полуплоскости многочлен $p(z) = z^3 - 3z + 1$ имеет два нуля.

Для данных многочленов найти количество корней, лежащих в правой полуплоскости:

6.47*. $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$.

6.48. $p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$.

6.49. $p(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 3$.

6.50*. Доказать, что если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$ и для точек $\eta \in \Gamma$ справедливо неравенство $|\varphi(\eta)| < |f(\eta)|$, то число нулей функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, лежащих в области D,

совпадает с числом нулей функции $f(z)$ (теорема Руше).

6.51*. Доказать основную теорему высшей алгебры: многочлен $p_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ степени n имеет в плоскости (z) точно n нулей.

Опираясь на теорему Руше (задача 6.50), найти число нулей данных функций в указанных областях:

6.52. $F(z)=z^5+2z^2+8z+1$: а) в круге $|z|<1$; б) в кольце $1\leqslant|z|<2$.

6.53. $F(z)=z^3-5z+1$: а) в круге $|z|<1$; б) в кольце $1\leqslant|z|<2$; в) в кольце $2\leqslant|z|<3$.

§ 7. Ряды Фурье. Интеграл Фурье

1. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Тригонометрическая система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

является *ортогональной* на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ (как, впрочем, и на всяком отрезке длины 2π), т. е. интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

Если $f(x)\in L(-\pi,\ \pi)$ $\left(\text{т. е. } \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx<\infty\right)$, то существуют числа

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

называемые *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$; ряд

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Члены ряда (1) можно записать в виде гармоник

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx=A_k\cos(kx-\varphi_k)$$

с *амплитудой* $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$, *частотой* $\omega_k=k$ и *фазой* $\varphi_k=\operatorname{arctg}\dfrac{b_k}{a_k}$.

Для функции $f(x)$, такой, что $f^2(x)\in L(-\pi,\ \pi)$, справедливо *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Если же $f(x) \in L\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, то коэффициенты Фурье записываются в виде

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{l} dx, \quad \beta_k = \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{l} dx, \qquad (2)$$

а ряд Фурье — в виде

$$S(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{2\pi kx}{l} + \beta_k \sin \frac{2\pi kx}{l}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \qquad (3)$$

Последний ряд называется *рядом Фурье в комплексной форме*. Здесь

$$c_k = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi kx}{l}} dx, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots,$$

и для $k \geqslant 0$

$$c_k = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} = \bar{c}_k.$$

Суммы рядов (1) и (3) имеют соответственно периоды 2π и l.

Функция $f(x)$ называется *кусочно гладкой* на отрезке $[a, b]$, если сама функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ имеют на $[a, b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода.

Теорема. *Если периодическая функция $f(x)$ с периодом l кусочно гладка на отрезке $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, то ряд Фурье (3) сходится к значению $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в точках разрыва, т. е.*

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{l}}. \qquad (4)$$

Если, дополнительно, $f(x)$ непрерывна на всей оси, то ряд (4) сходится к $f(x)$ равномерно.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x, \quad -\pi < x < \pi,$$

и, пользуясь разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

◀ Так как функция нечетная, то (см. задачу 7.2)

$$a_k=0, \quad k=0, 1, \ldots,$$

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sign} x \sin nx\, dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{x=0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(2m-1)} & \text{при} \quad n=2m-1,\\ 0 & \text{при} \quad n=2m,\end{cases} \quad m\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, при $-\pi<x<\pi$

$$\operatorname{sign} x=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1},$$

откуда при $x=\pi/2$ получаем

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1},$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}. \ ▶$$

7.1. Доказать, что если $f(x)$ имеет период l, то при любом $a\in\mathbb{R}$

$$\int_a^{a+l} f(x)\,dx=\int_0^l f(x)\,dx=\int_{-l/2}^{l/2} f(x)\,dx.$$

7.2. Записать выражения коэффициентов Фурье (2) для четной и нечетной функций на $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$.

Разложить периодическую с периодом l функцию в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке x_0:

7.3. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0<x<\pi,\\ 0 & \text{при} \quad -\pi<x<0,\end{cases} \quad l=2\pi, \quad x_0=\pi.$

7.4. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ при $0<x<2\pi$, $l=2\pi$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

7.5. $f(x)=|x|$ при $x\in(-1, 1)$, $l=2$, $x_0=1$.

В задачах 7.6—7.10, доопределяя определенным образом заданную в промежутке $(0, a)$ функцию $f(x)$ до периодической, получить для нее требуемый ряд Фурье.

7.6. $f(x)=e^x$ при $x\in(0,\ \ln 2)$. Разложить в ряд по косинусам.

7.7. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x<\pi/2,\\ 0 \text{ при } \pi/2<x<\pi.\end{cases}$

Разложить в ряд по синусам.

7.8. $f(x)=x^2$ при $0\leqslant x<1$. Разложить в ряд по косинусам.

7.9. $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 2-x & \text{при } 1\leqslant x<2.\end{cases}$

Разложить в ряд по синусам.

7.10. $f(x)=x\sin x$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$. Разложить в ряд по синусам.

7.11. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 7.5, найти суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$; б)* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{(4k+1)^2(4k+3)^2}$.

7.12. Используя ряд Фурье, полученный в задаче 7.8, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}$.

7.13. Используя равенство Парсеваля для функции задачи 7.4, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

7.14*. Зная выражение *ядра Дирихле*

$$\mathscr{D}_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

найти выражение *ядра Фейера* $\mathscr{F}_n(x)$:

$$\mathscr{F}_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathscr{D}_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kx.$$

2. Двойные ряды Фурье. Если функция $f(x,\ y)$ имеет период l по переменной x, период h по переменной y, непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ в квадрате $K=\left\{(x,\ y)\left|-\frac{l}{2}<x<\frac{l}{2},\ -\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}\right.\right\}$, то $f(x,\ y)$ представима

двойным рядом Фурье

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \lambda_{m, n} \left(a_{m, n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + \right.$$

$$+ b_{m, n} \sin \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h} + c_{m, n} \cos \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} +$$

$$\left. + d_{mn} \sin \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h} \right),$$

где

$$\lambda_{m, n} = \begin{cases} 1/4 & \text{при } m = n = 0, \\ 1/2 & \text{при } m > 0,\ n = 0 \text{ или } m = 0,\ n > 0, \\ 1 & \text{при } m > 0,\ n > 0 \end{cases}$$

и при $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$

$$a_{m, n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h}\, dx\, dy,$$

$$b_{m, n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \sin \frac{2\pi mx}{l} \cos \frac{2\pi ny}{h}\, dx\, dy,$$

$$c_{m, n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \cos \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h}\, dx\, dy,$$

$$d_{m, n} = \frac{4}{lh} \iint_K f(x, y) \sin \frac{2\pi mx}{l} \sin \frac{2\pi ny}{h}\, dx\, dy.$$

В комплексной форме ряд Фурье для $f(x, y)$ записывается в форме

$$f(x, y) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{m, n} e^{2\pi i \left(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h} \right)},$$

где

$$c_{m, n} = \frac{1}{lh} \iint_K f(x, y)\, e^{-2\pi i \left(\frac{mx}{l} + \frac{ny}{h} \right)}\, dx\, dy, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Разложить в двойной ряд Фурье функцию $f(x, y) = xy$ в квадрате $-\pi < x < \pi$, $-\pi < y < \pi$.

◀ Принимая во внимание четность или нечетность подынтегральных функций, находим

$$a_{m, n} = \frac{1}{\pi^2} \iint_K xy \cos mx \cos ny\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos ny\, dy \int_{-\pi}^{\pi} x \cos mx\, dx = 0, \quad m, n \geqslant 0;$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\cos ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$c_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\sin ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos mx\,dx=0,\quad m,\ n\geqslant 0;$$

$$d_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y\sin ny\,dy\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int\limits_{0}^{\pi} y\sin ny\,dy\int\limits_{0}^{\pi} x\sin mx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{y}{n}\cos ny\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin ny}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right)\left(-x\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^{\pi}+\frac{\sin mx}{m^2}\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\,\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m}=(-1)^{m+n}\frac{4}{mn},\quad m,\ n\geqslant 1.$$

Следовательно, при $x\in(-\pi,\ \pi)$, $y\in(-\pi,\ \pi)$

$$xy=4\sum_{m,\ n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}.\ \blacktriangleright$$

Разложить в двойной ряд Фурье следующие функции:

7.15. $f(x,\ y)=xy$ при $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$, $l=h=2\pi$.

7.16. $f(x,\ y)=\frac{\pi-x}{2}\cdot\frac{\pi-y}{2}$ при $-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$, $l=h=2\pi$.

7.17. $f(x,\ y)=x^2y$ при $-1<x<1$, $-2<y<2$, $l=2$, $h=4$.

7.18. $f(x,\ y)=x\left(\frac{\pi-y}{2}\right)^2$ при $-1<x<1$, $-\pi<y<\pi$, $l=2$, $h=2\pi$.

3. Интеграл Фурье. Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$, т. е. $f(t)\in L(-\infty,+\infty)$, и кусочно гладка на каждом конечном отрезке действительной оси, то она представляется в виде интеграла Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\hat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu,\quad (5)$$

где

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt. \tag{6}$$

Преобразование (6), которое будем обозначать $\mathfrak{F}[f]$, называют *прямым*, а (5) — *обратным преобразованием Фурье*, выраженным в комплексной форме. В действительной форме эти преобразования записываются в виде:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t\, dt \tag{7}$$

(прямое) и

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t)\, d\omega \tag{8}$$

(обратное), $\omega = 2\pi\nu$.

Если функция $f(t)$ четная, то (7) и (8) записываются в следующей симметрической форме:

$$\mathfrak{F}_c[f] = \hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt \tag{9}$$

и

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t\, d\omega \tag{10}$$

и называются парой *косинус-преобразований Фурье*. Если же $f(t)$ нечетная, то имеем пару *синус-преобразований Фурье*

$$\mathfrak{F}_s[f] = \hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$$

и

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t\, d\omega.$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$.

◀ Подставляя заданную $f(t)$ в (6), получаем

$$\hat{f}(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-2\pi i\nu t}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(2\pi i\nu-\alpha)t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}\,e^{(\alpha-2\pi i\nu)t}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}e^{-(2\pi i\nu+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\alpha-2\pi i\nu}+\frac{1}{\alpha+2\pi i\nu}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},$$

т. е.

$$\mathfrak{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right]=\frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2},\quad \alpha>0.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$e^{-\alpha|t|}=2\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi i\nu t}}{\alpha^2+4\pi^2\nu^2}\,d\nu=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Последнее равенство следует из того, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\sin\omega t}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega=0.\ ▶$$

Пример 4. Найти преобразования Фурье для функции

$$f(t)=e^{-\alpha t^2},\quad \alpha>0.$$

◀ Так как функция $f(t)$ четная, получим пару косинус-преобразований Фурье. Поэтому воспользуемся формулами (9) и (10). Используя результат задачи 4.28 гл. 8, получаем

$$\mathfrak{F}_c\left[e^{-\alpha t^2}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t^2}\cos\omega t\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

и

$$e^{-\alpha t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}\cos\omega t\,d\omega.\ ▶$$

Найти преобразования Фурье в комплексной форме для функций:

7.19. $f(t)=\operatorname{sign}(t-a)-\operatorname{sign}(t-b),\ b>a.$

7.20. $f(t)=\begin{cases} h\left(1-\frac{|t|}{a}\right) & \text{при } |t|<a, \\ 0 & \text{при } |t|>a. \end{cases}$

7.21. $f(t)=\begin{cases} \cos at & \text{при } |t|<\pi/a, \\ 0 & \text{при } |t|>\pi/a. \end{cases} \quad a>0.$

7.22. $f(t)=\begin{cases} \operatorname{sign} t & \text{при } |t|<1, \\ 0 & \text{при } |t|>1. \end{cases}$

Найти пару косинус- или синус-преобразований Фурье указанных функций:

7.23*. $f(t)=\frac{1}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.24*. $f(t)=\frac{t}{a^2+t^2}$, $a>0$.

7.25. $f(t)=te^{-t^2}$.

7.26. $f(t)=e^{-\alpha|t|}\cos\beta t$, $\alpha>0$.

7.27. Доказать, что преобразование (6) является непрерывной функцией, причем $\lim\limits_{\nu\to\pm\infty}\hat{f}(\nu)=0$.

4. Спектральные характеристики ряда и интеграла Фурье. *Спектральной функцией* $S(\nu_k)$ ряда Фурье или *спектральной плотностью* называется отношение коэффициента Фурье функции $f(x)$ периода l

$$c_k=c(\nu_k)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(u)e^{-2\pi i\nu_k u}\,du,$$

$\nu_k=\frac{k}{l}$, $k\in\mathbb{Z}$, к приращению частоты $\Delta\nu_k=\frac{k+1}{l}-\frac{k}{l}=\frac{1}{l}$, т. е.

$$S(\nu_k)=\frac{c(\nu_k)}{\Delta\nu_k}=\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(u)e^{-2\pi i\nu_k u}\,du.$$

Амплитудным спектром $\rho(\nu_k)$ называется модуль спектральной функции, а *фазовым спектром* $\Phi(\nu_k)$ — взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т. е.

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=l\,|c(\nu_k)|$$

и

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k).$$

На графиках $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ обычно строятся только ординаты ρ и Φ в точках ν_k и спектр называют линейчатым.

Пример 5. Найти спектральную функцию ряда Фурье и построить амплитудный и фазовый спектры для функции

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\in(-2,\ -1),\\ 1 \text{ при } x\in(-1,1),\\ 0 \text{ при } x\in(1,\ 2),\\ \quad f(x+4)=f(x).\end{cases}$$

◀ Имеем $\nu_k=k/4$ и

$$S(\nu_k)=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1} 1\cdot e^{-2\pi i\nu_k x}\,dx=\left.\frac{e^{-2\pi i\nu_k x}}{-2\pi i\nu_k}\right|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\pi\nu_k}\,\frac{e^{2\pi i\nu_k}-e^{-2\pi i\nu_k}}{2i}=\frac{\sin 2\pi\nu_k}{\pi\nu_k}.$$

Следовательно,

$$\rho(\nu_k)=|S(\nu_k)|=\frac{|\sin 2\pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|},$$

$$\Phi(\nu_k)=-\arg S(\nu_k)=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ если } \sin 2\pi\nu_k\geqslant 0,\\ -\pi, \text{ если } \sin 2\pi\nu_k<0.\end{cases}$$

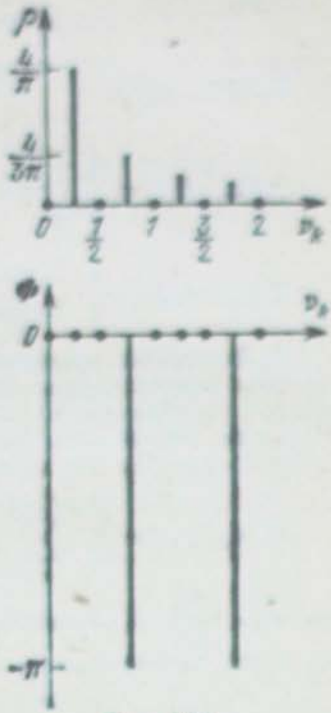


Рис. 102.

Графики $\rho(\nu_k)$ и $\Phi(\nu_k)$ представлены на рис. 102. ▶

Спектральной функцией интеграла Фурье называется прямое преобразование Фурье

$$S(\nu)=\hat{f}(\nu)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt, \tag{11}$$

Величина $\rho(\nu)=|S(\nu)|$ называется *амплитудным спектром*, а величина $\Phi(\nu)=-\arg S(\nu)$ — *фазовым спектром*.

Найти спектральные функции $S(\nu_k)$ или $S(\nu)$ и построить амплитудные и фазовые спектры следующих функций:

7.28. $$f(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\in(-2T,\ -T),\\ -1 \text{ при } t\in(-T,\ 0),\\ 1 \text{ при } t\in(0,\ T),\\ 0 \text{ при } t\in(T,\ 2T),\end{cases}\qquad f(t+4T)=f(t).$$

7.29. $$f(t)=\begin{cases}2 \text{ при } t\in(0,\ 1),\\ 0 \text{ при } t\in(1,\ 3),\end{cases}\qquad f(t+3)=f(t).$$

7.30. $f(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } |t|<a, \\ 0 \text{ при } |t|>a, \end{cases} \quad a>0.$

7.31*. $f(t)=\begin{cases} \cos \pi t \text{ при } |t|\leqslant 1/2, \\ 0 \quad \text{ при } |t|>1/2. \end{cases}$

7.32. $f(t)=\begin{cases} 1+t \text{ при } t\in(-1,\ 0), \\ 1-t \text{ при } t\in(0,\ 1), \\ 0 \quad \text{ при } |t|>1. \end{cases}$

7.33. $f(t)=\begin{cases} 2 \text{ при } t\in(0,\ 2), \\ 0 \text{ при } t\in(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty). \end{cases}$

5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Аналитическое вычисление преобразования Фурье (спектральной функции) (11) и обратного преобразования (5) вызывает, как правило, значительные трудности. Разработаны методы их численной реализации, одним из которых является так называемое *дискретное преобразование Фурье:*

$$\tilde{S}(\nu_n)=y_n=\frac{T}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)\, e^{-i\frac{\pi k n}{N}}, \qquad n=0,\ 1,\ldots,\ 2N-1, \tag{12}$$

где $t_k=k\frac{T}{2N}$ (T — длина заданного интервала) и $\nu_n=n\frac{1}{T}$. Обратное к (12) преобразование имеет вид

$$f(t_k)=x_k=\frac{1}{T}\sum_{n=0}^{2N-1} y_n\, e^{i\frac{\pi k n}{N}}, \qquad k=0,\ 1,\ldots,\ 2N-1. \tag{13}$$

Преобразования (12) и (13) выполняются с помощью так называемых *быстрых алгоритмов* (БПФ), состоящих в том, что если $2N=r_1 r_2 \ldots r_n$, r_ν — целые $\geqslant 2$, то матрица преобразования (12) (или (13))

$$W=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & q & q^2 & \ldots & q^{2N-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & \ldots & q^{2(2N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q^{2N-1} & q^{2(2N-1)} & \ldots & q^{(2N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $q=e^{-i\frac{\pi}{N}}$ ($q=e^{i\frac{\pi}{N}}$ для (13)), представляется в виде произведения n квадратных матриц W_ν порядка $2N$,

$$W=W_n W_{n-1}\cdots W_2 W_1, \tag{14}$$

имеющих каждая по $r_\nu\cdot 2N$ отличных от нуля элементов. Умножение матрицы W_ν ($\nu=1,\ 2,\ldots,\ n$) на вектор-столбец $Z=(z_0,\ z_1,\ldots,\ z_{2N-1})^{\top}$ за счет отбрасывания умножения на нули может быть произведено за $r_\nu\cdot 2N$ операций комплексного умножения на множители q^k и сложения. Всё ДПФ (12) вычисляется тогда за $(r_1+r_2+\ldots+r_n)\,2N$ таких операций и умножения конечного результата на множитель $T/2N$.

Если $2N=2^n$ ($r_1=r_2=\ldots=r_n=2$), то в качестве матрицы $W_m=(c_{k,j}^{(m)})$, $k, j=1, 2, \ldots, 2^n$, для разложения (14) можно взять матрицу, элементы которой выражаются следующим образом ($q=e^{-i\frac{\pi}{2^{n-1}}}$): пусть $\nu=0, 1, \ldots, 2^{n-m}-1$ и $\mu=1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, тогда

$$c_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}^{(m)}=c_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ \nu\cdot 2^{m-1}+\mu}^{(m)}=1,$$

$$c_{\nu\cdot 2^m+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}^{(m)}=-c_{\nu\cdot 2^m+2^{m-1}+\mu,\ 2^{n-1}+\nu\cdot 2^{m-1}+\mu}^{(m)}=$$
$$=q^{(\mu-1)2^{n-m}}; \quad (15)$$

$$c_{k,j}^{(m)}=0 \text{ для остальных пар } (k, j).$$

7.34. Выписать матрицы W_1, W_2 и W_3, соответствующие формулам (15) при $2N=2^3=8$.

7.35. Пусть $X=(x_0, x_1, \ldots, x_7)^\top$. Составить произведения $Z^{(1)}=W_1X$, $Z^{(2)}=W_2Z^{(1)}=W_2(W_1X)$ и $Z^{(3)}=W_3Z^{(2)}=W_3(W_2W_1X)$. Сравнить полученный результат с произведением WX.

Для конечной последовательности комплексных чисел $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ ДПФ по формуле (12) можно представить в виде

$$y_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}} \qquad (n=0, 1, \ldots, N-1),$$

а обратное ДПФ (ОДПФ) — в виде

$$x_k=\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi ink}{N}} \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1).$$

Обозначим кратко ДПФ и ОДПФ соответственно

$$Y=\mathfrak{F}[X] \text{ и } X=\mathfrak{F}^{-1}[Y],$$

где $X=(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})^\top$, $Y=(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^\top$.

7.36. Составить на фортране подпрограмму вычисления прямого и обратного преобразований Фурье с использованием быстрого алгоритма. Параметры: N, N1, KIND, A, B, AA, BB, где N1 — число элементов исходной последовательности (и преобразования), N — показатель степени в равенстве $N1=2^N$, KIND — 0 либо 1 (0 при вычислении ДПФ и 1 при вычислении ОДПФ), A и B — входные массивы размера N1 для действительной и мнимой частей исходной последовательности, AA и BB — выходные массивы размера N1 для действительной и мнимой частей полученного преобразования.

В задачах 7.37—7.41 составить на фортране подпрограмму получения комплексной последовательности

$(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$, полагая $x_k = x(t_k) + i \cdot 0$ для указанных функций $x = x(t)$, $t \in [1, 128]$, $t_k = k = 1, 2, \ldots, 128$. Параметры: A, B, где A и B — массивы из 128 элементов для действительной и мнимой частей последовательности.

7.37. $x = 25$. **7.38.** $x = \begin{cases} 0, & t \in [1, 32] \cup [97, 128], \\ 20, & t \in [33, 96]. \end{cases}$

7.39. $x = \frac{1}{32} t (128 - t)$. **7.40.** $x = \begin{cases} t, & t \in [1, 64], \\ 128 - t, & t \in [65, 128]. \end{cases}$

7.41. $x = t$.

7.42. Используя подпрограммы, полученные при решении задач 7.36 и 7.37—7.41, для одной из последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_{128})$ составить на фортране программу следующих преобразований:

а) найти $Y = \mathfrak{F}[X]$;

б) для $m = 24, 32, 40$ из последовательности $(y_n \mid n = 1, \ldots, 128)$ получить последовательность $(\tilde{y}_n \mid n = 1, \ldots, 128)$, элементы которой определяются равенствами

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} y_n, & n = 1, 2, \ldots, 64 - m, 65 + m, \ldots, 128, \\ 0, & n = 64 - m + 1, \ldots, 65 + m - 1; \end{cases}$$

в) найти $\tilde{X} = \mathfrak{F}^{-1}[\tilde{Y}]$;

г) сравнить последовательности (x_k) и $(\tilde{x}_k)$, найдя их разности.

ОТВЕТЫ

1.1. $\frac{1}{4}$. **1.2.** $\frac{1}{2}$. **1.3.** $\frac{3}{2} \frac{6e - e^2 - 1}{(3e - 1)(3 - e)}$. • Использовать формулу Эйлера $\cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2}$. **1.4.** $1 + i$. **1.17.** Расходится. **1.18.** Сходится. **1.19.** Сходится. **1.20.** Сходится. **1.21.** Расходится. **1.22.** Расходится. **1.23.** Сходится. **1.24.** Расходится. **1.25.** Сходится. **1.26.** Сходится. **1.27.** Сходится абсолютно. **1.28.** Сходится. **1.29.** Расходится. **1.30.** Сходится. **1.31.** Сходится абсолютно. **1.32.** Сходится **1.33.** Расходится. **1.34.** Расходится. **1.35.** Сходится. **1.36.** Сходится. **1.37.** Сходится. **1.38.** Расходится. **1.39.** Сходится **1.40.** Сходится. **1.41.** Сходится. **1.42.** Сходится. **1.43.** Сходится. **1.44.** Сходится. **1.45.** Сходится. **1.46.** Сходится. **1.47.** Сходится. **1.48.** Расходится **1.49.** Расходится. **1.50.** Расходится. • $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **1.51.** Сходится. **1.52.** Сходится. **1.53.** Расходится. **1.54.** Сходится. **1.55.** Расходится. **1.56.** Расходится. **1.57.** Сходится. **1.58.** Сходится. **1.59.** Сходится. **1.60.** Расходится. **1.61.** Расходится. **1.62.** Сходится абсолютно. **1.63.** Расходится. **1.64.** Сходится абсолютно. **1.65.** Если $p > 1$, то ряд сходится при всех α, а если $p < 1$, то расходится. Если $p = 1$, то ряд сходится

при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. **1.66.** Если $p > 1$, то ряд сходится при любых α и β, а если $p < 1$, то расходится. Если $p=1$, то ряд сходится при $\alpha > 1$ и любых β и расходится при $\alpha < 1$. Если же $p=\alpha=1$, то ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leqslant 1$. **1.68.** Сходится условно. **1.69.** Сходится абсолютно. **1.70.** Расходится. **1.71.** Сходится абсолютно. **1.72.** Расходится. **1.73.** Сходится условно. **1.74.** Сходится абсолютно. **1.75.** Сходится абсолютно. **1.76.** Сходится условно. **1.77.** Сходится абсолютно. **1.78.** Сходится условно. ● Рассмотреть частичные суммы с номерами $8n$, в которых сгруппировать члены с номерами $8k+1$ и $8k+5$, $8k+2$ и $8k+6$, $8k+3$ и $8k+7$. Убедиться в существовании предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_{8n}$. Далее, как и при доказательстве признака Лейбница, воспользоваться соотношением $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{4} = 0$. **1.79.** Сходится условно. **1.80.** Расходится. ● Рассмотреть частичные суммы с четными номерами. **1.81.** Сходится условно. **1.82.** Сходится абсолютно. **1.83.** Расходится. **1.84.** ● Воспользоваться неравенством $|a \cdot b| \leqslant \frac{1}{2}(|a|^2+|b|^2)$.

1.85. Сходится. ◀ Оценим c_n. Имеем $c_n = \sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2^{n-k+1}} +$

$$+ \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \frac{1}{k^2 \cdot 2^{n-k+1}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} 2^k \right) \leqslant \frac{A_1}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{A_2}{n^2}.$$ Полученные слагаемые являются членами сходящихся рядов $A_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ и $A_2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ▶

1.86. Сходится. ● Для оценки $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k+1}}{k^2(n-k+1)}$ воспользоваться разложением дроби на простейшие $\frac{1}{k^2(n-k+1)} = \frac{1}{(n+1)k^2} +$ $+ \frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}\right)$ и показать, что числа $b_n = (-1)^{n+1} \times$ $\times \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ монотонно убывают по абсолютной величине. **1.87.** Расходится. ● Воспользоваться разложением дроби из предыдущей

задачи на простейшие и оценить члены $d_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ снизу.

1.88. Расходится. • $c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k(n-k+1)}>\frac{1}{n}$ при $n\geqslant 2$.

2.1. $(0, +\infty)$; абсолютно сходится при $x\in(1, +\infty)$. **2.2.** $\mathbb{R}$; сходимость всюду абсолютная. **2.3.** Расходится во всех точках. **2.4.** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; сходимость всюду абсолютная. **2.5.** $(-\infty, -1)$; сходимость всюду абсолютная. **2.6.** $(-1, -1/2]\cup(1/2, 1)$; сходится абсолютно при $x\in(-1, -1/2)\cup(1/2, 1)$. **2.7.** $[0, +\infty)\cup\cup\{k\pi\mid k=-1, -2, \ldots\}$; сходимость всюду абсолютная. **2.8.** $(-2, 2)$; сходимость всюду абсолютная. **2.9.** $(0, +\infty)$; сходимость всюду абсолютная. **2.10.** $[1/e, e)$; сходится абсолютно при $x\in(1/e, e)$. **2.11.** $|z-2|>1$. **2.12.** $|z+1|>1$. **2.13.** $|z-3i|>\sqrt{2}$. **2.14.** Полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$. **2.15.** $\{z\mid -\pi/4<\arg z<\pi/4$ и $3\pi/4<<\arg z<5\pi/4\}$. **2.16.** $\operatorname{Re} z<0$. **2.17.** $\operatorname{Re} z>1$. • Сравнить выражение $|(-1)^n n^{-z}|$ с членом n^{-p} ряда Дирихле. **2.18.** $\operatorname{Im} z>0$. • Воспользоваться тем, что дробно-линейная функция $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ отображает верхнюю полуплоскость во внутренность единичного круга. **2.19.** $|z|>1$. • При $|a|>1$ функция $w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ отображает внешность единичного круга ($|z|>1$) на внутренность ($|w|<1$). **2.20.** $|z/(1-z)|<1$, т. е. $\operatorname{Re} z<1/2$. • См. задачу 3.53 гл. 11. **2.21.** Сходится при $x\in(0, +\infty)$, равномерно сходится при $x\in[\alpha, +\infty)$ для любого $\alpha>0$. **2.22.** Сходится при $x\in(-\infty, -3)\cup[-1, +\infty)$, равномерно сходится при $x\in(-\infty, -3-\delta]\cup[-1, +\infty)$ для любого $\delta>0$. **2.23.** Равномерно сходится на всей оси. **2.24.** Сходится на всей оси, кроме точек $x=-1, -2, \ldots$ Сходится равномерно на множестве, получающемся из оси после удаления интервалов $(-\delta_k-k, -k+\delta_k')$, $k=1, 2, \ldots$, где δ_k и δ_k' сколь угодно малы. **2.25.** $\operatorname{Re} z\leqslant 0$; сходимость всюду равномерная. **2.26.** $|z-1|\leqslant 1$; сходимость всюду равномерная. **2.27.** Сходится при $\operatorname{Re} z>1$, равномерно сходится при $\operatorname{Re} z\geqslant\alpha>1$. **2.28.** Сходится вне круга $|z+2|>1$, равномерно сходится вне любого круга $|z+2|\geqslant\alpha>1$. **2.29.** • Вычислить $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ и показать, что $\lim_{x\to 0}R_n(x)=1\neq R_n(0)=0$.

2.32. Ряд сходится в области, состоящей из внутренности единичного круга $|z|<1$, точки $z=1$ и внешности единичного круга $|z|>1$; ряд равномерно сходится в объединении замкнутого круга $|z|\leqslant 1-\gamma$ и замкнутой внешности круга $|z|\geqslant 1+\delta$ для любых γ, $\delta>0$. Сумма ряда $S(z)=\begin{cases}1/2 & \text{при } |z|>1,\\ -1/2 & \text{при } |z|<1,\\ 0 & \text{при } z=1.\end{cases}$ **2.36.** • Воспользоваться утверждением задачи 2.35.

3.1. Если степенной ряд (1) сходится в точке $z=z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ и равномерно сходится в любом замкнутом круге $|z-z_0| \leqslant r<|z_1-z_0|$. Если ряд (1) расходится в точке $z=z_2$, то он расходится и вне круга $|z-z_0|>|z_2-z_0|$. **3.2.** ● Для доказательства утверждений а) и б) воспользоваться теоремой Абеля и теоремой Вейерштрасса, а для доказательства утверждения в) — теоремой Абеля, утверждением задачи 2.35 и учесть, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n+1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. **3.3.** ● Воспользоваться утверждением б) задачи 3.2. **3.4.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z-1| \leqslant 2$. **3.5.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z+1| \leqslant 2$. **3.6.** Абсолютно сходится, если $|z+2|<1$; равномерно сходится, если $|z+2| \leqslant r<1$. В точках $x=-3$ и $x=-1$ сходится условно. На отрезке $-3 \leqslant x \leqslant -1$ сходится равномерно. **3.7.** Абсолютно сходится в области $|z-4|<1/2$; равномерно сходится в области $|z-4| \leqslant r<1/2$. В точке $x=9/2$ сходится условно, в точке $7/2$ расходится. На любом отрезке $7/2<r \leqslant x \leqslant 9/2$ сходится равномерно. **3.8.** Сходится абсолютно в области $|z-2| \leqslant 1/\sqrt{2}$; равномерно сходится в области $|z-2| \leqslant r<1/\sqrt{2}$. В точках $2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ расходится. **3.9.** Сходится абсолютно в области $|z-3|<\sqrt{3}$; равномерно сходится в области $|z-3| \leqslant r<\sqrt{3}$. В точках $x=3 \pm \sqrt{3}$ сходится условно, и на отрезке $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant 3+\sqrt{3}$ — равномерно. **3.10.** Сходится абсолютно в области $|z|<1$. Сходится равномерно в области $|z| \leqslant r<1$; расходится на окружности $|z|=1$. **3.11.** Сходится абсолютно в области $|z|<1$; сходится равномерно в области $|z| \leqslant r<1$; расходится на окружности $|z|=1$. **3.12.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно — в любой ограниченной области. **3.13.** Сходится абсолютно в области $|z-1|<8$; сходится равномерно в области $|z-1| \leqslant r<8$; в точках $x=-7$ и $x=9$ расходится. **3.14.** Расходится во всех точках, кроме точки $z_0=i$. **3.15.** Сходится абсолютно в области $|z-3|<\sqrt{3}$; сходится равномерно в области $|z-3| \leqslant r<\sqrt{3}$. В точке $x=3+\sqrt{3}$ расходится, а в точке $x=3-\sqrt{3}$ условно сходится. На любом отрезке $3-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant r<3+\sqrt{3}$ сходится равномерно. **3.16.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно — в любой ограниченной области. **3.17.** Сходится абсолютно в области $|z-1|<1$; сходится равномерно в области $|z-1| \leqslant r<1$; на окружности $|z-1|=1$ расходится. **3.18.** Сходится абсолютно в области $|z-3|<4$; сходится равномерно в области $|z-3| \leqslant r<4$; в точке $x=7$ сходится условно, в точке $x=-1$ расходится. На любом отрезке $-1<l \leqslant x \leqslant 7$ сходится равномерно. **3.19.** Сходится абсолютно во всей плоскости, равномерно сходится в любой ограниченной области. **3.20.** Сходится абсолютно в области $|z|<2$; сходится равномерно в области $|z| \leqslant r<2$. В точке $x=-2$ расходится, в точке $x=2$ сходится условно. На любом отрезке $-2<l \leqslant x \leqslant 2$ сходится равномерно. **3.21.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z| \leqslant 2$. **3.22.** Сходится абсолютно в области $|z-1|<9/4$; сходится равномерно в области $|z-1| \leqslant r<9/4$; в точках $x=-5/4$ и $x=13/4$ расходится. **3.23.** Сходится абсолютно в области $|z|<1/e$; сходится равномерно в области $|z| \leqslant r<1/e$; в точках $x=\pm 1/e$ расходится. **3.24.** Сходится абсолютно и равно-

мерно в области $|z-3|\leqslant 1/\sqrt{2}$. **3.25.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z+3|\leqslant 1$. **3.26.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z-3|\leqslant\sqrt{2}$. **3.27.** Сходится абсолютно в области $|z+3|<1$; сходится равномерно в области $|z+3|\leqslant r<1$; в точках $x=-2$ и $x=-4$ расходится. **3.28.** Сходится абсолютно в области $|z|<1$; сходится равномерно в области $|z|\leqslant r<1$; расходится на окружности $|z|=1$. **3.29.** Сходится только в точке $z=5$. **3.30.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z|\leqslant 1$. **3.31.** Сходится абсолютно в области $|z|<1/2$; сходится равномерно в области $|z|\leqslant r<1/2$; расходится на окружности $|z|=1/2$. **3.32.** Сходится абсолютно и равномерно в области $|z-2|\leqslant 1$. **3.37.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z\ln 2)^n$, $|z|<\infty$. **3.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}\frac{z^n}{n!}$, $|z|<\infty$. **3.39.** $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **3.40.** $z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. ● Радиус сходимости этого ряда определяется путем применения следствия из теоремы Тейлора. **3.41.** $1+\frac{z^2}{2!}+\frac{5}{4!}z^4+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. **3.42.** $z-\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+\ldots$, $|z|<\frac{\pi}{2}$. **3.43.** $1+z-\frac{2}{3!}z^3-\frac{4}{4!}z^4+\ldots$, $|z|<\infty$. **3.44.** $1-z^2+\frac{z^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}+\ldots$, $|z|<\infty$. **3.45.** $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **3.46.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$. **3.47.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z|<\frac{3}{4}$. **3.48.** $3-\frac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{n!\,3^{4n-1}}z^n$, $|z|<27$. **3.49.** $\frac{1}{3}\left(1-\frac{z^2}{18}+\frac{1\cdot3}{2\cdot18^2}z^4+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{n!\,18^n}z^{2n}+\ldots\right)$, $|z|<3$. **3.50.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7n+1}{2^{n+2}}z^n$, $|z|<2$. ● $\frac{3z+1}{(z-2)^2}=-(3z+1)\left(\frac{1}{z-2}\right)'$. **3.51.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n2^{n+1})z^n$, $|z|<\frac{1}{2}$. **3.52.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)}{n!}z^n$, $|z|<\infty$. **3.53.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<\infty$. **3.54.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$|z| < \infty$. **3.55.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $|z| < \infty$.

3.56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n - 1}{n} z^n$, $|z| < \frac{1}{2}$; при $x = \frac{1}{2}$ сходится условно.

3.57. $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1 + 2^{-n}) \frac{z^n}{n}$, $|z| < 1$; при $x = 1$ сходится условно. **3.58.** $z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; при $x = \pm 1$ абсолютно сходится. **3.59.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; при $x = \pm 1$ сходится условно. **3.60.** $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z| < 1$; при $x = \pm 1$ абсолютно сходится. **3.61.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}$, $|z| < \infty$.

3.62. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}$, $|z| < \infty$. **3.63.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n \cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$. • $\frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \left(\frac{\sin z}{z}\right)'$. **3.64.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1) z^{2n-2}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$. • $\frac{z \sin z - 1 + \cos z}{z^2} = \left(\frac{1 - \cos z}{z}\right)'$. **3.65.** $-78 + 59(z+4) - 14(z+4)^2 + (z+4)^3$. **3.66.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$, $|z-2| < 1$.

3.67. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}$, $|z-3i| < |1-3i| = \sqrt{10}$. **3.68.** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3)^{2k}}{4^{k+1}}$, $|z-3| < 2$. **3.69.** $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1}) (z+4)^n$, $|z+4| < 2$.

3.70. $1 + \frac{1}{3}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \ldots (3n-4)}{3^n n!} (z-1)^n$, $|z-1| < 1$.

3.71. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}$, $|z-2| < 2$.

• $\frac{1}{z^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)'$. **3.72.** $e^{-3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^{2n}}{n!}$, $|z|<\infty$.

3.73. $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}((z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1})$, $|z|<\infty$.

3.74. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{\sin 4}{(2n)!}(z+2)^{4n}+\frac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+2)^{4n+2}\right)$, $|z|<\infty$.

3.75. $3\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n(z-1)^n}{n\cdot 8^n}$, $|z-1|<\frac{8}{5}$. • $\ln(5z+3)=$ $=\ln 8+\ln\left(1+\frac{5}{8}(z-1)\right)$. **3.76.** $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n\cdot 4^n}$, $|z+3|<2$. **3.77.** $|z|<1$; $\frac{2}{(1+z)^3}$. **3.78.** $|z+1|<1$; $\frac{z+1}{z^2}$. **3.79.** $|z-3|<1$; $-\frac{\ln(4-z)}{z-3}$ при $z\neq 3$, 0 при $z=3$. **3.80.** $|z|<|a|$; $\frac{1}{a^2+z^2}$. **3.81.** $|z|<1$; $\frac{1}{(1+z^2)^2}$. **3.83.** • Представив $f(z)$ в виде ряда по степеням $(z-a)$, т. е. в виде $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, из непрерывности $f(z)$ в точке $z=a$ убедиться в том, что $c_0=0$. Это означает, что $f(z)=(z-a)\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^{n-1}=(z-a)f_1(z)$, где $f_1(z)$ — аналитическая в круге $|z-a|<R$ функция и $f_1(z_k)=0$, $k=1, 2, \ldots$ Отсюда вывести заключение, что $c_1=0$ и т. д. **3.84.** Нет. **3.85.** а) $f(z)=$ $=z/(z+2)$; б) $f(z)=z^2$. **3.86.** $g(z)=f(z)=1/(2-z)$ в общей части кругов $|z|<2$ и $|z-i|<\sqrt{5}$. **3.87.** $g(z)=f(z)=\ln(1+z)$ в общей части кругов $|z|<1$ и $|z-1-2i|<2\sqrt{2}$.

4.1. 10 000 при $x=1$ или 10 при $x=-0{,}5$. **4.2.** Два члена, предельная абсолютная погрешность $\varepsilon<\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4=0{,}0000386<0{,}0001$. **4.3.** 0,0002. **4.4.** $|x|<0{,}9067$. **4.5.** 0,002. **4.6.** 1,6487. **4.7.** 0,3679. **4.8.** 0,5878. **4.9.** 0,2094. **4.10.** 0,5403. **4.11.** 0,8269. • Учитывая, что $1000=318\times 3{,}1415926+1{,}5707963-0{,}5971963$, приводим аргумент к величине $0{,}5971963\in[0, \pi/4]$ и находим $\sin 1000=\sin(1{,}15707963-$ $-0{,}5971963)=\cos 0{,}5971963$. **4.12.** 8,0411. • $\sqrt[3]{520}=(512+8)^{1/3}=$ $=8\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/3}$. **4.13.** 3,8730. • $\sqrt{15}=\sqrt{16-1}=4\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2}$. **4.14.** 5,1437. • $\sqrt[4]{700}=(625+75)^{1/4}=5\left(1+\frac{3}{25}\right)^{1/4}$. **4.15.** 0,6931.

● Использовать разложение $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ при $x=\frac{1}{3}$.

4.16. 0,5236. **4.17.** 0,9385. **4.18.** 1,1752. **4.19.** 1,1276.

4.20.

```
      FUNCTION S(Y,EPS)
      PI=3.141593
      PI2=1.570796
      X=Y
      FACT=1.
      SX=1.
      IF(X.LT.0) SX=-1.
      X=ABS(X)
      IF(X.LE.PI) GO TO 1
      X1=X/PI
      N=X1
      N1=N/2
      M=N-N1*2
      IF (M.NE.0) FACT=-1.
      X11=N
      X=X-X11*PI
    1 IF (X.GT.PI2) X=PI-X
      S=0
      SM=X
      T=-1.
    2 T=T+1.
      A=2*T
      A=(A+2.)*(A+3.)
      S=S+SM
      S=S*(-1.)*(X*X)/A
      IF(ABS(SM).GT.EPS) GO TO 2
      S=(S+SM)*SX*FACT
      RETURN
      END
```

● Так как $\sin x=\operatorname{sign}(x)\cdot\sin|x|$, то можно считать, что $x\geqslant 0$. Пусть $x=\pi n+x_1$, где $n=\left[\frac{x}{\pi}\right]$ и $x_1\in[0,\pi)$, тогда $\sin x=\sin(\pi n+x_1)=$ $=\cos\pi n\sin x_1=(-1)^n\sin x_1$. При этом, если $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, то полагаем $\sin x=(-1)^n\sin(\pi-x_1)=(-1)^n\sin x_2$, где $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4.21.

```
      FUNCTION C(X,EPS)
      PI2=6.283185
      Y=X
      IF(ABS(X).LE.PI2) GO TO 1
      N=Y/PI2
      A=N
      FACT=1.
      IF(X.LT.0) FACT=-1.
      Y=Y-FACT*PI2*A
    1 Y=Y+1.570796
      C=S (Y,EPS)
      RETURN
      END
```

4.22.

```
      FUNCTION E(Y,EPS)
      REAL*8 E1/2.7182818284590/,E2/0.3678794411714/,E3,E4
      X=Y
      IX=X
      X1=IX
      X=X-X1
      E4=1.
      E=1.
      B=ABS(X)
      JX=IABS(IX)
      IF(JX.LT.1) GO TO 3
      E3=E1
      IF(IX.LT.0) E3=E2
      DO 1 I=1, JX
    1 E4=E4*E3.
    3 EM=1.
      T=0.
    2 T=T+1.
      EM=EM*X/T
      E=E+EM
      EPS1=ABS(EM)*B/T
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      EM=EM4
      E=E*EM
      RETURN
      END
```

• Оценка остатка:

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{n!n}.$$

Число $e^x = e^{[x]} \cdot e^{x_1}$, $|x_1| < 1$, где $e^{[x]} = \underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ раз}}$ при $[x] \geq 0$, $e^{[x]} = \frac{1}{\underbrace{e \cdot e \ldots e}_{[x] \text{ раз}}}$

при $[x] < 0$.

4.23.

```
      FUNCTION BINOM (X,ALFA,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      BINOM=1.
      B=1
      T=0.
    1 A=ALFA-T
      T=T+1.
      B=B*A*X/T
      BINOM=BINOM+B
      IF(B.GT.1) GO TO 1
      EPS1=ABS(B)/(1-ABS(A)*ABS(X)/T)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
    3 FORMAT ('  X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

• Оценка остатка: $|R_n(x)| \leq \left|\binom{\alpha}{n} x^n\right| \frac{1}{1 - \frac{|\alpha - n + 1|}{n}|x|}$.

4.24.

```
      FUNCTION ALN(X,EPS)
      T=0.
      ALN=0.
      A=-1.
    1 T=T+1.
      A=(-1.)*X*A
      ALN=ALN+A/T
      IF(ABS(A/T).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.25.

```
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
      IF(X.GE.1) GO TO 2
      T=0.
      ALN1=X
      A=X
    1 T=T+1.
      X2=X**2
      A=A*X2
      T2=T*2.
      B=A/(T2+1.)
      ALN1=ALN1+B
      EPS1=ABS(B)/(1.-X**2)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
    3 FORMAT (9H   X.GE.1)
      RETURN
      END
```

• Оценка остатка:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

4.26.

```
      FUNCTION ARCTG(X,EPS)
      IF(X.GT.1) GO TO 2
      T=0.
      ARCTG=X
      A=X
    1 T=T+1.
      X2=(-1.)*X**2
      A=A*X2
      T2=T*2.
      ARCTG=ARCTG+A/(T2+1.)
      EPS1=ABS(A**X2/(T2+3.))
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
    2 WRITE (3,3)
      FORMAT ('  X.GT.1 ')
      RETURN
      END
```

4.27.

```
      FUNCTION B0(Y,EPS)
      X=Y/2
      B0=1.
      A=1.
      T=0.
1     T=T+1.
      A=A*(-1.)*(X*X)/T**2
      B0=B0+A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.28. Одна из двух подпрограмм:

```
      FUNCTION SH(X,EPS)
      SH=(E(X,EPS)-E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
      FUNCTION SH(X,EPS)
      T=0.
      SH=0
      A=X
1     T=T+1.
      T2=T*2.
      FA=(X**2)/T2*(T2+1.)
      A=A*FA
      SH=SH+A
      IF(FA.GT.1) GO TO 1
      EPS1=A*FA/(1-FA)
      IF(EPS1.GT.EPS) GO TO 2
      RETURN
      END
```

4.29.

```
      FUNCTION CH(X,EPS)
      CH=(E(X,EPS)+E((-1.)*X,EPS))/2.
      RETURN
      END
```

4.30. Задание для ЭВМ к задаче 4.10:

а) подпрограмма

```
      FUNCTION S(X,EPS)
```

б) подпрограмма

```
      FUNCTION C(X,EPS)
```

в) основная программа

```
      R = C(1.,0.0001)
      R1 = COS(1.)
      WRITE (3,1) R,R1
1     FORMAT (' COS1 ',2F8.4)
      STOP
      END
```

Задание для ЭВМ к задаче 4.15:

а) основная программа

```
      R1 = ALN1(0.333333,0.0001)
      R2 = ALOG(2.)
      WRITE (3,1) R1,R2
1     FORMAT (' LN(2) = ',2F8.4)
      STOP
      END
```

б) подпрограмма

```
      FUNCTION ALN1(X,EPS)
```

Задание для ЭВМ к задаче 4.14:

а) подпрограмма

```
      FUNCTION BINOM(X,EPS)
```

б) основная программа

```
      R = BINOM(0.12,0.25,0.0001)
      R = 0,2*R
      R1 = SQRT(700.)
      R1 = SQRT(R1)
      WRITE (3,1)R,R1
      FORMAT (' 700**(1/4) = ',2F8.4)
      STOP
      END
```

4.31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n^2}$. **4.32.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$.

4.33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!\,(4n+1)}$. **4.34.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!!\,x^{3n+1}}{2^n \cdot n!\,(3n+1)}$.

4.35. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1}(k+1)!\,k!}$. **4.36.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n+1)!}$.

4.37. 0,2800. **4.38.** 0,1991. **4.39.** 0,4802. **4.40.** 0,6225. **4.41.** 0,7714. **4.42.** 0,9461.

4.43.

```
      FUNCTION SI(X,EPS)
      SI=X
      X2=X*X
      SM=X
      T=0.
    1 T=T+1.
      T2=T*2.
      SM=SM*(-1.)*X2/(T2+2.)*(T2+3.)
      A=SM/(T2+3.)
      SI=SI+A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.44.

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
      ERF=X
      X2=X*X
      AM=X
      T=1.
    1 T=T+1.
      T2=T*2.
      AM=AM*(-1.)*X2/T
      A=AM/(T2-1.)
      ERF=ERF+A
      IF(ABS(A).GT.EPS) GO TO 1
      ERF=1.128379*ERF
      RETURN
      END
```

4.45.

```
      FUNCTION BINT(X,S,ALFA,EPS)
      XS=X**S
      BINT=X
      B=X
      T=0
    1 T=T+1.
      TS=T*S+1.
      C=XS*(ALFA+1.-T)/T
      B=B*C
      A=C/TS
      BINT=BINT+B/TS
      IF(ABS(A).GT.1) GO TO 1
```

```
      A=B/(1.-A)
      EPSI=ABS(A)
      IF(EPSI.GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.46.

```
      FUNCTION ATG(X,EPS)
      X2=(-1.)*X*X
      A=X
      ATG=X
      T=0.
    1 T=T+1.
      T2=(T*2.+1.)**2
      A=A*X2
      B=A/T2
      ATG=ATG+B.
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.47.

```
      FUNCTION ALIN(X,EPS)
      A=-1.
      ALIN=0.
      T=0.
    1 T=T+1.
      T2=T*T
      A=A*X*(-1.)
      B=A/T2
      ALIN=ALIN+B
      IF(ABS(B).GT.EPS) GO TO 1
      RETURN
      END
```

4.48. Задание для ЭВМ к задаче 4.39:

а) основная программа

```
      R=0.886227*ERF(0.5,0.0001)
      WRITE (3,1) R
    1 FORMAT (' ',F8.4)
      STOP
      END
```

б) подпрограмма-функция

```
      FUNCTION ERF(X,EPS)
```

Задание для ЭВМ к задаче 4.40:

а) основная программа

```
  R = BINT(0.6,2..0.333333,0.0001)
  WRITE (3,1) R
1 FORMAT (' ИНТЕГРАЛ = ',F8.4)
  STOP
  END
```

б) подпрограмма-функция

```
  FUNCTION BINT(X,S,ALFA, EPS)
```

4.50. • $\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}-\right.$ $\left.-\frac{1}{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)}\right)$. **4.51.** • См. задачу 4.50. **4.52.** • Разложение в степенной ряд функции $\ln(1+x)$ при $x=1$. **4.53.** • Разложение в степенной ряд функции $\operatorname{arctg} x$ при $x=1$. **4.54.** $\ln 2$. **4.55.** $I_0(2)$. **4.56.** $e-1$. **4.57.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **4.58.** $\sin 1$. **4.59.** $\cos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **4.60.** e^2. **4.61.** 1,0767. • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\zeta(2)-\zeta(4)+\zeta(6)-\zeta(8)+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8(n^2+1)}$. **4.62.** 4,3226. • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{n}=\pi^2\zeta(2)-\frac{\pi^4}{3}\zeta(4)+$ $+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}-\frac{\pi^2}{n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^4}{n^4}\right)$. **4.63.** 0,5071. • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}=\zeta(3)-$ $-2\zeta(6)+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6(n^3+2)}$. **4.64.** 0,0939. • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(5n+3)}=$ $=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-\frac{3}{25}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{9}{125}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-$ $-\frac{27}{125}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(5n+3)}$. **4.65.** 0,1249. • $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n+2}=$ $=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)+\frac{4}{27}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)-\frac{8}{81}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)+$ $+\frac{16}{81}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(3n+2)}$. **4.66.** Программа к задаче 4.64 (использовать равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(an+b)}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\zeta(2)-$

$$-\frac{b}{a^2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\zeta(3)+\frac{b^2}{a^3}\left(1-\frac{1}{8}\right)\zeta(4)-\frac{b^3}{a^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4(an+b)}$$

при $a=5,\ b=3.$):

```
  A=5.
  B=3.
  EPS=0.0002
  S=0.822467/A-B*0.901543/A**2+B**2*0.947033/A**3
  D=1.
  C=0.
  T=0.
1 T=T+1
  D=D*(-1.)
  SM=1./(T**4)*(A*T+B)
  C=C+D*SM
  IF(SM.GT.EPS) GO TO 1
  S=S+(B**3)*C/(A**3)
  WRITE (3,2) S
2 FORMAT (' СУММА РЯДА =',F8.4)
  STOP
  END
```

4.67. $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot2\cdot5\cdot6\ldots(4n+1)(4n+2)}{(4n)!}x^{4n}+\right.$ $\left.+\frac{2\cdot3\cdot6\cdot7\ldots(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$ **4.68.** $y(x)=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1\cdot4\ 7\ldots(3n+1))^2}{(3n+2)!}(3n+4)\,x^{3n+2},\ x\in\mathbb{R}.$ **4.69.** $y(x)=1+2x-$ $-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\ldots$ **4.70.** $y(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{45}+\ldots$ **4.71.** $y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\ldots$ **4.72.** $y(x)=$ $=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}x^{2m}=1-e^{-x^2/2},\ x\in\mathbb{R}.$ **4.73.** $y(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m+1)!}\times$ $\times x^{2m+1},\quad x\in\mathbb{R}.$ **4.74.** $y(x)=x+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!!}x^{2m+1},\quad x\in\mathbb{R}.$

4.75. $y(x)=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$ • Общее решение должно содержать две произвольные постоянные, поэтому из равенств $r(r+1)a_0=0$

и $(r+1)(r+2)a_1=0$ выбираем $r=-1$, тогда $a_0\neq 0$ и $a_1\neq 0$. 4.76. $y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$. 4.79. $I_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$, $I_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. ● Использовать равенство $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. 4.80. $y(x)=C_1I_\nu(\alpha x)+C_2I_{-\nu}(\alpha x)$, если ν — не целое число и $y(x)=C_1I_n(\alpha x)+C_2N_n(\alpha x)$, если $\nu=n$ — целое число. 4.81. $y(x)=C_1I_0(2x)+C_2N_0(2x)$. 4.82. $y(x)=C_1I_{1/3}(2x)+C_2I_{-1/3}(2x)$. 4.83. $y(x)=C_1I_2(x\sqrt{3})+C_2N_2(x\sqrt{3})$. 4.84. $y(x)=C_1I_{1/5}(3x)+C_2I_{-1/5}(3x)$.

5.1. $|z-2|>1$; $\frac{z-2}{z-3}$. 5.2. $|z+i|>2$; $\frac{2i}{(z-i)^2}$. 5.3. $0<|z|<\infty$; $z^3e^{1/z}$. 5.4. $1<|z-i|<\infty$; $\frac{1}{z^2}$. 5.5. $\frac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$, $0<|z-1|<1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1<|z-1|<\infty$. 5.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$, $|z|>1$. ● Произвести замену $z=1/\eta$ и разложить по степеням η. 5.7. $-\frac{i}{4(z-i)^2}-\frac{1}{8}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{ki^k(z-i)^{k-1}}{2^k}$, $0<|z-i|<2$; $-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+2)(-i)^k\frac{2^k}{(z-i)^{k+1}}$, $2<|z-i|<\infty$. ● $\frac{z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$. Для второго разложения воспользоваться заменой $z-i=\frac{1}{\eta}$. 5.8. $\frac{1}{z^4}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{z^{2k}}$, $1<|z|<\infty$. ● $\frac{1}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'$. 5.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. 5.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}$, $0<|z|<\infty$. 5.11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!\,(z-2)^{2n+1}}$, $0<|z-2|<\infty$. 5.12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. 5.13. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{n-2}}$, $0<|z|<\infty$. 5.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\cos 1}{(z-2)^{4n}}+\frac{4\sin 1}{(2n+1)}\frac{1}{(z-2)^{4n+2}}\right)$,

$0<|z-2|<\infty$. **5.15.** $\sin\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{5}{6}\frac{1}{z^3}+\ldots$, $1<$ $<|z|<\infty$. **5.16.** • Рассмотреть интеграл $\int\limits_{|\eta-z_0|=\rho}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta$ и воспользоваться ограниченностью $f(z)$, вытекающей из существования предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. **5.17.** • Использовать следующее утверждение: если $g(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $m\geqslant 1$, $\varphi(z_0)\neq 0$ и $\varphi(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки z_0, то в некоторой окрестности точки z_0 справедливо разложение $\frac{1}{\varphi(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+\ldots$, где $b_0=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0$. **5.18.** • Провести доказательство от противного, т. е. предположить, что $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0 и вывести из этого предположения, что z_0 — устранимая особая точка. **5.19.** • Рассмотреть функцию $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$; доказать, что z_0 — существенно особая точка для $\varphi(z)$, и воспользоваться утверждением задачи 5.18. **5.20.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$ сходится во всей плоскости, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{0}c_nz^n$ — вне круга $|z|>R$. **5.21.** Точки $z_1=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ и $z_2=$ $=e^{-i\frac{\pi}{4}+\pi i}$ — полюсы 3-го порядка. **5.22.** Точки $z_1=0$ и $z_2=-1$ — полюсы 1-го порядка, а точка $z_3=1$ — полюс 3-го порядка. **5.23.** Точки $z_k=k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$, — полюсы 1-го порядка. **5.24.** Точки $z_k=$ $=\pi(2k+1)/2$, $k=0, \pm 1, \ldots$, — полюсы 2-го порядка. **5.25.** Точка $z_0=3i$ — существенно особая. **5.26.** Точка $z_0=-2i$ — существенно особая. **5.27.** Точки $z_k=1+\frac{2}{\pi(2k+1)}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, — полюсы 1-го порядка, а точка $z=1$ — предельная для полюсов. **5.28.** В точке $z=1$ устранимая особенность, а в точках $z_k=1+\frac{\pi(2k+1)}{2}$, $k=0, \pm 1, \ldots$, — полюсы 1-го порядка. **5.29.** В точке $z_0=0$ устранимая особенность. **5.30.** В точке $z_0=0$ — полюс 4-го порядка. **5.31.** В точках $z_k=\ln 3+2k\pi i$, $k=0, \pm 1, \ldots$, — полюсы 1-го порядка. **5.32.** Правильная точка. **5.33.** Полюс 3-го порядка. **5.34.** Правильная точка (нуль 3-го порядка). **5.35.** Полюс 2-го порядка. **5.36.** Существенно особая точка. **5.37.** Существенно особая точка. **5.38.** Полюс 2-го порядка. **5.39.** Правильная точка. **5.40.** Правильная точка. **5.41.** Существенно особая точка.

6.1. выч $\left[\frac{z^2+1}{z-2};\ 2\right]=5$. **6.2.** выч $\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ i\right]=-\frac{1}{4}i$, выч $\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2};\ -i\right]=\frac{1}{4}i$. **6.3.** выч $\left[\frac{z^{2n}}{(z-1)^n};\ 1\right]=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{(n-1)!}$. **6.4.** выч $\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^4};\ -1\right]=-\frac{4\cos 2}{3}$. **6.5.** выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 0\right]=\frac{1}{9}$;

выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ 3i\right]=\frac{ie^{3i}}{54}$, выч $\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+9)};\ -3i\right]=-\frac{ie^{-3i}}{54}$.

6.6. выч $\left[\operatorname{tg} z;\ \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=-1$, $k\in\mathbb{Z}$. **6.7.** выч $[\operatorname{ctg}^2 z;\ k\pi]=0$, $k\in\mathbb{Z}$. **6.8.** выч $\left[\frac{\cos^3 z}{z^3};\ 0\right]=-\frac{3}{2}$. **6.9.** выч $\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 0\right]=0$, выч $\left[\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)};\ 1\right]=1$. **6.10.** выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 0\right]=1$, выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ 1\right]=-\frac{1}{2}$, выч $\left[\frac{1}{z(1-z^2)};\ -1\right]=-\frac{1}{2}$.

6.11. выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ 0\right]=0$, выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$, выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5},\ 1\right]=-\frac{1}{3}$, выч $\left[\frac{1}{z^2-z^5};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$.

6.12. выч $\left[\frac{\cos 4z}{(z-2)^6};\ 2\right]=-\frac{128}{15}\sin 8$. **6.13.** 1. **6.14.** 0. **6.15.** 1. **6.16.** -1. **6.17.** 0. **6.18.** $-\frac{1}{3}\operatorname{sh} 3$. ● Воспользоваться второй теоремой о вычетах. **6.19.** 0. **6.20.** π^2. **6.21.** -1. **6.22.** $-\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. **6.23.** $\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$. **6.24.** $2\pi i$. **6.25.** $4\pi i$. **6.26.** $-4\pi i$. **6.27.** $\frac{2\pi i}{9}$. **6.28.** $\frac{2\pi i}{3}\operatorname{sh} 3$. ● Воспользоваться второй теоремой о вычетах и результатом задачи 6.18. **6.29.** $(-1)^n\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}\frac{2\pi i}{(b-a)^{2n-1}}$. **6.30.** 0. ● Воспользоваться второй теоремой о вычетах и соотношением выч $[f(z);\ \infty]=0$. ● **6.31.** $2\pi i$. **6.32.** 0. **6.33.** 0. **6.34.** 0. **6.35.** $-4\pi i$. **6.36.** $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

6.37. $\frac{2\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$. **6.38.** $\pi\sqrt{2}$. **6.39.** $\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{(n-1)!}$.

6.40. $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$. **6.41.** $\frac{\pi}{4a}$. **6.42.** $\frac{\pi e^{-4}}{2}(\sin 2+2\cos 2)$. **6.43.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\times e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)$. **6.44.** $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. **6.45.** $\frac{\pi}{6}e^{-3}$. **6.46.** $\pi\times\frac{2e-1}{12e^2}$. **6.47.** 2 корня. ● $p(it)$ при изменении t от $+\infty$ до $-\infty$ приращения не получает. **6.48.** 2 корня. **6.49.** 3 корня. **6.50.** ● Воспользоваться тем, что $\arg fg=\arg f+\arg g$ и $\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$ при обходе точкой z контура L приращения не получает, ибо $\left|\frac{\varphi(\eta)}{f(\eta)}\right|_{\eta\in L}<1$. **6.51.** ● Рассмотреть функции $f(z)=a_0z^n$ и $\varphi(z)=a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ на окружности $|z|=R$ достаточно большого радиуса R. **6.52.** а) в круге

$|z| < 1$ один нуль; б) в кольце $1 \leqslant |z| < 2$ четыре нуля. ● Положить $f(z) = 8z$ в случае а) и $f(z) = z^3$ в случае б). **6.53.** а) в круге $|z| < 1$ один нуль; б) в кольце $1 \leqslant |z| < 2$ нулей нет; в) в кольце $2 \leqslant |z| < 3$ два нуля.

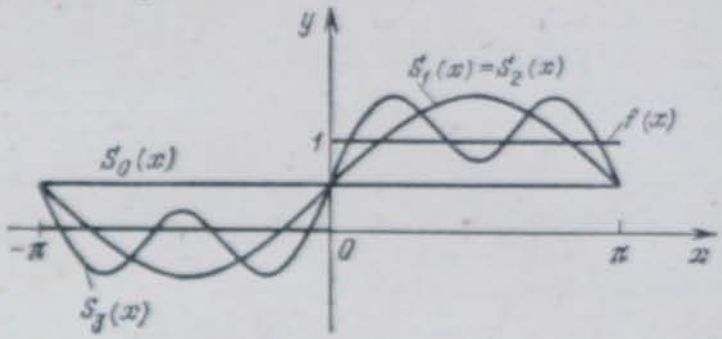


Рис. 103.

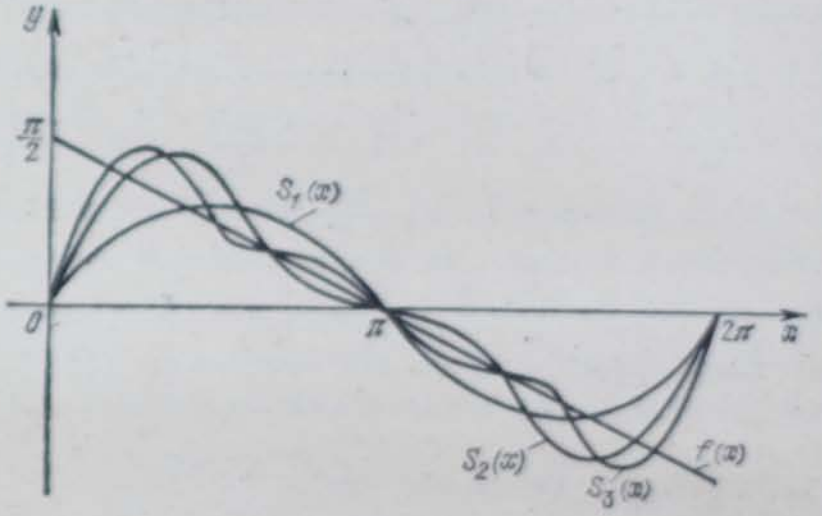


Рис. 104.

7.2. Для четной: $\beta_k = 0$, $\alpha_k = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{l}\,dx$, а для нечетной: $\alpha_k = 0$, $\beta_k = \frac{4}{l}\int\limits_0^{l/2} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{l}\,dx$ $(k = 0, 1, \ldots)$. **7.3.** $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}$, $S(\pi) = \frac{1}{2}$ (рис. 103). **7.4.** $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ (рис. 104). **7.5.** $f(x) = \frac{1}{2} -$

$$-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2m-1)x}{(2m-1)^2}.\quad S(1)=1 \text{ (рис. 105).}$$ **7.6.** $$f(x)=\frac{1}{\ln 2}+$$

$$+2\ln 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos k\pi-1}{\ln^2 2+k^2\pi^2}\cos\frac{\pi kx}{\ln 2}.$$ **7.7.** $$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{4}}{k}\sin kx,$$

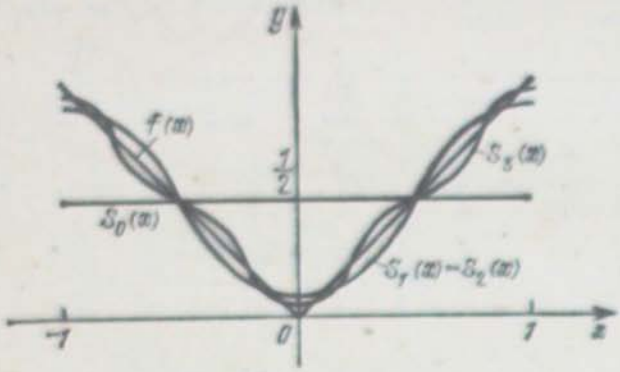


Рис. 105.

7.8. $$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\pi kx.$$ **7.9.** $$f(x)=$$

$$=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2}.$$ **7.10.** $$f(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-$$

$$-\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(4m^2-1)^2}\sin 2mx.$$ **7.11.** а) $\frac{\pi^2}{8}$; б) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$. ● Рассмотреть ряд в точке $x_0=1/4$. **7.12.** $\pi^2/12$. **7.13.** $\pi^2/6$. **7.14.** ● Умножив и разделив $\mathcal{D}_n(x)$ на $2\sin\frac{x}{2}$, получим $$\mathcal{F}_n(x)=\frac{1}{2(n+1)\sin\frac{x}{2}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}(\cos kx-\cos(k+1)x)=$$

$$=\frac{1-\cos(n+1)x}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$ **7.15.** $$f(x,\ y)=\pi^2-$$

$$-2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin ny}{n}+4\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}.$$ **7.16.** $f(x,\ y)=$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin mx+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin ny+\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{mn}\times$$

$\times \sin mx \sin ny$. **7.17.** $f(x,\ y)=\frac{4}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n y}{2}+$

$+\frac{16}{\pi^3}\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+1}}{m^3 n}\cos \pi m x \sin\frac{\pi n y}{2}$. **7.18.** $f(x,\ y)=\frac{2\pi}{3}\times$

$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin \pi m x+\frac{2}{\pi}\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n+1}}{mn^3}\sin \pi m x\cos ny$. **7.19.**

$\mathfrak{F}[\operatorname{sign}(t-a)-\operatorname{sign}(t-b)]=\frac{2\sin \pi\nu(b-a)}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu(a+b)}$. **7.20.** $\mathfrak{F}[f]=$

$=h\frac{\sin^2 \pi\nu a}{\pi^2\nu^2 a}$ **7.21.** $\mathfrak{F}[f]=\begin{cases}\frac{4\pi\nu}{a^2-4\pi^2\nu^2}\sin\frac{4\pi^2\nu}{2a} & \text{при} \quad \nu\neq\frac{a}{2\pi},\\ \frac{\pi}{a} & \text{при} \quad \nu=\frac{a}{2\pi}.\end{cases}$

7.22. $\mathfrak{F}[f]=\frac{2\sin^2 \pi\nu}{\pi i\nu}$. **7.23.** $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-\omega a}$; $\frac{1}{a^2+t^2}=$

$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-\omega a}\cos \omega t\, d\omega$. ● Интеграл $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ вычисляется путем интегрирования по параметру ω (см. задачу 4.28 гл. 8).

7.24. $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega a}$, $\frac{t}{a^2+t^2}=\int_0^{+\infty}e^{-\omega a}\sin \omega t\, d\omega$. ● Использовать соотношение $\mathfrak{F}_s\left[\frac{t}{a^2+t^2}\right]=-\frac{d}{d\omega}\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$, где интеграл $\mathfrak{F}_c\left[\frac{1}{a^2+t^2}\right]$ вычислен в задаче 7.23. **7.25.** $\mathfrak{F}_s[te^{-t^2}]=$

$=\frac{\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/8}$, $\quad te^{-t^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\omega^2/8}\sin \omega t\, d\omega$.

7.26. $\mathfrak{F}_c[e^{-\alpha|t|}\cos\beta t]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}$,

$e^{-\alpha|t|}\cos\beta t=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha^2+(\beta-\omega)^2)}\cos \omega t\, d\omega$.

7.28. $S(\nu_k)=-\frac{2i}{\pi\nu_k}\sin^2 \pi\nu_k T$, $\nu_k=\frac{k}{4T}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2}{\pi|\nu_k|}\sin^2 \pi\nu_k T$,

$\Phi(\nu_k)=\begin{cases}0 & \text{при } k=4n,\\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k\neq 4n,\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$ (рис. 106). **7.29.** $S(\nu_k)=$

$=\frac{\sin 2\pi\nu_k-i(1-\cos 2\pi\nu_k)}{\pi\nu_k}$, $\quad \nu_k=\frac{k}{3}$, $\rho(\nu_k)=\frac{2|\sin \pi\nu_k|}{\pi|\nu_k|}$,

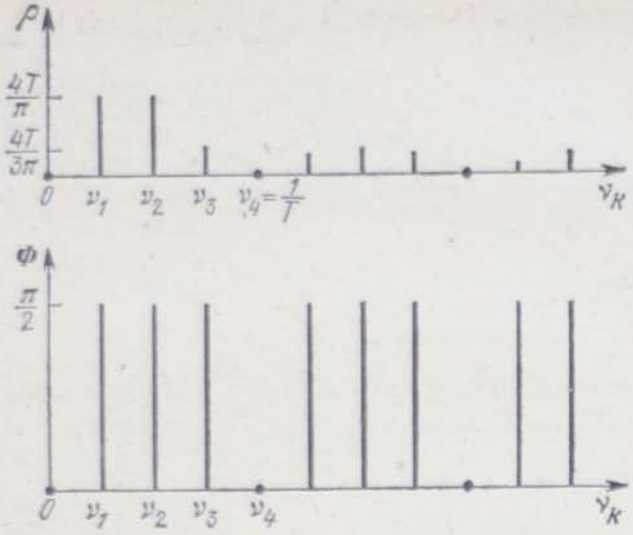


Рис. 106.

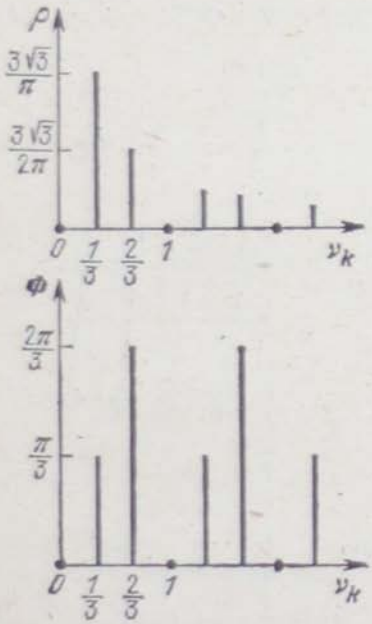


Рис. 107.

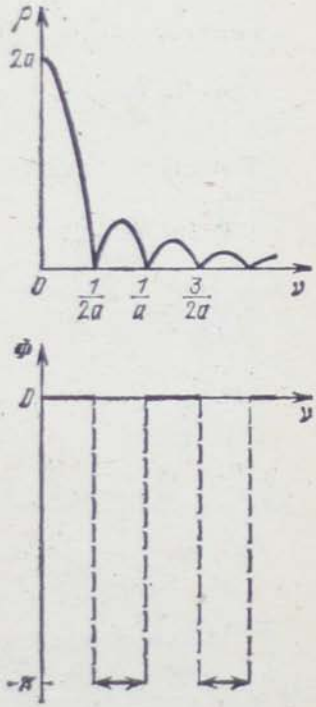


Рис. 108.

$\Phi(\nu_k) = \begin{cases} \pi\nu_k & \text{при } k=1,\ 2, \\ 0 & \text{при } k=3, \end{cases}$ $\Phi(\nu_{k+3}) = \Phi(\nu_k)$ (рис. 107). **7.30.** $S(\nu) = \dfrac{\sin 2\pi a\nu}{\pi\nu}$, $\rho(\nu) = \dfrac{|\sin 2\pi a\nu|}{\pi|\nu|}$, $\Phi(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } S(\nu) \geqslant 0, \\ -\pi, & \text{если } S(\nu) < 0 \end{cases}$ (рис. 108). **7.31.** $S(\nu) = \dfrac{2\cos\pi\nu}{\pi(1-4\nu^2)}$, $\rho(\nu) = \dfrac{2}{\pi}\left|\dfrac{\cos\pi\nu}{1-4\nu^2}\right|$, $\Phi(\nu) =$

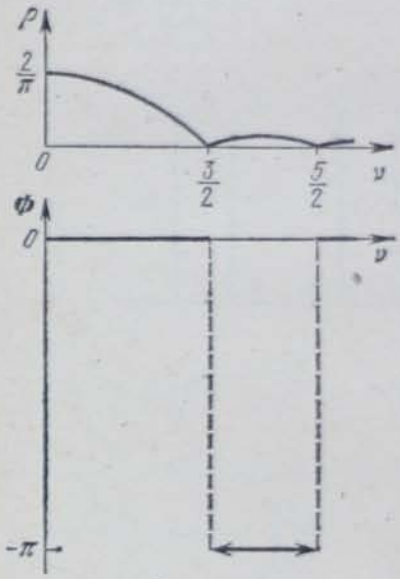
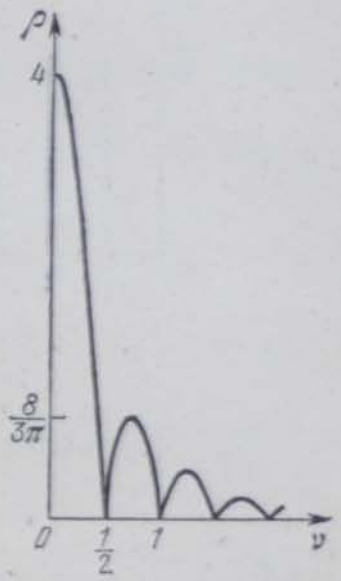


Рис. 109.



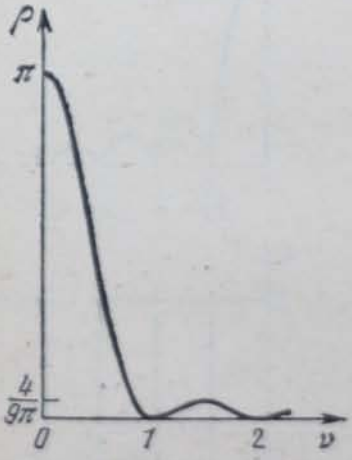


Рис. 110.

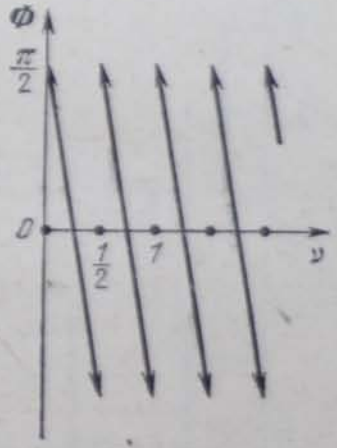


Рис. 111.

$= \begin{cases} 0, & \text{если } S(\nu) \geqslant 0, \\ -\pi, & \text{если } S(\nu) < 0 \end{cases}$ (рис. 109). ● При вычислении интеграла $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \cos \pi t e^{-2\pi i \nu t}\, dt$ функцию $\cos \pi t$ представить по формуле Эйлера.

7.32. $S(\nu)=\dfrac{\sin^2 \pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\rho(\nu)=\dfrac{\sin^2 \pi\nu}{\pi\nu^2}$, $\Phi(\nu)=0$ (рис. 110).

7.33. $S(\nu)=\dfrac{\sin 4\pi\nu+i(\cos 4\pi\nu-1)}{\pi\nu}$, $\rho(\nu)=\dfrac{2}{\pi|\nu|}|\sin 2\pi\nu|$,

$\Phi(\nu)=-\arg S(\nu)=\begin{cases} 0, & \text{если } \nu=0 \text{ и } \nu=1/2, \\ -2\pi\nu, & \text{если } 0<\nu<1/2, \end{cases}$ $\Phi\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)=$
$=\Phi(\nu)$ (рис. 111).

7.34. $$W_1=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

$$W_2=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q^2&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q^2&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^2\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^2 \end{pmatrix},$$

$$W_3=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&q^3\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-q&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-q^2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&-q^3 \end{pmatrix}.$$

7.35. $$Z^{(1)}=\begin{pmatrix} x_0+x_4\\ x_0-x_4\\ x_1+x_5\\ x_1-x_5\\ x_2+x_6\\ x_2-x_6\\ x_3+x_7\\ x_3-x_7 \end{pmatrix},\quad Z^{(2)}=\begin{pmatrix} (x_0+x_4)+(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)+q^2(x_2-x_6)\\ (x_0+x_4)-(x_2+x_6)\\ (x_0-x_4)-q^2(x_2-x_6)\\ (x_1+x_5)+(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)+q^2(x_3-x_7)\\ (x_1+x_5)-(x_3+x_7)\\ (x_1-x_5)-q^2(x_3-x_7) \end{pmatrix},$$

$$
Z^{(1)} = \begin{pmatrix}
(x_0+x_4+x_2+x_6)+(x_1+x_5+x_3+x_7) \\
(x_0-x_4+q^2x_2-q^2x_6)+(qx_1-qx_5+q^3x_3-q^3x_7) \\
(x_0+x_4-x_2-x_6)+(q^2x_1+q^2x_5-q^2x_3-q^2x_7) \\
(x_0-x_4-q^2x_2+q^2x_6)+(q^3x_1-q^3x_5-qx_3+qx_7) \\
(x_0+x_4+x_2+x_6)-(x_1+x_5+x_3+x_7) \\
(x_0-x_4+x_2-x_6)-(qx_1-qx_5+q^3x_3-q^3x_7) \\
(x_0+x_4-x_2-x_6)-(q^2x_1+q^2x_5-q^2x_3-q^2x_7) \\
(x_0-x_4-q^2x_2+q^2x_6)-(q^3x_1-q^3x_5-qx_3+qx_7)
\end{pmatrix}.
$$

7.38.

```
      SUBROUTINE FASTFT(N,N1,KIND,A,B,AA,BB)
      DIMENSION A(N1),B(N1),AA(N1),BB(N1)
      INTEGER V
      M=1
    1 K=0
    2 V=0
    3 J=(2**M)*K+V+1
      I=(2**(M-1))*K+V+1
      C=3.141593*FLOAT(V)/(2**(M-1))
      IF(KIND) 7,7,8
    7 SI=SIN(C)
      GO TO 9
    8 SI=-SIN(C)
    9 CO=COS(C)
      N1=2**(N-1)+1
      JM=J+2**(M-1)
      AO=A(N1)
      BO=B(N1)
      AA(J)=A(I)+AO*CO+BO*SI
      BB(J)=B(I)-AO*SI+BO*CO
      AA(JM)=A(I)-AO*CO-BO*SI
      BB(JM)=B(I)+AO*SI-BO*CO
      V=V+1
      IF(V-2**(M-1)) 3,4,4
    4 K=K+1
      IF(K-2**(N-M)) 2,5,5
    5 M=M+1
      DO 13 I=1,N1
      A(I)=AA(I)
   13 B(I)=BB(I)
      IF(M-N) 1,1,6
    6 IF(KIND) 10,10,12
   10 DO 11 I=1,N1
      AA(I)=AA(I)/N1
```

```
11 BB(I)=BB(I)/N1
12 RETURN
   END
```

7.37.

```
   SUBROUTINE F730(A,B)
   DIMENSION A(128),B(128)
   DO 1 I=1,128
   A(I)=25.
 1 B(I)=0.
   RETURN
   END
```

7.38.

```
   SUBROUTINE F731(A,B)
   DIMENSION A(128),B(128)
   DO 1 I=1,32
   A(I)=0.
   A(I+96)=0.
 1 B(I)=0.
   DO 2 I=33,96
   A(I)=20.
 2 B(I)=0
   RETURN
   END
```

7.39.

```
   SUBROUTINE F732(A,B)
   DIMENSION A(128),B(128)
   DO 1 I=1,128
   T=I
   A(I)=T*(128.-T)/32.
 1 B(I)=0.
   RETURN
   END
```

7.40.

```
   SUBROUTINE F733(A,B)
   DIMENSION A(128),B(128)
   DO 1 I=1,64
   T=I
   A(I)=T
   A(I+64)=64.-T
   B(I)=0.
 1 B(I+64)=0.
   RETURN
   END
```

7.41.

```
      SUBROUTINE F734(A,B)
      DIMENSION
      DO 1 I=1,128
      A(I)=I
    1 B(I)=0.
      RETURN
      END
```

7.42.

```
      DIMENSION A(128),B(128),AT(128),BT(128),A1(128),B1(128),
     * A2(128),B2(128)
      CALL F734(A,B)
      WRITE (3,10)
   10 FORMAT (30H0 ИСХОДНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ )
      WRITE (3,1) A,B
    1 FORMAT (' ',16F7.2)
      DO 2 I=1,128
      A1(I)=A(I)
    2 B1(I)=B(I)
      CALL FASTFT(7,128,0,A1,B1,AT,BT)
      WRITE (3,11)
      FORMAT (6H0 ДПФ )
   11 WRITE (3,1) AT,BT
      M=24
      DO 6 I=1,M
      AT(64-I)=0.
      BT(64-I)=0.
      AT(64+I)=0.
    6 BT(64+I)=0.
      DO 4 I=1,128
      A1(I)=AT(I)
    4 B1(I)=BT(I)
      CALL FASTFT (7,128,1,A1,B1,A2,B2)
      WRITE (3,12) M
   12 FORMAT ('  M= ',I6)
      DO 7 I=1,128
      A1(I)=A(I)-A2(I)
    7 B1(I)=B(I)-B2(I)
      WRITE (3,1) A1,B1
      M=M+8
      IF(M-40) 5,5,8
    8 STOP
      END
```

Глава 13

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Преобразование Лапласа

1. Определение и свойства преобразования Лапласа. *Преобразованием Лапласа* функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (которая, вообще говоря, может принимать и комплексные значения), называется функция $F(p)$ комплексной переменной p, определяемая следующим равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Если функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$,
2) существуют такие постоянные σ и M, что

$$|f(t)| < Me^{\sigma t} \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{2}$$

(величина $\sigma_0 = \inf \sigma$ называется *показателем роста* функции $f(t)$).

3) на любом конечном отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва 1-го рода, причем считаем, что $f(0) = f(+0)$,

то функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а стоящий в правой части равенства (1) *интеграл Лапласа* сходится абсолютно и равномерно во всей полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \sigma > \sigma_0$.

Заметим, что неравенство (2) выполняется при любом $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а при $\sigma = \sigma_0$ оно может и не иметь места, как, например, для случая, когда $f(t)$ — многочлен ($\sigma_0 = 0$).

Функцию $F(p)$ называют *изображением* для $f(t)$. Изображение $F(p)$ является функцией, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ обозначают символически $F(p) \risingdotseq f(t)$ или $F(p) = L[f(t)]$. Мы будем использовать первый символ.

Найти изображения следующих функций:

1.1. *Единичной функции Хевисайда*

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

1.2. $e^{\alpha t}\eta(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем под заданной с помощью аналитической формулы функцией $f(t)$ будем подразумевать произведение этой функции на единичную функцию Хевисайда, т. е. считать $f(t)=0$ при $t<0$.

Предполагаем, что рассматриваемые ниже функции $f(t)$, $f_\nu(t)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, являются оригиналами, причем $f_\nu(t) \risingdotseq F_\nu(p)$ для $\operatorname{Re} p > \sigma_\nu$. Имеют место следующие свойства:

1. Свойство линейности. Для любых постоянных C_k, $k=1, 2, \ldots, n$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} C_k F_k(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}.$$

2. Теорема подобия. Для любой постоянной $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \operatorname{Re} p > \alpha\sigma_0.$$

3. Теорема запаздывания. Запаздыванию включения оригинала на τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$, т. е.

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0$$

(при $t < \tau$ в силу условия 1), налагаемого на оригинал, $f(t-\tau) \equiv 0$).

4. Теорема смещения. Умножению оригинала на $e^{\alpha t}$ соответствует запаздывание изображения на α, т. е.

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha), \quad \operatorname{Re}(p-\alpha) > \sigma_0.$$

5. Дифференцирование оригинала. Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$, $k=1, 2, \ldots$, являются оригиналами, то для любого $k=1, 2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - (p^{k-1} f(0) + p^{k-2} f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

В частности,

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

6. Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

7. Дифференцирование изображения. Умножению оригинала на множитель t соответствует умножение изображения на -1 и дифференцирование его по аргументу p:

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n=1, 2, \ldots$$

8. Интегрирование изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то

$$\frac{1}{t} f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

9. Дифференцирование и интегрирование по параметру. Если $f(t, \alpha) \doteqdot F(p, \alpha)$ и функции $\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha}$ и $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha$, рассматриваемые как функции переменной t, являются оригиналами, то

$$\frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \doteqdot \frac{\partial F(p, \alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t, \alpha)\, d\alpha \doteqdot \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p, \alpha)\, d\alpha.$$

10. Теорема Бореля (умножение изображений). Свертке оригиналов

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau$$

соответствует произведение изображений, т. е.

$$f_1 * f_2 \doteqdot F_1(p) F_2(p).$$

11. Интеграл Дюамеля. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $g(t) \doteqdot G(p)$, то

$$pF(p) G(p) \doteqdot f(0) g(t) + (f' * g)(t) = g(0) f(t) + (g' * f)(t).$$

12. Теоремы о связи «начальных» и «конечных» значений оригинала и изображения. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

а) $f(0) = \lim\limits_{p \to \infty} pF(p)$

и $\left(\text{если существует конечный } \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = f(+\infty)\right)$

б) $f(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$.

Пример 1. Найти изображение функций $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$.

◀ Применяя формулу Эйлера, свойство линейности и учитывая решение задачи 1.2, находим

$$\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|).$$

Аналогично

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \doteqdot \frac{p}{p^2 + \beta^2} \quad (\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \beta|). \ ▶$$

При вычислении изображений, кроме указанных свойств, следует использовать таблицу изображений:

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\operatorname{ch}\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
2	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{sh}\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
4	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$	10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
5	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	11	$\frac{t^n}{n!}\cos\beta t$	$\frac{\operatorname{Re}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$
6	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	12	$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t$	$\frac{\operatorname{Im}((p+\beta i)^{n+1})}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$

Пример 2. Найти изображение функции $\sin^3 t$.

◀ Имеем по формуле Эйлера

$$\sin^3 t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3=\frac{1}{4}\left(\frac{3(e^{it}-e^{-it})}{2i}-\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t.$$

Используя свойство линейности и формулу 6 таблицы, находим:

$$\sin^3 t\risingdotseq\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{p^2+9}=\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}.\ ▶$$

Пример 3. Найти изображения функций $te^{\alpha t}\cos\beta t$ и $te^{\alpha t}\sin\beta t$.

◀ Используя формулы 11 и 12 таблицы при $n=1$ и теорему смещения, находим

$$te^{\alpha t}\cos\beta t\risingdotseq\frac{\operatorname{Re}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}.$$

$$te^{\alpha t}\sin\beta t\risingdotseq\frac{\operatorname{Im}(((p-\alpha)+\beta i)^2)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}=\frac{2\beta(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+\beta^2)}.\ ▶$$

Пример 4. Найти изображение функции $\operatorname{Si} t=\int\limits_0^t\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$ (эту функцию называют *интегральным синусом*).

◀ Используя теорему интегрирования изображения, находим

$$\frac{\sin t}{t}\risingdotseq\int\limits_p^\infty\frac{dq}{q^2+1}=\operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p.$$

Отсюда по теореме интегрирования оригинала получаем

$$\operatorname{Si} t=\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p\right). \blacktriangleright$$

Пример 5. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{p}{p^4+4}$.

◀ Первый способ. Разлагаем знаменатель на множители:

$$p^4+4=(p^4+4p^2+4)-4p^2=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2)=$$
$$=((p+1)^2+1)((p-1)^2+1).$$

Применяем теорему Бореля и используем формулу 10 таблицы:

$$\frac{1}{(p+1)^2+1}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}\risingdotseq\int_0^t e^{\tau}\sin\tau e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t e^{2\tau}(\cos(2\tau-t)-\cos t)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{e^{2\tau}}{2^2+2^2}(2\cos(2\tau-t)+2\sin(2\tau-t))-\frac{1}{2}e^{2\tau}\cos t\right)\Bigg|_{\tau=0}^{t}=$$
$$=\frac{e^t}{8}(\sin t-\cos t)+\frac{e^{-t}}{8}(\sin t+\cos t)=\frac{1}{4}(\sin t\operatorname{ch} t-\cos t\operatorname{sh} t).$$

(при интегрировании дважды использовано правило интегрирования по частям). Теперь применим теорему дифференцирования оригинала. В нашем случае $f(0)=0$, поэтому

$$F(p)=\frac{p}{p^4+4}\risingdotseq f'(t)=\frac{1}{2}\sin t\operatorname{sh} t.$$

Второй способ. Разложим знаменатель на линейные множители (что всегда возможно, если не стремиться записать разложение в действительной форме):

$$p^4+4=((p+1)^2+1)((p-1)^2+1)=$$
$$=(p+1+i)(p+1-i)(p-1+i)(p-1-i).$$

Теперь заданную функцию разложим на элементарные дроби:

$$F(p)=\frac{1}{8}\left(-\frac{i}{p+1+i}+\frac{i}{p+1-i}+\frac{i}{p-1+i}-\frac{i}{p-1-i}\right)$$

и, пользуясь формулой 3 таблицы, получаем

$$f(t)=\frac{i}{8}(-e^{-(1+i)t}+e^{-(1-i)t}+e^{(1-i)t}-e^{(1+i)t})=$$
$$=\frac{i}{8}(e^{it}(e^{-t}-e^{t})+e^{-it}(e^{t}-e^{-t}))=-\frac{i}{8}(e^{t}-e^{-t})(e^{it}-e^{-it})=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}\operatorname{sh} t\sin t. \blacktriangleright$$

Пример 6. Найти изображение оригинала $f(t)$, если

$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi,\\ 0 & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Используя функцию Хевисайда и учитывая, что $\eta(t-\pi)=1$ при $t\geqslant\pi$, функцию $f(t)$ запишем в виде

$$f(t)=\sin t+\eta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Пользуясь формулой 6 таблицы и теоремой запаздывания, получаем

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-\pi p}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}. \ ▶$$

Пример 7. Найти оригинал для функции $F(p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{e^{-p}}{p^2}-\frac{e^{-2p}}{p^2-1}$.

◀ Из таблицы изображений находим $\frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t$, $\frac{1}{p^2}\risingdotseq t$, $\frac{1}{p^2-1}\risingdotseq\operatorname{sh} t$, и с помощью теоремы запаздывания получаем

$$F(p)\risingdotseq f(t)=\cos 2t-\eta(t-1)(t-1)+\eta(t-2)\operatorname{sh}(t-2),$$

т. е.

$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ \cos 2t-t+1 & \text{при } 1\leqslant t<2,\\ \cos 2t-t+1+\operatorname{sh}(t-2) & \text{при } 2\leqslant t<+\infty.\end{cases} \ ▶$$

Найти изображения функций:

1.3. $\operatorname{sh}^3 t$. **1.4.** $\operatorname{ch} t\sin t$.

Найти изображения функций $f(t)$ и $f'(t)$ (изображение $f'(t)$ найти с помощью теоремы дифференцирования оригинала и результат проверить по таблице изображений):

1.5. $f(t)=\sin t-t\cos t$. **1.6.** $f(t)=t\sin t+\cos t$.

1.7. $f(t)=e^{-t}\sin^2 t$.

1.8. $f(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t\sin t+\operatorname{sh} t\cos t)$.

Пользуясь теоремой интегрирования изображения, а затем теоремой интегрирования оригинала, найти изображения функций:

1.9. $\int\limits_0^t\frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau}d\tau$. **1.10.** $\int\limits_0^t\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}d\tau$. **1.11.** $\int\limits_0^t\frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$.

Пользуясь теоремой интегрирования по параметру, а затем теоремой интегрирования оригинала, найти изо-

бражения функций:

1.12. $\int\limits_0^t \frac{\cos\beta\tau - \cos\alpha\tau}{\tau}\,d\tau$. **1.13.** $\int\limits_0^t \frac{e^{\beta\tau} - e^{\alpha\tau}}{\tau}\,d\tau$.

При помощи теоремы Бореля, а затем теорем дифференцирования и интегрирования оригинала найти оригиналы для функций $F(p)$, $pF(p)$ и $\frac{F(p)}{p}$. Результат проверить, применяя разложение на элементарные дроби и таблицу изображений.

1.14. $F(p) = \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$. **1.15.** $F(p) = \frac{p}{(p^2+\beta^2)^2}$.

1.16. $F(p) = \frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.

1.17. $F(p) = \frac{1}{(p+\alpha)((p+\alpha)^2+\beta^2)}$.

1.18. $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$.

Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций:

1.19. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < \tau, \\ 0 & \text{при } t \geqslant \tau \end{cases}$

(единичный импульс, действующий в течение промежутка времени от $t=0$ до $t=\tau$).

1.20. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T, \\ 1 & \text{при } T \leqslant t < T+\tau, \\ 0 & \text{при } t \geqslant T+\tau \end{cases}$

(запаздывающий единичный импульс).

1.21. $f(t) = \begin{cases} \frac{h}{\tau}t & \text{при } 0 \leqslant t < \tau, \\ h & \text{при } \tau \leqslant t < 2\tau, \\ -\frac{h}{\tau}(t-3\tau) & \text{при } 2\tau \leqslant t < 3\tau, \\ 0 & \text{при } t \geqslant 3\tau. \end{cases}$

1.22. $f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{при } 0 \leqslant t < \pi/2, \\ -\cos t & \text{при } \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{при } t \geqslant \pi. \end{cases}$

1.23. $f(t)=\begin{cases} h & \text{при } 0\leqslant t+1, \\ he^{-(t-1)} & \text{при } t\geqslant 1. \end{cases}$

1.24. $f(t)=\begin{cases} \sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi, \\ \operatorname{sh}(t-\pi) & \text{при } t\geqslant \pi. \end{cases}$

1.25.** Доказать, что если $F_0(p)\doteqdot f_0(t)$, где

$$f_0(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t<0, \\ f(t) & \text{при } 0\leqslant t<l, \\ 0 & \text{при } t\geqslant l, \end{cases}$$

а функция $f(t)$ при $t>l$ периодическая с периодом l (т. е. $f(t+l)=f(t)$), то

$$f(t)\doteqdot\frac{F_0(p)}{1-e^{-lp}}.$$

Используя результат задачи 1.25 и обозначения, принятые в этой задаче, зная функцию $f_0(t)$ и период l, найти изображения следующих периодических функций $f(t)$:

1.26. $f_0(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant t<\tau, \\ 0 & \text{при } \tau\leqslant t<T; \end{cases} \quad l=T$

(периодическая последовательность единичных импульсов).

1.27*. $f_0(t)=\sin\beta t$ при $0<t<\frac{\pi}{\beta}$; $l=\frac{\pi}{\beta}$

(т. е. $f(t)=|\sin\beta t|$).

1.28. $f_0(t)=\begin{cases} \sin t & \text{при } 0\leqslant t<\pi, \\ 0 & \text{при } \pi\leqslant t<T; \end{cases} \quad l=T.$

1.29. $f_0(t)=\begin{cases} h & \text{при } 0\leqslant t<c, \\ -h & \text{при } c\leqslant t<2c; \end{cases} \quad l=2c.$

1.30. $f_0(t)=\frac{h}{c}t$ при $0\leqslant t<c$; $l=c$.

1.31. $f_0(t)=\begin{cases} \frac{h}{c}t & \text{при } 0\leqslant t<c, \\ -\frac{h}{c}t & \text{при } c\leqslant t<2c; \end{cases} \quad l=2c.$

1.32. $f_0(t)=\cos\beta t$ при $0\leqslant t<\frac{\pi}{2\beta}$, $l=\frac{\pi}{2\beta}$.

Пользуясь таблицей изображений и теоремой запаздывания, найти оригиналы $f(t)$ для изображений:

1.33. $F(p)=\frac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$.

1.34. $F(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{e^{-p}}{p}-\frac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

1.35. $F(p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{2pe^{-p}}{p^2-4}+\frac{e^{-3p}}{p^2-16}$.

2. Расширение класса оригиналов. Класс оригиналов можно расширить, включив в него функции, которые могут быть неограничены в окрестности конечного множества точек, но такие, что интеграл Лапласа от них тем не менее в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ сходится абсолютно. К числу таких *обобщенных оригиналов* относится степенная функция $f(t)=t^{\mu}$ при $\mu > -1$, функция $\ln t$ и некоторые другие. В частности, к такому классу относится всякая функция $f(t)$, которая в некоторых точках $t=t_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ является бесконечно большой порядка, меньшего единицы, т. е. такая, что $\lim\limits_{t\to t_k}(t-t_k)^{r_k}f(t)=0$ при некотором $r_k<1$, и если вне некоторых окрестностей точек t_k она удовлетворяет условиям, при которых функцию можно считать оригиналом.

Пример 8. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)=t^{\mu}$, $\mu > -1$.

◀ Имеем $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}t^{\mu}\,dt$ или, после подстановки $pt=\tau$,

$$F(p)=\frac{1}{p^{\mu+1}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\tau}\tau^{\mu}\,d\tau=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}.$$

Итак,

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\risingdotseq\frac{1}{p^{\mu+1}}. \ ▶$$

Замечание. Если μ — целое положительное число, то $\Gamma(\mu+1)=\mu!$, и мы приходим к формуле 2 таблицы изображений.

Пример 9. Найти изображение функции $f(t)=t^{\mu}\ln t$, $\mu > -1$.

◀ Из соответствия $t^{\mu}\risingdotseq\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}$ с помощью дифференцирования по параметру μ получаем

$$t^{\mu}\ln t\risingdotseq\frac{\Gamma'(\mu+1)}{p^{\mu+1}}-\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\ln p=\frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}-\ln p\right).$$

В частности, положив $\mu=0$, с учетом того, что $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$ ($\gamma=0{,}577215\ldots$ — *постоянная Эйлера*), получаем

$$\ln t\risingdotseq-\frac{\gamma+\ln p}{p}. \ ▶$$

Найти изображения функций:

1.36. $f(t)=\frac{t^{\mu}e^{at}}{\Gamma(\mu+1)}$, $\mu > -1$.

1.37. $f(t)=\frac{t^{\mu}e^{\alpha t}\ln t}{\Gamma(\mu+1)}, \quad \mu>-1.$

1.38. $f(t)=e^{\alpha t}\ln t.$

1.39. $f(t)=\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\cos\beta t, \quad \mu>-1.$

1.40. $f(t)=\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\sin\beta t, \quad \mu>-1.$

1.41. $f(t)=\cos\beta t\cdot\ln t.$ **1.42.** $f(t)=\sin\beta t\cdot\ln t.$

1.43. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant t<a, \\ \frac{1}{\sqrt{t-a}} & \text{при } \quad t>a. \end{cases}$

§ 2. Формула обращения. Теоремы разложения

Если функция действительной переменной $f(t)$ является оригиналом, т. е. $|f(t)|<Me^{(\sigma_0+\varepsilon)t}$ и $f(t)$ кусочно гладкая на каждом конечном отрезке действительной оси, то связь между нею и ее изображением взаимно однозначна: из равенства

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)\,dt$$

следует формула обращения

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp \quad (\textit{формула Меллина}).$$

В этой формуле путь интегрирования — любая прямая $\operatorname{Re}p=\sigma$, параллельная мнимой оси, лежащая правее прямой $\operatorname{Re}p=\sigma_0$.

Замечание. Во всякой точке t_0, являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы Меллина равна $\frac{1}{2}(f(t_0-0)+f(t_0+0))$.

Если функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\sigma_0$, удовлетворяет условиям:

а) $|F(p)|\to 0$ при $|p|\to\infty$ равномерно относительно $\arg p\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

б) для всех $\sigma>\sigma_0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|F(x+iy)|\,dy<M,$$

то $F(p)$ является изображением оригинала, который определяется по формуле Меллина.

Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно, и обычно пользуются теоремами разложения, являющимися следствиями из нее:

Первая теорема разложения. *Если функция $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и ее разложение в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ имеет вид*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то функция

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!},\quad t\geqslant 0\qquad (f(t)=0 \text{ при } t<0)$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Вторая теорема разложения. *Если изображение $F(p)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$, лежащих в конечной части плоскости, то*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\text{выч}\,[e^{pt}F(p);\ p_k].$$

Если, в частности $F(p)=\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — многочлены степеней m и n соответственно $(n>m)$, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — корни многочлена $Q_n(p)$ с кратностями, соответственно равными $l_1, l_2, \ldots, l_r$ $(l_1+l_2+\ldots+l_r=n)$, то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(l_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{l_k-1}}{dp^{l_k-1}}\left((p-p_k)^{l_k}F(p)\,e^{pt}\right). \qquad (1)$$

Если все коэффициенты многочленов $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ — действительные числа, то в правой части (1) полезно объединить слагаемые, относящиеся к взаимно сопряженным комплексным корням; сумма каждой пары таких членов равна удвоенной действительной части одного из них.

В частном случае, когда все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ многочлена $Q_n(p)$ простые, используя формулу для вычисления вычета относительно полюса первого порядка (см. с. 270), получим

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_k t}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти оригинал функции $F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

◀ Первый способ. Разложение функции $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид

$$F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!p^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}.$$

Поэтому, в соответствии с первой теоремой разложения, оригиналом для $F(p)$ является функция $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}=I_0(2\sqrt{t})$ (I_0—функция Бесселя первого рода с нулевым индексом).

Второй способ. Воспользуемся второй теоремой разложения. Для этого надо найти вычет функции $\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}$ относительно ее единственной особой точки $p=0$ (это существенно особая точка), т. е. коэффициент при $1/p$ разложения этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $p=0$. Имеем

$$\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}}=\left(1+pt+\frac{p^2t^2}{2!}+\ldots+\frac{p^nt^n}{n!}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2!p^3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+1}}+\ldots\right).$$

Выделив в произведении рядов члены, содержащие $1/p$, найдем:

$$f(t)=\text{выч}\left[\frac{1}{p}e^{pt}e^{-\frac{1}{p}};0\right]=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}+\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{(n!)^2}+\ldots=$$
$$=I_0(2\sqrt{t}).\ \blacktriangleright$$

В этом примере решение, использующее первую теорему разложения, оказалось более простым, чем решение при помощи второй теоремы разложения.

Пример 2. Найти оригинал для функции $F(p)=\frac{1}{(p^2+\beta^2)^3}$.

◀ Воспользуемся второй теоремой разложения. Функция $F(p)$ имеет два полюса 3-го порядка $p=\pm\beta i$, и ее оригинал определяется равенством

$$f(t)=\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\beta i\right]+\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};-\beta i\right]=$$
$$=2\,\mathrm{Re}\left(\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3};\beta i\right]\right).$$

Имеем:

$$\text{выч}\left[\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)};\beta i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-\beta i)^3\frac{e^{pt}}{(p^2+\beta^2)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{(p+\beta i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to\beta i}\left(\frac{t^2e^{pt}}{(t+\beta i)^3}-\frac{6te^{\beta i}}{(p+\beta i)^4}+\frac{12e^{pt}}{(t+\beta i)^5}\right)=$$
$$=-\frac{t^2e^{\beta it}}{16\beta^3i}-\frac{3te^{\beta it}}{16\beta^4}+\frac{3e^{\beta it}}{16\beta^5i}$$

(при дифференцировании мы воспользовались формулой Лейбница для производной произведения). Выделив действительную часть

этого выражения и удвоив ее, получим

$$f(t)=-\frac{t^2\sin\beta t}{8\beta^3}-\frac{3t\cos\beta t}{8\beta^4}+\frac{3\sin\beta t}{8\beta^5}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти оригинал для функции $F(p)=\frac{1}{p^4-1}$.

◀ Знаменатель дроби здесь имеет только простые корни $p_{1,2}=\pm 1$, $p_{3,4}=\pm i$. Поэтому в соответствии с формулой (2) получаем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4p_k^3}e^{p_k t}=\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+\frac{e^{it}}{i^3}+\frac{e^{-it}}{(-i)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^t-e^{-t}}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t-\sin t). \blacktriangleright$$

Этот пример можно было решить, исходя из разложения $\frac{1}{p^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+1}\right)$.

Пользуясь первой теоремой разложения, найти оригиналы для заданных функций:

2.1. $F(p)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$. **2.2.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sin\frac{1}{\sqrt{p}}$.

2.3. $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{p}}$. **2.4.** $F(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$.

2.5. $F(p)=\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$. **2.6.** $F(p)=\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$.

2.7*. $F(p)=\frac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

2.8. Для каких из функций, заданных в задачах 2.1—2.7, можно при отыскании оригинала применить вторую теорему разложения, а для каких этого сделать нельзя?

Пользуясь второй теоремой разложения или с помощью разложения на элементарные дроби, найти оригиналы для заданных функций:

2.9. $F(p)=\frac{p}{p^2+4p+5}$. **2.10.** $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}$.

2.11. $F(p)=\frac{Q'(p)}{Q(p)}$, где $Q(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)$ и все числа p_k попарно различны.

2.12. $F(p)=\frac{1}{(p^4-1)^2}$. **2.13.** $F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$.

2.14. $F(p)=\frac{p^3}{(p^4-1)^2}$. **2.15.** $F(p)=\frac{p^5}{p^6-1}$.

2.16. $F(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)^3}$. 2.17. $F(p)=\frac{1}{p^2-4p+3}$.

2.18. $F(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. 2.19. $F(p)=\frac{p}{p^4-5p^2+4}$.

2.20. $F(p)=\frac{p^3}{(p^4-1)(p^4+4)}$.

§ 3. Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений с постоянными коэффициентами. Для того чтобы найти решение $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t) \tag{1}$$

(где $f(t)$ — оригинал), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

следует применить к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа, т. е. от уравнения (1) с условиями (2) перейти к операторному уравнению

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(p)+Q(p)=F(p),$$

где $X(p)$ — изображение искомого решения, $F(p)$ — изображение функции $f(t)$, а $Q(p)$ — некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ и который тождественно равен нулю, если $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$. Решив операторное уравнение относительно $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)-Q(p)}{L(p)}$$

($L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$ — характеристический многочлен данного уравнения) и найдя оригинал для $X(p)$, мы получим искомое решение $x(t)$. Если считать $x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными, то найденное решение будет общим решением уравнения (1). Совершенно аналогично решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Отличие будет лишь в том, что вместо одного операторного уравнения мы получим систему таких уравнений, которые будут линейными относительно изображений искомых функций.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x''+2x'+x=te^{-t}$, а также его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=1$, $x_0'=2$.

◀ Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, тогда

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0,\quad x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px_0-x_0'.$$

По таблице изображений находим $te^{-t}\risingdotseq\frac{1}{(p+1)^2}$, и операторное

уравнение имеет вид

$$(p^2+2p+1)\,X(p)-(p+2)\,x_0-x_0'=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Отсюда находим

$$X(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}.$$

Для отыскания оригинала в данном случае проще всего представить $X(p)$ в следующем виде:

$$X(p)=\frac{(p+1)+1}{(p+1)^2}\,x_0+\frac{1}{(p+1)^2}\,x_0'+\frac{1}{(p+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{x_0+x_0'}{(p+1)^2}+\frac{x_0}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей изображений, находим общее решение

$$x(t)=\frac{1}{3!}\,t^3e^{-t}+(x_0+x_0')\,te^{-t}+x_0e^{-t}.$$

Обозначив $x_0=C_1$, $x_0+x_0'=C_2$, его можно записать в виде

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(C_1+C_2t)\,e^{-t}.$$

Частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x(t)=\frac{1}{3}\,t^3e^{-t}+(1+3t)\,e^{-t}.\ \blacktriangleright$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x''+x=f(t)$ при нулевых начальных условиях, если

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\,t & \text{при } 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}\,(\pi-t) & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\[2mm] 0 & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$$

◀ Запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t)=\left(1-\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{2}{\pi}\,t-\left(\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\eta(t-\pi)\right)\frac{2}{\pi}\,(t-\pi)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(t-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\eta(t-\pi)\,(t-\pi)\right).$$

Пользуясь теоремой запаздывания, отсюда находим

$$f(t)\risingdotseq F(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

Так как начальные условия нулевые, то, полагая $x(t)\risingdotseq X(p)$, приходим к операторному уравнению

$$(p^2+1)\,X(p)=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}}{p^2}.$$

из которого после несложных преобразований находим

$$X(p)=\frac{2}{\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}p}+e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Так как $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq t-\sin t$, то, снова применяя теорему запаздывания, находим

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\left((t-\sin t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\right.$$
$$+\eta(t-\pi)((t-\pi)-\sin(t-\pi)),$$

т. е.

$$x(t)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(t-\sin t) & \text{при } 0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}(-\sin t-2\cos t-t+\pi) & \text{при } \frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi,\\ -\frac{4}{\pi}\cos t & \text{при } t\geqslant\pi.\end{cases}$$ ▶

Пример 3. Найти решение системы

$$x'+y=e^t,$$
$$x+y'=e^{-t}$$

при начальных условиях $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

◀ Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тогда $x'(t)\risingdotseq pX(p)-x_0$, $y'(t)\risingdotseq pY(p)-y_0$, и получаем операторную систему

$$pX(p)-x_0+Y(p)=\frac{1}{p-1},$$

$$pY(p)-y_0+X(p)=\frac{1}{p+1}.$$

Решая систему, найдем

$$X(p)=\frac{p}{p^2-1}x_0-\frac{1}{p^2-1}y_0+\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},$$

$$Y(p)=\frac{p}{p^2-1}y_0+\frac{1-x_0}{p^2-1}-\frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases}x(t)=x_0\operatorname{ch}t-y_0\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t,\\ y(t)=y_0\operatorname{ch}t+(1-x_0)\operatorname{sh}t-t\operatorname{sh}t.\end{cases}$$ ▶

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

3.1. $x''+9x=\cos 3t$. **3.2.** $x''+4x'+4x=e^{2t}$.
3.3. $x''+2x'=te^{-2t}$. **3.4.** $x''+x'-2x=e^t$.
3.5. $x''+x'=e^{-t}\sin t$.

Найти решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

3.6. $x''' + x = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \quad x''(0) = 2.$

3.7. $x'' + 2x' + x = e^{-t}; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

3.8. $x'' + 3x' = e^{-3t}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$

3.9. $x'' - 2x' + 2x = \sin t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

3.10. $x'' + 4x = \sin 2t; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$

3.11. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t; \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 3.$

3.12. $x''' - x'' = e^t; \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = x''(0) = 0.$

3.13. $x^{\mathrm{IV}} - x = \operatorname{sh} t; \; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \; x'''(0) = 1.$

3.14. $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}; \; x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

Найти при нулевых начальных условиях решения следующих дифференциальных уравнений:

3.15. $x' + x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.16. $x'' + x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{при } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.17. $x'' - x' = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant 1. \end{cases}$$

3.18. $x'' + x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ -1 & \text{при } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.19*. Решить интегральное уравнение $\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t) = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ 2 - t & \text{при } 1 \leqslant t < 2, \\ 0 & \text{при } \quad t \geqslant 2. \end{cases}$$

3.20.** С помощью интеграла Дюамеля доказать следующее утверждение: если $x_1(t)$ — решение уравнения $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=1$ при нулевых начальных условиях $(x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0)$, то решением уравнения $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t)$ при тех же начальных условиях является функция

$$x(t)=\int_0^t x'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=x_1(t)f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau$$

($f(t)$ — произвольный оригинал).

Замечание. Результат задачи 3.20 позволяет находить решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части этого уравнения.

Пользуясь результатом задачи 3.20, найти решения следующих дифференциальных уравнений:

3.21. $x'-x=\dfrac{1}{e^t+3}$. **3.22.** $x''+x=\dfrac{1}{1+e^t}$.

3.23. $x''-x'=\dfrac{1}{1+e^t}$. **3.24.** $x''+x=\dfrac{1}{2+\cos t}$.

3.25. $x''+x=e^{-t^2}$.

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений

3.26. $\begin{aligned} x''+y'&=t,\\ y''-x'&=0. \end{aligned}$ **3.27.** $\begin{aligned} x''+y'&=\operatorname{sh}t-\sin t,\\ y''+x'&=\operatorname{ch}t-\cos t. \end{aligned}$

Найти решения систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях.

3.28. $\begin{aligned} x'+y&=0,\\ x+y'&=0; \end{aligned}$ $x(0)=1,\quad y(0)=-1.$

3.29. $\begin{aligned} 2x''+x-y'&=-3\sin t,\\ x+y''&=-\sin t; \end{aligned}$
$x(0)=0,\quad x'(0)=1,\quad y(0)=0.$

3.30. $\begin{aligned} x''-y'&=0,\\ x-y''&=2\sin t; \end{aligned}$
$x(0)=-1,\quad x'(0)=y(0)=y'(0)=1.$

3.31. $\begin{aligned} x''-y'&=0,\\ x'-y''&=2\cos t; \end{aligned}$
$x(0)=y'(0)=0,\quad x'(0)=y(0)=2.$

3.32. $x'' - y' = e^t,$

$x' + y'' - y = 0;$

$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad x'(0) = y'(0) = 0.$

3.33. $x'' + y' = 2\sin t,$

$y'' + z' = 2\cos t,$

$z'' - x = 0;$

$x(0) = z(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = y(0) = -1, \quad z'(0) = 1.$

Проинтегрировать при нулевых начальных условиях системы дифференциальных уравнений:

3.34. $x'' - y' = f_1(t),$

$y' + x = f_2(t),$

где $f_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < \pi, \\ 0 \text{ при } \quad t \geqslant \pi; \end{cases}$

$$f_2(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad 0 \leqslant t < \pi/2, \\ \pi - t & \text{при} \quad \pi/2 \leqslant t < \pi, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant \pi. \end{cases}$$

3.35. $x'' - y = 0,$

$y'' - x = f(t),$

где $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t < \pi, \\ -1 \text{ при } \pi \leqslant t < 2\pi, \\ 0 \text{ при } \quad t \geqslant 2\pi. \end{cases}$

2. Расчет электрических контуров. Методами операционного исчисления удобно решать задачи на расчет электрических контуров.

Пример 4. К электрическому контуру, в который последовательно включены самоиндукция L и сопротивление R, приложена периодическая э. д. с. периода T: $u(t) = at$ $(0 \leqslant t < T)$ (рис. 112). Определить начальное условие $i(0) = i_0$ так, чтобы в контуре возник периодический ток.

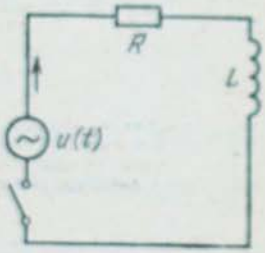


Рис. 112.

◀ По второму закону Кирхгофа находим:

$Li'(t) + Ri(t) = u(t)$, или

$$i'(t) + ki(t) = \frac{1}{L}u(t), \quad k = \frac{R}{L}.$$

При помощи единичной функции Хевисайда запишем $u_0(t)$ (значение $u(t)$ на начальном периоде $[0, T)$):

$$u_0(t) = (1 - \eta(t - T))\, at = at - a\eta(t - T)(t - T) - aT\eta(t - T).$$

Отсюда по теореме запаздывания имеем $u_0(t) \doteqdot U_0(p) = \dfrac{a(1 - e^{-pT})}{p^2} -$

$-\frac{aT}{p}e^{-pT}$. Применяя формулу для изображения периодической функции (см. задачу 1.25), находим

$$u(t) \doteqdot U(p) - \frac{U_0(p)}{1-e^{-pT}} = \frac{a}{p^2} - \frac{aT}{p}\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

Переходим к операторному уравнению, полагая $i(t) \doteqdot I(p)$, $i'(t) \doteqdot pI(p) - i_0$:

$$(p+k)\,I(p) = i_0 + \frac{a}{Lp^2} - \frac{aT}{Lp}\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}},$$

откуда

$$I(p) = \frac{i_0}{p+k} + \frac{a}{Lp^2(p+k)} - \frac{aT}{Lp(p+k)}\frac{e^{-pT}}{1-e^{-pT}}.$$

Запишем $I(p)$ в следующем виде:

$$I(p) = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}}, \text{ где } F(p) =$$

$$= \frac{i_0(1-e^{-pT})}{p+k} + \frac{a(1-e^{-pT})}{Lp^2(p+k)} - \frac{aTe^{-pT}}{Lp(p+k)}.$$

Чтобы ток в контуре был периодическим с периодом T, необходимо, чтобы оригинал функции $F(p) \doteqdot f(t)$ имел вид

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{при } 0 \leqslant t < T, \\ 0 & \text{при } t \geqslant T. \end{cases}$$

Но при $0 \leqslant t < T$

$$f_0(t) \doteqdot \frac{i_0}{p+k} + \frac{a}{Lp^2(p+k)}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2(p+k)} = \frac{1}{kp^2} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p+k} - \frac{1}{p}\right) \doteqdot \frac{t}{k} + \frac{1}{k^2}(e^{-kt}-1),$$

то

$$f_0(t) = i_0 e^{-kt} + \frac{at}{Lk} + \frac{a}{Lk^2}(e^{-kt}-1).$$

При $t \geqslant T$, используя теорему запаздывания, находим:

$$f(t) = i_0(e^{-kt} - e^{-k(t-T)}) + \frac{a(t-(t-T))}{Lk} +$$

$$+ \frac{a}{Lk^2}((e^{-kt}-1) - (e^{-k(t-T)}-1)) - \frac{aT}{Lk}(1-e^{-k(t-T)}) =$$

$$= e^{-kt}\left(i_0(1-e^{kT}) + \frac{a}{Lk^2}(1-e^{kT}) + \frac{aT}{Lk}e^{kT}\right).$$

Но здесь $f(t) = 0$, поэтому

$$i_0 = -\frac{a}{Lk^2}\frac{kTe^{kT}+1-e^{kT}}{1-e^{kT}} = -\frac{a}{Lk^2} + \frac{1}{Lk}\frac{aT}{1-e^{-kT}}.$$

Таким образом, внося значение i_0 в $f_0(t)$, находим:

$$f_0(t)=\frac{a}{Lk^2}\left(\frac{kTe^{-kt}}{1-e^{-kT}}-e^{-kt}+kt+e^{-kt}-1\right)=$$

$$=\frac{aT}{Lk}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{kT}+\frac{e^{-kt}}{1-e^{-kT}}\right).$$

Это искомое значение периодического тока (периода T) в промежутке $0\leqslant t<T$. ▶

3.36. К электрическому контуру, в который последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и емкость C с начальным током и зарядом, равными нулю, приложена э. д. с. $u(t)$, равная E_1 при $0\leqslant t\leqslant T$

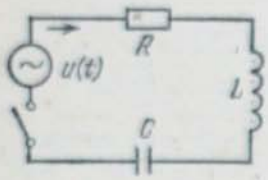


Рис. 113.

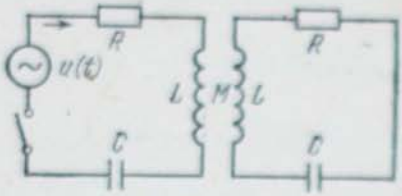


Рис. 114.

и E_2 при $t>T$ (E_1, E_2, T — постоянные). Найти ток в контуре (рис. 113).

3.37. Два одинаковых электрических контура, состоящие из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, соединенных последовательно, связаны взаимной индукцией M. Начальные токи и заряды равны нулю. К одному из контуров в момент времени $t=0$ прилагается постоянная э. д. с. E_0. Найти токи в обоих контурах (рис. 114).

3. Интегрирование линейных уравнений в частных производных. Применение операционных методов для интегрирования линейных уравнений в частных производных рассмотрим на примере.

Пример 5. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+z=\sin x\cos y$, удовлетворяющее условиям $z(0,\ y)=\sin y$, $z(x,\ 0)=0$ ($x\in[0,\ +\infty)$, $y\in[0,\ +\infty)$).

◀ Переходим к операторному уравнению относительно аргумента y, полагая $z(x,\ y)\doteqdot Z(x,\ p)$. Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial y}\doteqdot pZ(x,\ p)-z(x,\ 0)=pZ(x,\ p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\doteqdot\frac{\partial}{\partial x}(pZ(x,\ p))=pZ'_x(x,\ p)$$

(по теореме о дифференцировании операторных соотношений по

параметру). Получаем операторное уравнение:

$$pZ'_x(x, p)+Z(x, p)=\frac{p\sin x}{p^2+1} \quad \left(\text{так как } \cos y \doteqdot \frac{p}{p^2+1}\right).$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение по аргументу x, находим

$$Z(x, p)=C_1(p)\,e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x-\frac{p^2}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

В силу начального условия $Z(x, 0)=0$ и теоремы о связи начального значения оригинала и конечного значения изображения мы должны иметь $\lim\limits_{p\to\infty} pZ(x, p)=Z(x, 0)=0$, откуда находим $\lim\limits_{p\to\infty} pC_1(p)=0$, причем если $C_1(p)\doteqdot\varphi(y)$, то $\varphi(0)=0$ (в силу той же теоремы). Запишем теперь $Z(x, p)$ в следующем виде:

$$Z(x, p)=pC_1(p)\,\frac{1}{p}\,e^{-\frac{x}{p}}+\frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x-\frac{1}{2}\,\frac{(p^2+1)+(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

Но так как

$$pC_1(p)\doteqdot\varphi'(y), \quad \frac{1}{p}\,e^{-\frac{x}{p}}\doteqdot I_0\left(2\sqrt{xy}\right)$$

(см. решение примера 1 из § 2),

$$\frac{p}{(p^2+1)^2}\doteqdot\frac{1}{2}\,y\sin y, \quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}=y\cos y,$$

то находим:

$$z(x, y)=\int\limits_0^y \varphi'(t)\,I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right)dt+\frac{1}{2}\,y\sin y\sin x-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin y+y\cos y)\cos x=\int\limits_0^y \varphi'(t)\,I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\sin y\cos x-\frac{1}{2}\,y\cos(x+y).$$

(первое слагаемое получено по теореме свертывания оригиналов). Так как $I_0(0)=1$, то, полагая $x=0$, находим:

$$z(0, y)=\int\limits_0^y \varphi'(t)\,dt-\frac{1}{2}\sin y-\frac{1}{2}\,y\cos y=$$

$$=\varphi(y)-\frac{1}{2}\sin y-\frac{1}{2}\,y\cos y=\sin y$$

(по начальным условиям); поэтому $\varphi(y)=\frac{3}{2}\sin y+\frac{1}{2}\,y\cos y$, $\varphi'(y)=$

$= 2\cos y - \frac{1}{2} y \sin y$, и окончательно находим

$$z(x, y) = \int_0^y \left(2\cos t - \frac{1}{2} t \sin t\right) I_0\left(2\sqrt{x(y-t)}\right) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \sin y \cos x - \frac{1}{2} y \cos(x+y). \blacktriangleright$$

Проинтегрировать следующие линейные уравнения в частных производных:

3.38. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = \cos x; \quad z(0, y) = y, \quad z'_x(0, y) = 0.$

3.39. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} - a^2 z = f(x); \quad z(0, y) = -y, \quad z'_x(0, y) = 0.$

§ 4. Импульсные функции

1. Импульсная функция 1-го порядка $\delta(t)$. Определим *δ-функцию Дирака* как предел при $h \to 0$ функции

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{при } -\infty < t < 0 \text{ и } h < t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

(рис. 115). Суммарный эффект действия этой функции, называемый также ее *интенсивностью*, равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)\, dt = 1.$$

Полагаем

$$\delta(t) = \lim_{h \to \infty} \delta_h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ +\infty & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

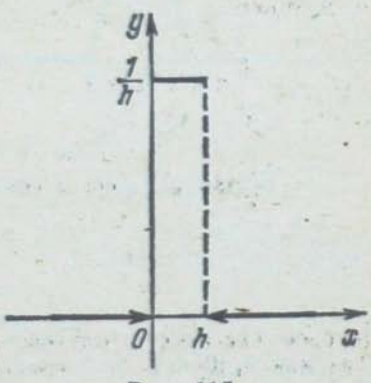


Рис. 115.

Можно определить δ-функцию и с помощью предела при $h \to 0$ функции

$$\delta_h^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{h^2}(t-h) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{при } h < t < +\infty, \\ \delta_h^*(-t) & \text{при } -\infty < t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

(рис. 116), для которой также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h^*(t)\,dt = 1.$$

Свойства импульсной функции $\delta(t)$:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$.

2. $\int_{a}^{T} \delta(t)\,dt = \eta(T) - \eta(a)$.

Здесь $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда, рассматриваемая как предел при $h \longrightarrow 0$ функции $\eta_h(t)$, где

$$\eta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}t & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant h, \\ 1 & \text{при} \quad h < t < +\infty, \\ 0 & \text{при} \quad -\infty < t < 0 \end{cases}$$

(рис. 117). В этом смысле мы можем считать, что $\delta(t) = \eta'(t)$.

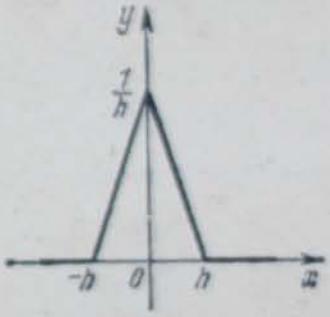


Рис. 116.

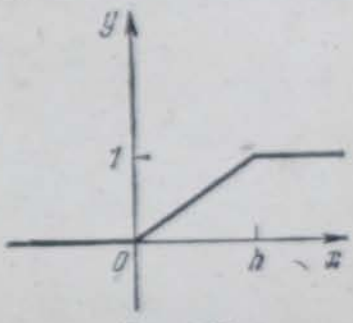


Рис. 117.

3. $\delta(-t) = \delta(t)$. 4. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

5. Если $f(t) = 0$ при $t = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $f'(a_k) \neq 0$ (все корни $f(t)$ простые), то

$$\delta(f(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(t - a_k)}{|f'(a_k)|}.$$

2. Импульсная функция 2-го порядка $\delta_1(t)$. Функцию $\delta_1(t)$ можно определить как предел при $h \longrightarrow 0$ производной определенной в (2) функции $\delta_h^*(t-h)$, т. е.

$$\delta_{1,h}^*(t) = (\delta_h^*(t-h))' = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & \text{при} \quad 0 \leqslant t < h, \\ -\frac{1}{h^2} & \text{при} \quad h \leqslant t < 2h, \\ 0 & \text{при} \quad -\infty < t < 0 \text{ и } 2h \leqslant t < +\infty; \end{cases}$$

$\delta_1(t)$ удовлетворяет условиям:

1. $\delta_1(t)=0$ при $t\neq 0$.
2. $\delta_1(-0)=+\infty$, $\delta_1(+0)=-\infty$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{t}\delta_1(\tau)\,d\tau=\delta(t)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_1(t)\,dt=0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\int\limits_{-\infty}^{t}\delta_1(\tau)\,d\tau=1$.

3. Изображения импульсных функций и их применение. Под изображением функции $\delta(t)$ будем понимать предел изображения либо функции $\delta_h(t)$, либо функции $\delta_h^*(t-h)$ при $h\to 0$. При этом в первом случае изображение для $\delta_h(t)$ находится непосредственно, а во втором изображение для $\delta_h^*(t-h)$ находится через изображение ее производной $(\delta_h^*(t-h))'_t=\delta_{1,h}(t)$. В самом деле, имеем

$$\delta_h(t)=\frac{\eta(t)-\eta(t-h)}{h}$$

и

$$\delta_{1,h}(t)=(\delta_h^*(t-h))'_t=\frac{\eta(t)-2\eta(t-h)+\eta(t-2h)}{h^2}.$$

Поэтому

$$\delta_h(t)\doteqdot\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-ph}\right)=\frac{1-e^{-ph}}{ph}$$

и

$$\delta_{1,h}(t)\doteqdot\frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2e^{-ph}}{p}+\frac{e^{-2ph}}{p}\right)=\frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2}.$$

Из этих выражений находим, что

$$\delta(t)\doteqdot\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=1$$

и

$$\delta_1(t)\doteqdot\lim_{h\to 0}\frac{(1-e^{-ph})^2}{ph^2}=p.$$

Приведем примеры на применение импульсных функций.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $x''(t)=\delta(t)$ при нулевых начальных условиях. Объяснить результат.

◀ Составляем операторное уравнение $p^2X(p)=1$, откуда $X(p)=\frac{1}{p^2}$ и $x(t)=t$. Таким образом, импульсная функция 1-го порядка сообщает материальной точке единичной массы равномерное прямолинейное движение с единичной скоростью. ▶

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $x''(t)=\delta_1(t)$ при нулевых начальных условиях.

◀ Составляем операторное уравнение $p^2X(p)=p$, откуда $X(p)=\frac{1}{p}$ и $x(t)=1$ $(t>0)$. Таким образом, импульсная функция 2-го порядка сообщает материальной точке единичной массы мгновенное перемещение на единицу длины без дальнейшего движения. ▶

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

4.1. $x'' + \omega^2 x = v_0 \delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

4.2. $x'' + \omega^2 x = v_1 \delta(t - \tau) + h\delta_1(t - \tau_1)$; $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$.

4.3. $x'' + \omega^2 x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \cdot \delta(t - \tau)$ при произвольных начальных условиях.

4.4.** $x'' = v_0 \delta(\sin \omega t)$ при нулевых начальных условиях.

§ 5. Приложения операционного исчисления к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, вычислению несобственных интегралов и суммированию рядов

1. Решение линейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Используя теорему свертывания, можно легко найти изображения решений интегральных уравнений Вольтерра 1-го и 2-го рода (а в простейших случаях по найденному изображению найти и само решение) в том случае, когда ядром в соответствующем уравнении служит функция вида $K(t - \tau)$, где $K(t)$ — оригинал. Этот метод применим и к интегро-дифференциальным уравнениям с таким же ядром.

Пример 1. Найти решение *уравнения Вольтерра 1-го рода*

$$\int_0^t \cos(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau = t \cos t.$$

◀ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$; так как

$$\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2 + 1}, \quad t \cos t \doteqdot \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

$$\int_0^t \cos(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{pX(p)}{p^2 + 1}$$

(по теореме свертывания), то приходим к операторному уравнению

$$\frac{pX(p)}{p^2 + 1} = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2},$$

откуда

$$X(p) = \frac{p^2 - 1}{p(p^2 + 1)} = \frac{2p}{p^2 + 1} - \frac{1}{p}.$$

Таким образом, $x(t) = 2 \cos t - 1$. ▶

Пример 2. Найти решение уравнения $x'' + x = \sin t + \int_0^t \sin(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau$ при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

◀ Полагая $x(t) \risingdotseq X(p)$, имеем

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p) - 1, \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

$$\int_0^t \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{X(p)}{p^2+1}.$$

Получаем операторное уравнение

$$(p^2+1)\, X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+1} + \frac{X(p)}{p^2+1},$$

или

$$((p^2+1)^2 - 1)\, X(p) = p^2 + 2.$$

Отсюда находим $X(p) = \frac{1}{p^2}$ и $x(t) = t$. ▶

Решить следующие интегральные и интегро-дифференциальные уравнения:

5.1. $\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$

5.2. $3\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x(t) - e^{-t}.$

5.3. $\int_0^t e^{t-\tau} \sin(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + e^t(1-\cos t);$

$$x(0) = x'(0) = 1.$$

5.4. $\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = x'' - x' + \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t;$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Проинтегрировать *уравнения Абеля:*

5.5. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \pi.$

5.6. $\int_0^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = t^\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad \beta > -1.$

2. Вычисление несобственных интегралов. Один из способов вычисления несобственных интегралов вида $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ основан на при-

менении теоремы операционного исчисления о связи «конечного» значения оригинала и «начального» значения изображения: если $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty) = \lim\limits_{p \to 0} p\Phi(p)$ (см. § 1, свойство 12, б)).

Из этой теоремы и соотношения

$$\int_0^t f(t)\,dt = \frac{1}{p} F(p) \quad (f(t) \risingdotseq F(p))$$

при условии сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt$ следует соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = F(0). \tag{1}$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

◀ Так как $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, то по теореме интегрирования изображения имеем

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} \frac{dq}{q^2+1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p,$$

поэтому по формуле (1) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{t} = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Пусть функции $f(t, u)$ и $\psi(t) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\,du$ являются оригиналами и $f(t, u) \risingdotseq F(p, u)$. Тогда, применяя теорему об интегрировании по параметру, будем иметь

$$\psi(t) \risingdotseq \Psi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) F(p, u)\,du.$$

Поэтому, если интеграл, определяющий $\Psi(p)$, можно вычислить, то для отыскания интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(u) f(t, u)\,du$ достаточно найти ориги-

нал для $\Psi(p)$, т. е.

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u)\, f(t, u)\, du \doteqdot \int_0^{+\infty} \varphi(u)\, F(p, u)\, du. \qquad (2)$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2}$.

◀ Имеем $\cos tu \doteqdot \frac{p}{p^2+u^2}$. Поэтому (по формуле (2))

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} \doteqdot \int_0^{+\infty} \frac{p\, du}{(p^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{du}{\alpha^2+u^2} - \frac{du}{p^2+u^2} \right) =$$

$$= \frac{p}{p^2-\alpha^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p} \right) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{p+\alpha}.$$

Но $\frac{1}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha t}$. Отсюда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu\, du}{\alpha^2+u^2} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha t}. \ ▶$$

Еще один способ вычисления несобственных интегралов при помощи операционного исчисления дает

Теорема Парсеваля. *Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ и функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ аналитичны при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, то*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u)\, F_2(u)\, du = \int_0^{+\infty} F_1(v)\, f_2(v)\, dv. \qquad (3)$$

При этом из сходимости одного из этих интегралов следует сходимость другого[1]).

Пример 5. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u}{u} du$, $\alpha > 0$.

◀ Имеем $e^{-\alpha t} \sin \beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$, $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}$. Полагая $f_1(u) = e^{-\alpha u} \sin \beta u$, $F_2(u) = \frac{1}{u}$, имеем $F_1(v) = \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}$, $f_2(v) = \eta(v)$.

---

[1]) Если для одной из функций $F_1(p)$ или $F_2(p)$ условие аналитичности выполнено лишь при $\operatorname{Re} p > 0$, то сходимость одного из интегралов может не иметь места.

Поэтому по формуле (3)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u \, du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{\beta \eta(v) \, dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2} = \beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2}$$

($\eta(v) = 1$, так как $v > 0$). Но

$$\beta \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(v+\alpha)^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{v+\alpha}{\beta} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} \sin \beta u \, du}{u} = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright$$

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (1):

5.7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \cos \gamma t}{t} \, dt, \quad \alpha, \beta > 0.$

5.8*. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\mu} e^{-\alpha t} \ln t \, dt, \quad \alpha > 0, \quad \mu > -1.$

Вычислить несобственные интегралы, используя формулу (2):

5.9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u \sin tu \, du}{u^2 + \alpha^2}.$ **5.10.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \, du.$

Вычислить несобственные интегралы, используя теорему Парсеваля (формула (3)):

5.11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}}{\sqrt{u}} \, du, \quad \alpha, \beta > 0.$

5.12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha u - \sin \beta u}{u \sqrt{u}} \, du, \quad \alpha, \beta > 0;$

5.13*. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \, dx, \quad \alpha, \beta > 0.$

3. Суммирование рядов. Методы операционного исчисления могут быть использованы при суммировании числовых и функциональных рядов.

Пример 6. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geqslant k$). Доказать, что сумма S ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ может быть найдена по формуле

$$S = (\pm 1)^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\, dt}{1 \mp e^{-t}}. \tag{4}$$

◀ По условию $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$. Имеем: $\dfrac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \mp e^{-t}} = \sum\limits_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$. Поэтому

$$(\pm 1)^k \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)\, dt}{1 \mp e^{-t}} = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}\, dt =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int\limits_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n). \ ▶$$

Используя формулу (4), найти суммы следующих числовых рядов:

5.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)^2}$. **5.15**.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{2}{n^2}$.

5.16*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$. **5.17*.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{3}{n^2+3n+1}$.

Пример 7. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \geqslant 0$). Пусть, кроме того, $\Phi(t, x)$ — производящая функция бесконечной последовательности функций $\varphi_n(x)$, т. е.

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\, t^n.$$

Доказать, что сумма $S(x)$ сходящегося на $[a, b]$ функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n)\, \varphi_n(x)$ может быть найдена по формуле

$$S(x) = \int\limits_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x)\, f(t)\, dt. \tag{5}$$

◀ Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt}\, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x). \blacktriangleright$$

Используя формулу (5), с помощью подходящей производящей функции просуммировать следующие ряды:

5.18*. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.19*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

5.20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, \pi)$.

5.21*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}, \quad x \in (0, \pi)$.

§ 6. Дискретное преобразование Лапласа и его применение

1. Z-преобразование и дискретное преобразование Лапласа. *Z-преобразованием* числовой (действительной или комплексной) бесконечной последовательности (a_n) называется функция комплексной переменной $F(z)$, определяемая следующим образом:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \tag{1}$$

Если последовательность (a_n) удовлетворяет условию $|a_n| < Me^{\alpha n}$ ($M > 0$, α — постоянные), то функция $F(z)$ будет аналитической в области $|z| > e^{\alpha}$, т. е. вне круга с центром в нулевой точке и радиусом $R = e^{\alpha}$.

Формула (1) дает разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки (являющейся правильной точкой $F(z)$), поэтому для восстановления последовательности (a_n) по ее Z-преобразованию надо $F(z)$ любым способом разложить в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки; в частности, можно воспользоваться формулой для определения коэффициентов этого разложения

(см. формулу (2) § 5 гл. 12)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz \tag{2}$$

(C — контур, внутри которого лежат все особые точки функции $F(z)$ [1]).

Пример 1. Восстановить (a_n) по ее Z-преобразованию $F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$.

◀ Имеем: $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{(a-b)z}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}} - \frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right) = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n - b^n}{z^{n+1}}$. Таким образом, $(a_n) = \left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}\right)$ при $n \geqslant 1$, $a_0 = 0$. ▶

Введем вместо последовательности (a_n) решетчатую функцию $f(n)$, полагая $a_n = f(n)$. По-прежнему $f(n)$ удовлетворяет условию $|f(n)| < Me^{\alpha n}$, и примем дополнительно, что $f(n) = 0$ при $n < 0$: такие решетчатые функции будем называть *дискретными оригиналами*. *Дискретное преобразование Лапласа* функции $f(n)$ мы получим, если в Z-преобразовании положим $z = e^q$:

$$F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq}. \tag{3}$$

Связь между дискретным оригиналом $f(n)$ и его изображением $F^*(q)$ обозначают символом $f(n) \risingdotseq F^*(q)$ (иногда пишут $F^*(q) = D[f(n)]$. Изображение $F^*(q)$ — функция комплексной переменной с периодом 2π, при этом в основной полосе $-\pi < \operatorname{Im} q \leqslant \pi$ она аналитична при $\operatorname{Re} q > \alpha$. Таким образом, все ее особые точки лежат в этой полосе слева от прямой $\operatorname{Re} q = \alpha$.

Из формулы (3) вытекает следующая формула обращения дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \pi i}^{\gamma + \pi i} F^*(q) e^{nq} dq. \tag{4}$$

Пример 2. $f(n) = a^n$, найти $F^*(q)$.

◀ Имеем $F^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-nq} = \frac{1}{1 - ae^{-q}} = \frac{e^q}{e^q - a}$; а потому $a^n \risingdotseq \frac{e^q}{e^q - a}$. Полагая $a = 1$, получим $1^n = \eta(n) \risingdotseq \frac{e^q}{e^q - 1}$. ▶

---

[1]) Формула (2) является фактически формулой обращения Z-преобразования.

Свойства дискретного преобразования Лапласа (всюду ниже предполагается $f_j(n) \risingdotseq F_j^*(q)$):

1. Линейность:

$$\sum_{j=1}^{r} C_j f_j(n) \risingdotseq \sum_{j=1}^{r} C_j F_j^*(q).$$

2. Формула смещения:

$$e^{\alpha n} f(n) \risingdotseq F^*(q-\alpha).$$

3. Формулы запаздывания и опережения:

а) $$f(n-k) \risingdotseq e^{-kq} F^*(q),$$

б) $$f(n+k) \risingdotseq e^{kq}\left(F^*(q) - \sum_{r=0}^{k-1} f(r)\, e^{-rq}\right).$$

4. Дифференцирование по параметру:

если $f(n, x) \risingdotseq F^*(q, x)$, то $\dfrac{\partial f(n, x)}{\partial x} \risingdotseq \dfrac{\partial F^*(q, x)}{\partial x}$.

5. Дифференцирование и интегрирование изображения:

а) $$n^k f(n) \risingdotseq (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} F^*(q),$$

б) $$\frac{f(n)}{n} \risingdotseq \int_q^{\infty} (F^*(s) - f(0))\, ds \quad (n \geqslant 1).$$

6. Изображение конечных разностей оригинала:

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^q - 1)^k F^*(q) - e^q \sum_{r=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-r-1} \Delta^r f(0).$$

7. Изображение конечных сумм оригинала:

если $g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, то $g(n) \risingdotseq \dfrac{F^*(q)}{e^q - 1}$.

8. Умножение изображений: если

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{r=0}^{n} f_1(r)\, f_2(n-r)$$

(это — так называемая «свертка» оригиналов), то

$$f_1(n) * f_2(n) \risingdotseq F_1^*(q) \cdot F_2^*(q).$$

Приведем таблицу изображений основных решетчатых функций:

№	$f(n)$	$F^*(q)$
1	$f(n)=\begin{cases} C, & n=0, \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$	C
2	$\eta(n)=\begin{cases} 1, & n\geqslant 0, \\ 0, & n<0 \end{cases}$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
3	a^n	$\dfrac{e^q}{e^q-a}$
4	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^\alpha}$
5	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
6	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$
7	$\dfrac{n^{(2)}}{2!}=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_n^2$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^3}$
8	$\dfrac{n^{(k)}}{k!}=\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=C_n^k$	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^{k+1}}$
9	$\sin\beta n$	$\dfrac{e^q\sin\beta}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
10	$\cos\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}$
11	$\operatorname{sh}\beta n$	$\dfrac{e^q\operatorname{sh}\beta}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
12	$\operatorname{ch}\beta n$	$\dfrac{e^q(e^q-\operatorname{ch}\beta)}{e^{2q}-2e^q\operatorname{ch}\beta+1}$
13	$\dfrac{n^{(k)}}{k!}e^{\alpha n}=C_n^k e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^{q+k\alpha}}{(e^q-e^\alpha)^{k+1}}$
13'	$\dfrac{n^{(k)}}{k!}a^n=C_n^k a^n$	$\dfrac{a^k e^q}{(e^q-a)^{k+1}}$

Пример 3. Найти изображение функции $f(n)=e^{\alpha n}\sin\beta n$.

◀ Применяем теорему смещения (свойство 2) и, используя формулу 9 таблицы изображений, находим $e^{\alpha n}\sin\beta n \risingdotseq F(q-\alpha)=$ $=\dfrac{e^{q-\alpha}\sin\beta}{e^{2(q-\alpha)}-2e^{q-\alpha}\cos\beta+1}=\dfrac{e^{q+\alpha}\sin\beta}{e^{2q}-2e^{q+\alpha}\cos\beta+e^{2\alpha}}$. В частности,

$$a^n\sin\beta n=e^{n\ln a}\sin\beta n \risingdotseq \frac{ae^q\sin\beta}{e^{2q}-2ae^q\cos\beta+a^2}. \blacktriangleright$$

Найти изображения следующих решетчатых функций:

6.1. $f(n)=e^{\alpha n}\cos\beta n$. **6.2.** $f(n)=a^n\cos\beta n$.

6.3. $f(n)=n^2e^{\alpha n}$. **6.4.** $f(n)=n^2a^n$.

6.5*. $f(n)=\frac{(n-1)^{[k]}}{k!}=C_{n-1}^k$. **6.6*.** $f(n)=\frac{(n+m)^{[k]}}{k!}=C_{n+m}^k$.

6.7.** $f(n)=\frac{\sin\beta n}{n}$.

Пример 4. Найти решетчатую функцию $f(n)$ по ее изображению $F^*(q)=\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}$.

◀ Первый способ. Разложим $\frac{F^*(q)}{e^q}=\frac{1}{(e^{2q}-9)^2}$ на простейшие дроби, положив $e^q=z$:

$$\frac{1}{(z^2-9)^2}=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{(z-3)^2}+\frac{1}{(z+3)^2}\right)-\frac{1}{108}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+3}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{e^{2q}}{(e^{2q}-9)^2}=\frac{1}{108}\left(\frac{3e^q}{(e^q-3)^2}+\frac{3e^q}{(e^q+3)^2}-\frac{e^q}{e^q-3}+\frac{e^q}{e^q+3}\right).$$

Но по формулам 3 и 13′ таблицы изображений имеем:

$$\frac{e^q}{e^q-3}\risingdotseq 3^n,\quad \frac{e^q}{e^q+3}\risingdotseq(-3)^n,$$

$$\frac{3e^q}{(e^q-3)^2}\risingdotseq n3^n,\quad \frac{3e^q}{(e^q+3)^2}\risingdotseq -n(-3)^n.$$

Отсюда после элементарных преобразований находим:

$$\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}\risingdotseq\frac{3^{n-3}(n-1)(1-(-1)^n)}{4}.$$

Второй способ. Переходим к Z-преобразованию (полагая $e^q=z$): $\frac{e^q}{(e^{2q}-9)^2}=\frac{z}{(z^2-9)^2}$. Используя формулу обращения (2) и применяя теорему о вычетах, получаем

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{z}{(z^2-9)^2}z^{n-1}\,dz=$$

$$=\text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};3\right]+\text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};-3\right];$$

но

$$\text{выч}\left[\frac{z^n}{z^2-9};3\right]=\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{(z+3)^2}\right)=\lim_{z\to 3}\left(\frac{nz^{n-1}}{(z+3)^2}-\frac{2z^n}{(z+3)^3}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot 3^{n-3}}{4}.$$

Аналогично

$$\text{выч}\left[\frac{z^n}{(z^2-9)^2};\ -3\right]=-(-1)^n\frac{(n-1)\,3^{n-2}}{4}.$$

Суммируя эти вычеты, приходим к прежнему результату. ▶

Найти решетчатые функции по их изображениям

6.8. $F^*(q)=\dfrac{e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4)}$. **6.9.** $F^*(q)=\dfrac{e^q}{e^{4q}+1}$.

6.10. $F^*(q)=\dfrac{e^{2q}}{e^{2q}+2e^q+2}$.

Пример 5. Найти сумму $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos k\beta$.

◀ Используем свойство 7 дискретного преобразования Лапласа:

$$f(n)\risingdotseq\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=F^*(q),$$

поэтому

$$S_n\risingdotseq\frac{F^*(q)}{e^q-1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}.$$

Разлагая на простейшие множители дробь

$$(e^q-\cos\beta)/(e^q-1)/(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)$$

и добавляя множитель e^q, находим

$$\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{(e^q-1)(e^{2q}-2e^q\cos\beta+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^q}{e^q-1}-\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\right).$$

Но $\dfrac{e^q}{e^q-1}\risingdotseq\eta(n)$ (формула 2 таблицы изображений). Следовательно,

$$\frac{e^q(e^q-2\cos\beta-1)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}=\frac{e^q(e^q-\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}-\frac{e^q(1+\cos\beta)}{e^{2q}-2e^q\cos\beta+1}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\cos\beta n-\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta}\sin\beta n.$$

Таким образом,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\eta(n)-\cos\beta n+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\sin\beta n\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n-1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\ (n\geqslant 1).\ ▶$$

Найти следующие суммы:

6.11. $\sum\limits_{k=r}^{n-1}\dfrac{k^{[r]}}{r!}=\sum\limits_{k=r}^{n-1}C_k^r$. **6.12.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1}2^k\sin k\beta$;

6.13*. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 (n-k)^2$.

Пример 6. Найти сумму степенного ряда

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)t^n=1+\sqrt{2}\,t+t^2-t^4-\sqrt{2}\,t^5-t^6+\ldots$$

◀ Данный ряд сходится при $|t|<1$, так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Заменяя t на e^{-q}, приходим к дискретному изображению функции $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}$:

$$F^*(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)e^{-nq}.$$

Но

$$\cos\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\left(e^q-\cos\frac{\pi}{4}\right)}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1};\quad \sin\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^q\cos\frac{\pi}{4}+1}$$

(см. формулы 9 и 10 таблицы изображений). Поэтому

$$f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\risingdotseq\frac{e^q\left(e^q-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+e^q\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}=$$

$$=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}\,e^q+1}.$$

Отсюда, возвращаясь к аргументу t, находим

$$S(t)=\frac{t^{-2}}{t^{-2}-\sqrt{2}\,t^{-1}+1}=\frac{1}{1-t\sqrt{2}+t^2}.\ ▶$$

Найти суммы следующих степенных рядов:

6.14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}\,t^n$.

6.15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right)t^n$.

2. Решение разностных уравнений. Пусть дано уравнение

$$a_0x(n+k)+a_1x(n+k-1)+\ldots+a_kx(n)=\varphi(n) \qquad (5)$$

($a_0, a_1, \ldots, a_k$ — постоянные) с заданными (или произвольными) начальными условиями: $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$, $\ldots$, $x(k-1)=x_{k-1}$. Правая часть уравнения (5) — решетчатая функция $\varphi(n)$ — предполагается оригиналом.

Полагая $x(n) \risingdotseq X^*(q)$ и применяя формулу опережения (свойство 3, б)), составляем операторное уравнение (оно линейно относительно $X^*(q)$) и определяем из него $X^*(q)$. Затем одним из способов, изложенных в п. 1, по изображению найдем искомое решение $x(n)$.

Если исходное уравнение было задано не через последовательные значения неизвестной функции, а через ее конечные разности, т. е. имеет вид

$$b_0\Delta^k x(n) + b_1\Delta^{k-1}x(n) + \ldots + b_k x(n) = \varphi(n), \qquad (6)$$

то вследствие громоздкости формул для отыскания изображений конечных разностей решетчатых функций (п. 1, свойство 6) его следует предварительно преобразовать к виду (5) при помощи известных формул, связывающих конечные разности функции с ее последовательными значениями:

$$\Delta^r x(n) = \\ = x(n+r) - C_r^1 x(n+r-1) + C_r^2 x(n+r-2) + \ldots + (-1)^r x(n). \qquad (7)$$

Аналогично решаются и системы разностных уравнений.

Пример 7. Решить уравнение $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

◀ Полагаем $x_n \risingdotseq X^*(q)$. По формуле опережения находим:

$$x_{n+1} \risingdotseq e^q(X^*(q) - x_0) = e^q(X^*(q) - 1) = e^q X^*(q) - e^q,$$
$$x_{n+2} \risingdotseq e^{2q}(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q}(X^*(q) - 1 - 2e^{-q}) = \\ = e^{2q}X^*(q) - e^{2q} - 2e^q.$$

Внося эти выражения в исходное уравнение, приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q} - e^q + 1)\, X^*(q) = e^{2q} + e^q.$$

Таким образом,

$$X^*(q) = \frac{e^{2q} + e^q}{e^{2q} - e^q + 1}.$$

Так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $X^*(q)$ запишем в следующем виде:

$$X^*(q) = \frac{e^q\left(e^q - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}e^q}{e^{2q} - 2e^q\cdot\frac{1}{2} + 1} = \frac{e^q\left(e^q - \cos\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\,e^q\sin\frac{\pi}{3}}{e^{2q} - 2e^q\cos\frac{\pi}{3} + 1}.$$

Отсюда по формулам 10 и 11 таблицы изображений п. 1 находим

$$x_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{2n+1}{6}\pi. \ ▶$$

Замечание. Записать ответ в форме $x_n = 2\cos\frac{n-1}{3}\pi$ нельзя, так как в этом случае получим $x_0 = 0 \neq 1$ (по условию равенства нулю решетчатой функции от отрицательного аргумента).

Пример 8. Решить уравнение $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 3^n$ при произвольных начальных условиях x_0, x_1.

◀ Полагая $x_n \risingdotseq X^*(q)$ и используя приведенные при решении примера 1 изображения

$$x_{n+1} \risingdotseq e^q X^*(q) - x_0 e^q, \quad x_{n+2} \risingdotseq e^{2q} X^*(q) - x_0 e^{2q} - x_1 e^q,$$

приходим к операторному уравнению

$$(e^{2q} - 4e^q + 4)\, X^*(q) - x_0 e^{2q} - (x_1 - 4x_0)\, e^q = \frac{e^q}{e^q - 3}$$

$\left(\text{поскольку по формуле 3 таблицы п. 1} \quad 3^n \risingdotseq \dfrac{e^q}{e^q - 3}\right)$. Отсюда находим

$$X^*(q) = \frac{x_0 e^{2q}}{(e^q - 2)^2} + (x_1 - 4x_0) \frac{e^q}{(e^q - 2)^2} + \frac{e^q}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}.$$

Разлагая дробь $\dfrac{1}{(e^q - 3)(e^q - 2)^2}$ на простейшие, имеем

$$X^*(q) = x_0 \frac{e^{2q}}{(e^q - 2)^2} + (x_1 - 4x_0 - 1) \frac{e^q}{(e^q - 2)^2} - \frac{e^q}{e^q - 2} + \frac{e^q}{e^q - 3}.$$

Но

$$\frac{e^q}{e^q - 3} \risingdotseq 3^n, \quad \frac{e^q}{e^q - 2} \risingdotseq 2^n,$$

$$\frac{2e^q}{(e^q - 2)^2} \risingdotseq n \cdot 2^n, \quad \frac{2e^{2q}}{(e^q - 2)^2} \risingdotseq (n+1)\, 2^{n+1}$$

(последнее соотношение следует из предыдущего по формуле опережения). Переходя от $X^*(q)$ к оригиналу, находим:

$$x_n = x_0 \frac{n+1}{2} 2^{n+1} + \frac{x_1 - 4x_0 - 1}{2} n \cdot 2^n - 2^n + 3^n =$$

$$= \frac{x_1 - 2x_0 - 1}{2} n \cdot 2^n + (x_0 - 1)\, 2^n + 3^n = (C_1 + C_2 n)\, 2^n + 3^n. \ ▶$$

Пример 9. Решить систему разностных уравнений

$$x_{n+2} - y_n = 0,$$
$$y_{n+2} + x_n = 0$$

при начальных условиях $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 0$.

◀ Полагаем $x_n \risingdotseq X^*(q)$, $y_n \risingdotseq Y^*(q)$ и по формуле опережения имеем:

$$x_{n+2} \risingdotseq e^{2q}(X^*(q) - x_0 - x_1 e^{-q}) = e^{2q} X^*(q) - e^{2q} - \sqrt{2} e^q,$$
$$y_{n+2} \risingdotseq e^{2q}(Y^*(q) - y_0 - y_1 e^{-q}) = e^{2q} Y^*(q) - e^{2q}.$$

Получаем систему операторных уравнений

$$e^{2q} X^*(q) - Y^*(q) = e^{2q} + \sqrt{2} e^q,$$
$$e^{2q} Y^*(q) + X^*(q) = e^{2q}.$$

Так как $e^{4q} + 1 = (e^{2q} + \sqrt{2} e^q + 1)(e^{2q} - \sqrt{2} e^q + 1)$, то решение

этой системы запишется в виде

$$X^*(q)=\frac{e^{2q}+\sqrt{2}e^{2q}+e^{2q}}{e^{2q}+1}=\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1},$$

$$Y^*(q)=\frac{e^{2q}-e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{2q}+1}=\frac{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}.$$

Применяя формулу опережения, имеем:

$$\frac{e^{2q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}=\sqrt{2}\,\frac{e^{q}\cdot e^{q}\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^{q}\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteq\sqrt{2}\sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\frac{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}}{e^{2q}-\sqrt{2}e^{q}+1}=\frac{e^{q}\left(e^{q}-\cos\frac{\pi}{4}\right)-e^{q}\sin\frac{\pi}{4}}{e^{2q}-2e^{q}\cos\frac{\pi}{4}+1}\doteq$$

$$\doteq\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$x_n=\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4},\quad y_n=\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}.\ \blacktriangleright$$

Решить следующие линейные разностные уравнения:

6.16. $x_{n+2}-3x_{n+1}-10x_n=0;\quad x_0=3,\ x_1=-4.$

6.17. $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0;\quad x_0=1,\quad x_1=-1.$

6.18. $x_{n+2}-\sqrt{3}\,x_{n+1}+x_n=0;\quad x_0=\frac{1}{2},\quad x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

6.19. $x_{n+3}-3x_{n+1}+2x_n=0;$ начальные условия произвольные.

6.20. $x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n=2^n;\quad x_0=x_1=0,\quad x_2=1.$

6.21. $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=2\cdot 4^n;$ начальные условия произвольные.

Решить системы линейных разностных уравнений:

6.22.

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n+y_n&=3^n,\\ y_{n+1}+2x_n&=-3^n;\end{aligned}\qquad x_0=3,\quad y_0=0.$$

6.23.

$$\begin{aligned}5x_{n+1}-12x_n-y_n&=0;\\ 5y_{n+1}-6x_n-13y_n&=0;\end{aligned}$$

начальные условия произвольные.

1.1. $\frac{1}{p}$. 1.2. $\frac{1}{p-\alpha}$. 1.3. $\frac{6}{(p^2-1)(p^2-9)}$. 1.4. $\frac{p^2+2}{p^4+4}$

1.5 $\frac{2}{(p^2+1)^2}$, $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. 1.6. $\frac{p(p^2+3)}{(p^2+1)^2}$, $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$

1.7. $\frac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$, $\frac{2p}{(p+1)(p^2+2p+2)}$. 1.8. $\frac{p^2}{p^4+4}$, $\frac{p^3}{p^4+4}$.

1.9. $-\frac{1}{2p}\ln\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$. 1.10. $\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$. 1.11. $\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$

1.1 . $\frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$. 1.13. $\frac{1}{p}\ln\frac{p-\alpha}{p-\beta}$. 1.14. $\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$, $\frac{\alpha e^{\alpha t}-\beta e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$

$\frac{\beta e^{\alpha t}-\alpha e^{\beta t}}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}+\frac{1}{\alpha\beta}$. 1.15. $\frac{t}{2\beta}\sin\beta t$, $\frac{1}{2}\left(t\cos\beta t+\frac{1}{\beta}\sin\beta t\right)$,

$\frac{1}{2\beta^3}(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t)$. 1.16. $\frac{\operatorname{ch}\alpha t-\cos\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$, $\frac{\alpha\operatorname{sh}\alpha t+\beta\sin\beta t}{\alpha^2+\beta^2}$,

$\frac{\beta\operatorname{sh}\alpha t-\alpha\sin\beta t}{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$. 1.17. $\frac{e^{-\alpha t}(1-\cos\beta t)}{\beta^2}$, $\frac{e^{-\alpha t}(\beta\sin\beta t-\alpha(1-\cos\beta t))}{\beta^3}$,

$\frac{1}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha\beta^2}+\frac{e^{-\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}$. 1.18. $\frac{1}{5}(\sin t-2\cos t)+$

$+\frac{1}{5}e^{-t}(\sin t+2\cos t)$, $\frac{1}{5}(\cos t+2\sin t)-\frac{1}{5}e^{-t}(3\sin t+\cos t)$,

$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}(\cos t+2\sin t)+\frac{1}{10}e^{-t}(\sin t-3\cos t)$. 1.19. $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})$.

1.20. $\frac{1}{p}(1-e^{-p\tau})e^{-pT}$. 1.21. $\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-p\tau}-e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau})$.

1.22. $\frac{1}{p^2+1}\left(1+e^{-\frac{p\pi}{2}}\right)\left(1-pe^{-\frac{p\pi}{2}}\right)$. 1.23. $h\left(\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}}{p(p-1)}\right)$.

1.24. $\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p^2e^{-p\pi}}{p^4+1}$. 1.25. ◀ Функцию $f_0(t)$ можно записать в виде $f_0(t)=(1-\eta(t-l))f(t)=f(t)-\eta(t-l)f(t-l)$ (поскольку $f(t)=f(t-l)$ при $t>l$ в силу периодичности). Отсюда $F_0(p)=$ $=F(p)-e^{-pl}F(p)$, или $F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pl}}$. ▶ 1.26. $\frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pT})}$.

1.27. $\frac{\beta\operatorname{cth}\frac{p\pi}{2\beta}}{p^2+\beta^2}$. ● $f_0(t)=(1-\eta(t-\pi))\sin\beta t=\sin\beta t-$ $-\eta(t-\pi)\sin\left(\beta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)+\pi\right)=\sin\beta t+\eta(t-\beta)\sin\beta\left(t-\frac{\pi}{\beta}\right)$.

1.28. $\frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(1-e^{-pT})}$. 1.29. $\frac{h}{p}\operatorname{th}\frac{cp}{2}$. 1.30. $\frac{h}{cp^2}-\frac{he^{-pc}}{p(1-e^{-pc})}$.

1.31. $\frac{h}{cp^2}\operatorname{th}\frac{cp}{2}$. 1.32. $\frac{p+\beta e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}}{(p^2+\beta^2)\left(1-e^{-\frac{p\pi}{2\beta}}\right)}$. 1.33. $f(t)=$

$$=\frac{1}{2}\eta(t-2)(t-2)^2e^{-(t-2)},\ \text{т. е.}\ f(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<2\\ \frac{1}{2}(t-2)^2e^{-(t-2)} & \text{при } t\geqslant 2.\end{cases}$$

1.34. $f(t)=e^{2t}+\eta(t-1)+\eta(t-4)\sin 3(t-4)$, т. е. $f(t)=$

$$=\begin{cases}e^{2t} & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ e^{2t}+1 & \text{при } 1\leqslant t<4,\\ e^{2t}+1+\sin 3(t-4) & \text{при } t\geqslant 4.\end{cases}$$

1.35. $f(t)=\cos 2t-$

$-2\eta(t-1)\operatorname{ch}2\left(t-1+\frac{1}{4}\eta(t-3)\operatorname{sh}4(t-3)\right)$, т. е. $f(t)=$

$$=\begin{cases}\cos 2t & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ \cos 2t-2\operatorname{ch}(t-1) & \text{при } 1\leqslant t<3,\\ \cos 2t-2\operatorname{ch}(t-1)+\frac{1}{4}\operatorname{sh}4(t-3) & \text{при } t\geqslant 3.\end{cases}$$

1.36. $\dfrac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}$.

1.37. $\dfrac{1}{(p-\alpha)^{\mu+1}}\left(\dfrac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln(p-\alpha)\right)$. **1.38.** $-\dfrac{\gamma+\ln(p-\alpha)}{p-\alpha}$ (γ — постоянная Эйлера). **1.39.** $\dfrac{1}{2}\dfrac{(p+\beta i)^{\mu+1}+(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$. **1.40.** $\dfrac{1}{2i}\times$

$\times\dfrac{(p+\beta i)^{\mu+1}-(p-\beta i)^{\mu+1}}{(p^2+\beta^2)^{\mu+1}}$. **1.41.** $-\dfrac{\gamma p+\frac{p}{2}\ln(p^2+\beta^2)+\beta\operatorname{arctg}\frac{\beta}{p}}{p^2+\beta^2}$.

1.42. $\dfrac{p\operatorname{arctg}\frac{\beta}{p}-\beta\gamma-\frac{\beta}{2}\ln(p^2+\beta^2)}{p^2+\beta^2}$. **1.43.** $\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}\,e^{-\alpha p}$.

2.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$. **2.2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{n!\,(2n+1)!}$. **2.3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$

$\times\dfrac{t^n}{n!\,(2n+1)}$. **2.4.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}=I_0(t)$. **2.5.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}=$

$=\int\limits_0^t\dfrac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}d\tau$. **2.6.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{n!\,(2n)!}$. **2.7.** $e^tI_0(2\sqrt{t})$. ● Применить теорему смещения к оригиналу, полученному в примере 1 из § 2. **2.8.** Нельзя только для функций из задач 2.4 и 2.5 (для особых точек этих функций не имеет смысла понятие вычета). **2.9.** $e^{-2t}(\cos t-2\sin t)$.

2.10. $\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$. **2.11.** $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{p_kt}$.

2.12. $\dfrac{t}{8}(\operatorname{ch}t-\cos t)-\dfrac{3}{8}(\operatorname{sh}t-\sin t)$. **2.13.** $\dfrac{1}{10}t\cos t-\dfrac{7}{50}t\sin t+$

$+\dfrac{1}{50}\operatorname{sh}2t$. **2.14.** $\dfrac{1}{8}t(\operatorname{sh}t-\sin t)$. **2.15.** $\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}t+\dfrac{2}{3}\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t\sqrt{3}}{2}$.

2.16. $\frac{1}{8}t^2\cos t+\frac{3}{8}t\sin t$. **2.17.** $\frac{1}{2}(e^{3t}-e^t)$. **2.18.** $t-2\operatorname{sh} t+t\operatorname{ch} t$. **2.19.** $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t-\cos t)$. **2.20.** $\frac{1}{10}(\operatorname{ch} t+\cos t)-\frac{1}{5}\operatorname{ch} t\cos t$.

3.1. $x(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{6}\sin 3t$. **3.2.** $x(t)=\left(C_1+C_2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{2t}$. **3.3.** $x(t)=C_1+\left(C_2-\frac{t^2+t}{4}\right)e^{-2t}$. **3.4.** $x(t)=\left(C_1+\frac{t}{3}\right)e^t+C_2e^{-2t}$. **3.5.** $x(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t)$. **3.6.** $x(t)=e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+e^{-t}$. **3.7.** $x(t)=\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$. **3.8.** $x(t)=\frac{2}{9}(e^{-3t}-1)-\frac{t}{3}e^{-3t}$. **3.9.** $x(t)=\frac{2}{5}(1-e^t)\cos t+\frac{1}{5}(1+6e^t)\sin t$. **3.10.** $x(t)=\cos 2t-\frac{7}{8}\sin 2t-\frac{t}{4}\cos 2t$. **3.11.** $x(t)=\frac{25}{24}\operatorname{sh} 3t-\operatorname{ch} 3t-\frac{1}{8}\operatorname{sh} t$. **3.12.** $x(t)=3+t+(t-2)e^t$. **3.13.** $x(t)=\frac{t}{4}\operatorname{ch} t-\frac{1}{4}\sin t$. **3.14.** $x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$. **3.15.** $x(t)=1-e^{-t}-\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. **3.16.** $x(t)=\frac{t}{2}\sin t+\frac{1}{2}\eta(t-\pi)(t-\pi)\sin(t-\pi)$. **3.17.** $x(t)=\operatorname{ch} t-1-\frac{1}{e}\eta(t-1)\times(\operatorname{ch}(t-1)-1)$. **3.18.** $x(t)=2\left(\sin^2\frac{t}{2}-2\eta(t-1)\sin^2\frac{t-1}{2}+\eta(t-2)\sin^2\frac{t-2}{2}\right)$. **3.19.** $x(t)=1-e^{-t}-2\eta(t-1)(1-e^{-(t-1)})+\eta(t-2)(1-e^{-(t-2)})$. • Для построения операторного уравнения использовать теорему интегрирования оригинала. **3.20.** ◀ Уравнению $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=1$ при нулевых начальных условиях соответствует операторное уравнение $L(p)X_1(p)=\frac{1}{p}$, где $X_1(p)\doteqdot x_1(t)$, а $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$ — характеристический многочлен уравнения. Отсюда $L(p)=\frac{1}{pX_1(p)}$. Уравнению $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ при нулевых начальных условиях соответствует операторное уравнение $L(p)X(p)=F(p)$, где $X(p)\doteqdot x(t)$, а $F(p)\doteqdot f(t)$. Отсюда $X(p)=\frac{F(p)}{L(p)}=pX_1(p)F(p)$. С помощью интеграла Дюамеля (см. § 1, свойство 11) получаем $x(t)=x_1(0)f(t)+\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$ (так как

$x_1(0)=0)$, или $x(t)=f(0)\,x_1(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)\,x_1(t-\tau)\,d\tau$. ▶ **3.21.** $x(t)=$ $=\frac{1}{3}(e^t-1)-\frac{t}{9}e^t+\frac{1}{9}e^t\ln\frac{e^t+3}{4}$. **3.22.** $x(t)=\frac{1}{2}(e^t-1-te^t)+$ $+\operatorname{sh}t\ln\frac{1+e^t}{2}$. **3.23.** $x(t)=e^t-1-(t+\ln 2)(e^t+1)+(e^t+1)\ln(e^t+1)$.

3.24. $$x(t)=\sin t\left(t-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right)+\cos t\ln\frac{2+\cos t}{3}.$$

3.25. $x(t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)^2}\sin\tau\,d\tau$ (этот интеграл не выражается через элементарные функции). **3.26.** $x(t)=C_1+C_2\sin t+C_3\cos t$, $y(t)=$ $=C_4+C_3\sin t-C_2\cos t+\frac{t^2}{2}$. **3.27.** $x=C_1+C_2\operatorname{sh}t+C_3\operatorname{ch}t$, $y=$ $=C_4-C_3\operatorname{sh}t-C_2\operatorname{ch}t+\operatorname{ch}t+\cos t$. **3.28.** $x(t)=e^t$, $y(t)=-e^t$. **3.29.** $x(t)=t\cos t$, $y(t)=-t\sin t$. **3.30.** $x(t)=\sin t-\cos t$, $y(t)=$ $=\sin t+\cos t$. **3.31.** $x(t)=\sin t+\operatorname{sh}t$, $y(t)=\cos t+\operatorname{ch}t$. **3.32.** $x(t)=$ $=1+\frac{t^2}{2}$, $y(t)=t-e^t$. **3.33.** $x(t)=-\sin t$, $y(t)=-\cos t$, $z(t)=\sin t$.

3.34. $$x(t)=(1+t-\sin t-\cos t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$ $$\left.-\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\eta(t-\pi)\,(-1+(t-\pi)+\cos(t-\pi)-\sin(t-\pi)),$$ $$y(t)=(1-t+\sin t-\cos t)-2\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)+$$ $$+\eta(t-\pi)\,(1+(t-\pi)-\sin(t-\pi)-\cos(t-\pi)).$$ **3.35.** $x(t)=$ $=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t+\cos t-2)-\eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi)+\cos(t-\pi)-2)+$ $+\frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi)+\cos(t-2\pi)-2)$, $y(t)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}t-\cos t)-$ $-\eta(t-\pi)(\operatorname{ch}(t-\pi)-\cos(t-\pi))+\frac{1}{2}\eta(t-2\pi)(\operatorname{ch}(t-2\pi)-\cos(t-2\pi))$.

3.36. Если $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=n^2>0$, то $i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\sin nt+$ $+\frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)\,e^{-k(t-T)}\sin n(t-T)$; если $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$, то $i(t)=\frac{E_1}{L}te^{-kt}+\frac{E_2-E_1}{L}\eta(t-T)(t-T)\,e^{-k(t-T)}$; если $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=$ $=-n^2<0$, то $i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\operatorname{sh}nt+\frac{E_2-E_1}{Ln}\eta(t-T)\,e^{-k(t-T)}\times$ $\times\operatorname{sh}n(t-T)$; $k=\frac{R}{2L}$. **3.37.** Если $M\neq L$, то $i_{1,2}(t)=$ $=\pm\frac{E_0}{2(L-M)\sqrt{n_1}}e^{-k_1t}\sin\sqrt{n_1}t+\frac{E_0}{2(L+M)\sqrt{n_2}}e^{-k_2t}\sin\sqrt{n_2}t$,

где $\frac{R}{2(L-M)}=k_1$, $\frac{R}{2(L+M)}=k_2$, $\frac{1}{(L-M)C}-\frac{R^2}{4(L-M)^2}=n_1$, $\frac{1}{(L+M)C}-\frac{R^2}{4(L+M)^2}=n_2$ (при $n_1n_2>0$ знак плюс перед первым слагаемым для i_1, минус — для i_2, при $n_1n_2<0$ следует заменить $\frac{\sin\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ на $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, при $n_1n_2=0$ это отношение следует заменить на его предел при $n\to 0$, т. е. на t); если $M=L$ («идеальная» связь), то $i_{1,2}(t)=\pm\frac{E_0}{2R}e^{-k_1t}+\frac{E_0}{4L\sqrt{n}}e^{-k_2t}\sin\sqrt{n}\,t$, где $\frac{1}{RC}=k_1$, $\frac{R}{4L}=k_2$, $\frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=n$ (при $n>0$ правило знаков то же, что и для случая $M\neq L$, при $n<0$ следует заменить $\frac{\sin\sqrt{n}\,t}{\sqrt{n}}$ на $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|n|}\,t}{\sqrt{|n|}}$, при $n=0$ это отношение заменяется на t).

3.38. $z(x, y)=y\cos x+x\sin x$. **3.39.** $z(x, y)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x \operatorname{sh} a(x-t)f(t)\,dt$.

4.1. $x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$. **4.2.** $x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{v_1}{\omega}\eta(t-\tau)\sin\omega(t-\tau)+h\eta(t-\tau_1)\cos\omega(t-\tau_1)$. **4.3.** $x(t)=\frac{A}{2\omega^2}\sin\omega t+\frac{A}{2\omega}t\cos\omega t+\frac{B\cos\omega t}{\omega}\eta(t-\tau)\sin\omega(t-\tau)$. **4.4.** $x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)$. ◀ Найдем изображения $\delta(\sin\omega t)$. Так как $\sin\omega t$ при $t\geqslant 0$ обращается в нуль в точках $t=\frac{k\pi}{\omega}$ $(k=0, 1, \ldots)$, причем все корни простые, то по свойству 5 импульсной функции имеем: $\delta_1(\sin\omega t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\delta\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)}{|\omega\cos k\pi|}=\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\delta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)$. Поэтому $v_0\delta(\sin\omega t)=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$. Отсюда операторное уравнение для уравнения $x''=v_0\delta(\sin\omega t)$ при нулевых начальных условиях будет $p^2X(p)=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$, или $X(p)=\frac{v_0}{\omega}\cdot\frac{1}{p^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{pk\pi}{\omega}}$, откуда $x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)$. ▶

5.1. $2\sin t$. 5.2. $\operatorname{ch} 2t-\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t$. 5.3. e^t. 5.4. $\operatorname{ch} t$. 5.5. $\frac{1}{\sqrt{t}}$.
5.6. $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\beta)}\frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. 5.7. $\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}$. 5.8. $\frac{1}{\alpha^{\mu+1}}\left(\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}-\ln\alpha\right)$.
● Использовать решение задачи 1.37. 5.9. $\frac{\pi}{2}e^{-\alpha t}$. 5.10. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$.
5.11. $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\beta}}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. 5.12. $\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})$.
5.13. $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$ ● В заданном интеграле предварительно положить $x^2=u$. 5.14. 2. ◀ Имеем $\frac{p}{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)^2}\doteqdot t\operatorname{sh}\frac{t}{2}$; $k=1$. Поэтому по формуле (4) $S=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}t\operatorname{sh}\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}te^{-\frac{t}{2}}\,dt=$
$=-\left(te^{-\frac{t}{2}}+2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_0^{+\infty}=2$. ▶ 5.15. $\frac{3}{4}\pi$. ◀ $\operatorname{arctg}\frac{9}{n^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n-1}-$
$-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$. Но $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\doteqdot\frac{\sin t}{t}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}\doteqdot e^{-t}\frac{\sin t}{t}$,
$\operatorname{arctg}\frac{1}{p-1}\doteqdot e^{t}\frac{\sin t}{t}$ (по теореме смещения). Следовательно,
$\operatorname{arctg}\frac{2}{p^2}\doteqdot f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{t}\sin t$; $k=1$. Поэтому по формуле (4) $S=$
$=\int\limits_0^t\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{t}\sin t\,dt=\int\limits_0^t\frac{1+e^{-t}}{t}\sin t\,dt$. Но $\frac{1+e^{-t}}{t}\sin t\doteqdot$
$\doteqdot\operatorname{arctg}\frac{1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{1}{p+1}=F(p)$, $F(0)=\operatorname{arctg}(+\infty)+\operatorname{arctg}1=\frac{3}{4}\pi$.
Следовательно, по формуле (1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+e^{-t}}{t}\sin t\,dt=\frac{3}{4}\pi$. ▶
5.16. $\frac{1}{2}$. ● $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}=\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+2p+2}$. 5.17. $\frac{\pi}{2}$.
● $\operatorname{arctg}\frac{3}{n^2+3n+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+3}$; см. решение задачи 5.15. 5.18. $\operatorname{arctg} x$. ● Положить $\Phi(t,x)=\frac{x}{1+x^2t}$. 5.19. $\arcsin x$. ● Положить $\Phi(t,x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2t}}$. 5.20. $\frac{\pi-x}{2}$. ◀ Используем производящую функцию $\Phi(t,x)=\frac{t\sin x}{1-2t\cos x+t^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\sin nx$. Имеем
$\Phi(e^{-t},x)=\frac{e^{-t}\sin x}{1-2e^{-t}\cos x+e^{-2t}}$; $\frac{1}{p}\doteqdot\eta(t)=f(t)$, $\eta(t)=1$ при

$t \geqslant 0$. Находим по формуле (5): $T(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin x \, dt}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} =$

$= \sin x \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{(e^{-t} - \cos x)^2 + \sin^2 x} = -\operatorname{arctg} \frac{e^{-t} - \cos x}{\sin x} \Big|_0^{+\infty} =$

$= -\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x) + \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$, и, так как $-\operatorname{arctg}(-\operatorname{ctg} x) =$

$= \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = \frac{\pi}{2} - x$, $\operatorname{arctg} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$,

то $T(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x}{2} = \frac{\pi - x}{2}$. ▶ **5.21.** $-\ln\left(2\left|\cos \frac{x}{2}\right|\right)$. • Использовать разложение $\frac{1 + t \cos x}{1 + 2t \cos x + t^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \cos nx$, положив $\Phi(t, x) = 1 - \frac{1 + t \cos x}{1 + 2t \cos x + t^2}$.

6.1. $\frac{e^q (e^q - e^\alpha \cos \beta)}{e^{2q} - 2e^{q+\alpha} \cos \beta + e^{2\alpha}}$. **6.2.** $\frac{e^q (e^q - a \cos \beta)}{e^{2q} - 2ae^q \cos \beta + a^2}$.

6.3. $\frac{e^{q+\alpha} (e^q + e^\alpha)}{(e^q - e^\alpha)^3}$. **6.4.** $\frac{ae^q (e^q + a)}{(e^q - a)^3}$. **6.5.** $\frac{1}{(e^q - 1)^{k+1}}$.

• По свойству 3,а). **6.6.** $\frac{(n+m)^{[k]}}{k!} \div \frac{e^{(m+1)q}}{(e^q - 1)^{k+1}}$ при $m < k$;

$\frac{e^{(m+1)q}}{(e^q - 1)^{k+1}} - \sum\limits_{r=k}^{m-1} C_r^k e^{(m-r)q}$ при $m \geqslant k$. • По свойству 3,б).

6.7. $\operatorname{arctg} \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta}$. ◀ Применяем формулу интегрирования изображения (свойство 5,б)): $\frac{\sin \beta n}{n} \div \int\limits_q^{\infty} \frac{e^q \sin \beta \, dq}{e^{2q} - 2e^q \cos \beta + 1} =$

$= \int\limits_q^{\infty} \frac{e^q \sin \beta \, dq}{q (e^q - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta} = \operatorname{arctg} \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} \Big|_q^{\infty} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta}$

$\left(\text{так как } \operatorname{arctg} \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta}\Big|_q^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{e^q - \cos \beta}{\sin \beta} = \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta}{e^q - \cos \beta}\right)$. ▶

6.8. $f(n) = -\frac{1}{3} 1^n + \frac{1}{4} 2^n + \frac{1}{12} (-2)^n = \frac{2^{n-2}(3 + (-1)^{n-2}) - 1^{n-2}}{3}$.

6.9. $f(n) = \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n+1}{4} \pi$. **6.10.** $f(n) = (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{3n+1}{4} \pi$.

• Использовать формулы для изображения функций $a^n \sin \beta n$ и $a^n \cos \beta n$ (пример 3 и задача 6.2). **6.11.** $\frac{n^{[r+1]}}{(r+1)!} = C_n^{r+1}$.

6.12. $\frac{2}{5 - 4 \cos \beta} (\sin \beta - 2^{n-1} \sin n\beta + 2^n \sin (n-1) \beta)$ при $n \geqslant 1$.

6.13. $\frac{n(n^4-1)}{30}$. ● Использовать формулу умножения изображений.

6.14. $\frac{1}{2}\frac{t}{t^2-t\sqrt{3}+1}$ **6.15.** $\frac{1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}t}{1-t+t^2}$. **6.16.** $x_n = \frac{1}{7}(5^{n+1}+(-2)^{n+4})$. **6.17.** $x_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}$. **6.18.** $x_n = \sin\frac{(n+1)\pi}{6}$. **6.19.** $x_n=(2x_0-x_1)\,1^n+(x_1-x_0)\,2^n=C_1+C_2\cdot 2^n$. **6.20.** $x_n=2^n-(n+1)$. **6.21.** $x_n=(x_1-2x_0-2)\,3^n+(1-x_1+3x_0)\,2^n+4^n=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot 2^n+4^n$. **6.22.** $x_n=(-1)^n+2^n+3^n$, $y_n=2(-1)^n-2^n-3^n$. **6.23.** $x_n=\frac{3x_0-y_0}{5}\cdot 2^n+\frac{2x_0+y_0}{5}\cdot 3^n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n$, $y_n=\frac{2y_0-6x_0}{5}\cdot 2^n+\frac{3y_0+6x_0}{5}\cdot 3^n=-C_1\cdot 2^{n+1}+C_2\cdot 3^{n+1}$.

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ

Специальные разделы
математического анализа

Под редакцией *А. В. ЕФИМОВА, Б. П. ДЕМИДОВИЧА*

Редактор *Ф. И. Кизнер*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *О. А. Сигал, М. Л. Медведская*

ИБ № 11935

Сдано в набор 19.05.81. Подписано к печати 02.10.81. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 19,32. Уч.-изд. л. 23,39. Тираж 150 000 экз. Заказ № 2872. Цена 90 коп

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28