Comunicaciones Ópticas Coherentes

Parte Práctica

Problema 5-A

1. Muestre que la señal compleja transmitida en presencia de *errores de fase y ganancia en el modulador*, resulta

$$E_{out}(t) = [k_1 s(t) + k_2 s^*(t)]\, e^{j\omega_0 t} \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{I,1} + jk_{Q,1} = \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} + (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right] \\ k_2 &= k_{I,2} + jk_{Q,2} = \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} - (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right] \end{aligned}$$

2. **Solución**

- La señal a la salida del MZM está dada por

$$e_{out}(t) = s_I(t)(1-\varepsilon_g)\cos(\omega_0 t + \phi_e/2) - s_Q(t)(1+\varepsilon_g)\sin(\omega_0 t - \phi_e/2) \tag{2}$$

- Usando relaciones trigonómetricas se tiene

$$\begin{aligned} s_I(t)(1-\varepsilon_g)\cos(\omega_0 t + \phi_e/2) &= s_I(t)(1-\varepsilon_g)\left[\cos(\omega_0 t)\cos(\phi_e/2) - \sin(\omega_0 t)\sin(\phi_e/2)\right] \\ s_Q(t)(1+\varepsilon_g)\sin(\omega_0 t - \phi_e/2) &= s_Q(t)(1+\varepsilon_g)\left[\sin(\omega_0 t)\cos(\phi_e/2) - \cos(\omega_0 t)\sin(\phi_e/2)\right] \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} e_{out}(t) =& \cos(\phi_e/2)\left[s_I(t)(1-\varepsilon_g)\cos(\omega_0 t) - s_Q(t)(1+\varepsilon_g)\sin(\omega_0 t)\right] \\ &+ \sin(\phi_e/2)\left[-s_I(t)(1-\varepsilon_g)\sin(\omega_0 t) + s_Q(t)(1+\varepsilon_g)\cos(\omega_0 t)\right] \end{aligned}$$

La expresión anterior puede reescribirse como

$$\begin{aligned} e_{out}(t) =& \cos(\phi_e/2)\left\{\left[s_I(t)\cos(\omega_0 t) - s_Q(t)\sin(\omega_0 t)\right] - \varepsilon_g\left[s_I(t)\cos(\omega_0 t) + s_Q(t)\sin(\omega_0 t)\right]\right\} \\ &+ \sin(\phi_e/2)\left\{\left[s_Q(t)\cos(\omega_0 t) - s_I(t)\sin(\omega_0 t)\right] + \varepsilon_g\left[s_I(t)\sin(\omega_0 t) + s_Q(t)\cos(\omega_0 t)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3}$$

A continuación, se enfoca en los términos entre corchetes en (3). Teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \Re\{ab\} &= a_I b_I - a_Q b_Q \\ \Re\{a^* b\} &= a_I b_I + a_Q b_Q \\ \Re\{ja^* b\} &= a_Q b_I - a_I b_Q \\ \Re\{-jab\} &= a_I b_Q + a_Q b_I \end{aligned}$$

la ecuación (3) puede escribirse como

$$e_{out}(t) = \cos(\phi_e/2)\Re\left\{s(t)e^{j\omega_0 t} - \varepsilon_g s^*(t)e^{j\omega_0 t}\right\} + \sin(\phi_e/2)\Re\left\{js^*(t)e^{j\omega_0 t} - j\varepsilon_g s(t)e^{j\omega_0 t}\right\} \tag{4}$$

- Puesto que $e_{out}(t) = \Re\{E_{out}(t)\}$, de (4) se verifica

$$\begin{aligned} E_{out}(t) =& \cos(\phi_e/2)\left[s(t)e^{j\omega_0 t} - \varepsilon_g s^* e^{j\omega_0 t}\right] + \sin(\phi_e/2)\left[js^*(t)e^{j\omega_0 t} - j\varepsilon_g s(t)e^{j\omega_0 t}\right] \\ =& \frac{e^{j\phi_e/2} + e^{-j\phi_e/2}}{2}\left[s(t)e^{j\omega_0 t} - \varepsilon_g s^* e^{j\omega_0 t}\right] + \frac{e^{j\phi_e/2} - e^{-j\phi_e/2}}{2}\left[s^*(t)e^{j\omega_0 t} - \varepsilon_g s(t)e^{j\omega_0 t}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

- Desarrollando (5) y reagrupando se obtiene (1).

Problema 5-B

1. Muestre que

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \cos(\phi_e/2) - j\varepsilon_g \sin(\phi_e/2) \\
k_2 &= -\varepsilon_g \cos(\phi_e/2) + j\sin(\phi_e/2)
\end{aligned}
$$

2. **Solución**

- Del punto anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
k_1 = k_{I,1} + jk_{Q,1} &= \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} + (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right] \\
k_2 = k_{I,2} + jk_{Q,2} &= \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} - (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

- Por ejemplo, operando en la expresión de k_1:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\phi_e}{2}} + e^{-j\frac{\phi_e}{2}} - \varepsilon_g(e^{j\frac{\phi_e}{2}} - e^{-j\frac{\phi_e}{2}})\right] \\
&= \frac{e^{j\frac{\phi_e}{2}} + e^{-j\frac{\phi_e}{2}}}{2} - \varepsilon_g \frac{e^{j\frac{\phi_e}{2}} - e^{-j\frac{\phi_e}{2}}}{2} \\
&= \boxed{\cos(\phi_e/2) - j\varepsilon_g \sin(\phi_e/2)}
\end{aligned}
$$

- Con un procedimiento similar se obtiene la expresión para k_2:

$$
\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{\phi_e}{2}} - e^{-j\frac{\phi_e}{2}} - \varepsilon_g(e^{j\frac{\phi_e}{2}} + e^{-j\frac{\phi_e}{2}})\right] \\
&= \frac{e^{j\frac{\phi_e}{2}} - e^{-j\frac{\phi_e}{2}}}{2} - \varepsilon_g \frac{e^{j\frac{\phi_e}{2}} + e^{-j\frac{\phi_e}{2}}}{2} \\
&= \boxed{j\sin(\phi_e/2) - \varepsilon_g \cos(\phi_e/2)}
\end{aligned}
$$

Problema 5-C

1. Obtenga la representación MIMO de la señal en bandabase, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_I(t) \\ \hat{s}_Q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix}$$

donde $\hat{s}(t) = \hat{s}_I(t) + j\hat{s}_Q(t) = k_1 s(t) + k_2 s^*(t)$ y $\mathbf{W}$ es una matriz real dada por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_e/2) & \sin(\phi_e/2) \\ \sin(\phi_e/2) & \cos(\phi_e/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_g & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_g \end{bmatrix}$$

2. **Solución**

- Se parte de la siguiente expresión

$$E_{out}(t) = \left[k_1 s(t) + k_2 s^*(t)\right] e^{j\omega_0 t} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos(\phi_e/2) - j\varepsilon_g \sin(\phi_e/2) \\ k_2 &= -\varepsilon_g \cos(\phi_e/2) + j\sin(\phi_e/2) \end{aligned}$$

- Nótese que

$$k_1 s(t) = \cos(\phi_e/2)s_I(t) + \varepsilon_g \sin(\phi_e/2)s_Q(t) + j\left[\cos(\phi_e/2)s_Q(t) - \varepsilon_g \sin(\phi_e/2)s_I(t)\right] \tag{7}$$

$$k_2 s^*(t) = -\varepsilon_g \cos(\phi_e/2)s_I(t) + \sin(\phi_e/2)s_Q(t) + j\left[\varepsilon_g \cos(\phi_e/2)s_Q(t) + \sin(\phi_e/2)s_I(t)\right] \tag{8}$$

- La señal en bandabase con imperfecciones de fase y cuadratura puede escribirse como

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_I(t) + j\hat{s}_Q(t) = k_1 s(t) + k_2 s^*(t) \tag{9}$$

- Luego, a partir de (7) y (8) se obtienen

$$\hat{s}_I(t) = (1-\varepsilon_g)\cos(\phi_e/2)s_I(t) + (1+\varepsilon_g)\sin(\phi_e/2)s_Q(t) \tag{10}$$

$$\hat{s}_Q(t) = (1-\varepsilon_g)\sin(\phi_e/2)s_I(t) + (1+\varepsilon_g)\cos(\phi_e/2)s_Q(t) \tag{11}$$

- Utilizando (10) y (11) es posible reescribir a las componentes de $\hat{s}(t)$ como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{s}_I(t) \\ \hat{s}_Q(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_e/2) & \sin(\phi_e/2) \\ \sin(\phi_e/2) & \cos(\phi_e/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_g & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{W} \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es precisamente la representación MIMO deseada

Problema 8

1. Muestre que $\rho[0] = \frac{\mathcal{E}_h}{M}$ y $\sigma^2 = \frac{N_0\mathcal{E}_h^2}{M^2}$

2. **Solución**

   - El pulso $\rho[n]$ está dado por

   $$\rho[n] = h[n] \otimes \frac{1}{M} h^*[-n] = \frac{1}{M} \sum_k h[k]h^*[k-n] \tag{12}$$

   por lo tanto

   $$\rho[0] = \frac{1}{M} \sum_k h[k]h^*[k] = \frac{1}{M} \sum_k |h[k]|^2 = \boxed{\frac{\mathcal{E}_h}{M}} \tag{13}$$

   - El factor σ^2 es la potencia del ruido definido por

   $$\tilde{z}[n] = z[n] \otimes \frac{1}{M} h^*[-n] = \frac{1}{M} \sum_k z[k]h^*[k-n] \tag{14}$$

   Se define $\tilde{\sigma}^2 = E\{|\tilde{z}[n]|^2\}$. Operando se obtiene que

   $$\tilde{\sigma}^2 = E\{\tilde{z}[n]\tilde{z}^*[n]\} = \frac{1}{M^2} \sum_m \sum_k E\{z[k]z^*[m]\}h^*[k-n]h[m-n] \tag{15}$$

   Teniendo en cuenta que $E\{z[k]z^*[m]\} = N_0\mathcal{E}_h\delta_{k-m}$, la ecuación anterior se reduce a

   $$\tilde{\sigma}^2 = E\{|\tilde{z}[n]|^2\} = \frac{N_0\mathcal{E}_h}{M^2} \sum_m |h[m-n]|^2 = \boxed{\frac{N_0\mathcal{E}_h^2}{M^2}} \tag{16}$$

   puesto que $\sum_m |h[m-n]|^2 = \mathcal{E}_h \ \forall n$

Problema 10

1. Muestre que la energía del pulso $h[n] = g[n] \otimes b[n]$ resulta $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_g = 1$

2. **Solución**

   - La transformada de Fourier del pulso $h[n]$ resulta

     $$H(e^{j\Omega}) = G(e^{j\Omega})B(e^{j\Omega}) \tag{17}$$

     mientras que su energía está dada por

     $$\mathcal{E}_h = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |G(e^{j\Omega})|^2 |B(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \tag{18}$$

   - Teniendo en cuenta que $b[n]$ es un filtro pasatodo (i.e., $|B(e^{j\Omega})| = 1\ \forall\Omega$) y $\mathcal{E}_g = 1$, se verifica que

     $$\boxed{\mathcal{E}_h = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |G(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \mathcal{E}_g = 1} \tag{19}$$