Tasa de Error de Bit para Sistemas QAM

Problema 1

- Considere la transmisión de símbolos complejos a_k por un canal con ruido *Gaussiano*:

$$r_k = a_k + z_k$$

donde z_k es ruido complejo blanco Gaussiano de media cero y potencia σ^2

- Demuestre que las tasas de error de bit para las constelaciones más usuales en sistemas coherentes con mapeo de Gray están dadas por:

$$BER_{BPSK} = Q\left(\sqrt{2SNR}\right)$$

$$BER_{QPSK} \approx Q\left(\sqrt{SNR}\right)$$

$$BER_{QAM16} \approx \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{SNR}{5}}\right)$$

donde $Q(.)$ es la *función de distribución acumulativa complementaria de una variable Gaussiana estándar* ($\mathcal{N} = \{0, 1\}$) y SNR es la relación señal-ruido definida por

$$SNR = \frac{E\{|a_k|^2\}}{\sigma^2}$$

Nota: para una constelación QAM de tamaño $\mathcal{M}$ con alta SNR, se tiene que $BER_{QAM} \approx \frac{4}{\log_2(\mathcal{M})}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}}}\right] Q\left(\sqrt{\frac{3SNR}{\mathcal{M}-1}}\right)$

Modulación Óptica en Fase y Cuadratura Ideal

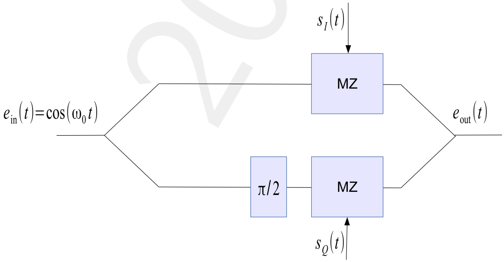
Problema 2

- Sea la *envolvente* compleja generada por un sistema de comunicaciones con modulación QAM:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \sum_k \Re\{a_k\} g(t-kT) + j\sum_k \Im\{a_k\} g(t-kT) \\
&= s_I(t) + js_Q(t)
\end{aligned}
$$

- Para el modulador óptico de la figura, demuestre que la señal transmitida es

$$
e_{out}(t) = \Re\{E_{out}(t)\} = \Re\{s(t)e^{j\omega_0 t}\}
$$



Nota: el bloque "$\pi/2$" transforma $\cos(x) \rightarrow \cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$

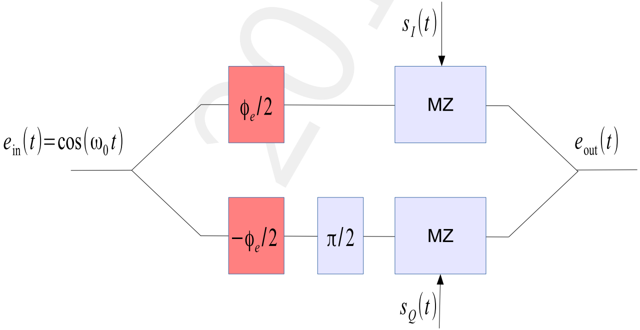
Error de Fase del Modulador

Problema 3

- En situaciones prácticas, el *desfasador* de $\pi/2$ no es exacto y se genera error de fase del modulador. La figura de abajo incluye el modelo del modulador con un error de fase de ϕ_e.
- Demuestre que la señal transmitida resulta $e_{out}(t) = \Re\{E_{out}(t)\}$ con

$$E_{out}(t) = [k_1 s(t) + k_2 s^*(t)]\, e^{j\omega_0 t}$$

donde $k_1 = \cos(\phi_e/2)$ y $k_2 = j\sin(\phi_e/2)$

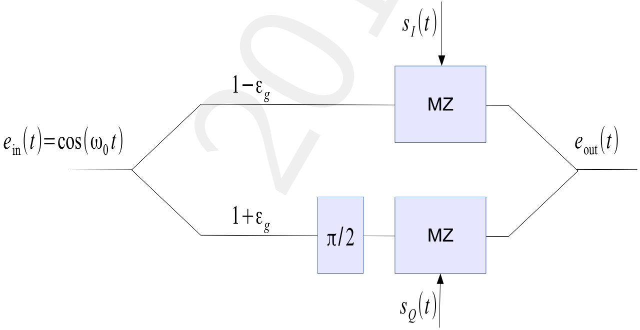


Error de Ganancia del Modulador

Problema 4

- Cuando las ramas en cuadratura tienen distintas ganancias, se genera error de ganancia del modulador. La figura de abajo incluye el modelo del modulador con un error de ganancia de ε_g.
- Demuestre que la señal transmitida resulta $e_{out}(t) = \Re\{E_{out}(t)\}$ con

$$E_{out}(t) = [s(t) - \varepsilon_g s^*(t)]\, e^{j\omega_0 t}$$



Error de Fase y Ganancia del Modulador

Problema 5

- Muestre que la señal compleja transmitida en presencia de *errores de fase y ganancia en el modulador*, resulta

$$E_{out}(t) = \left[k_1 s(t) + k_2 s^*(t)\right] e^{j\omega_0 t}$$

donde

$$k_1 = k_{I,1} + jk_{Q,1} = \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} + (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right]$$

$$k_2 = k_{I,2} + jk_{Q,2} = \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_g)e^{j\frac{\phi_e}{2}} - (1+\varepsilon_g)e^{-j\frac{\phi_e}{2}}\right]$$

- Muestre que

$$k_1 = \cos(\phi_e/2) - j\varepsilon_g \sin(\phi_e/2)$$

$$k_2 = -\varepsilon_g \cos(\phi_e/2) + j\sin(\phi_e/2)$$

- Obtenga la representación MIMO de la señal en bandabase, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_I(t) \\ \hat{s}_Q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix}$$

donde $\hat{s}(t) = \hat{s}_I(t) + j\hat{s}_Q(t) = k_1 s(t) + k_2 s^*(t)$ y $\mathbf{W}$ es una matriz real dada por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_e/2) & \sin(\phi_e/2) \\ \sin(\phi_e/2) & \cos(\phi_e/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_g & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_g \end{bmatrix}$$

Compensación de Error de Fase y Ganancia del Tx

Problema 6

- La señal con errores de fase y ganancia que se recibe en un canal con ruido aditivo Gaussiano puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_I(t) \\ \hat{r}_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}_I(t) \\ \hat{s}_Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_I(t) \\ z_Q(t) \end{bmatrix}$$

donde $z_I(t), z_Q(t)$ son muestras de ruido blanco Gaussiano de potencia N_0, mientras

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_I(t) \\ \hat{s}_Q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix}$$

- Muestre que el determinante de $\mathbf{W}$ resulta

$$\det\{\mathbf{W}\} = (1 - \varepsilon_g^2)\cos(\phi_e)$$

- Si $|\varepsilon_g| < 1$ y $|\phi_e| < \pi/2$, se tiene que $1 \geq \det\{\mathbf{W}\} > 0$. Por lo tanto el desbalance de fase y cuadratura del *modulador* puede compensarse utilizando $\mathbf{W}^{-1}$.
- En este caso, la señal a la salida del compensador resulta

$$\mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{r}_I(t) \\ \hat{r}_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_I(t) \\ s_Q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{z}_I(t) \\ \hat{z}_Q(t) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_I(t) \\ \hat{z}_Q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \begin{bmatrix} z_I(t) \\ z_Q(t) \end{bmatrix}$$

Compensación de Error de Fase y Ganancia del Tx (cont.)

- A continuación se desea evaluar la potencia de ruido a la salida del compensador de error de fase y cuadratura que introduce el modulador
- La potencia total de ruido a la entrada del compensador está definida por

$$\sigma_{in}^2 = E\left\{ \begin{bmatrix} z_I(t) & z_Q(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_I(t) \\ z_Q(t) \end{bmatrix} \right\} = E\left\{ z_I^2(t) \right\} + E\left\{ z_Q^2(t) \right\} = 2N_0$$

- Por su parte, la potencia total del ruido a la salida de la compensación resulta

$$\sigma_T^2 = E\left\{ \begin{bmatrix} \hat{z}_I(t) & \hat{z}_Q(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{z}_I(t) \\ \hat{z}_Q(t) \end{bmatrix} \right\} = E\left\{ \begin{bmatrix} z_I(t) & z_Q(t) \end{bmatrix} \times \mathbf{M}_W \times \begin{bmatrix} z_I(t) \\ z_Q(t) \end{bmatrix} \right\}$$

  donde $\mathbf{M}_W = (\mathbf{W}^{-1})^T \mathbf{W}^{-1}$ (recuerde: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$)
- La matriz $\mathbf{M}_W$ es real y simétrica, por lo tanto puede expresarse como

$$\mathbf{M}_W = \mathbf{R}_W \mathbf{\Lambda}_W \mathbf{R}_W^{-1}$$

  donde $\mathbf{R}_W$ es una matriz real unitaria cuyas columnas son los vectores propios reales de $\mathbf{M}_W$ (los cuales son ortonormales), mientras $\mathbf{\Lambda}_W$ es una matriz *real* y diagonal formada por los autovalores de $\mathbf{M}_W$
- Para $|\varepsilon_g| < 1$ y $|\phi_e| < \pi/2$, los autovalores de $\mathbf{M}_W$ son todos positivos (i.e., $\mathbf{M}_W$ satisface el *criterio de Sylvester*)

Compensación de Error de Fase y Ganancia del Tx (cont.)

- Nótese que $\mathbf{R}_W$ es una matriz de rotación (i.e., su *determinante es unitario*; $\mathbf{R}_W^{-1} = \mathbf{R}_W^T \rightarrow \mathbf{R}_W$ también es unitaria). Luego, muestre que la potencia del ruido resulta

$$\sigma_T^2 = N_0(\lambda_1 + \lambda_2)$$

  donde λ_1 y λ_2 son los autovalores reales y positivos de $\mathbf{M}_W$
- Teniendo en cuenta que $\det\{\mathbf{M}_W\} = \det\{\mathbf{R}_W\}\det\{\mathbf{\Lambda}_W\}\det\{\mathbf{R}_W^{-1}\} = \det\{\mathbf{\Lambda}_W\}$

$$\det\{\mathbf{W}^{-1}\} = \frac{1}{(1-\varepsilon_g^2)\cos(\phi_e)} \geq 1$$

  muestre que $\det\{\mathbf{M}_W\} = \lambda_1\lambda_2 \geq 1$ (e.g., $\lambda_1\lambda_2 = 1$ sii $\varepsilon_g = \phi_e = 0$)
- Puesto que $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \geq \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, muestre que la penalidad resulta

$$\Delta SNR_{\varepsilon_g,\phi_e}[dB] = 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_T^2}{\sigma_{in}^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \geq 5\log_{10}(\lambda_1\lambda_2) \geq 0$$

- Lo anterior implica que en presencia de errores de fase y/o ganancia (i.e., $\lambda_1\lambda_2 > 1$), la potencia de ruido aumenta, por lo tanto *en el receptor no se podrá realizar una compensación "perfecta" de estos efectos*
- Analice: si la SNR aumenta $\Delta SNR_{\varepsilon_g,\phi_e}$ [dB], ¿se vuelve a tener la misma performance que un sistema sin el desbalance de ganancia y fase?

Skew de I/Q en el Modulador

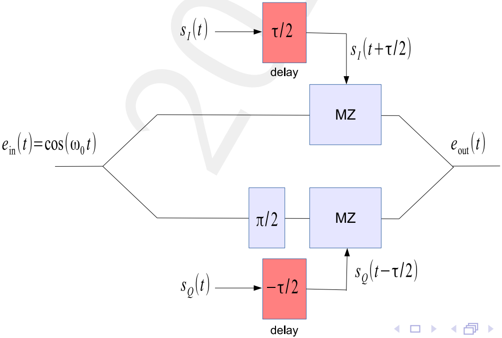
Problema 7

- Otra de las imperfecciones que existen en los moduladores coherentes es el skew (o *delay*) entre las componentes en fase y cuadratura
- Demuestre que la señal transmitida resulta $e_{out}(t) = \Re\{E_{out}(t)\}$ con

$$E_{out}(t) = \left[s(t) \otimes b(t) + s^*(t) \otimes \overline{b}(t)\right] e^{j\omega_0 t}$$

donde $\otimes$ denota convolución, con $B(\omega) = \cos(\omega\tau/2)$ y $\overline{B}(\omega) = j\sin(\omega\tau/2)$

Ayuda: $s_I(t) = \frac{1}{2}[s(t) + s^*(t)]$ y $js_Q(t) = \frac{1}{2}[s(t) - s^*(t)]$



- Para la simulación de un sistema de comunicaciones digitales se emplean modelos en tiempo discreto. Sea $1/T$ la velocidad de transmisión y $1/T_s = M/T$ la frecuencia de sobremuestreo. Considere la respuesta al impulso sobremuestreada del canal de comunicaciones $h[n]$ con ganancia de DC y energía ($\mathcal{E}_h$) dadas por

$$\boxed{\sum_n h[n] = M \qquad \mathcal{E}_h = \sum_n |h[n]|^2}$$

- La señal recibida *sobremuestreada* puede escribirse como

$$r[n] = \sum_k a_k h[n - kM] + z[n]$$

donde $z[n]$ son muestras de ruido blanco Gaussiano complejo con media cero y

$$\boxed{\sigma_z^2 = \mathcal{E}_h N_0}$$

- La señal se procesa luego por el filtro apareado $f[n] = \frac{1}{M} h^*[-n]$ con energía $\mathcal{E}_f = \sum_n |f[n]|^2 = \frac{1}{M^2}\mathcal{E}_h$ y ganancia de DC unitaria, i.e.,

$$\boxed{\sum_n f[n] = 1}$$

Modelo de Simulación (cont.)

- La señal a la salida del filtro apareado resulta

$$y[n] = r[n] \otimes f[n] = \sum_k a_k \rho[n - kM] + \tilde{z}[n]$$

donde $\rho[n] = h[n] \otimes \frac{1}{M} h^*[-n]$ mientras $\tilde{z}[n] = z[n] \otimes \frac{1}{M} h^*[-n]$ es ruido Gaussiano de potencia σ^2

- Muestre que $\rho[0] = \frac{\mathcal{E}_h}{M}$ y $\sigma^2 = \frac{N_0 \mathcal{E}_h^2}{M^2}$
- Suponga que se transmite un sólo símbolo (a_0). A partir de la muestra en el instante $n = 0$, i.e.,

$$y[0] = a_0 \rho[0] + \tilde{z}[0]$$

verifique que la SNR resultante (conocido como el matched filter bound (MFB)) es

$$\boxed{SNR_{MF} = \frac{\mathcal{E}_a}{N_0}}$$

donde $\mathcal{E}_a = E\{|a_k|^2\}$

- Muestre que cualquier ganancia del filtro receptor $f[n]$ afecta el nivel de la señal *pero no cambia la SNR*

Modelo de Simulación Sincrónico

- De lo anterior, se puede obtener un modelo de simulación del sistema de comunicaciones. Para esto es necesario tener la potencia de la constelación (i.e., $\mathcal{E}_a$), la SNR deseada ($SNR_{MF} = \frac{\mathcal{E}_a}{N_0} \rightarrow N_0$) y el factor de sobremuestreo M.

Modelo de Simulación Sincrónico 1

Canal

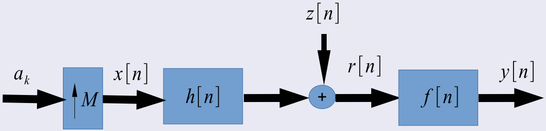
$$\boxed{\sum_n h[n] = M}$$

Ruido Gaussiano Blanco Complejo

$$\boxed{\sigma_z^2 = \mathcal{E}_h N_0 \qquad \mathcal{E}_h = \sum_n |h[n]|^2}$$

Filtro Receptor

$$\boxed{\sum_n f[n] = 1}$$



$$x[n] = \sum_k a_k \delta[n - kM]$$

$$r[n] = \sum_k a_k h[n - kM] + z[n]$$

Modelo de Simulación Sincrónico Alternativo

Problema 9

- Verifique que el modelo definido en la figura con $f[n] = h^*[-n]$ es equivalente al anterior (i.e., $SNR_{MF} = \frac{\mathcal{E}_a}{N_0}$)

Modelo de Simulación Sincrónico 2

Constelación

$$\boxed{\mathcal{E}_a = E\{|a_k|^2\}}$$

Canal

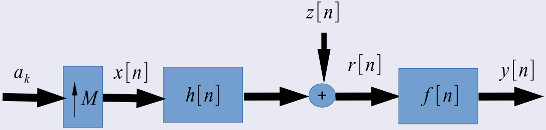
$$\boxed{\mathcal{E}_h = \sum_n |h[n]|^2 = 1}$$

Ruido Blanco Complejo

$$\boxed{\sigma_z^2 = N_0}$$

Filtro Receptor

$$\boxed{\mathcal{E}_f = \sum_n |f[n]|^2 = 1}$$



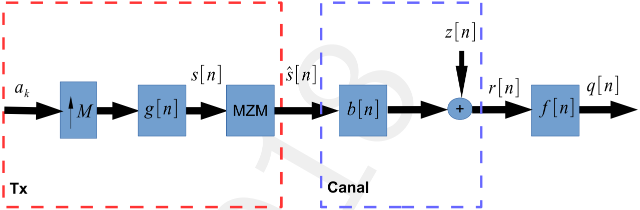
$$x[n] = \sum_k a_k \delta[n - kM]$$

$$r[n] = \sum_k a_k h[n - kM] + z[n]$$

Modelo de Simulación con MZM

Problema 10

- Considere el sistema de comunicaciones con un modulador MZ:



- El MZM es en general una transformación nolineal sin memoria. En el modelo, la energía del pulso $g[n]$ está normalizada, i.e., $\mathcal{E}_g = \sum_n |g[n]|^2 = 1$
- Por su parte, el canal $b[n]$ tiene una respuesta *pasa-todo con magnitud unitaria* (e.g., una fibra óptica con dispersión cromática), i.e.,

$$|B(e^{j\Omega})| = 1 \quad \forall\Omega$$

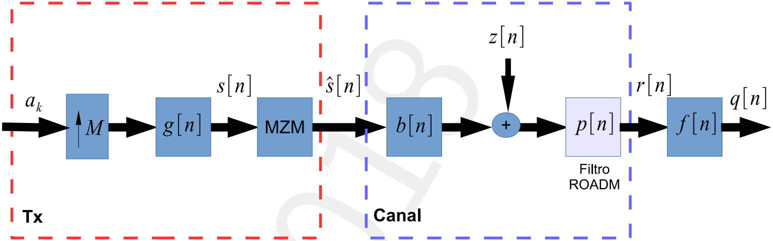
- Muestre que la energía del pulso $h[n] = g[n] \otimes b[n]$ resulta

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_g = 1$$

- Verifique que la densidad espectral de potencia de la señal a la salida del canal es la misma que $\hat{s}[n]$

Anexo: Modelo de Simulación con ROADM

- Considere el sistema de comunicaciones ópticas en presencia de ROADMs mostrado en la figura:



- Nótese que el filtro $p[n]$ afecta tanto a la señal como al ruido
- El canal $b[n]$ tiene una respuesta pasa-todo con magnitud unitaria mientras que la energía del pulso $g[n]$ está normalizada, i.e., $\mathcal{E}_g = \sum_n |g[n]|^2 = 1$.
- La potencia de la componente del ruido blanco Gaussiano $z[n]$ es N_0
- El filtro del ROADM puede combinarse con el filtro receptor, i.e.,

$$\tilde{f}[n] = p[n] \otimes f[n]$$

- Para mantener el nivel de la señal dentro de lo *esperado* en el Rx, se normaliza la energía, i.e., $\mathcal{E}_{\tilde{f}} = 1$

Tabla de Contenidos

Laboratorio

1. **Modelo de Simulador Elemental:**
Implemente un simulador de comunicaciones elemental definido por

$$r_k = a_k + z_k$$

Determine la tasa de error de bit por simulación en función de la SNR para QPSK y QAM16 y compare con la teoría. Analice qué sucede cuando el ruido es Gaussiano pero no circular.

2. **Modelo de Simulador del Tx:** Implemente un simulador de un transmisor de comunicaciones definido por

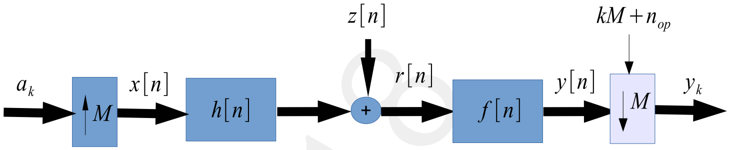
$$s[n] = x[n] \otimes g[n]$$

donde $x[n] = \sum_k a_k \delta[n - kM]$ es la secuencia de símbolos *extendida* y $g[n]$ es la respuesta del filtro transmisor *sobremuestreado* con ganancia de DC igual a M, i.e.,

$$\sum_n g[n] = M$$

Obtenga el diagrama ojo para un *filtro de caída cosenoidal* con distintos excesos de ancho de banda.
Verifique que el nivel de las amplitudes en el punto óptimo de muestreo es el esperado segun la constelación utilizada. Justifique.

3. Considere el sistema de comunicaciones mostrado en la figura:



Los parámetros generales del sistema son:

- M=8
- $\mathcal{M}$=16 (QAM16)
- $h[n]$: filtro con respuesta raíz cuadrada de caída cosenoidal con $\mathcal{E}_h = 1$
- $f[n] = h^*[-n]$

Con el sistema sin ruido ($N_0 = 0$), encuentre la fase óptima de muestreo $n_{op} \in \{0, 1, 2, ..., M-1\}$ tal que las muestras de la señal submuestreada

$$y_k = y[kM + n_{op}]$$

sean símbolos de la constelación utilizada

Para una SNR determinada (e.g., SNR_{MF} =15dB) obtenga la SNR en y_k. Comente.

Laboratorio

4. Seleccione un valor de SNR en el simulador anterior. Utilizando las densidad espectral de potencia de las muestras recibidas, determine por *medición* la SNR. Repita para diferentes valores de roll-off. (Ayuda: la potencia de señal depende de $\rho[0]$ y no de $\sum_n |\rho[n]|^2$; así $\rho[0] = \sum_k |h[k]|^2 = S(e^{j\Omega})|_{\Omega=0}$ donde $S(e^{j\Omega})$ es la TF de $|h[n]|^2$).
5. Para el sistema definido en el problema anterior, obtenga la tasa de error de bit y compare con la teoría

   Repita el problema variando los siguientes parámetros y comente en cada caso:

   - Factor de sobremuestreo (M)
   - Constelación ($\mathcal{M}$)
6. Modifique el modelo para introducir el efecto del desbalance de fase y ganancia en el modulador

   Investigue el impacto sobre la performance para QPSK y QAM16. Comente los efectos que genera sobre la constelación original.

   Implemente un compensador en el receptor y discuta los resultados

   Analice el ruido a la salida del compensador. ¿Es circular? ¿Las componentes en fase y cuadratura del ruido son independientes? ¿Son válidas las fórmulas de tasa de error de bit obtenidas anteriormente? Comente.

Laboratorio

7. Implemente un modulador MZ en el Tx de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\hat{s}[n] = \mathcal{T}_{mzm}\{s[n]\} = \gamma\left(\hat{s}_I[n] + j\hat{s}_Q[n]\right)$$

donde γ es una ganancia para mantener la potencia transmitida (i.e., $E\{|\hat{s}[n]|^2\} = E\{|s[n]|^2\}$), mientras

$$\hat{s}_I[n] = \cos\left(\frac{g_m s_I[n] + V_{bias}}{2V_\pi}\pi\right)$$

$$\hat{s}_Q[n] = \cos\left(\frac{g_m s_Q[n] + V_{bias}}{2V_\pi}\pi\right)$$

con $0 < g_m \leq 1$ siendo una ganancia para ajustar la excursión de la señal de entrada,

$$V_\pi = \text{máx}(|s_I[n]|)$$
$$V_{bias} = -V_\pi$$

Genere la constelación QAM16 recibida para diferentes casos. Analice los resultados y comente sobre el impacto de los efectos considerados:

- Exceso de BW del filtro Tx (e.g., ver amplitud de la constelación para $g_m = 1$ y $V_{bias} = V_\pi$)
- Tensión de bias (V_{bias}) (e.g., nivel de DC)
- Ganancia de señal de entrada (g_m) (e.g., linealidad vs g_m)

Laboratorio

8. **Simulador Elemental:**
   Utilizando el simulador de comunicaciones elemental definido desarrollado anteriormente, i.e.,

   $$r_k = a_k + z_k$$

   determine la tasa de error de bit por simulación para QPSK y QAM16 en función de la OSNR para un sistema con *doble polarización* a 32GBd. Compare con los resultados teóricos.
   Repita el problema para diferentes velocidades de símbolos y comente

9. **Simulador del Sistema en Tiempo Discreto con Doble Polarización:**
   Modifique el simulador para que utilice la OSNR como parámetro de entrada en lugar de la SNR
   Determine la tasa de error de bit por simulación para BPSK, QPSK y QAM16 en función de la OSNR para un sistema con doble polarización a 32GBd y 64GBd