

TOMOGRAFIA DI IMPEDENZA (EIT)

Basi teoriche EIT

Nella EIT si dispongono degli elettrodi sulla superficie del corpo sotto indagine. In seguito si inietta una corrente (tra 10 e 100 kHz) tra due o più di questi elettrodi e si misurano le tensioni tra varie coppie di elettrodi. Lo scopo è quello di ricostruire la mappa di conducibilità (o dualmente di resistività) del target (Fig. 1). Quindi l'incognita del nostro problema elettromagnetico è $\sigma(x,y)$ nel caso bidimensionale ovvero $\sigma(x,y,z)$ se vogliamo un imaging tridimensionale dell'oggetto.

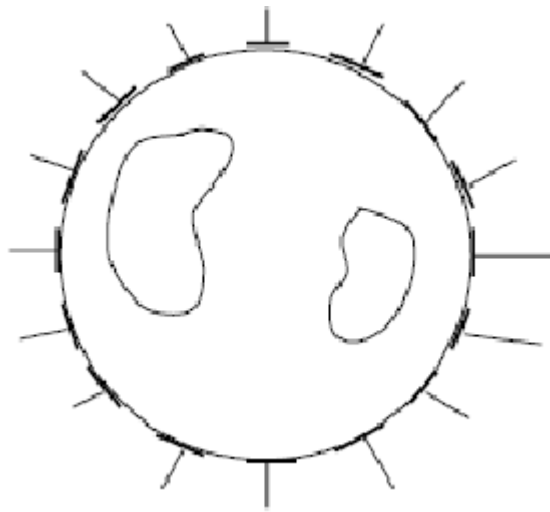


Figura 1

La ricostruzione si può riassumere nei seguenti tre passi fondamentali:

- ✓ **Raccolta dati** (misure sulla superficie del corpo)
- ✓
- ✓ **Problema diretto** (tecnica numerica)
- ✓
- ✓ **Problema inverso** (algoritmo di ricostruzione)

Raccolta dati (data collection)

Per quanto riguarda la raccolta dati, l'obiettivo è quello di ottenere il numero maggiore di misure indipendenti a parità di numero di elettrodi. Di seguito sono mostrate le tecniche di acquisizione 2D e successivamente quelle 3D.

Metodo dei vicini (Neighboring method)

Considerato un sistema con E elettrodi, questo metodo consistente nell'iniettare corrente tra due elettrodi vicini (coppia pilota) e misurare la tensione tra tutte le restanti $(E-3)$ coppie di elettrodi vicini che non coinvolgono gli elettrodi pilota (metodo a quattro elettrodi) (Fig. 2).

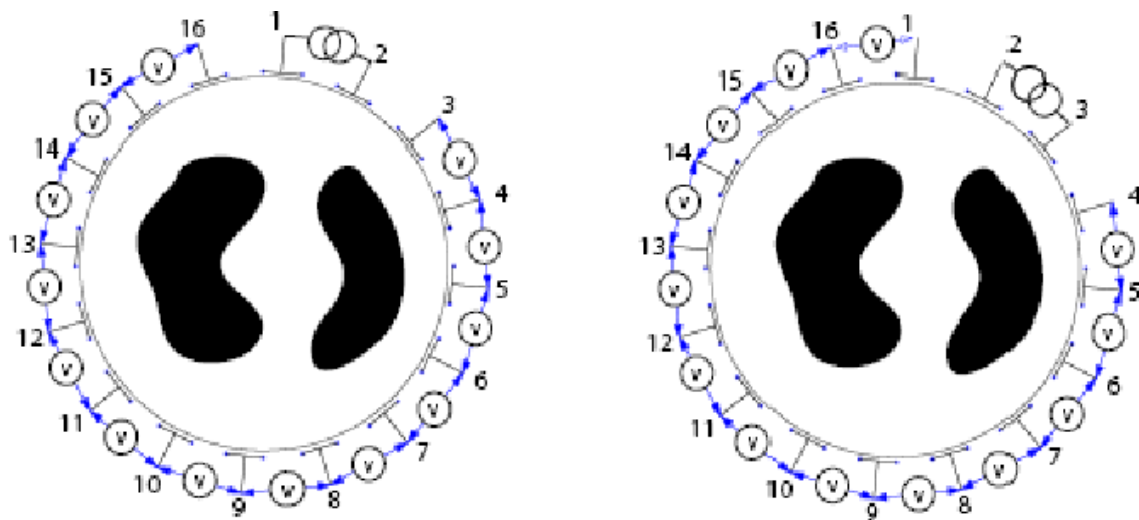


Figura 2

Di seguito si cambia la coppia di iniezione e si ripetono le misure. Quindi nel caso di un sistema EIT a 16 elettrodi si hanno: 16 coppie di iniezione di corrente e per ciascuna 13 coppie di lettura quindi $16 \cdot 13 = 208$ misure di tensione. Di queste soltanto la metà ovvero 104 sono linearmente indipendenti dovendo valere il teorema di

reciprocità^(*). Questo metodo di acquisizione (nel caso di ricostruzioni 2D) richiede il posizionamento di elettrodi sul bordo dell'oggetto ed in maniera complanare. Un inconveniente del metodo dei vicini è che la densità di corrente all'interno dell'oggetto sotto indagine decresce rapidamente all'aumentare della distanza dalla coppia di iniezione e quindi le tensioni misurate su elettrodi lontani da quelli di iniezione sono basse.

Metodo degli opposti

In questo metodo, la corrente viene iniettata attraverso due elettrodi diametralmente opposti. L'elettrodo vicino a quello di iniezione è usato come riferimento per le misure di tensione. La tensione è misurata su tutti gli altri elettrodi eccetto quelli di iniezione. In un sistema di acquisizione a 16 elettrodi si avranno $13 \cdot 16 = 208$ misure di tensione di cui solo 104 sono indipendenti in base al teorema di reciprocità.

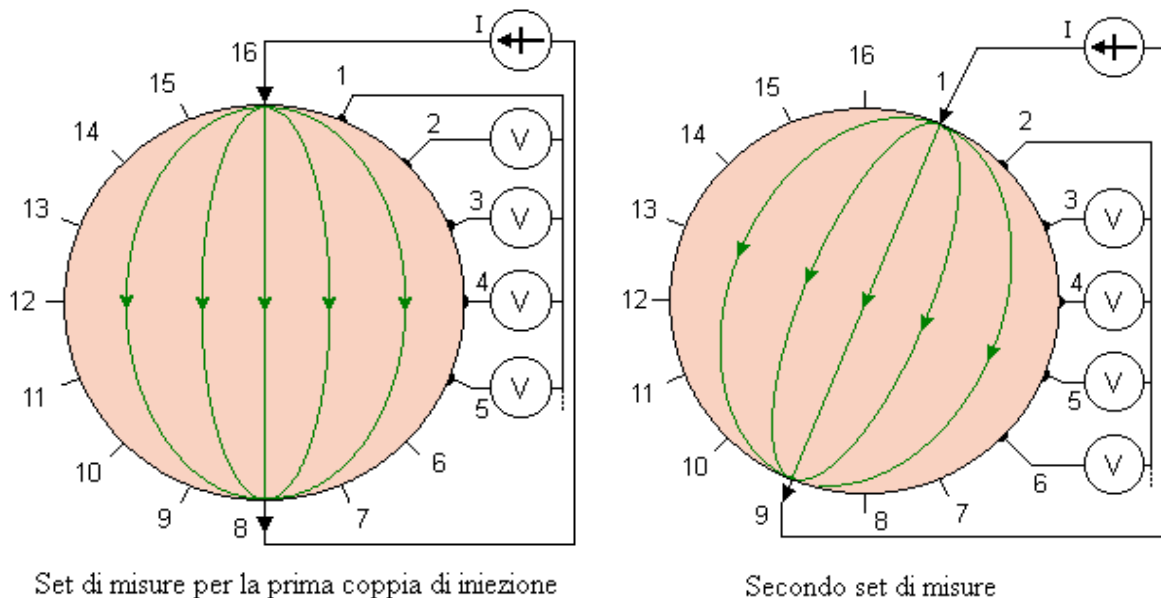


Figura 3

^(*) La tensione che misuro tra la coppia di elettrodi i e j stimolando in corrente tra k e l è uguale a quella che misuro tra k e l stimolando tra i e j . Ovvero in simboli: $I_{ij} V_{kl} = I_{kl} V_{ij}$

Metodo adattativo

In questo metodo l'iniezione di corrente avviene attraverso tutti gli elettrodi, ed in maniera contemporanea (dovendo sempre essere $\Sigma I = 0$). In particolare, con questo metodo, nel caso di mezzo omogeneo con sezione trasversa circolare, si riesce ad ottenere una distribuzione di corrente perfettamente uniforme iniettando in ciascun elettrodo la corrente: $I_n = I_M \cos(2\pi n/16)$ (Fig. 4). Ciascun elettrodo può fornire una corrente compresa tra -5mA e 5 mA e le misure di tensione vengono effettuate tra un elettrodo di riferimento e tutti i restanti elettrodi (N=15).

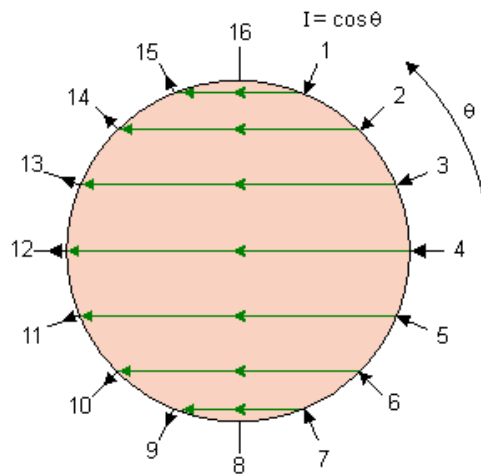


Figura 4

In un sistema a 16 elettrodi si riescono ad ottenere 240 (ovvero $15 \cdot 16$) misure di tensione di cui 120 indipendenti. Un inconveniente di questa tecnica è quello di dover utilizzare contemporaneamente 16 generatori di corrente. Inoltre si devono misurare delle tensioni tra elettrodi che iniettano corrente (metodo a due elettrodi) e quindi nella misura di tensione sarà compreso anche l'effetto dell'impedenza di contatto elettrodo pelle.

Metodi di raccolta dati nell'imaging 3D

Finora abbiamo parlato di imaging bidimensionale quindi abbiamo considerato tutte le grandezze elettriche vincolate su un piano, ovvero strutture ed elettrodi indefiniti lungo z . In realtà la corrente iniettata tra due elettrodi complanari si disperde anche verso l'alto e verso il basso (Fig. 5).

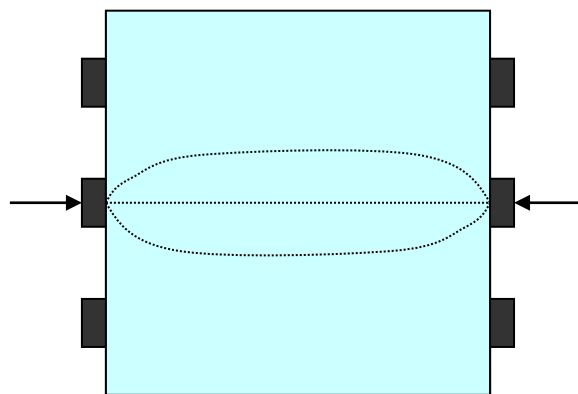


Figura 5

Disponendo ulteriori elettrodi al di sopra e al di sotto della sezione trasversale di interesse possiamo ottenere una stima della distribuzione di conducibilità su più sezioni.

Per l'imaging tridimensionale si utilizza un sistema di acquisizione che inietta corrente tra elettrodi di iniezione disposti sullo stesso strato paralleli e misura le tensioni tra elettrodi di misura dislocati lungo la periferia di diversi strati.

Problema diretto

Consideriamo un dominio bidimensionale “ Ω ” sul cui bordo “ S ” con normale uscente \underline{n} sono posti i 16 elettrodi di misura.

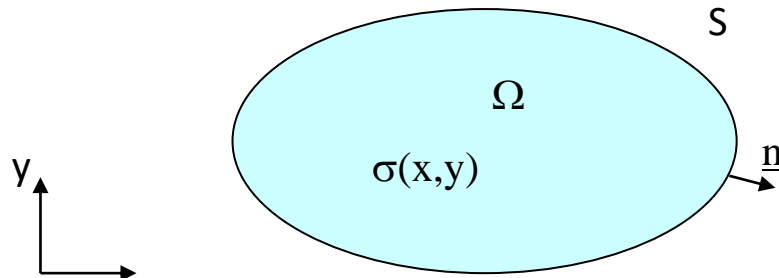


Figura 6

Le **equazioni di Maxwell** in condizioni quasi statiche ed in regioni prive di sorgenti diventano:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = 0 \rightarrow \underline{\mathbf{E}} = -\nabla \varphi$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} = \sigma \underline{\mathbf{E}}$$

dove si è ipotizzato che la regione sia priva di sorgenti impresse e sia un buon conduttore (trascurare le correnti di spostamento elettrico).

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\sigma \underline{\mathbf{E}}) = -\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0$$

$$\sigma \nabla^2 \varphi + \nabla \sigma \cdot \nabla \varphi = 0$$

(1)

Teorema di unicità: In regioni “ Ω ” in cui valgono le Eq. di Maxwell in condizioni quasi statiche con assegnati potenziali al contorno su “ S ” la distribuzione di potenziale è unica. Mentre, se sono assegnate le derivate normali del potenziale sul bordo, la soluzione è unica a meno di una costante additiva.

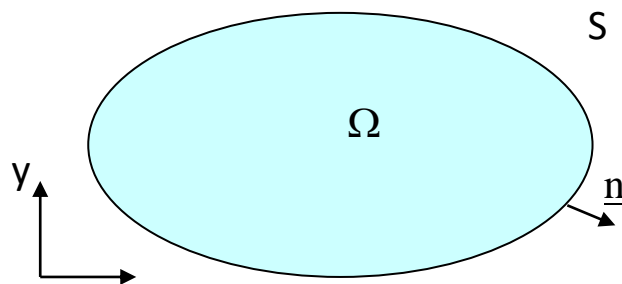


Figura 7

❖ **Problema di Dirichelet**

- $\sigma(x,y)$ noto su Ω
- $\varphi(x,y)$ noto su S
- E' unico $\varphi(x,y)$ su Ω

❖ **Problema di Neumann**

- $\sigma(x,y)$ nota su Ω
- $\nabla\varphi \cdot \underline{n}$ noto su S
- E' unico $\varphi(x,y)$ su Ω a meno di una costante additiva

Metodo delle ammettenze

Il metodo delle ammettenze segue fundamentalmente un approccio alle differenze finite (finite difference method) per discretizzare le equazioni di Maxwell in un dato mezzo in condizioni quasi statiche (presenza di correnti di conduzione). Vedremo che il mezzo stesso verrà decomposto in celle elementari di forma ben definita e si otterrà una rete di ammettenze, i cui valori sono legati alle proprietà dei tessuti presenti nella regione di studio, analizzabile con la legge di Kirchhoff ai nodi.

Il primo passo del metodo consiste nel suddividere il volume di interesse in celle omogenee a forma di parallelepipedo di lati Δx Δy Δz e centrati in (x,y,z) , come mostra la seguente figura:

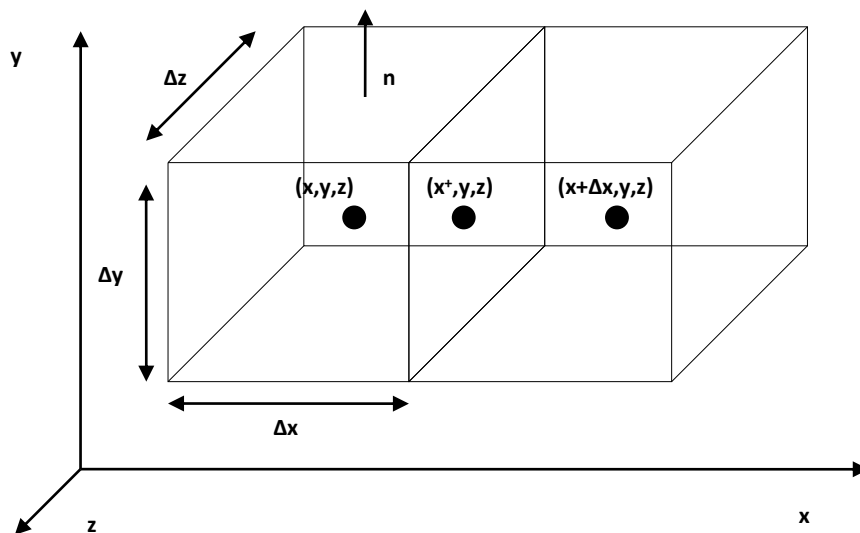


Figura 8

Per ciascuna cella le equazioni di Maxwell in condizioni statiche ed in presenza di sorgenti elettriche impresse (\underline{J}_{ie}) diventano:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}}_c + \underline{\mathbf{J}}_{ie} = \sigma \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_{ie} \quad (1)$$

Eseguendo la divergenza membro a membro dell'Eq. 1, integrando i due membri nel volume di una cella ed applicando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$-\int_{\tau} \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_{ie} d\tau = -\int_S \sigma \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{n}} dS + \int_S \underline{\mathbf{J}}_{ie} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (2)$$

In cui S è la superficie chiusa che racchiude la cella ed $\underline{\mathbf{n}}$ la normale verso l'esterno. L'integrale può essere spezzato nelle somme sulle sei facce ottenendo:

$$\int_{S_{x^-}} \sigma_{x^-} \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{x}}_0 dS - \int_{S_{x^+}} \sigma_{x^+} \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{x}}_0 dS + \int_{S_{y^-}} \sigma_{y^-} \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{y}}_0 dS + \dots + I_{ie} = 0$$

Il metodo delle ammettenze consiste nell'approssimare le derivate del potenziale nella equazione precedente con i corrispondenti rapporti incrementali valutati utilizzando le tensioni V al centro delle celle, così ottenendo:

$$\begin{aligned} & \sigma_{x^-} \frac{(V_{x,y,z} - V_{x-\Delta x,y,z})}{\Delta x} \Delta y \Delta z - \sigma_{x^+} \frac{(V_{x+\Delta x,y,z} - V_{x,y,z})}{\Delta x} \Delta y \Delta z + \\ & \sigma_{y^-} \frac{(V_{x,y,z} - V_{x,y-\Delta y,z})}{\Delta y} \Delta x \Delta z - \sigma_{y^+} \frac{(V_{x,y+\Delta y,z} - V_{x,y,z})}{\Delta y} \Delta x \Delta z + \\ & \sigma_{z^-} \frac{(V_{x,y,z} - V_{x,y,z-\Delta z})}{\Delta z} \Delta x \Delta y - \sigma_{z^+} \frac{(V_{x,y,z+\Delta z} - V_{x,y,z})}{\Delta z} \Delta x \Delta y + I_{ie} = 0 \end{aligned}$$

(3)

In cui I_{ie} rappresenta la corrente impressa al nodo (x,y,z) con segno positivo quando è uscente dalla cella. I pedici delle conducibilità stanno ad indicare in quale punto viene valutata la conducibilità: ad esempio considerando il primo termine dell'equazione, esso rappresenta uno dei sei contributi di flusso attraverso la cella (x,y,z) , in particolare quello attraverso la faccia parallela al piano coordinato YZ, passante per il punto $(x-\Delta x/2,y,z)$, la cui normale uscente $\underline{n}=-\underline{i}$.

Se si considera la resistività ρ_{x+} sulla faccia x^+ pari alla media tra le resistività delle celle in x e $x+\Delta x$ (*) possiamo introdurre un'ammettenza definita come:

$$Y_{x^+} = \sigma_{x^+} \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} = \frac{2c_x \cdot c_{x+\Delta x}}{c_x + c_{x+\Delta x}} \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x} \quad (4)$$

Dove " c_x " rappresenta la conducibilità campionata al centro della cella ed è un elemento della matrice 3D $\underline{\underline{C}}$ delle conducibilità campionate. In maniera analoga si ricavano le ammettenze per le altre facce. Con queste posizioni l'Eq. 3 diventa la legge di Kirchhoff alle correnti per la rete elettrica lineare costituita da tutte le ammettenze definite come in Eq. 4 e riportata per il caso 2D in Fig. 9. A partire da questa rete possiamo scrivere:

$$(*) \rho_{x^+} = \frac{r_x + r_{x+\Delta x}}{2} = \frac{\frac{1}{c_x} + \frac{1}{c_{x+\Delta x}}}{2} \longrightarrow \sigma_{x^+} = \frac{1}{\rho_{x^+}} = \frac{2c_x c_{x+\Delta x}}{c_x + c_{x+\Delta x}} \text{ dove } r_x \text{ e } c_x$$

rappresentano la resistività e la conducibilità valutate al centro della cella

$$\begin{aligned}
 & (V_{x,y,z} - V_{x-\Delta x,y,z})Y_{x^-} - (V_{x+\Delta x,y,z} - V_{x,y,z})Y_{x^+} + (V_{x,y,z} - V_{x,y-\Delta y,z})Y_{y^-} \\
 & - (V_{x,y+\Delta y,z} - V_{x,y,z})Y_{y^+} + (V_{x,y,z} - V_{x,y,z-\Delta z})Y_{z^-} - (V_{x,y,z+\Delta z} - V_{x,y,z})Y_{z^+} \\
 & + I_{ie} = 0
 \end{aligned}$$

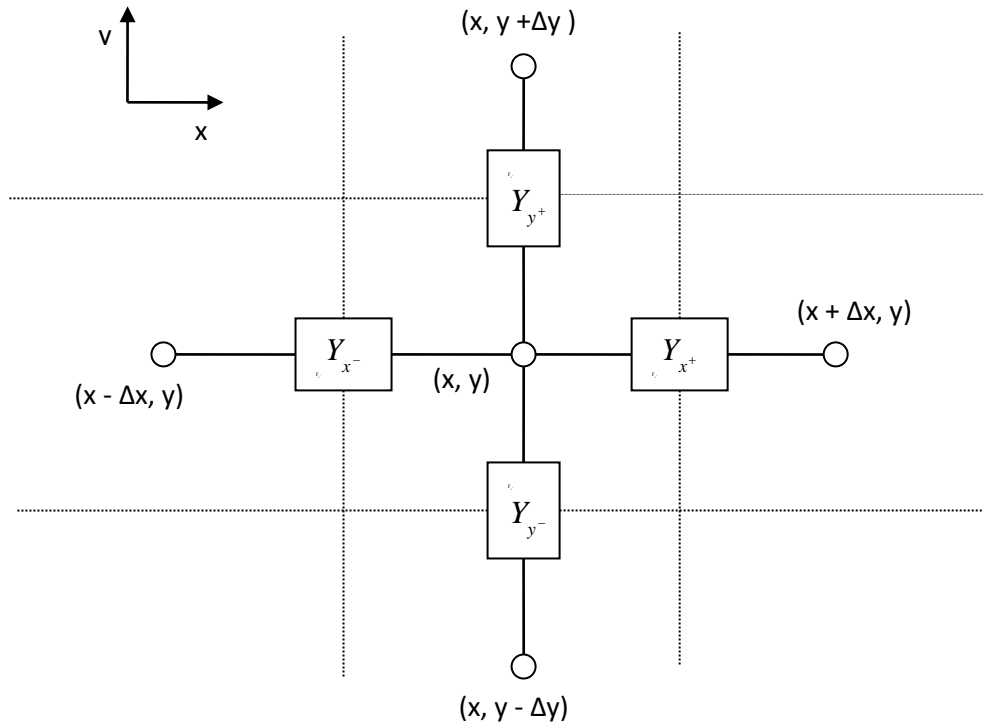


Figura 9

Ovvero un sistema del tipo:

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}} \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}_i}} \quad (5)$$

Il sistema di N equazioni in N incognite che si ottiene può essere risolto utilizzando una tecnica iterativa con sovra rilassamento successivo. In questo caso si pone:

$$\begin{aligned}
 V_{x,y,z} = & \frac{1}{Y_{x^-} + Y_{x^+} + Y_{y^-} + Y_{y^+} + Y_{z^-} + Y_{z^+}} \cdot [Y_{x^+} V_{x+\Delta x,y,z} + Y_{x^-} V_{x-\Delta x,y,z} \\
 & + Y_{y^+} V_{x,y+\Delta y,z} + Y_{y^-} V_{x,y-\Delta y,z} + Y_{z^+} V_{x,y,z+\Delta z} + Y_{z^-} V_{x,y,z-\Delta z} - I_{ie}]
 \end{aligned} \quad (6)$$

Nella tecnica iterativa ad ogni passo si aggiorna “iterativamente” il potenziale di una cella in funzione di quello delle celle adiacenti in base all’Eq.: $V^{n+1} = V_{x,y,z}$, dove $V_{x,y,z}$ è valutato tramite l’Eq. 6. Nella tecnica iterativa con sovra rilassamento si calcola la stima del potenziale al passo $n+1$ prelevando la stima al passo precedente n più un termine di correzione, ovvero:

$$V_{x,y,z}^{n+1} = V_{x,y,z}^n + \alpha[V_{x,y,z} - V_{x,y,z}^n] \quad (7)$$

In cui $V_{x,y,z}^{n+1}$ e $V_{x,y,z}^n$ sono i potenziali al nodo x,y,z valutati rispettivamente al passo $n+1$ ed al passo n . $V_{x,y,z}$ è data dall’Eq. 6 ed α è la costante di rilassamento il cui valore è $1 < \alpha < 2$. La procedura termina quando è soddisfatta una condizione del tipo:

$$\left| V_{x,y,z}^{n+1} - V_{x,y,z}^n \right| < 10^{-K} \quad \text{per ogni } x,y,z \quad (8)$$

Che rende la differenza tra il valore calcolato all’istante $n+1$ e quello all’istante n piccola a piacere (al crescere di K).

Un altro modo per risolvere il sistema (5) consiste nell’invertire la matrice Y . Tuttavia si deve preliminarmente osservare che le N equazioni ottenute non sono tutte indipendenti. Infatti essendo il potenziale definito a meno di una costante una delle equazioni è ottenibile come combinazione lineare delle altre. Questo problema può essere risolto ponendo pari a zero il potenziale di una cella (ad esempio quello dell’elettrodo da cui si preleva la corrente) e cancellando dalla matrice Y la riga e la colonna corrispondente. In questo modo si ottiene ancora un sistema tipo (5) in cui la matrice delle ammettenze Y' ha

$(N-1 \times N-1)$ elementi (ogni riga di questa matrice ha solo 5 elementi diversi da zero) ed i vettori V' ed I' hanno $(N-1 \times 1)$ elementi. A questo punto la matrice Y' è invertibile (quadrata e di rango massimo) e la distribuzione di potenziale può essere ottenuta come:

$$\underline{V'} = \underline{Y'}^{-1} \underline{I'} \quad (9)$$

Si noti infine che il metodo delle ammettenze risolve un problema tipo Neumann. Infatti, assegnata la corrente sul bordo del dominio, consente di valutare la distribuzione di potenziale al suo interno e sui bordi del dominio stesso.

PROBLEMA INVERSO: ALGORITMI DI RICOSTRUZIONE

Di seguito verranno presentate alcune tecniche di inversione ovvero di ricostruzione come l'algoritmo di Newton Rapson e l'algoritmo di sensibilità. Sia l'algoritmo di Newton Rapson che quello di sensibilità verranno presentati con riferimento al metodo di acquisizione dei vicini, inoltre entrambi richiedono, al primo passo, la soluzione del problema diretto (risolto ad esempio con il metodo delle ammettenze) su un mezzo omogeneo di riferimento avente la stessa geometria del mezzo di cui si vuole ricostruire la conducibilità.

Metodo di Newton Raphson

L' algoritmo di Newton-Raphson è un metodo di ricostruzione iterativo, sviluppato specificatamente per problemi non lineari. È uno degli approcci maggiormente seguiti nel problema della ricostruzione EIT ed è stato proposto per la prima volta da Yorkey (1986).

Nel metodo di N&R si definisce un ERRORE come la differenza tra le (M) tensioni simulate risolvendo il problema diretto per una distribuzione di conducibilità \underline{c} fissata e nota a priori (vettore $\underline{g}^{calc}(\underline{c})(M \times 1)$) e quelle misurate tra tutte le coppie di elettrodi (vettore $\underline{g}^{mis}(M \times 1)$)

$$\underline{e}(\underline{c}) = \underline{g}^{calc}(\underline{c}) - \underline{g}^{mis} \quad (25)$$

In seguito si definisce un FUNZIONALE DELL'ERRORE detto anche funzione obiettivo, o costo ($\Phi(\underline{e})$) come l'errore quadratico medio non pesato (Norma L2)^(*).

$$\Phi(\underline{e}) = \Phi(\underline{c}) = \frac{1}{2} \left\| \underline{g}^{calc}(\underline{c}) - \underline{g}^{mis} \right\|^2 = \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underline{g}^{calc}(\underline{c}) - \underline{g}^{mis} \right)^T \left(\underline{g}^{calc}(\underline{c}) - \underline{g}^{mis} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(g_i^{calc}(\underline{c}) - g_i^{mis} \right)^2$$

Obiettivo del metodo è quello di minimizzare il funzionale (26) cioè avere dei dati simulati il più possibile simili a quelli misurati.

Ovvero trovare la distribuzione di conducibilità tale che:

^(*) I vettori sono tipicamente definiti come vettori colonna. Il trasposto di un vettore è quindi un vettore riga. Il prodotto di un vettore trasposto per un vettore è un numero.

$$\underline{c} = \min(\Phi(\underline{c}))$$

Per minimizzare il funzionale (26), si pone la sua derivata uguale a zero:

$$\frac{d\Phi(\underline{c})}{d\underline{c}} = \Phi'(\underline{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial g_i^{\text{calc}}(\underline{c})}{\partial \underline{c}} 2 \left(g_i^{\text{calc}}(\underline{c}) - g_i^{\text{mis}} \right) =$$

(27)

$$\left[\frac{\partial \underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c})}{\partial \underline{c}} \right]^T \left[\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}) - \underline{g}^{\text{mis}} \right] = 0$$

in cui $\frac{\partial \underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c})}{\partial \underline{c}} = \underline{J}(\underline{c})$ è il Jacobiano (Matrice $M \times N$ con M numero di misure e N numero di pixel)^(**). Ogni elemento della matrice Jacobiana ci dice in pratica come varia la differenza di potenziale tra due elettrodi al variare della conducibilità di un pixel del dominio investigato. La funzione $\Phi'(\underline{c})$ è quindi un vettore: $(N \times M) (M \times 1) = (N \times 1)$.

Poiché la (27) è ancora naturalmente una funzione non lineare della distribuzione di conducibilità, espandendola in serie di Taylor intorno ad un punto \underline{c}^k e mantenendo solo i termini lineari si ha:

$$\Phi'(\underline{c}) \cong \Phi'(\underline{c}^k) + \underline{J}(\underline{c}^k) \Delta \underline{c}^k = 0 \quad (28)$$

$$(**) \quad \frac{\partial \underline{g}(\underline{c})}{\partial \underline{c}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial c_1} & \frac{\partial g_1}{\partial c_2} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial c_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial c_1} & & \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial c_1} & & & \dots & \frac{\partial g_M}{\partial c_N} \end{pmatrix}$$

dove $\Delta \underline{c}^k = \underline{c}^{k+1} - \underline{c}^k$. La matrice $\underline{\underline{\Phi}}''(\underline{c})$ ha la seguente forma:

$$\underline{\underline{\Phi}}''(\underline{c}) = [\underline{J}(\underline{c})]^T [\underline{J}(\underline{c})] + [\underline{J}'(\underline{c})]^T [\underline{I} \otimes (\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}) - \underline{g}^{\text{mis}})] \quad (29)$$

dove \otimes è il prodotto matriciale di Kronecker. Il termine $\underline{J}'(\underline{c})$ è difficile da calcolare esplicitamente, ma spesso ha valore trascurabile rispetto a $[\underline{J}(\underline{c})]^T [\underline{J}(\underline{c})]$, e di conseguenza possiamo approssimare la matrice $\underline{\underline{\Phi}}''(\underline{c})$ come:

$$\underline{\underline{\Phi}}''(\underline{c}) \cong [\underline{J}(\underline{c})]^T [\underline{J}(\underline{c})] \quad (30)$$

Questa approssimazione è accurata per piccoli spostamenti da \underline{c} .

Combinando: $\underline{\underline{\Phi}}'(\underline{c}) \cong \underline{\underline{\Phi}}'(\underline{c}^k) + \underline{\underline{\Phi}}''(\underline{c}^k) \Delta \underline{c}^k = 0$

Con: $\underline{\underline{\Phi}}'(\underline{c}) = [\underline{J}(\underline{c})]^T [\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}) - \underline{g}^{\text{mis}}] = 0$

otteniamo:

$$[\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}^k) - \underline{g}^{\text{mis}}] + \{[\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{J}(\underline{c}^k)]\} \Delta \underline{c}^k = 0$$

e risolvendo per $\Delta \underline{c}^k$ si ha:

$$\{[\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{J}(\underline{c}^k)]\} \Delta \underline{c}^k = -[\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}^k) - \underline{g}^{\text{mis}}]$$

$$\Delta \underline{c}^k = - \left\{ [\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{J}(\underline{c}^k)] \right\}^{-1} [\underline{J}(\underline{c}^k)]^T [\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}^k) - \underline{g}^{\text{mis}}]$$

Ovvero, posto $\underline{J}_k = \underline{J}(\underline{c}^k)$ si ha:

$$\Delta \underline{c}^k = - \left[\underline{J}_k^T \cdot \underline{J}_k \right]^{-1} \cdot \underline{J}_k^T \cdot \left[\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}^k) - \underline{g}^{\text{mis}} \right] \quad (31)$$

L'equazione (31) definisce una procedura iterativa per calcolare \underline{c} . Ad ogni passo k , una volta nota la stima \underline{c}^k , si risolve la (31) e si aggiorna la stima di \underline{c} come:

$$\underline{c}^{k+1} = \underline{c}^k + \Delta \underline{c}^k \quad (32)$$

Quindi l'algoritmo di N&R prevede una serie di passi:

- 1: Inizialmente viene fissata una distribuzione di conducibilità (\underline{c}^0)
- 2: Per un sistema con E elettrodi si calcolano le $M = (E-3) \times E$ tensioni teoriche sugli elettrodi per la fissata scelta di conducibilità e le date configurazioni di pilotaggio in corrente utilizzando una tecnica numerica. In questo modo si ottiene il vettore $\underline{g}^{\text{calc}}(\underline{c}^0)$.
- 3: Si sottraggono le tensioni così calcolate dal set di quelle misurate ($\underline{g}^{\text{mis}}$) sulla distribuzione vera, e dopo aver calcolato il Jacobiano $\underline{J}(\underline{c}^0)$, tramite le (31) e (32) si valuta \underline{c}^1 e quindi il funzionale $\Phi(\underline{c}^1)$
- 4: Se il funzionale è minore di una quantità predefinita ε , assumeremo come conducibilità vera quella stimata a quel passo,
- 5: altrimenti si ripete la procedura a partire \underline{c}^1 da finché non venga raggiunto il criterio di convergenza.

Osserviamo infine che, nella (31), è necessaria un'operazione di valutazione ed inversione della matrice $\underline{J}_k^T \cdot \underline{J}_k$. Questa è tipicamente una matrice quadrata mal condizionata e la sua inversione risulta molto inaccurata e sensibile agli errori di misura. Comunque questa matrice

può essere efficacemente invertita utilizzando la SVD. Un altro possibile approccio per aggiornare la distribuzione di conducibilità consiste nell'utilizzare delle tecniche di regolarizzazione di cui è dato un breve cenno nel seguito.

Autovalori e Autovettori

Data la matrice $\underline{\underline{A}}(N \times N)$ se risulta $\det(\underline{\underline{A}}) = 0$ la matrice si dice SINGOLARE (non ha rango massimo).

Ogni numero λ che sottratto a ciascun elemento della diagonale di una matrice $\underline{\underline{A}}$ (non singolare) la rende singolare è detto AUTOVALORE della matrice e risulta:

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

Ogni vettore tale che: $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})\underline{\underline{v}} = 0$ è detto AUTOVETTORE della matrice e per questi vettori risulta:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} = \lambda \underline{\underline{v}} \quad (19)$$

Ogni matrice A avrà in generale N autovalori ed N autovettori (se il polinomio caratteristico è totalmente riducibile $m_1 + m_2 + m_r = n$). Definiamo la matrice $\underline{\underline{V}} = (\underline{\underline{v}}_1, \underline{\underline{v}}_2, \dots, \underline{\underline{v}}_N)$ formata incolonnando gli N autovettori indipendenti di A . Generalizzando la relazione precedente si ottiene:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\Lambda}}$$

Dove $\underline{\underline{\Lambda}}$ è una matrice diagonale che contiene tutti gli autovalori. E quindi si ha:

$$\underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Lambda}} \quad \text{ovvero} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{V}}^{-1} \quad (20)$$

Quindi la matrice degli autovettori moltiplicata a destra e sinistra (inversa) di $\underline{\underline{A}}$ la diagonalizza (teorema spettrale).

Valori Singolari

Data una matrice $\underline{\underline{A}}(M \times N)$, un numero σ si dice VALORE SINGOLARE della matrice se esistono due vettori non nulli $\underline{\underline{u}}(M \times 1)$ e $\underline{\underline{v}}(N \times 1)$ tali che:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{v}} = \sigma \underline{\underline{u}}$$

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{u}} = \sigma \underline{\underline{v}} \quad (21)$$

$\underline{\underline{u}}$ e $\underline{\underline{v}}$ si chiamano VETTORE SINGOLARE SINISTRO e VETTORE SINGOLARE DESTRO della matrice associati al valore singolare.

(I vettori singolari sinistri di $\underline{\underline{A}}$ sono gli autovettori di $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^T$ mentre i vettori singolari destri di $\underline{\underline{A}}$ sono gli autovettori di $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$. I valori singolari non nulli di $\underline{\underline{A}}$ sono le radici quadrate degli autovalori non nulli di $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^T$ e $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}$).

Se indichiamo con $\underline{\underline{U}}(M \times M)$ la matrice formata da tutti i vettori singolari sinistri di $\underline{\underline{A}}$ e con $\underline{\underline{V}}(N \times N)$ la matrice formata da tutti i vettori singolari destri di $\underline{\underline{A}}$ (*) e con $\underline{\underline{\Sigma}}$ una matrice rettangolare sulla cui

(*) si noti che entrambe queste matrici sono unitarie cioè: $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}^{T*} = \underline{\underline{I}}$ e $\underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{V}}^{T*} = \underline{\underline{I}}$.

diagonale ^(**) sono dislocati i valori singolari di A ordinati da quello in modulo maggiore a quello in modulo minore ovvero distinguendo i casi in cui $M > N$ e $M < N$ sarà del tipo:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, M > N; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, M < N$$

Allora si può scrivere:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{U}} \Sigma \quad \text{e} \quad \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \Sigma \quad (22)$$

Da cui segue:

$$\underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{ovvero} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{V}}^T \quad (23)$$

Detta decomposizione nei valori singolari (SVD) della matrice A

La SVD è una trasformazione generale che si applica a qualsiasi matrice rettangolare mentre la decomposizione in autovalori può essere applicata solo a certe matrici quadrate. Si può dimostrare che se la matrice A è Hermitiana (quadrata e $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{T*}$) e semidefinita positiva (tutti i suoi autovalori sono reali e non negativi) allora i valori singolari e i vettori singolari coincidono con gli autovalori e autovettori di A.

^(**) per una matrice rettangolare ($M \times N$) si definisce ancora una diagonale come gli elementi di $\underline{\underline{\Sigma}}$ di tipo σ_{ii} con: $1 < i < \min(m, n)$

Inversa di una matrice

Matrici Quadrate a Rango massimo

Data una matrice $\underline{\underline{A}}$ quadrata di ordine N a rango massimo ^(*) la sua inversa (che esiste ed è unica) si calcola come:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} \underline{\underline{A}}^a$$

Inoltre risulta:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$$

Matrici Quadrate o Matrici Rettangolari a Rango NON massimo ^(*)

^(*)determinante non nullo, non singolare, ovvero righe e colonne linearmente indipendenti.

^(*) Se la matrice è Rettangolare a Rango massimo $\underline{\underline{A}}(M \times N)$ a questa matrice non è associato un “determinante” né una matrice inversa nel senso classico. Tuttavia se una matrice rettangolare è a Rango Massimo ovvero: $r(\underline{\underline{A}}) = \min(M, N)$ è possibile associarle una “sorta” di matrice inversa (detta pseudo inversa) tale che moltiplicata a destra e a sinistra per $\underline{\underline{A}}$ fornisca la matrice identità di ordine M oppure N . In particolare, a seconda delle dimensioni di $\underline{\underline{A}}$ possiamo definire due casi.

Caso $M > N$. In questo caso si associa ad $\underline{\underline{A}}$ la cosiddetta pseudo inversa sinistra definita come:

$$\underline{\underline{A}}_S^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \right)^{-1} \underline{\underline{A}}^T$$

$$(N \times M) = (N \times M)(M \times N) (N \times M)$$

Tale che:

$$\underline{\underline{A}}_S^{-1} \underline{\underline{A}} = \left(\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \right)^{-1} \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}_N$$

In questo caso risulta:

$$r(\underline{\underline{A}}) < \min (M, N)$$

Per questo tipo di matrici è ancora possibile definire una matrice “inversa” detta inversa generalizzata o pseudo inversa di Moore-Penrose.

La matrice inversa Generalizzata deve soddisfare le seguenti quattro proprietà:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}_G^{-1} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}}_G^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}_G^{-1} = \underline{\underline{A}}_G^{-1}$$

$$\underline{\underline{A}}_G^{-1} \underline{\underline{A}} \text{ è Hermitiana ovvero: } \left(\underline{\underline{A}}_G^{-1} \underline{\underline{A}} \right)^T = \underline{\underline{A}}_G^{-1} \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}_G^{-1} \text{ è Hermitiana}$$

Inoltre si può dimostrare che la matrice che soddisfa queste proprietà è unica.

Caso $M < N$. In questo caso si associa ad $\underline{\underline{A}}$ la cosiddetta pseudo inversa destra definita come:

$$\underline{\underline{A}}_D^{-1} = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-1}$$

Tale che:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}_D^{-1} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}}^T)^{-1} = \underline{\underline{I}}_M$$

Per calcolare la matrice inversa generalizzata si può utilizzare la decomposizione ai valori singolari della matrice $\underline{\underline{A}}$ ($\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{V}}^T$) vista in precedenza, per cui si ha^(*):

$$\underline{\underline{A}}_G^{-1} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{\underline{U}}^T \quad (24)$$

Dove $\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}$ rappresenta la trasposta di $\underline{\underline{\Sigma}}$ ed in essa compaiono gli inversi dei valori singolari non nulli di $\underline{\underline{\Sigma}}$. Nella EIT usualmente si utilizza la SVD troncata (TSVD) cioè si considerano solo i valori singolari più grandi (oltre una certa stabilita tolleranza) ponendo a zero quelli più piccoli (con i relativi vettori singolari). Si può vedere che in effetti i piccoli valori singolari introducono un “rumore” nella soluzione.

Tecniche di Regularizzazione

Premettiamo la seguente definizione. Un problema è ben posto (secondo Hadamard) se: la soluzione esiste ed è unica ed inoltre la soluzione dipende con continuità dai dati. Se è mal posto è necessario reformularlo prima di trattarlo numericamente. Tipicamente è necessario fare delle assunzioni aggiuntive, come la limitatezza della norma della soluzione. Questo processo è noto come regularizzazione.

^(*) si noti che si ha: $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^{-1}$ e $\underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{I}}$ e quindi

$$(\underline{\underline{U}} \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{V}}^T)^{-1} = \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{\underline{U}}^T$$

Data la matrice $A(M \times M)$ si consideri il problema della soluzione

sistema lineare di equazioni: $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ la cui soluzione è: $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$

Se $\underline{\underline{A}}$ è difficile da invertire si parla di problema mal posto.

Si dice che un problema è mal posto se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1. I valori singolari di A decadono gradualmente a zero senza nessun particolare salto nello spettro;
2. Il rapporto tra il più grande e il più piccolo valore singolare non nullo è grande (matrice A mal condizionata e soluzioni sensibili alle perturbazioni anche numeriche)

Un aspetto interessante dei problemi mal posti è che il cattivo condizionamento del problema non esclude la possibilità di calcolare una soluzione approssimata significativa. Tuttavia, il cattivo condizionamento implica che i metodi standard dell'algebra lineare numerica, come LU, Cholesky, o fattorizzazione QR non possono essere usati direttamente per il calcolo di (33) e che bisogna ricorrere a tecniche di regolarizzazione.

Ad esempio dato il sistema di equazioni lineari $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$, Questo problema può essere ricondotto al problema ai minimi quadrati:

$$\underline{x} = \min \left\| \underline{\underline{A}}\underline{x} - \underline{b} \right\|^2 \quad (33)$$

Dove $(\underline{\underline{A}}\underline{x} - \underline{b})$ è detto **residuo**.

Tipicamente si impone che una norma quadrata della soluzione sia piccola. Il **vincolo** è:

$$\underline{\underline{x}} = \min \left\| \underline{\underline{L}} \underline{\underline{x}} \right\|^2 \quad (34)$$

Dove la matrice L può essere: la matrice identità; un'approssimazione discreta dell'operatore gradiente o Laplaciano.

Nel primo caso si penalizzano le soluzioni con norma elevata mentre negli altri due casi si penalizzano le soluzioni con forti variazioni.

La più nota forma di regolarizzazione è la regolarizzazione di Tikhonov. Si definisce la soluzione regolarizzata come quella che minimizza la seguente combinazione pesata della norma del residuo e del vincolo:

$$\underline{\underline{x}} = \min \left\| \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{b}} \right\|^2 + \lambda \left\| \underline{\underline{L}} \underline{\underline{x}} \right\|^2 \quad (35)$$

Dove il parametro di regolarizzazione λ controlla il peso dato alla minimizzazione del vincolo rispetto alla minimizzazione della norma del residuo: Un grande λ (una grande quantità di regolarizzazione) favorisce una soluzione con una piccola norma del vincolo al costo di una grande norma del residuo; un piccolo λ (cioè una piccola quantità di regolarizzazione) ha l'effetto opposto.

Introdotta il vincolo, occorre abbandonare la richiesta di una soluzione esatta in (33), per cercare una soluzione che non sia troppo lontana da quella desiderata (la soluzione sconosciuta del problema imperturbato) e che fornisca un compromesso tra la minimizzazione della norma della soluzione (34) e la minimizzazione della norma del residuo (33).

Ricondotta all'algoritmo di Newton e Rapson la (35) diventa:

$$\underline{\underline{c}} = \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \underline{\underline{g}}^{\text{calc}}(\underline{\underline{c}}) - \underline{\underline{g}}^{\text{mis}} \right\|^2 + \lambda \left\| \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{c}} \right\|^2 \right\}$$

E quindi la (31) diventa:

$$\Delta \underline{\underline{c}}^k = - \left[\underline{\underline{J}}_k^T \cdot \underline{\underline{J}}_k + \lambda \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{J}}_k^T \cdot \left[\left(\underline{\underline{g}}^{\text{calc}}(\underline{\underline{c}}^k) - \underline{\underline{g}}^{\text{mis}} \right) - \lambda \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{c}}^k \right]$$

In questo caso la matrice da invertire è : $\left[\underline{\underline{J}}_k^T \cdot \underline{\underline{J}}_k + \lambda \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{L}} \right]$. Questa è una matrice quadrata a rango pieno e può essere invertita con le usuali tecniche di inversione delle matrici non singolari. Si noti che la matrice Jacobiana può essere valutata con varie tecniche^(*). In particolare si può dimostrare^(*) che la matrice di sensibilità sotto definita risulta essere una buona approssimazione della matrice Jacobiana.

^(*)D. Romano, S. Pisa, E. Piuze, "Implementation of the Newton-Raphson and Admittance Methods for EIT", International Journal of Bioelectromagnetism, Vol. 12, No. 1, 2010.